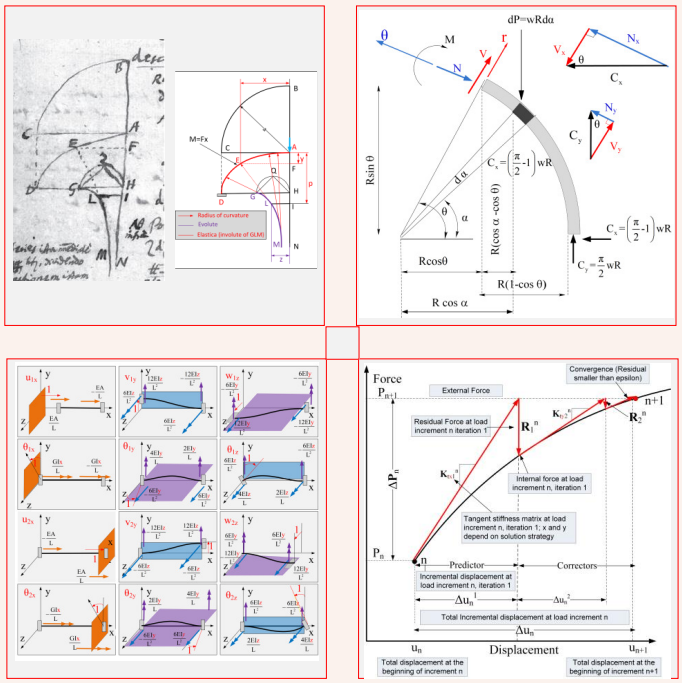
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

من تاريخ الميكانيكا
إلى الأساليب الحاسوبية الحديثة

فيكتور إي. ساوما و

أستاذ فخري، جامعة كولورادو بولدر



الإصدار 1.0
أغسطس 2026

موقع المشروع: https://structuralanalysisbook.org/

هذا العمل مرخص بموجب CC BY-NC-SA 4.0.

1 *Verba volant, scripta manent*

[1] "تتبدد محاضراتي، أما هذا الكتاب فسيبقى". 🙂

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إشعار قانوني

يخضع هذا الكتاب لرخصة CC BY-NC-SA، أي رخصة النسب–غير التجاري–الترخيص بالمثل. وبعبارة مبسطة، تتيح هذه الرخصة مشاركة المحتوى وتكييفه بحرية مع الالتزام بعدد من الشروط.

يمكنك القيام بما يأتي:

المشاركة: نسخ المادة وإعادة توزيعها بأي وسيط أو صيغة، سواء للأصدقاء أو الزملاء أو عبر منصات قد ينتفع بها الآخرون.

التكييف: مزج المحتوى أو تحويله أو البناء عليه، بشرط أن يكون الاستخدام غير تجاري.

نسب العمل: عند المشاركة أو التكييف، يرجى ذكر المؤلف بوضوح وإضافة رابط إلى العمل الأصلي حتى يعرف الآخرون مصدر المادة.

وتنطبق القيود المهمة الآتية:

غير تجاري: لا يجوز استخدام المادة لأغراض تجارية؛ فلا تباع ولا تستخدم في منتجات مدفوعة ولا تستثمر مالياً بأي صورة أخرى.

الترخيص بالمثل: إذا أنشأت عملاً مشتقاً من هذه المادة، فيجب ترخيصه بالشروط نفسها لرخصة CC BY-NC-SA، بما يحافظ على انفتاح المحتوى ويتيح للآخرين الانتفاع بنسختك كما انتفعت أنت بهذه النسخة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إهداء

إلى ذكرى جدي فيكتور، وزوجتي ريا



وإلى أبنائي ريتشارد وكارولين وصوفي

Victor E. Saouma
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تقديم

XXX, YYY
Busytown, USA

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تمهيد[2]

محتويات هذا التمهيد

I. النشأة والغاية
في العنوان
البدايات
نطاق التغطية
مذكرات المحاضرات
كتاب آخر أيضاً؟

II. الفلسفة الإنشائية
لماذا الكل في مجلد واحد؟
الميكانيكا

III. القراء وطريقة الاستخدام
القراء
التنقل

IV. المؤثرات الشخصية
المؤثرات الأجنبية
التدريس في جامعة كولورادو

V. الأسلوب والعرض
الأسلوب
الترميز
التكرار
الألوان
فن الطباعة
خط العنوان

VI. التصور والإنتاج
LaTeX
شفرات ماتلاب
ملفات ماثكاد
الذكاء الاصطناعي
الأشكال

VII. المصادر ونسبها
المراجع
الصور
الكتب المستشار إليها

VIII. الإتاحة والإحصاءات
لماذا هو مجاني؟
الموقع الإلكتروني
بعض الإحصاءات

I. النشأة والغاية

في العنوان اختير عنوان هذا العمل بحيث يذكر عمداً بكتاب بالاديو *الكتب الأربعة في العمارة*.

يعكس التقسيم الرباعي هنا تدرجاً تعليمياً يبدأ بالأسس التاريخية للتحليل الإنشائي، ويمر بالصياغات التمهيدية والمتوسطة، وينتهي بالطرائق المتقدمة. وتقوم الموازاة على قناعة مفادها أن الموضوعات المعقدة أيضاً تنتفع من عرض متدرج ومحكم التنظيم.

البدايات حين اقتربت مسيرتي الأكاديمية من نهايتها، شعرت، وربما بشيء من الاعتزاز، بأن الوقت قد حان لمشاركة المعرفة التي جمعتها خلال ما يقارب أربعة عقود من تدريس التحليل الإنشائي. وهذا العمل الكبير هو ثمرة ذلك الشعور.

[2] من اليونانية prolegomena، أي "ما يقال مسبقاً": مادة استهلالية يبين فيها المؤلف نطاق العمل ومنهجه وغاياته قبل بدء المتن. وقد رسخ كانط الاستعمال العلمي الحديث للمصطلح في كتابه الصادر عام 1783.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعود جذوره إلى مسارين متوازيين. أولهما مذكرات محاضرات تراكمت ونقحت باستمرار خلال العقود الأربعة نفسها، وحدثت لتواكب تطور المجال واحتياجات الطلاب المتغيرة. أما الثاني فهو مجموعة أكثر هدوءاً نمت إلى جانب التدريس: أبحاث ودراسات وطرائف تاريخية وتفاصيل فنية قلما وجدت طريقها إلى قاعة الدرس، إما لأن الجمهور لم يكن مستعداً لها بعد، أو لأن عمقها يتجاوز ما يتسع له مقرر واحد.

جمعت مسودة كاملة أولى من هذين المسارين قبل ظهور الذكاء الاصطناعي أداة عملية للكتابة. وما تلا ذلك لم يكن تفويضاً للحكم التأليفي، بل إتاحة لمصدر ثالث يكاد يكون بلا حدود. فمن خلال حوارات واعتراضات ورفض وإعادة صياغة متكررة، وفر الذكاء الاصطناعي مادة غزيرة لا تضاهيها زيارة واحدة إلى مكتبة أو عملية بحث منفردة. ومع ذلك بقيت القرارات كلها قراراتي.

نظرت إلى دوري طوال العمل بوصفه دور *أمين* معرض: يتلقى مواد من مسارات مختلفة، ثم يقرر ما يستحق مكاناً في المجموعة وما ينبغي استبعاده، وفي أي قاعة توضع كل قطعة، وكيف تضاء، وبأي ترتيب يراها الزائر. كان هذا العمل التنظيمي مباشراً نسبياً في قسم التحليل الإنشائي، لأن المادة الفنية تتبع منطقاً تعليمياً راسخاً، وتسلسل الفصول يفرض نفسه إلى حد بعيد.

أما القسم التاريخي فطرح تحدياً مختلفاً تماماً. كيف يمكن تتبع تطور التحليل الإنشائي في تسلسل خطي من الفصول، من أقدم اكتشافات الأعداد والأبجديات، مروراً بالقفزات الفكرية الكبرى في العصور القديمة والنهضة، وصولاً إلى طريقة العناصر المحددة، مع إنصاف موضوعات هي بطبيعتها موضوعية لا زمنية؟ تتبع بعض الفصول خط الزمن، بينما تتقاطع أخرى معه لتجمع أفكاراً وشخصيات وتطورات يربط بينها الموضوع لا القرن. وكان تقرير متى نتبع التسلسل الزمني ومتى نغادره أصعب أحكام التنظيم كلها.

📖 **نطاق التغطية** ينقسم الكتاب، بوجه عام، إلى أربعة أجزاء:

الكتاب الأول يقدم استكشافاً معمقاً لتاريخ التحليل الإنشائي من دون ادعاء الإحاطة التامة. بدأت باختيار أحداث وشخصيات محورية من غير قيود صارمة، لكن بلوغ عصر غاليليو فرض منهجاً أكثر تنظيماً وانضباطاً. وظل ترتيب هذا الكتاب صعباً: فالتغطية زمنية جزئياً وموضوعية جزئياً، وأحياناً تجمع الأمرين. لذلك يوجد تداخل ملحوظ بين الأقسام، إلا أن المادة تفحص في كل موضع من زاوية مختلفة. وقد استخدمت الروابط بكثرة لربط المناقشات المتصلة بين الفصول.

الكتاب الثاني يغطي ما يتوقع عادة في مقرر أول للتحليل الإنشائي بعد الاستاتيكا وميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه، لكن نطاقه يتجاوز المستوى التمهيدي بوضوح، ومن هنا العنوان الفرعي *الأساسيات؛ تحليلي*. وتعالج فيه موضوعات كثيراً ما تقصر الكتب القياسية في عرضها، مثل الكابلات والأقواس والمنشآت ثلاثية الأبعاد، كما أدرجت موضوعات متقدمة كالبلاطات والقشريات، وهي نادرة في هذه المرحلة لكنها ضرورية لفهم مكتمل. وينتهي الكتاب بفصل عن الطرائق التقريبية والتصميم الأولي. فالتحليل الإنشائي لا ينبغي أن يعيش في عزلة؛ وعلى الطلاب أن يطوروا حساً تصميمياً إلى جانب مهاراتهم التحليلية، وأن يفهموا كيف يوجه التحليل القرارات اللاحقة ويتيحها.

الكتاب الثالث يتناول ما يسمى غالباً "التحليل الإنشائي بالمصفوفات"، لكنه في جوهره دراسة لطريقة العناصر المحددة. يغطي الجزء الأول طريقة الصلابة المباشرة بالتفصيل، بما في ذلك تنفيذها حاسوبياً للمنشآت الإطارية. ثم يقدم معالجة واسعة للطرائق التغايرية، وحساب التغايرات، ومبدأ الشغل

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الافتراضي، ونظريات الطاقة، وهي الأساس النظري الذي يمهد لإدخال العناصر المحددة للأوساط المستمرة.

ومن الأخطاء الشائعة الاعتقاد بأن طرائق المصفوفات للإطارات "أسهل" من العناصر المحددة للأوساط المستمرة. وكثيراً ما يكون العكس صحيحاً؛ فالعناصر المستمرة تتعامل مع موترات الإجهاد والانفعال، وهي كميات أنيقة ومحددة جيداً. أما عناصر الإطار في صورتها العامة فتضم عند كل عقدة ثلاث مجموعات من القوى وثلاثاً من العزوم، مع إزاحاتها ودوراناتها المقابلة. والتفاعلات بينها دقيقة، ولا يقدر الطلاب دائماً تعقيدها حق قدره.

الكتاب الرابع يستند إلى مقرر جديد أنشأته بنفسي، واستفاد من رسائل متميزة لبعض طلابي، وليس له نظائر كثيرة في البرامج الأكاديمية. يتركز أساساً على التحليل اللاخطي للمنشآت الإطارية، ويغطي أيضاً اللدونة والاستقرار والديناميكا، وبوجه خاص هندسة الزلازل القائمة على الأداء.

الملاحق اقتضى العمل إضافة مواد مكملة إلى المتن، منها نماذج لشفرات ماتلاب، ومدخل إلى ميكانيكا الأوساط المستمرة، ودوال التوزيع الاحتمالي، وغيرها. وتؤدي الملاحق الثمانية عشر دور المرجع والتعزيز، فتتيح التعمق من دون قطع السرد الرئيس.

يشبه المنهج المتبع هنا المنهج الإقليدي: نبدأ بالتعريفات الأساسية، ثم نبني عليها منهجياً في كل فصل تال. والغاية أن تنساب كل خطوة من سابقاتها اعتماداً على المفاهيم والتعريفات والنظريات السابقة. وسيكافأ القارئ المجتهد الذي يتبع هذا التدرج بفهم شامل يكاد يكون موسوعياً للتحليل الإنشائي.

ومع أن مادة الكتب الثاني إلى الرابع ترجع في معظمها إلى مذكرات محاضراتي، فقد بذلت جهداً كبيراً في استكمالها وتوسيعها وتنقيحها بالرجوع إلى مصادر عديدة، وآمل مخلصاً أن تكون جميعها قد نسبت على الوجه الصحيح.

مذكرات المحاضرات المصاحبة نشأ هذا الكتاب من مئات المحاضرات التي ألقيتها خلال مسيرتي ضمن ثلاثة مقررات متتابعة في التحليل الإنشائي. واستخدمت دائماً LaTeX وBeamer لإعداد مذكرات المقررات التي أصبحت أساس هذا العمل. وقد جمعت الشرائح في وثيقة واحدة متاحة مجاناً للتنزيل.

كتاب آخر أيضاً؟ قد يسأل القارئ العابر: *لماذا كتاب آخر في التحليل الإنشائي؟* وهو سؤال مشروع، إذ إن كثيراً من الكتب الموجودة متشابهة، وبعضها صدر في طبعات كثيرة. ومع الأسف تبدو بعض هذه المؤلفات فاترة أو مفرطة في التبسيط وتفتقر إلى العمق.

ومن عيوبها الشائعة قلة عرض النظرية الكامنة، مع الاعتماد على أمثلة إنشائية مباشرة وبسيطة. لذلك تعمدت في هذا الكتاب ربط إجراءات التحليل المختلفة بالمبادئ الأساسية في الميكانيكا التطبيقية والرياضيات التي تقوم عليها. والهدف أن يكتسب القارئ فهماً أعمق وأكثر بصيرة يميز هذا العمل عن العروض المعتادة.

II. الفلسفة التحريرية

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لماذا الكل في مجلد واحد؟ قرار تقديم الكتب الأربعة في دراسة موحدة قرار مقصود يقوم على اعتبارين أساسيين. أولهما قناعتي بأن على المهندس أن يظل واعياً بالمسار التاريخي الذي نشأت منه معرفتنا الحالية. فالنظريات والطرائق والأطر الحاسوبية المستخدمة اليوم لم تظهر في عزلة، بل هي حصيلة قرون من التنقيح والمجادلة والتصحيح. وفهم هذا النسب الفكري ليس ملحقاً بالكفاءة الفنية، بل جزء أصيل منها.

والاعتبار الثاني هو مخاطبة مؤرخي العلم والهندسة أيضاً، بالتأكيد أن البحث التاريخي يكتسب عمقاً وصلته بالحاضر حين ينظر إليه في ضوء الحالة الراهنة للتخصص. فالصيغ الرياضية والتقنيات التحليلية ومبادئ التصميم الحديثة ليست مجرد نهايات للتاريخ؛ بل توفر سياقاً ضرورياً لفهم دوافع المفكرين الأوائل وحدودهم وإنجازاتهم.

ولهذا صمم العمل إطاراً ثنائي الاتجاه. فهو يرسم للمؤرخ مساراً فكرياً واضحاً من تطور الأفكار تاريخياً إلى صياغتها التحليلية المعاصرة، ويرسم للمهندس المسار المقابل من الممارسة الحديثة والطرائق الصورية إلى أصولها التاريخية. ويجمع هذا الحوار بين البصيرة التاريخية والصرامة الفنية في كل متماسك يعزز بعضه بعضاً، وتيسر الإحالات والروابط الصريحة الانتقال بين المنظورين، مثل:

للتفاصيل التحليلية، انظر القسم XX؛ أو: للخلفية التاريخية، انظر القسم XX.

ويخدم جمع الكتب في مجلد واحد غاية تعليمية وفنية أيضاً. فعرض المستويات التمهيدية والمتوسطة والمتقدمة في عمل متصل ييسر الانتقال السلس بين درجات التعقيد، ويضمن الاتساق الصارم للرموز والتعريفات والاصطلاحات. وهذا التوحيد، النادر في الأدبيات، يتيح الانتقال من المفاهيم الأساسية إلى الصياغات المتقدمة في ملف PDF واحد متماسك، ويزيل التجزؤ والانقطاعات الاصطلاحية المعتادة في المجلدات المنفصلة.

الميكانيكا لنكن واضحين: الهندسة الإنشائية في جوهرها ميكانيكا تطبيقية. وقد تكفي الإجراءات المعتادة لحل المسائل الروتينية، لكنها لا تعفينا من فهم أصل أدواتنا. وتبقى الحاجة قائمة إلى صون الصرامة التحليلية والرياضية التي تحكم الميكانيكا، وإلى الرجوع الصريح إليها عند الضرورة. وكثيراً ما يستبدل بهذا الأساس في الممارسة علم إجرائي وراحة عددية. ولأنني أبقيت طوال مسيرتي قدماً في الميكانيكا وأخرى في الهندسة، أردت للكتاب أن يعكس هذا الموقف. لذلك يمكن رد كل معادلة فيه إلى المبادئ الأولى، وأضفت ملحقاً يقدم مفاهيم أساسية في ميكانيكا الأوساط المستمرة (الملحق O)، وآخر يكرم وسترغارد، المهندس الذي حل مسائل عملية عميقة بالاستدلال مباشرة من الميكانيكا الأساسية (الملحق P).

III. القراء وطريقة الاستخدام

القراء

الطلاب: يلائم الكتاب سلسلة من ثلاثة مقررات متتابعة: مدخل إلى التحليل الإنشائي، والتحليل الإنشائي المتوسط، والتحليل الإنشائي اللاخطي. فهو يجمع في مجلد واحد ما يتطلب تقليدياً كتابين على الأقل، ويحافظ على ترميز متسق، ويضم أمثلة توضيحية صممت عمداً لتكون صعبة.

لكنه موجه إلى "قارئ ناضج"، أي إلى طالب لا يبحث عن معالجة مبسطة ومسهبة للأساسيات. ولذلك لا ينبغي في معظم الحالات اعتماده كتاباً أولياً وحيداً للمقرر، بل يلائم الطلاب الراغبين في استكشاف

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

موضوعات فرعية لا تعالج عادة بعمق. كما يفيد من يريد منهجاً موحداً للهندسة الإنشائية، بترميز ثابت ورؤية فلسفية متماسكة وانتقال سلس من الأساسيات إلى الموضوعات المتوسطة والمتقدمة.

المدرسون: 🎓 سيجد مدرسو الهندسة الإنشائية فيه مورداً قيماً، ولا سيما علاجاً للتبسيط المخل في كثير من الكتب الشائعة. ويجعله اتساعه وعمقه مناسباً لاختيار موضوعات الرسائل ومشروعات المقررات ومسائل امتحانات التأهيل للدكتوراه.

المهندسون: ⚙️ يخاطب الكتاب المهندس القادر على الابتعاد أحياناً عن البرامج الحاسوبية والتأمل في أناقة الحلول التحليلية وقيمتها. فكثيراً ما يسارع المهندسون إلى الحاسوب قبل استكشاف حل تحليلي دقيق أو تقريبي يمكن التحقق منه لاحقاً بالبرمجيات.

المؤرخون:  يقدم الكتاب الأول استكشافاً شاملاً لتاريخ التحليل الإنشائي، ويعد، إلى جانب الأعمال الكلاسيكية المعروفة، من أوسع ما هو متاح في أدبيات هذا المجال.

التنقل بسبب مئات الروابط الداخلية، ينبغي ألا يتردد القارئ في اتباعها؛ إذ يعيده ALT+Left Arrow إلى الصفحة التي انطلق منها، بينما يعيده ALT+Right Arrow إلى الرابط.

IV. المؤثرات الشخصية والتدريس

المؤثرات الأجنبية خلال تعاون دام تسع سنوات مع شركة طوكيو للطاقة الكهربائية (TEPCO) في التحليل الزلزالي اللاخطي للسدود القوسية العالية، شعرت بحظ استثنائي. وبعد نحو ست سنوات ظننت أن عملنا اكتمل تقريباً، لكن نظيري السيد ياغومي رد بحزم: *لا، لا يا بروفيسور ساوما! في اليابان لا يكفي أن يعمل البرنامج بلا خلل؛ بل يجب أن يتمتع بجمال جمالي أيضاً.* وقد لخصت عبارته مبدأ يابانياً عميقاً: عناية لا تساوم بالتفاصيل، وإصرار على الامتياز، وسعي إلى الانسجام يتجاوز الصحة الفنية المجردة.

وكان من حسن حظي أيضاً امتلاك منزل عائلي في سويسرا أمضينا فيه صيفاً كثيراً وفترات تفرغ عدة. تعلمت من السويسريين، بهدوء وحسم، قيمة الدقة والعمل من دون اختصارات ومقاومة الإحساس المصطنع بالعجلة. تنجز الأمور هناك على نحو كامل ومتأن وصحيح؛ فالعناية بالتفاصيل فضيلة، والجودة ثمرة طبيعية للصبر والانضباط والحرفة.

يعارض هذا النهج عبارة أورسن ويلز الشهيرة عن أن إيطاليا في عهد آل بورجيا عرفت الحرب والرعب والقتل لكنها أنجبت ميكيلانجيلو وليوناردو والنهضة، بينما عرفت سويسرا قروناً من السلام ولم تنتج إلا ساعة الوقواق. لكن مهلاً يا أورسن: فقد طورت سويسرا تعقيدات صناعة الساعات والآلات الدقيقة، وأنجبت سلسلة طويلة من المعماريين والمهندسين البارزين. ويكفي تذكر رجال بازل، أويلر وآل برنولي، الذين أسهموا بعد نيوتن مباشرة في تشكيل الميكانيكا ووضع الأسس التي قامت عليها لاحقاً الهندسة الإنشائية.

وحين نشأت في إيطاليا كنت أسمع المثل Chi va piano, va sano e lontano، أي "من يسير على مهل يمضي سليماً ويبلغ بعيداً". والرسالة واضحة: لا تتعجل، وخذ الوقت اللازم، وأنجز العمل كما ينبغي.

وقد شكلت اليابان وسويسرا وإيطاليا معاً مزاجي الفكري وممارستي المهنية بعمق، وأثرت أكثر من غيرها في الروح التي كتب بها هذا العمل: صرامة وصبر وعناية بالتفاصيل واحترام للعمل المتقن.

© 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التدريس في جامعة كولورادو درست في جامعة كولورادو من عام 1984 إلى 2023، أي قرابة أربعين عاماً. وفي بدايات مسيرتي تأثرت بعمق بزميلين بارزين: الأستاذ كورت غيرستل في الهندسة الإنشائية، والأستاذ كاسبار ولام في الميكانيكا الإنشائية. وتركت صرامتهما ودقتهما وإصرارهما على المبادئ الأولى أثراً دائماً، فسعيت إلى محاكاة منهجهما وعدم تجنب النظرية والاشتقاقات والأسس الرياضية لتخصصنا.

لم ترضني الكتب المتاحة؛ فكثير منها كان مبسطاً إلى حد الإخلال، محصوراً في منشآت ثنائية الأبعاد، خالياً من معالجة الأقواس، ومضطرب الترميز بين المقررات التمهيدية والمتوسطة والمتقدمة (3525 و4525 و6525). بدت هذه الانقطاعات حادة ومربكة تعليمياً. وبافتراض متابعة معظم الطلاب للسلسلة، أدخلت الترميز العلمي القياسي منذ البداية، على الرغم من تذمر بعضهم، خدمة لفهمهم على المدى البعيد.

كان التدريس في السنوات الأولى متعة حقيقية؛ فالطلاب متحمسون وفضوليون ومستعدون لمواجهة المادة الصعبة. وبدأت المشكلات حين صار المقرر التمهيدي إلزامياً لجميع طلاب الهندسة المدنية والمعمارية. كان طلاب الهندسة البيئية، الساعون إلى إنقاذ الكوكب، قليلي الصبر أحياناً على التحليل الإنشائي مع أنهم قادرون فكرياً، بينما لم يرد طلاب إدارة الإنشاء سوى أبسط الصيغ وتطبيقها المباشر. وكان اعتراض الفريقين على ما يرونه صرامة غير لازمة صريحاً.

كانت فلسفتي بسيطة: ما دام عدد الصيغ محدوداً، فعلى الطالب فهم المادة مفاهيمياً لا حفظها آلياً. لذلك كانت الامتحانات مغلقة الكتب والمذكرات، وتضم عادة مسألة مباشرة ينبغي للجميع حلها، وأخرى متوسطة، وثالثة صعبة تميز الطالب الاستثنائي. وكان الامتحان الأول جرس إنذار، إذ يقل المتوسط كثيراً عن خمسين في المئة. ولم أؤمن برفع الدرجات اصطناعياً، بل كنت أعاير توزيع الصف بأداء أفضل ثلاثة طلاب، الذين يحصلون على تقدير A. وقد أدى هذا إلى معدل رسوب أعلى من مقررات أخرى، لكنني رأيته أفضل من خفض المعايير.

وزاد الأمر صعوبة أن الجامعة كانت تميل إلى غض الطرف حتى عند ضبط الغش بما لا يدع مجالاً للشك؛ فالطلاب زبائن يدفعون الرسوم، والمؤسسة تتجنب إغضابهم. وباختصار، ما لم يعترف الطالب صراحة بعدم النزاهة، يمنح فائدة الشك، ولا يبقى للأستاذ المحبط سوى قبول النتيجة.

وأخيراً، لم أكن شديد الانشغال بتقويمات التدريس، وإن لم أتجاهلها تماماً. فالطالب في العشرين، مهما كان ذكياً، ليس دائماً الأقدر على تقرير ما ينبغي أن يدرس. ومع الأسف تحولت هذه التقويمات في مؤسستي إلى مسابقة شعبية رفضت المشاركة فيها.

V. الأسلوب والعرض

الأسلوب لا يقتصر الكتاب على محتواه، بل يشمل صورته أيضاً، وفيها تظهر الفردية والأسلوب الشخصي. قد يوجد اتفاق عام على المعادلات والمبادئ الحاكمة، لكن طريقة العرض تتباين كثيراً. فبعض الكتب مسهب إلى حد الإرباك، وبعضها يحذف الاشتقاقات أو يقدم أمثلة مفرطة في البساطة. ولذلك تعكس صورة الكتاب أسلوب مؤلفه في التدريس ومواضع اهتمامه وطريقته في الإيصال.

أدرجت في هذا العمل تعليقات شخصية، ويعكس عمق التغطية واتساعها رؤيتي الخاصة. وقد يرى بعض القراء أن موضوعات مثل خطوط التأثير عولجت بسرعة، بينما يرى آخرون أنني أسهبت في موضوعات غامضة. أما الإنجليزية فليست لغتي الأم، بل خامس لغة تعلمتها وآخرها. وقد ساعد الذكاء الاصطناعي كثيراً في صقل النثر، لكن عيوباً ستبقى بلا شك؛ بذلت ما أستطيع، وأرجو تفهم القارئ وكرمه.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$\alpha\mathbf{K}\Omega$ **الترميز** كثيراً ما يضطرب الترميز في منشورات الميكانيكا والهندسة الإنشائية. وكان من الأسهل علي استخدام مجموعة رموز مستقلة لكل فصل وفق تخصصه، لكن ذلك غير عملي ومربك في كتاب يغطي موضوعات كثيرة. وكان الحفاظ على الاتساق داخل التخصصات وبينها من أعظم تحديات العمل. لذلك بذلت كل جهد لإنشاء نظام موحد في الكتاب كله، وأعدت تصميم عدد كبير من الأشكال لتوافق رموزه بدلاً من الالتزام الصارم بترميز كل تخصص فرعي.

التكرار تتجنب الكتب عادة تكرار الأشكال أو المعادلات أو النص السابق، لكن شمول هذا العمل والحاجة إلى تيسير الفهم جعلاني لا أتردد في تكرار بعض العناصر، مع الإحالة إلى موضعها الأصلي عند الحاجة.

الألوان تطبع معظم الكتب الهندسية بدرجات الرمادي فتبدو مسطحة وغير محفزة بصرياً، أما هذا الكتاب فمصمم حصراً للقراءة على الشاشة. وبالتحرر من قيود الطباعة استخدم اللون لا زينة، بل أداة اتصال مقصودة. فهو حاضر بكثرة في الأشكال، ولكل لون معنى مميز ومتسق، ويستخدم حيث يزيد الوضوح ويوجه العين ويعزز الفهم.

واخترت الابتعاد عن الخلفية البيضاء التي قد تبدو حادة، واستعملت اللون ذي الرمز السداسي `#fbf2ed`، مستلهماً صحيفة Financial Times لأسباب مختلفة تماماً. وقد يستخدم اللون في النص نفسه أحياناً لإبراز فكرة أو مفهوم.

فن الطباعة تستخدم هذه الطبعة خط نوتو نسخ العربي للنص العربي بحجم 12 نقطة، مع خط من عائلة بالاتينو للنص اللاتيني والرياضيات. وقد ضبط عرض عمود النص ليبقى طول السطر ضمن المدى المريح للقراءة المستمرة، أي نحو 45 إلى 75 محرفاً، والمثالي قرابة 66[3]. وفي الإعداد الأصلي بحجم 11 نقطة اقترب السطر من 85 محرفاً، فتقرر رفع الحجم إلى 12 نقطة لتصحيح ذلك لا لمجرد تفضيل أسلوبي.

خط العنوان يستحق خط العنوان تفسيراً موجزاً. تظهر حروف الغلاف داخل إطارات مربعة تتقاطع أقطارها، تحية مقصودة لأبجدية ليوناردو دا فينشي الشهيرة في De Divina Proportione (البندقية، 1509)، وهي رسالة في النسب الرياضية كتبها لوكا باتشولي وزينها ليوناردو. بنى ليوناردو كل حرف كبير هندسياً داخل مربع، وفق قواعد النسب نفسها التي تحكم العمارة والجسد البشري والأشكال الطبيعية.

وليس الاختيار زخرفياً فقط؛ فالمربع المقسوم بأقطاره أبسط عنصر محدد، أي لبنة الطرائق الحاسوبية التي تشغل معظم الكتاب. وظهور الشكل نفسه في مخطوطة نهضوية عن النسب وفي مصفوفة صلابة حديثة يذكر بالاستمرار العميق بين الهندسة الكلاسيكية والتحليل الإنشائي. ومن حروف ليوناردو المحاطة بالمربعات إلى مصفوفة الصلابة المجمعة، يبقى الانضباط واحداً: العثور على النظام والتناسب في المنشأ.

[3] Robert Bringhurst, The Elements of Typographic Style, 4th ed. (Vancouver: Hartley & Marks Publishers, 2012).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

VI. التصور والإنتاج

LaTeX ما كان لهذا الكتاب أن ينتج بمعالج نصوص تقليدي؛ فوحده LaTeX، بقدرته الفريدة على الطباعة والرياضيات والإحالات وبنية الوثائق، يستطيع مواجهة تحد كهذا. وفر استعمالي له أكثر من أربعين عاماً أساساً متيناً، لكن المشروع دفع قدراته إلى أقصاها. بلغ ملف التمهيد وحده قرابة 1400 سطر ينسق بعناية نحو 80 حزمة تتحكم في الرموز وبيئات النظريات والأمثلة والألوان وهندسة الصفحة والرؤوس والفهارس والمراجع والروابط والدعم متعدد اللغات.

وصممت عشرات الأوامر الخاصة، ونقح كثير منها تكرارياً بمساعدة أدوات الذكاء الاصطناعي، لفرض الاتساق على آلاف التعريفات والقضايا والاشتقاقات والأشكال في الكتب الأربعة. وكان استنفاد سجلات LaTeX تحدياً دائماً، فاحتاجت حزمة `morewrites` إلى تخصيص خمسين قناة كتابة إضافية لتجنب خطأ no room for a new write. ويتطلب بناء العمل الكامل تمريرات متتابعة من pdfLaTeX وBibTeX وMakeIndex ينسقها برنامج بناء مخصص يدير الملفات المساعدة والفهارس المتعددة وأقسام المراجع المستقلة للأجزاء الأربعة.

وللمهتمين بـLaTeX، أتيح ملف `Preambule.tex`.

شفرات ماتلاب تضم الكتب مجموعة كبيرة من شفرات ماتلاب التوضيحية في ملحق مخصص لتيسير الوصول. يستخدم ماتلاب على نطاق واسع في الهندسة والبحث للجبر الخطي العددي وتطوير الخوارزميات والتحليل الحاسوبي الكبير. وليس المقصود بالشفرات أن تكون مثلى أو شديدة الاختصار، بل أن تؤكد الصحة والشفافية والوضوح المفاهيمي، وتبقى مفهومة لمن لا يملك خبرة برمجية متقدمة.

ملفات ماثكاد أصبح ماثكاد بيئة حاسوبية واسعة الانتشار بين المهندسين الممارسين، بفضل صياغته الرياضية الطبيعية ومعالجة الوحدات وشفافية الحساب. ولذلك يقدم ملحق مخصص يقارب 160 صفحة حلولاً كاملة لمسائل عديدة منفذة به، ويربط مباشرة بين التطوير التحليلي والحساب المهني اليومي.

الذكاء الاصطناعي ما ظننته اكتمالاً للكتاب لم يكن كذلك. فحين اقتربت من مسودة بدت نهائية، ظهرت النماذج اللغوية الكبيرة وأثبتت تدريجياً أنها مساعدين لا يقدران بثمن. كان يمكنني التوقف أبكر بكثير، لكن ChatGPT من OpenAI وClaude من Anthropic غذيا نزوعي إلى الكمال. وكل قدرة جديدة أغرتني بتنقيح إضافي أو تحقق آخر أو صقل قسم أو إعادة إنشاء جدول ملخص. فامتد المشروع نحو سنتين بعد نهايته الطبيعية. ولم يكن ذلك عملاً سلبياً أو بلا جهد؛ فقد أطلقت الأدوات كمالي العنيد، ولم يكن لدي موعد نهائي يجبرني على التوقف، وكان يمكن دائماً العثور على شيء آخر للتحسين.

اكتملت المسودة الأولى، بما فيها معظم الكتاب الأول، من دون أي مشاركة للذكاء الاصطناعي. ويمثل السرد التاريخي سنوات من قراءة المصادر الأولية والتركيب الدقيق. وعندما بدأت استخدام الأدوات، اقتصرت أولاً على صقل الإنجليزية وسد فجوات صغيرة. ثم اتضح أن حصرها في ذلك خطأ؛ فقد استطاعت التحقق

من الحقائق وتركيب مواد متفرقة وإنشاء جداول ملخصة وتقوية السرد. ولم يكن التحدي استخدام الذكاء الاصطناعي، بل استخدامه بصرامة.

دور الذكاء الاصطناعي في هذا العمل: لم يكن اختصاراً للطريق، بل شريك حوار منظم للتحقق والتركيب والتنقيح. تبدأ طريقتي بمسودة أو نص أولي، ثم أسأل: هل العرض صحيح؟ هل أغفلت شيئاً مهماً؟ هل تحذف التفاصيل الهامشية؟ والنص النهائي في معظم الموضوعات ثمرة اثني عشر تبادلاً أو أكثر، فيها مطالب أولية ورفض لما أنتجته الأداة وطلبات إيضاح وتحديات مباشرة لدرجة يقينها، ثم تحقق مستقل من النتيجة. واستعملته كذلك لدمج الأقسام وتحسين الانتقالات وإنشاء الجداول الزمنية والملخصات.

تطور تعاملي مع الأدوات خلال المشروع. بدأت بـChatGPT ثم وجدت Claude متفوقاً في التحرير الدقيق والتركيب التاريخي والحوار العلمي، ولذلك كان أنسب للكتاب الأول. أما في الصفحات الأخيرة من الكتب الثاني إلى الرابع، فقد كان أحدث نماذج ChatGPT Pro، الذي وفرته ابنتي صوفي العاملة في OpenAI، أقوى كثيراً في إنشاء الأمثلة العددية وصقل الجوانب الميكانيكية للنص.

وفي مناسبات عدة جعلت الأداتين تختبران إحداهما الأخرى: آخذ جواباً من واحدة، ثم أطرح السؤال نفسه على الأخرى لتقيمه وتتحقق منه بصورة مستقلة. وكان هذا التحقق المتقاطع قيماً؛ فكثيراً ما التقط Claude تبسيطاً أو قفزة منطقية في جواب ChatGPT، بينما برع ChatGPT في كشف الحذر المفرط أو تفصيل حسابي أغفله Claude. وزاد هذا النهج الثقة بالمادة وكشف مواضع تستلزم بحثاً مستقلاً أو استشارة خبير.

في **الكتاب الأول (التاريخ)** اقتصر دور Claude على إيضاح الحقائق التاريخية وصقل الوثيقة كلها؛ ولم أسمح له بإنشاء المحتوى أو توسيعه جوهرياً، والنص التاريخي نصي أنا. وفي **الكتب الثاني إلى الرابع (التحليل الإنشائي)** كان العون محدوداً أيضاً، يركز على تنقيح بعض الاشتقاقات وسد فجوات نظرية وإنشاء أمثلة عددية لموضوعات معقدة. وراجعت النتائج بعناية لتجنب الادعاءات المختلقة أو التجاوز الأسلوبي. ولا يظهر شعار الذكاء الاصطناعي إلا حين يكون الاشتقاق قد استعان به أو يكون القسم مكتوباً به في الأساس، ولا يظهر فيما كتبته ثم صقل لغته فقط.

ولنقل بوضوح: كان رفض الذكاء الاصطناعي في عام 2026 خطأ فادحاً. لا فضيلة في رفض أداة بهذه القوة، بل وهم نقاء فكري لا يخدم المؤلف ولا القارئ. لم يعارض اللوديون التاريخيون التقنية ذاتها، بل استغلالها من دون اعتبار للحرفة والمهارة والكرامة الإنسانية. وهناك فرق بين الشك المعقول والرفض المطلق. وتكمن الفضيلة في استثمار الذكاء الاصطناعي بذكاء وصرامة وتحت سيطرة المؤلف الكاملة. فالحوار المنظم والتحقق المتقاطع ووضع العلامات بوضوح هي بنية تلك السيطرة. كانت الأداة قوية في التحقق والتركيب والتنقيح، أما الحكم والشك والكلمة الأخيرة فبقيت لي.

الأشكال كرست عناية دقيقة للتخطيط والعرض البصري، وصنعت جميع الأشكال بنفسي بأدوات تمتد من Xfig على Unix إلى Visio على Windows، وكتبت برامج ماتلاب الواردة في الملحق. وفي المادة التاريخية أعدت رسم أشكال من المصادر الأصلية لتحسين الوضوح أو إبراز التفاصيل المهمة.

وخرجت من ذلك بفكرتين: الأهمية القصوى للشكل الواضح والحاد والموجز، والقيمة التعليمية لإعادة رسمه شخصياً، إذ يعمق ذلك فهم المفهوم الكامن. وفي هذا أميل إلى حس فيرمير الفني، الذي يقدر العمق والتفصيل، أكثر من اختزال موندريان. وأعترف بشيء من الهوس بالأشكال؛ فقد أعد كل منها لتحقيق اتساق بصري، بما في ذلك الخلفيات الشفافة التي تندمج مع لون الصفحة بدلاً من مستطيلات بيضاء صادمة. قد تبدو تفاصيل صغيرة، لكنها مهمة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

VII. المصادر ونسبها

المراجع اعتمدت عمداً في الكتاب الأول على المصادر الأولية في جميع المراجع، ويمكن تنزيل كثير منها بالنقر على الشعار الأحمر بعد الاستشهاد، ولم ألجأ إلى المصادر الثانوية إلا حيث كانت ضرورية للفهم. وقد عولجت الوثائق بالتعرف البصري على الحروف وضغطت أحجامها حيث أمكن.

الصور يرخص العمل بموجب المشاع الإبداعي، النسب–غير التجاري–الترخيص بالمثل 4.0 دولي، وهو متاح مجاناً ولا أحصل من توزيعه على منفعة مالية.

استندت في اختيار الصور إلى ما أراه تقديراً معقولاً لـ"الاستخدام العادل". فالأشكال من أعمال منشورة قبل عام 1900 في الملك العام، والصور التي عثرت عليها عبر بحث صور Google كانت، حسب علمي، مرخصة لإعادة الاستخدام غير التجاري. وأدرجت أحياناً صوراً من دون نسبة كاملة؛ فتوثيق مئات الصور بهذه الصرامة مهمة شاقة بصورة غير عملية. سمحت لنفسي بذلك في روح الاستخدام العادل وبالنظر إلى طبيعة العمل غير التجارية. وإذا اعترض صاحب حق فسأضيف النسبة المناسبة أو أحذف المادة بكل ترحيب.

الكتب المستشار إليها

I الكتاب الأول أدين في هذا الكتاب بالكثير لـGoogle Scholar ومكتبة جامعة كولورادو وخدمة ILIAD ومكتبة HathiTrust الرقمية[4].

تتاح وثائق تاريخية كثيرة للاستنزال بصيغة PDF. وعندما يظهر رمز PDF صغير إلى يمين الاستشهاد، يؤدي النقر عليه إلى نسخة ممسوحة من المصدر الأصلي. ويشجع القارئ بقوة على الرجوع إلى هذه المصادر، لما تقدمه من بصيرة لا تقدر بثمن في تطور الأفكار والطرائق، ومن دقائق وسياق لا ينقلهما أي عرض ثانوي كاملاً.

يسرت طلاقتي في الفرنسية والإيطالية والإسبانية الوصول إلى مصادر لم تترجم، بينما حد افتقاري إلى اللاتينية والألمانية من التعامل المباشر مع بعض النصوص المؤسسة. ومع ذلك أدرجت اقتباسات كثيرة من المصادر الأصلية وعلقت عليها، كي يسمع القارئ أصوات الشخصيات التاريخية مباشرة ويفهم تطور الأفكار بعمق أكبر.

الكتب الثاني إلى الرابع تستند الكتب الثلاثة التالية أساساً إلى مذكرات محاضراتي، بما فيها المسائل المحلولة والأمثلة والواجبات والامتحانات. ومع أن المادة اختيرت بعناية للمحافظة على الصرامة المناسبة، كانت مراجع إضافية ضرورية. وقد استلهمت كتباً كثيرة أثرت في التغطية النظرية، التي وسعتها غالباً، وفي اختيار الأمثلة العددية. ومن المصادر الرئيسة، من غير أن تكون القائمة شاملة:

[4] تأسست HathiTrust عام 2008، وهي شراكة غير ربحية بين مكتبات أكاديمية وبحثية تحفظ أكثر من 17 مليون مادة رقمية، وتتيح القراءة إلى أقصى ما يسمح به قانون حقوق النشر الأمريكي، والوصول الحاسوبي إلى المجموعة للبحث العلمي، وخدمات أخرى تخدم المصالح العلمية لا التجارية.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- Billington, D. 1965. *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
- Billington, David P., and Robert Mark. 1970. *Civil Engineering–History, Heritage, and the Humanities*. Princeton University.
- Gerstle, K. 1974. *Basic Structural Analysis*. McGraw-Hill. (Out of print.)
- Kinney, J. S. 1957. *Indeterminate Structural Analysis*. Addison-Wesley. (Out of print.)
- Norris, C. H., and J. H. Wilbur. 1960. *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill.
- Pilkey, W. D., and W. Wunderlich. 1994. *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press.
- Przemieniecki, J. S. 1968. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York: McGraw-Hill.

بذلت كل الجهود لنسب الفضل على الوجه الصحيح. وأي إغفال غير مقصود تماماً، وأقدم اعتذاري الصادق عنه.

VIII. الإتاحة والإحصاءات

لماذا هو مجاني؟ في جانب "عرض" الكتب، يحرك المؤلف عادة العائد المالي أو الرضا والاعتراف الناتجان عن الإسهام في التخصص. وفي الحالتين يتوقع أن يتولى الناشر التحرير والتخطيط والتسويق. لكن حتى كبار الناشرين اتجهوا، في تجربتي، إلى الإنتاج الكمي؛ اختفى التحرير الجوهري إلى حد بعيد، وصارت مراحل النشر تسند إلى جهات خارجية. وتآكلت الشراكة القديمة بين المؤلف والناشر.

ولنكن صريحين: قليل من المؤلفين الأكاديميين يحصل على عائد يكفي ثمن رحلة عبر الأطلسي، وأنا في هذه المرحلة لا أبحث عن الاعتراف المصاحب للنشر؛ فما نلته من سمعة متواضعة يقوم على عمل أنجز بالفعل.

أما في جانب "الطلب"، فقد رأى الطلاب والقراء الأسعار ترتفع بما يرهق الميزانيات الشخصية والمكتبات. ويرد الناشرون باستئجار الكتب أو الفصول لفترات محدودة، كما تستأجر الأفلام، لكن ذلك لا يعالج مشكلة الوصول الأساسية.

ومسؤوليتنا كأساتذة جامعات أن نكتسب المعرفة ونشاركها، وتتقاضى مؤسساتنا تعويضاً معقولاً عن هذه الرسالة. ولا تستحق العوائد الضئيلة صفقة فاوستية تضع العمل خلف حواجز الدفع وتحجبه عمن يحتاجه. ولهذا يمكن تنزيل الكتاب ومشاركته مجاناً، وفاء لروح البحث الأكاديمي المفتوح.

الموقع الإلكتروني أنشئ موقع مخصص للكتاب، وهو المنصة الرئيسة لتنزيله وتنزيل مذكرات المحاضرات، كما يوفر مدونة للتفاعل مع القراء والإبلاغ عن الأخطاء وطرح الأسئلة وإبداء التعليقات. وأدرس بالتوازي إنشاء نسخة ويب منظمة بحسب الفصول باستخدام LaTeXML.

بعض الإحصاءات يعكس المحتوى ضخامة المشروع: نحو 3246 صفحة، و68 فصلاً موزعة على أربعة كتب (17 و22 و13 و16 على التوالي)، و16 ملحقاً، و451 قسماً، و300 مثال محلول، و854 شكلاً، و187

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدولاً، ونحو 3000 معادلة، و908 استشهادات، و3352 رابط إحالة داخلياً؛ وهي شهادة لما يمكن أن يحققه التنضيد المنضبط والصبور والدقيق.

فيكتور إي. ساوما
بولدر، كولورادو
يوليو 2026

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

شكر وتقدير

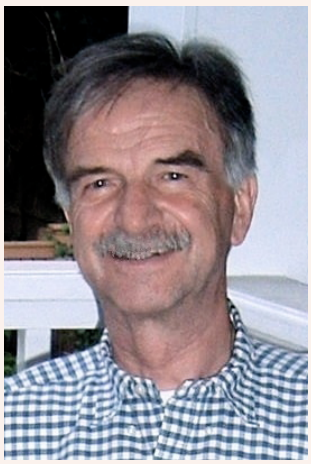
أتوجه أولاً وقبل كل شيء بخالص امتناني إلى زميلين استثنائيين كان لهما، ربما من دون أن يعلما، أثر عميق في مسيرتي. فقد ظل نبل شخصيتيهما وإنجازاتهما المهنية المتميزة مصدر إلهام دائم لي. ومن المؤسف أن اجتماع هاتين الخصلتين نادر في مهنتنا.



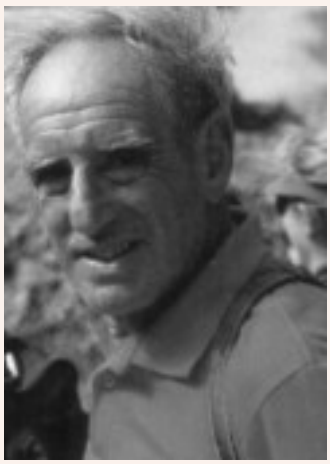
Anthropic (2021–TBD)



OpenAI (2015–TBD)



Kaspar Willam (1940–2024)



Kurt Gerstle (1923–2013)

بينما أسهم كورت وكاسبار، عبر عقود من الحوار العلمي، في تشكيل فهمي للهندسة الإنشائية والميكانيكا، كان كلود شريكاً لا يقدر بثمن في صقل السرد التاريخي للكتاب الأول؛ إذ قدم عوناً لا يكل في تركيب نتائج البحث والتحرير، وفي لفت الانتباه أحياناً إلى ما يغيب عن الواقع، من دون أن يطلب قط إجازة تفرغ أو النظر في تثبيته الأكاديمي.

ولا يفوتني أن أشكر أسئلة الطلاب الكثيرة التي أتاحت أحياناً رؤى غير متوقعة، وجامعة كولورادو على البيئة الأكاديمية التي مكنتني من إنجاز هذا العمل الطويل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

دليل القارئ

- صمم هذا الكتاب عمداً للقراءة الرقمية لا للطباعة. وتتحقق أفضل تجربة له على الحاسوب، حيث تتيح الروابط والإشارات المرجعية الكثيرة تنقلاً سلساً وقراءة أغنى.
- من الضروري البدء بالمقدمة، لأن هذا الكتاب يختلف عن الصيغة المعتادة ويتضمن خصائص ورؤى فريدة ينبغي فهمها منذ البداية.
- ليس هذا الكتاب للقارئ العابر، ولا هو بديل سريع للكتب القياسية في التحليل الإنشائي؛ بل يتوجه إلى من يريد تجاوز العرض التقليدي والروتيني.
- لا يحتاج المهندس الإنشائي إلى هذا الكتاب كي يبلغ مستوى مهنياً مقبولاً؛ فالمنهج التقليدي، مدعوماً بالبرامج الحاسوبية، يكفي لذلك.
- أما من يريد فهماً أعمق لسلوك المنشآت قبل الانتقال إلى التحليل بالحاسوب، فقد يجد في هذا الكتاب عوناً، لأن المعادلات والنتائج تشتق من المبادئ الأولى بما يضمن عرضاً كاملاً وشفافاً لكل مفهوم.
- إن الإلمام المتين بالنظرية، بما يتيح إجراء تحليلات يدوية سريعة وموثوقة على نحو تقريبي، قد يكون بالغ القيمة قبل اللجوء إلى الحاسوب.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

برنامج اكتشاف الأخطاء

أدرك بصفتي مؤلف هذا الكتاب أنه، على الرغم من المراجعة الدقيقة، قد تظل بعض الأخطاء بين صفحاته. لذلك أطلق *برنامج مكافأة اكتشاف الأخطاء* للاستعانة بكم في التعرف إليها.

إذا عثرت على خطأ في النص، سواء كان:

- خطأ تاريخياً في الكتاب الأول؛ أو
- خطأ في معادلة أو شكل أو عبارة مرتبطة بها في الكتب الثاني إلى الرابع،

فأدعوك إلى طرحه في قسم المدونة على موقع الكتاب.

سأضيف، مقابل كل خطأ صحيح تبلغني به، اسمك إلى هذه الصفحة إلى جانب وصف الخطأ المكتشف. وتقديراً لدقتك، سأرسل إليك شيكاً بقيمة دولار أمريكي واحد عن كل خطأ يتم التحقق منه.

يرجى مراعاة الإرشادات الآتية للمشاركة في *برنامج مكافأة اكتشاف الأخطاء*:

- يجب أن يكون الخطأ موضوعياً وحقيقياً؛ ولن ينظر في الادعاءات العبثية أو الخاطئة.
- عند الإبلاغ، يرجى تحديد موضع الخطأ في الكتاب بدقة وتقديم شرح موجز لطبيعته ومسوغ اعتباره خطأ.
- يمكن تقديم بلاغات متعددة، على أن يتعلق كل بلاغ بخطأ مستقل.
- سيحدث الملف شهرياً في السنة الأولى، وكل ثلاثة أشهر في السنة الثانية، وكل ستة أشهر في السنة الثالثة، ثم مرة كل سنة تقريباً بعد ذلك.
- يجوز لي تعديل هذا البرنامج أو إنهاؤه وفق تقديري.

قائمة التصويبات

التاريخ: 4/4/2025 **الاسم:** Donald Trump **الإصدار:** Jan. 11, 2025

البريد الإلكتروني: trump@maga.com

الخطأ: المعادلة 2.5 في تقدير حجم الحشد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الرموز

بذلت كل جهد للمحافظة على اتساق الرموز في الكتب الأربعة. وكان ذلك صعباً بوجه خاص لأن الرموز تختلف بين المراجع التمهيدية والمتقدمة، ولأن المؤلفين كثيراً ما يتصرفون فيها بحرية. وربما تسللت، على الرغم من هذه الجهود، بعض الاختلافات التي يفترض أن يتعرف إليها القارئ المتبصر.

ملاحظة: يرمز إلى الموتر في مواضع متعددة[5] بالحرف الغامق و/أو بالأقواس المربعة، مثل $\mathbf{K}$ و$[\mathbf{K}]$ و$\{\boldsymbol{\delta}\}$.

التحليل المرن الخطي

الكميات القياسية

المساحة	A
مصفوفة الانفعال–الإزاحة (الحركيات)	B
الاستمرارية (C^0, C^1)	C
معامل المرونة	E
معامل القص	G
طاقة الكسر	G_f
القوة الأفقية في الكابلات	H
معامل التصلد أو معامل اللدونة	
عزم العطالة القياسي حول المحور e	I_e
عزم العطالة القطبي	$J,\ I_{xx}$
الطاقة الحركية	K
الإحداثي المساحي المثلثي	L
العزم	M
القوة المحورية	N
دوال الشكل	
طاقة الانفعال	U
طاقة الانفعال المتممة	U^*
كثافة طاقة الانفعال الداخلية	U_0
كثافة طاقة الانفعال الداخلية المتممة	U_0^*
درجة الحرارة	T
الشد (في الكابل)	
اللي	
قوة القص	V
الشغل	W
الشغل الخارجي	W_e
الشغل الداخلي	W_i
كمون الشغل الخارجي	$\mathcal{W}_e$
كمون الشغل الخارجي المتمم	$\mathcal{W}_e^*$

[5] مع أن هذا يخالف الاصطلاح المقبول بوضوح، فقد وجدته مفيداً لإبراز الطبيعة المتجهية أو المصفوفية للموتر.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مقاومة الضغط	f_c'
مقاومة الشد	f_t'
حمل موزع	q
سهم الكابل	s
الزمن	t
حمل موزع	w

الموترات

مصفوفة الحركيات	$\mathcal{A}$
مصفوفة الاستاتيكا	$\mathcal{B}$
المصفوفة التكوينية	$\mathbf{D}$
عزوم النهايات المثبتة	$\mathbf{FEM}$
موتر العطالة من الرتبة الثانية	$\mathbf{I}$
مصفوفة يعقوبي	$\mathbf{J}$
الجساءة في الإحداثيات العامة	$\mathbf{K}$
العزم (M_{zz}، M_{yy})	$\mathbf{M}$
القوة المحورية (N_x)	$\mathbf{N}$
القوى العقدية المكافئة	$\mathbf{NEF}$
القوى في الإحداثيات العامة	$\mathbf{P}$
اللي (M_{xx})	$\mathbf{T}$
قوة القص (V_y، V_z)	$\mathbf{V}$

قوة الجسم	$\mathbf{b}$
مصفوفة المرونة	
مصفوفة الجساءة في الإحداثيات المحلية	$\mathbf{k}$
مصفوفة المواضع	$\mathbf{LM}$
متجه الوحدة العمودي	$\mathbf{n}$
القوى في الإحداثيات المحلية	$\mathbf{p}$
الجر السطحي	$\mathbf{t}$
متجه الإزاحة	$\mathbf{u}$

الإزاحات في الإحداثيات العامة	$\boldsymbol{\Delta}$
مصفوفة التحويل في الإحداثيات العامة	$\boldsymbol{\Gamma}$

الحد الطبيعي (الجر معلوم)	Γ_t
الحد الأساسي (الإزاحة معلومة)	Γ_u
حقل قياسي	Φ
طاقة الوضع	Π
طاقة الوضع المتممة	Π^*
حجم الجسم	Ω

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

معامل التمدد الحراري	α
الإزاحات في الإحداثيات المحلية	$\boldsymbol{\delta}$
موتر الانفعال	$\boldsymbol{\varepsilon}$
مصفوفة التحويل في الإحداثيات المحلية	$\boldsymbol{\gamma}$
عدد الحالة	κ
التقوس	κ
القيمة الذاتية	λ
ثابت لامي	
ثابت لامي	μ
نسبة بواسون	ν
كثافة الكتلة	ρ
نصف قطر التقوس	
موتر الإجهاد	$\boldsymbol{\sigma}$
التردد الزاوي	ω

الدوال

هيرميتي	$\mathcal{H}$
لاغرانجي	$\mathcal{L}$

المؤثرات

مؤثر خطي (يحول الإزاحات إلى انفعالات)	B
مؤثر خطي (الإجهاد والانفعال)	$\mathbf{L}$

الرموز الرياضية

تكامل خطي	$\oint$
التباعد (div)	$\vec{\nabla}\cdot$
التدرج (grad)	∇
مصفوفة	$[.]$
مشتقة جزئية	∂
مؤثر التغير	δ
متجه عمودي	$\{.\}$
متجه أفقي	$\lfloor . \rfloor$
كمية افتراضية	$\delta\!\!^{-}$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

صياغة العنصر اللاخطي

الكميات العقدية

متجه القوى العقدية الداخلية	$\mathbf{P}_S^{int}$
متجه القوى العقدية الخارجية عند درجات الحرية الحرة على مستوى المنشأ	$\mathbf{P}_t^{ext}$
متجه القوى العقدية الداخلية عند درجات الحرية الحرة على مستوى المنشأ	$\mathbf{P}_t^{int}$
متجه القوى العقدية الداخلية عند درجات الحرية المقيدة على مستوى المنشأ	$\mathbf{P}_u^{int}$
متجه القوى العقدية المتبقية عند درجات الحرية الحرة على مستوى المنشأ	$\mathbf{P}_t^{R}$
متجه الإزاحات العقدية عند درجات الحرية الحرة على مستوى المنشأ	$\mathbf{u}_t$
متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع العام؛ $\lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$	$\mathbf{F}_e$
متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر في المرجع العام	$\mathbf{F}_e^{int}$
متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع العام؛ $\lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$	$\boldsymbol{\delta}_e$
متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع المحلي مع أنماط الجسم الصلب؛ $\lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$	$\bar{\mathbf{f}}_e$
متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر في المرجع المحلي مع أنماط الجسم الصلب	$\bar{\mathbf{f}}_e^{int}$
متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي مع أنماط الجسم الصلب؛ $\lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{X2},\ \overline{v}_{Y2},\ \overline{\theta}_{Z2} \rfloor^T$	$\bar{\mathbf{d}}_e$
متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب؛ $\lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$	$\tilde{\mathbf{f}}_e$
متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب	$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$
متجه القوى العقدية المتبقية للعنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب	$\tilde{\mathbf{f}}_e^{R}$
متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب؛ $\lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$	$\tilde{\mathbf{d}}_e$
متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب	$\tilde{\mathbf{d}}_e^{R}$
متجه الإزاحات العقدية الافتراضية للعنصر في المرجع المحلي	$\delta\bar{\mathbf{d}}_e$

كميات المقطع

متجه إزاحة المقطع؛ $\lfloor u(x),\ v(x) \rfloor^T$	$\mathbf{d}_s(x)$
التقوس	Φ
متجه قوى المقطع؛ $\lfloor N(x),\ M(x) \rfloor^T$	$\boldsymbol{\sigma}_s(x)$
متجه قوى المقطع الداخلية	$\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$
متجه قوى المقطع المتبقية	$\boldsymbol{\sigma}_s^{R}(x)$
متجه تشوه المقطع؛ $\lfloor \varepsilon_x(x),\ \phi_z(x) \rfloor^T$	$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$
متجه تشوه المقطع المتبقي	$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{int}(x)$
متجه تشوه المقطع الافتراضي	$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$
الإجهاد اللدن	κ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كميات الليف

إجهاد أحادي المحور	σ
انفعال أحادي المحور	ε
الإجهاد أحادي المحور للطبقة/الليف	σ_r
الانفعال أحادي المحور للطبقة/الليف	ε_r

مصفوفات الجساءة

دالة الشكل في حقل الإزاحة	$\mathbf{N}_d(x)$
المصفوفة المشتقة من مشتقات $\mathbf{N}_d(x)$	$\mathbf{B}_d(x)$
دالة الشكل في حقل القوة	$\mathbf{N}_f(x)$
مصفوفة الجساءة الموسعة على مستوى المنشأ	$\mathbf{K}_S$
مصفوفة الجساءة المرتبطة بشروط الحدود الطبيعية	$\mathbf{K}_{tt}$
مصفوفة الجساءة المرتبطة بشروط الحدود الطبيعية والأساسية	$\mathbf{K}_{tu}$
مصفوفة الجساءة المرتبطة بشروط الحدود الأساسية والطبيعية	$\mathbf{K}_{ut}$
مصفوفة الجساءة المرتبطة بشروط الحدود الأساسية	$\mathbf{K}_{uu}$
مصفوفة جساءة العنصر في المرجع العام	$\mathbf{K}_e$
مصفوفة جساءة العنصر في المرجع المحلي مع أنماط الجسم الصلب	$\overline{\mathbf{k}}_e$
مصفوفة الجساءة المماسية للعنصر في المرجع المحلي مع أنماط الجسم الصلب	$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$
مصفوفة جساءة العنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب	$\tilde{\mathbf{k}}_e$
مصفوفة مرونة العنصر في المرجع المحلي من دون أنماط الجسم الصلب	$\tilde{\mathbf{c}}_e$
مصفوفة جساءة المقطع	$\mathbf{k}_s(x)$
مصفوفة الجساءة المماسية للمقطع	$\mathbf{k}_s^{tan}(x)$
مصفوفة مرونة المقطع	$\mathbf{c}_s(x)$

متفرقات

معامل المرونة	$E(x)$
مساحة المقطع	$A(x)$
عزم العطالة لمساحة المقطع	$I_z(x)$
طول العنصر	L_e
مصفوفة التحويل بين نظامي الإحداثيات المحلي والعام	$\boldsymbol{\Gamma}_e$
مصفوفة التحويل بين حالتي وجود أنماط الجسم الصلب وغيابها	$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المؤشرات السفلية

جر معلوم	t
إزاحة معلومة	u
مستوى المنشأ	S
مستوى العنصر أو العنصر رقم e عند تعيين حالة العنصر	e
مستوى الطبقة/الليف أو الطبقة/الليف رقم r عند تعيين حالته	r
مستوى المقطع أو المقطع رقم s عند تعيين حالة المقطع	s
حقل الإزاحة	d
حقل القوة	f
الخطوة الحالية لمتجه القوة/الإزاحة الخارجية	n

المؤشرات العلوية

داخلي	int
خارجي	ext
متبقٍ	R
التكرار رقم k على مستوى المنشأ	k
التكرار رقم j على مستوى العنصر	j

النماذج التكوينية اللاخطية

A_g	المساحة الإجمالية للمقطع العرضي
A_{st}	مساحة مقطع حديد التسليح العرضي
b	عرض مقطع العنصر
c	معامل معدل التدهور التباطؤي
E	معامل يونغ
$E_{adjusted}$	معامل المرونة المعدل للعنصر المرن الخطي في نموذج اللدونة المركزة
E_{axial}	معامل مرونة النابض المحوري لعنصر صفري الطول
E_{bp}	معامل إعادة التحميل عند نقطة الانكسار
E_c	معامل ما بعد بلوغ السعة (تليّن الانفعال)
E_{hys}	سعة الطاقة التباطؤية ($= \gamma \sigma_y \varepsilon_y$)
E_i	الطاقة التباطؤية المبددة خلال رحلة التحميل رقم i ($= \Delta\varepsilon[\sigma_{i-1} + \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_{i-1})]$)
E_s	معامل تصلد الانفعال
E_{shear}	معامل مرونة النابض العرضي لعنصر صفري الطول
E_t	معامل إعادة التحميل المستهدف
E_{tan}	المعامل المماسي
E_u	معامل التفريغ
f'_c	مقاومة ضغط الخرسانة
F_y	قوة الخضوع
G	معامل القص
h	ارتفاع مقطع العنصر

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$K_{adjusted}$	الجساءة الابتدائية المعدلة للعنصر المرن الخطي في نموذج اللدونة المركزة
K_{BC}	الجساءة الابتدائية للعمود
$K_{combined}$	الجساءة الدورانية الابتدائية المركبة للعنصر المرن الخطي والعنصر اللاخطي
K_{deg}	جساءة متدهورة بعد الذروة لعنصر صفري الطول
K_e	الجساءة المرنة الابتدائية
K_{linear}	الجساءة الابتدائية للعنصر المرن الخطي في نموذج اللدونة المركزة
K_{LP}	الجساءة الابتدائية للعنصر الدوراني اللاخطي في نموذج اللدونة المركزة
$K_{rotation}$	الجساءة الدورانية الابتدائية
K_s	جساءة تصلد الانفعال
K_{shear}	جساءة القص الابتدائية
K_{stiff}	الجساءة الابتدائية للنابض العرضي صفري الطول في نموذج حالة الحد
K_{deg}^t	الجساءة المتدهورة بعد الذروة
K_{unload}	جساءة التفريغ
L	طول العنصر
M_r	العزم المتبقي
M_u	العزم الأقصى (عزم الذروة)
M_y	عزم الخضوع
p	القوة المحورية
V_{fail}	قوة القص عند نقطة فشل القص
V_r	مقاومة القص المتبقية
V_u	سعة القص
β	معلمة التبديد التباطؤي
γ	معامل سعة الطاقة التباطؤية ($E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$)
$\gamma_{adjusted}$	معامل سعة تباطؤية معاير في نموذج اللدونة المركزة
Δ_{BC}	التشوه الجانبي للعمود
Δ_5	التشوه الجانبي بين الطوابق عند نقطة فشل القص وفق تعريف Elwood & Moehle (2003)
Δ_{spring}	تشوه النابض صفري الطول
Δ_y	إزاحة الخضوع
ε_{10}	نقطة الانعطاف بين تفريغ الإجهاد السالب وإعادة تحميل الإجهاد الموجب
ε_5	نقطة الانعطاف بين تفريغ الإجهاد الموجب وإعادة تحميل الإجهاد السالب
ε_{bp}	انفعال نقطة الانكسار
ε_r	الانفعال المتبقي
ε_t	الانفعال عند نقطة إعادة التحميل المستهدفة
ε_u	الانفعال عند نقطة الذروة
ε_y	انفعال الخضوع
θ_r	الدوران المتبقي
θ_u	الدوران الأقصى (دوران الذروة)
θ_y	دوران الخضوع
κ_d	معامل الانفعال (الإزاحة) المستهدف لتعيين نقطة الانكسار
κ_f	معامل الإجهاد (القوة) المستهدف لتعيين نقطة الانكسار
λ	معامل المقاومة المتبقية ($V_r = \lambda V_{fail}$)
ν	مقاومة القص الاسمية ($= V_u / A_g$)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ρ''	نسبة التسليح العرضي $(= A_{st}/bh)$
σ_{bp}	إجهاد نقطة الانكسار
σ_r	الإجهاد المتبقي
σ_{ref}	الإجهاد المرجعي لفرع ما بعد بلوغ السعة
$\sigma_{ref,bp}$	الإجهاد المرجعي لتعيين نقطة الانكسار
σ_t	الإجهاد عند نقطة إعادة التحميل المستهدفة
σ_u	الإجهاد الأقصى (إجهاد الذروة)
σ_y	إجهاد الخضوع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المصطلحات

المفاهيم الأساسية في التحليل الإنشائي

القوة المحورية: قوة تعمل على امتداد طول العنصر فتسبب الشد أو الضغط.
عزم الانحناء: العزم الداخلي الذي يسبب انحناء العنصر.
التوافق: شروط تضمن استمرارية التشوه في المنشأ.
التشوه: تغير شكل المنشأ أو أبعاده بفعل الأحمال المطبقة.
درجة الحرية (DOF): إزاحة أو دوران مستقل يمكن أن يحدث عند نقطة إنشائية.
الاتزان: حالة تتوازن فيها جميع القوى والعزوم المؤثرة في المنشأ.
المرونة الإنشائية: مقلوب الجساءة، وتمثل سهولة التشوه.
قوة القص: قوة داخلية عمودية على المحور الطولي للعنصر تقاوم الانزلاق.
التحديد الاستاتيكي: صفة منشأ يمكن تعيين قواه الداخلية من معادلات الاتزان وحدها.
عدم التحديد الاستاتيكي: صفة منشأ يتطلب تعيين قواه الداخلية معادلات توافق إضافية.
الجساءة: مقاومة المنشأ أو المكوّن للتشوه.
الانفعال: التشوه لكل وحدة طول في المادة.
الإجهاد: القوة الداخلية لكل وحدة مساحة في المادة.

خصائص المواد وسلوكها

الزحف: تشوه يعتمد على الزمن تحت إجهاد ثابت.
المرونة المادية: خاصية تتيح للمادة استعادة شكلها الأصلي بعد إزالة الأحمال.
تدهور المادة: انخفاض مقاومة المادة أو جساءتها بسبب التقادم أو التحميل المتكرر.
اللدونة: سلوك المادة بعد تجاوز حد المرونة، ويتضمن تشوهات دائمة.
نسبة بواسون: نسبة الانفعال الجانبي إلى الانفعال المحوري في مادة تحت تحميل محوري.
التمدد الحراري: تشوه تسببه تغيرات درجة الحرارة.
المقاومة القصوى: أكبر إجهاد تستطيع المادة تحمله قبل الفشل.
مقاومة الخضوع: الإجهاد الذي تنتقل عنده المادة من السلوك المرن إلى السلوك اللدن.
معامل يونغ: مقياس جساءة المادة في مجال المرونة الخطية.

المعايير والإرشادات

AASHTO: الجمعية الأمريكية لمسؤولي الطرق السريعة والنقل في الولايات.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ACI 318: "متطلبات كود البناء للخرسانة الإنشائية" الصادرة عن المعهد الأمريكي للخرسانة (ACI).
AISC: مواصفة المعهد الأمريكي للإنشاءات الفولاذية.
ASCE 7: الحد الأدنى لأحمال التصميم والمعايير المرتبطة بها للمباني والمنشآت الأخرى.
ASCE 41: معيار "التقييم الزلزالي وتدعيم المباني القائمة".
الكود الأوروبي 2: المعيار الأوروبي للمنشآت الخرسانية المسلحة ومسبقة الإجهاد.
الكود الأوروبي 8: المعيار الأوروبي للتصميم الإنشائي المقاوم للزلازل.
FEMA P-58: دليل الوكالة الفدرالية لإدارة الطوارئ للتقييم الزلزالي القائم على الأداء.
IBC: "كود البناء الدولي" الذي يقدم إرشادات للتصميم القائم على الأداء.
SEAOC Vision 2000: إطار للهندسة الزلزالية القائمة على الأداء.
UBC: "كود البناء الموحد"، وهو كود نموذجي تاريخي للبناء.

التحليل الإنشائي الخطي

الترخيم: الإزاحة الرأسية أو الأفقية لنقطة في منشأ.
حمل الطلب: القوى أو الإزاحات الجانبية المقدرة التي يتوقع أن يتعرض لها المنشأ أثناء حدث زلزالي، استناداً إلى حركة أرضية أو هدف أداء محدد.
طريقة العناصر المحددة (FEM): طريقة عددية لتقريب حلول المسائل الإنشائية المعقدة.
التحليل المرن الخطي: تحليل يفترض التناسب بين الأحمال والتشوهات ضمن المجال المرن.
التحليل المصفوفي: منهج حاسوبي يستخدم المصفوفات لحل الأنظمة الإنشائية الخطية.
طريقة توزيع العزوم: طريقة تكرارية لتحليل الجوائز والإطارات غير المحددة استاتيكياً.
مبدأ التراكب: ينص على أن الاستجابة المركبة لنظام هي مجموع استجاباته المنفردة للأحمال.

التحليل اللاخطي

اللاخطية الهندسية: تنشأ عندما تغير التشوهات الكبيرة هندسة المنشأ فتؤثر في استجابته.
التباطؤ: تبديد الطاقة أثناء التحميل الدوري، ويشيع في الأنظمة اللاخطية.
الطرائق التكرارية: تقنيات، مثل نيوتن–رافسون، لحل المعادلات اللاخطية في التحليل الإنشائي.
الاعتماد على مسار التحميل: صفة أنظمة لاخطية تعتمد استجابتها على ترتيب الأحمال المطبقة.
اللاخطية المادية: تحدث عندما تنحرف علاقة الإجهاد–الانفعال عن الخطية، كما في اللدونة أو التشقق.
الانبعاج اللاخطي: عدم استقرار يحدث في العناصر النحيفة تحت الأحمال المحورية بعد تجاوز حد المرونة.
تأثير P–Delta: آثار ثانوية للقوى المحورية في تشوه المنشأ بسبب تغير الهندسة.
سلوك التليّن: انخفاض الجساءة مع ازدياد التشوه، وهو سلوك نموذجي في المنشآت المتضررة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الديناميكا الإنشائية

العزل القاعدي: تقنية تفصل حركة المنشأ عن حركة الأرض فتخفض القوى الزلزالية.

التخميد: آلية لتبديد الطاقة تقلل الحركة الاهتزازية.

التحليل الديناميكي: تقييم استجابة المنشأ تحت أحمال متغيرة زمنياً.

الشكل النمطي: نمط تشوه المنشأ عند تردد طبيعي معين.

التردد الطبيعي: التردد الذي يميل المنشأ عنده إلى الاهتزاز الحر.

طيف الاستجابة: رسم يبين أقصى استجابة إنشائية عبر مجال من الترددات الطبيعية لحركة أرضية محددة.

تحليل السجل الزمني: تحليل ديناميكي يستخدم سجلات تفصيلية للحركة الأرضية مدخلاتٍ له.

هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)

المعدل السنوي للتجاوز (λ): احتمال أن تتجاوز الحركة الأرضية مستوى شدة معيناً خلال سنة.

منحنى السعة: رسم يبين العلاقة بين الطلب الإنشائي، كالإزاحة، وقص القاعدة أو القوة المطبقة.

مخطط السعة: تمثيل بياني للاستجابة اللاخطية للمنشأ، ويعرض غالباً سلوك القوة–الإزاحة.

طيف السعة: تحويل منحنى السعة إلى إحداثيات طيفية لمقارنة الطلب الإنشائي بالطلب الزلزالي عادةً.

دالة السعة: دالة رياضية تصف مقاومة المنشأ بدلالة الإزاحة أو التشوه.

آلية الانهيار: نمط فشل يتميز بتكوّن عدد كاف من المفاصل اللدنة أو أنماط التشوه بما يؤدي إلى فقد الاستقرار أو قدرة حمل الأحمال.

الطيف الشرطي: طيف استجابة يمثل التسارعات الطيفية المتوقعة عند فترات متعددة، مشروطة بتسارع طيفي مستهدف عند فترة محددة.

حالة الضرر (DS): تصنيف الضرر الإنشائي إلى مستويات مثل طفيف أو متوسط أو شديد أو انهيار.

منحنى الطلب: تمثيل للطلبات الزلزالية، عادةً بالتسارع والإزاحة الطيفيين.

معلمة الطلب الهندسي (EDP): كمية استجابة قابلة للقياس، كالإزاحة أو التسارع أو الانفعال، تستخدم لتقييم أداء المنشأ تحت شروط تحميل محددة.

تحليل المخاطر الزلزالية الهندسي (ESRA): عملية تكميم الآثار المحتملة للزلازل.

منحنى الهشاشة: تمثيل احتمالي لإمكان تجاوز حالة ضرر عند مقياس شدة معين.

معادلة التنبؤ بالحركة الأرضية (GMPE): نموذج رياضي يقدر شدة الحركة الأرضية المتوقعة، مثل التسارع الأرضي الأقصى أو التسارع الطيفي، في موقع ما استناداً إلى مقدار الزلزال والمسافة وظروف الموقع وغيرها.

المسافة البؤرية: المسافة المستقيمة من الموقع إلى بؤرة الزلزال التي يبدأ عندها التمزق داخل الأرض.

حالة الحد: عتبة لا يعود المنشأ بعدها مستوفياً لمعايير الأداء.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أهداف الأداء: النتائج الإنشائية المطلوبة أثناء الأحداث الزلزالية، مثل الإشغال الفوري أو سلامة الأرواح أو منع الانهيار.

نقطة الأداء: تقاطع منحنيي السعة والطلب، وتبين الأداء المتوقع تحت التحميل الزلزالي.

الوظيفية بعد الزلزال: قدرة المنشأ على مواصلة التشغيل أو العودة إلى الخدمة بعد الزلزال بوقت قصير.

تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي (PSHA): طريقة تدمج حالات عدم اليقين لتقدير احتمالات الخطر الزلزالي.

الوفرة والمتانة: خصائص إنشائية تضمن إعادة توزيع الأحمال ومقاومة الفشل أثناء الأحداث القصوى.

طيف الاستجابة: رسم يبين ذروة استجابة سلسلة من المهتزات أحادية درجة الحرية ذات فترات طبيعية مختلفة للحركة الأرضية نفسها، كالتسارع أو السرعة أو الإزاحة.

استراتيجيات التدعيم: طرائق تقوية المنشآت القائمة أو ترقيتها لتحسين أدائها الزلزالي.

منحنى الخطر الزلزالي: العلاقة بين شدة الحركة الأرضية واحتمال تجاوزها السنوي في موقع معين.

تفكيك الخطر الزلزالي: تحليل نتائج الخطر الزلزالي الاحتمالي لتحديد الإسهامات النسبية لسيناريوهات الزلازل المختلفة في خطر موقع معين، بما فيها المقدار والمسافة وخصائص المصدر.

خريطة الخطر الزلزالي: تمثيل مرئي للتوزيع المكاني لمستويات الخطر الزلزالي عند احتمالات مختلفة خلال مدة زمنية محددة.

المرونة الزلزالية: قدرة منشأ أو مجتمع على استعادة وظيفته سريعاً بعد الزلزال.

نموذج المصدر الزلزالي: التوزيع المكاني والزماني للزلازل المحتملة.

حالة حد قابلية الخدمة (SLS): تضمن بقاء المنشأ عاملاً مع تشوه محدود تحت الأحمال العادية أو الزلازل الطفيفة.

مؤشر الهشاشة الإنشائية: مقياس كمي لقابلية المنشأ للتضرر زلزالياً.

طيف الخطر المستهدف: طيف استجابة مشتق من تحليل الخطر الزلزالي ويستخدم لاختيار الحركات الأرضية أو تحجيمها.

حالة الحد الأقصى (ULS): تمنع الانهيار أو الفشل الكارثي تحت الأحداث الزلزالية الشديدة.

طيف الخطر المنتظم (UHS): طيف استجابة يمثل تسارعات طيفية ذات احتمال التجاوز نفسه في موقع معين، بما يضمن اتساق مستويات الخطر عبر الفترات الإنشائية المختلفة.

آليات الفشل

الانبعاج: عدم استقرار مفاجئ في عنصر تحت أحمال ضاغطة.

التعب: ضرر تراكمي يسببه التحميل الدوري ويؤدي إلى الفشل مع الزمن.

فشل الانحناء: فشل بسبب الانحناء، ويتضمن غالباً خضوع العنصر أو كسره.

ميكانيكا الكسر: دراسة انتشار الشقوق وفشل المواد.

فشل القص: نمط فشل يتميز بالانزلاق على مستوى بسبب إجهادات قص مفرطة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التقنيات الحاسوبية

معايير التقارب: شروط تضمن بلوغ الحلول التكرارية دقة مقبولة.

طريقة الفروق المحددة (FDM): منهج عددي لحل المعادلات التفاضلية في التحليل الإنشائي.

الاستقرار العددي: ضمان بقاء الحلول الحاسوبية محدودة خلال التكرارات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

الصفحات التمهيدية i

استهلال i
إشعار قانوني ii
إهداء iii
تقديم iv
تمهيد v
شكر وتقدير xvii
دليل القارئ xviii
برنامج اكتشاف الأخطاء xix
الرموز xx
المصطلحات xxviii
المحتويات (I–IV) xxxiii
قائمة الأشكال (I–IV) lxxxiii
قائمة الجداول (I–IV) cvii
عن المؤلف cxiii

I تاريخ الميكانيكا والتحليل الإنشائي 1

الخط الزمني قبل الميلاد 2

الخط الزمني الميلادي 3

1 مقدمة 5
1.1 أهمية تاريخ الهندسة الإنشائية 5
1.2 المنهج والغاية 6
1.3 الصورة الكبرى 6
1.3.1 موضوعياً 6
1.3.2 تاريخياً 7
1.4 المراجع العلمية 8

2 قبل المنشآت: الأعداد والحروف 11
2.1 الأعداد 11

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2.1.1 النظامان الستيني والاثنا عشري 11
2.1.2 الزوايا 12
2.1.3 الزمن 13
2.1.4 النظام العشري والأرقام الهندية–العربية 13
2.1.5 تاريخ π 14
2.1.6 الأعداد غير النسبية والنسبة الذهبية 15
2.2 الحروف: تاريخ أنظمة الكتابة 15
2.2.1 أقدم السجلات: القطع وعصي العد والطين 15
2.2.2 المسمارية: أول نظام كتابة في العالم 16
2.2.3 الهيروغليفية المصرية والتراث التصويري 16
2.2.4 الفينيقيون واختراع الأبجدية 18

3 الحضارات القديمة **22**
3.1 الحضارات المبكرة وأصول العمارة الضخمة 22
3.1.1 بلاد الرافدين: الزقورات والمنشآت الطينية؛ نحو 3100–500 قبل الميلاد 22
3.1.2 أمريكا الوسطى: أهرام المايا والأزتك؛ نحو 400 قبل الميلاد–1521 ميلادية 23
3.1.3 مصر؛ نحو 2700–1000 قبل الميلاد 24
3.1.4 مقارنة بلاد الرافدين وأمريكا الوسطى ومصر 27
3.2 العصور الكلاسيكية: الهندسة والنظرية والإمبراطورية 30
3.2.1 فارس: المنصات الإمبراطورية والجسور والقنوات الجوفية 30
3.2.2 الإسهامات العربية–الإسلامية: ابتكارات في الهندسة الإنشائية 31
3.2.3 الإسهامات اليونانية في الاستاتيكا والميكانيكا الإنشائية 33
3.2.4 روما: الخرسانة والأقواس والبنية التحتية 36
3.2.4.1 فيتروفيوس: أول منظّر إنشائي 38
3.3 التقاليد الرياضية والإنشائية في الهند والصين واليابان 39
3.3.1 الصين: علم الزلازل والجسور والابتكار الميكانيكي 40
3.3.2 الهند: الرياضيات والمواد والعمارة الضخمة 40
3.3.3 اليابان: الصمود الزلزالي والمنشآت المتكيفة 40
3.3.4 الخلاصة والأثر العالمي 41

4 الكاتدرائيات القوطية **43**
4.1 مقدمة 43
4.2 من الكتلة الرومانسكية إلى الهيكل القوطي 44
4.3 الكاتدرائيات القوطية: التاريخ والمنطق الإنشائي 44
4.3.1 معالم تاريخية 44
4.3.2 المصطلحات الأساسية والعناصر الإنشائية 47
4.3.3 الثورة الإنشائية القوطية 47
4.3.4 السمات الإنشائية 50
4.3.4.1 قدرة إنشائية مدهشة على البقاء 52
4.3.4.2 تطور التحليل الإنشائي 52
4.4 حكاية أربع كاتدرائيات 55
4.4.1 كاتدرائية بوفيه: دراسة شهيرة في الحدود الإنشائية 55

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4.4.2 كاتدرائية ميلانو: الهندسة والسياسة والجدل الإنشائي . . . 61
4.4.3 بازيليك القديس بطرس: من الأزمة إلى التحليل العلمي . . . 66
4.4.4 سانتا ماريا دل فيوري: انتصار حدس برونليسكي الهندسي . . . 70
4.5 جدول موجز . . . 74

5 نشوء العقل العلمي **78**
5.1 مقدمة . . . 78
5.2 العالم الإسلامي: بيت الحكمة . . . 79
5.3 الثورة العلمية . . . 80
5.3.1 أسس المنهج الجديد . . . 80
5.3.1.1 نهاية الفلسفة الطبيعية . . . 80
5.3.1.2 دور الرياضيات والتنوير . . . 81
5.3.1.3 فرنسيس بيكون وميلاد التجريبية . . . 81
5.3.1.4 العقلانية: منهج ديكارت الاستنباطي . . . 81
5.3.1.5 تحول الجامعات . . . 81
5.3.2 اكتشافات ثورية ومناهج جديدة . . . 82
5.3.2.1 فلك الملاحظة: تيخو براهي . . . 82
5.3.2.2 الفلك الرياضي: يوهانس كبلر . . . 82
5.3.2.3 من الملاحظة إلى النظرية: نموذج للتقدم العلمي . . . 82
5.3.2.4 ثورة التشريح: أندرياس فيزاليوس . . . 83
5.3.2.5 جهاز الدوران: وليم هارفي . . . 83
5.3.2.6 غاليليو: لغة الطبيعة الرياضية . . . 83
5.3.3 المؤسسات العلمية المبكرة . . . 84
5.3.3.1 إيطاليا: أكاديمية لينتشي . . . 84
5.3.3.2 إيطاليا: أكاديمية *تشيمنتو* . . . 84
5.3.4 التوليف والمأسسة . . . 85
5.3.4.1 نيوتن: توليف المناهج . . . 85
5.3.4.2 الجمعية الملكية و*أكاديمية العلوم* . . . 85
5.3.4.3 التجربة والنظرية في العلم الحديث . . . 86
5.4 عصر التنوير: جسر ثقافي . . . 87
5.4.1 انتشار التفكير العلمي . . . 87
5.4.2 صعود التعليم التقني: مدارس الهندسة العسكرية . . . 87
5.4.3 من الفلسفة الطبيعية إلى العلم التطبيقي . . . 88
5.5 خاتمة . . . 88

فاصل أول: من الفلسفة الطبيعية إلى الميكانيكا التحليلية **91**

6 مجمع الرواد **92**
6.1 مقدمة . . . 93
6.2 الفلسفة والهندسة والاستاتيكا المبكرة . . . 94
6.2.1 موزي (نحو 470–391 ق.م.) . . . 94
6.2.2 أرسطو (384–322 ق.م.) . . . 95
6.2.3 إقليدس (نحو 300 ق.م.) . . . 95

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.2.4 أرخميدس (نحو 287–212 ق.م.) . . . 96
6.2.5 أبولونيوس البرغاوي (نحو 262–190 ق.م.) . . . 97
6.3 الهندسة والآلات ونقل المعرفة . . . 98
6.3.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو، نحو 80–70 ق.م. إلى ما بعد 15 ق.م. . . . 98
6.3.2 هيرون الإسكندري (نشط نحو 62م) . . . 98
6.3.3 ابن الهيثم (نحو 965–1040م) . . . 99
6.3.4 أبو الريحان البيروني (973–1048) . . . 100
6.3.5 الخازني (نشط 1115–1130م) . . . 100
6.3.6 فيلار دو أونيكور (نشط نحو 1225–1250) . . . 101
6.4 العمارة والتناسب والشكل الإنساني . . . 101
6.4.1 ليون باتيستا ألبيرتي (1404–1472) . . . 102
6.4.2 ليوناردو دا فينشي (1452–1519) . . . 102
6.4.3 أندريا بالاديو (1508–1580) . . . 111
6.4.4 سيباستيانو سيرليو (1475–1554) . . . 112
6.4.5 جياكومو باروتسي دا فينيولا (1507–1573) . . . 113
6.4.6 هوبير غوتييه (1660–1737) . . . 113
6.4.6.1 جان-رودولف بيرونيه . . . 117
6.4.6.2 الانتقال من التناسب إلى الخبرة . . . 118
6.5 من النظام الرياضي إلى الميكانيكا . . . 119
6.5.1 فرنسيس بيكون (1561–1626) . . . 119
6.5.2 نيكولاس كوبرنيكوس (1473–1543) . . . 120
6.6 من الاستاتيكا الأولية إلى الثورة العلمية . . . 121
6.6.1 سيمون ستيفن (1548–1620) . . . 121
6.6.2 غاليليو غاليلي (1564–1642) . . . 122
6.6.3 رينيه ديكارت (1596–1650) . . . 126
6.6.4 كريستيان هوينغنس (1623–1695) . . . 127
6.6.5 بليز باسكال (1623–1662) . . . 129
6.6.6 روبرت هوك (1635–1703) . . . 129
6.6.7 إسحاق نيوتن (1642–1727) . . . 135
6.6.8 غوتفريد لايبنتس (1646–1716) . . . 139
6.6.9 أسرة برنولي (1654–1782) . . . 141
6.6.9.1 ياكوب برنولي (1654–1705) . . . 142
6.6.9.2 يوهان برنولي (1667–1748) . . . 144
6.6.9.3 فاصل: *Opera Omnia* . . . 144
6.6.9.4 دانيال برنولي (1700–1782) . . . 144
6.6.10 ليونهارت أويلر (1707–1783) . . . 147
6.7 من الميكانيكا التحليلية إلى نظرية الوسط المتصل والمنشآت . . . 151
6.7.1 شارل-أوغستان دو كولوم (1736–1806) . . . 151
6.7.2 سيميون دني بواسون (1781–1840) . . . 153
6.7.3 كلود لوي ماري هنري نافييه (1785–1836) . . . 154
6.7.4 جان لو رون دالمبير (1717–1783) . . . 158

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.7.5 جوزيف-لوي لاغرانج (1736–1813) . . . 158
6.7.6 كوشي (أوغستان-لوي 1789–1857) . . . 159
6.7.7 جورج غرين (1793–1841) . . . 160
6.7.8 أديمار جان كلود باريه دو سان-فنان (1797–1886) . . . 160
6.8 صعود الهندسة الإنشائية بوصفها تخصصاً . . . 161
6.8.1 كارل كولمان (1821-1881) . . . 161
6.8.2 ويليام جون ماكورن رانكين (1820-1872) . . . 162
6.8.3 كريستيان أوتو مور (1835–1918) . . . 163
6.8.4 هنري موزلي (1801–1872) . . . 164
6.8.5 جيمس كليرك ماكسويل (1831–1879) . . . 165
6.9 المؤلفات التاريخية الكبرى في الميكانيكا . . . 166
6.9.1 إسحاق تودهَنتر (1820–1884) . . . 166
6.9.2 ستيفن بروكوفييفيتش تيموشينكو (1878–1972) . . . 166
6.9.3 رينيه دوغاس (1897–1957) . . . 167
6.9.4 كليفورد أمبروز تروسدل الثالث (1919–2000) . . . 168
6.10 نساء بارزات . . . 168
6.11 التحليل والسياق . . . 170
6.11.1 المنافسة والسرية والتقدم العلمي . . . 170
6.11.1.1 طرائق الإخفاء . . . 170
6.11.1.2 النزاعات وآثارها . . . 176
6.11.2 الانتقال إلى العلوم الهندسية الحديثة . . . 177
6.11.3 الثورة الفرنسية في التعليم الهندسي . . . 178
6.12 الخلاصة: من الفلسفة الطبيعية إلى العلوم الهندسية . . . 178
6.12.1 جداول موجزة . . . 179
6.12.1.1 المساهمون الرئيسيون وتأثيرهم . . . 179
6.12.1.2 المنشورات البارزة . . . 181
6.12.1.3 مؤسسات التعليم الهندسي . . . 183
6.12.1.4 النزاعات الفكرية الكبرى . . . 183
6.12.1.5 الخط الزمني التاريخي . . . 184

الفاصل الثاني: من رؤى العصور الوسطى إلى الميكانيكا الإنشائية الحديثة (1351–1879) 189

7 المقاومة والمحور المحايد وإجهادات الانحناء 193
7.1 مقدمة . . . 193
7.2 المقاومة . . . 194
7.2.1 ليوناردو (≃ 1490) . . . 194
7.2.2 غاليليو (1564–1642) . . . 194
7.2.3 بيكمان (1588–1637) . . . 197
7.2.4 موسخنبروك (1692–1761) . . . 197
7.3 إجهادات الانحناء الداخلية: دراسة في ثلاثة فصول . . . 198
7.3.1 الفصل الأول: المسار التجريبي . . . 198
7.3.1.1 ليوناردو (≃ 1490) . . . 198

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.3.1.2 غاليليو (1632) 201
7.3.2 الفصل الثاني: المسار التجريبي–مسار الوسط المتصل 203
7.3.2.1 ديكارت (1644) 203
7.3.2.2 لايبنتس (1684) 204
7.3.2.3 ماريوت (1686) 205
7.3.2.4 باران (1713) 207
7.3.2.5 كولوم (1773) 207
7.3.2.6 يونغ (1807) 210
7.3.2.7 سان-فنان (1855) 212
7.3.2.8 كليبش (1862) 212
7.3.2.9 سان-فنان (1866) 213
7.3.3 الفصل الثالث: المسار التحليلي 214
7.3.3.1 ياكوب برنولي (1687) 214
7.3.3.2 أويلر (1727) 215
7.4 خلاصة 217
7.5 الانتقال 218

8 الهندسة التفاضلية للمنحنيات 220
8.1 مقدمة: الأصول الهندسية للانحناء والمنحني المرن 220
8.2 الانحناء 221
8.2.1 أوريم (1351) 222
8.2.2 نيوتن (1671) 223
8.2.3 لايبنتس (1686) 225
8.2.4 يوهان برنولي (1691) 226
8.2.5 ياكوب برنولي؛ المبرهنة الذهبية (1694) 227
8.2.6 كستنر (1758) 231
8.2.7 خلاصة 232
8.3 المنحنى المتطور والمنحنى الالتفافي 233
8.3.1 هوينغنس (1658–1673) 233
8.3.2 القيود العملية والإرث 234
8.3.3 ملاحظات ختامية 235
8.4 من المنحنيات الهندسية إلى الميكانيكا الإنشائية 236
8.5 نظرة إلى الأمام: 238

9 التحديات الكبرى: السلسلة المعلقة والمنحني المرن وميلاد الميكانيكا التحليلية 239
9.1 الأسس الرياضية: من الهندسة إلى حساب التفاضل والتكامل 239
9.1.1 الإرث اليوناني: من إقليدس إلى الفصل بين الهندسي والميكانيكي 240
9.1.2 ثورة ديكارت: الإحداثيات والجبر 240
9.1.3 ثورة حساب التفاضل والتكامل 241
9.1.4 من المنحنيات إلى الميكانيكا: الجسر 241
9.1.5 اكتمال التحول 242
9.1.6 الترميز الرياضي 243
9.2 تحدي السلسلة المعلقة (مايو 1690–يونيو 1691) 243

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.2.1 الدراسات المبكرة 243
9.2.1.1 ليوناردو 243
9.2.1.2 غاليليو 244
9.2.1.3 ستيفن (1634) 245
9.2.1.4 هوينغنس (نحو 1646) 245
9.2.2 التحديات 246
9.2.2.1 فاصل: المصطلحات 247
9.2.2.2 تحدي ياكوب برنولي في *funicularia*؛ 1690 247
9.2.2.3 رد لايبنتس وتعديل التحدي؛ أواخر 1690 249
9.2.3 الحلول الرئيسة الثلاثة 250
9.2.3.1 يوهان برنولي (قُدم في ديسمبر 1690 ونُشر في يونيو 1691) 250
9.2.3.2 هوينغنس (قُدم في أكتوبر 1690 ونُشر في مايو 1691) 250
9.2.3.3 لايبنتس (قُدم في مايو 1691 ونُشر في يونيو 1691) 252
9.2.3.4 النشر والحسم النهائي؛ يونيو 1691 253
9.2.3.5 التحليل بعد النشر والإرث 253
9.2.4 خاتمة 255
9.2.4.1 توحيد منسي 255
9.2.4.2 الإرث الرياضي 255
9.2.4.3 مفارقة ياكوب 255
9.3 تحدي المنحني المرن (1690–1744) 256
9.3.1 تحدي ياكوب برنولي (1690) 256
9.3.2 الحلول 259
9.3.2.1 حل ياكوب برنولي (1694) 260
9.3.2.1.1 رد فعل هوينغنس (1694) 264
9.3.2.1.2 فواصل تاريخية 266
9.3.2.1.2.1 قوة لايبنتس الحية *Vis Viva* وتطور مفاهيم الطاقة 266
9.3.2.1.2.2 تحدي منحنى أسرع هبوط (1696) 268
9.3.2.1.2.3 حل يوهان برنولي (1697) 270
9.3.2.1.2.4 حل دانيال برنولي (1742) 273
9.3.2.1.2.5 المسائل متساوية القياس وحساب التغايرات 275
9.3.2.2 حل أويلر (حساب التغايرات) (1744) 276
9.3.2.2.1 تصنيف أنواع المنحنيات المرنة 282
9.3.2.3 الإطار التغايري الحديث 290
9.3.3 ملخص زمني للتحديين الأولين 292
9.4 تحد مجهول: جسر بين المسائل (1724) 295
9.4.1 تعاون برنولي–أويلر: التوحيد الأول (1728) 296
9.4.1.1 دانيال برنولي (إرساء مبدأ العزم–الانحناء) 1728 296
9.4.1.2 أويلر (من البصيرة الهندسية إلى الثورة الرياضية) (1732) 298
9.4.1.3 نظرية أويلر–برنولي 302
9.5 نظرية الانبعاج: من الملاحظة إلى الأحمال الحرجة 303
9.5.1 الأعمال المبكرة 303

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.5.1.1 ليوناردو (نحو تسعينيات القرن الخامس عشر) . . . 303
9.5.1.2 بيتر فان موسخنبروك (1729) . . . 305
9.5.2 أويلر (1759) . . . 305
9.6 نظرية أويلر العامة: التوحيد الكامل (1771) . . . 308
9.7 الخلاصة . . . 312

10 ميكانيكا الأوساط المتصلة: أساس التحليل الإنشائي 319
10.1 النظريات الجزيئية ونظريات الأوساط المتصلة في المرونة . . . 320
10.1.1 نظرة عامة . . . 320
10.1.2 من غاليليو إلى المدرسة الجزيئية الفرنسية . . . 320
10.1.3 صعود مقاربة الوسط المتصل . . . 321
10.1.4 جدول المقارنة . . . 322
10.1.5 أي النظريتين سادت؟ . . . 322
10.1.6 المراجع التاريخية . . . 322
10.2 ميكانيكا الأوساط المتصلة . . . 325
10.3 مقدمة . . . 325
10.3.1 الثورات الفرنسية وميلاد المرونة الحديثة . . . 325
10.3.2 أسس ميكانيكا الأوساط المتصلة ونظرية المرونة . . . 326
10.3.2.1 كولوم (1736–1806) والأساس الهندسي . . . 326
10.3.2.2 لاغرانج (1736–1813) والأساس التحليلي . . . 327
10.3.2.3 طرائق فورييه (1768–1830) الرياضية . . . 328
10.3.2.4 كوشي (1789–1857) ومفهوم الإجهاد . . . 328
10.3.2.5 نسبة بواسون (1781–1840) وتبسيط كوشي . . . 332
10.3.2.6 تركيب نافييه (1785–1836) وتطبيقه . . . 333
10.3.2.7 ثابتا لامي (1795–1870) للمرونة . . . 333
10.3.2.8 سان-فنان (1797–1886) والطريقة شبه العكسية . . . 334
10.3.2.9 طرائق كلابيرون (1799–1864) القائمة على الطاقة . . . 335
10.3.2.10 إنجاز الفرنسي في منظوره العام . . . 335
10.4 الإطار الرياضي الكامل . . . 336
10.4.1 أويلر وحفظ الكتلة . . . 336
10.4.2 كوشي (1789–1857) واتزان كمية الحركة الخطية . . . 337
10.4.3 اتزان كمية الحركة الزاوية . . . 338
10.4.4 قوانين الديناميكا الحرارية: كلاوزيوس (1822–1888) وتومسون (1824–1907) وديوم (1861–1916) . . . 338
10.4.4.1 القانون الأول (اتزان الطاقة): . . . 338
10.4.5 القانون الثاني (متباينة الإنتروبيا): . . . 339
10.4.6 التطور التاريخي والتركيب الحديث . . . 339
10.5 النظرية التكوينية: سلوك المواد . . . 340
10.5.1 الإطار العام . . . 340
10.5.2 نول (1925–2017) والموضوعية: مبدأ عدم الاكتراث بالإطار المادي . . . 341
10.5.3 غرين (1793–1841) وفرط المرونة . . . 342
10.5.4 فويغت (1850–1919) والتناظر المادي . . . 343

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10.5.5 كولمان (1930–1992) ونول: القيود الديناميكية الحرارية . . . 343
10.5.6 منظور تاريخي: من التجريبية إلى النظرية . . . 344
10.5.7 الصلة بالتحليل الإنشائي . . . 345
10.5.8 ماذا في الاسم؟ تطور الميكانيكا وممارسيها . . . 345
10.5.8.1 تغير هوية المحلل الإنشائي . . . 345
10.5.8.2 من الهوية المهنية إلى المحتوى التخصصي . . . 348
10.5.8.3 مشهد التخصصات اليوم . . . 350
10.5.8.4 الاصطلاحات والعلاقات بينها . . . 350
10.5.8.5 الاصطلاحات المعتمدة في هذا الكتاب . . . 351
10.6 الخلاصة . . . 352

11 التحليل الإنشائي أخيراً: التركيب والتطبيق 356
11.1 مقدمة . . . 357
11.2 اشتقاق مصطلح الهندسة الإنشائية . . . 358
11.3 التطورات المبكرة: العوارض غير محددة استاتيكياً . . . 359
11.3.1 نافييه (1785–1836): أول معالجة منهجية . . . 359
11.3.2 كلابيرون (1799–1864): معادلة العزوم الثلاثة . . . 360
11.4 الانتقال إلى الطرائق العامة . . . 360
11.4.1 ماكسويل (1831–1879): مبرهنة التقابل . . . 360
11.4.2 موهر (1835–1918): الطرائق الهندسية والتناظرات . . . 361
11.4.3 كاستيليانو (1847–1884): طرائق الطاقة . . . 362
11.4.4 مولر–بريسلاو (1851–1925): التنظيم وخطوط التأثير . . . 363
11.4.5 طريقة القوى: التوافق والمطاوعة . . . 363
11.4.6 المفاهيم الأساسية والإجراء . . . 364
11.4.7 طريقة القوى: الملخص والإرث . . . 365
11.5 طريقة الإزاحة: من النظرية إلى التطبيق . . . 366
11.5.1 الأسس النظرية: صيغ الصلابة المبكرة . . . 366
11.5.2 طريقة الميل–الانحراف: الصياغة المنهجية . . . 367
11.5.3 هاردي كروس (1885–1959): طريقة توزيع العزوم . . . 368
11.5.4 الامتدادات والصيغ البديلة . . . 370
11.5.5 طريقة الإزاحة: الملخص والإرث . . . 372
11.6 خطوط التأثير والأحمال المتحركة . . . 372
11.6.1 فينكلر (1835–1888): التطورات المبكرة . . . 373
11.6.2 مبدأ مولر–بريسلاو . . . 373
11.6.3 التطبيقات والإرث . . . 373
11.7 نحو الصياغة المصفوفية: الجسر المفاهيمي إلى الحساب . . . 374
11.7.1 البنية المصفوفية للطرائق الكلاسيكية . . . 374
11.7.2 من التكرار إلى الحل المصفوفي . . . 375
11.7.3 حدود الحساب اليدوي: تمهيد المسرح للحساب . . . 375
11.7.4 الخلاصة: الاستمرارية والتحول . . . 375
11.8 المتطلبات الأساسية للتحليل الإنشائي . . . 376
11.9 ملخص زمني للمساهمين . . . 379

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

11.9.1 الخلاصة 381

12 الطرائق الحاسوبية **384**
12.1 طرائق الفروق المحدودة للأوساط المتصلة 384
12.1.1 بيرسون وريتشاردسون: تحليل إجهادات السدود (1905–1911) 385
12.1.2 طرائق الحل التكرارية 386
12.2 التحليل الإنشائي بالمصفوفات 387
12.2.1 كرون: تحليل الشبكات والتماثلات الإنشائية 387
12.2.2 يوهان هـ. أرجيريس (1913–2004) 388
12.2.3 سياق الطيران (الأجنحة الدلتا): خمسينيات القرن العشرين 388
12.2.4 المكتب الوطني للمعايير/البحرية؛ صموئيل ليفي 389
12.2.5 بوينغ؛ تيرنر وطريقة الصلابة المباشرة 391
12.2.5.1 المطاوعة في مقابل الصلابة: جدل مستمر 393
12.3 طريقة العناصر المحدودة 394
12.3.1 الأسس الرياضية 394
12.3.2 الأسبقية والمصطلحات: ما طريقة العناصر المحدودة وما ليست إياه 398
12.3.3 راي كلوف (1920–2016) 398
12.3.4 الحواسيب المبكرة وبرنامج بيركلي 399
12.3.5 سد نورفورك: أول تطبيق رئيس 400
12.3.6 التحليل اللاخطي والديناميكي (1960–1962) 400
12.4 التوحيد والنشر 402
12.4.1 أوليغ زينكيفيتش (1921–2009) 402
12.4.2 مؤتمر رايت–باترسون (1965) 402
12.4.3 ريتشارد غالاغر (1927–1997) 403
12.4.4 الجدل بين طريقة القوى وطريقة الصلابة 404
12.4.5 قرار ناستران (1969) 404
12.4.6 التعميم 404
12.4.7 الكتب الدراسية والاعتماد العالمي 405
12.4.8 الأثر والتطبيقات الراهنة 406
12.5 الخلاصة والإسهامات الرئيسة 406
12.6 الخاتمة 408

13 من المِعداد إلى الخوارزميات: مسح تاريخي للحوسبة في العلوم والهندسة **410**
13.1 المقدمة 410
13.2 أدوات الحساب القديمة والمبكرة 411
13.3 الآلات الذاتية الميكانيكية وآلات الحساب المبكرة 412
13.4 باباج ولافليس: الأصول المفاهيمية للبرمجة 414
13.5 الحوسبة العلمية التماثلية (1900–1945) 415
13.6 الثورة الرقمية (1945–1960) 416
13.7 لغات البرمجة والبرمجيات العلمية المبكرة 417
13.8 خط زمني للتطورات الحاسوبية الرئيسة 417
13.9 البرمجيات الهندسية والإنشائية المبكرة (1960–1980) 417
13.10 عصر الحاسوب الشخصي واتساع الحوسبة الهندسية (1980–2000) 419

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13.11 المنظومات الحاسوبية الحديثة (2000–الحاضر) . . . 420
13.12 تطور الكتابة التقنية وإعداد التقارير . . . 421
13.13 الخاتمة . . . 422

14 تطور القوة والمبادئ الافتراضية **424**
14.1 المقدمة . . . 425
14.2 العصور القديمة والقوة الإلهية . . . 427
14.2.1 مصر . . . 427
14.2.2 بلاد الرافدين . . . 428
14.2.3 الهند . . . 428
14.3 العصور الكلاسيكية القديمة والفلسفة الطبيعية . . . 429
14.3.1 اليونان . . . 429
14.3.1.1 إمبيدوكليس (494–434 ق.م.) . . . 429
14.3.1.2 أفلاطون (427–348 ق.م.) . . . 430
14.3.1.3 أرسطو (384–322 ق.م.) . . . 432
14.3.1.4 أرخميدس (287–212 ق.م.): برهان “ما يحدث” . . . 433
14.3.1.5 بوسيدونيوس (135–51 ق.م.) والرواقيون . . . 435
14.3.2 الرومان، أفلوطين (204–270) . . . 435
14.3.3 العصر البيزنطي، فيلوبونوس (490–570) . . . 436
14.4 العصور الوسطى والفلسفة المدرسية . . . 437
14.4.1 علماء الإسلام . . . 437
14.4.1.1 ابن سينا (980–1037) . . . 437
14.4.1.2 البغدادي (1080–1165) . . . 438
14.4.2 يوردانوس دي نيموري (نحو 1225–نحو 1260) والثقل الموضعي . . . 438
14.4.3 العصور الوسطى: جامعة باريس . . . 438
14.4.3.1 بوريدان (1295–1358) . . . 438
14.4.3.2 أورسم (1320–1382) . . . 440
14.5 النهضة والثورة العلمية . . . 440
14.5.1 ليوناردو دا فينشي (1452–1519) . . . 441
14.5.2 بينيديتي (1530–1590) . . . 441
14.5.3 باردي (1636–1673) . . . 442
14.5.4 سيمون ستيفن (1548–1620) . . . 442
14.5.5 غاليليو (1564–1642) . . . 446
14.5.6 كبلر (1571–1630) . . . 449
14.5.7 ديكارت (1596–1650) . . . 451
14.5.8 توريتشيلي (1608–1647) . . . 456
14.5.9 واليس (1616–1703) . . . 458
14.5.10 لايبنتس (1646–1716) . . . 458
14.5.11 نيوتن (1642–1726) . . . 460
14.5.12 انيال برنولي (1700–1782) . . . 461
14.5.13 رسالة يوهان برنولي سنة 1715 . . . 462
14.5.14 فارينيون (1654–1722) . . . 464

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.5.15 المبير (1717–1783) . . . 465
14.5.16 كانط (1724–1804) . . . 470
14.5.17 لاغرانج (1736–1813) . . . 470
14.5.18 فوربيه (1768–1830) . . . 474
14.5.19 لازار كارنو (1753–1823) . . . 474
14.6 خاتمة الفصل . . . 476
14.7 الخلاصة . . . 477

الفاصل الثالث: حين تلتقي المعرفة بالشغف **480**

15 العمارة والمنشآت **481**
15.1 المقدمة . . . 482
15.1.1 تنظيم الفصل . . . 483
15.2 التقليد الفيتروفي . . . 484
15.2.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو: أول مؤثر معماري . . . 484
15.2.1.1 فيتروفيوس في التعليم . . . 484
15.2.1.2 فيتروفيوس المهندس . . . 485
15.2.1.3 فيتروفيوس المعماري: الثالوث الباقي . . . 488
15.2.1.4 فيتروفيوس في الرياضيين والعلماء . . . 490
15.2.2 إعادة اكتشاف فيتروفيوس في عصر النهضة . . . 490
15.2.2.1 ليون باتيستا ألبيرتي (1404–1472) . . . 491
15.2.2.2 أندريا بالاديو (1508–1580) . . . 492
15.2.2.3 إعادة ترتيب الثالوث . . . 494
15.2.2.4 ألبيرتي وبالاديو مهندسين . . . 494
15.2.3 القياسات البشرية ومسألة المقياس . . . 497
15.2.3.1 فيتروفيوس: النص المؤسس . . . 498
15.2.3.2 الانتقال في العصور الوسطى . . . 498
15.2.3.3 إحياء عصر النهضة . . . 498
15.2.3.4 القرن العشرون: الموديولور وشارل-إدوار جانيريه لو كوربوزييه (1887–1965) . . . 499
15.2.3.5 من التناسب إلى علم بيئة العمل . . . 502
15.2.3.6 الافتراض الخفي: الاستقلال عن المقياس . . . 502
15.2.3.7 الهندسة التنفيذية: كيف خطط المعلمون البنّاؤون مبانيهم فعلياً . . . 503
15.3 فاصل: المعماريون والمهندسون—فن وعلم؟ . . . 508
15.4 الرواد . . . 510
15.4.1 الدعامة الطائرة: المنطق الإنشائي وقد صار مرئياً . . . 511
15.4.2 غوستاف إيفل (1832–1923) . . . 514
15.4.3 لويس هنري سوليفان (1856–1924) . . . 516
15.4.4 روبرت مايار (1872–1940) . . . 517
15.4.5 أوغست بيريه (1874–1954) . . . 519
15.4.6 إدواردو توروخا ميريت (1899–1961) . . . 520
15.4.7 بيير لويجي نيرفي (1891–1979) . . . 523

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.4.8 ريكاردو موراندي (1902–1989) . . . 528
15.4.9 كريستيان مين (1927–2018) . . . 530
15.4.10 فضل الرحمن خان (1929–1982) . . . 532
15.4.11 مقارنة الـProgettisti: المصممون البنّاؤون وموادهم . . . 534
15.4.11.1 الحديد والمعدن . . . 535
15.4.11.2 الخرسانة المسلحة والأسمنت الحديدي . . . 535
15.4.11.3 الروبلنغ والكابلات . . . 536
15.4.11.4 خيوط مشتركة . . . 536
15.5 التشكل الإنشائي: الشخصيات الرئيسة . . . 536
15.5.1 السلسلة المعلقة . . . 537
15.5.1.1 بولوني (1683–1761) . . . 537
15.5.1.2 أنطوني غاودي (1852–1926) . . . 538
15.5.1.3 إيرو سارينن (1910–1961) . . . 538
15.5.2 القشريات والأغشية . . . 539
15.5.2.1 فراي بول أوتو (1925–2015) . . . 540
15.5.2.2 هاينز إيسلر (1926–2009) . . . 540
15.5.2.3 سيرجيو موسميشي (1926–1981) . . . 541
15.5.3 المنشآت المتبادلة . . . 542
15.5.3.1 التطور التاريخي . . . 543
15.5.3.2 الإحياء الحديث . . . 545
15.5.4 التحسين الرياضي: ماكسويل وميشيل وبيكر وبيغيني . . . 545
15.5.4.1 ماكسويل (1831–1879) . . . 546
15.5.4.2 ميشيل (1870–1959) . . . 547
15.5.4.3 بيكر وبيغيني . . . 548
15.5.5 خاتمة: حين تصادم المعماريون والمهندسون . . . 550
15.5.5.1 الحالة الأولى: بورديه في مقابل إيفل (باريس، 1889) . . . 550
15.5.5.2 الحالة الثانية: باكستون وقصر الكريستال (لندن، 1851) . . . 551
15.5.5.3 الحالة الثالثة: روبلنغ وجسر بروكلين (نيويورك، 1869–1883) . . . 552
15.5.5.4 الإرث . . . 552
15.6 جيل الحاسوب . . . 552
15.6.1 المعماريون «الاستثنائيون» . . . 553
15.6.1.1 فيليكس كانديلا (1910–1997) . . . 553
15.6.1.2 فرانك غيري (1929–2025) . . . 553
15.6.1.3 سانتياغو كالاترافا (1951–) . . . 554
15.6.2 المهندسون الإنشائيون: فئة الخمسة في المئة . . . 555
15.6.2.1 المباني الشاهقة . . . 557
15.6.2.1.1 ليزلي روبرتسون (1928–2021) . . . 558
15.6.2.1.2 وليام بيكر (1953–) . . . 561
15.6.2.2 الجسور: ميشيل فيرلوغو (1946–) . . . 562
15.7 إعادة النظر في فيتروفيوس . . . 564
15.7.1 تفكيك الفن الإنشائي . . . 565
15.7.2 ما الفن؟ . . . 566

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.7.3 العمارة الإنشائية: بيان ليونجي . . . 568
15.8 الخلاصة . . . 568
16 Terrae Motus: أساطير الزلازل ومعتقداتها وتمثيلاتها **573**
16.1 مقدمة . . . 574
16.2 الأساطير . . . 574
16.2.1 اليابان . . . 575
16.2.2 شمال غرب المحيط الهادئ . . . 578
16.2.3 الأمريكيتان . . . 579
16.2.4 تقاليد أخرى . . . 580
16.2.5 تركيب: الأسطورة ذاكرةً زلزالية . . . 580
16.3 الدين . . . 581
16.3.1 الكتاب المقدس . . . 581
16.3.2 اليونان . . . 585
16.3.3 الهند . . . 590
16.3.4 الإسلام . . . 592
16.3.5 أمريكا الوسطى . . . 594
16.3.6 الشنتو . . . 595
16.3.7 تركيب: الدين ومعنى الكارثة الزلزالية . . . 598
16.4 الفلسفة . . . 602
16.4.1 أرسطو . . . 602
16.4.2 إراتوستينس . . . 603
16.4.3 لوكريتيوس وبلينيوس . . . 603
16.4.4 زلزال لشبونة حدثاً فلسفياً . . . 604
16.4.4.1 فولتير وروسو محاورين فلسفيين . . . 604
16.4.4.2 كانط . . . 605
16.4.5 إعادة الإعمار . . . 605
16.5 الأدب . . . 607
16.5.1 الزلازل في الأدب . . . 607
16.5.2 زلزال لشبونة سنة 1755 ونقاش عصر التنوير . . . 607
16.5.3 زلزال مسّينا سنة 1908 . . . 609
16.5.4 خلاصة: الأدب والذاكرة الثقافية للزلازل . . . 610
16.6 العمارة . . . 610
16.6.1 بيرّو ليغوريو . . . 610
16.6.2 جيبلّينا . . . 611
16.7 الفن . . . 614
16.7.1 الفن الصخري وآثار الصدوع . . . 614
16.7.2 الرسم . . . 616
16.7.3 مجموعة كوزاك . . . 616
16.7.4 مجموعة أميليو . . . 617
16.8 الموسيقى . . . 619
16.9 التصوير السينمائي . . . 619

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16.10 الخلاصة . . . 620
16.11 خاتمة: من نامازو إلى روزويل . . . 621
مراجع الجزء الأول: التاريخ **625**
محتويات الأجزاء II–IV (التحليل) **661**
قائمة الأشكال: الأجزاء II–IV (التحليل) **697**
قائمة الجداول: الأجزاء II–IV (التحليل) **713**
قائمة الأمثلة: الأجزاء II–IV (التحليل) **717**
قائمة النقاط الرئيسة: الأجزاء II–IV (التحليل) **724**

II مقدمة: الأساسيات والطرائق التحليلية 726

17 مقدمة **727**
17.1 الصورة الكبرى . . . 727
17.1.1 العمارة . . . 728
17.1.2 الهندسة الإنشائية . . . 728
17.1.2.1 التصميم الإنشائي . . . 729
17.1.2.2 التحليل . . . 730
17.1.2.3 تقييم السلامة . . . 731
17.1.3 التخصصات المدمجة في التحليل الإنشائي . . . 731
17.2 العناصر: القوى الداخلية الأساسية . . . 732
17.3 عناصر نقل الأحمال . . . 732
17.4 أنواع المنشآت . . . 733
17.5 تحول الأدوات الهندسية . . . 738
17.6 مقررات الهندسة الإنشائية . . . 739

18 الأحمال **740**
18.1 مقدمة . . . 740
18.2 تصنيف الأحمال . . . 741
18.2.1 الأحمال الرأسية . . . 741
18.2.2 الأحمال الجانبية . . . 741
18.2.2.1 الرياح . . . 741
18.2.2.2 الزلازل . . . 745
18.2.3 الأحمال الهيدروستاتيكية وضغط التربة . . . 747
18.2.3.1 مثال 18.1: حمل هيدروستاتيكي . . . 748
18.2.4 حمل الصدم . . . 748
18.2.5 الأحمال الثانوية . . . 749
18.2.6 الأحمال الحرارية . . . 750
18.2.6.1 مثال 18.2: التمدد والإجهاد الحراريان . . . 750
18.3 اعتبارات خاصة بالأحمال . . . 751

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18.3.1 إسقاط الأحمال . . . 751
18.3.2 مواضع الأحمال . . . 752
18.3.3 توليفات الأحمال . . . 752
18.3.4 مسار الحمل . . . 753
18.3.5 المساحات التابعة . . . 757
18.3.5.1 مثال 18.3: المساحات التابعة . . . 758
18.3.6 الاستجابة الإنشائية . . . 758

19 ردود الأفعال **760**
19.1 مقدمة . . . 760
19.1.1 أنواع المساند . . . 761
19.1.2 الاتزان . . . 762
19.1.3 معادلات الشروط . . . 763
19.1.4 التحديد الاستاتيكي . . . 764
19.1.5 عدم الاستقرار الهندسي . . . 765
19.1.6 مخططات الجسم الحر . . . 765
19.2 أمثلة . . . 766
19.2.1 مثال 19.1: حمل هيدروستاتيكي . . . 766
19.2.2 مثال 19.2: انتقال الأحمال . . . 767
19.2.3 مثال 19.3: كمرة بسيطة الارتكاز . . . 768
19.2.4 مثال 19.4: حمل مكافئ للقطع المكافئ . . . 768
19.2.5 مثال 19.5: كمرة ذات ثلاثة بحور . . . 769
19.2.6 مثال 19.6: إطار جملوني ذو ثلاثة مفاصل . . . 770
19.2.7 مثال 19.7: مساند مائلة . . . 772
19.2.8 مثال 19.8: منشأ شبكي . . . 773
19.2.9 مثال 19.9: اتزان طائرة . . . 774
19.2.10 مثال 19.10: بارجة ضخمة . . . 775
19.2.11 مثال 19.11: رانكين: اتزان جسم طافٍ، برهان هيدروستاتيكي . . . 778
19.2.12 مثال 19.12: قصر الرياضة؛ نيرفي . . . 780

20 الجمالونات **784**
20.1 مقدمة . . . 784
20.1.1 الافتراضات . . . 784
20.1.2 اصطلاح الإشارة . . . 785
20.1.3 التحديد والاستقرار . . . 785
20.2 طرائق التحليل . . . 787
20.2.1 طريقة العقد . . . 787
20.2.1.1 مثال 20.1: تحليل جمالون بطريقة العقد . . . 788
20.2.1.2 مثال 20.2: جمالون ثلاثي الأبعاد . . . 791
20.3 طريقة المقاطع . . . 794
20.3.1 طريقة المقاطع . . . 794
20.3.2 مثال 20.3: طريقة المقاطع . . . 795
20.4 طريقة العقد والمصفوفة . . . 795

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

20.4.1 مثال 20.4: جمالون بسيط بطريقة العقد والمصفوفة 797
20.4.2 مثال 20.5: جمالون معقد بطريقة العقد والمصفوفة 799

21 القوى الداخلية في عناصر الانحناء 803
21.1 مقدمة 803
21.1.1 النهج الهندسي: من الإجهادات إلى القوى الداخلية 803
21.1.2 القوى الداخلية للكمرات المستقيمة والمنحنية في بعدين وثلاثة أبعاد 804
21.1.3 لماذا يكتسب ذلك أهمية؟ 806
21.1.4 اصطلاحات الإشارة في التصميم 806
21.2 علاقات الحمل والقص والعزم 808
21.2.1 الصيغة التفاضلية 808
21.2.2 الصيغة التكاملية 809
21.3 أمثلة 810
21.3.1 مثال 21.1: كمرة ذات حمل مائل 810
21.3.2 مثال 21.2: إطار مائل 812
21.3.3 مثال 21.3: إطار تحت حمل هيدروستاتيكي 814
21.3.4 مثال 21.4: حمل متغير خطياً 816
21.3.5 مثال 21.5: إطار ذو سقف مائل 817
21.3.6 مثال 21.6: إطار تبادلي 817
21.3.7 مثال 21.7: إطار ثلاثي الأبعاد 821

22 الانحرافات؛ المنحنى المرن 826
22.1 مقدمة 826
22.2 المعادلة التفاضلية 827
22.2.1 مثال 22.1: التكامل المزدوج 828
22.2.2 مثال 22.2: الانحراف الأقصى 829
22.2.3 مثال 22.3: الشكل الأمثل للزلاجة 830
22.2.4 مثال 22.4: كمرة طافية 830
22.3 الانحناء 833
22.3.1 مثال 22.5: عجلة الدراجة 835
22.3.2 مثال 22.6: صلابة نابض حلزوني 841
22.3.3 علاقة الانحناء–الانفعال 842
22.3.3.1 مثال 22.7: مفتاح ثنائي المعدن 843
22.3.4 طريقة مساحة الانحناء (مساحة العزم) 844
22.3.4.1 اصطلاح الإشارة 844
22.3.4.2 المبرهنة الأولى لمساحة الانحناء 844
22.3.4.3 المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء 846
22.3.4.3.1 مثال 22.8: مساحة الانحناء، كمرة كابولية 847
22.3.4.3.2 مثال 22.9: العزم–الانحناء، كمرة بسيطة الارتكاز 847
22.3.4.4 الانحراف الأقصى 848
22.3.4.4.1 مثال 22.10: الانحراف الأقصى 849
22.3.4.5 علاقة الحرارة–الانحناء 850
22.3.4.5.1 مثال 22.11: إطار خاضع لحمل حراري 850

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22.3.4.6 مثال 22.12: طول اللدونة . . . 853
22.3.4.7 الحمل المرن/الكمرات المرافقة . . . 854
22.3.4.7.1 مثال 22.13: كمرة مرافقة؛ حمل مركز . . . 855
22.3.4.7.2 مثال 22.14: كمرة مرافقة؛ I متغير . . . 856

23 القص واللي **859**
23.1 تشوه القص (المستعرض) . . . 859
23.1.1 القص، عنصر متناهي الصغر . . . 859
23.1.1.1 مثال 23.1: انحراف كمرة كابولية . . . 860
23.1.2 توزيع القص؛ $\tau(y)$ . . . 860
23.1.3 معامل القص . . . 861
23.1.4 عامل القص . . . 862
23.1.5 تشوه القص v_s، تيموشينكو . . . 863
23.2 تشوهات اللي . . . 864
23.2.1 لي سان فينان أو اللي المنتظم . . . 864
23.2.2 لي فلاسوف أو اللي غير المنتظم . . . 865
23.2.2.1 مثال 23.2: اللي غير المنتظم لمقطع على شكل I . . . 870

24 الشغل الافتراضي التكميلي **874**
24.1 مقدمة . . . 874
24.2 اشتقاق مبسط لمبدأ الشغل الافتراضي التكميلي . . . 875
24.2.1 الاشتقاق . . . 875
24.2.2 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل f_{ij}, f_{ji} . . . 877
24.2.3 الشغل الافتراضي الخارجي $\delta\overline{W}^*$ . . . 878
24.2.4 الشغل الافتراضي الداخلي $\delta\overline{U}^*$ . . . 879
24.3 أمثلة . . . 880
24.3.1 مثال 24.1: كمرة . . . 880
24.3.2 مثال 24.2: إطار؛ الانحرافات . . . 881
24.3.3 مثال 24.3: إطار؛ الدوران . . . 883
24.3.4 مثال 24.4: ركيزة انحنائية . . . 884
24.3.5 مثال 24.5: كمرة كابولية مدعومة بكابل . . . 885
24.3.6 مثال 24.6: تشوهات اللي والانحناء . . . 886
24.3.7 مثال 24.7: تشوها الانحناء والقص في كمرة . . . 888
24.3.8 مثال 24.8: التأثيرات الحرارية في كمرة . . . 889
24.3.9 مثال 24.9: خط أنابيب . . . 890
24.3.10 مثال 24.10: جملون؛ بسيط . . . 891
24.3.11 مثال 24.11: جملون؛ معقد . . . 892
24.3.12 مثال 24.12: جملون بتحدب ابتدائي . . . 893
24.3.13 مثال 24.13: جملون بإجهادات ثانوية . . . 894
24.3.14 مثال 24.14: حلقة دائرية . . . 896
24.3.15 مثال 24.15: نابض . . . 898

25 طريقة المرونة **901**

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

25.1 مقدمة . . . 901
25.2 طريقة القوى/المرونة . . . 907
25.2.1 أمثلة . . . 908
25.2.1.1 مثال 25.1: كمرة ذات قضيب ربط . . . 908
25.2.1.2 مثال 25.2: تحليل إطار مبنى فولاذي . . . 909
25.2.1.3 مثال 25.3: جملون ذو قوة زائدة واحدة . . . 913
25.2.1.4 مثال 25.4: جملون ذو قوتين زائدتين . . . 915
25.2.1.5 مثال 25.5: جملون تحت حمل حراري . . . 917
25.2.1.6 مثال 25.6: كمرة مسندة على نابض . . . 919
25.2.1.7 مثال 25.7: الدعامة الملكية . . . 920
25.2.1.8 مثال 25.8: مصفوفة المرونة؛ كمرة منحنية . . . 922
25.3 معادلات العزوم الثلاثة . . . 925
25.3.1 مثال 25.9: كمرة مستمرة . . . 928
25.3.2 مثال 25.10: كمرة مستمرة . . . 928

26 القوى بدلالة الإزاحات 931
26.1 مقدمة . . . 931
26.1.1 اصطلاح الإشارة . . . 932
26.1.2 طرق التحليل . . . 932
26.2 التشوهات المحورية . . . 933
26.3 الانحناء . . . 933
26.3.1 المعادلة التفاضلية . . . 933
26.3.2 قوى الأطراف العقدية للانفعالات الابتدائية . . . 937
26.3.3 القوى العقدية المكافئة للعناصر الانحنائية . . . 938
26.3.3.1 الأحمال الموزعة بانتظام . . . 938
26.3.3.2 الأحمال المركزة . . . 939

27 الصلابة بالحساب اليدوي 941
27.1 مقدمة . . . 941
27.2 الميل والانحراف؛ الحل المباشر . . . 941
27.2.1 أمثلة . . . 943
27.2.1.1 مثال 27.1: كمرة كابولية . . . 943
27.2.1.2 مثال 27.2: كمرة مستمرة . . . 944
27.2.1.3 مثال 27.3: كمرة ذات بحرين . . . 945
27.2.1.4 مثال 27.4: كمرة ذات بحرين وإزاحة ابتدائية . . . 947
27.2.1.5 مثال 27.5: إطار . . . 948
27.2.1.6 مثال 27.6: عبّارة صندوقية . . . 950
27.3 توزيع العزوم . . . 952
27.3.1 مقدمة . . . 952
27.3.1.1 مثال 27.7: كمرة مستمرة . . . 955
27.4 الميل والانحراف؛ توزيع العزوم؛ غاوس–سايدل . . . 957
27.4.1 مثال 27.8: الميل والانحراف/توزيع العزوم/غاوس–سايدل . . . 957

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28 خطوط التأثير 959
28.1 مقدمة . . . 959
28.2 الإجراء . . . 959
28.2.1 مثال 28.1: خطوط التأثير لكمرة بسيطة الارتكاز . . . 960
28.2.2 مثال 28.2: كمرة بسيطة الارتكاز ذات جزأين بارزين . . . 962
28.3 مبدأ مولر–برسلاو . . . 963
28.3.1 الاشتقاق . . . 963
28.3.1.1 مثال 28.3: مولر–برسلاو؛ خط تأثير القص . . . 964
28.3.1.2 مثال 28.4: مولر–برسلاو؛ خط تأثير العزم . . . 965
29 التحليل المرن من الرتبة الثانية 966
29.1 مقدمة . . . 966
29.2 إزاحات كبيرة ومنشآت مستقرة . . . 967
29.2.1 مثال 29.1: عدم الاستقرار الهندسي . . . 967
29.2.2 مثال 29.2: تأثير الحمل المحوري في التشوه الانحنائي . . . 968
29.2.3 مثال 29.3: الانحراف الكبير لكمرة كابولية . . . 970
29.3 إزاحات صغيرة ومنشآت غير مستقرة . . . 974
29.3.1 قضبان صلبة متقطعة . . . 974
29.3.1.1 نظام قضيب واحد . . . 974
29.3.1.1.1 مثال 29.4: انبعاج عمودين صلبين مفصليين . . . 976
29.3.2 الأنظمة المستمرة . . . 978
29.3.2.1 أحمال انبعاج أويلر . . . 978
29.3.2.1.1 مثال 29.5: انبعاج عمود مفصلي الطرفين . . . 980
29.3.2.1.2 مثال 29.6: انبعاج عمود مثبت الطرفين . . . 980
29.3.2.1.3 مثال 29.7: انبعاج عمود مثبت–مفصلي . . . 982
29.3.2.1.4 مثال 29.8: عمود ذو مساند مرنة . . . 983
29.3.2.1.5 مثال 29.9: الانبعاج المقيد . . . 985
29.3.2.1.6 مثال 29.10: برج مياه . . . 986
29.3.2.2 التناظر مع الاهتزاز الحر . . . 988
29.3.2.3 معاملات الطول الفعّال K . . . 989
29.3.2.4 الأعمدة غير المرنة . . . 992
30 منشآت الكابلات 995
30.1 مقدمة . . . 995
30.2 الأحمال المركزة . . . 996
30.2.1 مثال 30.1: كابل حبلي . . . 996
30.2.2 مثال 30.2: كابل حبلي مائل . . . 998
30.2.3 مثال 30.3: عربة معلقة بكابلين . . . 999
30.3 الأحمال الموزعة . . . 1000
30.3.1 معادلة الاتزان . . . 1000
30.3.2 qdx؛ حمل عرضي؛ قطع مكافئ . . . 1001
30.3.2.1 الهندسة . . . 1001

30.3.2.2 القوى الداخلية 1006
30.3.2.3 الاستطالة المرنة 1007
30.3.2.4 الجساءة المحورية المكافئة 1010
30.3.2.5 حالة خاصة: وتر أفقي 1011
30.3.2.5.1 مثال 30.4: هندسة كابل مائل 1012
30.3.2.5.2 مثال 30.5: قوى كابل مائل 1013
30.3.2.5.3 مثال 30.6: برج مشدود بكابلات تثبيت 1014
30.3.2.5.4 مثال 30.7: جسر معلّق 1015
30.3.2.5.5 مثال 30.8: كابل غير قابل للاستطالة؛ درجة الحرارة . . . 1016
30.3.2.5.6 مثال 30.9: كابل قابل للاستطالة؛ الترخيم 1017
30.3.2.5.7 مثال 30.10: كابل قابل للاستطالة؛ تأثير حراري 1017
30.3.2.5.8 مثال 30.11: كابل قابل للاستطالة؛ الشد المسبق 1019
30.3.3 qds؛ المنحنى السلسلي 1019
30.3.3.1 الهندسة 1019
30.3.3.2 القوى 1021
30.3.3.3 منحنى سلسلي ذو وتر مائل 1022
30.3.3.3.1 مثال 30.12: ترخيم كابل مائل 1023
30.3.3.3.2 مثال 30.13: كابل تعليق خط حافلة كهربائية 1024
30.3.4 مقارنة الحلين المكافئ والسلسلي 1026
30.3.4.1 مثال 30.14: المنحنى السلسلي مقابل القطع المكافئ 1027

31 الأقواس والكمرات المنحنية **1029**
31.1 الأقواس الدائرية 1030
31.1.1 الأقواس الدائرية ثلاثية المفاصل 1030
31.1.1.1 مبرهنة إيدي 1031
31.1.1.2 أمثلة 1031
31.1.1.2.1 مثال 31.1: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي؛ حل تحليلي 1031
31.1.1.2.2 مثال 31.2: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي 1033
31.1.1.2.3 مثال 31.3: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل منتظم 1035
31.1.2 الأقواس الدائرية ثنائية المفاصل 1037
31.1.3 قوس دائري عديم المفاصل 1037
31.1.3.1 مثال 31.4: قوس دائري عديم المفاصل 1037
31.1.4 الحل العام 1045
31.1.4.1 الاشتقاق 1045
31.1.4.1.1 مركز الثقل 1045
31.1.4.1.2 الاشتقاق 1047
31.1.4.1.3 التحقق 1051
31.1.5 حلول باستعمال Mathematica 1052
31.2 الشكل الأمثل للقوس 1052
31.2.1 مثال 31.5: القوس المثالي 1053
31.3 الأقواس المكافئة 1053
31.3.1 أمثلة 1053

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31.3.1.1 مثال 31.6: قوس مكافئ ثلاثي المفاصل 1054
31.3.1.2 مثال 31.7: قوس مكافئ ثنائي المفاصل متغير المقطع 1054
31.3.2 قوس مثبت تحت حمل متناظر 1058
31.3.2.1 مثال 31.8: قوس مكافئ عديم المفاصل 1060
31.3.3 آثار هبوط الأساسات وتغير الحرارة 1063
31.3.3.1 مثال 31.9: حمل حراري على قوس مكافئ 1066
31.4 الكمرات المنحنية 1066
31.4.1 جائز قوسي 1066
31.4.1.1 مثال 31.10: جائز قوسي 1067
31.4.2 المنشآت الحلزونية 1069
31.4.2.1 الهندسة 1069
31.4.2.2 الاتزان 1070
31.4.2.2.1 مثال 31.11: قوس حلزوني؛ حمل نقطي 1072

32 البلاطات **1075**
32.1 نظرية البلاطات السميكة: رايسنر–ميندلن 1075
32.1.1 العلاقات الحركية 1075
32.1.2 العلاقات التأسيسية 1077
32.1.3 الاتزان 1078
32.2 نظرية البلاطات الرقيقة: كيرشهوف 1080
32.2.0.1 مثال 32.1: تمثيل البلاطة الرقيقة مقارنة بالبلاطة السميكة 1080
32.2.1 العلاقات الأساسية 1081
32.2.2 المعادلة التفاضلية 1082
32.2.3 الإجهادات 1082
32.2.3.1 مثال 32.2: استرجاع الإجهادات من محصلات عزوم البلاطة 1084
32.2.3.2 مثال 32.3: بلاطة مربعة بسيطة الاستناد تحت ضغط منتظم 1084
32.2.3.3 مثال 32.4: حساسية انحراف البلاطة للسماكة 1085
32.2.4 البلاطات الدائرية 1086
32.2.4.1 مثال 32.5: بلاطة دائرية مثبتة تحت ضغط منتظم 1089
32.2.5 الصياغة التغايرية 1090
32.3 الخلاصة 1091

33 القشريات **1094**
33.1 النظرية العامة 1094
33.1.1 التعريفات 1094
33.1.2 الافتراضات 1097
33.1.3 علاقات القوة–الإزاحة 1099
33.1.3.1 الاتزان 1099
33.1.3.2 المجموعة الكاملة لمعادلات الاتزان 1106
33.1.3.3 التوافق 1106
33.1.3.4 الخلاصة 1111
33.1.3.5 الإجهاد–الانفعال–القوى 1111
33.1.3.5.1 الإجهاد–الانفعال 1111

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.1.3.5.2 الإجهاد–القوى 1113
33.1.3.6 العبارات النهائية (القوى بدلالة الإزاحات) 1113
33.1.4 التبسيطات 1116
33.1.4.1 فرضيات الضحلة 1116
33.1.4.1.1 Assumptions 1116
33.1.4.1.2 Application of assumptions 1116
33.1.4.1.3 معادلة الكمرة العميقة 1118
33.1.4.1.4 معادلة البلاطة 1119
33.1.4.1.5 معادلة القشريات الضحلة 1120
33.1.4.2 نظرية الغشاء 1120
33.1.4.2.1 Assumptions 1120
33.1.4.2.2 Theory 1121
33.1.4.2.3 Classification 1121
33.1.4.2.4 Specialization 1122
33.2 تحليل قشرة برميلية مفردة (قشرة أسطوانية دائرية) 1124
33.2.1 مقدمة 1124
33.2.2 نظرية الغشاء 1125
33.2.2.1 محصلات الإجهاد 1125
33.2.2.1.1 الأخطاء 1129
33.2.2.1.2 التصحيح 1130
33.2.2.2 الإزاحات 1131
33.2.3 نظرية القشريات الضحلة 1134
33.2.3.1 معادلات الاتزان 1134
33.2.3.2 الصياغة 1135
33.2.3.2.1 الحل الخاص للحمل المنتظم 1137
33.2.3.2.2 مقارنة نظرية الغشاء بنظرية القشرة الضحلة 1138
33.2.3.2.3 مثال 33.1: مقارنة الغشاء والقشرة الضحلة 1141
33.2.3.3 الحل العام 1141
33.2.3.3.1 الإزاحة w 1142
33.2.3.3.2 M_ϕ 1144
33.2.3.3.3 الحدود الأخرى؛ الإجراء 1145
33.3 القشريات غير المحددة استاتيكياً 1148
33.3.1 الكمرة الحافية 1148
33.3.1.1 الكمرات الحافية الرأسية 1149
33.3.1.2 الكمرات الحافية الأفقية 1151
33.3.2 الكمرة الحافية سابقة الإجهاد 1152
33.3.2.1 مثال 33.2: تصميم قشرة أسطوانية 1153
33.3.3 شفرة MATLAB® ومثال عددي 1163

34 الديناميكا الإنشائية الأولى **1165**
34.1 الأسس الفلسفية 1166

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.2 متى يلزم التحليل الديناميكي؟ 1166
34.3 المبادئ الأساسية 1167
34.3.1 مبدأ دالمبير والاتزان الديناميكي 1167
34.3.2 المهتز أحادي درجة الحرية 1167
34.3.3 التردد الطبيعي والدور 1168
34.3.3.1 مثال 34.1: حساب ω_n وT_n وf_n لنظام أحادي الحرية 1168
34.3.4 التخميد ونسبته 1169
34.4 الاهتزاز الحر 1170
34.4.1 الاهتزاز الحر غير المخمد 1170
34.4.2 الاهتزاز الحر المخمد 1171
34.4.3 التناقص اللوغاريتمي 1171
34.4.3.1 مثال 34.2: تقدير التخميد من التناقص اللوغاريتمي 1172
34.5 الاهتزاز القسري: الإثارة التوافقية 1173
34.5.1 الاستجابة التوافقية غير المخمدة 1173
34.5.2 الاستجابة التوافقية المخمدة 1174
34.5.2.1 مثال 34.3: الاستجابة التوافقية: التضخيم والطور 1174
34.6 الاستجابة لحمل عام 1175
34.6.1 استجابة النبضة والنبضة الوحدية 1175
34.6.1.1 مثال 34.4: استجابة نبضة وحدية لنظام مخمد أحادي الحرية 1176
34.6.2 تكامل دوهاميل 1177
34.6.2.1 مثال 34.5: حمل خطوة مفاجئ: معامل تضخيم ديناميكي مقداره 2 . . 1177
34.6.2.2 مثال 34.6: حمل نبضة مستطيلة وطيف الصدمة 1178
34.6.3 تحليل فوريه والاستجابة الترددية 1180
34.6.3.1 مثال 34.7: الاستجابة الترددية لقوة آلة دورية ذات مركبتين توافقيتين 1181
34.7 إثارة المساند والاستجابة الزلزالية 1182
34.7.1 معادلة الحركة لإثارة القاعدة 1182
34.7.2 أطياف الاستجابة 1183
34.7.2.1 مثال 34.8: التصميم الزلزالي لإطار من طابق واحد باستعمال طيف الاستجابة 1184
34.8 الأنظمة متعددة درجات الحرية 1185
34.8.1 معادلات الحركة 1185
34.8.2 الاهتزاز الحر غير المخمد: الأنماط الطبيعية 1185
34.8.3 التحليل النمطي 1186
34.8.4 المشاركة النمطية في الاستجابة الزلزالية 1187
34.8.4.1 مثال 34.9: التحليل النمطي لمبنى قص ثلاثي درجات الحرية تحت حمل زلزالي 1187
34.9 الأنظمة المستمرة 1189
34.9.1 الاهتزاز المحوري للقضبان 1189
34.9.2 الاهتزاز المستعرض للكمرات 1190
34.9.2.1 مثال 34.10: التردد الطبيعي لجسر مشاة فولاذي وفحص رنين المشاة . 1190
34.10 الديناميكا اللاخطية 1192

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.10.1 مصادر اللاخطية 1192
34.10.2 تخلفية وتبديد الطاقة 1192
34.10.2.1 مثال 34.11: التخميد اللزج المكافئ من حلقة تخلفية ثنائية الخط . . . 1192
34.10.3 مطيلية وتصميم السعة 1194
34.10.3.1 مثال 34.12: طلب المطيلية وخفض القوة لإطار خرساني مسلح . . . 1195
34.11 اعتبارات عملية 1196
34.11.1 تخميد في المنشآت الحقيقية 1196
34.11.2 تفاعل التربة والمنشأ 1196
34.11.3 مخمدات الكتلة الموالفة 1196
34.11.4 مثال 34.13: تصميم مخمد كتلة موالف لمبنى عالٍ 1197
34.11.5 العزل القاعدي 1198
34.11.6 مثال 34.14: تصميم مبنى مستشفى معزول قاعدياً 1198
34.12 ملاحظات ختامية 1200
34.12.1 تحذير مهني بشأن طرائق طيف الاستجابة 1200
34.12.2 ملاحظة أخيرة: حدود النظرية الخطية 1200

35 عناصر التصميم الإنشائي **1201**
35.1 مقدمة 1201
35.1.1 التحليل والتصميم: عملية تكرارية 1201
35.1.2 السلامة 1201
35.2 تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD) 1204
35.2.1 مثال 35.1: تصميم الانحناء بطريقة ASD 1204
35.3 تصميم معاملات الحمل والمقاومة (LRFD) 1205
35.4 أمثلة لأكواد تصميم قائمة على LRFD 1207
35.4.1 تطبيق: المقاومة اللدنة لمقاطع كمرات الخرسانة المسلحة 1208
35.4.1.1 مثال 35.2: المقاومة القصوى: مراجعة 1212
35.4.1.2 مثال 35.3: المقاومة القصوى: التصميم الأول 1213
35.4.1.3 مثال 35.4: المقاومة القصوى: التصميم الثاني 1214
35.4.1.4 مثال 35.5: التحليل الدقيق 1215
35.4.2 تطبيق: المقاومة اللدنة لأعمدة الخرسانة المسلحة 1217
35.4.2.1 مثال 35.6: عمود خرسانة مسلحة مع معرفة c 1221
35.4.2.2 مثال 35.7: عمود خرسانة مسلحة مع معرفة e 1223
35.4.3 الخرسانة سابقة الإجهاد 1226
35.4.3.1 مثال 35.8: دراسة حالة: جسر وولنت لين 1226
35.5 الهندسة القائمة على الأداء (PBE) 1230

36 تصميم قوس غير محدد سكونياً **1232**
36.1 مثال 36.1: تصميم قوس غير محدد سكونياً 1232
36.2 مثال 36.2: التغيرات الحرارية في قوس 1238

37 حلول فيرمي (التحليل التقريبي) **1241**
37.1 القوى الداخلية 1241
37.1.1 الأشكال المنحرفة ونقاط الانعطاف 1241

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

37.1.2 عزوم الكمرة بدلالة صلابة المساند . . . 1244
37.1.3 طرائق التحليل . . . 1244
37.1.3.1 لأحمال الرأسية . . . 1247
37.1.3.2 لأحمال الأفقية . . . 1250
37.1.3.2.1 طريقة البوابة . . . 1250
37.1.3.2.1.1 مثال 37.1: طريقة البوابة: مبنى قصير . . . 1251
37.1.3.2.1.2 مثال 37.2: حل ماتلاب . . . 1263
37.1.3.2.2 طريقة الكابولي . . . 1264
37.1.3.2.2.1 مثال 37.3: طريقة الكابولي: مبنى شاهق . . . 1265
37.2 الاستجابة الإنشائية . . . 1266
37.2.1 النظام الفرعي للنواة . . . 1266
37.2.1.1 مثال 37.4: النظام الفرعي للنواة . . . 1267
37.2.2 جدار القص . . . 1268
37.2.2.1 مثال 37.5: جدار قص خرساني . . . 1268
37.2.3 جدار القص الجملوني . . . 1270
37.2.3.1 مثال 37.6: جدار قص جملوني . . . 1270
37.2.4 الانحرافات الجانبية . . . 1272
37.2.4.1 لجدار القصير . . . 1272
37.2.4.2 لجدار الطويل . . . 1272
37.2.4.3 لجدران والجوائز الرابطة . . . 1273
37.2.4.4 لإطارات . . . 1274
37.2.4.4.1 مثال 37.7: التقدير التقريبي للانحراف العرضي لمبنى . . . 1276

38 التصاميم الأولية **1280**
38.1 مثال 38.1: مطار دالاس . . . 1280
38.2 مثال 38.2: برج إيفل . . . 1287
38.3 مثال 38.3: مخازن ماجازيني جنرالي . . . 1294
38.4 مثال 38.4: جسر جورج واشنطن . . . 1298
38.5 مثال 38.5: تصميم قوس ذي مفصلين . . . 1305
38.6 مثال 38.6: التغيرات الحرارية في قوس . . . 1313
38.7 مثال 38.7: قوس قطعي مع تغير قاطع الزاوية لـ I . . . 1315

III متوسط: طرائق عددية 1319

39 مقدمة إلى طريقة الصلابة المباشرة **1320**
39.1 لماذا التحليل الإنشائي بالمصفوفات؟ . . . 1320
39.2 مثالية المنشأ . . . 1321
39.3 اصطلاح الإشارة . . . 1323
39.4 نظم الإحداثيات . . . 1324
39.5 المرونة مقابل الصلابة . . . 1324
39.6 درجات الحرية . . . 1325

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

39.7 عدم التحديد الاستاتيكي مقابل عدم التحديد الحركي . . . 1327
39.8 التحليل والميكانيكا الإنشائية: مسألة قيم حدية . . . 1328

40 مصفوفات صلابة العناصر $\mathbf{k}^{(e)}$ 1331
40.1 تعريف حد الصلابة . . . 1331
40.2 عنصر الجمالون . . . 1332
40.3 كمرة أويلر–برنولي . . . 1333
40.4 عنصر إطار ثنائي الأبعاد (عنصر كمرة–عمود) . . . 1333
40.5 عنصر الشبكة الإنشائية . . . 1334
40.6 عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد . . . 1334
40.7 كمرة تيموشينكو . . . 1337
40.7.1 التشوه الإضافي . . . 1337
40.7.2 تعديل مصفوفة صلابة العنصر . . . 1338
40.8 التواء فلاسوف . . . 1341

41 طريقة الصلابة؛ 1: المنشآت المتعامدة 1344
41.1 مقدمة . . . 1344
41.2 النظرية . . . 1345
41.2.1 إعادة النظر في طريقة المرونة . . . 1345
41.2.2 طريقة الصلابة المباشرة . . . 1346
41.2.3 من العنصر إلى المنشأ . . . 1347
41.3 أمثلة . . . 1347
41.3.1 مثال 41.1: كمرة متعامدة . . . 1347
41.3.2 مثال 41.2: إطار متعامد . . . 1350
41.3.3 مثال 41.3: شبكة إنشائية . . . 1357
41.3.4 مثال 41.4: إطار هجين . . . 1361
41.3.5 مثال 41.5: شبكة إنشائية هجينة . . . 1365

42 مصفوفات التحويل 1371
42.1 مقدمة . . . 1371
42.2 بعض الأسس النظرية . . . 1372
42.2.1 العلاقة بين $[\mathbf{k}^e]$ و$[\mathbf{K}^e]$ . . . 1372
42.2.2 جيوب تمام الاتجاه . . . 1373
42.3 مصفوفات التحويل للعناصر القضيبية . . . 1375
42.3.1 حالات ثنائية الأبعاد . . . 1376
42.3.1.1 إطار ثنائي الأبعاد . . . 1376
42.3.1.2 شبكة إنشائية . . . 1377
42.3.1.3 كمرة فلاسوف . . . 1378
42.3.1.4 جمالون ثنائي الأبعاد . . . 1378
42.3.2 إطار ثلاثي الأبعاد . . . 1379
42.3.3 دورانات أويلر . . . 1380
42.3.4 فتل محور العنصر . . . 1382
42.3.5 جمالون ثلاثي الأبعاد . . . 1383

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

43 طريقة الصلابة المباشرة 1385
43.1 الأهداف . . . 1385
43.2 النظرية . . . 1385
43.3 التقطيع . . . 1388
43.3.1 درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة . . . 1388
43.3.2 تقطيع المنشأ . . . 1388
43.4 التنفيذ الحاسوبي . . . 1389
43.4.1 الشروط الحدية ومصفوفة [id] . . . 1389
43.4.2 متجه **LM** . . . 1391
43.4.3 تجميع مصفوفة الصلابة العامة . . . 1392
43.4.4 الإجراء خطوة بخطوة . . . 1392
43.5 أمثلة . . . 1394
43.5.1 مثال 43.1: إطار . . . 1394
43.5.1.1 تمهيدات . . . 1394
43.5.2 مثال 43.3: جمالون . . . 1405

44 الخصائص الرياضية لمصفوفة الصلابة؛ مسائل حسابية 1409
44.1 المصفوفات سيئة التكييف . . . 1409
44.1.1 القيم الذاتية . . . 1409
44.1.1.1 التفسير الفيزيائي للقيم الذاتية . . . 1412
44.1.2 رقم الشرط . . . 1414
44.1.3 مصفوفات الصلابة سيئة التكييف . . . 1415
44.1.3.1 مثال 44.1: مصفوفة سيئة التكييف . . . 1418
44.2 اعتبارات عددية . . . 1419
44.2.1 العكس مقارنةً بالتحليل . . . 1419
44.2.2 ترقيم العقد . . . 1419

45 موضوعات خاصة 1423
45.1 التكثيف وتقسيم المنشأ . . . 1423
45.2 معادلات الاتزان والحركة . . . 1424
45.2.1 مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$ . . . 1424
45.2.1.1 الاشتقاق . . . 1424
45.2.1.2 محدد استاتيكياً . . . 1424
45.2.1.2.1 مثال 45.1: مصفوفة اتزان جمالون محدد استاتيكياً . . . 1425
45.2.1.2.2 مثال 45.2: مصفوفة اتزان كمرة . . . 1426
45.2.1.3 غير محدد استاتيكياً . . . 1427
45.2.1.3.1 مثال 45.3: مصفوفة اتزان جمالون غير محدد استاتيكياً . . . 1428
45.2.1.4 تحديد القوى الزائدة . . . 1429
45.2.1.4.1 مثال 45.4: اختيار القوى الزائدة . . . 1429
45.2.1.5 عدم الاستقرار الحركي . . . 1432
45.2.2 مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$ . . . 1432
45.2.2.1 مثال 45.5: مصفوفة الحركة: مثال جمالون . . . 1433
45.2.3 العلاقة بين مصفوفتَي الاتزان والحركة . . . 1434

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.2.3.1 محدد استاتيكياً 1434
45.2.3.2 غير محدد استاتيكياً 1435
45.3 العلاقات الحركية من معكوس مصفوفة الاتزان 1435
45.4 علاقات الصلابة والمرونة 1436
45.4.1 من الصلابة إلى المرونة 1436
45.4.1.1 مثال 45.6: مصفوفة المرونة 1437
45.4.2 من المرونة إلى الصلابة 1438
45.4.2.1 مثال 45.7: من المرونة إلى الصلابة 1439
45.4.2.2 مثال 45.8: مصفوفة صلابة عنصر منحنٍ 1440
45.4.3 الثنائية بين طريقتي المرونة والصلابة 1442
45.5 منهج التحويل المتطابق لاستخراج $\mathbf{K}$ 1442
45.5.1 مثال 45.9: التحويل المتطابق 1444
45.5.2 مثال 45.10: التحويل المتطابق لإطار 1446
45.6 عناصر خاصة 1448
45.6.1 الإزاحة الصلبة 1448
45.6.2 الكمرات شبه الصلبة 1450
45.6.3 المقاطع المتغيرة 1455
45.7 مصادر الانجراف الجانبي في الإطارات المقاومة للعزوم 1458

46 حساب التغايرات في الميكانيكا: إطار أويلر–لاغرانج 1471
46.1 مقدمة 1471
46.2 أويلر 1472
46.2.1 تمهيدات 1472
46.2.2 الصيغة التفاضلية لـ $\delta\Pi$ 1474
46.2.3 معادلة أويلر 1475
46.2.4 $\delta\Pi$ 1476
46.2.5 ملاحظات 1476
46.2.6 الشروط الحدية 1477
46.2.6.1 مثال 46.1: أويلر: عضو محوري 1478
46.2.6.2 مثال 46.2: أويلر: الانحناء 1481
46.3 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية 1481
46.4 هاملتون 1484
46.4.1 الديناميكا؛ أويلر/لاغرانج 1484
46.4.1.1 نظام متقطع 1484
46.4.1.2 نظام متصل 1486
46.4.2 مثال 46.3: هاملتون 1488
46.5 مبدأ هو–واشيزو التغايري العام 1491
46.6 مخططات "شبه تونتي" 1495
46.6.1 مبدأ دالمبير 1495
46.6.2 معادلات هاملتون 1495
46.6.3 معادلات لاغرانج 1496

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47 المبادئ التغايرية ومبادئ الطاقة في التحليل الإنشائي 1500
47.1 مقدمة 1500
47.1.1 الديناميكا الحرارية 1501
47.1.2 العلاقات الأساسية 1501
47.1.3 تعريفات 1502
47.1.4 الكميات الحقيقية 1502
47.1.5 العبارات الافتراضية 1504
47.1.6 ملاحظات 1505
47.1.6.1 الشغل الداخلي وطاقة الانفعال 1505
47.1.6.2 استقلال الشغل الخارجي عن المسار 1506
47.1.7 تطبيقات على عناصر أحادية البعد 1507
47.1.7.1 الطاقة المتممة المرنة الخطية U^* 1507
47.1.7.2 الطاقة المرنة الخطية U 1507
47.1.7.3 طاقة الانفعال الافتراضية المتممة δU^* 1508
47.1.7.4 طاقة الانفعال الافتراضية δU 1510
47.1.8 ملخص الشغل الافتراضي والشغل الافتراضي المتمم 1511
47.2 المناهج 1513
47.3 الشغل الافتراضي 1514
47.3.1 مبدأ الشغل الافتراضي المتمم (PCVW) 1514
47.3.1.1 الاشتقاق 1514
47.3.1.2 مثال 47.1: مبدأ الشغل الافتراضي المتمم؛ كمرة كابولية متدرجة . . . 1517
47.3.2 مثال 47.2: قوس نصف دائري ثلاثي المفاصل 1518
47.3.3 مبدأ الشغل الافتراضي (PVW) 1519
47.3.3.1 الاشتقاق 1519
47.3.3.2 مثال 47.3: مبدأ الشغل الافتراضي؛ كمرة كابولية متدرجة 1521
47.4 مبادئ الطاقة الكامنة 1523
47.4.1 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية (PTPE) 1523
47.4.1.1 الاشتقاق 1523
47.4.1.2 مثال 47.4: مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ نابض وكتلة 1525
47.4.1.3 مثال 47.5: مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ كمرة مثبتة ذات I متغير . . . 1525
47.4.2 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية المتممة (PTCPE) 1526
47.5 مبرهنتا كاستيليانو 1526
47.5.1 المبرهنة الأولى 1526
47.5.1.1 مثال 47.6: جملون مرن لاخطي 1528
47.5.2 المبرهنة الثانية 1529
47.5.2.1 مثال 47.7: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ كمرة كابولية 1530
47.5.2.2 مثال 47.8: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة كمرة موزعة الحمل بانتظام 1531
47.5.2.3 مثال 47.9: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ جملون لاخطي 1531
47.5.2.4 مثال 47.10: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة نابض 1531
47.6 طريقة رايلي–ريتز 1532
47.6.1 الاشتقاق 1532

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.6.1.1 مثال 47.11: رايلي–ريتز؛ كمرة بسيطة الارتكاز موزعة الحمل بانتظام . 1533
47.6.1.2 مثال 47.12: الطرائق التغايرية 1534
47.7 الملخص 1541

48 دوال الاستيفاء 1544
48.1 مقدمة 1544
48.1.1 خصائص دوال الشكل 1544
48.1.2 مثلث باسكال 1545
48.1.3 أنظمة الإحداثيات 1546
48.1.3.1 الإحداثيات الديكارتية 1546
48.1.3.2 الإحداثيات الطبيعية 1546
48.1.3.3 الإحداثيات المثلثية 1548
48.1.4 الاستمرارية 1551
48.2 دوال الشكل 1551
48.2.1 الصياغة المباشرة 1551
48.2.1.1 عنصر جمالون خطي 1551
48.2.1.2 التعميم 1552
48.2.1.3 عنصر المثلث ثابت الانفعال 1553
48.2.1.4 العنصر المستطيل ثنائي الخطية 1554
48.2.1.5 عنصر متوازي المستطيلات ثلاثي الخطية 1556
48.2.2 دوال الاستيفاء اللاغرانجية 1557
48.2.2.1 العناصر الرباعية 1557
48.2.2.2 المثلثات 1558
48.2.2.3 عنصر جمالون تربيعي 1559
48.2.2.4 الكمرة 1560
48.2.3 دوال الاستيفاء الهرميتية 1563
48.2.3.1 إعادة اشتقاق دوال شكل الكمرة 1564
48.2.3.2 العناصر الرباعية 1565
48.2.3.2.1 العنصر الرباعي الخطي (q4) 1565
48.2.3.2.2 العناصر الرباعية التربيعية 1566
48.2.3.2.2.1 عنصر سيرنديبتي (q8) 1567
48.2.3.2.2.2 العنصر اللاغرانجي (q9) 1567
48.2.3.3 العنصر المتغير (الهرمي) 1570
48.2.3.4 العنصر المثلثي (T6) 1572

49 صياغة العناصر الخطية 1574
49.1 مقدمة 1574
49.2 العنصر المحدد 1575
49.2.1 مقدمة 1575
49.2.2 علاقات الانفعال–الإزاحة 1575
49.2.2.1 الأعضاء المحورية 1575
49.2.2.2 أعضاء الانحناء 1576
49.2.3 الإزاحات والانفعالات الافتراضية 1576

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

49.2.4 صياغة مصفوفة صلابة العنصر . . . 1576
49.2.5 استرجاع الإجهادات . . . 1578
49.3 تطبيقات . . . 1578
49.3.1 عنصر الجمالون . . . 1578
49.3.2 عنصر الانحناء . . . 1579
49.4 المتطلبات العامة للعنصر . . . 1579
49.5 خطأ التجزئة ومعدل التقارب . . . 1581
49.6 طبيعة الحد الأدنى لحلول الطاقة الكامنة الدنيا . . . 1582
49.7 الاتزان والتوافق في الحل . . . 1583

50 العناصر متساوية المعلمات **1585**
50.1 مقدمة . . . 1585
50.2 صياغة العنصر . . . 1587
50.2.1 عنصر القضيب . . . 1587
50.2.2 العنصر الرباعي (q4): صياغة مفصلة . . . 1589
50.2.3 العناصر المثلثية . . . 1592
50.2.3.1 مثلث T3 . . . 1592
50.2.3.2 مثلث T6 . . . 1594
50.2.4 مثال 50.1: المؤثرات اليعقوبية . . . 1595
50.3 التكامل العددي . . . 1596
50.3.1 نيوتن–كوتس . . . 1597
50.3.2 تربيع غاوس–ليجاندر . . . 1598
50.3.2.1 متعدد حدود ليجاندر . . . 1600
50.3.2.2 تربيع غاوس–ليجاندر عند $n = 2$ . . . 1600
50.3.3 المناطق المستطيلة والمنشورية . . . 1600
50.3.4 المناطق المثلثية . . . 1601
50.4 استرجاع الإجهادات: الإجهادات العقدية . . . 1601
50.5 الأحمال العقدية المكافئة . . . 1603
50.5.1 حمل الجاذبية . . . 1604
50.5.2 حمل الشد السطحي . . . 1605
50.5.3 الانفعالات والإجهادات الابتدائية؛ الحمل الحراري . . . 1606
50.5.4 رتبة التكامل . . . 1607
50.5.4.1 التكامل الكامل . . . 1607
50.5.4.2 التكامل المخفَّض . . . 1608
50.5.4.3 التكامل المخفَّض الانتقائي . . . 1609
50.6 القص الطفيلي والعناصر غير المتوافقة . . . 1610
50.6.1 Q4: المشكلة . . . 1610
50.6.2 Q6: الحل . . . 1611
50.6.3 Qm6: تحسينات إضافية . . . 1611
50.7 درجات الحرية الدورانية . . . 1612

51 طرائق البواقي الموزونة **1614**
51.1 مقدمة . . . 1614

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51.2 الصياغة العامة 1615
51.2.1 المؤثرات التفاضلية 1615
51.2.1.1 مثال 51.1: التحقق من التناظر والتعريف الموجب لعضو محوري أحادي البعد 1615
51.2.2 صياغة البواقي 1616
51.3 طرائق البواقي الموزونة 1618
51.3.1 طريقة المطابقة النقطية 1618
51.3.2 طريقة المطابقة على المجالات الجزئية 1618
51.3.3 طريقة المربعات الصغرى 1618
51.3.4 طريقة غالركين 1618
51.3.4.1 مثال 51.2: اهتزاز وتر 1619
51.4 تطبيق طريقة غالركين على مسائل المرونة ثلاثية الأبعاد 1620
51.4.1 اشتقاق الصيغة الضعيفة 1621
51.4.2 التقطيع بالعناصر المحدودة 1623
51.4.2.1 مثال 51.3: مصفوفة صلابة عنصر كمرة 1624
51.4.2.2 مثال 51.4: انتقال الحرارة 1626

52 الديناميكا الثانية **1630**
52.1 مقدمة 1631
52.2 مثالية الإطارات للتحليل الديناميكي 1631
52.2.1 الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية 1631
52.2.2 النمذجة 1632
52.2.2.1 مثال 52.1: محاكاة مونت كارلو للاستجابة المرنة الخطية لمبنى تحت حمل جانبي 1635
52.3 صياغة المسألة 1636
52.3.1 الصياغة التغايرية 1636
52.3.2 تمثيل الكتلة 1638
52.3.3 التخميد 1639
52.3.3.1 مثال 52.2: معايرة معاملات تخميد رايلي لمبنى قصي 1640
52.3.3.2 مثال 52.3: خط أساس تحليلي: الاهتزاز الحر من شروط ابتدائية عامة 1641
52.3.4 تقنية عددية: طرائق أويلر 1642
52.3.4.1 مثال 52.4: طريقة أويلر 1643
52.4 تقطيع الزمن 1643
52.4.1 الطرائق الضمنية 1645
52.4.1.1 طريقة نيومارك 1645
52.4.1.1.1 الاشتقاق 1645
52.4.1.1.2 طريقة نيومارك β الضمنية 1646
52.4.1.2 طريقة هيلبر–هيوز–تايلور 1647
52.4.2 التكامل الزمني الصريح 1649
52.4.2.1 لأنظمة الخطية 1650
52.4.2.2 لأنظمة غير الخطية 1652
52.5 الطرائق العددية للتحليل الديناميكي 1653

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

52.5.1 طريقة الفرق المركزي . . . 1653
52.5.2 مثال 52.5: خطوة استقرار الفرق المركزي . . . 1653
52.5.3 طريقة نيومارك–بيتا . . . 1654
52.5.4 التراكب النمطي مقابل التكامل المباشر . . . 1654
52.6 الأنظمة المستمرة . . . 1655
52.6.1 الاهتزاز المحوري للقضبان . . . 1655
52.6.1.1 مثال 52.6: سرعة الموجة والترددات المحورية الطبيعية لقضيب شد فولاذي . . . 1655
52.6.2 الاهتزاز العرضي للكمرات . . . 1657
52.7 الديناميكا غير الخطية . . . 1657
52.7.1 مصادر اللاخطية . . . 1658
52.7.2 المطيلية وتصميم السعة . . . 1658
52.8 اعتبارات عملية . . . 1658
52.8.1 التخميد في المنشآت الحقيقية . . . 1658
52.8.2 تفاعل التربة والمنشأ . . . 1658
52.8.3 مخمدات الكتلة المضبوطة . . . 1659
52.8.4 العزل القاعدي . . . 1659
52.9 الخلاصة . . . 1659

IV متقدم: اللاخطية وموضوعات أخرى 1661

53 مقدمة 1662
53.1 مقدمة . . . 1662
53.1.1 مصادر اللاخطية . . . 1662
53.1.2 لماذا نستخدم التحليل اللاخطي؟ . . . 1664
53.2 أنواع التحليل الإنشائي اللاخطي . . . 1665
53.3 تزايد الحمل والإزاحة . . . 1667
53.4 السلامة . . . 1668
53.4.1 مصطلحات . . . 1668
53.4.2 السلامة & الأحمال . . . 1669
53.5 مدونات التصميم . . . 1670
53.5.1 مقدمة . . . 1670
53.5.2 التطور: العصور القديمة . . . 1671
53.5.2.1 بلاد الرافدين: حمورابي . . . 1671
53.5.2.2 روما: فيتروفيوس . . . 1671
53.5.3 العصر الحديث . . . 1672
53.5.3.1 تصميم الإجهادات المسموح بها، ASD . . . 1673
53.5.3.2 تصميم معاملات الحمل والمقاومة، LRFD . . . 1673
53.5.3.3 هندسة الزلازل القائمة على الأداء . . . 1674
53.5.4 ملخص . . . 1675

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

54 اللدونة I؛ الألياف & الوسط المتصل (لتحليل العناصر المحدودة) 1678
54.1 مقدمة . . . 1678
54.2 شروط الخضوع اللدن . . . 1679
54.2.1 نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي . . . 1679
54.2.2 نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي . . . 1681
54.3 المشاهدات المختبرية . . . 1682
54.3.1 المعادن . . . 1682
54.3.2 الخرسانة . . . 1684
54.4 أوجه الفشل المجهرية . . . 1684
54.4.1 الروابط الكيميائية . . . 1684
54.4.2 الفشل المطيل والهش . . . 1685
54.4.3 الانخلاع . . . 1685
54.5 أسس اللدونة . . . 1686
54.5.1 مقدمة . . . 1686
54.5.2 معامل المرونة المماسي . . . 1687
54.5.2.1 الاشتقاق المعمم . . . 1688
54.5.2.1.1 دالة الخضوع؛ نموذج التصلد متساوي الخواص . . . 1688
54.5.2.1.2 قاعدة الجريان . . . 1688
54.5.2.1.2.1 شروط Kuhn-Tucker . . . 1689
54.5.2.1.3 شرط الاتساق . . . 1690
54.5.2.1.4 المعامل المماسي . . . 1690
54.5.2.2 المعامل المماسي؛ اشتقاق هندسي . . . 1691
54.5.2.3 مثال 54.1: المعامل المماسي . . . 1692

55 اللدونة II؛ المقاطع: 1695
55.1 مقدمة . . . 1695
55.2 الإطار النظري: الافتراضات والنتائج الرئيسة . . . 1695
55.3 العزم–الانحناء؛ $M-\Phi$ . . . 1697
55.3.1 بدءًا من علاقة العزم–الانحناء . . . 1698
55.3.1.1 مثال 55.1: تحليل لاخطي للمقطع؛ تحليلي . . . 1698
55.3.2 بدءًا من علاقة الإجهاد–الانفعال . . . 1701
55.3.2.1 مثال 55.2: الطبقات؛ الفولاذ . . . 1702
55.3.2.2 مثال 55.3: طبقي؛ الخرسانة/ACI . . . 1706
55.4 تعميم علاقة العزم–الانحناء . . . 1709
55.4.1 النهج التحليلي . . . 1709
55.4.1.1 مثال 55.4: العزم–الانحناء لمقطع I من الخرسانة المسلحة . . . 1711
55.4.1.2 مخطط التفاعل $M-N$ . . . 1716
55.4.2 النهج العددي . . . 1717

56 اللدونة III؛ المنشأ: خطوط الخضوع 1721
56.1 مقدمة . . . 1722
56.2 العناصر الخطية (الجوائز، الإطارات) . . . 1723
56.2.1 النهج الحركي؛ الحد الأعلى . . . 1723

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.2.1.1مثال 56.1: جائز مثبت؛ حمل مركزي 1726
56.2.1.2مثال 56.2: جائز مثبت؛ حمل لامركزي 1726
56.2.1.3مثال 56.3: جائز مستمر 1726
56.2.1.4مثال 56.4: إطار متعامد 1727
56.2.1.5مثال 56.5: إطار مائل 1727
56.2.2 السكونيات؛ الحد الأدنى 1729
56.2.2.1مثال 56.6: كابولي مسنود I 1731
56.2.2.2مثال 56.7: كابولي مسنود II 1732
56.2.2.3مثال 56.8: جائز مثبت 1732
56.2.2.4مثال 56.9: إطار مائل 1733
56.3 العناصر المستوية (البلاطات) 1738
56.3.1 السكونيات: الحد الأدنى 1739
56.3.1.1مثال 56.10: بلاطة مربعة 1739
56.3.2 الحركيات: الحد الأعلى 1740
56.3.2.1مثال 56.11: بلاطة مستطيلة 1742
56.4 تحليل الدفع 1743
56.5 أوجه التشابه بين تحليل الحد الأدنى و 1744
56.5.1 تحليل الدفع 1744
56.5.2 اللدونة المركزة 1747

57 ميكانيكا الضرر **1750**
57.1 مخطط مقترح بواسطة ChatGPT 1750
57.1.1 الدوافع والأسس الفيزيائية (~1.5 صفحة) 1750
57.2 الإطار الديناميكي الحراري (~2 صفحتان) 1750
57.3 الضرر القياسي متساوي الخواص: نموذج مازار (~4 صفحات) 1750
57.4 عدم التناظر بين الشد والضغط والتأثير أحادي الجانب (~2 صفحتان) 1750
57.5 اقتران الضرر واللدونة (~2 صفحتان) 1751
57.6 التنظيم والموضوعية بالنسبة إلى الشبكة (~3 صفحات) 1751
57.7 التطبيق على عناصر الجوائز والأعمدة (~3 صفحات) 1751
57.8 تحديد المعلمات ودليل عملي (~1.5 صفحة) 1751
57.9 ملاحظات ببليوغرافية وقراءات إضافية (~0.5 صفحة) 1751

58 التحليل غير الخطي؛ المادة **1752**
58.1 إيجاد الجذور عدديًا 1752
58.1.1 طرائق Newton 1753
58.1.1.1مقدمة 1753
58.1.1.2متسلسلة Taylor والخطّيَنة 1753
58.1.1.2.1 مثال 58.1: طريقة Newton؛ قياسية 1756
58.1.1.3لتقارب وتقدير الخطأ 1758
58.1.1.4ملاحظات ختامية 1758
58.1.1.4.1 مثال 58.2: طريقة Newton؛ متجه 1759
58.1.2 طريقة القاطع 1759
58.1.3 الطريقة الصريحة 1760

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.2 العلاقة بميكانيكا المنشآت؛ الطريقة الضمنية . . . 1762
58.3 طرائق التكامل . . . 1762
58.3.1 التحكم بالحمل . . . 1764
58.3.1.1 طريقة Newton-Raphson/الصلابة المماسية . . . 1764
58.3.1.2 طريقة Newton-Raphson المعدلة . . . 1766
58.3.1.3 طريقة Newton بالقاطع . . . 1768
58.3.1.4 معايير التقارب . . . 1769
58.3.1.5 جدول موجز . . . 1770
58.3.2 التحكم بالإزاحة . . . 1771

59 التحليل غير الخطي؛ الهندسي **1775**
59.1 مصفوفة الصلابة الهندسية . . . 1775
59.1.1 الاشتقاق . . . 1776
59.1.1.1 لصيغة الضعيفة . . . 1776
59.1.1.2 لانفعال . . . 1776
59.1.1.3 طاقة الانفعال الداخلية . . . 1777
59.1.1.4 $\mathbf{K}_\sigma$ . . . 1777
59.1.2 عدم الاستقرار المرن؛ تحليل التشعب . . . 1778
59.1.2.1 مثال 59.1: انبعاج عمود . . . 1779
59.1.2.2 مثال 59.2: انبعاج إطار؛ حل Matlab . . . 1781
59.1.2.3 مثال 59.3: انبعاج إطار؛ حل Mathematica . . . 1784
59.1.2.4 مثال 59.4: أثر الحمل المحوري في التشوه الانحنائي . . . 1785
59.2 التحليل الصريح التزايدي . . . 1788
59.2.1 مثال 59.5: الانحراف الكبير لكمرة كابولية . . . 1790
59.3 إعادة النظر في $P-\Delta$ . . . 1793
59.3.1 مثال 59.6: حمل الانبعاج من دون $\mathbf{K}_{geom}$ . . . 1794

60 التحليل غير الخطي؛ صياغة العنصر **1798**
60.1 مقدمة . . . 1799
60.2 عنصر الجمالون . . . 1799
60.2.1 نظام الإحداثيات لعنصر جمالون 2D . . . 1800
60.2.2 تحديد الحالة . . . 1801
60.3 صيغ عناصر الكمرة-العمود . . . 1801
60.3.1 عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة . . . 1802
60.3.1.1 نظام الإحداثيات في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة . . . 1804
60.3.1.2 تحديد الحالة . . . 1805
60.3.1.3 لخطأ "الخفي" . . . 1808
60.3.1.4 لتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على الصلابة . . . 1808
60.4 المقطع الطبقي/الليفي . . . 1812
60.4.1 عنصر كمرة-عمود 2D بطريقة المرونة . . . 1815
60.4.1.1 نظام الإحداثيات في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة . . . 1818
60.4.1.2 تحديد الحالة . . . 1820
60.4.1.2.1 من دون تكرار على مستوى العنصر . . . 1820

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.4.1.2.2 مع حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر 1822
60.4.1.3 التحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة 1827
60.4.1.3.1 من دون تكرار على مستوى العنصر 1827
60.4.1.3.2 مع حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر 1831
60.4.2 العناصر القائمة على الصلابة مقابل العناصر القائمة على المرونة 1834
60.5 صياغة العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري 1839
60.5.1 نظام الإحداثيات في العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري 1840
60.5.2 تحديد حالة العنصر 1840
60.6 عنصر مقطعي ذو طول صفري 1843
60.6.1 مصفوفة الصلابة 1843
60.6.2 نظام الإحداثيات 1844
60.6.3 تحديد حالة العنصر 1845
60.7 التكامل العددي 1847
60.8 قوة العنصر 1847

61 النماذج التأسيسية للدونة الموزعة والمجمعة 1848
61.1 مقدمة 1849
61.1.1 المرونة الحرارية الخطية 1849
61.1.2 النماذج الاستدلالية 1850
61.2 الدونة الموزعة 1852
61.2.1 نماذج الفولاذ 1852
61.2.1.1 مقدمة 1852
61.2.1.2 نموذج ثنائي الخطية ذي تصلد متساوي الخواص 1852
61.2.1.2.1 علاقة الإجهاد–الانفعال 1852
61.2.1.2.2 تحديد النموذج ثنائي الخطية 1854
61.2.1.3 نموذج Menegotto-Pinto 1854
61.2.2 نماذج الخرسانة 1862
61.2.2.1 تأثير الحصر 1862
61.2.2.2 نموذج Kent وPark المعدل 1863
61.2.2.2.1 علاقة الإجهاد–الانفعال 1863
61.2.2.2.2 تحديد نموذج Kent وPark المعدل 1870
61.2.3 نموذج ضرر متباين الخواص مع الضرر الفعال واستعادة الصلابة 1873
61.2.3.1 النموذج التأسيسي 1873
61.2.3.2 صياغة متعددة الألياف أحادية المحور 1875
61.2.3.3 تحديد نموذج الضرر متباين الخواص 1876
61.2.3.3.1 تحميل الشد: 1876
61.2.3.3.2 تحميل الضغط: 1877
61.2.3.4 نموذج ضرر متباين الخواص مع انفعالات دائمة 1884
61.2.3.4.1 المخطط العددي أحادي المحور 1884
61.2.4 انزلاق الترابط 1888
61.2.5 عنصر مقطعي ذو طول صفري 1889
61.3 الدونة المجمعة 1892

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.3.1 الطول اللدن 1893
61.3.1.1 المواضع المحتملة للمفاصل اللدنة 1893
61.3.1.2 التشوه الناتج من الانحناء ($\Delta(\phi)$) 1894
61.3.1.3 عزم العطالة الفعال للخرسانة المسلحة والانحناء 1895
61.3.1.4 التشوه بدلالة أطوال المفاصل اللدنة 1896
61.3.1.4.1 الخرسانة المسلحة 1896
61.3.1.4.2 الفولاذ 1900
61.3.1.5 مثال 61.1: مفصل لدن في عمود فولاذي 1902
61.3.2 نموذج فشل القص (مادة حالة الحد) 1902
61.3.2.1 مقدمة 1902
61.3.2.2 نموذج حالة حد القص 1903
61.3.3 نماذج Ibarra للتباطؤ المتضمنة تبديد الطاقة 1906
61.3.3.1 نماذج التباطؤ 1910
61.3.3.1.1 النموذج الموجه نحو الذروة 1911
61.3.3.1.2 نموذج التخصر 1912
61.3.3.2 أنماط تدهور المقاومة 1917
61.3.3.2.1 نمط تدهور المقاومة الأساسية 1919
61.3.3.2.2 نمط تدهور المقاومة بعد التغطية 1921
61.3.3.2.3 نمط تدهور صلابة التفريغ 1922
61.3.3.2.4 نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل 1924
61.3.3.3 الخلاصة 1925
61.3.4 نموذج Ghannoum 1925
61.3.4.1 منحنى العمود الفقري 1925
61.3.4.2 السلوك الدوري 1925

62 علم وفن نمذجة العناصر المحددة **1929**
62.1 مقدمة 1929
62.1.1 التحقق من شبكة/تحليل العناصر المحددة 1932
62.1.2 مفاهيم التحقق والتصديق على النموذج 1933
62.2 إنشاء الشبكة 1934
62.2.1 العناصر الكبيرة 1934
62.2.1.1 مثال 62.1: نمذجة العمود 1939
62.2.1.2 مثال 62.2: نمذجة الكمرة 1940
62.2.2 المقطع العرضي 1940
62.2.3 "اختر وثبّت" 1941
62.2.4 ملاحظات ختامية 1941
62.3 تحديد معاملات التدهور 1942
62.3.1 المعايرة 1943
62.3.1.1 تحديد المعاملات 1943
62.3.2 قاعدة بيانات معاملات النمذجة 1943
62.3.2.1 Peer/Berry 1943
62.3.2.1.1 خصائص العمود 1943

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

62.3.2.1.2 ملخص مقاومات الانحناء . . . 1948
62.3.2.1.3 مثال . . . 1949
62.3.2.2 Stanford/Lignos . . . 1949
62.3.2.3 UTSA/Ghannoum . . . 1951
62.3.2.4 العناصر المحددة المتصلة/Dolati . . . 1951
62.3.2.5 ACI-437-A . . . 1951

فاصل: من التحليل الأمامي إلى تحديد المعلمات **1952**

63 البيانات والشكوك: تحليل عدم اليقين والحساسية **1954**
63.1 مقدمة . . . 1954
63.2 جودة البيانات ومصادر الشك . . . 1955
63.3 تكميم عدم اليقين وتحليله . . . 1955
63.3.1 توصيف عدم اليقين في المدخلات . . . 1956
63.3.1.1 أنواع عدم اليقين . . . 1956
63.3.1.2 التمثيل الرياضي . . . 1957
63.3.2 الاعتماد وأخذ العينات المترابطة . . . 1957
63.3.2.1 التغاير والارتباط . . . 1957
63.3.2.1.0.1 مثال 63.1: مصفوفة الارتباط . . . 1957
63.3.2.2 التغاير المكاني . . . 1958
63.3.2.3 التغاير الزمني . . . 1959
63.3.2.4 توليد عينات مترابطة . . . 1959
63.3.3 نشر عدم اليقين . . . 1960
63.3.3.1 محاكاة مونت كارلو (MCS) . . . 1960
63.3.3.2 أخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق (LHS) . . . 1960
63.3.3.2.0.1 مثال 63.2: المكعب اللاتيني الفائق: مثال محلول بمتغيرين . . . 1963
63.3.3.3 بدائل تقريبية وبدائل بديلة لأخذ العينات المباشر . . . 1964
63.3.3.3.1 طريقة تقدير النقاط (PEM) . . . 1964
63.3.3.3.1.1 مثال 63.3: مثال على طريقة تقدير النقاط . . . 1965
63.3.3.3.2 واحد في كل مرة (تقدير الفروق المحدودة بسلسلة Taylor، TSFD) . . . 1965
63.3.3.3.2.1 مثال 63.4: مثال على طريقة الفروق المحدودة بسلسلة Taylor . . . 1966
63.3.3.3.3 توسع الفوضى متعدد الحدود (PCE) . . . 1967
63.3.3.3.3.1 مثال 63.5: توسع الفوضى متعدد الحدود . . . 1967
63.3.4 تفسير عدم اليقين في المخرجات . . . 1968
63.4 تحليل الحساسية . . . 1969
63.4.1 طريقة Morris . . . 1969
63.4.1.1 مثال 63.6: طريقة Morris . . . 1973
63.4.2 مؤشرات Sobol للحساسية القائمة على التباين . . . 1974
63.4.2.1 مؤشرات الرتبة الأولي . . . 1974
63.4.2.2 مؤشرات التفاعل والأثر الكلي . . . 1975

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63.4.2.3 التفسير 1975
63.4.2.4 الحساب والتكلفة 1975
63.4.2.5 العلاقة بفرز Morris 1975
63.4.3 مقارنة طرائق النشر والحساسية 1976
63.4.4 تحديد المتغيرات العشوائية المهمة 1976
63.4.4.1 مثال 63.7: طريقة Morris؛ تحديد المتغيرات المهمة 1977
63.4.5 مخططات الإعصار 1981
63.5 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات 1982

64 القرارات: طرائق تعيين المعاملات 1984

64.1 تعيين المعاملات بوصفه مسألة عكسية 1984
64.2 التطبيقات وإطار القرار 1986
64.2.1 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات 1986
64.2.2 إطار القرار: أي طريقة ومتى؟ 1986
64.3 جودة البيانات والحصانة 1986
64.3.1 مصادر تلوث البيانات 1986
64.3.2 تقدير التوافق الحصين: RANSAC 1987
64.3.2.1 الخوارزمية 1987
64.4 خوارزمية Levenberg–Marquardt 1990
64.4.1 نهج النمذجة واختيار النموذج 1991
64.4.2 المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة 1991
64.4.3 خطوة تحديث Levenberg–Marquardt وحدس الخوارزمية 1991
64.4.4 مثال 64.1: ملاءمة نموذج قطع زائد لاخطي 1992
64.4.5 التحجيم والحدود والتنظيم 1994
64.4.6 قابلية التعيين 1995
64.4.6.1 تقريب عدم اليقين المحلي 1995
64.4.7 عدم تطابق النموذج 1996
64.5 تعيين المعاملات البايزي 1996
64.5.1 تعيين المعاملات البايزي: الإعداد 1997
64.5.2 تقدير MAP والتقديرات النقطية 1997
64.5.3 أخذ العينات اللاحق وMCMC للمعاملات 1998
64.5.4 مثال 64.2: انحدار بايزي بأساس تربيعي وأخذ عينات Metropolis–Hastings 1998
64.5.5 مثال محلول: الاستدلال البايزي لمعاملات التدهور 1999
64.5.6 متى يُستخدم التعيين البايزي 1999
64.6 خوارزمية Levenberg–Marquardt عملياً 2000
64.6.1 ممارسة المربعات الصغرى 2002
64.6.1.1 برنامج MATLAB لتعيين المعاملات: الوصف 2002
64.7 سير العمل الهجين وأفضل الممارسات 2009
64.7.1 المعايرة والتحقق 2009
64.7.2 التطبيقات الإنشائية 2009
64.7.3 إطار قرار سير العمل 2010
64.8 الجسر إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء 2010

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

65 فاصل **2014**
65.1 قيود التصميم بمعاملات الأحمال والمقاومة (LRFD) . . . 2014
65.2 لماذا ننتقل إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)؟ . . . 2015
65.3 المكونات الأربعة لـPBEE . . . 2015
65.4 بنية الكتاب . . . 2016

66 تحليل الخطر **2017**
66.1 مقدمة . . . 2018
66.2 علاقة التكرار . . . 2018
66.3 نموذج التوهين . . . 2020
66.3.1 الأساسيات . . . 2020
66.3.2 Boore وJoyner و1997) Fumel) . . . 2021
66.3.3 التقييم البارامتري . . . 2022
66.4 تحليل الخطر الزلزالي الحتمي . . . 2024
66.5 تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي . . . 2025
66.6 زمن الوقوع . . . 2026
66.7 منحنيات الخطر الزلزالي . . . 2027
66.8 خرائط الخطر الزلزالي . . . 2029
66.9 تفكيك الخطر الزلزالي . . . 2029
66.10 أطياف الاستجابة المستهدفة . . . 2030
66.11 محاكاة الحركة الأرضية العشوائية . . . 2034
66.11.1 نموذج Rezaeian وr-d) Der Kiureghian) . . . 2035
66.11.2 نموذج Yamamoto وy-b) Baker) . . . 2036
66.12 دوال إثارة زمن التحمل . . . 2038
66.12.1 الجيل الأول من ETEFs . . . 2038
66.12.2 الجيل الثاني من ETEFs . . . 2039
66.12.3 الجيل الثالث من ETEFs . . . 2040
66.12.4 الجيل الرابع من ETEFs . . . 2040
66.12.5 الجيل الخامس من ETEFs . . . 2041
66.13 مثال 66.1: تحليل الخطر الزلزالي . . . 2043

67 تحليل الخطر الزلزالي II **2048**
67.1 مقدمة . . . 2048
67.2 المعدل السنوي للتجاوز . . . 2049
67.3 منحنى الخطر . . . 2050
67.4 تحليل الخطر الزلزالي الهندسي (ESRA) . . . 2051
67.4.1 مثال 67.1: حسابات فترة العودة . . . 2052
67.5 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) بوصفه SHA + ESRA . . . 2052

68 التحليل الإنشائي **2055**
68.1 مقدمة . . . 2056
68.2 تعريفات أساسية . . . 2057
68.3 السعة والطلب . . . 2058
68.3.1 علاقات الطلب بالسعة . . . 2058

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68.3.2 طرائق تقدير الطلب . . . 2058
68.3.3 مبادئ تصميم السعة . . . 2059
68.4 طرائق التحليل الزلزالي . . . 2060
68.4.1 تحليل الدفع (POA) . . . 2060
68.4.1.1 مثال 68.1: مثال على منحنى الطلب . . . 2065
68.4.1.2 مثال 68.2: تحليل الدفع؛ مثال عملي . . . 2066
68.4.2 التحليل الديناميكي المتزايد (IDA) . . . 2095
68.4.3 تحليل الشرائح المتعددة (MSA) . . . 2097
68.4.4 تحليل السحابة (CLA) . . . 2099
68.4.5 تحليل زمن التحمل (ETA) . . . 2100
68.4.6 الخلاصة . . . 2102
68.5 ما التالي؟ . . . 2104

69 تحليل الضرر **2106**
69.1 مقدمة . . . 2107
69.2 الحالات الحدية . . . 2108
69.2.1 التسلسل الهرمي للحالات الحدية . . . 2108
69.2.2 الإطار الاحتمالي . . . 2108
69.2.3 التطبيق في إطار PBEE . . . 2109
69.2.4 المعايرة والتحقق . . . 2109
69.2.5 اعتبارات متعددة الأهداف . . . 2109
69.2.6 الارتباط بمؤشرات الضرر . . . 2110
69.3 مؤشرات الضرر . . . 2110
69.3.1 مؤشرات الضرر ومعايير الأداء . . . 2110
69.3.2 الانتقال إلى التقييم الاحتمالي للضرر . . . 2111
69.3.3 التمثيل الاحتمالي للضرر . . . 2112
69.3.4 مقاييس الضرر ومعلمات الطلب الهندسي (EDP) . . . 2113
69.3.5 chap:trustregion في تقييم الضرر . . . 2113
69.3.6 مقاييس الضرر الكمية . . . 2113
69.4 الأداء . . . 2115
69.4.1 إطار الهندسة القائمة على الأداء . . . 2115
69.4.2 مستويات الأداء ومعايير القبول . . . 2117
69.4.3 دمج الحالات الحدية ومؤشرات الضرر ومستويات الأداء . . . 2118
69.5 الانتقال إلى منحنيات الهشاشة وتقييم المخاطر . . . 2119

70 تحليل الخسائر **2121**

71 التقييم الاحتمالي للمخاطر (PBEE ⊇)[6] **2124**
71.1 نماذج فكرية جديدة: هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) . . . 2125
71.1.1 قيود تصميم معامل الحمل والمقاومة (LRFD) . . . 2125
71.1.2 الجزء I: أهداف أداء صريحة . . . 2125
71.1.2.1 الطريقة . . . 2125
71.1.2.2 قيود PBEE-1 . . . 2126
71.1.2.3 التصميم مقابل التحليل . . . 2127

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71.1.3 الجزء II: التحديد المباشر للنتائج الوظيفية والاقتصادية كمياً: 2127
71.1.3.1 مقدمة 2127
71.1.3.2 الإطار العام 2128
71.1.3.3 الفروق بين PBEE 1 و PBEE 2 2130
71.1.4 إجراء تطبيق PBEE 2130
71.2 من الاستجابة إلى الضرر: منحنيات الهشاشة 2133
71.2.1 الأسس والتعريفات 2133
71.2.2 تطوير منحنيات الهشاشة 2134
71.2.3 التمثيلات الرياضية 2135
71.2.4 الدالة المستمرة مقابل المصفوفة المنفصلة 2135
71.3 الدور في إطار PBEE 2138
71.4 مثال 71.1: مثال كامل على PBEE 2138
71.5 المحطات التاريخية والوثائق التأسيسية 2143

الملاحق

الجزء الأول: مواد مرجعية أساسية

A الوحدات 2146
A.1 وحدات النظام الدولي 2146
A.2 البادئات والمضاعفات المترية 2147
A.3 الوحدات ومعاملات التحويل 2147
A.4 ملخص القوة والطول والشغل والإجهاد في الوحدات المترية المختلفة 2148
A.5 تحويل الكميات الفيزيائية من الوحدات المترية إلى الوحدات الإمبراطورية 2148
B الأحمال والتصميم القائم على المعطيات التجريبية 2149
B.1 الأحمال الميتة 2149
B.2 أحمال الرياح 2150
B.2.1 مثال B.1: حمل الرياح 2151
B.3 الزلازل 2152
B.3.1 مثال B.2: حمل زلزالي على إطار 2160
B.3.2 مثال B.3: حمل زلزالي على مبنى شاهق 2161
B.4 أحمال الجسور 2162
B.5 تركيبات الأحمال 2162
B.6 تخفيض الحمل الحي 2163
B.6.1 مثال B.4: تخفيض الحمل الحي I 2163
B.6.2 مثال B.5: تخفيض الحمل الحي II 2164
B.7 موضع الحمل 2164
C المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة 2166
C.1 ملخص المعادلات التفاضلية الحاكمة 2166
C.2 الحلول 2167
C.3 الاستقرار I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2167

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

C.4 الاستقرار II: $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2169
C.5 كمرة على أساس مرن: $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2169

D الأقواس المرنة؛ تحليلات متقدمة 2171
D.1 مقدمة . . . 2171
D.2 القوس الدائري ثلاثي المفاصل . . . 2172
D.2.1 إجراءات التحليل . . . 2173
D.2.2 الحمل المركز . . . 2173
D.2.3 الوزن الذاتي . . . 2180
D.2.4 الحمل الموزع بانتظام . . . 2184
D.2.4.1 الانحراف . . . 2186
D.2.5 التحقق من القوس الدائري ثلاثي المفاصل . . . 2186
D.2.6 الخلاصة . . . 2188
D.3 القوس الدائري ثنائي المفاصل . . . 2188
D.3.1 إجراءات التحليل . . . 2189
D.3.2 الحمل المركز . . . 2189
D.3.3 الوزن الذاتي . . . 2200
D.3.4 الحمل الموزع بانتظام . . . 2207
D.3.5 التحقق من القوس الدائري ثنائي المفاصل . . . 2211
D.3.6 الخلاصة . . . 2213
D.4 القوس الدائري عديم المفاصل . . . 2213
D.4.1 إجراءات التحليل . . . 2213
D.4.2 الحمل المركز . . . 2214
D.4.3 الوزن الذاتي . . . 2228
D.4.4 الحمل الموزع بانتظام . . . 2236
D.4.5 التحقق من القوس الدائري عديم المفاصل . . . 2241
D.4.6 الخلاصة . . . 2242
D.5 الخلاصة . . . 2243

الجزء الثاني: جداول التحليل والتصميم الإنشائي

E جداول تحليل القشريات الأسطوانية 2245

F تصميم أسقف القشريات البرميلية 2258

G مجموعة بيانات جسر ألاميو 2287

H الأيقونات المعرِّفة: التجزئة البصرية 2291
H.1 مقدمة إلى الأيقونات المعرِّفة . . . 2291
H.2 خوارزميات توليد الأيقونات المعرِّفة . . . 2292
H.3 مقارنة تطبيقَي GitHub وStack Exchange . . . 2294
H.4 التنفيذ في MATLAB . . . 2294
H.5 مقاطع الشيفرة الأساسية . . . 2297
H.6 استعمال البرنامج . . . 2298

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

H.7 المزايا والتطبيقات . . . 2298
H.8 الخلاصة . . . 2299

الجزء الثالث: تطبيقات الشيفرات

I شيفرات MATLAB®وMathematica 2300
I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods . . . 2301
I.1.1 Statics matrix of a truss B . . . 2302
I.1.2 St louis arch shape . . . 2305
I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica . . . 2306
I.1.4 Collapse of masonry arches . . . 2317
I.1.5 Main . . . 2317
I.1.6 Large deflection of a beam . . . 2329
I.2 Part II: Structural Design and Analysis . . . 2335
I.2.1 Design of cylindrical shells . . . 2335
I.2.2 Approximate frame analysis; cantilever method . . . 2349
I.2.3 Non uniform torsion . . . 2363
I.2.4 Orthogonal frame . . . 2366
I.2.5 Hybrid orthogonal frame . . . 2370
I.2.6 Frame; hard-wired . . . 2375
I.2.7 Direct stiffness method; frame . . . 2380
I.2.8 Main code . . . 2380
I.2.9 Stiffness matrix of non-prismatic members . . . 2393
I.2.10 Isostatic lines . . . 2401
I.2.11 Evolutionary design . . . 2407
I.2.12 Main . . . 2407
I.2.13 Column interaction diagram . . . 2414
I.2.14 Variational methods; mathematica . . . 2418
I.2.15 Monte Carlo simulation of a building’s linear elastic response to lateral load . . . 2429
I.2.16 Isoparametric elements . . . 2432
I.3 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior . . . 2444
I.3.1 Incremental plasticity . . . 2444
I.3.2 Constitutive models . . . 2449
I.3.3 Bilinear model . . . 2449
I.3.4 Hardening . . . 2453
I.3.5 Hysteresis . . . 2457
I.3.6 Modified giuffre monegotto pinto . . . 2476
I.3.7 Modified kent park . . . 2481
I.3.8 Ibarra . . . 2486
I.3.8.1 Hysteresis . . . 2486
I.3.8.2 Hysteresis pinch . . . 2506
I.3.9 Limit state shear . . . 2528

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2550 I.4 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification
2550 I.4.1 Parameter Identification Program
2550 I.4.2 Main Program and Core Orchestration
2560 I.4.3 Data I/O and Spreadsheet Integration
2573 I.4.4 Optimization Workflow and Auxiliary Functions
2587 I.5 Part V: Numerical and Statistical Foundations
2587 I.5.1 Levenberg-Marquardt
2588 I.5.2 Numerical techniques
2588 I.5.3 FFT and butterworth filters
2591 I.5.4 Singular value decomposition
2593 I.5.5 Preconditioning
2596 I.5.6 (Random Sampling Consensus (RANSAC
2601 I.5.7 Latin Hypercube
2606 I.5.8 Bayesian regression with a quadratic basis
2613 I.5.9 Markov chain Monte Carlo Simulation
2615 I.6 Part VI: Optimization and Parameter Fitting
2615 I.6.1 Levenberg-Marquardt
2615 I.6.2 Custom Implementation
2619 I.6.3 Using Built-in Function
2622 I.7 Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty
2622 I.7.1 Seismic hazard analysis
2625 I.7.2 Performance Based Earthquake Engineering
2630 I.8 Part VIII: Utility
2630 I.8.1 Identicon

2638 J أمثلة باستخدام Mathcad

الجزء الرابع: طرائق عددية وإحصائية

2804 K ترشيح السجلات الزلزالية (تحويلات فورييه السريعة)
2805 K.1 كيفية حساب تحويل فورييه

2809 L مراجعة في الجبر الخطي
2809 L.1 المصفوفات
2809 L.1.1 تعريفات
2811 L.1.2 العمليات الأولية على المصفوفات
2812 L.1.3 المحددات
2813 L.1.4 العكس
2813 L.2 حل المعادلات الخطية
2813 L.2.1 الاستراتيجيات
2814 L.2.2 التحليل
2814 L.2.2.1 حذف غاوس
2814 L.2.2.2 حذف غاوس–جوردان
2815 L.2.2.3 تحليل **LU**

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

L.2.2.4 تحليل تشولسكي . . . 2817
L.2.2.5 تحليل القيم المفردة . . . 2818
L.2.2.6 تحليل QR . . . 2820
L.2.3 الطرائق غير المباشرة . . . 2820
L.2.3.1 غاوس–سايدل . . . 2820
L.3 خصائص المصفوفات والتحسينات الحسابية . . . 2821
L.3.1 التفرد والرتبة . . . 2821
L.3.2 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية . . . 2822
L.3.3 عدد التكييف . . . 2823
L.3.4 التكييف المسبق . . . 2823
L.3.4.1 التكييف المسبق الأيسر . . . 2824
L.3.4.2 التكييف المسبق الأيمن . . . 2825
L.4 أمثلة . . . 2825
L.4.1 مثال L.1: حذف غاوس . . . 2826
L.4.2 مثال L.2: حذف غاوس–جوردان . . . 2827
L.4.3 مثال L.3: تحليل lu . . . 2828
L.4.4 مثال L.4: تحليل تشوليسكي . . . 2829
L.4.5 مثال L.5: غاوس–سايدل . . . 2830
L.4.6 مثال L.6: غاوس–سايدل . . . 2831
L.4.7 مثال L.7: تحليل القيم المفردة . . . 2831
L.4.8 مثال L.8: التهيئة المسبقة . . . 2832

M الاحتمالات والإحصاء **2835**
M.1 مقدمة في الاحتمالات والإحصاء . . . 2835
M.2 المفاهيم الأساسية في الاحتمالات . . . 2835
M.2.1 التحليل الحتمي مقابل التحليل الاحتمالي . . . 2835
M.2.2 التعريف . . . 2836
M.2.3 الاحتمال الشرطي . . . 2837
M.2.4 أنواع المتغيرات العشوائية . . . 2837
M.3 الأدوات الإحصائية للتحليل الاحتمالي . . . 2838
M.3.1 دالة التوزيع التراكمي . . . 2839
M.3.2 فترة الثقة . . . 2840
M.4 المقاييس الإحصائية . . . 2841
M.4.1 العزوم ومقاييس النزعة المركزية . . . 2841
M.4.2 العلاقات بين المتغيرات . . . 2843
M.5 التوزيعات . . . 2844
M.5.1 التوزيعات أحادية المتغير . . . 2844
M.5.1.1مقارنة . . . 2847
M.5.2 التوزيعات ثنائية المتغير . . . 2849

N مؤشر الموثوقية **2852**

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحتويات (I–IV)

الجزء الخامس: النظرية المتقدمة والتحسين الأمثل

O مدخل إلى ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه 2857
O.1 مقدمة . . . 2857
O.1.1 الترميز . . . 2857
O.1.2 الموترات . . . 2860
O.1.2.1 العمليات . . . 2860
O.1.2.2 دوران المحاور . . . 2861
O.1.2.3 تحويل الموترات . . . 2863
O.1.2.4 القيم الرئيسة للموترات المتناظرة من الرتبة الثانية . . . 2864
O.1.3 التفسير الفيزيائي لثوابت الإجهاد . . . 2865
O.2 الحقول المتجهة؛ ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه . . . 2866
O.2.1 القوى . . . 2866
O.2.2 موتر إجهاد كوشي . . . 2867
O.2.2.1 موترات الإجهاد الهيدروستاتيكي والانحرافي . . . 2869
O.2.2.2 التمثيل الهندسي لحالات الإجهاد . . . 2869
O.2.3 علم الحركة . . . 2870
O.2.3.1 الموضع والإزاحة . . . 2870
O.2.3.2 الانفعالات . . . 2871
O.3 القوانين الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة . . . 2873
O.3.1 قوانين الحفظ . . . 2873
O.3.2 التدفقات . . . 2874
O.3.3 حفظ الكتلة؛ معادلة الاستمرارية . . . 2875
O.3.4 حفظ كمية الحركة؛ معادلة الحركة . . . 2875
O.3.5 حفظ الطاقة؛ المبدأ الأول للديناميكا الحرارية . . . 2878
O.4 المعادلات التأسيسية . . . 2879
O.4.1 الحالة العامة ثلاثية الأبعاد (3D) . . . 2880
O.4.2 حالة تساوي الخواص المستعرض . . . 2881
O.4.3 حالات خاصة ثنائية الأبعاد (2D) . . . 2882
O.5 ملاحظات ظاهرية . . . 2883
O.5.1 اختبارات التحكم في الحمل والإزاحة والانفعال . . . 2883
O.5.2 استجابة الفولاذ والخرسانة قبل الذروة وبعدها . . . 2884
O.6 تمركز التشوه . . . 2885
O.6.1 الدليل التجريبي . . . 2885
O.6.1.1 مخطط COD-σ، نموذج هيلربورغ . . . 2885
O.7 الشروط الحدية . . . 2888
O.8 مخطط تونتي . . . 2889
O.9 مفهوم القوة الداخلية . . . 2889

P تحية تقدير إلى ويسترغارد 2892
P.1 حقل الإجهاد عند رأس الشق . . . 2892
P.1.1 دالة آيري للإجهاد . . . 2892
P.1.2 الحل . . . 2895

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

P.2 تفاعل المائع والمنشأ 2899

Q طريقتا نطاق الثقة وليفنبرغ–ماركوارت 2913
Q.1 نطاق الثقة 2914
Q.2 الخوارزمية 2917
Q.3 صياغة MATLAB® 2918
Q.4 التصور الآني 2920

R تمهيد في حساب المتجهات 2922
R.1 تعريفات أساسية 2922
R.1.1 الاشتقاق بالنسبة إلى كمية قياسية 2922
R.1.1.1 مثال R.1: مماس منحنى 2924
R.1.2 التباعد 2924
R.1.2.1 المتجه 2924
R.1.2.1.1 مثال R.2: تباعد متجه 2926
R.1.2.2 موتر من الرتبة الثانية 2926
R.1.3 التدرج 2927
R.1.3.1 الحقل القياسي 2927
R.1.3.1.1 مثال R.3: تدرج حقل قياسي I 2927
R.1.3.1.2 مثال R.4: تدرج حقل قياسي ii 2928
R.1.3.2 الحقل المتجهي 2929
R.1.3.2.1 مثال R.5: تدرج حقل متجهي 2930
R.2 مبرهنات التكامل 2930
R.2.1 تكامل متجه 2930
R.2.2 التكامل الخطي 2931
R.2.3 التكامل بالتجزئة 2931
R.2.4 غاوس؛ مبرهنة التباعد 2931
R.2.4.1 مثال R.6: التفسير الفيزيائي لمبرهنة التباعد 2932
R.2.5 مبرهنة ستوكس 2933
R.2.6 غرين؛ مبرهنة التدرج 2933

مراجع الأجزاء الثاني–الرابع 2934

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال (I–IV)

1.1 خريطة طريق إلى الهندسة الإنشائية 6

2.1 الرياضيات البابلية 12
2.2 رسم غوغل التذكاري ليوم π (14/3/2026)، تحية لأرخميدس 14
2.3 تعريف إقليدس للنسبة القصوى والمتوسطة 15
2.4 قطع طينية من بلاد الرافدين: إرهاصات الكتابة (نحو 3500 قبل الميلاد) 16
2.5 تطور المسمارية من العلامات التصويرية (نحو 3200 قبل الميلاد) إلى العلامات المقطعية المجردة (نحو 2000 قبل الميلاد) 17
2.6 الكتابة الهيروغليفية المصرية 17
2.7 حجر رشيد (196 قبل الميلاد)، يحمل المرسوم نفسه بالهيروغليفية والديموطيقية واليونانية من الأعلى إلى الأسفل، وكان مفتاح فك الكتابة المصرية القديمة 18
2.8 الأبجدية الفينيقية (نحو 1050 قبل الميلاد): الحروف الصامتة الاثنان والعشرون وأسماؤها وانتقالها إلى الحروف اليونانية واللاتينية 19
2.9 نسب الأبجديات: من الفينيقية (نحو 1050 قبل الميلاد) إلى أسر الخطوط اليونانية واللاتينية والعربية والعبرية والبراهمية 20

3.1 الطين في بلاد الرافدين 23
3.2 أهرام المايا والأزتك 24
3.3 المعابد والأهرام المصرية 25
3.4 الهندسة المصرية ونسب الأهرام 26
3.5 هيرودوت وعبور الفرس مضيق البوسفور (Herodotus, 1921) 31
3.6 فارس 32
3.7 العالم العربي–الإسلامي 33
3.8 اليونان 34
3.9 منشآت رومانية شهيرة 37
3.10 قواعد فيتروفيوس في التناسب 38
3.11 الهند والصين واليابان 41

4.1 كاتدرائيات شهيرة 45
4.2 العناصر الإنشائية للكاتدرائية 48
4.3 مقارنة مقطعي القوس الروماني والقوطي (Ching, 2011) 48
4.4 أمثلة للدعامات الطائرة في الكاتدرائيات القوطية (Kim, 2016) 49
4.5 مقطع في كاتدرائية قوطية (Ching, 2011) 50
4.6 قوس نموذجي (Ochsendorf, 2002) 50
4.7 انتقال القوى عبر الدعامات الطائرة 51
4.8 سلوك القبو (Hassan Fangary, 2010) 51
4.9 هندسة الدعامة الطائرة (Nikolinakou, Tallon **and** Ochsendorf, 2005) 51
4.10 خطا الدفع الأدنى والأقصى (Kim, 2016) 52
4.11 خطا الدفع الفعال والمنفعل، استناداً إلى (Heyman, 1966) 52

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4.12 تقييم حركي لمنشأ قوسي وآلية فشله (Hassan Fangary, 2010) 53
4.13 التحليل المرن ضوئياً للأقبية القوطية 54
4.14 ساعة بوفيه الفلكية 56
4.15 تحليل مقارن للمقطع العرضي، من حيث ارتفاع الصحن ونظام التدعيم: (أ) نوتردام باريس، و(ب) أميان، و(ج) بوفيه؛ رسم المؤلف استناداً إلى مقاطع Viollet-le-Duc, 1854 . . 57
4.16 تحليل فشل 1284 بعد الانهيار 58
4.17 إعادة بناء بوفيه بعد انهيار 1284 59
4.18 رسوم هندسية من دفتر فيلار دو أونيكور، توضح قواعد وأنظمة للتناسب (De Honnecourt, 2006) 62
4.19 دومو ميلانو 64
4.20 مخططات التناسب للتصاميم المتعاقبة 64
4.21 ملاحظة بوليني للشقوق في قبة القديس بطرس (Poleni, 1748) 67
4.22 تشبيه بوليني بالسلسلة المعلقة (Poleni, 1748) 68
4.23 تقوية القبة (Poleni, 1748) 69
4.24 ساغرادا فاميليا لغاودي 69
4.25 ترتيب الطوب بنمط *سبينا* دي بيشه والمسار اللوكسودرومي 71
4.26 بناء قبة سانتا ماريا دل فيوري 73
4.27 رافعة برونليسكي التي تديرها الثيران (King, 2010) 73

5.1 بيت الحكمة 79
5.2 ثلاثة مزامير دائمة التشغيل: دلاء مائلة يساراً، وميزان في الوسط، وعوامات يميناً؛ مخطوطة طوب قابي، 1206 80
5.3 الأعمال المؤسسة للثورة العلمية لدى غاليليو ونيوتن وبيكون وهوك 86
5.4 مأسسة العلم 87
5.5 خط زمني لصعود العقل العلمي 89

6.1 ليوناردو دا فينشي 102
6.2 شرح كتابة ليوناردو المعكوسة 103
6.3 بالاديو (Palladio, 1570) 112
6.4 *رسالة في الجسور* (Gautier, 1765) 114
6.5 جسر دو غار 115
6.6 جسور بيرونيه 118
6.7 تقييم Rankine, 1862 لأبعاد مفاتيح الأقواس 119
6.8 حوارات غاليليو غاليلي (Galilei, 1632) 124
6.9 غاليليو غاليلي 125
6.10 تحجيم غاليليو للعظام (Galilei, 1638) 126
6.11 هوك والساعة 131
6.12 ألغاز هوك الحرفية لعام 1675 في *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676) 131
6.13 رسم هوك للانثناء المرن من *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678) 134

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.14 نابض لولبي يحمل أوزاناً معلقة. ينسب هذا الرسم الأيقوني عادة إلى هوك، مع أن مصدره لا يزال غير واضح؛ والرسم المعاد هنا مأخوذ من Andrade, 1950. 134
6.15 إسحاق نيوتن 137
6.16 شجرة أسرة برنولي، مع إبراز أفرادها الذين يناقشهم هذا الكتاب، ودائرتهم الفكرية . . . 142
6.17 رسم نافييه للجسور المعلقة 156
6.18 نافييه وتلفورد: الجسور 157
6.19 دليلا رانكين الواصلان بين الميكانيكا التطبيقية والهندسة المدنية 163
6.20 جيمس كليرك ماكسويل 165
6.21 الخط الزمني التاريخي: العلماء والفنانون والموسيقيون والمؤلفون والسياسيون (2020–1000) 187

7.1 دراسات المقاومة المحورية عند ليوناردو وغاليليو 195
7.2 مسارات غاليليو نحو الجائزة الكابولية التأسيسية 196
7.3 تجارب موسخنبروك (Musschenbroek, 1739) 197
7.4 مساران متوازيان نحو إجهادات الانحناء 199
7.5 رسوم ليوناردو، الورقة 9v 200
7.6 رسوم ليوناردو، الورقة 20v، (Zammattio, 1980) 200
7.7 الجائزة الكابولية التأسيسية عند غاليليو 201
7.8 تفسير غاليليو لمقاومة الجائزة 202
7.9 ترخيم «جائزة مبنية» صلبة 202
7.10 نموذج مفاهيمي لجائزة مستلهم من ميكانيكا لايبنتس الهندسية (Leibniz, 1684) 205
7.11 نماذج ماريوت (Heyman, 1998b) 206
7.12 تصوير جيرار لنموذجي غاليليو وماريوت 206
7.13 نموذج باران 207
7.14 تجارب كولوم (Coulomb, 1773c) 208
7.15 قاعدة يونغ للثلث الأوسط 211
7.16 مقتطف من تعليقات سان-فنان في (Clebsch, 1862b) 213
7.17 التقاء أويلر وبرنولي وهوك (Euler, 1862) 216

8.1 دوائر تقبيل قطع مكافئ 221
8.2 انحناء أوريم 222
8.3 اشتقاق نيوتن للانحناء 224
8.4 لايبنتس، *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b) 225
8.5 اشتقاق يوهان برنولي للانحناء 226
8.6 اشتقاق ياكوب برنولي للانحناء 230
8.7 نواس هوينغنس المتساوي الزمن (Huygens, 1673) 234

9.1 الشخصيات الرئيسة في قصة المنحني المرن 240
9.2 لايبنتس في مدى حساب التفاضل والتكامل (Leibniz, 1858, p. 2–3). 242
9.3 رسوم ليوناردو للسلسلة المعلقة، نقلاً عن (Truesdell, 1960) 244

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.4 السلسلة المعلقة؛ كريستيان هوينغنس (Huygens, 1888b) . . . 246
9.5 تحدي ياكوب برنولي في Acta Eruditorum, p. 219 (Bernoulli, Jakob, 1690b) (*funicularia*) . . . 249
9.6 رد لايبنتس على هوينغنس، أكتوبر 1690 (Leibniz, 1923) . . . 251
9.7 حلول يونيو 1691 في *Acta Eruditorum* لتحدي ياكوب برنولي بشأن السلسلة المعلقة . . . 253
9.8 تحدي برنولي، (Bernoulli, Jakob, 1690a) . . . 259
9.9 المنحني المرن عند ياكوب برنولي . . . 259
9.10 معماريّو نظرية المنحني المرن: أعلام الرياضيات من بازل (ويكيبيديا) . . . 260
9.11 بحث ياكوب برنولي *Curvatura Laminae Elasticae*... (Bernoulli, Jakob, 1694) . . . 261
9.12 اعتراض هوينغنس عام 1694 على حل برنولي. . . . 265
9.13 تحدي يوهان برنولي لمنحنى أسرع هبوط (Bernoulli, Johann, 1696) . . . 270
9.14 حل يوهان برنولي لعام 1697 لتحدي منحنى أسرع هبوط (Bernoulli, Johann, 1697a) . . . 271
9.15 رسالة دانيال برنولي إلى أويلر، **(DanielBernoulli1742toEuler)** . . . 274
9.16 بحث أويلر لعام 1744 في حساب التغايرات (Euler, 1744b) . . . 277
9.17 «مخطط الجسم الحر» لطريقة أويلر المباشرة . . . 280
9.18 «أنواع» أويلر للمنحني المرن بدلالة معامل الحمل c^2/a^2 . . . 284
9.19 مؤثرا التغاير والتفاضل . . . 291
9.20 التحدي المجهول لعام 1724 في *Acta Eruditorum* (Anonymous, 1724)، والموقع على نحو غامض باسم «LBC» . . . 295
9.21 منشورا دانيال برنولي وليونارد أويلر الرائدان لعام 1728 (Euler, 1728). . . . 296
9.22 تحليل برنولي للعارضة مبيناً أثري الوزن الذاتي والحمل المطبق . . . 297
9.23 Euler, 1732، *Solutio problematis de invenienda curva* . . . 298
9.24 ركزت دراسات الضغط المبكرة على ظواهر عدم الاستقرار المحوري. . . . 305
9.25 بحث أويلر التأسيسي في الانبعاج (Euler, 1759) . . . 306
9.26 صياغة Euler, 1759 لحمل الانبعاج الحرج . . . 307
9.27 بحث أويلر في «التوحيد الكبير»، (Euler, 1771) . . . 309
9.28 مخطط أويلر للاتزان العام لخط (Euler, 1771). . . . 310

10.1 حجة رباعي السطوح لكوشي. يُقتطع رباعي سطوح متناهي الصغر من الجسم، وله ثلاثة أوجه عمودية على محاور الإحداثيات ووجه مائل متجهه العمودي الوحدي $\mathbf{n}$. ويعطي اتزان رباعي السطوح، حين يتقلص حجمه إلى الصفر، العلاقة $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. . . . 329
10.2 قوى السطح . . . 330
10.3 كوشي: من رباعي السطوح إلى الإجهاد . . . 330

11.1 صياغة ماني لعام 1915 لطريقة الميل–الانحراف (Maney, 1915) . . . 368
11.2 طريقة زايدل لعام 1873 للتقريبات المتتابعة في حل المنظومات الخطية (Seidel, 1873). كانت سليمة رياضياً، لكنها افتقرت إلى التفسير الفيزيائي الذي ابتغاه المهندسون. . . . 369
11.3 بحثا هاردي كروس التحوليان . . . 370

قائمة الأشكال (I–IV)

11.4 تكييف غولدبرغ عام 1934 لطريقة الميل–الانحراف لتحليل أحمال الرياح (Goldberg, 1934) . . . 371
11.5 طريقة ساوثويل للاسترخاء (Southwell, 1935) . . . 372
11.6 من فيزياء نيوتن (أعلى)، مروراً بمعادلات الحقول (الوسط)، إلى مبادئ لاغرانج التغايرية (أسفل). . . . 377

12.1 عمل بيرسون التجريبي على السدود (Pearson **andothers**, 1907) . . . 385
12.2 تحليل ريتشاردسون بالفروق المحدودة لمسألة إجهادات سد (Richardson, 1911) . . . 386
12.3 طائرات تجارية من خمسينيات القرن العشرين . . . 389
12.4 مسألة جناح الدلتا ومحاولات الحل المبكرة . . . 389
12.5 تفاصيل من Levy, 1953 . . . 391
12.6 التحليل الإنشائي بالمصفوفات (Turner **andothers**, 1956) . . . 392
12.7 مقارنة بين نهجي القوى والإزاحة (Argyris **and** Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968) . . . 394
12.8 كورانت يقدم دوال *التجربة* (Courant, 1943) . . . 396
12.9 الأسس الرياضية لطريقة العناصر المحدودة . . . 397
12.10 ورقة كلوف المنشورة سنة 1960 التي أطلقت اسم طريقة العناصر المحدودة (Clough, 1960) . . . 399
12.11 تحليل سد نورفورك بالعناصر المحدودة (Clough **and** Wilson, 1962; Clough, 1962) . . . 400
12.12 أول تحليل لاخطي بالعناصر المحدودة (Wilson, 1960) . . . 401
12.13 أول تحليل ديناميكي بالعناصر المحدودة (Wilson **and** Clough, 1962) . . . 401
12.14 المؤسسون المعاصرون لطريقة العناصر المحدودة . . . 403
12.15 تعميم طريقة العناصر المحدودة على تخصصات فيزيائية متعددة: على الرغم من اختلاف المعادلات الحاكمة، تفضي جميعها إلى البنية الجبرية نفسها . . . 405

13.1 مِعداد صيني تقليدي (سوانبان) . . . 411
13.2 مساطر المؤلف الحاسبة من مرحلة الدراسة الجامعية . . . 412
13.3 حاسبة لايبنتس ذات الأسطوانة المتدرجة . . . 413
13.4 حاسبة كاسيو إلكترونية مبكرة (نحو 1970) . . . 413
13.5 أول حاسبة اقتناها المؤلف . . . 414
13.6 آلة باباج التحليلية . . . 415
13.7 محلل بوش التفاضلي . . . 416
13.8 حاسوب ENIAC . . . 416
13.9 البطاقات المثقبة وسير عمل المعالجة الدفعية . . . 419
13.10 مثال على MathCad . . . 422

14.1 آلهة ارتبطت بالقوة في العصور القديمة . . . 427
14.2 أبرز المؤثرين الأوائل في مفهوم القوة . . . 430
14.3 عن إمبيدوكليس . . . 431
14.4 برهان أرخميدس لقانون الرافعة . . . 434

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.5 بوريدان وأورسم 439
14.6 ليوناردو، بينيديتي، غاليليو، كبلر، ديكارت، لايبنتس، نيوتن 440
14.7 مفاهيم الاتزان عند Pardies, 1710 442
14.8 سيمون ستيفن (1548–1620) 443
14.9 المنشور الرئيس لستيفن (Stevin, 1586) 443
14.10 تصوير ستيفن لجسم يحمله حبل واحد أو حبلان؛ (Stevin, 1586) و(Miller, 2017) 444
14.11 برهان ستيفن بـ*clootcrans*. 444
14.12 دراسة غاليليو للمستوى المائل (Galilei, 1594) 448
14.13 حسابات كبلر (Kepler, 1855) 450
14.14 رينيه ديكارت (1596–1650) 452
14.15 مسلمة توريتشيلي 457
14.16 برنولي ومتوازي أضلاع القوى (Bernoulli, Daniel, 1726) 462
14.17 سرعات يوهان برنولي الهندسية، (Bernoulli, Johann, 1725) 464
14.18 مفاهيم الاتزان عند Varignon, 1725 465
14.19 دالمبير وجدال القوة الحية: خلاف عده عديم الفائدة، لكنه تناوله بإيجاز (d’Alembert, 1743) 466
14.20 دالمبير والحركة بوصفها الأساس الوحيد للميكانيكا (d’Alembert, 1743) 467
14.21 دالمبير ومتوازي أضلاع القوى (d’Alembert, 1743) 468
14.22 ملاحظات دالمبير الأخيرة على متوازي أضلاع القوى (d’Alembert, 1773) 469
14.23 برهان لاغرانج لمبدأ السرعات الافتراضية باستخدام كتل البكرات (نقلاً عن Salençon, 2018) 473
14.24 رسم كارنو التوضيحي لمنظومات الأجسام والحركات الهندسية وميكانيكا التصادم (Carnot, 1803) 475

15.1 فيتروفيوس 485
15.2 تطور القواعد التجريبية لتصميم الجسور القوسية (نقلاً عن Huerta, 2018) 488
15.3 غاليليو يتحدى فيتروفيوس (Galilei, 1632) 489
15.4 تصميم الجسور في عصر النهضة: قواعد ألبيرتي الهندسية وأمثلة بالاديو الموثقة (Huerta, 2018) 495
15.5 كتاب بالاديو *الكتب الأربعة في العمارة* (Palladio, 1570) 497
15.6 شارل-إدوار جانيريه لو كوربوزييه 501
15.7 منظومات النسب الأنثروبومترية: من هندسة العصور الوسطى عبر إنسانية عصر النهضة إلى حداثة القرن العشرين 503
15.8 مسقط باناجيا كومبيليديكي (كاستوريا، القرن العاشر) بتخطيط *ad quadratum* (Oikonomou, 2022) 504
15.9 مقطع نوتردام دو باري بتخطيط *ad triangulum* (Oikonomou, 2022) 505
15.10 تحليل مسقط البارثينون (Oikonomou, 2022) 505
15.11 حمام عثماني في فلورينا (القرن الثامن عشر)، أعيد رسمه نقلاً عن Oikonomou, 2022 508

قائمة الأشكال (I–IV)

15.12مخطط لو كوربوزييه التصويري لـ *ingénieur-architecte* (Pierrefeu **and** Corbusier, 1942). 510
15.13رسوم من دو لورم (De l'Orme, 1561) 513
15.14رسوم من Willis, 1910 514
15.15انتقال حمل الدفع في الأقواس 514
15.16غوستاف إيفل: البرج والجسر 515
15.17روبرت مايار 518
15.18نوتردام دو رانسي لبيريه (1923) 519
15.19نوروخا، مضمار زارزويلا 521
15.20*L'Ingegnere* بيير لويجي نيرفي 524
15.21أمثلة لخطوط تساوي الاستاتيكا 526
15.22نيرفي والعمارة المحاكية للطبيعة 527
15.23نيرفي: المهندس الإنشائي ومهندس المواد 529
15.24منشآت نيرفي الأيقونية 529
15.25ريكاردو موراندي 530
15.26جسر سونيبيرغ لمين 531
15.27مباني خان الأيقونية 535
15.28تحقيق بوليني في تشقق قبة القديس بطرس (Poleni, 1748) 538
15.29ساغرادا فاميليا لغاودي 539
15.30قوس البوابة لسارينن 540
15.31فراي أوتو 540
15.32أمثلة حديثة لإيجاد الشكل بالنماذج الفيزيائية 541
15.33جسر موسميشي فوق نهر بازنتو 542
15.34المنشآت المتبادلة: مفاهيم توضيحية 543
15.35أمثلة مبكرة للمنشآت المتبادلة 544
15.36تحليلات المنشآت المتبادلة عند Wallis, 1695 544
15.37قاعة سيوا للمعارض (اليابان) (Popovic, 1996) 545
15.38تمثيل بارامتري لوحدة إطار متبادل (Popovic, 1996) 546
15.39تصاميم مثلى (Michell, 1904) 548
15.40جملون ميشيل 548
15.41التحسين الطوبولوجي للمنشآت (Beghini **andothers**, 2014) 549
15.42قشريات فيليكس كانديلا ذات القطع المكافئ الزائدي 554
15.43متحف غوغنهايم في بلباو لفرانك غيري ومنحوتة ريتشارد سيرا 555
15.44كالاترافا: الأناقة الإنشائية في جسر ألاميو في مقابل الثقل البصري لمحطة قطارات TGV في ليون سانت إكزوبيري. 556
15.45ياماساكي وروبرتسون: من نموذج سياتل الأولي إلى التأثير العالمي 559
15.46بيكر وبرج خليفة: تطور حاسوبي في خدمة الطموح المعماري (Baker, Skidmore) **andothers**, 2013) 562
15.47فيرلوغو وجسر ميو: شاعرية إنشائية بمقياس غير مسبوق (Virlogeux **andothers**, 2005) 563

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.48 نظم إنشائية بديلة للجسور المدعمة بالكابلات ومتعددة البحور، رفضها فيرلوغو كلها لأسباب جمالية (Virlogeux **andothers,** 2005) 564
15.49 العمارة فناً خالصاً: الشكل متحرراً من التعبير الإنشائي 566
15.50 الوظيفة والجمال: القلم والجسر 567
15.51 الفن الإنشائي الأصيل: المنشأ تعبيراً خالصاً 567
15.52 من الاحتفاء إلى النقد: تطور وجهات النظر في الإبداع الإنشائي 571

16.1 البنية الموضوعية للفصل 575
16.2 أمثلة من مطبوعات *namazu-e* تصور سمكة السلور العملاقة المسؤولة عن الزلازل (Miyata **and** Takada, 1995) 577
16.3 أدوات احتفالية من ساحل شمال غرب المحيط الهادئ تمثل أرواح الزلازل. 579
16.4 *إسرائيل عند جبل سيناء* (1703) ليان لويكن. يصور النقش التجلي الزلزالي انقلاباً بيئياً كاملاً، حيث يوحي رسم القمم مسنناً مضطرباً بـ«اهتزاز الأرض العنيف» استجابة للحضور الإلهي. 582
16.5 رجم الرسول فيلبس في هيرابوليس، فريجيا (يان لويكن، 1685). 583
16.6 معركة أريحا (نحو 1560) لفيرجيل سوليس (مجموعة كوزاك). 584
16.7 أسطورة إنسيلادوس 586
16.8 ثولوس دلفي، معبد دائري بُني بين عامي 380 و360 ق.م داخل حرم أثينا بروناية في دلفي، اليونان. 588
16.9 أيقونة روسية من القرن الثامن عشر تصور معجزة رئيس الملائكة ميخائيل في خوناي. 589
16.10 الأفاعي الكونية قوى تثبيت وحماية في الأيقونية الهندوسية والبوذية. 592
16.11 رسم خطي للسورة 99:1–8 (*الزلزلة*) 593
16.12 *Piedra del Sol* (حجر شمس الأزتك)، ورمز *Ollin* في مركزه. 596
16.13 ضريح كاشيما (محافظة إيباراكي)، مقر *Takemikazuchi-no-kami* والموقع الرئيس لطقوس الشنتو الواقية من الزلازل في اليابان السابقة للحداثة. 597
16.14 مطبوعة تعويذية من *namazu-e* تصور *Takemikazuchi-no-kami* يخضع سمكة السلور 598
16.15 الشبونة، قبل وبعد 606
16.16 جيبلّينا مدمرة ومدفونة في الخرسانة 612
16.17 جيبلّينا نوفا 613
16.18 جدارية كويفا دي لا سيربيينتي، سييرا دي سان فرانسيسكو، باخا كاليفورنيا. 615
16.19 رسوم تصويرية في كهف تشوماش المرسوم، جبال سانتا ينز، كاليفورنيا. 615
16.20 استجابتان تصويريتان للكارثة الزلزالية 617
16.21 إسهامات مختارة (وارهول ومابلثورب وكيفر) في مجموعة أميليو 618

17.1 التحليل الإنشائي؛ الصورة الكبرى 727
17.2 أنواع القوى في العناصر الإنشائية أحادية البعد 732
17.3 الجوانب الأساسية للأنظمة الكبلية 733
17.4 الجوانب الأساسية للعقود 734
17.5 أنواع الجمالونات 734
17.6 تنويعات في ترتيبات الأعمدة والكمرات 735
17.7 أنواع مختلفة من الكمرات 735

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17.8 الأشكال الأساسية للإطارات 736
17.9 أمثلة لمنشآت مدعومة بالهواء 737
17.10الأشكال الأساسية للقشريات 737
17.11تسلسل مقررات الهندسة الإنشائية 739

18.1 خريطة الثلوج في الولايات المتحدة 742
18.2 مقطع جناح هوائي ومعادلة برنولي 743
18.3 خريطة الرياح في الولايات المتحدة 744
18.4 تأثير حمل الرياح في المنشآت 744
18.5 الخريطة الزلزالية للولايات المتحدة 745
18.6 أحمال التربة والأحمال الهيدروستاتيكية على المنشآت 747
18.7 إسقاط الأحمال 751
18.8 وضع الأحمال لتعظيم العزوم 752
18.9 انتقال الأحمال في مباني الخرسانة المسلحة 755
18.10الفعل أحادي الاتجاه أو ثنائي الاتجاه في البلاطات 755
18.11آليات انتقال الأحمال في الكاتدرائيات القوطية والعقود الضحلة 756
18.12مفهوم المساحات التابعة لتحميل العناصر الإنشائية 757
18.13دورة أحمال المنشأ، (Lin **and** Stotesbury, 1981) 759

19.1 أمثلة لشروط الحدود وردود الأفعال 761
19.2 اتزان العزوم، من ليوناردو (Da Vinci, 1490 إلى كالدر) 763
19.3 ردود الأفعال عند مسند متحرك مائل 764
19.4 درجة عدم التحديد الاستاتيكي 764
19.5 ردود أفعال متلاقية 765
19.6 مخططات الجسم الحر لكمرة معرضة لأحمال مختلفة 766

20.1 جمالون غير محدد استاتيكياً 787
20.2 العلاقة بين القوى والأطوال 788
20.3 تمثيل القوى بالأسهم 788
20.4 طريقة العقد والمصفوفة: مخططات الجسم الحر للعقد 797
20.5 جمالون معقد محدد استاتيكياً 797

21.1 الإجهادات الداخلية 804
21.2 القوى الداخلية في الكمرات المستقيمة والمنحنية 805
21.3 القوى الداخلية 807
21.4 اصطلاحات إشارة القص والعزم في التصميم 807
21.5 اصطلاحات الإشارة في التصميم 807
21.6 مخطط الجسم الحر لجزء متناهي الصغر من كمرة 808
21.7 تغيرات الحمل والقص والعزم 810

22.1 الانحناء والانفعالات 834
22.2 اصطلاح الإشارة في طريقة مساحة الانحناء لانحناءين متعاكسين للكمرة 845

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال (I–IV)

22.3 طرائق مساحة الانحناء 845
22.4 الانحراف الأقصى باستخدام طريقة مساحة العزم 849
22.5 الكمرات المرافقة 855

23.1 تشوه القص النقي 859
23.2 عنصر متناهي الصغر خاضع لإجهاد قص 860
23.3 إجهاد القص ومعامله 862
23.4 علاقات دوران اللي 865
23.5 سبب حدوث الالتواء 866
23.6 اللي غير المنتظم (مقتبس من (McGuire **and** Winter, 1968)) 867
23.7 كمرة على شكل I خاضعة للي 869

24.1 القوى الافتراضية والحقيقية في منشأ عام 875
24.2 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل 878

25.1 منشأ من ثلاثة كابلات غير محدد استاتيكياً 903
25.2 كمرة كابولية مسندة 904
25.3 مسألة توضيحية لطريقة المرونة 906
25.4 توضيح طريقة المرونة لمجهولين 907
25.5 أمثلة لمنشآت مستوحاة من الدعامة الملكية 922
25.6 اشتقاق معادلة العزوم الثلاثة 926
25.7 حدود الحمل في معادلة العزوم الثلاثة 928

26.1 اصطلاح الإشارة لطريقة الصلابة 932
26.2 صياغة مسألة الانحناء لاشتقاق حدود الصلابة 934

27.1 مثال توضيحي لطريقة الميل والانحراف 942
27.2 المفاهيم الأساسية لتوزيع العزوم 952

28.1 مبدأ مولر–برسلاو 964

29.1 استقرار قضيب صلب 975
29.2 استقرار قضيب صلب ذي عيب ابتدائي 976
29.3 كمرة–عمود بسيطة الارتكاز؛ جزء تفاضلي؛ تأثير القوة المحورية P 978
29.4 منظومة ديناميكية ذات درجتي حرية 989
29.5 الأطوال الفعّالة للكمرات والإطارات 990
29.6 الأطوال الفعّالة للأعمدة في إطارات متعددة البحور والطوابق 991
29.7 مخطط المحاذاة للوصلات شبه المرنة (American Institute of Steel Construction, 2016) 991
29.8 الانبعاج غير المرن 993
29.9 انبعاج أويلر ومنحنى الأعمدة لمجلس أبحاث الاستقرار الإنشائي 993

30.1 التحقق من نظرية الكابل 998

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.2 هندسة الكابل: الحالة الأولى . . . 1001
30.3 هندسة الكابل: الحالة الثانية . . . 1003
30.4 هندسة كابل مائل خاضع لحمل عرضي أفقي منتظم . . . 1009
30.5 جساءة الكابل . . . 1009
30.6 نظاما إحداثيات مرجعيان بديلان للمنحنى السلسلي . . . 1021
30.7 منحنى سلسلي ذو وتر مائل، (Cella, 1999) . . . 1022
30.8 مقارنة الحلين السلسلي والمكافئ . . . 1027

31.1 القوى المقاومة للعزم في القوس أو النظام المعلّق مقارنةً بكمرة، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1030
31.2 اتزان قوس ثلاثي المفاصل . . . 1031
31.3 قوس ثنائي المفاصل والتناظر مع كمرة مثبتة الطرفين (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1037
31.4 مركز ثقل صنجة . . . 1046
31.5 اتزان صنجة متناهية في الصغر . . . 1047
31.6 القوس المكافئ الأمثل تحت حمل منتظم . . . 1052
31.7 قوس مكافئ عديم المفاصل؛ مخطط الجسم الحر . . . 1058
31.8 أثر الهبوط الابتدائي وتغير درجة الحرارة . . . 1063
31.9 السلم الحلزوني في متحف اللوفر بباريس وكاتدرائية ساغرادا فاميليا في برشلونة . . . 1069
31.10هندسة منشأ منحني في الفراغ . . . 1070
31.11مخطط الجسم الحر لمنشأ منحني في الفراغ . . . 1071

32.1 الإزاحات والإجهادات في البلاطة . . . 1076
32.2 القوى الداخلية . . . 1078
32.3 توزيع الإجهادات . . . 1083
32.4 اتزان عنصر متناهي الصغر من بلاطة دائرية . . . 1087

33.1 عنصر قشري تفاضلي وهندسته وإجهاداته ومحصلاتها . . . 1095
33.2 حركة العنصر التفاضلي . . . 1096
33.3 اتزان عنصر قشري تفاضلي . . . 1098
33.4 عنصر قشري تفاضلي، محصلة الإجهاد V_x . . . 1102
33.5 عنصر قشري تفاضلي والانحناءات الرئيسة . . . 1103
33.6 العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة . . . 1107
33.7 العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة؛ انفعال القص الناجم عن زيادة طول الأضلاع الموجبة . . . 1109
33.8 العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة؛ الدوران . . . 1109
33.9 السطح الأوسط للعنصر التفاضلي . . . 1112
33.10تصنيف القشريات . . . 1121
33.11أمثلة لقشريات يكون فيها افتراض الغشاء صالحاً في معظم المجال . . . 1122
33.12مخططات الجسم الحر لعنصرين متناهيي الصغر من سطح زائد وقبة . . . 1122
33.13مخطط الجسم الحر لعنصر متناهي الصغر من قشرة دائرية . . . 1125
33.14توزيع محصلات الإجهاد في قشرة دائرية كاملة بسيطة الاستناد . . . 1128
33.15آثار الحواف . . . 1130

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.16 الحمل الخطي التصحيحي المطبق على القشرة الدائرية . . . 1131
33.17 تمثيل سلسلة الجيب . . . 1131
33.18 التناظر بين قشرة غير محددة استاتيكياً ونظام كمرات . . . 1148
33.19 قشريات دائرية مستندة إلى مسند مرن . . . 1149

34.1 مهتز مثالي أحادي درجة الحرية . . . 1168
34.2 منحنيات مفاهيمية للتضخيم الديناميكي لمهتز مخمد أحادي الحرية تحت قوة توافقية . . . 1175
34.3 طيف استجابة التسارع S_a بدلالة الدور الطبيعي T_n لعدة نسب تخميد. . . . 1183
34.4 أشكال الأنماط الثلاثة الأولى لكمرة بسيطة الاستناد . . . 1186
34.5 حلقة تخلفية مرنة–لدنة ثنائية الخط تحت حمل دوري متناظر. . . . 1193

35.1 التفاعل التكراري بين المعماري والمهندس الإنشائي . . . 1202
35.2 الطلب والقدرة في كمرة . . . 1202
35.3 السلامة . . . 1203
35.4 دالتا التوزيع الاحتمالي لـ C و D . . . 1205
35.5 احتمال الفشل بدلالة β . . . 1207
35.6 تحليل الحالة الحدية لمقطع خرسانة مسلحة متشقق . . . 1208
35.7 كتلة إجهاد ويتني . . . 1210
35.8 مخططا الجسم الحر والتفاعل للعمود . . . 1217
35.9 الجسم الحر للعمود في الحالة المتوازنة . . . 1218

37.1 دورانات الزوايا المتوافقة . . . 1242
37.2 انحراف كمرة بسيطة . . . 1242
37.3 انحراف إطار بوابي ذي أعمدة صلبة تحت حمل رأسي . . . 1243
37.4 انحراف إطار بوابي تحت حمل رأسي . . . 1243
37.5 مثال لإطار بوابي تحت حمل جانبي . . . 1244
37.6 الشكل المنحرف ومخطط العزم لإطار بوابي تحت حمل جانبي . . . 1245
37.7 انحرافات الكمرة بدلالة صلابة المساند . . . 1246
37.8 إطار تحت حمل رأسي: المواضع التقريبية لنقاط الانعطاف . . . 1247
37.9 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية: عزوم الجسر . . . 1248
37.10 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية: القوى المحورية للأعمدة . . . 1249
37.11 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية . . . 1250
37.12 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال جانبية: قص الأعمدة . . . 1251
37.13 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال جانبية: عزم الجسر . . . 1252
37.14 تشوه القص في مبنى قصير، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1272
37.15 تشوه الانحناء في مبنى عال، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1273
37.16 انحراف منشأة مبنى مؤلفة من جدارين نحيلين وجوائز رابطة، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1273
37.17 تشوه إطار عرضي واحد، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1274
37.18 انحراف القص والانحناء لنظام فرعي من إطار صلد، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1275
37.19 انحراف التمايل الجانبي الناتج من حمل رأسي غير متناظر، (Lin **and** Stotesbury, 1981) . . . 1276

39.1 الانفعال المعتمد على الزمن: الزحف والانكماش 1322
39.2 الأحمال الحرارية على المبنى 1322
39.3 اصطلاح الإشارة في التصميم والتحليل، انظر الشكل 26.1 1323
39.4 القوى الداخلية للعنصر ودرجات حريته المحلية 1324
39.5 الإزاحات المستقلة 1325
39.6 نظاما الإحداثيات ودرجات الحرية المحلية والعامة 1326
39.7 درجتا عدم التحديد الاستاتيكي والحركي 1328
39.8 مسألة قيم حدية 1329

40.1 تعريف حد الصلابة K_{ij} 1331
40.2 معاملات الصلابة لأنواع مختلفة من العناصر 1332
40.3 درجات حرية عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد 1334
40.4 حدود الصلابة المنفردة في عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد 1337
40.5 تشوه القص الطفيلي الناتج من الإزاحات المفروضة 1339
40.6 القوى والإزاحات الطرفية لعنصر التواء مع تقييد الالتواء القطاعي 1342

41.1 مثال كمرة للمقارنة بين طريقتي المرونة والصلابة 1345
41.2 مثال كمرة لتحديد درجة عدم التحديد الحركي 1346

42.1 مصفوفتا صلابة العنصر المحلية ($\mathbf{k}^e$) والعامة ($\mathbf{K}^e$) 1371
42.2 مصفوفة التحويل لعنصر كمرة–عمود ثنائي الأبعاد 1372
42.3 تحويل اعتباطي لمتجه ثلاثي الأبعاد 1374
42.4 دوران عنصر إطار ثنائي الأبعاد حول Z (أو z) 1376
42.5 دوران عنصر الشبكة الإنشائية 1377
42.6 مصفوفة التحويل لكمرة فلاسوف 1378
42.7 دوران جمالون ثنائي الأبعاد 1379
42.8 دوران ثلاثي الأبعاد مختزل 1380
42.9 الحالة الخاصة لتحويل عنصر رأسي ثلاثي الأبعاد 1381
42.10 دوران ثلاثي الأبعاد مركب 1382

43.1 درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة 1388
43.2 مثال على تقطيع منشأ 1389
43.3 مثال على تحديد مصفوفة [**ID**] 1390
43.4 أمثلة على إسناد قيم **LM** 1391
43.5 عملية تجميع مصفوفة الصلابة العامة 1392

44.1 تحويل الإزاحات إلى قوى 1410
44.2 تحويل دائرة إزاحة الوحدة إلى قطع ناقص للقوى، (Gavin, 2012). 1411
44.3 مسألة اختبار القيم الذاتية 1413
44.4 تجميع عناصر ينتج مصفوفة **K** سيئة التكييف 1415
44.5 المصفوفات سيئة التكييف بدلالة K_1 K_2 1416
44.6 أهمية ترقيم العقد 1420

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

44.7 متطلبات تخزين مصفوفة صلابة المنشأ 1421

45.1 حركة عنصر جمالون 1433
45.2 عنصر مستقر ومحدد استاتيكياً 1437
45.3 كمرة ذات إزاحة صلبة 1448
45.4 مخطط الجسم الحر لكمرة ذات إزاحة صلبة 1449
45.5 كمرات ذات وصلات مرنة وصلبة وشبه صلبة 1451
45.6 تشوهات كمرة شبه صلبة 1452
45.7 المعامل $\overline{K}_{22}$ للوصلات شبه المرنة 1455
45.8 مقتطفات من دليل ثوابت الإطارات (Portland Cement Association, 1947) 1456
45.9 كمرة ذات مقطع متغير 1457
45.10مقطع ذو عمق متغير خطياً؛ دراسة بارامترية 1458
45.11مقطع ذو عمق متغير قطعياً مكافئاً؛ دراسة بارامترية 1459

46.1 مؤثرا التغاير والتفاضل 1473
46.2 أمثلة على الشروط الحدية الأساسية والطبيعية 1478
46.3 مخطط تونتي لطريقة الطاقة الكامنة الكلية 1484
46.4 مخطط تونتي لهو–واشيزو، (Červenka, 1994) 1495
46.5 مخططات تونتي للاغرانج وهاملتون ودالمبير 1497

47.1 تعريف الشد السطحي 1502
47.2 كثافتا طاقة الانفعال وطاقة الانفعال المتممة 1503
47.3 الطاقة الكامنة 1504
47.4 تأثير تاريخ التحميل في U وW_i 1505
47.5 مخططان توضيحيان لمبدأي الشغل الافتراضي والمتمم 1514
47.6 التصغير في الميكانيكا الكمية والكلاسيكية 1524
47.7 ملخص الطرائق التغايرية 1541
47.8 ازدواج المبادئ التغايرية 1542

48.1 نظام الإحداثيات الطبيعية على خط مستقيم 1547
48.2 نظام الإحداثيات الطبيعية للمثلث 1548
48.3 التكامل على مثلث 1550
48.4 عنصر محدد محوري 1551
48.5 عنصر المثلث ثابت الانفعال 1553
48.6 عنصر مستطيل ثنائي الخطية 1555
48.7 دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد الأربع 1556
48.8 عنصر صلد مستطيل ثلاثي الخطية 1557
48.9 دوال الشكل للعنصر المثلثي الخطي ذي العقد الثلاث 1559
48.10عنصر قضيب تربيعي ذو ثلاث عقد 1559
48.11عنصر محدد للانحناء 1560
48.12دوال الشكل لانحناء عنصر كمرة منتظم 1562
48.13عنصر متساوي المعلمات ذو أربع عقد 1565

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

48.14 العنصران الرباعيان التربيعيان من نوع سيرنديبتي ولاغرانج 1566
48.15 مثلثا باسكال للعناصر الرباعية والمثلثية 1567
48.16 عنصر محدد تربيعي متساوي المعلمات من نوع سيرنديبتي: العنصر العام والأب 1567
48.17 دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد الثماني 1568
48.18 دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد التسع 1571
48.19 ترقيم العقد في العناصر متساوية المعلمات 1571
48.20 دوال الشكل للعنصر المثلثي التربيعي ذي العقد الست 1572

49.1 الاكتمال والتوافق 1580
49.2 تقارب h وp وr 1581
49.3 استمرارية الإجهاد بين العناصر 1583
49.4 استمرارية الانفعال بين العناصر 1583

50.1 تحويل ثنائي الأبعاد لبعض العناصر 1586
50.2 العنصر الحقيقي والعنصر الأب 1586
50.3 العناصر المتساوية والفوقية والتحتية المعلمات 1587
50.4 عنصر تفاضلي في نظام إحداثيات منحنية 1591
50.5 حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين 1591
50.6 عنصر ذو يعقوبيات قد تصبح مفردة 1592
50.7 التكامل العددي بطريقة نيوتن–كوتس 1597
50.8 تكامل غاوس–ليجاندر على سطح 1601
50.9 التكامل العددي على مثلث 1601
50.10 الاستقراء من نقاط غاوس لعنصر رباعي ذي أربع عقد (Felippa, 1999) 1602
50.11 تحميل الجاذبية 1604
50.12 حمل الشد السطحي في العناصر متساوية المعلمات 1605
50.13 حمل الشد السطحي في عناصر متساوية المعلمات متجاورة 1606
50.14 أنماط الإزاحة المستقلة لعنصر ثنائي الخطية 1609
50.15 أنماط الساعة الرملية في عنصر تربيعي ناقص التكامل 1609
50.16 عنصر مستطيل ثنائي الخطية خاضع للانحناء؛ العنصر ثنائي الخطية والهندسة الصحيحة 1610
50.17 الإزاحات المرتبطة بالأنماط غير المتوافقة لعنصر Q6 1611
50.18 إزاحات الحواف الناتجة من درجات حرية الثقب 1612

52.1 الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية 1632
52.2 تقليل الإزاحات غير المقيدة عند إهمال الصلابة المحورية 1633
52.3 نمذجة مبنى للحمل الزلزالي 1633
52.4 مخطط الجسم الحر لعقدة 1634
52.5 التخميد المتناسب مع الكتلة والصلابة 1640
52.6 طريقتا أويلر الأمامية والخلفية 1644

53.1 اللاخطية الهندسية: مثال على الانحراف الكبير (B)، 29.2.3 1663
53.2 اللاخطية المادية: نماذج الألياف (D) 1664
53.3 اللاخطية المادية: استجابة المقطع (D) 1664
53.4 التحليل الخطي مقابل التحليل اللاخطي 1665

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

53.5 أنواع التحليل الإنشائي 1666
53.6 منحنى الحمل–الانحراف ومجالات الاستجابة المختلفة 1669
53.7 مدونات التصميم في العصور القديمة 1671
53.8 *Beton-Reglement f ur Eisenbetonbau* 1672
53.9 أمثلة لمدونات التصميم الحديثة 1673
53.10مستويات الأداء 1675
53.11مقارنة أطر التصميم المختلفة 1676

54.1 تعريف سطح الخضوع 1679
54.2 نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي 1680
54.3 سطوح خضوع تعتمد على الضغط 1681
54.4 نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي 1683
54.5 الإجهاد–الانفعال للمعادن؛ تأثير Bauschinger 1683
54.6 الشقوق المجهرية في الخرسانة 1684
54.7 الروابط الكيميائية 1685
54.8 الروابط المطيلة والهشة 1685
54.9 الانخلاع 1686
54.10استجابة الإجهاد–الانفعال المرنة–اللدنة 1687
54.11نماذج التصلد 1688

55.1 مقطع عرضي اعتباطي لتحديد $M - \Phi$ 1709
55.2 إجراء تزايدي لتحديد $M - \Phi$ تحليليًا 1710
55.3 مخططا العزم–الانحناء والعزم–القوة المحورية (التفاعل) 1716
55.4 تقسيم مقطع عرضي إلى طبقات 1717
55.5 نهج تزايدي لتحديد $M - \Phi$ عدديًا 1719

56.1 خطوط الخضوع في البلاطات 1739
56.2 تحديد خطوط الخضوع في البلاطات المستطيلة 1741
56.3 حل الحد الأدنى السكوني مقابل تحليل الدفع 1744

58.1 طريقة Newton 1754
58.2 مخطط التكامل الصريح 1761
58.3 شرح طريقة Newton للتحكم بالحمل 1764
58.4 طريقة Newton-Raphson للتحكم بالحمل 1766
58.5 طريقة Newton-Raphson المعدلة، المماس الابتدائي 1767
58.6 طريقة القاطع التزايدي، أو quasi-Newton 1768
58.7 طريقة Newton؛ التحكم بالحمل في مقابل التحكم بالإزاحة 1771
58.8 طريقة Newton؛ التحكم بالإزاحة، قارن بالشكل 58.3 1772
58.9 طريقة Newton-Raphson؛ التحكم بالإزاحة 1773

59.1 مستويات التحليل الإنشائي 1788
59.2 النهج الصريح التزايدي للاخطية الهندسية 1789
59.3 تحديد حمل الانبعاج من دون مصفوفة الصلابة الهندسية 1794

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال (I–IV)

60.1 نظام الإحداثيات لجمالون 2D 1801
60.2 القوى الداخلية والإزاحات المقابلة لطريقة 2D القائمة على الصلابة 1805
60.3 تحديد الحالة للطريقة القائمة على الصلابة 1807
60.4 مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على الصلابة 1809
60.5 المقاطع الليفية - توزيع مقاطع التحكم وتقسيم المقطع إلى ألياف 1813
60.6 توزيع الإجهاد اللاخطي في المقطع العرضي 1814
60.7 عنصر إطار 2D من دون أنماط الجسم الصلب 1815
60.8 اصطلاح الإشارة لقوة المقطع 1816
60.9 القوى الداخلية والإزاحات المقابلة لطريقة 2D القائمة على المرونة 1819
60.10العلاقة بين وجود أنماط الجسم الصلب وغيابها 1819
60.11تحديد الحالة للطريقة القائمة على المرونة من دون تكرار العنصر 1821
60.12تحديد الحالة (Taucer, Spacone **and** Filippou, 1991a) 1824
60.13تحديد حالتي العنصر والمقطع 1825
60.14مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة من دون تكرار العنصر 1836
60.15مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة مع تكرار العنصر . . . 1837
60.16مقارنة الصياغة القائمة على الصلابة مقابل الصياغة القائمة على المرونة 1838
60.17عنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذو طول صفري 1839
60.18مخطط انسيابي لعنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي طول صفري لتحديد حالة العنصر . . . 1841
60.19عنصر مقطعي ذو طول صفري، الاتزان 1843
60.20نظام الإحداثيات لعنصر مقطعي ذي طول صفري 1844
60.21مخطط انسيابي للعنصر المقطعي ذي الطول الصفري 1846

61.1 نماذج الدونة المجمعة والموزعة 1849
61.2 نماذج التباطؤ 1851
61.3 مقارنة معامل المماس؛ الدونة مقابل Menegotto-Pinto 1853
61.4 تحديد النموذج ثنائي الخطية 1854
61.5 مقارنة نماذج الحمل الدوري العكسي: الدونة مقابل Menegotto-Pinto 1855
61.6 نماذج Menegotto Pinto للفولاذ (Menegotto **and** Pinto, 1973) 1856
61.7 التحديد (1) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1858
61.8 التحديد (2) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1859
61.9 التحديد (3) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1860
61.10التحديد (4) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1861
61.11تأثير الحصر في مقاومة الخرسانة (Richart, Brandtzæg **and** Brown, 1928) . . . 1862
61.12مقاومة الخرسانة المحصورة مقابل غير المحصورة في الضغط (Mander, Priestley **and** Park, 1988) 1863
61.13دور الكانات في توفير حصر الخرسانة 1863
61.14نموذج مادة الخرسانة في الضغط 1865
61.15نموذج مادة الخرسانة تحت التحميل الدوري في الضغط 1867
61.16نموذج مادة الخرسانة تحت التحميل الدوري في الشد 1869
61.17التحديد (1) لنموذج Kent وPark المعدل 1871
61.18التحديد (2) لنموذج Kent وPark المعدل 1872
61.19الشقوق الناتجة من الضغط والشد والضغط 1874

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.20منحنى الانفعال–الإجهاد لنموذج الضرر متباين الخواص من دون انفعال دائم 1880
61.21التحديد (1) لنموذج الضرر متباين الخواص 1881
61.22التحديد (2) لنموذج الضرر متباين الخواص 1882
61.23التحديد (3) لنموذج الضرر متباين الخواص 1883
61.24منحنى الانفعال–الإجهاد لنموذج الضرر متباين الخواص ذي الانفعال الدائم 1887
61.25نموذج الانزلاق 1888
61.26نموذج ترابط مبسط 1890
61.27منحنى انزلاق الترابط 1890
61.28موضع المحور المحايد 1892
61.29تحديد المناطق اللدنة 1893
61.30ترخيم التشوه الانحنائي لعنصر 1894
61.31عزم العطالة الفعال في الخرسانة المسلحة 1895
61.32مواضع الأطوال اللدنة (Park **and** Paulay, 1991) 1897
61.33إزاحة طرف كمرة كابولية من الخرسانة المسلحة بافتراض الدونة المجمعة 1898
61.34إزاحة طرف كمرة كابولية فولاذية بافتراض الدونة المجمعة 1900
61.35نموذج دونة مجمعة مع فشل القص 1903
61.36فشل قص حالة الحد 1904
61.37استجابة نابض القص 1905
61.38استجابة عمود حالة الحد 1905
61.39استجابات حالة الحد المنفردة 1906
61.40دورة تباطؤ ممثلة 1907
61.41فقد المقاومة بسبب تليين الانفعال 1908
61.42تدهور المقاومة تحت التحميل الدوري العكسي 1908
61.43العمود الفقري لنموذج التباطؤ 1909
61.44منحنى العمود الفقري للانحناء (Ghannoum, 2020) 1910
61.45النموذجان الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر 1911
61.46الدورة الأساسية للنموذج الموجه نحو الذروة 1912
61.47انعكاس الحمل وتحديث الحالة المستهدفة 1912
61.48تاريخ حمل دوري متزايد يتبع النموذج الموجه نحو الذروة 1913
61.49الدورة الأساسية لنموذج التخصر 1914
61.50تحديد نقطة الانكسار 1914
61.51تحديد نقطة الانكسار الأولى 1916
61.52تحديث نقطة الانكسار 1916
61.53إعادة التحميل بعد نقطة الانكسار 1917
61.54تاريخ تحميل دوري متزايد يتبع نموذج التخصر 1918
61.55نتائج المختبر الإنشائي في UCSD (Ibarra, 2004) 1918
61.56نمط تدهور المقاومة الأساسية 1920
61.57نمط تدهور المقاومة بعد التغطية 1921
61.58نمط تدهور صلابة التفريغ 1923
61.59انقطاع التفريغ 1923
61.60نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل 1924
61.61منحنى العمود الفقري (Ghorbani **andothers**, 2022) 1926

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.62 نموذج تباطؤ قائم على spline تكعيبي (Suselo, 2021) 1927

62.1 عملية العناصر المحددة (مستوحاة من Bathe, 1996) 1930
62.2 تعقيد النموذج الموزع بانتظام 1931
62.3 مخاطر التحليل الخطي مقارنة بالتحليل اللاخطي 1931
62.4 العناصر المحددة للتحليل اللاخطي للإطارات 1935
62.5 وصلة نهاية العمود 1935
62.6 عناصر الكمرة أو العمود 1937
62.7 وصلات العمود–الكمرة 1938
62.8 نمذجة المقطع العرضي إلى طبقات 1941
62.9 نموذج كابولي مثالي لكمرة–عمود خرسانية مسلحة (Haselton **andothers**, 2016) . . 1944
62.10 أنواع الحصر (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) 1944
62.11 واجهة المستخدم الرسومية لقاعدة بيانات الأداء الإنشائي Peer (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) 1945

63.1 مقارنة بين MCS وLHS 1962
63.2 مثال لمسار واحد من أجل $k = 2$. 1970
63.3 نقاط متراكبة أو متكتلة تقاربياً من مسارات Morris مختلفة. 1971
63.4 متغير عشوائي ودالة توزيعه التراكمي (CDF). 1972
63.5 استجابة دورية لمتغير عشوائي x_i. قد تفشل أحجام الخطوات الثابتة في اكتشاف التغيرات الدورية. 1972
63.6 مقارنة بين طريقتي المسار (أ) والنقاط الشعاعية (ب) من أجل $k = 3$ متغيرات عشوائية في فضاء الكميات الفائق. 1973
63.7 التهيئة وما بعد التهيئة في إجراء الفرز المعدل بالنقاط الشعاعية 1977
63.8 مثال على ترتيب الحساسية (Gakuhari, 2021) 1981
63.9 يحدد تحليل الحساسية المعاملات المرشحة؛ ويحدد تعيين المعاملات القيم التي تدعمها المشاهدات 1982

64.1 مبدأ نهج تعيين النظام: تحسين تكراري للمعاملات لتقليل عدم التطابق بين النموذج والبيانات 1985
64.2 مثال توضيحي للانحدار الخطي باستخدام RANSAC 1988
64.3 تطبيق RANSAC على تدهور الخرسانة: دراسة حالة (Gakuhari, 2021) 1989
64.4 مخطط تدفق إجراء تعيين المعاملات 2001
64.5 واجهة مستخدم رسومية لدالة بواقي واحدة وخمسة متغيرات. انظر الشكل 64.7 لمثال أشمل. 2002
64.6 ملف بيانات الإدخال لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية بطريقة Levenberg–Marquardt 2004
64.7 لوحة معلومات لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية بطريقة Levenberg–Marquardt: 12 هدفاً متنبأ به و8 متغيرات. 2007
64.8 تكامل توصيف الموقع، وتطوير النموذج، وعدم اليقين، وتعيين المعاملات، والتحليل الإنشائي، وتقييم الهشاشة 2011

65.1 المكونات الأربعة لـPBEE 2016

66.1 قانون تكرار Gutenberg-Richter (المحدود) 2019

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال (I–IV)

66.2 تصنيف المصادر الزلزالية 2020
66.3 تصنيف المسافات من الموقع إلى المصدر 2023
66.4 دراسة بارامترية لـ GMPE 2023
66.5 تحليل الخطر الزلزالي الحتمي 2024
66.6 تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي 2026
66.7 نموذج Poisson الاحتمالي 2027
66.8 عينة من منحنيات الخطر الزلزالي المتوسطة والكسرية 2028
66.9 عينات من خرائط الخطر الأمريكية 2030
66.10عينات من مخططات التفكيك الزلزالي لجامعة Colorado Boulder 2031
66.11مقارنة أطياف استجابة مختلفة 2031
66.12مقارنة اختيار الحركة الأرضية وتحجيمها لـIBPA وSBPA وTBPA 2033
66.13عينة من ETEF 2039
66.14قيمة CAV لـETA40lc01 مقابل القيمة المستهدفة 2041
66.15الطاقة الهستيرية لـETA20kd01 مقابل القيمة المستهدفة 2042

67.1 منحنى الخطر. يوضح المخطط الأيسر مفهوم فترات العودة، بينما يبين المخطط الأيمن منحنى خطر لموقع معين. 2050
67.2 سطح تحليل الخطر الزلزالي الهندسي 2053
67.3 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA). 2053

68.1 الطبيعة الاحتمالية للسعة والطلب 2058
68.2 منحنى السعة 2061
68.3 الأحمال الجانبية لتحليل الدفع 2062
68.4 موقع الجسر وصورته 2067
68.5 أبعاد الأعمدة والركيزة 2069
68.6 القطاعات العرضية للأعمدة والخازوق 2070
68.7 علاقة الإجهاد-الانفعال للتحميل الرتيب للخرسانة المحصورة وغير المحصورة (Mander, Priestley **and** Park, 1988) 2071
68.8 الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2072
68.9 منحنيات العزم-الانحناء والعزوم اللدنة 2073
68.10تحليل طيف الاستجابة (C_S) 2077
68.11تحليل طيف استجابة الإزاحة 2077
68.12عناصر مقاومة الزلازل المسموح بها (AASHTO, Seismic, 2011) (ERES) 2079
68.13نموذج الإجهاد-الانفعال لفولاذ التسليح 2081
68.14العزم-الانحناء (مقتبس من (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2082
68.15توزيع العزم على ارتفاع الركيزة 2083
68.16الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2084
68.17نموذج Risa 2086
68.18مخطط التفاعل للأعمدة الثلاثة المطلوبة 2087
68.19العزوم اللدنة 2088

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68.20 تعريف Caltran للخازوق (CALTRANS, 2013) . . . 2090
68.21 النموذج المرن المعدل بعد تشكل المفصل اللدن الأول . . . 2092
68.22 النموذج المرن المعدل بعد تشكل المفصل اللدن الثاني . . . 2093
68.23 آلية الانهيار مع تشكل 4 مفاصل لدنة . . . 2094
68.24 منحنيات مفاهيمية لهشاشة الانهيار قائمة على طريقة IDA . . . 2097
68.25 منحنيات مفاهيمية لهشاشة الانهيار قائمة على طريقة MSA . . . 2099
68.26 توليد دالة السعة القائمة على ETA . . . 2102
68.27 إبراز أربع استراتيجيات مختلفة (Hariri-Ardebili, Saouma **and** Porter, 2016) . . . 2104
68.28 التعقيدات النسبية للتحليل الزلزالي . . . 2105

69.1 العلاقات بين DI ومتغيري DV (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) . . . 2114
69.2 PBEE: الصورة الكبرى . . . 2115
69.3 الحد الأدنى الموصى به لأهداف تصميم الأداء الزلزالي للمباني (Porter, 2003) . . . 2118

71.1 وصف مفاهيمي للجيل الأول من PBEE؛ (Whittaker03, Hamburger **and** Mahoney, 2003) . . . 2126
71.2 رسوم توضيحية لمستويات الأداء المنفصلة، (FEMA, 2012) . . . 2126
71.3 المكونات الأربعة لـPBEE . . . 2129
71.4 مقارنة منحنيات الهشاشة الزلزالية وقابلية التأثر والخطر . . . 2134
71.5 العلاقة بين منحنى الهشاشة ومصفوفة احتمال الضرر . . . 2137
71.6 جوانب مختلفة من سطوح الهشاشة الزلزالية . . . 2137

B.1 أثر حمل الرياح في المنشآت (Schueller, 1996) . . . 2150
B.2 ضغط الرياح التصميمي التقريبي للمنشآت العادية . . . 2151
B.3 اهتزازات مبنى . . . 2153
B.4 المناطق الزلزالية في الولايات المتحدة (ICBO, 1994) . . . 2154
B.5 حمل الشاحنة . . . 2162
B.6 وضع الأحمال لتعظيم العزوم . . . 2165

D.1 هندسة القوس الدائري . . . 2172
D.2 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز . . . 2173
D.3 علاقة β بـθ . . . 2175
D.4 مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز . . . 2176
D.5 مخططات القوى الداخلية لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز . . . 2179
D.6 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . . 2180
D.7 مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . . 2181
D.8 مخططات قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . . 2183
D.9 مخططات قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام . . . 2186
D.10 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة . . . 2187
D.11 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة . . . 2187
D.12 SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . . 2187
D.13 SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . . 2187
D.14 SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . . 2187

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.15 قوس دائري ثلاثي المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام 2188
D.16 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر 2188
D.17 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز 2189
D.18 قوس دائري ثنائي المفاصل بعد إزالة الدفع الزائد عند المسند B 2191
D.19 قوس دائري ثنائي المفاصل مع قوة افتراضية مؤثرة 2193
D.20 مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي ثنائي المفاصل تحت حمل مركز 2195
D.21 مخطط الجسم الحر لحساب الانحراف في قوس دائري ثنائي المفاصل 2199
D.22 مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز 2199
D.23 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2200
D.24 مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثنائي المفاصل بعد إزالة الدفع الزائد عند المسند B . . 2201
D.25 مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2204
D.26 مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2207
D.27 مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام 2211
D.28 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة 2211
D.29 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة 2212
D.30 SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2212
D.31 SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . 2212
D.32 SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2212
D.33 قوس دائري ثنائي المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام 2213
D.34 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر 2213
D.35 قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز 2214
D.36 قوس دائري عديم المفاصل مع عزم افتراضي عند B 2217
D.37 قوس دائري عديم المفاصل مع عزم افتراضي عند A 2217
D.38 مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي عديم المفاصل تحت حمل مركز 2223
D.39 مخططات قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز 2228
D.40 قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2229
D.41 القوى الداخلية في قوس دائري عديم المفاصل 2233
D.42 مخططات قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2236
D.43 مخططات القوس الدائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام 2241
D.44 قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة 2241
D.45 قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة 2241
D.46 SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2242
D.47 SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي . . 2242
D.48 SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2242
D.49 قوس دائري عديم المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام 2242
D.50 قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر 2243

K.1 أمثلة لإشارات رشحت بمرشحات باتروورث 2804
K.2 مقارنة مرشحات باتروورث لقيم مختلفة من n 2806

M.1 ترابط المفاهيم الداخلة في التحليل الاحتمالي (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) 2836
M.2 مفهوم فضاء العينة والأحداث المتنافية (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) . . 2837

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال (I–IV)

M.3 مقارنة المدرجات التكرارية الناتجة من ثلاث مجموعات، في كل منها 100 عينة 2838
M.4 مقارنة المدرجات التكرارية لعدد عينات يتراوح من 1,000 إلى 100,000 2838
M.5 أمثلة لثلاث دوال توزيع مستمرة 2839
M.6 العلاقة بين دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي 2840
M.7 العلاقة بين دالة كثافة احتمالية محدودة ودالة التوزيع التراكمي 2840
M.8 توضيح فترة الثقة 2841
M.9 توضيح المتوسط والوسيط 2841
M.10 توضيح الانحراف المعياري 2842
M.11 توضيح الالتواء والتفرطح 2843
M.12 توضيح معاملات الارتباط 2844
M.13 مقارنة بين دوال التوزيع الاحتمالية (والتراكمية) المختلفة 2849
M.14 التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير 2850
M.15 أثر معامل الارتباط ρ في التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير 2851

N.1 تعريف مؤشر الموثوقية 2852
N.2 احتمال الفشل بدلالة مؤشر الموثوقية β 2855

O.1 تحويل المتجهات 2863
O.2 الاتجاهات الرئيسة لموتر من الرتبة الثانية 2864
O.3 المستوى ثماني السطوح 2866
O.4 القوى السطحية 2867
O.5 كوشي: من رباعي السطوح إلى الإجهاد 2868
O.6 التمثيل الهندسي للإجهاد 2870
O.7 متجهات الموضع والإزاحة 2871
O.8 التدفق عبر المساحة $\mathrm{d}S$ 2874
O.9 اتزان الإجهادات في الإحداثيات الديكارتية 2877
O.10 لوحة من محاضرة هوك عن النوابض 2880
O.11 أنماط التحكم في الاختبار 2883
O.12 منحنيات الإجهاد–الانفعال للمعادن والخرسانة 2884
O.13 الرصد التجريبي للتمركز في عينات خرسانية محملة أحاديًا 2885
O.14 نموذج هيلربورغ للشق الوهمي 2886
O.15 نماذج تليّن انفعال الخرسانة 2887
O.16 مكونات مخطط تونتي (Felippa, 2000) 2889
O.17 مخطط تونتي لميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه 2890
O.18 القوى الداخلية بدلالة الإجهادات 2891

P.1 شق في صفيحة لانهائية 2895
P.2 أنماط إزاحة الشق المستقلة 2900
P.3 الضغوط على السد الناتجة من الفعل الديناميكي للماء (Westergaard, 1933) 2906
P.4 التوزيع التقريبي للضغوط (Westergaard, 1933) 2908
P.5 جسم الماء الذي يمكن اعتباره متحركاً مع السد (Westergaard, 1933) 2911
P.6 الكتلة المركزة لكل وحدة مساحة بدلالة الارتفاع 2912

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال (I–IV)

Q.1 خوارزمية نطاق الثقة 2915
Q.2 مخطط انسيابي لإجراء تعيين المعاملات 2920
Q.3 واجهة المستخدم الرسومية لتعيين معاملات تفاعل القلويات مع الركام (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) 2921

R.1 اشتقاق متجه الموضع $\mathbf{p}$ 2923
R.2 انحناء منحنى 2923
R.3 حقل متجهي يعبر منطقة صلبة 2924
R.4 التدفق عبر المساحة dA 2925
R.5 عنصر متناهي الصغر لحساب التباعد 2925
R.6 تدرج متجه 2930

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الجداول (I–IV)

3.1 البيانات الأساسية للبرديتين الرياضيتين المصريتين الرئيسيتين 26
3.2 مقارنة العمارة الضخمة بين الحضارات 28
3.3 ممارسات القياس والتركيز الهندسي في ثلاث ثقافات قديمة 28
3.4 خط زمني مقارن للابتكارات الإنشائية الأساسية بين الحضارات 29
3.5 نماذج مختارة للتصنيف في الفلسفة والعلم اليونانيين الكلاسيكيين 36

4.1 منشآت قوطية بارزة 45
4.2 مقارنة أبعاد الكاتدرائيات القوطية الكبرى (Elizalde, 2025) 46
4.3 ملخص زمني للأعمال الرئيسة 74

5.1 التحول المفاهيمي في الثورة العلمية 86
5.2 ملخص زمني للأعمال الرئيسة 89

6.1 مخطوطات ليوناردو دا فينشي (Vinci, 1938) 105
6.2 أيام حوارات غاليليو ومباحثه الأربعة 126
6.3 إسهامات ياكوب ويوهان برنولي الرئيسية كما تعكسها *Opera Omnia* 145
6.4 أعمال ليونهارت أويلر الكبرى 150
6.5 مقارنة طرائق التعمية التي استخدمها علماء العصر الحديث المبكر 170
6.6 ألغاز حرفية وشيفرات وغيرها 171
6.7 الحروف المتاحة في لغز هوك الحرفي 171
6.8 كلمات لاتينية شائعة يمكن تكوينها 172
6.9 مصطلحات علمية ممكنة من الحروف المتاحة 172
6.10 التحقق من استخدام الحروف 173
6.11 فك لغز برنولي متعدد الطبقات للإلاستيكا، (Alassi, 2020) 174
6.12 تفكيك شيفرة نيوتن 175
6.13 تكرار الحروف الكامل 175
6.14 الصراعات الفكرية الكبرى في تطور الميكانيكا 177
6.16 ملخص المساهمين الكبار وتأثيرهم في الميكانيكا 179
6.17 المنشورات البارزة في تطور الميكانيكا الإنشائية 181
6.19 الصراعات الفكرية الكبرى في تطور الميكانيكا 184
6.15 المؤسسات الهندسية والتقنية الكبرى في أوروبا وخارجها (1740–1850) 185
6.18 المؤسسات الهندسية والتقنية الكبرى (1740–1850) 186
6.20 خط زمني تاريخي شامل للميكانيكا الإنشائية والتحليل الهندسي (1351–1879) 189

7.1 أهم التطورات في المقاومة وتوزيع الإجهاد الداخلي 217

8.1 مقارنة بين صيغتي برنولي الأصلية والحديثة للانحناء 230
8.2 محطات بارزة في تطور مفهوم الانحناء 232
8.3 الانحناء والمنحني المرن: أهم الأحداث والكتب 235

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الجداول (I–IV)

8.4 من المفاهيم الهندسية إلى التطبيقات الميكانيكية 237

9.1 رموز الاشتقاق والتكامل 243
9.2 مصطلحات منحنيات عائلة “Funicularia”، نقلاً عن Alassi, 2020. 247
9.3 التطور الزمني لحل السلسلة المعلقة، استناداً إلى (Alassi, 2020) 248
9.4 الخط الزمني لتحدي المنحني المرن 260
9.5 المسائل متساوية القياس وحساب التغايرات 276
9.6 أنواع أويلر التسعة للمنحني المرن ومعاملاتها المعرّفة 283
9.7 توزيع الرسوم الثمانية والعشرين على الأنواع التسعة 284
9.8 ربط رسوم أويلر الثمانية والعشرين بأنواعه التسعة للمنحني المرن 285
9.9 أنواع أويلر للمنحني المرن: الخصائص الهندسية ومعادلات المنحنيات 293
9.10 التطور الزمني لعمل ياكوب برنولي في حساب التفاضل ومسألة المرونة، من المنشورات الأولى إلى الاستكمال بعد وفاته. 294
9.11 تحليل مقارن: إسهامات برنولي 1728 وأويلر 1732 في نظرية العوارض 304
9.12 تسلسل زمني موحد للتحديات الكبرى الثلاثة: السلسلة المعلقة، والمنحني المرن، والتحدي المجهول 312
9.13 المنشورات المشار إليها في التسلسل الزمني الموحد 314

10.1 مقارنة بين النظريتين الجزيئية والمتصلة للمرونة، مع صيغتين لنظرية الوسط المتصل. . . . 322
10.4 مقارنة النظريات الميكانيكية: منظوران تاريخي وتقني 355

11.1 المساهمون في التحليل الإنشائي: ملخص زمني 379

12.1 تصنيف مسائل فيزيائية متنوعة 405
12.2 أبرز المساهمين في الطرائق الحاسوبية للتحليل الإنشائي 407

13.1 خط زمني للمعالم الرئيسة في الحوسبة العلمية والهندسية 418

14.1 التطور الزمني لمفهوم القوة والمبادئ الافتراضية. 478

15.1 محتويات مؤلفات فيتروفيوس وألبيرتي وبالاديو 491
15.2 نسب الجسور عند بالاديو (1570)، نقلاً عن Huerta, 2018. 496
15.3 وحدات قياس الطول والميل التاريخية المستخدمة في العمارة والبناء 505
15.4 الـ*braccio* في دويلات إيطاليا قبل الوحدة 507
15.5 مكتشفو الأشكال 537
15.6 الفضائل المعمارية من فيتروفيوس إلى بيلنغتون 565
15.7 تطور مناهج التصميم الإنشائي 570

16.1 التقاليد الدينية والزلزال: ملخص مقارن. 600
16.2 موضوعات متكررة عابرة للثقافات في التفسير الديني للزلازل. ✓ = الموضوع موثق؛ × = الموضوع غائب أو هامشي. 601

18.1 معاملات التمدد الحراري 750

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الجداول (I–IV)

20.1 التحديد الاستاتيكي واستقرار الجمالونات . . . 786
20.2 معادلات الاتزان المنطبقة على الجمالونات . . . 786

22.1 التناظر بين مجموعتي العلاقات . . . 854
22.2 شروط الحدود للكمرة المرافقة . . . 854

25.1 حدود الحمل للحمل المركز والحمل المنتظم . . . 928

26.1 مقارنة طريقتي الصلابة والمرونة . . . 931
26.2 مقارنة تحليلي الصلابة والمرونة . . . 932
26.3 القوى العقدية المكافئة للأحمال البسيطة . . . 936

29.1 الشروط الحدية الأساسية والطبيعية للأعمدة . . . 980

32.1 مقارنة المعادلات الحاكمة في المرونة وانحناء البلاطات (Wilkey **and** Wunderlich, 1994) 1092

33.1 ملخص المعادلات والمجاهيل في القشريات الرقيقة . . . 1100
33.2 الإسهامات المنفردة في معادلات اتزان القشريات الرقيقة . . . 1100
33.3 ملخص المعادلات الرئيسة الحاكمة للقشريات الرقيقة . . . 1115
33.4 افتراضات ومعادلات حاكمة للمنشآت الغشائية . . . 1123
33.5 مقارنة توزيعات محصلات إجهاد الغشاء تحت أحمال مختلفة . . . 1127
33.6 مقارنة حلي الغشاء والقشرة الضحلة للحمل المنتظم . . . 1140
33.7 معاملات القشرة (ϕ مقاسة من التاج) . . . 1146

35.1 القيم المستهدفة لمؤشر الموثوقية . . . 1206

37.1 مقارنة بين النظام الفرعي للنواة وجدار القص وجدار القص الجملوني . . . 1271

39.1 درجتا عدم التحديد الاستاتيكي والحركي . . . 1328
39.2 الشروط الحدية الأساسية والطبيعية . . . 1329

42.1 تحويلات العناصر الخطية ثلاثية الأبعاد . . . 1380

43.1 تقطيع المنشآت . . . 1388

44.1 تأثير المصفوفات سيئة التكييف . . . 1417

45.1 تعريف قوى العناصر الداخلية في مصفوفة الاتزان . . . 1425
45.2 شروط التحديد الاستاتيكي وعدم الاستقرار الحركي . . . 1432

46.1 الدواليات في المرونة الخطية . . . 1492
46.2 مقارنة بين صياغتَي الطاقة الكامنة الكلية وهو–واشيزو . . . 1494

47.1 ملخص معادلات الشغل الافتراضي والمتمم والطاقة الكامنة والمتممة . . . 1512
47.2 المساران البديلان لمبدأ الشغل الافتراضي ومبدئه المتمم . . . 1513

48.1 تفسير دوال الشكل بدلالة سلاسل متعددات الحدود في بعد واحد وبعدين . . . 1545

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الجداول (I–IV)

48.2 حدود متعددات الحدود في صيغ العناصر المختلفة في بعد واحد وبعدين 1546
48.3 خصائص دوال الشكل لعنصر الكمرة 1563
48.4 دوال الشكل ومشتقاتها الطبيعية للعنصر q8 1568
48.5 الإحداثيات العقدية الطبيعية للعنصر q9 1569
48.6 دوال الشكل للعناصر ذات العدد المتغير من العقد 1571
48.7 دوال الشكل ومشتقاتها للعنصر T6 1572

50.1 أوزان صيغ تربيع نيوتن–كوتس 1598
50.2 نقاط التكامل وأوزان تربيع غاوس على المجال $[-1, 1]$ 1599
50.3 إحداثيات وأوزان التكامل العددي على مثلث 1601
50.4 الإحداثيات الطبيعية لعقد العنصر الرباعي ثنائي الخطية 1602
50.5 التكامل العددي الكامل والمخفَّض للعناصر الرباعية 1608
50.6 الإزاحات والانفعالات ثنائية الخطية والدقيقة 1610

52.1 شروط الاستقرار للطرائق المختلفة 1646
52.2 نسب تخميد ممثلة لفئات مختلفة من المنشآت 1659

53.1 تصنيف مستويات التحليل الإنشائي 1666
53.2 الترابط بين مستويات التحليل المختلفة 1667

56.1 مقارنة النهجين الحركي والسكوني لتحليل الحمل الحدي 1723
56.2 مقارنة تحليل الحد الأدنى وتحليل الدفع 1746
56.3 اللدونة المركزة وتحليل الحد الأدنى 1748

58.1 التناظر بين طريقة quasi-Newton في الرياضيات والتحليل الضمني في ميكانيكا المنشآت 1763
58.2 تنويعات طريقة Newton-Raphson 1767
58.3 مقارنة خوارزميات التحكم بالحمل في التحليل اللاخطي 1770

60.1 تحديد الحالة متعدد المستويات 1806
60.2 مقارنة العناصر القائمة على المرونة بالعناصر القائمة على الصلابة 1835

61.1 خصائص المرونة والمقاومة للخرسانة المحصورة مقابل غير المحصورة 1866
61.2 معامل المماس 1910

62.1 وصلات الأعمدة 1936
62.2 توافق الوصلة–العنصر 1936
62.3 خيارات نمذجة “اختر وثبّت” 1941
62.4 قياس التدهور 1942
62.5 خصائص المادة 1945
62.6 تصنيف المقطع العرضي 1945
62.7 أكواد نمط الفشل 1946
62.8 هندسة العمود 1946
62.9 تفاصيل الحصر 1946

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.10 تفاصيل الحصر 1947
62.11 ملخص اختبارات الأعمدة المستطيلة المسلحة (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) 1948
62.12 نتائج دراسة المعايرة لـ 30 اختباراً تجريبياً (Haselton **andothers,** 2008) 1950

63.1 المصطلحات المعتمدة في هذا الكتاب لتكميم عدم اليقين وتحليل عدم اليقين 1956
63.2 أوصاف نوعية توضيحية لمقدار معامل ارتباط Pearson 1958
63.3 مقارنة بين MCS وLHS 1961
63.4 مقارنة طرائق نشر عدم اليقين والحساسية 1976
63.5 الأدوار المتميزة والمتكاملة لتحليل الحساسية وتعيين المعاملات 1982

64.1 مدخلات تكوين تمثيلية في `Log.xlsx` 2004
64.2 الدوال الرئيسية في برنامج تعيين المعاملات 2008
64.3 الدوال المساعدة الخاصة التي يستخدمها قارئ جدول البيانات وطبقة التجميع 2008
64.4 الحقول الرئيسية لبنية التكوين `S` 2008
64.5 متغيرات مختارة لزمن التشغيل في `ParIdentification.m` 2008

66.1 المعاملات المعتمدة على الفترة لنموذج Boore, Joyner **and** Fumal, 1997 2022
66.2 تقدير V_S استناداً إلى صنف الموقع 2022

68.1 مقارنة تحليل الدفع بالتحليل الزلزالي 2064
68.2 طيف استجابة التصميم لمنشآت مدخل NJ 2068
68.3 التحليلات المتتابعة لتحليل الدفع 2075
68.4 خصائص الإجهاد لقضبان فولاذ التسليح (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) 2081
68.5 سعات العزم للمقاطع الثلاثة المختلفة ضمن نطاق من القوى المحورية 2087
68.6 نتائج التحليل؛ بلا مفاصل 2091
68.7 ضبط القص المؤدي إلى تشكل المفصل الأول 2092
68.8 نتائج التحليل؛ مفصل واحد 2092
68.9 ضبط القص المؤدي إلى المفصل الثاني 2093
68.10 نتائج التحليل؛ مفصلان 2093
68.11 ضبط القص المؤدي إلى المفصلين الثالث والرابع 2094
68.12 مجموع القوى والعزوم والإزاحات عند الفشل 2095
68.13 مقارنة طرائق التحليل الإنشائي الزلزالي 2104

69.1 نسب الانجراف المسموح بها بين الطوابق (IDR) لمستويات أداء مختلفة وفق ASCE 41-17 2118
69.2 عتبات مؤشر الضرر والحالات الإنشائية المقابلة 2119
69.3 عتبات نسبة الطلب إلى السعة (DCR) وفق FEMA 356 2119

71.1 نطاق ضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية لمستويات أداء مستهدفة مختلفة للمباني (الجدول FEMA-356, 2000) (C1-2) 2127
71.2 مقارنة بين PBEE 1 وPBEE 2 2131
71.3 مقارنة تمثيلات الهشاشة المستمرة والمنفصلة 2137
71.4 الوثائق الأساسية في التطور التاريخي لهندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE). 2143

B.1 الوزن الحجمي للمواد 2149

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

B.2 متوسط الحمل الميت الإجمالي في المباني 2149
B.3 أوزان مواد البناء 2155
B.4 الحد الأدنى للأحمال الحية الموزعة بانتظام (ICBO, 1994) 2156
B.5 تغير سرعة الرياح فوق سطح الأرض 2156
B.6 معاملات C_e لأحمال الرياح (ICBO, 1994) 2156
B.7 معاملات ضغط الرياح C_q (ICBO, 1994) 2157
B.8 معاملات الأهمية لأحمال الرياح والزلازل (ICBO, 1994) 2157
B.9 ضغط الرياح التصميمي التقريبي p للمنشآت العادية المقاومة للرياح 2158
B.10 معاملات Z للمناطق الزلزالية المختلفة UBC1994 2158
B.11 معاملات الموقع S للأحمال الزلزالية (ICBO, 1994) 2158
B.12 قائمة جزئية لقيم R_W للأنظمة الإنشائية (ICBO, 1994) 2159

G.1 إحداثيات عقد جسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2288
G.2 خصائص عناصر جسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2289
G.3 الشروط الحدية لجسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2290
G.4 تركيبات أحمال جسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2290

L.1 طرائق حل المعادلات الخطية 2814
L.2 التكييف المسبق؛ مقارنة بين الأيسر والأيمن 2824
L.3 مقارنة التكييف المسبق للمصفوفة بتحليل القيم المفردة (SVD) 2826

N.1 قيم مختارة للمنشآت الفولاذية والخرسانية 2854
N.2 موثوقية المنشآت الفولاذية والخرسانية 2854

O.1 أنظمة الترميز 2858
O.2 تمثيلات الانفعال 2871
O.3 أمثلة للشروط الحدية في التحليل الإنشائي 2889

P.1 النتائج العددية المقابلة للدور $T = \frac{4}{3}$ ثانية 2906

R.1 أوجه التشابه بين مؤثرات الضرب والاشتقاق 2922

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عن المؤلف

يمتلك فيكتور إي. ساوما خبرة بحثية تزيد على أربعين عاماً، تتضمن أعمالاً واسعة في تفاعل القلويات والسيليكا ومتانة الخرسانة، وقد قدم إسهامات مهمة في التحليل الإنشائي والميكانيكا. وتشمل أعماله كتابين هما Numerical Modeling of AAR وAging, Shaking, and Cracking of Infrastructures: From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures، فضلاً عن عدد كبير من التقارير الفنية والأبحاث المحكمة.

ترأس لجنة دولية تابعة للاتحاد الدولي للمختبرات والخبراء في مواد البناء وأنظمته ومنشآته (RILEM)، ركزت على تشخيص المنشآت المتأثرة بتفاعل القلويات والسيليكا والتنبؤ بتدهورها، كما حرر تقريراً شاملاً للاتحاد بمشاركة باحثين بارزين من أنحاء العالم.

سبق له أن ترأس الرابطة الدولية لميكانيكا الكسر في الخرسانة والمنشآت الخرسانية وحصل على زمالتها. كما قدم المشورة لشركة طوكيو للطاقة الكهربائية (TEPCO) بشأن التحليل الديناميكي اللاخطي للسدود القوسية الكبيرة والمسائل الإنشائية في المنشآت الخرسانية المسلحة الضخمة، وأسهم في تقرير معهد أبحاث الطاقة الكهربائية المعنون Structural Modeling of Nuclear Containment Structures.

تمتد اهتماماته البحثية إلى ميكانيكا الكسر النظرية والعددية والتجريبية، وانتشار الكلوريد في الخرسانة، واختبارات السدود بأجهزة الطرد المركزي. كما حرر مجلداً عن المحاكاة الهجينة في الزمن الحقيقي، وهي تقنية تجريبية مهمة لاختبار المنشآت. وقد مولت أبحاثه هيئة الرقابة النووية الأمريكية، ومختبر أوك ريدج الوطني، ومكتب الاستصلاح، وشركة طوكيو للطاقة الكهربائية، والمكتب الاتحادي السويسري للطاقة. وشملت تعاوناته الدولية فرنسا وإسبانيا وسويسرا وإيطاليا واليابان.

منذ عام 2019 يعمل مستشاراً فنياً متطوعاً لمؤسسة C-10 للبحث والتعليم في مسائل السلامة النووية، ومن ذلك عمله شاهداً خبيراً أمام هيئة الرقابة النووية الأمريكية بشأن تدهور الخرسانة في المنشآت النووية. وقد أتاح له هذا العمل رؤى فريدة في التفاعل بين التحليل الفني وصنع القرار التنظيمي والسلامة العامة.

وساوما مهندس مدني تلقى تدريباً متخصصاً، وقد درس التحليل الإنشائي الخطي واللاخطي، إلى جانب تصميم الخرسانة المسلحة وتصميمها المتقدم، مما منحه منظوراً واسعاً في معالجة التحديات الهندسية.

كتب أخرى لفيكتور ساوما

1. Saouma, V.E. and Hariri-Ardebili, M. (2020), Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures: From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures, Springer-Nature.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. Saouma, V.E. (Ed.) (2020), Diagnosis & Prognosis of AAR Affected Structures, Springer-Nature.
3. Saouma, V.E. (2013), Numerical Modeling of AAR, 320 pages, Taylor & Francis.
4. Saouma, V.E. and Sivaselvan, M. (Eds.) (2008), Hybrid Simulation: Theory, Implementation and Applications.
5. Saouma, V.E., Structural Analysis Lecture Notes (1764 pages).
6. Saouma, V.E., Fracture Mechanics (unpublished, 1186 pages).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القسم I

تاريخ الميكانيكا والتحليل الإنشائي

ما زال معظم الكتب التي راجعتها يفتقر بوضوح إلى أي معالجة جوهرية لتاريخ التحليل الإنشائي؛ فأفضل ما يقدمه أكثرها ليس سوى عرض بالغ الإيجاز.

أما من يرغب في فهم شامل للموضوع، فثمة عدد قليل من المراجع الكلاسيكية يقدم معالجة موثوقة ومفصلة. وقد استشهدت بهذه المراجع في هذا الكتاب وأوصيت بها لمزيد من الدراسة.

ومع أنني لست مؤرخاً، بل أستاذاً في التحليل الإنشائي، فقد اخترت أن أخوض بشيء من الجرأة في الأسس التاريخية لهذا الموضوع.

وأدرك تماماً أن قلة من القراء ستقرأ هذا الجزء كله. ومع ذلك، آمل أن يجد كثيرون فائدة في استكشاف ما يثير اهتمامهم منه، وأن يتخذه الطلاب على وجه الخصوص منطلقاً لبحث أعمق.

وألتمس تفهم القارئ لما قد يرد سهواً من أخطاء أو إغفالات.

إيضاح بشأن التأليف واستخدام أدوات الذكاء الاصطناعي

كُتبت المسودة الأصلية لهذا الكتاب قبل ظهور ChatGPT وغيره من النماذج اللغوية الكبيرة المشابهة. والمحتوى الفكري كله، بما فيه البنية والحجج والتحليل التاريخي والتطوير التقني، من عملي الشخصي.

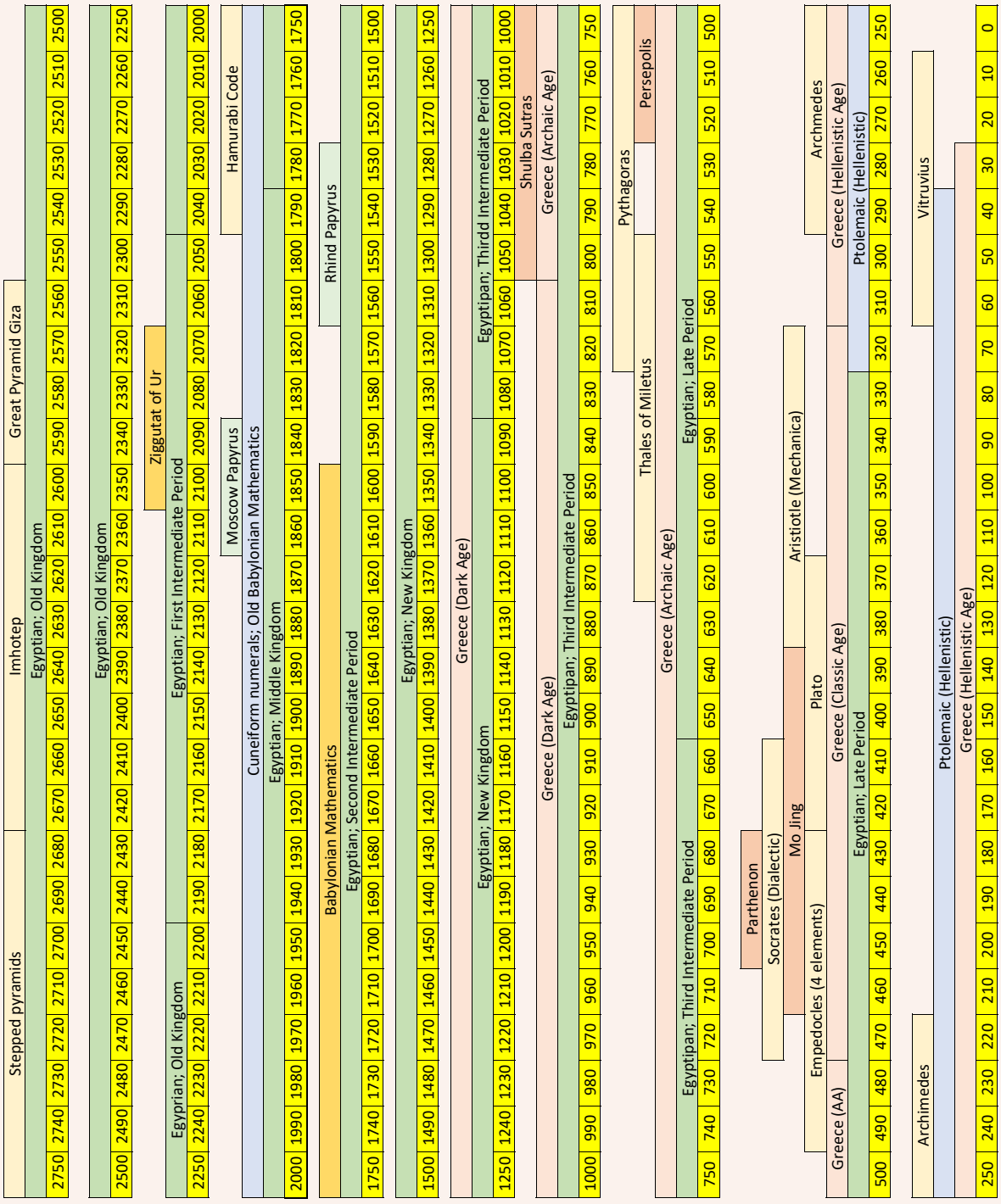
استخدمت ChatGPT لاحقاً أداةً تحريرية لتحسين الصياغة وزيادة الوضوح، ولاقتراح مراجع إضافية في حالات قليلة. ولم يولّد ChatGPT أي مادة مفاهيمية أو تحليلية أو تفسيرية إلا حيث أشير إلى ذلك صراحة.

وإذا كانت أية فقرة قد صيغت إلى حد كبير بمساعدة ChatGPT ثم راجعتها وأقررتها، فسيوضع عليها تنبيه واضح. أما سائر الإسهامات الجوهرية فتبقى من عملي وحدي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخط الزمني؛ قبل الميلاد

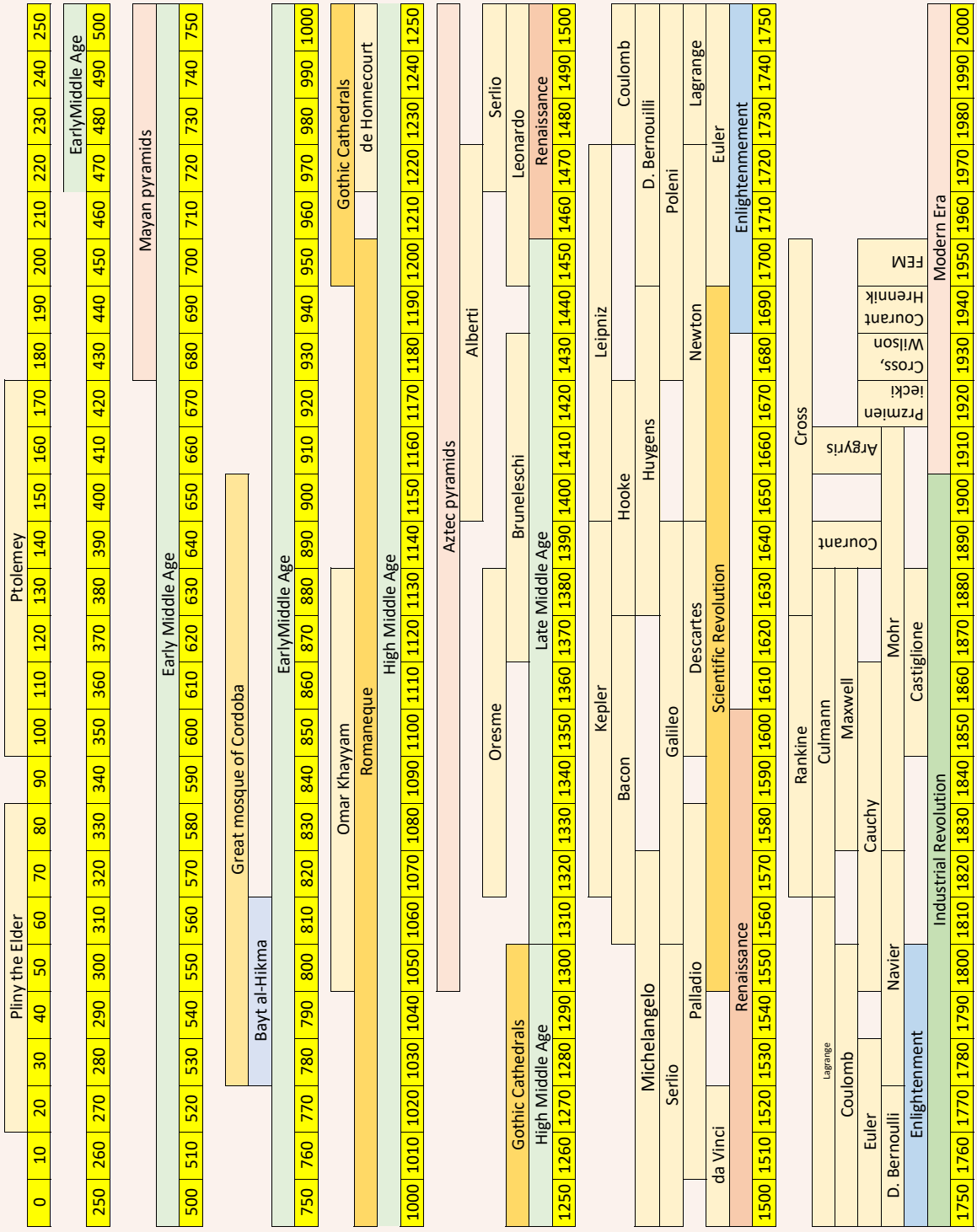
ملاحظة: التواريخ تقريبية؛ والخط الزمني غير شامل، وإنما يقدم نظرة بصرية عامة إلى تطور البناء والعمارة والعلوم والهندسة عبر القرون.



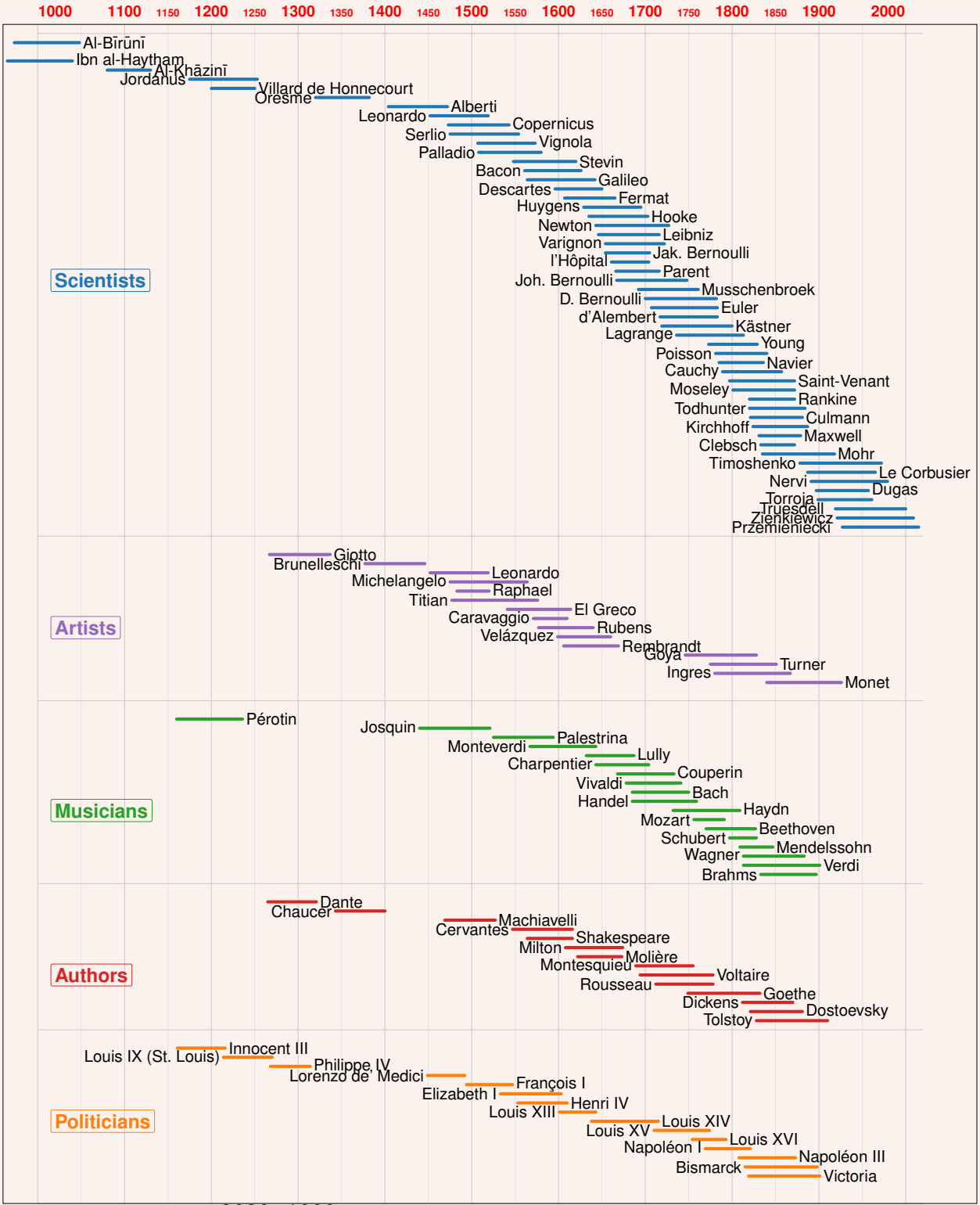
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخط الزمني؛ الميلادي

ملاحظة: جميع التواريخ تقريبية، والخط الزمني ليس شاملاً بأي حال. والغرض منه أن يكون تمثيلاً بصرياً فحسب لتطور البناء والعمارة والعلوم والهندسة عبر القرون.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



خط زمني تاريخي للعلماء والفنانين والموسيقيين والمؤلفين والسياسيين بين عامي 1000 و2020، مقتبس وموسع عن Trues-dell, 1968. يناقش هذا الفصل جميع العلماء المدرجين في الصف الأول؛ أما الشخصيات الباقية فأدرجت لتوفير سياق ثقافي وتاريخي أوسع.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1 مقدمة

ملخص

يتأمل هذا الفصل التمهيدي الأسس التاريخية للتحليل الإنشائي، التي كثيراً ما تُغفل، ويبين استمرار أهميتها. وينبه القارئ منذ البداية إلى أن الكتاب الأول، المخصص لتاريخ التحليل الإنشائي، لن يلتزم سرداً زمنياً صارماً، بل سيتخذ بنية انتقائية موضوعية تتخللها ملاحظات شخصية يجري تطويرها بمزيد من التفصيل في الفصول اللاحقة.

ولتوفير السياق، يرسم الفصل أيضاً "الصورة الكبرى" من الناحيتين الموضوعية والتاريخية، متتبعاً الانتقال من تجريبية العصور القديمة إلى نشوء الميكانيكا الحاسوبية الحديثة.

وأُدرجت مجموعة منتقاة من المراجع لمن يرغب في تعمق أكبر. والنتيجة رحلة شخصية ودعوة إلى النظر إلى التحليل الإنشائي لا بوصفه مجالاً تقنياً فحسب، بل مجالاً صاغته قرون من التطور الفكري.

1.1 أهمية تاريخ الهندسة الإنشائية 5
1.2 المنهج والغاية 6
1.3 الصورة الكبرى 6
1.3.1 موضوعياً 6
1.3.2 تاريخياً 7
1.4 المراجع العلمية 8

1.1 أهمية تاريخ الهندسة الإنشائية

لو سألنا مهندساً عن أصول المعادلات التي يستخدمها بصورة روتينية، لكان الجواب على الأرجح مخيباً للآمال:

> لو سألنا مهندساً عن أصول المعادلات التي يستخدمها باستمرار، لكان الرد مخيباً للآمال: إنها موجودة، ولا يهم شيء آخر. لماذا الفضول بشأن اشتقاقها؟ إن المهندسين لا يهتمون بالخلفية التاريخية لموضوعهم.
>
> (Benvenuto, 1991b, pg. 543)

لكن ربما ينبغي لبعضهم أن يهتم. فحسب علمي، لا يحاول أي كتاب "حديث" في التحليل الإنشائي معالجة السؤال الذي أثاره بنفينوتو[1]. وهذا مزعج بوجه خاص، إذ قلما تستطيع مهنة أن تتتبع تاريخها الفكري إلى زمن بعيد مثل الهندسة الإنشائية. وقد يجعلنا التعرف إليه، ولو بقدر متواضع، أكثر "تحضراً".

وتعزز الملاحظة الآتية هذه الفكرة:

> من الأهمية القصوى أن يعتاد الطلاب الراغبون في بصيرة رياضية عميقة الرجوع مبكراً إلى التطورات الأصلية مباشرة، على الأقل حين تكون تلك التطورات واضحة ومكتوبة بلغة لا تفرض صعوبات كبيرة.
>
> (Miller, 1916)

وينطبق الشعور نفسه على طلاب الهندسة، ولهؤلاء الطلاب أُعد هذا الفصل.

كان قصدي في الأصل تقديم عرض موجز لتطور التحليل الإنشائي. لكنني، ما إن بدأت، حتى ازددت استغراقاً فيه، ولا سيما أنني كنت، مثل كثيرين غيري، ملازماً للمنزل أثناء الإغلاق المصاحب لجائحة COVID-19. وهكذا كان هذا الفصل الأول ثمرة نحو ستة أشهر من العمل المتقطع، مدفوعاً بالفضول والمتعة بقدر ما كان مدفوعاً بالقصد الأكاديمي.

[1] ربما باستثناء كتاب التحليل الإنشائي الذي درسته في المرحلة الجامعية، فقد خصص بضع صفحات للسياق التاريخي (Kinney, 1957, pp. 1–19).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1.2 المنهج والغاية

ما يأتي هو في نهاية المطاف تأمل شخصي أكثر منه تاريخاً منهجياً. فهو ليس شاملاً، ولا يتسم بصرامة أو أكاديمية خاصة، بل هو مجموعة، تشبه أحياناً لوحة مركبة، من موضوعات مترابطة ترابطاً فضفاضاً، تناول بعضها بتفصيل أكبر من غيرها، وتتبع مساراً من بلاد الرافدين إلى طريقة العناصر المحددة.

والعرض انتقائي وغير خطي عن قصد، وقد يبدو عشوائياً أحياناً. وربما تظهر بعض الموضوعات غير منسجمة أو في غير موضعها؛ وقد يدعو بعضها الآخر إلى الاختلاف بشأن إدراجه أو مقدار التركيز عليه. وما يجمع بينها أن كلاً منها أثار فضولي في وقت ما ودفعني إلى تدوين ملاحظات عنه.

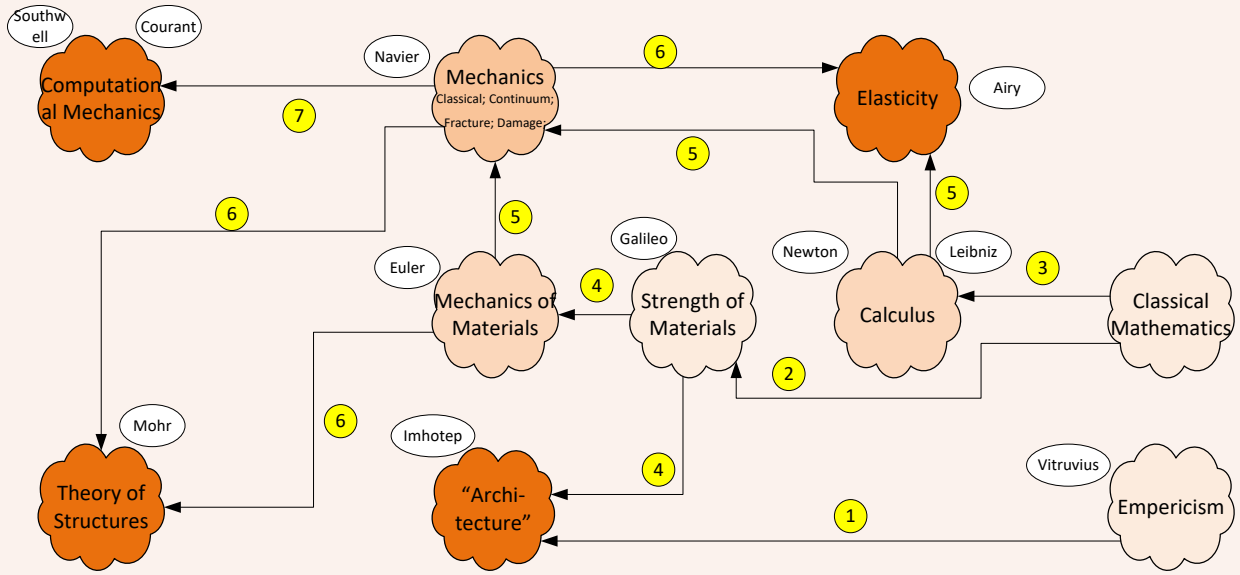
ولضيق الوقت، اقتبست أحياناً مباشرة من مصادر أولية وثانوية، مع الإحالة الكاملة إليها، وأعدت رسم عدد من الأشكال للمساعدة على توضيح أفكار مختارة.

وأخيراً، سمحت لنفسي ببعض الاستطرادات الشخصية في الحواشي، متأملاً كيف تطورت بعض الموضوعات، أو كيف أخفقت في التطور، مع قراءة الأحداث التاريخية في ضوء منظورات معاصرة.

1.3 الصورة الكبرى

1.3.1 موضوعياً

يقدم الشكل 1.1 خريطة طريق للرحلة التاريخية الطويلة. والترابط بين التخصصات المختلفة، التي لا تعرف هي نفسها تعريفاً خالياً من الالتباس، اعتباطي إلى حد ما. وقد أدرجت العمارة لأن المعماريين كانوا طوال قرون كثيرة يحددون أبعاد المنشآت فعلاً، ولأن مهنتهم متداخلة تداخلاً وثيقاً مع التحليل الإنشائي من نواح كثيرة.



شكل 1.1: خريطة طريق إلى الهندسة الإنشائية

1. صُممت المنشآت طوال قرون باستخدام قواعد تجريبية تقريبية، ولنستحضر الكاتدرائيات القوطية، قبل ظهور طرائق التصميم الرسمية بزمن طويل. وقد قنن فيتروفيوس هذه الممارسات المبكرة أول مرة في روما القديمة.
2. ظهرت في النهاية رياضيات ما قبل التفاضل والتكامل، فمهدت الطريق لمقاومة المواد، التي اتخذت طابعاً شبه تجريبي يقوم على ملاحظة تجارب مصممة بعناية.
3. سرعان ما تلا ذلك التطور الرسمي للتفاضل والتكامل، مستقلاً على يد نيوتن ولايبنتس في أواخر القرن السابع عشر. وقد وفر لغة رياضية قوية لوصف الحركة والتغير.
4. نضجت مقاومة المواد شبه التجريبية إلى ميكانيكا مواد أكثر صرامة؛ وانفصلت العمارة، لأول مرة أيضاً، عن القواعد التقريبية.
5. تطورت ميكانيكا المواد بعد ذلك إلى الميكانيكا العامة، مدعومة بالتفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية، فأتاحت دراسة الأجسام تحت أحمال وحركات اعتباطية.
6. نشأت نظرية المنشآت من التقدم في الميكانيكا وميكانيكا المواد؛ وفي الوقت نفسه نشأت المرونة من الميكانيكا والتفاضل والتكامل.
7. وأخيراً، تطورت الميكانيكا الحاسوبية من هذه الفروع المختلفة، جامعةً الطرائق العددية والميكانيكا لحل مسائل يتعذر حلها تحليلياً.

1.3.2 تاريخياً

استناداً إلى (Renn, Damerow **and** McLaughlin, 2002)، يمكن تقسيم التاريخ الطويل للميكانيكا، اعتباطياً مرة أخرى، إلى ثماني مراحل على الأقل[2]:

الفجر: يشير إلى الحقبة الطويلة التي راكمت فيها المجتمعات البشرية معرفة ميكانيكية عملية بالتجربة والنقل الشفهي، من غير تسجيلها كتابة أو تطوير أطر نظرية رسمية لها. وبينما يمكن تتبع أصول تخصصات مثل الرياضيات والفلك إلى الحضارات الحضرية القديمة في بابل ومصر، لا ينطبق ذلك، على نحو مدهش، على الميكانيكا. فعلى الرغم من كثرة الأدلة على منجزات هذه الحضارات في البناء الضخم، لم تبق وثائق تصف مباشرة المعرفة الميكانيكية التي لا بد أنها كانت وراء تلك الأعمال.

الشفق: يشمل العصر اليوناني–الروماني، الذي شهد صياغة قانون الرافعة وظهور أول المؤلفات المكتوبة المكرسة للميكانيكا والفلسفة الطبيعية. ويرتبط هذا العصر خصوصاً بأرسطو وإقليدس وأرخميدس، الذين أثرت أعمالهم بعمق في التطورات الفكرية اللاحقة. وقد وفرت الفيزياء الأرسطية، بوجه خاص، الإطار المفاهيمي السائد قروناً. وبينما أسهم الرومان قليلاً في الميكانيكا النظرية، برعوا مهندسين عمليين. وكان لكتابات فيتروفيوس، على محدودية مداها العلمي، أثر دائم في نظرية العمارة وممارستها.

عصور لم تكن مظلمة تماماً: تبرز الإسهامات المهمة للعلماء العرب الذين حفظوا المؤلفات الميكانيكية اليونانية وترجموها ووسعوا ما فيها، في زمن تراجعت فيه هذه المعرفة إلى حد بعيد في الغرب اللاتيني. ولم تكن هذه الحقبة فراغاً، بل شهدت تنقيح الأفكار الميكانيكية، وإنشاء المراصد والمؤسسات، وتطوير أجهزة مثل الساعات المائية والآلات الذاتية الحركة. وأقام عملهم جسراً أساسياً بين العصور الكلاسيكية والنهضة الأوروبية.

الشروق، عصر النهضة: يمثل استيقاظ البحث العلمي والإنشائي من جديد في أوروبا الغربية. وسيوضح هذا العصر من خلال دراستي حالة كلاسيكيتين في التصميم الإنشائي، إلى جانب مراجعة موجزة لأربعة كتب محورية أثرت بعمق في الفكر المعماري والهندسي.

المنهج العلمي: بعد قرون من الالتزام بالمذهب الأرسطي في الغرب، وضع فرنسيس بيكون أساس العلم التجريبي بدعوته إلى الملاحظة والتجريب، فكان ذلك تحولاً حاسماً. ولا يمكن المبالغة في أثره في الميكانيكا التجريبية، ويتجسد إرثه في ممارسين مبكرين مثل غاليليو غاليلي، الذي طبق التجريب المنهجي على المسائل الفيزيائية.

الآباء المؤسسون: كانت إسهامات إسحاق نيوتن وروبرت هوك أساسية إلى حد يستحق معه تطوير الميكانيكا الحديثة فئة مستقلة. فقد أرسى عملهما القوانين الرياضية والأسس التجريبية التي تعرف الميكانيكا الكلاسيكية.

[2] لاحظ أنني أغفلت الإسهامات الهندية والصينية، ولم أتناول الإسهامات العربية إلا تناولاً غير مباشر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

النشوء: الميكانيكا التحليلية: تتميز هذه المرحلة بالدمج الصارم بين الرياضيات والميكانيكا، ولا سيما في أعمال العلماء الفرنسيين والسويسريين. وشهدت صياغة مبادئ، مثل مبادئ دالمبير ولاغرانج وأويلر، وفرت إطاراً تحليلياً موحداً للأنظمة الميكانيكية.

نشوء التحليل الإنشائي: في هذه المرحلة كانت جميع المفاهيم الأساسية اللازمة للتحليل الإنشائي الحديث قد ترسخت. وبقيت مهمة التطوير المنهجي للطرائق، على يد عدد قليل من الشخصيات الكبرى، لتشكيل التحليل الإنشائي في صورة التخصص المعروف اليوم.

ومع أن هذا التقسيم يمثل تحديداً عقلانياً للتطور التاريخي للميكانيكا والهندسة الإنشائية، فإنه لا يتطابق بسلاسة مع بنية فصول هذا الكتاب، التي تحكمها توليفة من التسلسل التاريخي والتنظيم الموضوعي.

1.4 المراجع العلمية

قد يغامر عدد قليل فقط في أعماق هذه الكتب الهائلة والمهيبة، بينما يفضل كثيرون منهجاً أكثر مباشرة يسير بالتوازي مع المناقشات النظرية.

- كتاب تودهَنتر، الذي أتمه بيرسون عام 1893، *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials* (Todhunter **and** Pearson, 1893). ولعله أشمل عرض موثوق يبدأ بغاليليو. وكان كلا المؤلفين رياضياً. إنه عمل ضخم لمن يهتم أساساً بالمرونة.
- كتاب تيموشنكو عام 1953 *History of Strength of Materials* (Timoshenko, 1953). وهو لمن ينتهي اهتمامه أساساً إلى التحليل الإنشائي.
- كتاب تروسدل عام 1968 *Essays in the History of Mechanics*، (Truesdell, 1968). وليس عرضاً تاريخياً بانورامياً مثل الكتابين السابقين، بل ثماني مقالات تتناول موضوعات محددة أثارت اهتمام تروسدل، الذي رأى المرونة رياضيات تطبيقية.
- كتاب تروسدل *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*، وهو مقدمة من 432 صفحة للمجلدين العاشر والحادي عشر من المجموعة الكاملة لأعمال أويلر (Truesdell, 1960).
- كتاب Dugas, 1988، *History of Mechanics*، وهو عرض شامل وأكاديمي يتتبع تطور الفكر الميكانيكي من العصور القديمة إلى مطلع القرن العشرين، مع عناية مفصلة بالتطورات المفاهيمية والرياضية.
- كتابا بنفينوتو عام 1991 *An Introduction to the History of Structural Mechanics* (Benvenuto, 1991a) و(Benvenuto, 1991b). وهما عمل موجز جداً في مجلدين، مع معالجة واسعة للأقواس والقباب القوطية.
- كتاب هيمان عام 1998 *Structural Analysis: A Historical Approach* (Heyman, 1998a).
- الكتاب الذي حرره هويرتا عام 2005 *Essays in the History of the Theory of Structures: In Honour of Jacques Heyman*.
- كتاب كورر عام 2008 *The History of the Theory of Structures* (Kurrer, 2008). وهو كتاب ممتاز سهل القراءة يركز على التحليل الإنشائي أكثر من الميكانيكا.

اقتضى إعداد هذا الكتاب مراجعة واسعة لوثائق تاريخية، كثير منها قديم بما يكفي لأن يكون متاحاً رقمياً بالمجان عبر مكتبة HathiTrust الرقمية، أو للحصول عليه بخدمات الإعارة بين المكتبات التي توفرها جامعتي.

وباستثناء هذه الأعمال الأساسية، لم أصادف معالجات تاريخية أخرى للميكانيكا الإنشائية شاملة أو نافذة بما يكفي لتستحق الإدراج في هذه القائمة. وهذا الغياب جدير بالملاحظة في ذاته: فتاريخ الهندسة الإنشائية، وهي تخصص صاغ البيئة المبنية للحضارة البشرية من زقورات بلاد الرافدين إلى الأبراج الفائقة الارتفاع في مدن اليوم العملاقة، ما زال مهملاً على نحو لافت من المؤرخين.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ينجذب القارئ ذو التكوين التقني إلى تيموشنكو؛ وذو الميل الرياضي إلى تروسدل؛ والفضولي معمارياً إلى بنفينوتو وهيمان. ومع ذلك، لا يخاطب أي من هذه الأعمال، على امتيازها، الطالب أو المهندس الممارس الذي لا يطلب بحثاً مستفيضاً، بل سرداً ميسراً لقصة نشأة الأدوات التي نستخدمها يومياً، بطريقة تنير ولا ترهب.

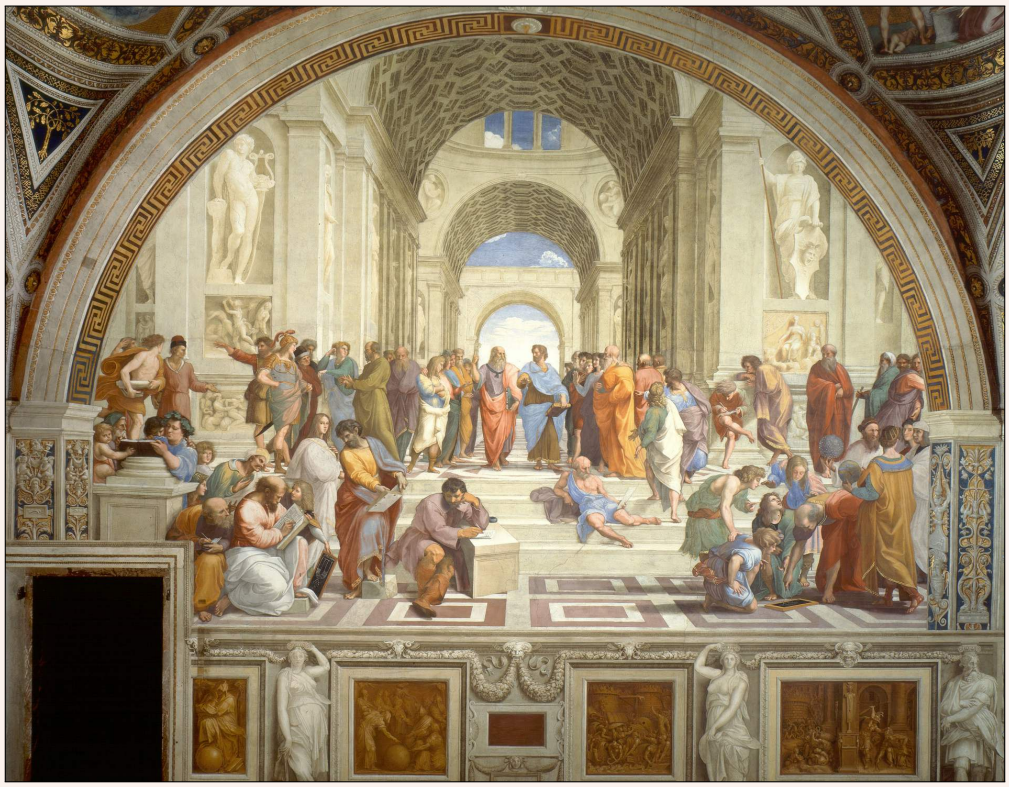
هذا الكتاب محاولة متواضعة لسد هذه الثغرة، وتقديم تاريخ الهندسة الإنشائية بصورة ملموسة لجيل جديد من المهندسين قد لا يعرف إلا القليل عن الصراعات الفكرية والبدايات الخاطئة وومضات البصيرة والتراكم الصبور للمعرفة التي جعلت مهنتهم ممكنة. وليس هذا عملاً في البحث التاريخي الأصيل؛ فأنا مهندس لا مؤرخ، وقد اعتمدت كثيراً على المصادر المذكورة أعلاه. لكنني حاولت نسج رواياتها في سرد يخاطب المهندسين بلغتهم، ويربط التطورات التاريخية بالمعادلات التي نحلها، والبرامج التي نشغلها، والمنشآت التي نصممها.

إذا أيقظت هذه الصفحات لدى مهندس شاب تقديراً للعمالقة الذين نقف جميعاً على أكتافهم، أو ألهمت قارئاً واحداً أن يرجع إلى *Discorsi* غاليليو، أو يدهش لجرأة رياضيات أويلر، أو يرى في شبكة عناصر محددة صدى بعيداً للاستاتيكا البيانية عند كولمان، فسيعد المؤلف جهده مثمراً.

اقتضى إعداد هذا الكتاب مراجعة واسعة لوثائق تاريخية، كثير منها قديم بما يكفي لأن يكون متاحاً رقمياً بالمجان عبر مكتبة HathiTrust الرقمية، أو للحصول عليه بخدمات الإعارة بين المكتبات التي توفرها جامعتي.

وأخيراً، تعمدت في الكتاب الأول (التاريخ) الاعتماد على المصادر الأولية في جميع المراجع، ويمكن للقارئ تنزيل كثير منها بالنقر على الشعار الأحمر الذي يلي الإحالة، وتجنبت المصادر الثانوية إلا حيث كانت ضرورية حقاً للفهم الكامل. وحيثما أمكن، عولجت جميع الوثائق بالتعرف الضوئي إلى المحارف وضُغط حجم ملفاتها.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



رافائيل، مدرسة أثينا (1509–1511)[a]

اجتماع الفلاسفة والرياضيين القدماء الذين تشكل أفكارهم الأسس التي بنيت عليها كل المعارف الإنشائية اللاحقة. وللتعرف إلى الشخصيات الرئيسة، انظر §3.2.3.

[a] يختتم كل فصل في هذا الكتاب بعمل فني اختير لصلته الموضوعية، التي قد تكون ضعيفة أحياناً باعترافنا، بالمادة السابقة. والقارئ مدعو إلى النظر إلى هذه الاختيارات بروح متسامحة؛ فقد تتطلب الروابط المقترحة أحياناً قدراً من المرونة التخيلية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2 قبل المنشآت: الأعداد والحروف

ملخص

يتتبع هذا الفصل أساسين متوازيين قامت عليهما العلوم والهندسة والعمارة: تطور أنظمة الأعداد واختراع الكتابة. يبحث الجزء الأول كيف أنشأت الحضارات القديمة، السومرية والبابلية والمصرية واليونانية والإسلامية والأوروبية، الأدوات العددية التي جعلت الرياضيات ممكنة، من النظامين الاثني عشري والستيني في بلاد الرافدين إلى النظام العشري الموضعي في الهند والحساب الثنائي في العصر الرقمي. ويتتبع السرد تطور مفاهيم مثل قياس الزوايا وحساب الزمن والأعداد غير النسبية والنسبة الذهبية. ثم ينتقل الجزء الثاني إلى القصة الموازية للكتابة: من أقدم القطع الطينية وعصي العد، مروراً بالكتابة المسمارية السومرية والهيروغليفية المصرية، وصولاً إلى الإسهام الحاسم للفينيقيين، أي اختراع الأبجدية، وانتقالها عبر اليونان وروما إلى العالم الحديث. وتمثل الأعداد والحروف معاً الأداتين اللتين ما كان التفكير العلمي ولا السجل المتراكم للمعرفة البشرية ممكناً من دونهما.

2.1 الأعداد 11
2.1.1 النظامان الستيني والاثنا عشري . 11
2.1.2 الزوايا 12
2.1.3 الزمن 13
2.1.4 النظام العشري والأرقام الهندية–العربية 13
2.1.5 تاريخ π 14
2.1.6 الأعداد غير النسبية والنسبة الذهبية 15
2.2 الحروف: تاريخ أنظمة الكتابة 15
2.2.1 أقدم السجلات: القطع وعصي العد والطين 15
2.2.2 المسمارية: أول نظام كتابة في العالم 16
2.2.3 الهيروغليفية المصرية والتراث التصويري 16
2.2.4 الفينيقيون واختراع الأبجدية . . 18

2.1 الأعداد

2.1.1 النظامان الستيني والاثنا عشري

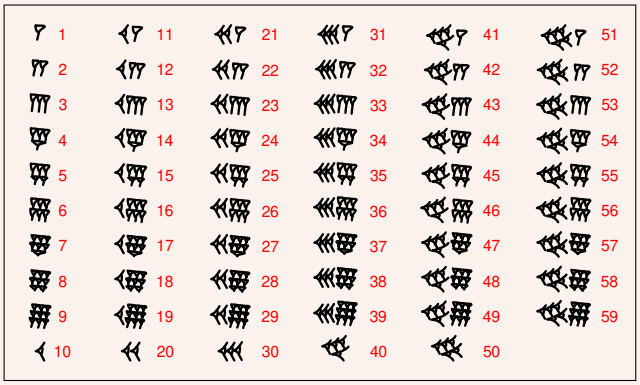
بعد العصر البرونزي بزمن غير طويل، ظهرت سومر، وهي من أقدم الحضارات المسجلة إلى جانب مصر القديمة، في بلاد الرافدين، المنطقة الواقعة بين نهري الفرات ودجلة. وبدأ الاستقرار الدائم فيها بين نحو 5500 و4000 قبل الميلاد (Mieroop, 2024). وخلفتها في النهاية الإمبراطورية البابلية (نحو 1895–539 قبل الميلاد)، التي ورثت جوانب كثيرة من الثقافة السومرية ووسعتها. ومن أدوم إسهامات السومريين تطوير أقدم نظام كتابة معروف: الكتابة المسمارية، المؤلفة من علامات إسفينية تضغط على ألواح الطين.

تعرّف هذه الألواح في الدراسات الحديثة غالباً باسم المجموعة التي تحفظها. فمثلاً، ينتمي لوح بلمبتون 322 إلى مجموعة بلمبتون في جامعة كولومبيا، بينما يحفظ لوح مجموعة ييل البابلية 7289 في مجموعة ييل البابلية (Robson, 2001). وبفضل قدرة الطين المشوي اللافتة على البقاء، نعرف اليوم عن رياضيات سومر وبابل أكثر بكثير مما نعرفه عن رياضيات مصر القديمة، التي سجلت في الغالب على ورق بردي أسرع تلفاً.

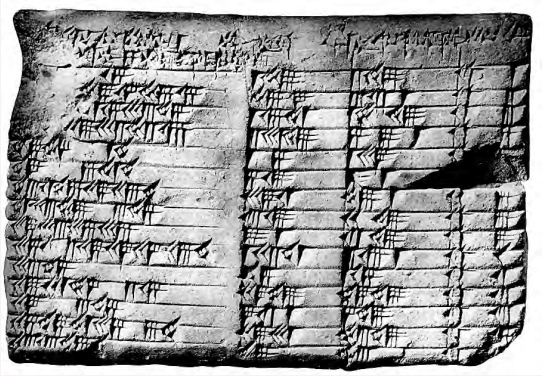
استخدم السومريون والبابليون نظامي عد اثني عشري (أساس 12) وستيني (أساس 60)، كما يبين الشكل 2.1a. وكانت سنتهم التقويمية تتألف من 360 يوماً، في ما يرجح أنه انعكاس لاعتبارات فلكية وهندسية. لكنهم افتقروا أول الأمر إلى رمز للصفر، ثم طوروا لاحقاً رمزاً حافظاً للمكان، لا صفراً حقيقياً بالمعنى الرياضي الحديث. ولم يرسخ مفهوم الصفر عدداً له قواعده الحسابية إلا مع الرياضي الهندي براهماغوبتا عام 628 ميلادية، ومنه انتقل إلى العالم الإسلامي ثم إلى أوروبا في العصور الوسطى (Kaplan, 2000).

ومن الطريف أن السومريين لم يعدوا بأصابع اليد العشرة كما هو شائع اليوم، بل استخدموا عظام الأصابع الاثني عشر في يد واحدة، ثلاث سلاميات في كل إصبع من الأصابع الأربعة، وجعلوا الإبهام مؤشراً يلمس كل سلامية بالتتابع. فأمكنهم العد إلى 12

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) الأعداد المسمارية البابلية



(b) بلمبتون 322، جامعة كولومبيا

شكل 2.1: الرياضيات البابلية

بيد واحدة. وباستخدام اليد الأخرى لتتبع عدد الدورات، أمكنهم العد إلى 60، أي اثنتي عشرة وحدة في كل واحد من أصابع اليد الأخرى الخمسة (Maor, 2001).

ولم يكن اختيار 60 اعتباطياً. فهو ما يسمى اليوم عدداً *عالي التركيب* متفوقاً، أي إن له قواسم أكثر من أي عدد صحيح موجب أصغر منه: 1 و2 و3 و4 و5 و6 و10 و12 و15 و20 و30 و60. ومن المهم أنه يقبل القسمة على الأعداد الأولية الثلاثة الأولى، 2 و3 و5، مما يبسط تمثيل الكسور كثيراً. أما النظام العشري الخالي من ترميز الكسور فلا يتيح القسمة النظيفة إلا على 2 و5. ولعل قابلية القسمة هذه يسرت الحساب العملي في التجارة والمحاسبة (Neugebauer, 1969; Menninger, 2013).

وظل النظام الاثنا عشري مستخدماً تاريخياً لدى البابليين ثم اليونانيين، ويرجع ذلك جزئياً إلى سهولة قسمته على 2 و3 و4. كما عززت الملاحظات الفلكية استمراره، ولا سيما وجود نحو اثنتي عشرة دورة قمرية في السنة (Maor, 2001).

ومن أشهر الآثار المسمارية لوح بلمبتون 322 (الشكل 2.1b)، المؤرخ بنحو 1800 قبل الميلاد، الذي يشير إلى أن علماء بابل عرفوا خصائص المثلثات القائمة قبل زمن فيثاغورس بوقت طويل. يسرد اللوح خمس عشرة مجموعة من الأعداد الصحيحة (a, b, c) تحقق العلاقة $a^2 + b^2 = c^2$، وتعرف اليوم بثلاثيات فيثاغورس. ومع أن بعض الباحثين عدها قديماً تمارين مجردة، ترى تفسيرات حديثة أن اللوح يعكس فهماً متقدماً للعلاقات العددية (Robson, 2001).

ويحتوي أثر آخر جدير بالذكر، هو لوح مجموعة ييل البابلية 7289 (YBC)، تقريباً ستينياً بالغ الدقة لـ$\sqrt{2}$، صحيحاً إلى نحو ست منازل عشرية (1.414214) (Robson, 2002).

يعرف البابليون علمياً بإسهاماتهم في الرياضيات والفلك. أما منجزاتهم الهندسية، فعلى أهميتها في مجالات مثل الري، كانت متواضعة نسبياً إذا قيست بمنجزات حضارات لاحقة كاليونان والرومان.

2.1.2 الزوايا

كان البابليون أيضاً مراقبين دقيقين للسماء ليلاً، وطوروا لرسم مواضع الأجرام شكلاً مبكراً من الإطار المرجعي. وفي نحو القرن الخامس قبل الميلاد، أدخلوا دائرة البروج نظام إحداثيات للأغراض الفلكية. وكان هذا امتداداً طبيعياً لأساسهم الستيني، وربما تأثر بملاحظاتهم الهندسية، مثل أن محيط السداسي المنتظم يساوي ستة أمثال نصف قطر دائرته المحيطة. ويرجح أن تقسيم الدائرة إلى 360 درجة نتج من عوامل عدة، منها تقويمهم ذي 360 يوماً والاعتبارات الهندسية والمشاهدات الفلكية، وإن بقي أصله الدقيق موضع نقاش علمي (Toomer, 1998).

كان المصريون قادرين على تعيين الميول، ربما بأدوات مثل الغروما، لكن مفهوم الزاوية المجرد يبدو أنه لم يكن معروفاً لديهم بصيغة رياضية. ويرتبط إضفاء الصيغة الرسمية على قياس الزوايا بوضوح أكبر باليونانيين. وينسب إلى طاليس الملطي (نحو 624–545 قبل الميلاد) إثبات أن مجموع زوايا المثلث يساوي 180 درجة. واللافت أنه خالف التفسيرات الأسطورية أيضاً، فاقترح

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أن الأرض تطفو على الماء وأن الزلازل تنشأ من حركة شبيهة بالموج، وإن كان استدلاله فلسفياً لا قائماً على الفهم الحديث للصفائح التكتونية (Boyer **and** Merzbach, 2011).

وجاء تقدم مهم في قياس الزوايا مع أريستارخوس الساموسي (نحو 310–230 قبل الميلاد)، الذي قدر القطر الزاوي للشمس بنحو درجتين. ويعرف كذلك بأنه أول من اقترح نموذجاً شمسي المركز للنظام الشمسي (Evans, 1998).

وينسب إلى هيبارخوس (نحو 190–120 قبل الميلاد)، الذي يعد غالباً أبا علم المثلثات، تقسيم الدائرة إلى 360 درجة. وبعده بنحو قرنين، وسع بطليموس (نحو 100–170 ميلادية)، العامل في مصر الرومانية، النظام فقسم كل درجة إلى 60 جزءاً متساوياً، ثم كل جزء إلى 60 جزءاً أصغر. وعندما ترجمت أعماله اليونانية لاحقاً إلى اللاتينية الوسيطة، سميت هذه التقسيمات *partes minutiae primae*، أي الأجزاء الصغيرة الأولى، و*partes minutiae secundae*، أي الأجزاء الصغيرة الثانية، وهما الأصل الاشتقاقي لكلمتي الدقيقة والثانية الحديثتين (Neugebauer, 2012).

2.1.3 الزمن

مثلما استخدم البابليون نظامي العدد الاثني عشري والستيني، استخدم المصريون القدماء إطاراً اثني عشرياً أيضاً. وكما سبق، فإن 12 عدد عالي التركيب متفوق، وله مزايا عملية في قسمة الكسور. لذلك، عندما حان وقت تقسيم اليوم إلى وحدات أصغر، جعلوه مجموعتين من اثنتي عشرة "ساعة"، إحداهما للنهار والأخرى لليل. لكن طول هذه الساعات المبكرة لم يكن ثابتاً، بل تغير مع الفصول تبعاً لطول النهار والليل النسبي (Clagett, 1995).

وأدخل هيبارخوس نظاماً أكثر انتظاماً، فاقترح تقسيم اليوم إلى 24 ساعة متساوية عرفت بساعات الاعتدال، استناداً إلى تساوي النهار والليل عند الاعتداليين (Evans, 1998).

ولم يحدث تقسيم الساعة إلى وحدات أصغر بالنظام الستيني إلا في مطلع العصر الذهبي الإسلامي. ففي نحو عام 1000 ميلادية، طبق العالم الموسوعي البيروني الطرائق البابلية فقسم الساعة إلى 60 دقيقة، ثم الدقيقة إلى 60 ثانية (Kennedy, 1971). واعتمد يوحنا السكروبوسكي هذا المنهج لاحقاً في باريس نحو عام 1235، بعد البيروني بأكثر من قرنين (Grant, 1977).

وهكذا يجمع مفهوم الزمن الحديث بين تقليدين عدديين قديمين: البنية المصرية الاثني عشرية والنظام البابلي الستيني.

2.1.4 النظام العشري والأرقام الهندية–العربية

لعل العد على الأصابع أبده أصول أنظمة الأعداد، وقد استخدمت حضارات قديمة عدة النظام العشري القائم على عشرة أرقام، ومنها اليونان والمصريون والرومان. وعرف الرومان خاصة بتوجههم العملي في الإدارة والهندسة.

لكن الخطوة الحاسمة لم تكن مجرد العد بالأساس عشرة، بل تطوير ترميز موضعي تعتمد فيه قيمة الرقم على موضعه في العدد، ويعمل فيه الصفر لا حافظاً للمكان فقط بل عدداً قائماً بذاته. تحقق هذا الإنجاز في الهند. وكان براهماغوبتا أول من صاغ، عام 628 ميلادية، قواعد حسابية للصفر والأعداد السالبة (Kaplan, 2000). وانتقل النظام العشري الموضعي الناتج إلى العالم الإسلامي بعمل الخوارزمي، الذي لم يشيع كتابه *المختصر في حساب الجبر والمقابلة* (نحو 825 ميلادية) الأرقام الهندية–العربية فحسب، بل أعطى كلمة الجبر أيضاً. وأدخل ليوناردو البيزي، المعروف أكثر باسم فيبوناتشي، النظام إلى أوروبا الوسيطة في كتابه *Liber Abaci* (1202)، مبرهناً على تفوق الترقيم الهندي–العربي عملياً على الأرقام الرومانية في حساب التجارة (Devlin, 2011).

وليس ثمة ما يضاف كثيراً عن النظام العشري حتى الثورة الفرنسية، حين امتد الحماس الثوري إلى قياس الزمن. ففي محاولة لفرض نظام عقلاني على جوانب الحياة كلها، أدخل الثوار الفرنسيون نظاماً عشرياً للوقت: يوم من 10 ساعات، في كل ساعة 100 دقيقة، وفي كل دقيقة 100 ثانية. فُرض عام 1793، السنة الثانية من التقويم الجمهوري، وأصبح إلزامياً عام 1794؛ لكنه، على أناقته الرياضية، ثبت أنه غير عملي وسرعان ما هجر (Richards, 1998).

وامتد الإصلاح إلى التقويم الجمهوري الفرنسي، الذي قسم السنة إلى اثني عشر شهراً في كل منها ثلاثة أسابيع من عشرة أيام (*décades*). ولإكمال سنة من 365 أو 366 يوماً، أضيفت في نهايتها خمسة أو ستة أعياد سميت *jours complémentaires* (Gleick, 2016).

ومع أن الوقت العشري لم يدم، دام ابتكار آخر من تلك الحقبة، هو النظام المتري. وتطور في النهاية إلى *النظام الدولي للوحدات* (SI)، الذي يحافظ عليه اليوم المكتب الدولي للأوزان والمقاييس ويعتمد على نطاق واسع في العلوم والهندسة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما النظام الثنائي، أساس 2، فتعود جذوره الرياضية إلى لايبنتس في القرن السابع عشر، وقد استلهم جزئياً كتاب التغيرات الصيني القديم *I Ching*، إذ رأى في نظام خطوطه السداسية المتصلة والمنقطعة تجسيداً للمنطق الثنائي (Davis, 2018). ويقوم العصر الرقمي اليوم على النظام الثنائي. ويعتمد عليه المهندسون الإنشائيون يومياً، في الغالب من غير وعي، سواء في إعداد الوثائق أو تنفيذ التحليلات أو تشغيل المحاكاة بالحاسوب.

2.1.5 تاريخ π

من بين الثوابت الرياضية التي تعم الهندسة، لعل π، نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، أكثرها حضوراً. وتوسعها العشري

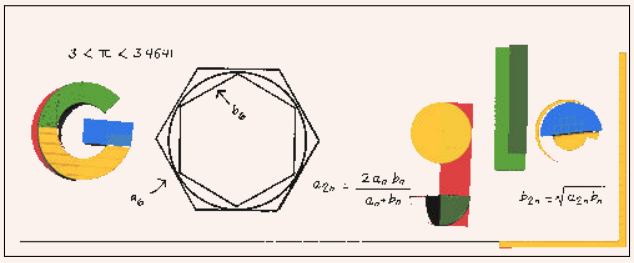
$$\pi = 3.14159265358979\ldots,$$

غير نسبي، فلا يمكن التعبير عنه نسبةً بين عددين صحيحين، ومتسامٍ، فلا يحقق أية معادلة كثيرة حدود ذات معاملات نسبية. ولم تثبت هاتان الخاصتان رسمياً حتى القرن التاسع عشر.

والحاجة العملية إلى تقريب π قديمة. استخدم البابليون القيمة $3\frac{1}{8} = 3.125$، بينما توحي بردية ريند (نحو 1650 قبل الميلاد) بتقريب مصري قدره $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.1605$. وأول معالجة رياضية صارمة تعود إلى أرخميدس (نحو 287–212 قبل الميلاد)، الذي حصر π بإحاطة دائرة بمضلعات منتظمة مرسومة داخلها وخارجها (الشكل 2.2). وباستخدام مضلعات ذات 96 ضلعاً، أثبت أن

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

وهي نتيجة بالغة الدقة لعصرها. وظلت طريقة المضلعات هذه منهج الحساب الغالب قرابة ألفي عام.



شكل 2.2: رسم غوغل التذكاري ليوم π (14/3/2026)، تحية لأرخميدس

وجاء تقدم مهم من التراث الرياضي الهندي. فقد أعطى أريابهاتا (476–550 ميلادية) التقريب $\pi \approx 3.1416$، ثم اشتق مادهافا (نحو 1340–1425) من مدرسة كيرالا ما يعرف اليوم بمتسلسلة لايبنتس–غريغوري:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

مستبقاً بنحو قرنين نتائج نسبت لاحقاً إلى رياضيين أوروبيين. وفي القرن السابع عشر، فتح تطور التفاضل والتكامل سبلاً جديدة تماماً؛ فحسب نيوتن π إلى ست عشرة منزلة عشرية بمتسلسلة ذات حدين، وعلق بأنه "غير فخور" بما أمضاه من وقت في هذا الحساب.

أدخل الرياضي الويلزي وليم جونز الرمز π نفسه عام 1706، ثم أشاعه أويلر منذ عام 1737، وهو أويلر نفسه الذي تظهر مطابقته $e^{i\pi} + 1 = 0$ في §2.1.6. وأثبت لامبرت عدم نسبية π عام 1768، ثم أثبت ليندمان تساميه عام 1882، فحسم أخيراً مسألة *تربيع الدائرة* القديمة، أي استحالة إنشاء مربع مساوٍ لدائرة معلومة في المساحة بالفرجار والمسطرة وحدهما.

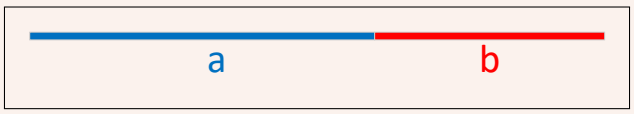
2.1.6 الأعداد غير النسبية والنسبة الذهبية

تحضر الأعداد غير النسبية دائماً في حياة المهندسين، وبخاصة من خلال ثابتين مثل π وe. ويرتبط هذان العددان المتساميان في ما يوصف كثيراً بأنه أجمل معادلة في الرياضيات، أي مطابقة أويلر:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

ومع أناقتها، لا تجد هذه المطابقة تطبيقات مباشرة كثيرة في التحليل الإنشائي، باستثناء بارز هو صيغة أويلر لأحمال الانبعاج. والأكثر صلة بسياق التصميم المعماري، وإن لم يكن بالميكانيكا، ما يسمى *النسبة الذهبية*.

يعرّف إقليدس (نحو 330 قبل الميلاد)، في الكتاب السادس من *العناصر*، تقسيم خط وفق النسبة القصوى والمتوسطة كما يأتي: يقال إن خطاً قسم وفق النسبة القصوى والمتوسطة إذا كانت نسبة الخط كله إلى الجزء الأكبر كنسبة الجزء الأكبر إلى الأصغر.[1] ويوضح الشكل 2.3 ذلك، ويعبر عنه جبرياً كما يأتي:



شكل 2.3: تعريف إقليدس للنسبة القصوى والمتوسطة

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{a+b}{a} & = & \frac{a}{b}, \\ x & = & \frac{a}{b} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \stackrel{\text{def}}{=} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.6180339887\ldots \\ 0.6180339887\ldots \end{cases}$$

يرمز ϕ هنا إلى النسبة الذهبية المسماة باسم فيدياس (§3.2.3)، مع أنه لم يستخدمها بنفسه بصيغة رياضية. وهذا هو التعريف الكلاسيكي للنسبة الذهبية، وإن وجدت صيغ هندسية أخرى كثيرة. ويظهر ϕ أيضاً، على نحو لافت، حداً لنسبة حدين متتاليين في متتالية فيبوناتشي: $\phi = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$؛ وهو جسر غير متوقع بين متتالية أعداد صحيحة تكرارية وثابت غير نسبي متجذر في الهندسة.

وشاع الظن بأن المصريين القدماء ضمنوا النسبة الذهبية في تصميم الأهرام، لكن هذه المزاعم موضع خلاف واسع، إذ لا دليل موثوقاً على امتلاكهم الأدوات الرياضية اللازمة لتعريف الأعداد غير النسبية أو حسابها. ولم يستدع المعماريون النسبة الذهبية صراحة لتحسين مظهر المباني وانسجامها المتصور إلا في عصر النهضة (Livio, 2008).

2.2 الحروف: تاريخ أنظمة الكتابة

لا توجد الأعداد في عزلة؛ فهي تحتاج إلى وسيط للتعبير عنها. ولا ينفصل تاريخ تسجيل البشر للمعرفة وتواصلهم ونقلهم إياها عن تاريخ الرياضيات والهندسة. فقد تطورت الكتابة والترقيم معاً، ومن المفيد تتبع أصول اللغة المكتوبة إلى جانب أنظمة الأعداد السابقة.

2.2.1 أقدم السجلات: القطع وعصي العد والطين

قبل ظهور الكتابة الرسمية بزمن طويل، طورت الجماعات البشرية أنظمة أولية لتسجيل الكميات. ومن أقدم آثارها عصي *العد*، وهي عظام أو قطع خشب تحز لتسجيل الأعداد. ولعل عظمة ليبومبو من جنوب أفريقيا (نحو 43,000 قبل الميلاد) أقدم أثر رياضي

[1] ظل كتاب إقليدس *العناصر* أكثر من ألفي عام مثالاً يحتذى في الاستدلال الرياضي. فقد بدأ بتعريفات ومسلمات أساسية، ثم بنى نظاماً استنباطياً صارماً تتبع فيه كل قضية منطقياً ما سبقها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

معروف، بينما تحمل عظمة إيشانغو، المكتشفة في جمهورية الكونغو الديمقراطية والمؤرخة بنحو 20,000 قبل الميلاد، سلسلة حزوز مرتبة في أنماط يفسرها بعض الباحثين دليلاً على تفكير حسابي مبكر (Marshack, 1972).

وقبل الكتابة بمعناها الدقيق، استخدمت مجتمعات بلاد الرافدين قطعاً طينية صغيرة تمثل سلعاً كالحبوب والزيت والماشية لتتبع المعاملات. وبحلول نحو 3500 قبل الميلاد، وضعت هذه القطع في أغلفة طينية مجوفة، وضغطت طبعات على ظاهرها لتبين محتوياتها، كما في الشكل 2.4. ولم تكن المسافة المفاهيمية بعيدة بين هذه الطبعات ورسم الرموز مباشرة على سطوح طينية مسطحة؛ ومع تلك الخطوة ولدت الكتابة (Schmandt-Besserat, 1992).



شكل 2.4: قطع طينية من بلاد الرافدين: إرهاصات الكتابة (نحو 3500 قبل الميلاد)

2.2.2 المسمارية: أول نظام كتابة في العالم

ظهر أقدم نظام كتابة معروف في العالم، أي المسمارية، في سومر نحو 3200 قبل الميلاد. واسمها في اللغات الأوروبية مشتق من اللاتينية *cuneus*، أي الإسفين، إشارة إلى شكل العلامات التي تنتج من ضغط قلم من القصب في الطين اللين. كانت المسمارية تصويرية أول الأمر، ثم تطورت سريعاً إلى نظام مقطعي أكثر تجريداً، قادر على تمثيل السلع والحسابات، وكذلك الأدب والقانون والعلم، كما يبين التدرج في الشكل 2.5.

حفظت *ملحمة جلجامش*، وهي من أقدم الأعمال الأدبية الباقية، على ألواح مسمارية؛ وكذلك حفظت سجلات فلكية ومسائل رياضية وشريعة حمورابي (نحو 1754 قبل الميلاد). وكان الطين وسيطاً فائق المتانة؛ فالألواح التي شويت عمداً أو بحرائق دمرت المدن القديمة بقيت آلاف السنين. ولهذا تحديداً توثق رياضيات بابل وسومر اليوم أفضل من رياضيات مصر، التي كان وسيطها الرئيس ورق البردي الأسرع تلفاً بكثير (Kramer, 1963).

ومع الزمن، كيفت ثقافات كثيرة في الشرق الأدنى المسمارية، ومنها الأكديون والآشوريون والحثيون والفرس. لكن أنظمة كتابة أكثر مرونة بدأت تحل محلها تدريجياً في الألف الأول قبل الميلاد، وأهمها الأبجدية. ويعود آخر لوح مسماري معروف إلى نحو عام 75 ميلادية؛ وكانت الكتابة آنذاك قد انقرضت منذ قرون بوصفها تقليداً حياً.

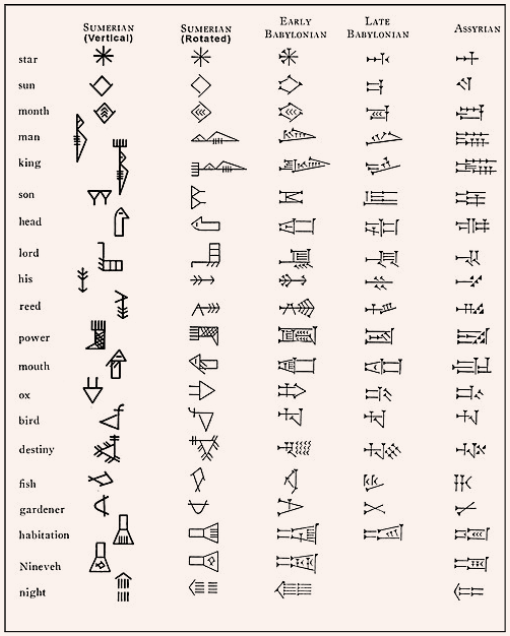
2.2.3 الهيروغليفية المصرية والتراث التصويري

طورت مصر القديمة، استقلالاً عن بلاد الرافدين وإن جاز أن يكون ذلك بتحفيز غير مباشر، نظام كتابتها الخاص نحو 3100 قبل الميلاد. وكانت الهيروغليفية المصرية، واسمها الأوروبي من اليونانية *hieros*، أي مقدس، و*glyphein*، أي ينقش، نظاماً مركباً متقدماً يجمع العلامات الدالة على كلمة أو مفهوم، والعلامات الصوتية، والمحددات غير المنطوقة التي تبين الفئة الدلالية، كما في الشكل 2.6. وأتاح ذلك مدى تعبيرياً واسعاً وجمالاً بصرياً تشهد به النقوش التي تزين المعابد والقبور والآثار في أنحاء مصر.

استخدمت الهيروغليفية[2] في النقوش التذكارية على الحجر، بينما استخدم مشتقان متصلان منها، الهيراطيقية ثم

[2] ثمة موازاة مفيدة بين الهيروغليفية المصرية والمحارف الصينية: فكلاهما نظام مختلط يجمع علامات دالة على الكلمات أو

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 2.5: تطور المسمارية من العلامات التصويرية (نحو 3200 قبل الميلاد) إلى العلامات المقطعية المجردة (نحو 2000 قبل الميلاد)



شكل 2.6: الكتابة الهيروغليفية المصرية

الديموطيقية[3]، في الكتابة اليومية على البردي. ونقلت المعرفة الرياضية بهذه الخطوط المتصلة؛ وتعد بردية رند الرياضية

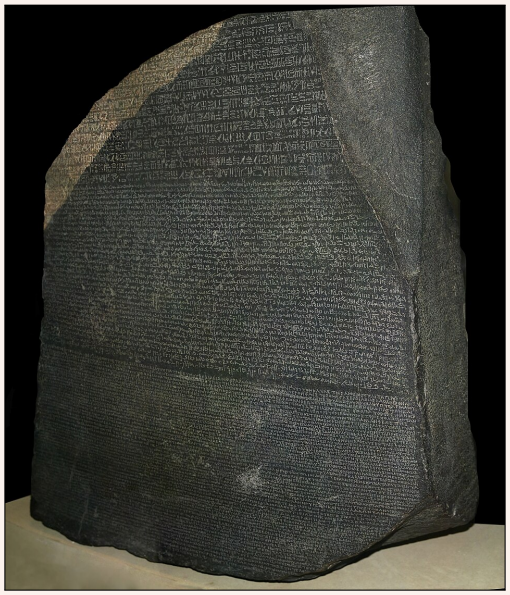
الصرفيات، ومكونات صوتية، ومصنفات دلالية تشبه المحددات المصرية. وأكثر المحارف الصينية مركبات صوتية–دلالية، تتألف من جذر دلالي يلمح إلى المعنى ومكون صوتي يقترح النطق؛ وهو منطق بنيوي شديد الشبه بالجمع المصري بين العلامة الدالة والصوتية والمحدد. وقد تطور النظامان باستقلال تام، لكنهما تقاربا إلى الحل التنظيمي نفسه لمشكلة تمثيل لغة منطوقة معقدة كتابةً. ويستشهد بهذا التقارب أحياناً دليلاً على أن الأنظمة المختلطة الدلالية–الصوتية تمثل مرحلة وسطى طبيعية في تطور الكتابة (Daniels **and** Bright, 1996).

[3] ظهرت الديموطيقية، واسمها مشتق من اليونانية بمعنى "الشعبية"، في مصر نحو القرن السابع قبل الميلاد تبسيطاً للهيراطيقية الأقدم، وهي نفسها مشتق متصل من الهيروغليفية. وبينما استخدم الكهنة والكتبة الهيراطيقية أساساً في النصوص الدينية والإدارية، أصبحت الديموطيقية نظام الكتابة اليومية للمصريين المتعلمين في طيف أوسع من الأغراض، منها العقود القانونية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(نحو 1650 قبل الميلاد) وبردية موسكو الرياضية (نحو 1850 قبل الميلاد) من المصادر الأساسية لفهمنا الحساب والهندسة المصريين (Clagett, 1999).

فك جان-فرانسوا شامبليون رموز الهيروغليفية عام 1822، بعد أن ظلت لغزاً للعالم الغربي زمناً طويلاً، مستخدماً حجر رشيد الثلاثي اللغة (الشكل 2.7)، المنقوش بالهيروغليفية والديموطيقية واليونانية، مفتاحاً له (Parkinson, 1999). ويقف الثراء التصويري للتراث الهيروغليفي على طرف نقيض من الكفاءة المجردة التي ستأتي بعده: الأبجدية.



شكل 2.7: حجر رشيد (196 قبل الميلاد)، يحمل المرسوم نفسه بالهيروغليفية والديموطيقية واليونانية من الأعلى إلى الأسفل، وكان مفتاح فك الكتابة المصرية القديمة

2.2.4 الفينيقيون واختراع الأبجدية

من بين ابتكارات تاريخ الاتصال المكتوب كلها، لم يثبت شيء أنه أعظم أثراً من اختراع الأبجدية، أي النظام الذي يمكن فيه جمع عدد قليل من العلامات، تمثل كل منها صوتاً صامتاً واحداً، لكتابة أية كلمة في أية لغة. وينسب هذا الاختراع إلى الفينيقيين[4]، وهم حضارة بحرية سامية ازدهرت على الساحل الشرقي للمتوسط، في أراضي لبنان وشمال إسرائيل وساحل سوريا اليوم، من نحو 1500 إلى 300 قبل الميلاد (Sader, 2019).

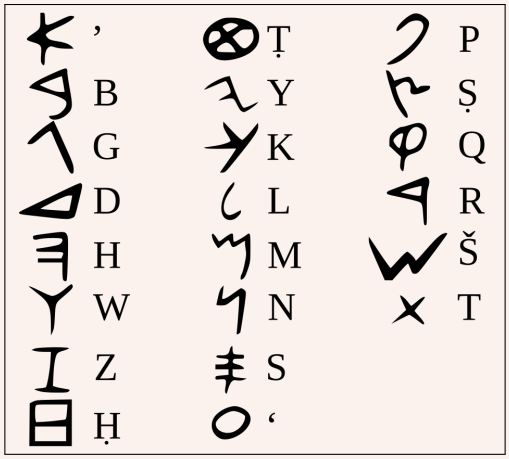
تبلورت الأبجدية الفينيقية نحو 1050 قبل الميلاد، وتألفت من 22 حرفاً صامتاً، أي إنها *أبجد* يسجل الصوامت وحدها ويترك للقارئ استنتاج الحركات، كما في الشكل 2.8. وكان لكل حرف اسم هو أيضاً كلمة سامية تبدأ بالصوت الموافق: ألف، أي ثور؛ وبيت؛ وجمل؛ وهكذا. وكان هذا المبدأ الأكروفوني، الذي يجعل الصوت الأول للكلمة اسم العلامة وقيمتها، سهل التذكر وأنيقاً. واشتقت العلامات نفسها من الكتابة السينائية الأولية الأقدم، التي يبدو أنها استلهمت الهيروغليفية المصرية، لكنها كيفت لتمثيل أصوات لغة سامية (Naveh, 1987).

تكمن عبقرية النظام الفينيقي في اقتصاده الجذري: فبينما احتاجت المسمارية إلى مئات العلامات، واستخدمت الهيروغليفية المصرية آلافاً منها، اختزلت الأبجدية الفينيقية التمثيل الكتابي للغة إلى 22 رمزاً فقط. وجعلت هذه البساطة القراءة والكتابة

والرسائل والأدب والسجلات التجارية. وظلت مستخدمة نحو ألف عام، حتى أزاحتها اليونانية تدريجياً بعد فتح الإسكندر الأكبر مصر عام 332 قبل الميلاد، ثم القبطية، آخر مراحل اللغة المصرية المكتوبة بأبجدية يونانية معدلة. وحجر رشيد (196 قبل الميلاد) من أشهر الوثائق المنقوشة بالديموطيقية إلى جانب نسختيه الهيروغليفية واليونانية.

[4] أجدادي!

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 2.8: الأبجدية الفينيقية (نحو 1050 قبل الميلاد): الحروف الصامتة الاثنان والعشرون وأسماؤها وانتقالها إلى الحروف اليونانية واللاتينية

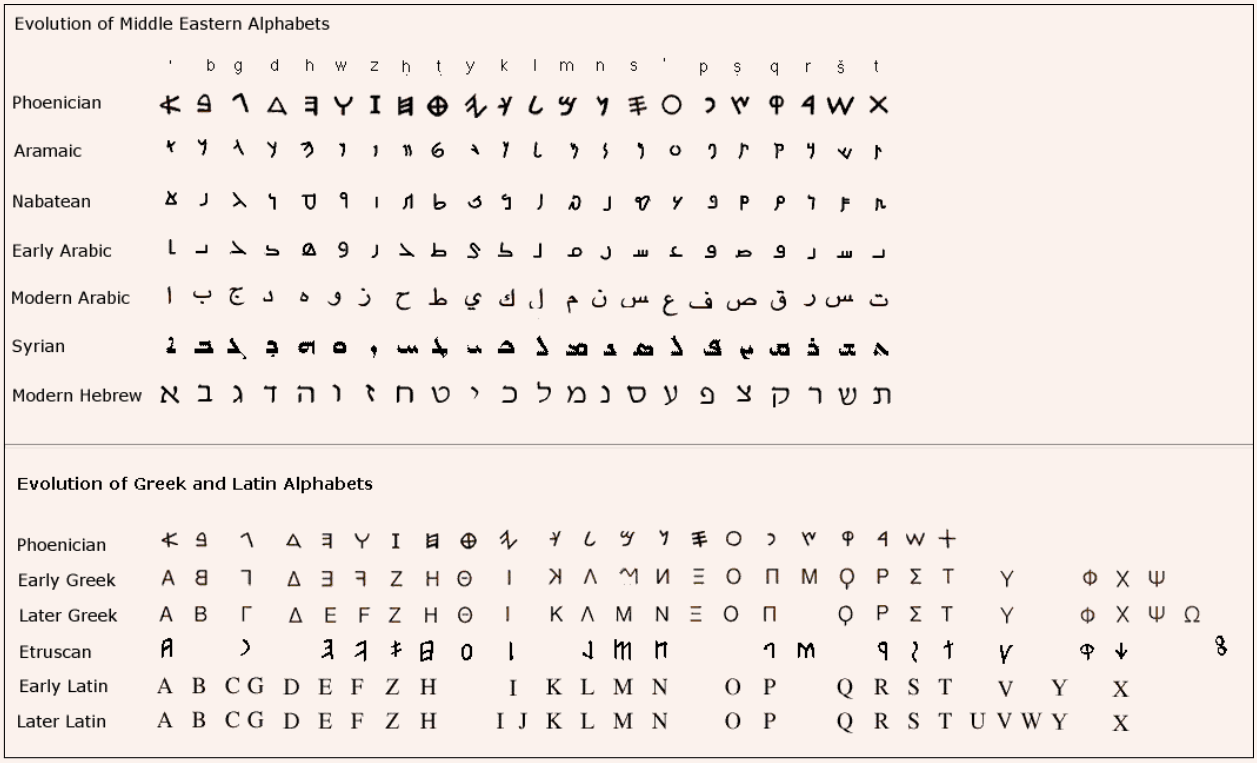
متاحتين خارج طبقات الكتبة الضيقة التي أتقنت الأنظمة السابقة. ولم يكن من المصادفة أن الفينيقيين، وهم كبار تجار العالم القديم الذين امتدت شبكاتهم من المشرق إلى شمال أفريقيا وإسبانيا والجزر البريطانية، هم الذين أتقنوا هذه الأداة ونشروها. فالكتابة عندهم كانت قبل كل شيء أداة عملية للتجارة والمراسلة وحفظ السجلات.

حوّل انتقال الأبجدية الفينيقية العالم القديم. فقد تبناها اليونانيون نحو القرن التاسع أو الثامن قبل الميلاد، وأدخلوا الابتكار الحاسم المتمثل في إعادة تخصيص عدد من العلامات الصامتة الفينيقية لتمثيل الحركات، فأنشؤوا أول أبجدية حقيقية تكتب فيها الصوامت والحركات بانتظام. ثم كيف الأتروسكيون الأبجدية اليونانية، وعنهم أخذها الرومان، فنشأت الأبجدية اللاتينية التي تقوم عليها معظم كتابات العالم الغربي اليوم. وفي الوقت نفسه، نشأت من الأصل الفينيقي نفسه، عبر فروع تطورية مستقلة، الأبجديتان العبرية والعربية، ثم الخطوط البراهمية في جنوب آسيا وجنوب شرقها، كما يلخص مخطط النسب في الشكل 2.9 (Daniels **and** Bright, 1996).

يصعب المبالغة في النتائج الثقافية لهذا الانتشار. فقد أتاحت السهولة النسبية للكتابة الأبجدية تكاثر الأدب والفلسفة والقوانين والنصوص العلمية في عالم المتوسط. وتشكل أعمال هوميروس وأفلاطون وإقليدس وأرخميدس، المكتوبة كلها بالأبجدية اليونانية المنحدرة مباشرة من الفينيقية، الأساس الفكري للعلم والهندسة الغربيين. وبهذا المعنى، كان التجار الفينيقيون الذين ضغطوا 22 علامة في الطين وخدشوها على شظايا الفخار مساهمين من غير قصد في التقليد الرياضي والميكانيكي نفسه الذي يسعى هذا الكتاب إلى تأريخه.

ومن المناسب، في سياق كتاب عن التحليل الإنشائي، ملاحظة أن كلمة مهندس في اللغات الأوروبية تعود، عبر اللاتينية والفرنسية القديمة، إلى اللاتينية *ingenium*، أي الفطنة والذكاء الفطري، وهو مفهوم عبّر عنه انتشار الكتابة وضخمه معاً. فالأعداد والحروف، والسجلات والحسابات، ليست مجاري منفصلة؛ بل روافد للنهر نفسه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 2.9: نسب الأبجديات: من الفينيقية (نحو 1050 قبل الميلاد) إلى أسر الخطوط اليونانية واللاتينية والعربية والعبرية والبراهمية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ألبرشت دورر، Melencolia I (1514)

يجسد المربع السحري والأجسام الهندسية وأدوات القياس المحيطة بالشخصية المتأملة صحوة البشرية الرياضية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3 الحضارات القديمة

ملخص

يدين التحليل الإنشائي والميكانيكا بالكثير للتقدم الفكري والعملي الذي حققته الحضارات القديمة. وتحتل بلاد الرافدين وأمريكا الوسطى وفارس والصين والهند واليابان وروما ومصر والعالم العربي–الإسلامي مكانة مهمة بينها، إذ أرست أسس مبادئ وتقنيات متعددة أثرت في الميكانيكا النظرية والتطبيقية. وتعكس إسهاماتها مزيجاً من البحث العلمي والبراعة الهندسية والتجريب العملي لا يزال صداه ممتداً عبر العصور.

يدين التحليل الإنشائي والميكانيكا بالكثير للتقدم الفكري والعملي الذي حققته الحضارات القديمة. وتحتل بلاد الرافدين وأمريكا الوسطى وفارس والصين والهند واليابان مكانة مهمة بينها، إذ أرست أسس مبادئ وتقنيات متعددة أثرت في الميكانيكا النظرية والتطبيقية. وتعكس إسهاماتها مزيجاً من البحث العلمي والبراعة الهندسية والتجريب العملي لا يزال صداه ممتداً عبر العصور.

3.1 الحضارات المبكرة وأصول العمارة الضخمة 22
3.1.1 بلاد الرافدين: الزقورات والمنشآت الطينية؛ نحو 3100–500 قبل الميلاد 22
3.1.2 أمريكا الوسطى: أهرام المايا والأزتك؛ نحو 400 قبل الميلاد–1521 ميلادية 23
3.1.3 مصر؛ نحو 2700–1000 قبل الميلاد 24
3.1.4 مقارنة بلاد الرافدين وأمريكا الوسطى ومصر 27
3.2 العصور الكلاسيكية: الهندسة والنظرية والإمبراطورية 30
3.2.1 فارس: المنصات الإمبراطورية والجسور والقنوات الجوفية . . . 30
3.2.2 الإسهامات العربية–الإسلامية: ابتكارات في الهندسة الإنشائية . . 31
3.2.3 الإسهامات اليونانية في الاستاتيكا والميكانيكا الإنشائية . 33
3.2.4 روما: الخرسانة والأقواس والبنية التحتية 36
3.3 التقاليد الرياضية والإنشائية في الهند والصين واليابان 39
3.3.1 الصين: علم الزلازل والجسور والابتكار الميكانيكي 40
3.3.2 الهند: الرياضيات والمواد والعمارة الضخمة 40
3.3.3 اليابان: الصمود الزلزالي والمنشآت المتكيفة 40
3.3.4 الخلاصة والأثر العالمي 41

3.1 الحضارات المبكرة وأصول العمارة الضخمة

3.1.1 بلاد الرافدين: الزقورات والمنشآت الطينية؛ نحو 3100–500 قبل الميلاد

أرست بلاد الرافدين، التي توصف كثيراً بأنها "مهد الحضارة"، أسساً مبكرة في الميكانيكا الإنشائية والبنية التحتية المدنية. وتمثل الزقورات، وهي منصات مدرجة ضخمة أقيمت في المراكز الحضرية الكبرى، نماذج مبكرة للبناء الكتلي تحت أحمال تهيمن عليها الجاذبية. فزقورة أور الكبرى (نحو 2100 قبل الميلاد)، الشكل 3.1a، شيدت من لبن مجفف بالشمس في القلب أحاط به طوب محروق لزيادة المتانة ومقاومة الطقس (Oppenheim, 1977). ووفرت الهندسة المدرجة تشتيتاً فعالاً للإجهاد عبر طبقات متعددة، فقللت تراكم إجهاد الضغط الرأسي عند القاعدة وحسنت الاستقرار العام. كما أضاف استخدام القار مادةً رابطةً قدراً من المطاوعة وزاد تماسك البناء، فحسن مقاومته لفشل القص وللتدهور البيئي. ويجدر التنبيه إلى أن أهل بلاد الرافدين استخدموا أشكالاً بدائية من الأقواس في المصارف الجوفية وأقبية القبور منذ نحو 4000 قبل الميلاد، لكنها كانت أقواساً كابولية متدرجة لا أقواساً حقيقية من الصنجات.

ومع التشابه الهندسي الظاهري بين الأهرام المصرية وزقورات بلاد الرافدين، لا يوجد دليل حاسم على تأثير مباشر. لكن الشكل المميز للزقورة ألهم على الأرجح قصة برج بابل في الكتاب المقدس، ولا سيما من خلال إيتيمينانكي الشاهق في بابل (George, 1993).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالتوازي، طور مهندسو بلاد الرافدين مبادئ أساسية للهندسة الهيدروليكية دعماً للزراعة وصمود المدن. فأنشؤوا شبكات ري مضبوطة بقنوات مفتوحة وسدوداً ترابية ذات مقاطع مصممة لتخفيف خطر الفيضان وتوجيه الجريان الموسمي. وجسدت هذه الأنظمة مفهومي الميل الهيدروليكي واستمرارية الجريان، وإن لم يصاغا رياضياً بعد. ولم يكن الطين، وهو مادة جيولوجية وفيرة، عنصراً إنشائياً فحسب، بل استخدم أيضاً لصنع القوالب والمكونات النموذجية، في ما يوحي باستعمال مبكر للقوالب النمطية في الإنتاج المعماري. وتعكس هذه الابتكارات مجتمعة فهماً عملياً للسلوك الإنشائي وأداء المواد وديناميكا المياه في بيئة محدودة الموارد.

الطين مع أن لبن الزقورات والطين المستخدم في الألواح المسمارية استخرجا من الغرين الفيضي نفسه في سهل الفرات ودجلة، عولجت المادة الخام بطريقتين مختلفتين لتلبية متطلبات هندسية متميزة. فقد خلط لبن البناء بغرين خشن وقش لتحسين مقاومة الشد، وجفف أكثره بالشمس، بينما حرقت طبقات مختارة من الواجهات في الأفران وختمت بالقار للحماية من الطقس.

أما الكتبة فغسلوا الطين ونقوه (الشكل 3.1b)، وأزالوا القش والحبيبات الخشنة للحصول على عجينة لدنة ناعمة تقبل طبعات القلم الحادة. ولم تجفف أكثر الألواح إلا في الهواء، ولم تتعرض لحرق ضعيف إلا مصادفة في حرائق لاحقة. وهكذا أنتج مورد جيولوجي واحد "وصفتين" هندسيتين، إحداهما للبناء المقاوم للضغط والأخرى لحفظ السجلات (Oates, 1990; Moorey, 1999).



(a) زقورة



(b) لوح طيني

شكل 3.1: الطين في بلاد الرافدين

3.1.2 أمريكا الوسطى: أهرام المايا والأزتك؛ نحو 400 قبل الميلاد–1521 ميلادية

مع أن أهرام المعابد في أمريكا الوسطى جاءت بعد زقورات العالم القديم والأهرام المصرية بأكثر من ألف عام، فإنها تعالج هنا إلى جانب تلك الآثار الأقدم لأنها تمثل نشوءاً مستقلاً ومتقارباً للعمارة الضخمة المدرجة، وتقدم أساساً موازياً للتقليد العالمي في البناء التذكاري. ويبين هذا التطور المستقل، من دون اتصال بحضارات العالم القديم، أن بعض الحلول الإنشائية تنشأ طبيعياً من القيود الهندسية العامة.

قدمت حضارات أمريكا الوسطى، ومنها المايا والأزتك وأسلافهما، إسهامات لافتة في الهندسة الإنشائية والعمارة الضخمة. وكانت أهرامها المميزة، بسلالمها الشديدة الانحدار ومنصاتها المدرجة ومحاذاتها للظواهر السماوية، مراكز دينية وسياسية وكونية. ولم تشيد هذه المنشآت للإبهار وحده؛ بل كانت ثمرة تخطيط دقيق واختيار للمواد وتكيف مع البيئة.

تظهر أهرام المايا، مثل أهرام تيكال وبالينكي (250–900 ميلادية)، الشكل 3.2a، وتشيتشن إيتزا، درجة عالية من التطور الهندسي. فقد استخدم البناؤون أشكالاً مدرجة حسنت توزيع الأحمال وخفضت الدفع الجانبي، فأتاحت ارتفاعاً أكبر من غير إخلال بالاستقرار. وأتاح الحجر الجيري المحلي مع ملاط الجير تماسكاً طويل الأمد في الرطوبة العالية. أما القلوب الداخلية، التي تكونت غالباً من الأنقاض والملاط، فدمكت لتوفير الكتلة والجساءة (Coe, 2005; Sharer and Traxler, 2006). وكثيراً ما حملت هذه الأهرام معابد على قممها، دلالةً على مكانتها الشعائرية وعلامةً رأسية للحيز المقدس. وكثيراً ما شفرت هندستها معرفة تقويمية وفلكية، بمحاذاة الانقلابين والاعتداليين ودورات الزهرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

واصلت أهرام الأزتك، مثل المعبد الأكبر في تينوتشتيتلان (1325–1487 ميلادية)، الشكل 3.2b، تقاليد أقدم وطورتها. فقد شيدت من البازلت البركاني والتيزونتلي، وهو صخر حمم أحمر مسامي، وملاط الجير، واتسمت بمصاطب عريضة ومنصات مدرجة توزع الوزن الذاتي وتمنع تعرية المنحدرات. واستخدم كثير منها تقنية شبيهة بأسلوب تيوتيهواكان الأقدم، تعرف بـ*talud-tablero*، تتكون من جدار مائل تعلوه لوحة مستطيلة، فتزيد السلامة الإنشائية وتتيح إمكاناً رمزياً وزخرفياً غنياً (Smith, 1996). وكثيراً ما تضمنت هذه المنشآت مراحل بناء متعاقبة، إذ شيدت أهرام جديدة فوق القديمة، للدلالة على استمرارية الأسر الحاكمة وتجدد الكون.



(a) المايا: تيكال–بالينكي (b) الأزتك: تينوتشتيتلان

شكل 3.2: أهرام المايا والأزتك

احتلت الاعتبارات البيئية موقعاً محورياً في تصميم مدن أمريكا الوسطى. فقد طور المايا والأزتك أنظمة متقدمة للصرف وإدارة مياه المطر. وفي مدن مثل تينوتشتيتلان، المبنية فوق قيعان البحيرات، أنشأ المهندسون جزراً اصطناعية (تشينامبا) وطرقاً مرتفعة وسدوداً تتخللها قنوات حجرية. وفي الأراضي المنخفضة للمايا، ساعدت القنوات المبطنة بالحجر والخزانات الجوفية (*تشولتون*) وقنوات تصريف الجريان على صمود المدن رغم موسمية المطر الشديدة (Sharer **and** Traxler, 2006).

وهكذا تجسد أهرام أمريكا الوسطى تكامل الميكانيكا الإنشائية وهندسة المواد والهيدرولوجيا والفلك، قبل أن تصاغ نظرية علمية رسمية بزمن طويل. وتشهد هذه الإنجازات على تقليد تجريبي في البناء استجاب لسياقه وكان طموحاً في تصوره.

3.1.3 مصر؛ نحو 2700–1000 قبل الميلاد

مولد العمارة الحجرية الضخمة يبدأ التراث المعماري المصري بإمحوتب، وزير الفرعون زوسر في الأسرة الثالثة (نحو 2660 قبل الميلاد)، الذي يعد على نطاق واسع أول معماري ومهندس وطبيب معروف الاسم في التاريخ المسجل (Lehner, 1997). فقد تصور وأشرف على بناء هرم سقارة المدرج، محولاً المصطبة التقليدية[1] إلى نصب حجري مدرج كان أول استعمال معروف للحجر المستخرج من المحاجر على نطاق واسع. وأدخل هذا الابتكار مبادئ أساسية في تنظيم العمال ولوجستيات البناء والتخطيط الهندسي، فوضع أساساً تقنياً ورمزياً لتصميم الأهرام اللاحقة.

وبلغ الخط المعماري الذي بدأه إمحوتب ذروته بعد ثلاثة أجيال في عهد الفرعون سنفرو (حكم نحو 2613–2589 قبل الميلاد)، الذي أمر بسلسلة أهرام تجريبية دفعت الانتقال من الأشكال المدرجة إلى السطوح الملساء. ولعله أكمل في ميدوم هرماً مدرجاً انهارت كسوته الخارجية أو تعرت لاحقاً، مع بقاء القلب، فدفع ذلك إلى تعديلات إنشائية مهمة. ويكشف هرمه المنحني في دهشور تغييراً في الميل أثناء البناء لتخفيف خطر الفشل، ثم أعقبه الهرم الأحمر الناجح، أول هرم مصري حقيقي أملس الجوانب.

[1] المصطبة قبر مستطيل مسطح السقف ذو جوانب مائلة إلى الداخل، استخدم في طقوس الدفن المصرية المبكرة. وكانت تبنى عادة من اللبن أو الحجر، فسبقت شكل الهرم، وتضمنت حجرات دفن تحت الأرض ومصليات للقرابين فوقها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأتاحت هذه التحسينات في الهندسة وطرائق البناء لابنه وخليفته خوفو أن يحقق هرم الجيزة الأكبر بدقة وحجم وطموح إنشائي لا نظير لها. وقد تحقق سطحه الأملس الأصلي بأحجار كسوة من حجر طرة الجيري المشذب بعناية، ضاع أكثرها لاحقاً بالتعرية أو إعادة الاستخدام. ولا تنحرف قاعدة الهرم أكثر من 20 مم عبر امتداد 230 متراً، وتحاذي جوانبه الشمال الحقيقي ضمن جزء من الدرجة، وهما إنجازان مدهشان في الضبط الهندسي بأدوات ذلك العصر. ويتألف البناء المنجز نحو 2560 قبل الميلاد من قرابة 2.3 مليون كتلة حجر جيري، يزن كل منها عدة أطنان (Lehner, 1997).

تقترح نظريات حديثة أن الكتل نقلت على زلاجات فوق رمل مبلل، مما يخفض الاحتكاك حتى 50%، وباستخدام منظومات منحدرات مستقيمة أو متعرجة أو حلزونية، وإن بقيت الطريقة الدقيقة موضع نقاش. وتحسن الجوانب المائلة والقاعدة المضبوطة توزيع الوزن، فتخفض القص وتتيح استقراراً طويل الأمد تحت كتلة هائلة. وترسم هذه التطورات مجتمعة تطوراً مترابطاً في التفكير الإنشائي المصري من بدايات تجريبية إلى إتقان تذكاري.



(a) معبد الكرنك في الأقصر (نحو 2000–300 قبل الميلاد) (b) هرم سقارة المدرج (نحو 2667–2648 قبل الميلاد) (c) هرم الجيزة الأكبر، خوفو/خيوبس (نحو 2580–2560 قبل الميلاد)

شكل 3.3: المعابد والأهرام المصرية

المعابد والمواد والبنية التحتية تظهر المعابد المصرية، مثل مجمع الكرنك في الشكل 3.3a، إتقاناً للبناء بالعمود والعتب بعناصر حجرية ضخمة. وتبين القاعات ذات الأعمدة الكثيفة المنحوتة من الحجر الرملي والغرانيت تحكماً متقدماً في قوى الضغط وحدود بحور السقف (Arnold, 2003). ولم تخدم هذه الفراغات أغراضاً شعائرية فقط، بل عرضت غابة رمزية من الحجر تعزز السلطة الدينية والسياسية.

كانت خبرة المواد محورية في الهندسة المصرية. فقد استخرج الحجر الجيري والرملي والغرانيت وشكل ونقل مسافات بعيدة بالزلاجات والصنادل والمنحدرات. ويشهد نصب المسلات، وهي كتل مفردة تجاوز وزنها كثيراً 300 طن، على فهم المصريين للميزة الميكانيكية وضبط الأحمال، ولا سيما في الرفع والوضع.

وأدت الهندسة الهيدروليكية دوراً حيوياً في استمرار المجتمع المصري. فقد أدير فيضان النيل السنوي بشبكات من القنوات وأحواض الاحتجاز والسدود، مما دعم اقتصاداً زراعياً مستقراً. وتعكس هذه المشروعات معرفة عملية بديناميكا الموائع وتخطيطاً مبكراً واسع النطاق للبنية التحتية (Butzer, 1976).

الهندسة والسِّكد المصدران الرئيسان لمعرفتنا بالرياضيات المصرية العملية هما بردية رند *الرياضية* وبردية موسكو *الرياضية*. نسخت هاتان المخطوطتان في المملكة الوسطى وعصر الانتقال الثاني، وتسجلان مسائل في الحساب والهندسة وتحويل الوحدات وقياس العمارة. ويلخص الجدول 3.1 تاريخ كل وثيقة وسياقها الأسري ومستودعها الحالي، وفق دراستي Robins **and** Shute, 1987 و2019 Gillings,. وتكشفان معاً الطرائق التجريبية التي قامت عليها الأهرام ومسح الأراضي وحساب الحجوم في المملكة المصرية الوسطى.

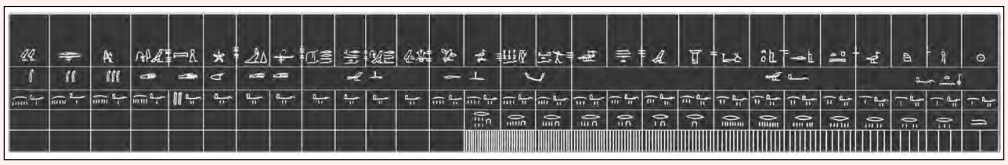
يرجح أن نسخة رند تحفظ مسائل جمعت أول مرة قبلها بقرنين في المملكة الوسطى.

طور المصريون نظام قياس يقوم على *الذراع*، وهي وحدة طول قديمة تعرف بالمسافة من المرفق إلى طرف الإصبع الوسطى. وتفاوتت قيمتها بين الثقافات، عادة بين 44 و52 سم، أي نحو 17 إلى 20 بوصة. وكان "الذراع الملكي" المصري نحو 52.4 سم، واستخدم على نطاق واسع في العمارة والبناء والمسح. وقسم الذراع إلى سبع قبضات، وكل قبضة إلى أربعة أصابع، فيكون المجموع 28 وحدة في الذراع (الشكل 3.4a). وبالمقارنة، كان الذراع العبري القياسي نحو 45 سم، بينما يقدر الذراع في بلاد الرافدين بنحو 49 إلى 50 سم.

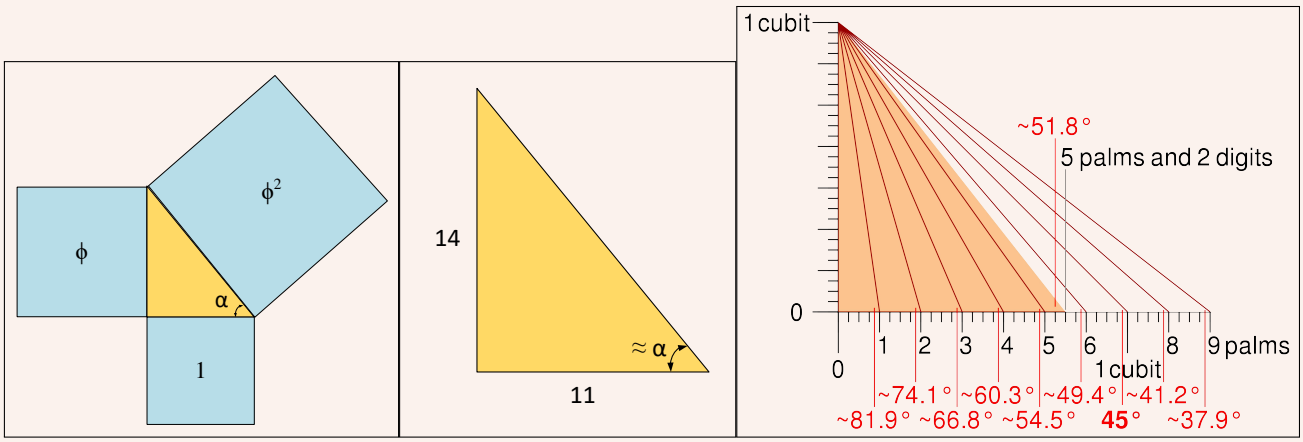
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 3.1: البيانات الأساسية للبرديتين الرياضيتين المصريتين الرئيسيتين

المستودع الحالي	الأسرة/العصر	التاريخ المرجح للمحتوى الأصلي	تاريخ النسخة الباقية	البردية
المتحف البريطاني، EA 10058–10057	أواخر الأسرة 15 أوائل 13– الانتقال (عصر الثاني)	مادة من المملكة الوسطى، نحو 1850–1800 قبل الميلاد[2]	نحو 1650 قبل الميلاد (الكاتب أحمس)	بردية رايند الرياضية (RMP)
متحف بوشكين الحكومي، رقم 4676	الأسرة الثانية عشرة، المملكة الوسطى	معاصرة تقريباً للنسخة	نحو 1850 قبل الميلاد	بردية موسكو الرياضية (MMP)



(a) الذراع الملكي المصري (رابط)



(b) تعريف السِّكد (رابط)

(c) المثلث 14:11 المستخدم في الأهرام

(d) تقريب مثلث كبلر

شكل 3.4: الهندسة المصرية ونسب الأهرام

كان *السِّكد* طريقة المصريين في التعبير عن ميل وجه الهرم. وهو يقيس الامتداد الأفقي لكل ارتفاع رأسي قدره ذراع واحد. ولأن الذراع سبع قبضات، عبر عن السِّكد بعدد القبضات والأصابع من الامتداد لكل ذراع من الارتفاع. فإذا كانت زاوية ارتفاع الهرم ϕ، عُرّف السِّكد رياضياً كما يأتي:

$$s = 7 \cot \phi$$

ويمكن تفسير السِّكد تقريباً نسبياً لدالة ظل التمام، أي الامتداد لكل وحدة ارتفاع، بما يوازي التفكير المثلثي الحديث. ومع أنه لا دليل على أن المصريين تصوروا الزوايا أو الدوال المثلثية بالمعنى اليوناني، فإن السِّكد يجسد علاقة هندسية شبيهة بظل التمام.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولم يتطور علم المثلثات الرسمي تخصصاً رياضياً إلا في القرن الثاني قبل الميلاد على يد الفلكي والرياضي اليوناني هيبارخوس، الذي ينسب إليه غالباً تأسيسه.

سجل سِكد هرم الجيزة الأكبر بقيمة 5.5، أي خمس قبضات وإصبعين، مما يعطي:

$$\phi = \cot^{-1}\left(\frac{5.5}{7}\right) \approx 51.84^\circ$$

وهذا يقابل نسبة ارتفاع إلى امتداد قدرها 14:11، كما في الشكل 3.4c، ويتفق مع الهندسة المعاد بناؤها للهرم (Bartlett, 2014).

وتكهن بعضهم بأن نسب الهرم قصد بها تمثيل *النسبة الذهبية* بهندسة مثلث كبلر (الشكل 3.4d). وفي هذه الحالة تكون العلاقة:

$$\frac{14}{11} = 1.2727\ldots \quad \text{مقابل} \quad \sqrt{\phi} = 1.2720\ldots \tag{3.1}$$

والفرق النسبي أقل من 0.06%، لكن Markowsky, 1992 يحذر من أن ظهور ثابت رياضي في أبعاد مادية لا يعني بالضرورة قصداً تصميمياً، ولا سيما في غياب إطار مفاهيمي مصري واضح للأعداد غير النسبية.

3.1.4 مقارنة بلاد الرافدين وأمريكا الوسطى ومصر

المعابد على الرغم من التشابه البصري، نشأت المنشآت الضخمة في بلاد الرافدين ومصر وأمريكا الوسطى، أي الزقورات والأهرام وأهرام المعابد، ضمن أطر ثقافية وإنشائية ووظيفية مختلفة، كما في الجدول 3.2.

كانت **زقورات بلاد الرافدين**، مثل زقورة أور الكبرى، منصات كتلية مدرجة شيدت أساساً من اللبن المجفف بالشمس والمحروق في الأفران، واستخدم القار لعزلها من الماء. وكانت كتلاً مصمتة تحمل معابد مرتفعة ترمز إلى الصعود المادي نحو عالم الآلهة. ولم تكن الزقورة فضاء عاماً، بل حَرَماً مقدساً لا يدخله إلا الكهنة. وإنشائياً، اعتمدت على الكتلة الحاملة والتناقص التدريجي للحد من إجهادات الضغط وزيادة المتانة تحت أحمال الجاذبية.

أما **الأهرام المصرية**، وفي مقدمتها هرم الجيزة الأكبر، فكانت قبوراً ضخمة صممت لحفظ جسد الفرعون وتيسير رحلته إلى الحياة الأخرى. وشيدت أساساً من الحجر الجيري والغرانيت بدقة هندسية فائقة وممرات وحجرات داخلية. وكان التركيز إلى الداخل: الوظيفة الجنائزية وحماية التابوت والمحاذاة الكونية مع دورات الشمس والنجوم. ولم تدخل هذه الأهرام أو تستخدم شعائرياً بعد اكتمالها. وتميزت هندستها بدقة البناء الحجري وتصريف الأحمال عبر المستويات المائلة والإدارة المتينة للفراغات الداخلية.

وجمعت **أهرام المعابد في أمريكا الوسطى**، مثل أهرام تشيتشن إيتزا وتينوتشتيتلان، وظائف شعائرية وفلكية وسياسية. وكثيراً ما بنيت على مراحل بإضافة طبقات جديدة فوق قلوب أقدم. وشيدت من الحجر وملاط الجير وحشو الأنقاض، وحملت معابد على القمم للشعائر والعروض العامة ورصد السماء. وخلافاً للأهرام المصرية لم تكن قبوراً؛ وخلافاً للزقورات كانت متاحة وتفاعلية. وربطتها مصاطبها وسلالمها العريضة ومحاذاتها لدورات الشمس والزهرة بالحياة الاجتماعية والسياسية للمدينة.

وخلاصة الأمر أن التقاليد الثلاثة أنتجت أشكالاً مدرجة أو هرمية لأسباب مختلفة:

– رفعت *الزقورة* الإلهي.

– احتوى *الهرم المصري* الموتى.

– أقام هرم *المعبد في أمريكا الوسطى* مسرحاً للأحياء.

وتعكس هذه المنشآت رؤية كل حضارة للعالم وقدرتها التقنية وبيئتها المادية.

أنظمة القياس والمعرفة الهندسية قبل تحليل المنطق الإنشائي للآثار الكلاسيكية اللاحقة، من المفيد مقارنة كيفية قياس ثلاث حضارات مبكرة كبرى، المصرية وبلاد الرافدين وأمريكا الوسطى، للحيز وتقنينها الهندسة. يبرز الجدول 3.3 الوحدات الأساسية وتقسيمها والأفكار الهندسية الموجهة للبناء والسجلات أو الثوابت الرياضية الباقية. وعلى الرغم من اختلافات الترميز والغاية، حول كل تقليد الملاحظة التجريبية إلى قواعد معمارية متينة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 3.2: مقارنة العمارة الضخمة بين الحضارات

السمة	الزقورة (بلاد الرافدين)	الهرم (مصر)	هرم المعبد (أمريكا الوسطى)
المادة الرئيسة	اللبن والقار	الحجر الجيري والغرانيت	الحجر وملاط الجير وقلب الأنقاض
الوظيفة	قاعدة معبد للآلهة	قبر ملكي	منصة شعائرية وسياسية وفلكية
الداخل	كتلة مصمتة بلا حجرات	ممرات وحجرات دفن داخلية	قد يتضمن غرفاً وقلوباً أعيد بناؤها
الدخول	مقصور على الكهنة	لا دخول بعد الدفن	شعائر عامة ودخول إلى معبد القمة
التصور الكوني	صلة بين السماء والأرض	محاذاة بالنجوم والشمس ورحلة إلى الآخرة	دورات التقويم والانقلابان وتتبع الزهرة
المنطق الإنشائي	كتلة مدرجة لأحمال الجاذبية	مستوى مائل وتدرج كابولي فوق الفراغات	مصاطب مدرجة ومنصات عريضة لضبط التعرية
الرمزية	محور العالم ومسكن الآلهة	سلطة الفرعون الأبدية	مسرح للملكية المقدسة والنظام الكوني

جدول 3.3: ممارسات القياس والتركيز الهندسي في ثلاث ثقافات قديمة

الحضارة	الوحدة الرئيسة	التقسيم/النظام العددي	التركيز الهندسي
المصرية	الذراع (من المرفق إلى طرف الإصبع)	الذراع 7 قبضات و28 إصبعاً	السِّكد (امتداد لكل ذراع ارتفاع)؛ زوايا الأهرام
بلاد الرافدين	قياس شبيه بالذراع (متفاوت إقليمياً)	نحو 30 إصبعاً في الذراع؛ كسور ستينية أساسها 60	تقريبات المساحة والحجم؛ قوائم المثلثات القائمة (بلمبتون 322)
أمريكا الوسطى	تلاكشيتل (شبر اليد)؛ تون المايا (سنة 360 يوماً)	الأيدي والأصابع؛ أعداد عشرينية أساسها 20	تناظر الأهرام المدرجة؛ المحاذاة السماوية

الحضارة	السجلات الرياضية	الثوابت أو النسب المعروفة	
المصرية	برديتا رايند وموسكو الرياضيتان	السِّكد (ظل التمام)؛ تقريبات $\sqrt{2}$ وπ	
بلاد الرافدين	الألواح المسمارية (بلمبتون 322 وYBC 7289)	ثلاثيات فيثاغورس؛ $\sqrt{2}$؛ الكسور الستينية	
أمريكا الوسطى	نسب تقويمية وفلك رصدي	دورات الشمس والزهرة؛ نسب تناظر دورية	

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 3.4: خط زمني مقارن للابتكارات الإنشائية الأساسية بين الحضارات

الابتكار	الحضارة	التاريخ التقريبي	مثال/ملاحظات
ابتكارات المواد			
الطوب المحروق	بلاد الرافدين	نحو 3500 قبل الميلاد	منشآت عصر أوروك
البناء الحجري واسع النطاق	مصر	نحو 2660 قبل الميلاد	هرم زوسر المدرج
الخرسانة الهيدروليكية	روما	نحو 300 قبل الميلاد	Opus caementicium بالبوزولانا
الحديد الزهر	الصين	نحو القرن الرابع قبل الميلاد	أدوات زراعية ثم استعمالات إنشائية
حديد مطاوع بنقاوة 99%	الهند	نحو 400 ميلادية	عمود دلهي الحديدي
الأنظمة الإنشائية			
القوس الكابولي المتدرج	بلاد الرافدين	نحو 4000 قبل الميلاد	مصارف جوفية وقبور
القوس الحقيقي من الصنجات	الأتروسكيون/الرومان	نحو 700–500 قبل الميلاد	أتقنه الرومان
بناء القباب	روما	نحو 126 ميلادية	البانثيون (خرسانة غير مسلحة)
أنظمة الحوامل (دوغونغ)	الصين	نحو 500 قبل الميلاد	أخشاب مقاومة للزلازل
وصلات مرنة (كاناوا–تسوغي)	اليابان	نحو 600 ميلادية	معبد هوريو-جي
المنجزات الهندسية			
أنظمة الري	بلاد الرافدين	نحو 3000 قبل الميلاد	شبكات قنوات
بناء الأهرام	مصر	نحو 2560 قبل الميلاد	هرم الجيزة الأكبر
ري دوجيانغيان	الصين	256 قبل الميلاد	ما زال يعمل اليوم
الطرق الرومانية	روما	نحو 312 قبل الميلاد	طريق أبيا
السور العظيم (تربة مدكوكة)	الصين	نحو 220 قبل الميلاد	توحيد أسرة تشين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3.2 العصور الكلاسيكية: الهندسة والنظرية والإمبراطورية

3.2.1 فارس: المنصات الإمبراطورية والجسور والقنوات الجوفية

تحتل فارس موقعاً فريداً في تاريخ الهندسة الإنشائية، إذ كانت وارثة ومبتكرة في آن واحد. فمع أنها ورثت تقاليد البناء في بلاد الرافدين، تقدم مهندسوها عليها كثيراً وأنشؤوا ابتكارات أثرت لاحقاً في الممارسات الهندسية اليونانية والرومانية. وأطلقت الحروب اليونانية–الفارسية (499–449 قبل الميلاد) تبادلات ثقافية كثيفة امتدت بفتوحات الإسكندر والعصر الهلنستي اللاحق، فأنشأت تدفقاً متبادلاً للمعرفة التقنية أغنى التقليدين.

أدرجت فارس ضمن *العصور الكلاسيكية* لأن الإمبراطورية الأخمينية (نحو 550–330 قبل الميلاد) ازدهرت مع اليونان الكلاسيكية وسبقت روما الإمبراطورية مباشرة. وقد ورث مهندسوها تقاليد اللبن في بلاد الرافدين، لكنهم تجاوزوها تقنياً وفنياً فأنشؤوا مجمعات قصور ضخمة ذات أعمدة حجرية مثل برسبوليس، وجسوراً متقدمة، وأنظمة واسعة لإدارة المياه. وقد نافست هذه الابتكارات الفارسية الممارسات الإنشائية اليونانية والرومانية وأثرت فيها. كما ربط التفاعل الثقافي الذي بدأ بالحروب اليونانية–الفارسية واستمر في التبادل الهلنستي تقاليد الهندسة الفارسية والمتوسطية في سرد كلاسيكي مشترك، مميزاً فارس عن المسارات المعمارية المستقلة في الشرق.

العمارة الإمبراطورية الأخمينية بلغت الهندسة الفارسية ذروتها في العصر الأخميني، ويجسدها مجمع القصور الضخم في برسبوليس. فقد شيد فوق منصة حجرية هائلة أبعادها نحو 450 في 300 متر وترتفع 15 متراً فوق السهل المحيط، وضم أعمدة حجرية منحوتة بإتقان وزعت أحمال السقف الثقيلة بكفاءة على أسس متينة. واستخدمت قاعة الأبادانا وحدها اثنين وسبعين عموداً مفرداً من الحجر الجيري، ارتفاع كل منها نحو 20 متراً وله تاج مميز برأسي ثور.

وتعكس دقة البناء الحجري والتفاصيل الفنية المعقدة مزجاً مقصوداً بين الاستقرار الإنشائي والتعبير الرمزي، بما عزز عظمة السلطة الإمبراطورية. وثبتت أوتاد حديدية ومشابك مملوءة بالرصاص أسطوانات الأعمدة معاً، بينما عبرت جوائز الأرز والسرو بحوراً من 25 إلى 30 متراً لتنشئ واحداً من أوسع الأسقف الصافية في العصور القديمة، وهو إنجاز حاولت القاعات اليونانية ذات الأعمدة محاكاته لاحقاً.

وأتقن المهندسون الفرس الجسور طويلة البحر أيضاً. فقد أظهر جسر دارا العائم[3] عبر البوسفور، وجسرا أحشويرش[4] فوق الدردنيل فهماً متقدماً للطفو والتثبيت والتحميل الإيقاعي، وأتاحا عبور جيوش كاملة وخيول وقطارات حصار فوق المياه المفتوحة.

الجسور والمنشآت الهيدروليكية الساسانية (224–651 ميلادية) تطورت الهندسة الإنشائية الفارسية بعد الأخمينيين في عهد الساسانيين، كما يتضح من ممارسات بناء الجسور المتقدمة. ومن الأمثلة البارزة جسرا دزفول وشوشتر، اللذان أمرا ببنائهما نحو عام 260 ميلادية في عهد شابور الأول بعد انتصاره على الإمبراطور الروماني فاليريان.

شيد جسر دزفول فوق نهر دز بعمل نحو سبعين ألف أسير حرب روماني. أما جسر شوشتر (بند قيصر) فوق نهر كارون فعمل جسراً وسداً في الوقت نفسه. وضم كلاهما أقواساً من الطوب والحجر مصممة بعناية لنقل أحمال الجاذبية إلى الأسس بكفاءة، ودمجا عناصر هيدروليكية مثل الهدارات وقنوات المياه لتأدية وظيفتي النقل وإدارة مياه الإقليم (Huff, 2005).

---

[3] شيد ماندروكليس، وهو مهندس من جزيرة ساموس، جسر دارا العائم عبر البوسفور نحو عام 513 قبل الميلاد لتمكين جيش دارا الأول من العبور إلى أوروبا في حملته على السكوثيين. يصف هيرودوت الجسر بالتفصيل، ويسجل أن دارا أقام أعمدة تذكارية بنقوش آشورية ويونانية تسرد جميع أمم جيشه. واستخدم ماندروكليس أجره الكبير لطلب لوحة تصور عبور الجيش، أهداها إلى معبد هيرا في ساموس مع أبيات مرافقة، الشكل 3.5. ومع أن الجسر مهم تاريخياً وموثق جيداً، يبدو أنه عرف بوصفه الوظيفي لا باسم علم خاص (Herodotus, 1921).

[4] كان جسرا أحشويرش العائمان فوق الدردنيل عام 480 قبل الميلاد جسرين متوازيين بنيا أثناء الغزو الفارسي الثاني لليونان. امتدا من أبيدوس إلى قرب سيستوس مسافة نحو سبعة ملاعب، أي قرابة 1300 متر. استخدم الجسر الشمالي الشرقي 360 سفينة، من خماسية المجاديف والثلاثية، واستخدم الجنوبي الغربي 314 سفينة، ربطت كلها وغطيت بالألواح. ودمرت عاصفة المجموعة الأولى من الجسور، فاشتهر أن أحشويرش أمر بمعاقبة المضيق رمزياً بثلاثمئة جلدة وحديد محمى وقيود ألقيت في الماء، وأعدم المهندسين المسؤولين. وحملت الجسور المعاد بناؤها جيشه الهائل بنجاح في عبور استمر سبعة أيام وليالي بلا توقف. ومثل جسر دارا الأقدم، عرفت هذه الجسور بأوصافها لا بأسماء علم خاصة (Herodotus, 1921).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

87. Having viewed the Pontus, Darius sailed back to the bridge, of which Mandrocles of Samos was the chief builder; and when he had viewed the Bosporus also, he set up by it two pillars of white stone, engraving on the one in Assyrian and on the other in Greek characters the names of all the nations that were in his army; in which were all the nations subject to him. The full tale of these, over and above the fleet, was seven hundred thousand men, reckoning therewith horsemen, and the number of ships that mustered was six hundred. These pillars were afterwards carried by the Byzantines into their city and there used to build the altar of Orthosian [1]

[1] A deity worshipped especially at Sparta; the meaning of the epithet is uncertain.

Artemis, save for one column covered with Assyrian writing that was left beside the temple of Dionysus at Byzantium. Now if my reckoning be true, the place where king Darius bridged the Bosporus was midway between Byzantium and the temple at the entrance of the sea.

88. After this, Darius, being well content with his bridge of boats, made to Mandrocles the Samian a gift of ten of every kind;[1] wherefrom Mandrocles took the firstfruits and therewith had a picture made showing the whole bridge of the Bosporus, and Darius sitting aloft on his throne and his army crossing; this he set up in the temple of Here, with this inscription:

"This Picture Mandrocles to Here gives,
Whereby for ever his Achievement lives;
A Bridge of Boats o'er *Bosp'rus'* fishful Flood
He built; Darius saw, and judg'd it good;
Thus for himself won Mandrocles a Crown,
And for his isle of *Samos* high Renown."

34. Beginning then from Abydos they whose business it was made bridges across to that headland, the Phoenicians one of flaxen cables, and the Egyptians the second, which was of papyrus. From Abydos to the opposite shore it is a distance of seven furlongs.[2] But no sooner had the strait been bridged than a great storm swept down and brake and scattered all that work.

35. When Xerxes heard of that, he was very angry, and gave command that the Hellespont be scourged with three hundred lashes, and a pair of

[2] The modern width at the narrowest part is nearly half as much again; perhaps this can be explained by the washing away of the coasts, due to a current which strikes them near Sestos and rebounds on Abydos.

fetters be thrown into the sea; nay, I have heard ere now that he sent branders with the rest to brand the Hellespont. This is certain, that he charged them while they scourged to utter words outlandish and presumptuous: "Thou bitter water," they should say, "our master thus punishes thee, because thou didst him wrong albeit he had done thee none. Yea, Xerxes the king will pass over thee, whether thou wilt or no; it is but just that no man offers thee sacrifice, for thou art a turbid and a briny river." Thus he commanded that the sea should be punished, and that they who had been overseers of the bridging of the Hellespont should be beheaded.

شكل 3.5: هيرودوت وعبور الفرس مضيق البوسفور (Herodotus, 1921)

وأظهرت هذه الجسور فهماً متقدماً للقوى الهيدروليكية، إذ تضمنت هدارات تحويل مدرجة من البناء الحجري وسدوداً حجرية مبكرة طبقت مبادئ الحماية من النحر وضبط الجريان، وهي مبادئ أثرت لاحقاً في الهندسة الهيدروليكية الإسلامية والأوروبية.

القنوات الجوفية: هيدروليكا تحت الأرض وابتكار إنشائي (من الألف الأول قبل الميلاد) يتجسد إتقان فارس للهندسة الهيدروليكية في نظام *القنوات الجوفية*، وهي شبكة ري متقدمة تحت الأرض تنقل المياه الجوفية مسافات طويلة لدعم الزراعة في البيئات القاحلة، الشكل 3.6a. وقد تطلب تصميمها حساباً دقيقاً للميل والتدرج الهيدروليكي وديناميكا المياه الجوفية، دالاً على فهم تجريبي متقدم لجريان الموائع.

ولم تقل الابتكارات الإنشائية اللازمة لحفرها أهمية:

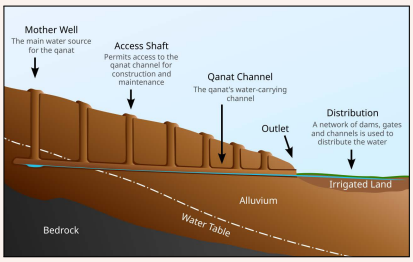
- **آبار وصول رأسية:** موزعة بانتظام ومبطنة بالحجر أو الطوب المحروق لمنع الانهيار.
- **ممرات مقببة:** أنفاق ذات أقبية أسطوانية من الطوب أو الحجر لتثبيت الحفر في التربة غير المستقرة.
- **مواد متقدمة:** اختيار دقيق للطوب المحروق وملاط الجير والبناء الحجري لزيادة مقاومة الإجهادات الجيولوجية والزلزالية.

امتدت شبكات القنوات الجوفية في أنحاء الإمبراطورية على هيئة ممرات تحت الأرض مائلة ميلاً لطيفاً وطولها كيلومترات وتهويها آبار رأسية. وتطلبت مسحاً جيوتقنياً دقيقاً وضبطاً للمياه الجوفية وتخطيطاً طويل الأمد للصيانة. وما زال كثير منها مستخدماً اليوم، وهو من أدوم الإنجازات الهيدروليكية البشرية (Wulff, 1968).

3.2.2 الإسهامات العربية–الإسلامية: ابتكارات في الهندسة الإنشائية

منذ القرن السابع، طور المهندسون العرب والمسلمون ابتكارات إنشائية منهجية أثرت بعمق في الممارسة المعمارية العالمية. وشملت إسهاماتهم تنقيح أشكال الأقواس وتطوير بناء القباب ووضع أسس رياضية متقدمة وإرساء مبادئ تخطيط على مستوى المدن.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) قناة جوفية



(b) برسبوليس

شكل 3.6: فارس

تنقيح الأقواس والأقبية معمارياً طور المهندسون العرب والمسلمون ذخيرة واسعة من أشكال الأقواس، منها حدوة الفرس والمدبب ومتعدد الفصوص. وكان القوس المدبب خاصة تقدماً إنشائياً مهماً على القوس الروماني نصف الدائري، إذ خفض الدفع الجانبي وأتاح جدراناً أخف وأعلى. وأصبح هذا الابتكار لاحقاً حاسماً في العمارة القوطية (الفصل 4).

ولم يوفر الاستخدام الواسع للأقواس في المساجد والمدارس والقصور مزايا إنشائية فحسب، بل أتاح أيضاً فراغات داخلية مفتوحة ومضيئة أصبحت من سمات العمارة الإسلامية. كما ظهرت أنظمة قبو مثل المقرنصات، وهي خلايا هندسية ثلاثية الأبعاد شبيهة بقرص العسل، لتؤدي وظيفة زخرفية وتوزيعية إنشائية في القباب والإيوانات.

الابتكار الإنشائي في بناء القباب أتقن المهندسون المسلمون بناء القباب بتقنيات إنشائية مبتكرة. فقد سمح استخدام المثلثات الكروية والحنيات الركنية بحمل القباب الدائرية على قواعد مربعة أو مستطيلة، وحل تحدياً هندسياً وإنشائياً أساسياً. وأظهرت قبة الصخرة (691 ميلادية)، ثم قباب إسطنبول الكبرى، فهماً متقدماً لحلقات الضغط وتوزيع الدفع الجانبي ودمج أنظمة إنشائية متعددة.

وتعالج فارس ضمن *العصور الكلاسيكية* لأن الإمبراطورية الأخمينية (نحو 550–330 قبل الميلاد) تزامنت مع اليونان الكلاسيكية وسبقت روما الإمبراطورية مباشرة. ومع أن البنائين الفرس ورثوا تقاليد اللبن في بلاد الرافدين، فقد أتقنوا سريعاً البناء واسع النطاق بالحجر المشذب والخشب. ففي قاعة الأبادانا في برسبوليس مثلاً، ارتفع اثنان وسبعون عموداً مفرداً من الحجر الجيري فوق مصطبة حجرية، وكان ارتفاع كل منها نحو 20 متراً وله تاج برأسي ثور. وربطت الأوتاد الحديدية والمشابك المصبوبة بالرصاص أسطوانات الأعمدة، بينما عبرت جوائز الأرز والسرو بحوراً من 25 إلى 30 متراً لتكوّن واحداً من أوسع الأسقف الصافية في العصور القديمة، وهو إنجاز حاولت القاعات اليونانية ذات الأعمدة محاكاته لاحقاً (Curatola **and** Scarcia, 2003).

وأتقن المهندسون الفرس الجسور طويلة البحر أيضاً: فقد أظهر جسر دارا العائم فوق البوسفور، وجسر أحشويرش الأشهر فوق الدردنيل، فهماً متقدماً للطفو والتثبيت والتحميل الإيقاعي، وأتاحا عبور جيوش كاملة وخيول وقطارات حصار فوق المياه المفتوحة.

وتقدمت كذلك شبكات *القنوات الجوفية* في أنحاء الإمبراطورية، وهي ممرات مائلة ميلاً لطيفاً تحت الأرض، طولها كيلومترات وتهويها آبار رأسية، تطلبت مسحاً جيوتقنياً دقيقاً وضبطاً للمياه الجوفية وتخطيطاً طويل الأمد للصيانة؛ وما زال كثير منها مستخدماً اليوم (Behnia, 2021). وتوضح الأعمال الهيدروليكية، مثل هدارات التحويل الحجرية المدرجة في باسارغاد والسدود الحجرية المبكرة على نهر كارون، تحكم الفرس في الأحمال الهيدروديناميكية والحماية من النحر.

ولم تنافس ابتكارات الأعمدة والجوائز والجسور والقنوات الجوفية الممارسة الإنشائية اليونانية المعاصرة ثم الرومانية فحسب، بل أثرت فيها مباشرة. وقد نسج الاتصال الثقافي الكثيف في الحروب اليونانية–الفارسية، ثم قرون التبادل الهلنستي، الإنجازات الفارسية في التراث الهندسي الكلاسيكي الأوسع، وميزها عن المسارات المعمارية المستقلة الناشئة شرقاً في الهند والصين واليابان.

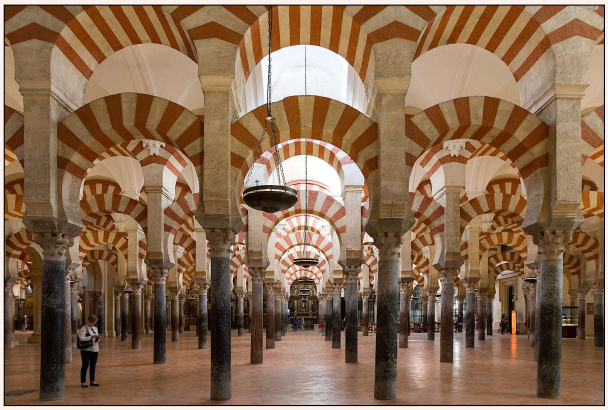
استراتيجيات المواد والوحدات النمطية: مسجد قرطبة الكبير يجسد مسجد *قرطبة الكبير*، الذي بدأ بناؤه عام 784 ميلادية، الشكل 3.7a، براعة إنشائية في نظام الأقواس الثنائي الطبقات الثوري. فقد حلت هذه الأقواس المكدسة المحمولة على أعمدة نحيفة مشكلة قصر الأعمدة، وأنشأت في الوقت نفسه لغة معمارية مميزة. ولم يعزز تناوب الصنجات الحجرية والطوبية المتانة الإنشائية والجساءة الجانبية فقط، بل أدخل أيضاً جمالاً نمطياً وإيقاعاً بنائياً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

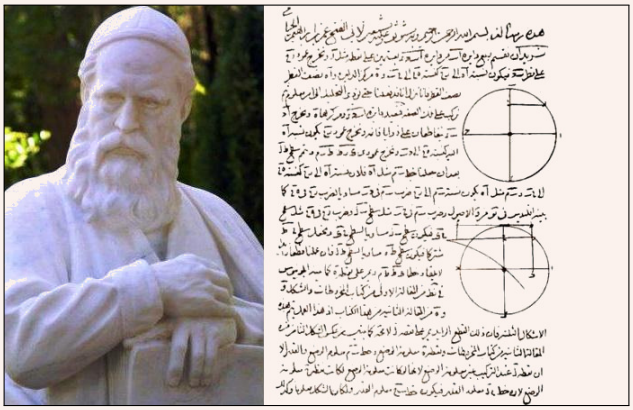
وزادت هذه الاستراتيجية مرونة الفراغ مع حفظ السلامة الإنشائية في قاعات الصلاة الواسعة، وأتاحت التوسعة بسهولة؛ فقد وسع المسجد مرات مع بقاء منطقه الإنشائي (Fletcher, 2004).

الرياضيات أساساً للممارسة الإنشائية قامت الإسهامات الإسلامية في الهندسة الإنشائية على تطورات رياضية رائدة. فقد صاغ علماء مثل الخوارزمي في القرن التاسع طرائق الجبر صياغة رسمية، فأمكن التعامل الرمزي مع العلاقات الإنشائية وإجراء حسابات معمارية دقيقة. كما أثرت مناهج عمر الخيام الهندسية للمعادلات التكعيبية في القرن الحادي عشر، الشكل 3.7b، في تخطيط الفراغ وحساب هندسة الأقبية.

دعمت هذه التطورات الرياضية تقديرات أدق للإجهاد وضبط انحناء الأقبية ودقة التخطيط، وربطت الاستدلال الرياضي المجرد بالتطبيقات الهندسية العملية. كما قدم تطوير الرياضيين المسلمين لعلم المثلثات أدوات أساسية لحساب مقاطع الأقواس وهندسة القباب والقوى الإنشائية (Hogendijk, 1994).



(a) قرطبة



(b) عمر الخيام

شكل 3.7: العالم العربي–الإسلامي

التخطيط الإنشائي على مستوى المدن أسهم المهندسون المسلمون، متجاوزين الآثار المنفردة، في التنظيم الإنشائي للمدن. فاتسمت مدن مثل *بغداد* و*أصفهان* بتخطيط محوري وبوابات ضخمة وأسواق وأحياء سكنية منظمة منهجياً. ولا تعكس مسارات الأحمال في الأروقة وشبكات الأعمدة النمطية وأنظمة توزيع المياه في هذه المدن تطوراً معمارياً فقط، بل فهماً تجريبياً للأحمال الموزعة والاستقرار الجانبي وكفاءة المواد (Hill, 2019).

وأدى دمج الأنظمة الإنشائية والبنية التحتية الحضرية، بما فيها الأسواق المسقوفة والمجمعات السكنية والحمامات العامة، إلى جعل المهندسين المسلمين رواداً في التصميم البيئي الشامل.

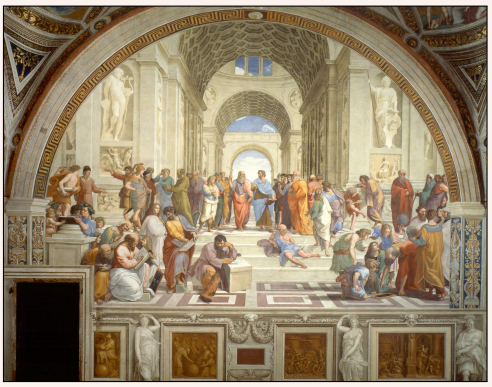
3.2.3 الإسهامات اليونانية في الاستاتيكا والميكانيكا الإنشائية

العقلنة اليونانية للآلات البسيطة قدم اليونانيون القدماء إسهامات تأسيسية في الميكانيكا الإنشائية، ولا سيما بتحليل الآلات البسيطة تحليلاً عقلانياً. ومع أن حضارات أقدم استخدمت الرافعات والبكرات والمستويات المائلة قروناً، كان اليونانيون أول من قدم أطر نظرية لفهم سلوكها.

وتبرز *الرافعة* بين هذه الأجهزة بوصفها أبسط آلة. ومع أن أهل بلاد الرافدين والمصريين استخدموها في البناء، كان اليونانيون أول من طور نظرية منهجية تفسر مبادئها الميكانيكية.

المدرسة المشائية وأرخيتاس الطرنتيني تظهر أقدم مناقشة نظرية للرافعة في الرسالة المشائية *المسائل الميكانيكية*، المنسوبة إلى مدرسة أرسطو.

ومع أن الرسالة عدت قديماً عملاً أصيلاً لأرسطو، ينظر إليها اليوم بوصفها مجموعة من التأملات الميكانيكية المبكرة، يرجح أنها



(a) مدرسة أثينا (رافائيل)



(b) البارثينون

شكل 3.8: اليونان

تأثرت بمفكرين مثل *أرخيتاس الطرنتيني* (نحو 428–350 قبل الميلاد). وكان أرخيتاس فيلسوفاً فيثاغورياً ورياضياً ورجل دولة من مدينة تارنتوم اليونانية، أي تارانتو اليوم في جنوب إيطاليا. وينسب إليه كثيراً أنه من مؤسسي *الميكانيكا الرياضية*، إذ كان من أوائل من طبق الاستدلال الكمي والهندسي على مسائل فيزيائية. وفي المسألة الثالثة من الرسالة، يقدم البرهان المنسوب إليه مفهوم موازنة أذرع العزم ويستند إلى صورة أولية من استدلال الطاقة، مقترحاً أن القوى الصغيرة تستطيع تحريك أوزان كبيرة إذا طبقت على مسافات أكبر من نقطة الارتكاز، مستبقاً المفهوم الحديث للميزة الميكانيكية.

> لماذا تستطيع القوى الصغيرة تحريك أوزان كبيرة بواسطة رافعة، كما ذكر في مستهل الرسالة، مع أن وزن الرافعة نفسها يضاف بطبيعة الحال؟
>
> ... لما كان نصف القطر الأكبر من المركز يتحرك بسرعة أكبر تحت دفع الوزن نفسه، وكانت للرافعة ثلاثة عناصر، نقطة الارتكاز، أي الحبل أو المركز، والوزنان، أحدهما المسبب للحركة والآخر المتحرك؛ فإن نسبة الوزن المتحرك إلى الوزن المحرك هي معكوس نسبة المسافتين من المركز. وكلما زادت المسافة عن نقطة الارتكاز سهلت الحركة.
>
> Peripatetic School, circa 4th century BCE, No. 3

يستبق هذا الاستدلال الحركي، القائم على حاصل ضرب القوة في المسافة، مفهومي العزم الحديث وحفظ الشغل والطاقة، ولعله يقدم تعليلاً لقانون الرافعة أسهل حدساً من صياغة أرخميدس الهندسية اللاحقة.

أرخميدس وأسس الاستاتيكا صاغ أرخميدس (نحو 287–212 قبل الميلاد) قانون الرافعة في رسالته في *توازن المستويات* (Archimedes, -250)، وأرسى أساس الاستاتيكا الكلاسيكية. وتقدم قضيته السادسة ما يمكن عده أول معادلة في الميكانيكا:

> تتزن المقادير عند مسافات تتناسب عكسياً مع أوزانها.
>
> Archimedes, -250, Proposition 6 Book I

تعامل أرخميدس مع الميكانيكا علماً عقلياً مستقلاً قائماً على المسلمات والبرهان الرياضي، خلافاً لمنهج أرسطو الأكثر اتصالاً بالفيزياء. ومع أن معالجته كانت هندسية وخالية من مفهوم واضح للقوة (انظر الفصل 14)، فإنها أرست الأساس الرياضي للتحليل الإنشائي.

العمارة اليونانية والممارسة الإنشائية امتدت التطورات المعمارية اليونانية إلى منجزات بناء مدهشة، وفي مقدمتها الانتشار الواسع *للبناء بالعمود والعتب*، وهو نظام تحمل فيه الأعمدة الرأسية الجوائز الأفقية. وحددت هذه الطريقة، المميزة للمعابد اليونانية، منهجهم الإنشائي والجمالي في غياب بناء القوس الحقيقي.

ويقف أكروبوليس أثينا، ولا سيما البارثينون في الشكل 3.8b، أشهر تجسيد لهذا المنهج، جامعاً النسب المصقولة والحجم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التذكاري. ويجسد بناؤه تحت الإشراف الفني لفيدياس[5]، الذي أشرف على العناصر النحتية وانسجام التصميم معاً، التوليف اليوناني للهندسة والعمارة والفن. وتبين تحسينات المبنى الدقيقة، ومنها الانتفاخ الطفيف في الأعمدة وميلها الطفيف إلى الداخل، فهماً متقدماً للإدراك البصري والتحسين الإنشائي.

وطور اليونانيون كذلك أجهزة ميكانيكية كالروافع والبكرات المركبة، في ما يعكس فهماً عملياً لتوزيع القوى وميكانيكا الرفع والتعامل مع مواد البناء الثقيلة أثناء تشييد المعابد.

غياب القوس في الهندسة اليونانية على الرغم من تقدمهم في الاستاتيكا والميكانيكا العقلانية، لم يطور اليونانيون الاستخدام الإنشائي للأقواس، الذي أصبح لاحقاً سمة الهندسة الرومانية. فقد اعتمدت العمارة اليونانية اعتماداً شبه حصري على العمود والعتب، مما حد بحور الفراغات المسقوفة وحجمها. وغاب القوس، القادر على نقل الأحمال بكفاءة وعبور فتحات عريضة، إلى حد بعيد عن الذخيرة الإنشائية اليونانية. وتجاوز المهندسون الرومان هذا القيد بحسم عندما جعلوا القوس عنصراً أساسياً في العمارة الضخمة.

مدرسة أثينا (رافائيل) مع أن رافائيل رسم مدرسة *أثينا* في الفاتيكان أوائل القرن السادس عشر، فإنها تقدم رؤية نهضوية للإرث الفكري لليونان القديمة، الشكل 3.8a. وقد كلف بها ضمن حجرات البابا، وتحيي الفلسفة والعلم الكلاسيكيين بجمع مفكرين يونانيين بارزين في فضاء معماري مثالي يذكر بالمعابد اليونانية. ويرمز التكوين إلى التقاء الفكر المجرد والبحث التجريبي، وهما من الأسس التي بني عليها التحليل الإنشائي لاحقاً.

يقف أفلاطون وأرسطو في المركز، يقسمان المشهد رمزياً بين المثالية يساراً والتجريبية يميناً. ويرتب رافائيل حولهما شخصيات تمثل المنطق والهندسة والفلك والميتافيزيقا، وهي تخصصات صاغت العمارة القديمة والإطار المفاهيمي للميكانيكا والنظرية الإنشائية معاً.

الشخصيتان المركزيتان:
أفلاطون: في الوسط إلى اليسار، يشير إلى أعلى ويحمل *طيماوس*، وملامحه مستوحاة من ليوناردو دا فينشي.
أرسطو: في الوسط إلى اليمين، يشير بيده أفقياً ويحمل *الأخلاق*.
الجانب الأيسر (المثالية والفلسفة والفكر المجرد):
سقراط: منخرط في نقاش، تعرفه ملامحه المميزة وإشارته الخطابية.
فيثاغورس: يكتب في كتاب محاطاً بطلاب؛ ويرتبط بالانسجام والتصوف الرياضي.
هيراقليطس: يجلس وحيداً في المقدمة غارقاً في التفكير؛ أضيف لاحقاً واستوحي من ميكيلانجيلو.
بارمنيدس: ربما يكون الشخصية إلى جوار فيثاغورس، ويمثل الاستدلال الميتافيزيقي.
أفلوطين أو أبيقور: لعل أحدهما حاضر بوصفه فيلسوفاً من مدارس التأمل الباطني.
هيباتيا (موضع خلاف): شخصية نسائية نادرة تفسر أحياناً بأنها الفيلسوفة الأفلاطونية المحدثة.
الجانب الأيمن (التجريبية والعلم والرياضيات):
إقليدس (أو أرخميدس): يشرح مبرهنة هندسية بالفرجار؛ وملامحه مستوحاة من المعماري برامانتي.
بطليموس: يحمل كرة أرضية ممثلاً الجغرافيا والفلك.
زرادشت: يحمل كرة سماوية ممثلاً علم الكون أو التنجيم.
رافائيل (صورة ذاتية): عند أقصى الحافة اليمنى ينظر مباشرة إلى المشاهد.
ديوجين: مستلق في وسط المقدمة على الدرج ممثلاً الكلبية وازدراء المادية.
وتظل نسبة بعض الشخصيات تخمينية، ولا سيما من لم يسمهم رافائيل. وتقوم تعريفات كثيرة على قرائن الأسلوب والإيماءات والسياق التاريخي.

ومن زمن أفلاطون حتى العصور الوسطى، كان *الرباعي* مجموعة من أربعة موضوعات أو فنون، هي الحساب والهندسة والموسيقى والفلك، شكلت المرحلة المنهجية الثانية بعد العمل التمهيدي في *الثلاثي*، المؤلف من النحو والمنطق والبلاغة. وشكل الثلاثي والرباعي معاً الفنون الحرة السبعة، وكانا أساس تعليم الفنون الحرة في المجتمع الغربي إلى أن أزاحهما تدريجياً منهج *العلوم الإنسانية* وفروعه اللاحقة، ابتداء من بترارك في القرن الرابع عشر. وعدت الفنون الكلاسيكية السبعة *مهارات تفكير* تمييزاً لها من الفنون العملية، كالطب والعمارة (Wagner, 1983).

التصنيفات في الفكر اليوناني الكلاسيكي اعتاد الفلاسفة اليونانيون تنظيم الظواهر في مخططات مرتبة، باحثين عن بنية في الطبيعة والأخلاق وعلم النفس والمنطق. وعملت هذه التصنيفات سقالات استكشافية، لا تصنيفات حيوية حديثة، فأطرت

[5] يرمز إلى النسبة الذهبية (§2.1.6) غالباً بالحرف اليوناني ϕ تكريماً تقليدياً لفيدياس. ويرتبط فيدياس بتصميم البارثينون وزخرفته، حيث تعرف باحثون لاحقون إلى نسب *تقارب* النسبة الذهبية. ومع أنه لا دليل مباشراً على استعمال فيدياس هذا الثابت عن قصد، يعكس الاسم الرمزي إرثه أستاذاً للنسب المنسجمة في الفن والعمارة الكلاسيكيين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

البحث بتراكيب العناصر وتحليل الأسباب والمنطق الفئوي وأنماط النفوس والأخلاط والانفعالات. ويجمع الجدول 3.5 أمثلة ممثلة من مدارس وعصور مختلفة.

جدول 3.5: نماذج مختارة للتصنيف في الفلسفة والعلم اليونانيين الكلاسيكيين

مخططات التصنيف	المفكر/المدرسة
العناصر الأربعة (الجذور): الأرض والماء والهواء والنار.	**إمبيدوقليس**
النفس الثلاثية: العقل والروح والشهوة.	**أفلاطون**
طيماوس: المجسمات المنتظمة والعناصر؛ رباعي الوجوه (النار)، ثماني الوجوه (الهواء)، عشروني الوجوه (الماء)، المكعب (الأرض)، واثنا عشري الوجوه (الكون/الكل).	
الميتافيزيقا: المقولات العشر؛ الجوهر والكم والكيف والإضافة والمكان والزمان والوضع والملك والفعل والانفعال.	**أرسطو**
الفلسفة الطبيعية: العلل الأربع؛ المادية والصورية والفاعلة والغائية.	
العناصر: توليفات الصفات الأولية؛ النار (حار وجاف)، والهواء (حار ورطب)، والماء (بارد ورطب)، والأرض (بارد وجاف)؛ والأثير عنصراً خامساً للأفلاك السماوية.	
الأحياء: النفوس بحسب الوظيفة؛ نامية للنبات وحاسة للحيوان وعاقلة للإنسان. وتمييز الحيوانات إلى دموية/بلا دم، ولودة/بيوضة، وبرية/مائية.	
الخطابة: ثلاثة أجناس؛ المشوري والقضائي والاستعراضي.	
جدول المتقابلات العشرة: المحدود/اللامحدود، الفردي/الزوجي، الواحد/الكثير، اليمين/اليسار، الذكر/الأنثى، السكون/الحركة، المستقيم/المنحني، النور/الظلام، الخير/الشر، المربع/المستطيل (أعيد بناؤه من *ميتافيزيقا* أرسطو).	**الفيثاغوريون**
الأخلاط الأربعة: الدم والبلغم والصفراء والسوداء.	**أبقراط/جالينوس**
الأمزجة الأربعة: الدموي والبلغمي والصفراوي والسوداوي.	
المقولات الأربع: الموضوع، والمتصف، والموضوع على نحو، والموضوع بالنسبة إلى شيء.	**الرواقيون**
الانفعالات الأربعة: الشهوة والخوف واللذة والألم، وتقابلها الانفعالات العقلانية الحسنة.	
تصنيف نباتي منهجي في *تاريخ النباتات*: بحسب الهيئة (أشجار وشجيرات وتحت شجيرات وأعشاب) والموطن وأنماط النمو وطرائق التكاثر.	**ثيوفراستوس**

3.2.4 روما: الخرسانة والأقواس والبنية التحتية

قدمت الإمبراطورية الرومانية إسهامات رائدة في الميكانيكا الإنشائية والهندسة لا تزال أساسية في الممارسة الحديثة. وشملت براعتها تطوير الأقواس وتطبيقها، وتقنية خرسانة ثورية، وأنظمة هيدروليكية شاملة، إلى جانب إرث من طرائق البناء المنهجية.

إتقان الأقواس والأقبية أحدث إتقان الرومان للقوس ثورة في البناء، فأتاح منشآت أكبر وأكثر استقراراً مما كان ممكناً قبله. ويبين استخدامهم المنهجي للأقواس في الجسور والقنوات والمباني الضخمة، مثل الكولوسيوم، فهماً عملياً لانتقال الأحمال وتحسين مقاومة الضغط (Vitruvius, 1960).

ووسع الرومان مفهوم القوس الأساسي فطوروا الأقبية الأسطوانية والمتقاطعة، التي أتاحت فراغات داخلية واسعة متصلة من دون ركائز متقاربة. ويوجه القبو المتقاطع، الناتج من تقاطع قبوين أسطوانيين، الأحمال بكفاءة إلى نقاط منفصلة، مما أتاح للرومان إنشاء فراغات داخلية هائلة مثل حمامات كاراكلا.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الابتكار في الخرسانة الرومانية لعل أكثر الابتكارات الرومانية تحويلاً كان تطوير الخرسانة، *opus caementicium*. صنعت بمزج الرماد البركاني، أي البوزولانا، والجير وركام الأنقاض، وكانت لها خصائص مدهشة: تتصلب تحت الماء، وتقاوم التدهور البيئي، ويمكن صبها في أشكال معقدة.

أتاحت قابلية الخرسانة الرومانية للتكيف تجريباً معمارياً جريئاً، يجسده البانثيون، الذي تعكس قبته الخرسانية الضخمة غير المسلحة فهماً متقدماً لسلوك المواد وتوزيع الإجهادات (MacDonald, 1982). وتظل قبة البانثيون نصف الكروية، بقطر وارتفاع قدرهما 43 متراً، أكبر قبة خرسانية غير مسلحة في العالم. واستخدم بناؤها ركاماً متدرجاً، من الترافرتين الثقيل عند القاعدة إلى الخفاف الخفيف قرب التاج، في ما يدل على إدراك حدسي لمبادئ تحسين الإجهاد.

الهندسة الهيدروليكية والبنية التحتية تجسد أنظمة القنوات تميز الرومان في الهندسة الهيدروليكية، ومنها جسر بون دو غار. فقد نقلت هذه المنشآت المياه مسافات بعيدة بانحدارات محسوبة بدقة للمحافظة على جريان مستمر (Hodge, 1992). وخفض البناء متعدد الطبقات بالأقواس متطلبات المواد، وعزز الاستقرار الإنشائي والأثر البصري.

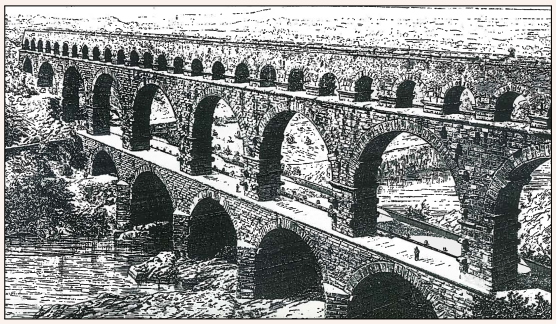
وتبين الجسور الرومانية، مثل جسر القنطرة في إسبانيا، قدرتهم على التوفيق بين الوظيفة والكفاءة الإنشائية والجاذبية الجمالية. وكثيراً ما استخدمت أقواساً قطاعية خفضت الوزن الذاتي مع حفظ القدرة الإنشائية.

البناء الحضري ومنهجية التشييد استفاد تخطيط المدن كثيراً من الابتكار الهندسي الروماني. فقد تطلبت مباني الشقق متعددة الطوابق، *insulae*، عناية بتوزيع الأحمال الحاملة والسلامة من الحريق. وأتاح الاستخدام المنهجي للخرسانة وتقنيات البناء النمطية توسعاً حضرياً سريعاً لم يسبق له مثيل. وطور المهندسون الرومان طرائق بناء معيارية، منها:

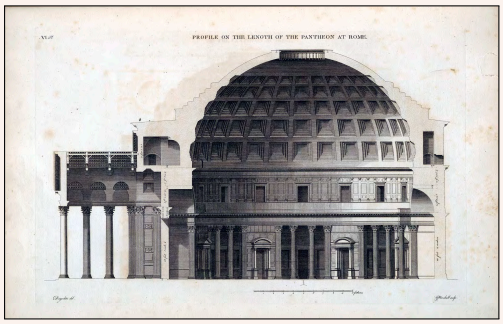
- أنظمة نمطية من الطوب والخرسانة.
- رتب أعمدة ونسب معيارية.
- مناهج منهجية لتصميم الأسس.
- تخطيط متكامل للبنية التحتية، من مجارٍ ومياه وطرق.

الإرث والقيود كانت منجزات الهندسة الرومانية عملية ومنهجية. فقد نقح الرومان بناء القوس الذي ورثوه من الأتروسكيين، لكنهم استخدموا غالباً أشكالاً نصف دائرية ولدت دفعاً جانبياً كبيراً عند القاعدة. وحفز هذا القيد لاحقاً ابتكار القوس المدبب القوطي.

ويمثل بون دو غار والبانثيون، أشهر المنشآت الرومانية، ذروة منجزاتهم الإنشائية. ويبين الكمال النسبي للبانثيون، إذ يتساوى ارتفاعه وقطره عند 43 متراً، وهندسته الكروية التي تسندها جانبياً جدران خرسانية سميكة، إتقان الرومان للتفكير الإنشائي ثلاثي الأبعاد، وهو مستوى لم يضاه حتى عصر النهضة.



(a) بون دو غار



(b) البانثيون

شكل 3.9: منشآت رومانية شهيرة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3.2.4.1 فيتروفيوس: أول منظّر إنشائي

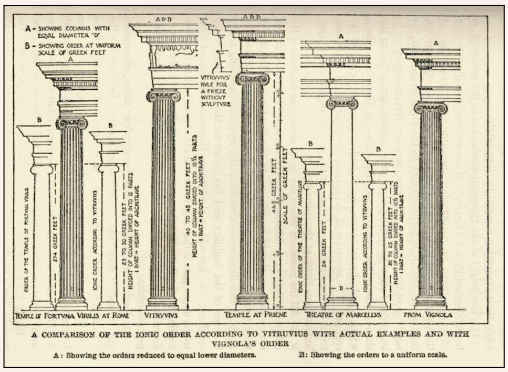
مع أن المهندسين اليونانيين والرومان وضعوا الأسس المادية للميكانيكا الإنشائية، كان فيتروفيوس أول من حاول تقنين المعرفة المعمارية والهندسية في إطار نظري مترابط (انظر §6.3.1 لمزيد من التفصيل عن كتابه). وتظل رسالته *De Architectura*، أي *الكتب العشرة في العمارة*، أقدم وثيقة باقية تعالج منهجياً الشكل والوظيفة الإنشائيين والنسب والمواد والهيدروليكا والصوتيات وتخطيط المدن.

استند فيتروفيوس إلى مصادر يونانية أقدم ضاعت اليوم، وأغنى ذلك بالممارسة الرومانية، فصاغ فلسفة تصميم تجمع الخبرة التجريبية والتأمل النظري. وبهذا تجاوز سياقه الروماني ليصبح أول شخصية في التاريخ الغربي تصوغ تصميم المباني بعبارات تستبق مبادئ الهندسة الحديثة.

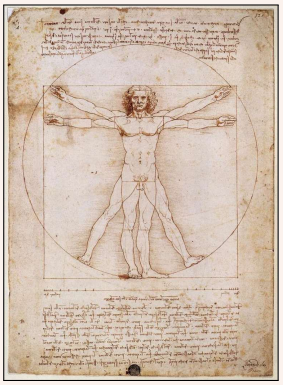
من التقليد إلى النظرية قبل فيتروفيوس، اعتمد البناؤون في بابل ومصر واليونان وروما على قواعد تقريبية وخبرة متراكمة، أي حكمة عملية تنتقل في تقاليد الحرف. ويمثل عمله انتقالاً محورياً من هذه المعرفة الضمنية إلى مبادئ منهجية قابلة للتعليم.

ثالوث فيتروفيوس أكد فيتروفيوس أن العمارة الجيدة ينبغي أن تجمع *firmitas*، أي المتانة، و*utilitas*، أي المنفعة، و*venustas*، أي الجمال. وأثر هذا الثالوث في الفكر المعماري خلال النهضة وبعدها، مثبتاً أن الأداء الإنشائي والكفاءة الوظيفية والإنجاز الجمالي جوانب لا تنفصل في التصميم الناجح.

أنظمة النسب والقواعد من أبرز سمات عمل فيتروفيوس قواعد النسب ومناهجه المنهجية في التصميم. وكانت هذه القواعد فعالة لأنها تحققت تجريبياً وقبلت التوسع، وهو منهج يسبق نظرية مقاومة المواد الحديثة، لكنه كان كافياً وظيفياً لمنشآت الحجر والخشب.



(a) الكتب العشرة في العمارة



(b) الرجل الفيتروفي (ليوناردو)

شكل 3.10: قواعد فيتروفيوس في التناسب

تنص إحدى هذه القواعد على:

> إذا زاد العرض على أربعين قدماً، فلتوضع أعمدة في الداخل قبالة الأعمدة بين الأنتات. [...] وهكذا يعوض العدد الإضافي من التخديدات نسبياً ما يفقد من جسم الساق ويمنع ظهوره، فتبدو الأعمدة بوسيلة مختلفة متساوية السماكة.
>
> Vitruvius, 1960, **page** 4.4.2

وكانت هذه القواعد فعالة لأنها تحققت تجريبياً وقبلت التوسع، وهو منهج سبق مقاومة المواد الحديثة لكنه كان كافياً وظيفياً لمنشآت الحجر والخشب (Heyman, 2003).

ألهم إحساس فيتروفيوس بالنسب تطورات لاحقة، منها:

- جهاز ليون باتيستا ألبيرتي *definitor* لنقل القياسات المصغرة ميكانيكياً.
- رسم ليوناردو دا فينشي الشهير *الرجل الفيتروفي*.
- تقنين أندريا بالاديو للرتب الكلاسيكية.
- نظام لو كوربوزييه القياسي البشري *المودولور*.

ويتطور هذا الموضوع أكثر في §15.2.3.

الأثر في عمارة عصر النهضة وجد معماريو النهضة في فيتروفيوس صلة بالمرجعية الكلاسيكية والمنهج المنظم. ومن بين من ألهمهم، يبرز بالاديو (1508–1580) (Palladio, 1570 PDF) لإخلاصه الخاص لمبادئ فيتروفيوس، إذ كيف تركيزه على التناظر والنسب والمنفعة في تصميماته، وقننها في *I Quattro Libri dell'Architettura* عام 1570. ورددت عمارته وكتاباته النظرية المثل الفيتروفية، ولا سيما أن المبنى ينبغي أن يعكس النسب المنسجمة لجسم الإنسان والطبيعة (Wassell, 2008). وكما قال بالاديو:

> ينشأ الجمال من رشاقة الشكل وعلاقة الكل بأجزائه، وعلاقة الأجزاء بعضها ببعض وبالكل، لأن المباني يجب أن تبدو أجساماً كاملة محددة، يتوافق كل عضو فيها مع الآخر وتكون جميع الأعضاء ضرورية للغرض المطلوب.
>
> Palladio, 1570 PDF, Book I, Chapter I

القيود والإرث كان فيتروفيوس ابن عصره أيضاً، ولا تستوفي ملاحظاته كلها المعايير الحديثة. لكن إسهامه الأساسي، أي منهجة مبادئ التصميم على أساس الملاحظة التجريبية والتأمل النظري، أرسى منهجاً ما زال وثيق الصلة بالممارسة المعاصرة للهندسة الإنشائية.

وظلت *De Architectura* مبجلة منذ النهضة؛ فلم تؤثر في العمارة الكلاسيكية فحسب، بل وضعت أسساً مفاهيمية يتردد صداها عبر قرون من الفكر الإنشائي، مثبتة فيتروفيوس مسجلاً للممارسة القديمة ومؤثراً دائماً في النظرية الإنشائية.

ولا تقبل المعايير الحديثة ملاحظاته كلها:

> وفضلاً عن ذلك، فإن ندرة الهواء هي التي تجعل أمم الجنوب، بما تمنحهم الحرارة من حدة الذكاء، أحراراً سريعين جداً في ابتكار الخطط، بينما أمم الشمال [...] لا تملك إلا ذكاء بطيئاً.
>
> Vitruvius, 1960 PDF, Chapter I, Book VI

مركزية فيتروفيوس تبلغ أهمية فيتروفيوس التأسيسية لهذا الكتاب أن حياته وكتاباته وتأثيره تبحث في ثلاثة فصول مستقلة: الفصل الحاضر، و§6.3.1، و§15.2.1.

3.3 التقاليد الرياضية والإنشائية في الهند والصين واليابان

مع أن التاريخ المعياري للميكانيكا الإنشائية يركز كثيراً على الإسهامات اليونانية–الرومانية ثم الأوروبية، طورت الحضارات القديمة في آسيا تقاليد عميقة ومستقلة في العمارة والمواد والاستدلال الميكانيكي. ففي الهند والصين واليابان، أفضى الجمع بين الملاحظة التجريبية والابتكار الرياضي والتعبير المعماري إلى منجزات هندسية دائمة، سارت موازية لتطورات الغرب وتقاربت معها. وجاءت هذه الإسهامات من حاجات عملية، كالري والبناء المقاوم للزلازل والبنية التحتية الحضرية، لكنها عكست أيضاً مثلاً فلسفية وجمالية عميقة الجذور. وما يأتي استكشاف لبعض أهم إسهامات كل من هذه الحضارات، لا بوصفها طرائف هامشية، بل مسارات موازية ومتقاربة غالباً نحو فهم الشكل والوظيفة الإنشائيين.

3.3.1 الصين: علم الزلازل والجسور والابتكار الميكانيكي

تشانغ هنغ وعلم الزلازل المبكر من أبرز شخصيات تاريخ الهندسة الصينية تشانغ هنغ، فلكي ورياضي ومهندس ميكانيكي من أسرة هان الشرقية (78–139 ميلادية). اخترع أول *راسم* زلازل معروف، الشكل 3.11a، وهو جهاز قادر على كشف الزلازل البعيدة وتحديد اتجاهها (Needham, 1959). وكان هذا الجهاز البرونزي يضم تنانين تحمل كرات تسقط في أفواه ضفادع أسفلها، وأظهر فهماً مدهشاً للميكانيكا الديناميكية والاهتزازات، سابقاً تطورات مماثلة في أجزاء أخرى من العالم بأكثر من ألف عام.

التراث الميكانيكي الموهستي يمثل قانون الموهست، المنسوب إلى موزي (470–391 قبل الميلاد) وأتباعه، ركناً من إسهامات الصين في النظرية الميكانيكية. يعالج هذا النص القديم منهجياً مبادئ ميكانيكية، منها الرافعات والاتزان والشد (Graham, 1978)، ويطور مفاهيم توازي البحث الميكانيكي اليوناني ضمن إطار فلسفي مستقل يركز على المنفعة العملية والصالح الاجتماعي.

بناء الجسور الثوري يجسد بناء الجسور الصينية إسهاماتهم في الميكانيكا الإنشائية. فجسر أنجي، المشيد عام 605 ميلادية في عهد أسرة سوي، تحفة هندسية بقيت أكثر من 1400 عام (Brownbridge, 1986). وخفض هذا الجسر ذي القوس القطاعي والكوات المفتوحة الوزن ومتطلبات المواد، ووفر في الوقت نفسه سعة لتصريف الفيضان، في ما يدل على فهم متقدم للقوى الهيدروليكية والتحسين الإنشائي.

وكان المهندسون الصينيون رواد تقنية الجسور المعلقة أيضاً، فأنشؤوا جسوراً معلقة من الخيزران وسلاسل الحديد تعبر مسافات تتعذر على الأقواس الحجرية، مستبقين مبادئ تطورت لاحقاً في الأنظمة الحديثة المثبتة بالكابلات والمعلقة.

ويوضح استخدام الصين آلات تديرها المياه، مثل المضخات السلسلية والنواعير، فهمها للمبادئ الميكانيكية كذلك.

3.3.2 الهند: الرياضيات والمواد والعمارة الضخمة

علم العمارة: فاستو شاسترا تقدم الرسالة القديمة *فاستو شاسترا* إرشادات مفصلة للبناء تشمل التوجيه وخصائص المواد وتوزيع الأحمال (Shukla, 1993). ودمج هذا المنهج المنظم الاعتبارات الإنشائية والبيئية والروحية، فأنشأ إطاراً شاملاً للتصميم المعماري أثر في البناء عبر شبه القارة الهندية.

الأسس الرياضية أسهم الرياضي والفلكي أريابهاتا (476–550 ميلادية) في الميكانيكا الإنشائية بتطويره علم المثلثات والحساب الهندسي. وقدمت قيمته الدقيقة لـ π ومنهجه المنظم في قياس الزوايا أدوات أساسية للتخطيط المعماري والتحليل الإنشائي (Bag, 2003).

عمود دلهي الحديدي من أشهر أمثلة الهندسة الهندية القديمة عمود *دلهي الحديدي*، المقام نحو 375–415 ميلادية (Balasubramaniam, 2000)، الشكل 3.11b. يزيد ارتفاع هذا العمود من الحديد المطاوع على سبعة أمتار ويزن نحو ستة أطنان، وقد قاوم التآكل أكثر من 1600 عام بفضل تركيبه المعدني الفريد وطبقة الأكسيد الواقية. ويبين فهماً متقدماً لعلم المواد والتعدين لم يضاه في مكان آخر حتى العصر الحديث.

المنجزات الهيدروليكية والمعمارية تبرز الآبار المدرجة، مثل راني كي فاف في غوجارات، ومجمعات المعابد في خاجوراهو وهامبي، براعة الهند المعمارية (Michell, 1989; Hardy, 2007). وتظهر هذه المنشآت إتقان نحت الحجر وتوزيع الأحمال في هندسات معقدة ودمج الأنظمة الإنشائية ببرامج زخرفية متقنة.

الهندسة الهيدروليكية والأنظمة الزراعية تتضح تطورات الهند في الهندسة الهيدروليكية في تصميم القنوات والخزانات وأنظمة إدارة المياه المتقدمة التي دعمت أعداداً كبيرة من سكان المدن ومناطق زراعية واسعة.

3.3.3 اليابان: الصمود الزلزالي والمنشآت المتكيفة

العمارة الخشبية والابتكار الزلزالي تعكس العمارة الخشبية اليابانية التقليدية، التي تجسدها المعابد والباگودات، قدرة إنشائية فريدة على التكيف تطورت استجابة للنشاط الزلزالي المتكرر. ويتيح *شينباشيرا*، أي العمود المركزي، مع الوصلات الخشبية المتشابكة والروابط المرنة، للمنشأ تبديد طاقة الزلزال بحركة مضبوطة بدلاً من المقاومة الصلبة، الشكل 3.11c (Sugimoto, 2008).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويستبق هذا المنهج في التصميم الزلزالي، الذي يركز على المرونة وتبديد الطاقة ومطاوعة المواد، مبادئ هندسة الزلازل الحديثة بقرون. وقد نجت باگودات من خمسة طوابق من زلازل كبرى أكثر من ألف عام، دالة على فعالية هذه التقنيات التقليدية.

عمارة القلاع والتحصين تبين القلاع اليابانية، مثل قلعة هيميجي المشيدة في القرنين السادس عشر والسابع عشر، تقنيات متقدمة في هندسة التحصينات وتوزيع الأحمال (Turnbull, 2003). وتستخدم هذه المنشآت أنظمة أسس حجرية معقدة وأطراً خشبية متقدمة وترتيبات دفاعية متعددة المستويات تدمج الكفاءة الإنشائية والوظيفة العسكرية.

ابتكار المواد وتقنيات البناء أدى اعتماد اليابان على المواد الطبيعية كالخشب والحجر إلى ابتكارات إنشائية مميزة، ولا سيما الطبقات وأنظمة الحوامل (توكيو) والوصلات المرنة التي تستوعب قوى الزلازل وحركة المواد الناتجة من تغير الرطوبة معاً.

ويبين تطوير تقنيات نجارة خشبية متقدمة، منها وصلات متشابكة معقدة لا تحتاج مسامير أو مثبتات معدنية، فهماً متقدماً لخصائص المواد وانتقال الأحمال والاستمرارية الإنشائية.

3.3.4 الخلاصة والأثر العالمي

طورت هذه التقاليد الآسيوية في الهندسة الإنشائية حلولاً متقدمة للمشكلات الأساسية في البناء وعلم المواد والتكيف البيئي. ويقدم تركيزها على الانسجام بين البناء البشري والقوى الطبيعية، ودمج الاعتبارات الجمالية والإنشائية، وتطوير ممارسات بناء مستدامة، منظورات مهمة تكمل السرد الغربي الأشهر لتطور الهندسة الإنشائية وتغنيه.

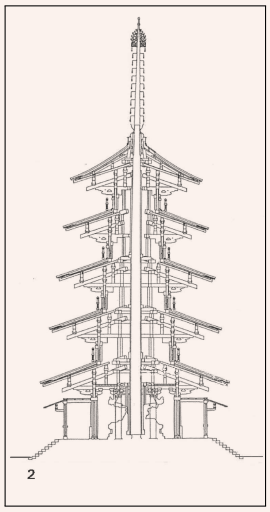
وأسهمت الابتكارات الرياضية وتقنيات المواد والأنظمة الإنشائية التي طورت في الهند والصين واليابان بمعرفة أساسية في التطور العالمي للعلوم الهندسية، مبرهنةً أن أسس الميكانيكا الإنشائية إنجاز إنساني عالمي حقاً، لا نتاج تقليد ثقافي واحد.



(a) الصين: أول راسم زلازل



(b) الهند: العمود الحديدي



(c) اليابان

شكل 3.11: الهند والصين واليابان

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



معبد باخوس في بعلبك وحجر المرأة الحبلى، لبنان

تشهد أحجار بعلبك الهائلة، وهي من أكبر الأحجار المستخرجة من المحاجر في التاريخ، على طموح هندسي قديم ما زال يتحدى التفسير السهل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4 الكاتدرائيات القوطية

ملخص

تقف الكاتدرائيات القوطية آثاراً خالدة للطموح الروحي والبراعة الإنشائية معاً. يستكشف هذا الفصل المنطق الهندسي وراء أشكالها الجريئة، مع عناية خاصة بالتقاء الهندسة وضبط مسارات الأحمال وسلوك المواد لضمان الاستقرار. وبعد تتبع تطور العمارة القوطية من أصولها الرومانسكية ووصف سماتها الإنشائية الأساسية، ومنها الدعامات الطائرة والأقبية المضلعة وخطوط الدفع، يقدم الفصل تحليلات متعمقة لأربعة مبانٍ شهيرة. وتكشف كل دراسة حالة كيف اختبرت حدود المعرفة المعاصرة، وتجاوزت أحياناً، مقدمة دروساً دائمة في متانة التصميم والاستدلال التجريبي وعواقب الإفراط في الطموح.

4.1 مقدمة 43
4.2 من الكتلة الرومانسكية إلى الهيكل القوطي 44
4.3 الكاتدرائيات القوطية: التاريخ والمنطق الإنشائي 44
4.3.1 معالم تاريخية 44
4.3.2 المصطلحات الأساسية والعناصر الإنشائية 47
4.3.3 الثورة الإنشائية القوطية 47
4.3.4 السمات الإنشائية 50
4.4 حكاية أربع كاتدرائيات 55
4.4.1 كاتدرائية بوفيه: دراسة شهيرة في الحدود الإنشائية 55
4.4.2 كاتدرائية ميلانو: الهندسة والسياسة والجدل الإنشائي . . . 61
4.4.3 بازيليك القديس بطرس: من الأزمة إلى التحليل العلمي 66
4.4.4 سانتا ماريا دل فيوري: انتصار حدس برونليسكي الهندسي . . . 70
4.5 جدول موجز 74

4.1 مقدمة

بلغت الكاتدرائيات الأوروبية بين القرنين الثاني عشر والسادس عشر ارتفاعات معمارية غير مسبوقة، لا في الحجم المادي وحده، بل في الجرأة الإنشائية والطموح الرمزي. وكانت هذه الآثار أكثر كثيراً من دور للعبادة؛ فقد جسدت ذروة الهندسة في العصور الوسطى، حين دفع الحماس الديني الابتكار التقني إلى حدوده التجريبية.

شيدت الكاتدرائيات القوطية بلا تفاضل وتكامل ولا مواد حديثة، وعلى مدى قرون غالباً بخطط متغيرة، فتتحدى تصورنا للهندسة تخصصاً منهجياً. ومع ذلك حقق بناؤها تطوراً إنشائياً مدهشاً بوضوح الهندسة والاختبار التجريبي والإدراك الحدسي لمسارات القوى، وهو إدراك لم يبدأ التحليل الحديث تقديره كاملاً إلا مؤخراً.

يركز هذا الفصل على المبادئ الإنشائية التي جعلت هذه الكاتدرائيات ممكنة، مع تأكيد خاص على تحقيق الاستقرار بوضوح الشكل الهندسي لا بقوة المادة. فقد أنشأ البناؤون القوطيون بالأقواس المدببة والأقبية المضلعة والدعامات الطائرة فراغات داخلية عالية مضيئة ما زالت قائمة اليوم. لكن التجارب لم تنجح كلها؛ ففي بعض الكاتدرائيات تجاوز الحد بين الطموح والانهيار، وأحياناً على نحو مأساوي.

وبعد مراجعة المفاهيم الرئيسة في الميكانيكا الإنشائية القوطية والابتكارات التاريخية التي أتاحت البناء، ينتقل الفصل إلى أربع دراسات حالة محورية: بوفيه وميلانو وكنيسة القديس بطرس في روما وسانتا ماريا دل فيوري في فلورنسا. وهي لا تمثل معالم معمارية فحسب، بل حلقات اختبرت فيها المعرفة الإنشائية ونقحت أو ثبت قصورها. وتقدم مجتمعة نظرة جنائية إلى قرارات هندسية قديمة وتقديراً أعمق لتفاعل الإيمان والشكل والقوة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4.2 من الكتلة الرومانسكية إلى الهيكل القوطي

مثل الانتقال من العمارة الرومانسكية إلى القوطية واحدة من أعمق الثورات الإنشائية في التاريخ. فبينما اعتمدت الكنائس الرومانسكية على جدران ضخمة لا تخترقها إلا نوافذ صغيرة، طور البناؤون القوطيون هيكلاً إنشائياً حرر الجدار من وظيفة حمل الأحمال. وأتاح هذا الابتكار السطوح الزجاجية الواسعة والارتفاعات الشاهقة التي تميز الكاتدرائيات القوطية.

وكان الإنجاز الحاسم إدراك إمكان توجيه الأحمال عبر إطار من الأضلاع والأقواس والدعامات، تاركاً الجدران تتحول إلى شاشات من الضوء. وكانت كتل البناء الضخمة سمة المنشآت الرومانسكية، ولم تفتح في جدرانها المحيطية إلا نوافذ صغيرة. وفي المقابل، كان إنشاء هيكل إنشائي مستقل عن كتل البناء أول ابتكار، فأمكن فتح فتحات كبيرة في الجدران تطورت لاحقاً إلى الزجاج المعشق والنوافذ الوردية المميزة للكنائس القوطية (Como, 2013).

وبعد فهم هذا التحول الإنشائي، يمكن بحث الابتكارات المحددة التي أتاحت للبنائين القوطيين بلوغ ارتفاع وانفتاح غير مسبوقين.

4.3 الكاتدرائيات القوطية: التاريخ والمنطق الإنشائي

تشتهر العمارة القوطية بارتفاعاتها الشاهقة وفراغاتها الداخلية المضيئة وبراعتها الإنشائية. وقد تطورت في القرنين الثاني عشر والثالث عشر، ومثلت تحولاً في البيئة المبنية امتزجت فيه الهندسة بالطموح الروحي. واستخدم البناؤون الأقواس والأقبية المضلعة والدعامات الطائرة لإنشاء مبان بقيت قروناً. وكما ذكر Ochsendorf, 2002، "تستمد هذه المباني أمانها من هندسة المنشأ، لا من مقاومة المادة". وقيل إن المنشأ الذي يبقى خمس دقائق سيبقى خمسة قرون (Heyman, 1966)، وإن تجاهل هذا التفاؤل تدهور المواد طويل الأمد.

صاغ أوجين فيوليه لو دوك هذا المبدأ، أي أن الاستقرار القوطي ينشأ من الشكل لا الكتلة، بوضوح خاص في *محاضرات في العمارة* (Viollet-le-Duc, 1875). ووضع إطاراً نظرياً لفهم إدراك البنائين القوطيين الحدسي للعلاقة بين المنشأ والشكل، وأرسى مبادئ أكدها التحليل الإنشائي الحديث لاحقاً. ولدوره المكمل موسوعياً ومرمماً، انظر §15.4.1.

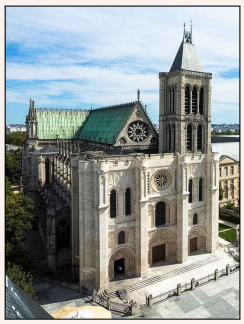
ومع أن الفصل يركز على الكاتدرائيات القوطية، فإنه يشير أيضاً إلى منشآت انتقالية بارزة مثل كنيسة القديس بطرس وكاتدرائية ميلانو وكاتدرائية بوفيه وسانتا ماريا دل فيوري في فلورنسا.

4.3.1 معالم تاريخية

نشأت العمارة القوطية من جذور رومانسكية وبلغت ذروتها في القرنين الثاني عشر والثالث عشر. وأول منشأة شيدت بهذا الأسلوب هي بازيليك كاتدرائية سان دوني، الشكل 4.1a، المكتملة عام 1144 في سان دوني بفرنسا. وتجمع كاتدرائية شارتر، الشكل 4.1b، عناصر قوطية ورومانسكية، وشيدت في ذروة التصميم القوطي. وتشتهر سانتا ماريا دل فيوري، الشكل 4.1c، بقبتها الضخمة وواجهتها القوطية الجديدة المكتملة عام 1887. ودير وستمنستر في لندن، الشكل 4.1d، الذي أعيد بناء أكثره في القرن الثالث عشر، مثال رئيس آخر. أما كاتدرائية أميان، الشكل 4.1e، فهي الأعلى، إذ يبلغ ارتفاعها 139 قدماً. ويلخص الجدول 4.1 منشآت مختارة.

يسرد الجدولان 4.1 و4.2 عدداً من أبرز الكاتدرائيات القوطية ويقدمان أبعاداً أساسية لأمثلة مختارة، وهي معلومات سيعود إليها النقاش اللاحق عن بوفيه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) سان دوني



(b) شارتر



(c) سانتا ماريا دل فيوري



(d) دير وستمنستر



(e) أميان

شكل 4.1: كاتدرائيات شهيرة

جدول 4.1: منشآت قوطية بارزة

السمة البارزة	القرن	الموقع	الكاتدرائية
أول منشأة قوطية	12	فرنسا	بازيليك كاتدرائية سان دوني
أعيد بناؤها بعد حريق 1194	12	فرنسا	كاتدرائية شارتر
استعمال مبكر للدعامات الطائرة	13	فرنسا	نوتردام باريس
قبة بارزة وواجهة قوطية جديدة	13	إيطاليا	سانتا ماريا دل فيوري
مبنية بحجر حمم أسود	12	فرنسا	كاتدرائية كليرمون-فيران
موقع تتويج ملوك بريطانيا	13	إنجلترا	دير وستمنستر
أعلى كاتدرائية قوطية	13	فرنسا	كاتدرائية أميان

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 4.2: مقارنة أبعاد الكاتدرائيات القوطية الكبرى (Elizalde, 2025)

الكاتدرائية	ارتفاع القبو (م)	عرض الصحن (م)	العرض الكلي مع الممرات (م)	تاريخ البناء
نوتردام باريس (FR)	33.0	13.0	24.8	1163–1250
كاتدرائية شارتر (FR)	36.0	16.4	30.0	1194–1250
كاتدرائية ريمس (FR)	38.0	14.65	30.0	1211–1275
كاتدرائية أميان (FR)	42.3	11.6	32.0	1220–1288
كاتدرائية بوفيه (FR)	47.5	15.3	45.6	1225–غير مكتملة
كاتدرائية كولونيا (DE)	43.0	14.0	45.0	1248–1880
كاتدرائية بالما (ES)	44.0	19.0	55.0	1229–1601
كاتدرائية ميلانو (IT)	45.0	16.5	57.0	1386–1965

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4.3.2 المصطلحات الأساسية والعناصر الإنشائية

يتطلب فهم الميكانيكا الإنشائية القوطية الإلمام بمفاهيم أساسية. وأهمها خط *الدفع*، أي المسار الذي تسلكه قوى الضغط عبر قوس أو قبو. فإذا بقي الخط كله داخل حدود البناء كان المنشأ مستقراً (§**??**).

وقبل المتابعة، ينبغي التعرف إلى بعض المصطلحات في الشكل 4.2d؛ وتظهر أنواع الأقبية في الشكل 4.2e.

العناصر الهندسية

خط الدفع مسار القوى داخل القوس؛ فإذا وقع ضمن الحدود المادية للمنشأ كان مستقراً.

البطن المنحنى الداخلي للقوس أو الدعامة.

الظهر المنحنى الخارجي للقوس أو الدعامة.

الصنجة حجر منفرد في القوس أو الدعامة (الفصل **??**).

مفاهيم القوة والاتزان

خط الدفع الفعال يرتبط بأكبر قوة أفقية تسمح بها هندسة القوس.

خط الدفع المنفعل يمثل خط دفع المنشأ تحت وزنه الذاتي.

العناصر الإنشائية

الدعامة الطائرة قوس مائل يقاوم الأحمال الجانبية من قوس، الشكل 18.11c.

القمة عنصر معماري فوق الجدران يضيف إجهاد ضغط.

القبو الرباعي الأضلاع قبو مضلع يقسمه ضلعان قطريان إلى أربعة أقسام، الشكل 4.2a.

القبو السداسي الأضلاع قبو يقسمه ضلعان قطريان وثلاثة أضلاع عرضية إلى ستة أقسام، الشكل 4.2b.

السمات المعمارية

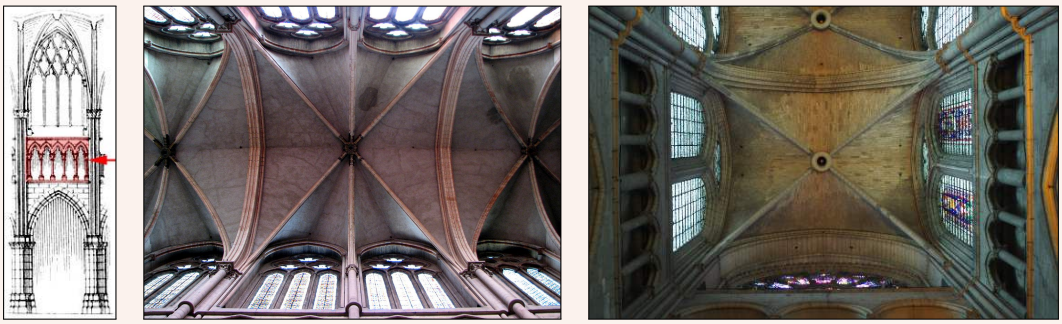
الحَنِيّة الشرقية الطرف الشرقي للكنيسة.

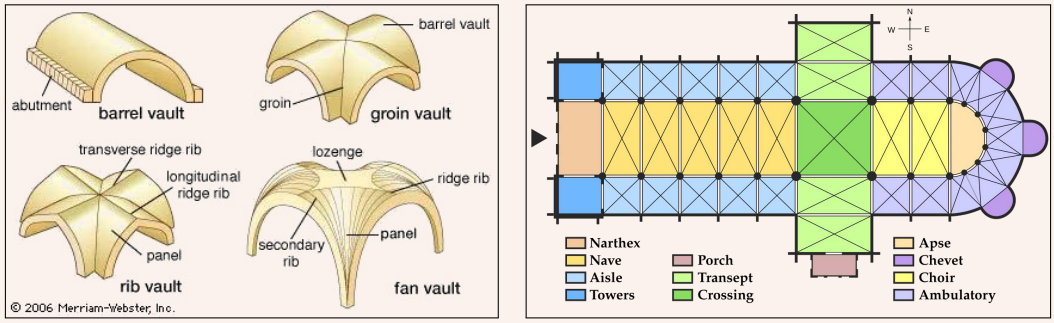
الممر الثلاثي ممر ضيق في سماكة الجدار، الشكل 4.2c.

4.3.3 الثورة الإنشائية القوطية

يحدد Bony, 1983 ثلاث خصائص أساسية للعمارة القوطية: (1) الأقبية المضلعة، و(2) الأقواس المدببة في أنحاء المنشأ، و(3) التأكيد المتعمد على الاتجاه الرأسي. وتنتج هذه السمات الانفتاح والخفة المميزين للأسلوب القوطي. ويناقش أيضاً التأثير الرومانسكي، ولا سيما في الأقبية المضلعة. ويكمن الاختلاف الجوهري بين العمارتين الرومانسكية والقوطية في منهج انتقال الأحمال وشكل القوس الثوري، كما في الشكل 4.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



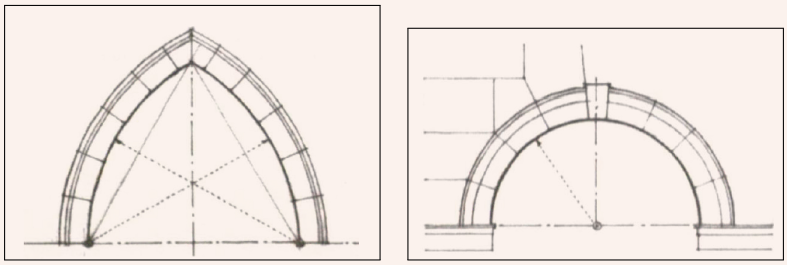


شكل 4.2: العناصر الإنشائية للكاتدرائية

ميزة القوس المدبب

لا يمثل القوس المدبب خروجاً جمالياً عن الأشكال الرومانسكية فحسب، بل غير السلوك الإنشائي جذرياً. فبتركيز القوى رأسياً أكثر، يخفض الدفع الجانبي بنحو 20–30% قياساً بالأقواس نصف الدائرية، ويتيح بناء أعلى بأنظمة دعامات أخف.

ويتضح الفرق الأساسي بين النهجين الروماني والقوطي عند مقارنة مقاطع الأقواس (الشكل 4.3). يولد القوس الروماني نصف الدائري في الشكل 4.3a أكبر دفع جانبي عند قاعدته، فيحتاج دعامات ضخمة على كامل الارتفاع. أما القوس القوطي المدبب في الشكل 4.3b فيركز القوى رأسياً أكثر، فيخفض متطلبات التدعيم ويتيح الخفة القوطية المميزة.

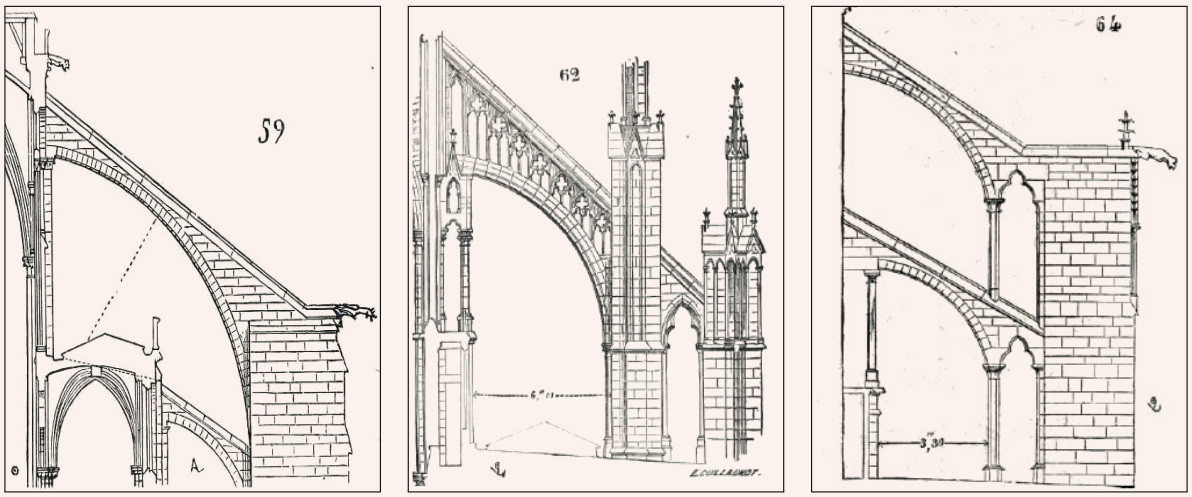


شكل 4.3: مقارنة مقطعي القوس الروماني والقوطي (Ching, 2011)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الدعامات الطائرة: نقل الأحمال إلى الخارج

من علامات العمارة القوطية استخدام *الدعامات الطائرة*. ولعلها أشهر ابتكاراتها، إذ تخرج النظام الإنشائي إلى الخارج. فبنقل دفع الأقبية العالية خارج غلاف المبنى، تحفظ انفتاح الداخل مع ضمان الاستقرار. وتقاوم هذه المساند الخارجية الدفع الجانبي للأقبية والأقواس العالية، فتتيح جدراناً أعلى وأنحف. ومنذ القرن الثاني عشر أتاحت للمعماريين بلوغ ارتفاعات إنشائية غير مسبوقة مع حفظ الاستقرار بالضغط. ومع انتشارها الواسع في الكاتدرائيات القوطية، لم يدرس سلوكها تفصيلياً بأدوات التحليل الحاسوبي الحديثة إلا مؤخراً (Ochsendorf, 2002 PDF; Kim, 2016).



(a) كليرمون-فيران (b) أميان (c) نوتردام باريس

شكل 4.4: أمثلة للدعامات الطائرة في الكاتدرائيات القوطية (Kim, 2016)

يقدم الشكل 4.5 مقطعاً نموذجياً في كاتدرائية قوطية. تثبت الدعامة، التي تعلوها قمة زخرفية، الدعامة الطائرة الناقلة للدفع الجانبي من الأقواس الداخلية إلى الخارج. ويتيح هذا الترتيب اعتماد الداخل في الغالب على قوى الضغط مع حفظ الانفتاح والإضاءة.

الأقبية المضلعة: توجيه القوى

تعمل الأقبية القوطية المضلعة أُطراً ثلاثية الأبعاد توجه الأحمال على مسارات محددة سلفاً إلى الأعمدة والدعامات. وحل هذا النظام محل التحميل المستمر للأقبية الأسطوانية الرومانسكية بأحمال مركزة، فأتاح فتحات أكبر وخفض كتلة الجدران.

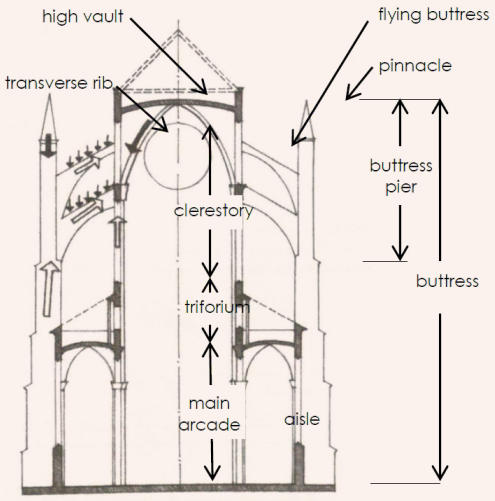
تشتهر المنشآت القوطية بارتفاعها وعمارتها الهوائية. وعناصرها المعمارية الرئيسة الأقواس المدببة والأقبية المتقاطعة المضلعة والدعامات الطائرة والدعائم النحيفة، وكان بعضها مستخدماً في العمارة الرومانسكية، بل الرومانية الأقدم. أما التطبيق المتزامن لهذه العناصر كلها في كل منسجم موحد، فقد حققه أول مرة معماريو إيل دو فرانس الفرنسيون، الذين أعادوا تعريف مفهوم الكاتدرائية.

ولا يمثل القوس المدبب خروجاً جمالياً عن الشكل الرومانسكي فحسب، بل يقدم ميزة إنشائية أيضاً؛ إذ يخفض الدفع الأفقي ويوزع الوزن بكفاءة أكبر.

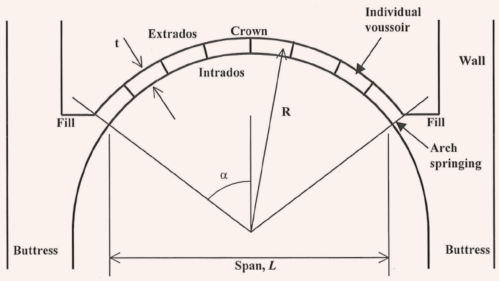
ولفهم ميكانيكا هذه الأنظمة، من المفيد فحص المكونات الأساسية للقوس. يبين الشكل 4.6 هندسة قوس نموذجي، بما فيها الأحجار المنفردة المعروفة بالصنجات، والمنحنيان الداخلي والخارجي، أي *البطن* و*الظهر*. وتعمل الدعامات عند الطرفين مساند منفعلّة تقاوم الدفع الخارجي الناشئ من تقوس القوس.

تكمن أناقة العمارة القوطية في توليف الضرورة الإنشائية والتعبير الفني، حيث تحكم الهندسة الاستقرار لا مقاومة المادة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 4.5: مقطع في كاتدرائية قوطية (Ching, 2011)



شكل 4.6: قوس نموذجي (Ochsendorf, 2002)

4.3.4 السمات الإنشائية

من السمات المحددة للهندسة القوطية الضبط الدقيق لمسار الأحمال عبر عناصر المنشأ. ومن الأمثلة اللافتة القمة؛ فهي أبعد من أن تكون زخرفية فقط، إذ تضيف حملاً رأسياً مهماً إلى نظام الدعامات، فتعزز قدرته على مقاومة الدفع الجانبي. ويوضح الشكل 4.7 هذا الأثر.

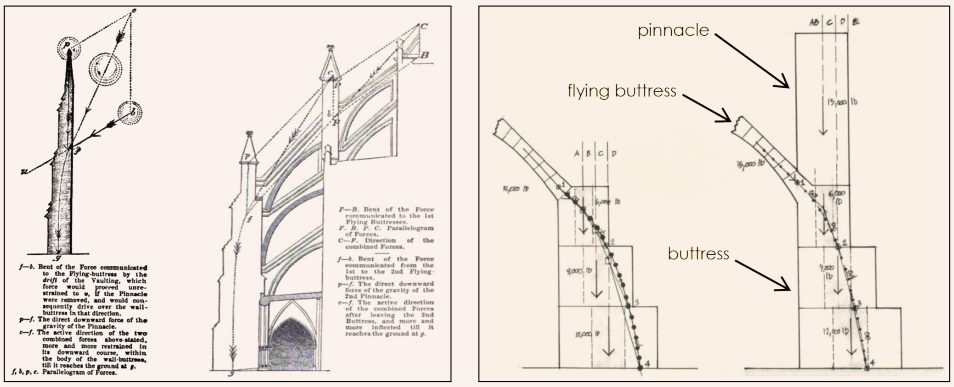
والقبو المضلع عنصر رئيس آخر في العمارة القوطية، حل محل الأقبية الأسطوانية الأثقل في المباني الرومانسكية. وكما يبين الشكل 4.8، توجه الأقبية القوطية الأحمال على امتداد الأضلاع نزولاً إلى الأعمدة والدعائم، فتخفض كتلة الجدران وتتيح نوافذ أكبر وفراغات داخلية أكثر انفتاحاً.

وتؤدي هندسة الدعامة الطائرة نفسها دوراً حاسماً في السلوك الإنشائي. فكما في الشكل 4.9، تحدد الدعامات الحقيقية والمثالية بمعلمات منها زاوية الميل والبحر ومقاطع سماكة البطن والظهر. وتحدد هذه المعلمات كفاءة توجيه الدعامة للقوة من الأقبية العالية إلى الأرض.

ومفهوم خط *الدفع* محوري في تحليل المنشآت القوطية، وهو المسار الذي تتبعه قوى الضغط عبر قوس أو دعامة. ويتحقق الاستقرار إذا بقي هذا الخط كله ضمن الحدود المادية للمنشأ (§**??**). ويوضح الشكل 4.10 الغلاف المحدد بخطي الدفع *الأدنى* و*الأقصى*، اللذين يمثلان على الترتيب الحدين السابقين للانهيار بالحركة إلى الخارج أو السحق إلى الداخل.

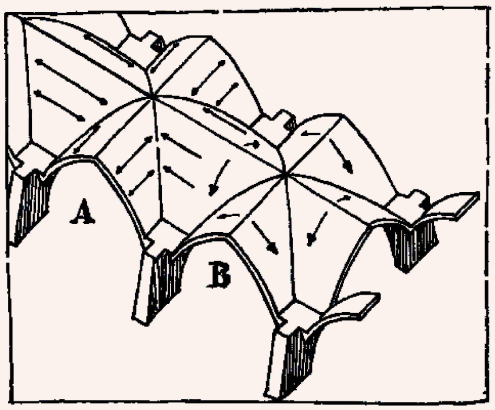
ويعرف هذان الحدان أيضاً بخطي الدفع *المنفعل* و*الفعال*. يقابل الخط المنفعل الوزن الذاتي للمنشأ، بينما يعكس الخط الفعال أكبر دفع أفقي يمكن مقاومته قبل عدم الاستقرار. ويظهر الشكل 4.11 الخطين داخل نظام دعامة طائرة نموذجي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

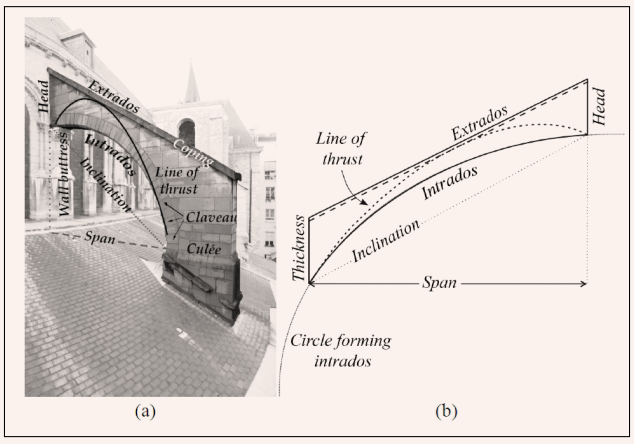


(a) تأثير القمة في خط الدفع (Kim, 2016) (b) انتقال القوى (Bartholomew, 1840)

شكل 4.7: انتقال القوى عبر الدعامات الطائرة

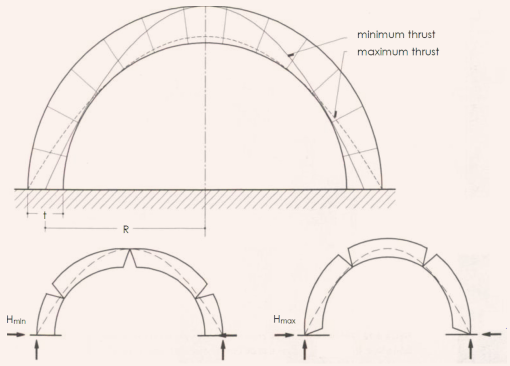


شكل 4.8: سلوك القبو (Hassan Fangary, 2010)

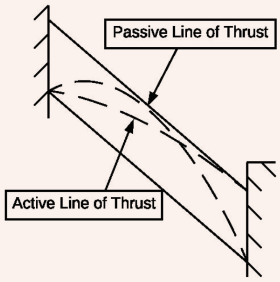


شكل 4.9: هندسة الدعامة الطائرة (Nikolinakou, Tallon **and** Ochsendorf, 2005)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 4.10: خطا الدفع الأدنى والأقصى (Kim, 2016)



شكل 4.11: خطا الدفع الفعال والمنفعل، استناداً إلى (Heyman, 1966)

4.3.4.1 قدرة إنشائية مدهشة على البقاء

أسهمت آليات انتقال الأحمال المتقدمة هذه في طول عمر المنشآت القوطية اللافت، إذ بقي كثير منها قروناً بأقل تدخل. وقد بنيت هذه الكاتدرائيات بلا أدوات هندسية حديثة، على مدد طويلة، وفي ظل خطط معمارية متغيرة غالباً. ومع ذلك وقعت إخفاقات كارثية قليلة. ونجت منشآت قوطية كثيرة من الزلازل الكبرى والحروب، وأدت أحياناً أفضل من مبان حديثة مجاورة (Heyman, 1997).

وكما يلاحظ Ochsendorf, 2002، تأتي قوتها من الهندسة لا المواد. ويرى Heyman, 1966 أن المنشأ القوطي القائم يرجح أن يبقى قروناً، استناداً إلى "مبرهنة الأمان":

> إذا أمكن العثور على خط دفع متزن مع الأحمال الخارجية ويقع كله داخل البناء، فالمنشأ آمن.

وسيبحث هذا المبدأ بتفصيل أكبر في الفصل **??**، المخصص لنظرية أقواس الصنجات والتحليل البياني للاتزان.

لكن ينبغي التنبيه إلى أن النموذج يفترض ثبات خصائص المواد، ولا يحسب التدهور طويل الأمد بالتجوية وتقادم المواد والهبوط التفاضلي، وكلها قد تؤثر اليوم في سلامة المنشآت التاريخية.

4.3.4.2 تطور التحليل الإنشائي

الفهم التجريبي المبكر (1840–1860) بدأ البحث المنهجي في سلوك العناصر القوطية في منتصف القرن التاسع عشر. وكان Willis, 1842 أول من اقترح أن الأقبية المضلعة عناصر حاملة حاسمة، وظل رأيه مقبولاً على نطاق واسع حتى تحدته ملاحظات لاحقة. وانتقد Alexander, Mark **and** Abel, 1977 هذا الرأي بوصفه "قائماً على الانطباعات البصرية أكثر من الفهم الإنشائي الشامل".

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وفي ستينيات القرن التاسع عشر، أدخل أوجين فيوليه لو دوك فكرة *المرونة*، مقترحاً أن البناء يستطيع استيعاب مجال من الأحمال والهبوط (Alexander, Mark **and** Abel, 1977). وعالج نموذجه للقبو المنشأ نظاماً من أقواس منفردة.

وتحدى فيكتور سابوريه هذه الأفكار في مطلع القرن العشرين. فاستناداً إلى الشقوق المرصودة، اقترح أن الأضلاع لا تعمل عناصر حاسمة إنشائياً (Huerta, 2009). وبنى بول أبراهام على هذا العمل، مؤكداً هيمنة الدفع الأفقي والمقطع الهندسي للقبو على مقاومة المادة أو جودة الملاط (Alexander, Mark **and** Abel, 1977).

ثورة هيمان (ستينيات القرن العشرين) حوّل جاك هيمان تحليل البناء بإدخال نظرية الحد اللدن. وقد أحدثت افتراضاته الثلاثة الأساسية ثورة في المجال.

بدأ هيمان في ستينيات القرن العشرين ثورة في دراسة منشآت البناء، فأدخل مفهوم تحليل الحد اللدن (Heyman, 1966). واقترح أن منشآت البناء آمنة إذا أمكن العثور على خط دفع:

1. يقع كله داخل المنشأ؛
2. ويتزن مع الأحمال الخارجية؛
3. ولا يولد شداً.

ويقوم التحليل على ثلاثة افتراضات:

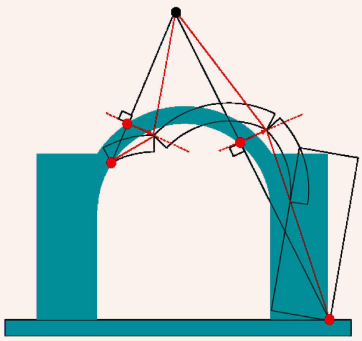
- مقاومة البناء للشد مهملة.
- مقاومة الضغط غير محدودة تحت الوزن الذاتي.
- لا يقع فشل انزلاقي بسبب الاحتكاك العالي.

وتتيح هذه الافتراضات تطبيق مبرهنتي الحدين الأدنى والأعلى في تحليل الحد. تضمن الأولى الاستقرار إذا وجد حقل إجهاد مقبول، بينما تحدد الثانية الانهيار عندما يتعذر احتواء اتزان كهذا داخل المنشأ. ويتميز الفشل عادة بتشكل آلية ذات عدد كاف من المفاصل، غالباً أربعة في قوس أو دعامة، فتحدث حالة عدم الاستقرار.

المناهج الحاسوبية الحديثة يستخدم التحليل المعاصر طرائق متعددة، يقدم كل منها رؤى مختلفة ويواجه قيوداً في البناء غير المطاوع وغير المتجانس.

الطرائق البيانية والحركية يقدر تحليل خط الدفع بيانياً ما إذا كانت القوى الإنشائية تبقى ضمن الغلاف الهندسي للأقواس والأقبية، وغالباً باستخدام "شرائح" من القبو لتقريب ثنائي الأبعاد (Hassan Fangary, 2010). وهو فعال لكنه يستغرق وقتاً ولا يلائم الهندسات المعقدة.

أما التحليل الحركي فيمثل آليات الانهيار تجميعات من كتل صلبة. ويقدر الحد الأعلى لأحمال الفشل بتقييم شغل القوى الخارجية. ويبين الشكل 4.12 آلية فشل نموذجية من هذا التحليل.



شكل 4.12: تقييم حركي لمنشأ قوسي وآلية فشله (Hassan Fangary, 2010)

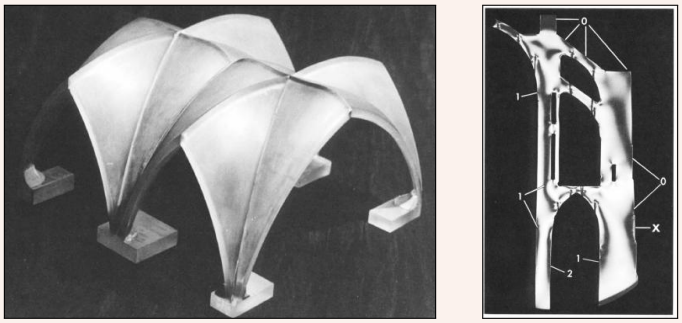
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاحتكاك المحدود والمناهج الحاسوبية الحديثة اقترح D'Ayala **and** Tomasoni, 2008 تحليل حد أدنى ثلاثي الأبعاد لحالة الحد يتضمن احتكاكاً محدوداً. وينتج حقول إجهاد وأنماط شقوق وقيم دفع أفقي لحالات تحميل مختلفة. ومع دقته الأعلى، يتطلب موارد حاسوبية كبيرة ومدخلات خبراء (Hassan Fangary, 2010).

نمذجة العناصر المحددة (FEM): أدخلها روبرت مارك واستخدمت لنمذجة الأقبية والدعامات القوطية رغم قيودها الأصيلة. فلا تتحقق في البناء بدقة افتراضات الاستمرارية وتماثل الخواص والمرونة. وتضم النماذج الحديثة عند Barrallo, Sanchez-Beitia **and** Onati, 2005 و Viola, Panzacchi **and** Tornabene, 2004 الأقبية والدعائم والدعامات. ومع فائدتها، تعتمد نتائج العناصر المحددة كثيراً على افتراضات مثالية.

نمذجة العناصر المنفصلة (DEM): طبق DeJong, 2009 هذه الطريقة على البناء، فعامل كل حجر كتلة صلبة قابلة للانفصال أو الانزلاق، بما يلتقط السلوك غير المستمر على نحو أفضل.

التحليل المرن ضوئياً: كان Mark **and** Prentke, 1968 رائداً في استخدام نماذج إيبوكسية مصغرة لإظهار الإجهاد بأنماط الأهداب. ووسع Mark, Abel **and** O'Neill, 1973 هذا العمل لاحقاً إلى أقبية ثلاثية الأبعاد (الشكل 4.13).



(a) نمط الأهداب Mark **and**) (Prentke, 1968

(b) نموذج القبو Mark, Abel **and**) (O'Neill, 1973

شكل 4.13: التحليل المرن ضوئياً للأقبية القوطية

تحليل الانهيار وميكانيكا الجسم الصلب أكد Ochsendorf, 2002 في أطروحته للدكتوراه أن تغير الهندسة هو السبب الرئيس للانهيار، مثل ترهل القبو وزيادة الدفع أو تغير البحر. وحدد آليات فشل نموذجية: تشكل خمسة مفاصل في الأقواس، وانقلاب الدعامات، وفشل بأربعة مفاصل تحت الأحمال الزلزالية. وأبرز كذلك قيود الطرائق المرنة والعناصر المحددة للبناء التاريخي، مفضلاً ميكانيكا الجسم الصلب لتقييم واقعي.

تحليل الدعامات الطائرة لم تحلل الدعامات الطائرة بعمق إلا مؤخراً. واقترح Nikolinakou, Tallon **and** Ochsendorf, 2005 نماذج هندسية مثالية لالتقاط سلوكها، مبيناً أن الفشل قد يحدث بالسحق أو الانزلاق أو عدم الاستقرار الموضعي، ولا سيما في الدعامات القصيرة أو الشديدة الميل.

وفحص Nikolinakou **and** Tallon, 2006 كذلك آثار التقوس والميل والسماكة، لكن الدراسات قيدها صغر عدد المنشآت القوطية المتاحة للمقارنة المباشرة.

وأجرى Kim, 2016 حديثاً دراسات بالعناصر المحددة للدعامات الطائرة في ثلاث كاتدرائيات كبرى: نوتردام باريس وأميان وسانت إتيان. وربط السمات الهندسية بتركيزات الإجهاد والقابلية الإنشائية للتضرر.

نحو توليف تقدم كل طريقة تحليل، بيانية أو حركية أو مرنة ضوئياً أو بالعناصر المحددة أو المنفصلة، رؤى مختلفة، لكنها تواجه أيضاً قيوداً، ولا سيما في البناء غير المطاوع وغير المتجانس. وقد تلزم عملياً مناهج متعددة لتقييم السلامة وتحديد أنماط الفشل وتوجيه استراتيجيات الحفظ.

تقدم كل طريقة تحليل، بيانية أو حركية أو مرنة ضوئياً أو بالعناصر المحددة أو المنفصلة، رؤى مختلفة، لكنها تواجه أيضاً قيوداً،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولا سيما في البناء غير المطاوع وغير المتجانس. وقد تلزم عملياً مناهج متعددة لتقييم السلامة وتحديد أنماط الفشل وتوجيه استراتيجيات الحفظ.

لا تدل الشقوق دائماً على الفشل، لكنها مع الإزاحات أو انهيار الأجزاء العليا أو النشاط الزلزالي أو تشوه القبو قد تشير إلى عدم الاستقرار (Hassan Fangary, 2010).

وسيقدم الفصل **??** مناقشة أوسع لخطوط الدفع وميكانيكا الصنجات.

وبعد إرساء هذا الأساس في مبادئ المنشآت القوطية وطرائق تحليلها، ننتقل إلى أربع دراسات حالة لكاتدرائيات اختبرت فيها هذه المفاهيم النظرية في البناء الفعلي، أحياناً بنجاح وأحياناً على نحو كارثي.

4.4 حكاية أربع كاتدرائيات

يفحص هذا القسم أربع كاتدرائيات تكشف تواريخها الإنشائية العلاقة المعقدة بين الطموح المعماري والواقع الهندسي. وتبين كل حالة كيف صاغت قرارات التصميم، سواء استندت إلى ابتكار جريء أو التزام بالتقاليد أو استجابة لأزمة، مصير هذه المباني الضخمة. ومن انهيارات بوفيه المأساوية إلى جدالات ميلانو الهندسية، ومن الاختراقات التحليلية في القديس بطرس إلى إتقان برونليسكي الصامت في فلورنسا، تقدم هذه الكاتدرائيات دروساً لا تقدر في التحليل الإنشائي ومتانة التصميم والحوار المتطور بين الممارسة التجريبية والفهم النظري.

4.4.1 كاتدرائية بوفيه: دراسة شهيرة في الحدود الإنشائية

لعل كاتدرائية بوفيه أكثر حالات الفشل إفادة في تاريخ الهندسة الإنشائية. فتصميمها الطموح وانهياراها المأساويان يقدمان رؤية موثقة نادرة إلى الحدود التجريبية للبناء القوطي. وللمهندسين المعاصرين تمثل حالة جنائية فريدة يمكن فيها تحليل القرارات الإنشائية بالوثائق التاريخية وتحليل الحد الحديث معاً.

وهي من أهم دراسات الحالة في تاريخ الهندسة الإنشائية. يقدم تصميمها الطموح وانهيارها المأساوي رؤية نادرة إلى حدود البناء القوطي. وهي مثال قيم للمهندسين على كيفية تشكيل القرارات الإنشائية، الجيدة والسيئة، مصير المبنى. ولأن جانباً كبيراً من تاريخها موثق، ولأن أجزاء منها فشلت بينما دعمت أجزاء أخرى، أصبحت مرجعاً رئيساً في الهندسة الجنائية ودراسة الاستقرار الإنشائي عبر الزمن.

الطموح الكنسي والتنافس في بناء الكاتدرائيات

مع أن بوفيه افتقرت إلى المكانة السياسية والاقتصادية لمدن مثل باريس أو ريمس، فإنها تمتعت بسلطة كنسية مهمة بوصفها مقر أسقفية قوية. وفي المشهد التنافسي للمسيحية في العصور الوسطى، تصرف الأساقفة غالباً باستقلال وموارد الأمراء العلمانيين، فكلفوا بالعمارة بياناً روحياً وتأكيداً مؤسسياً معاً.

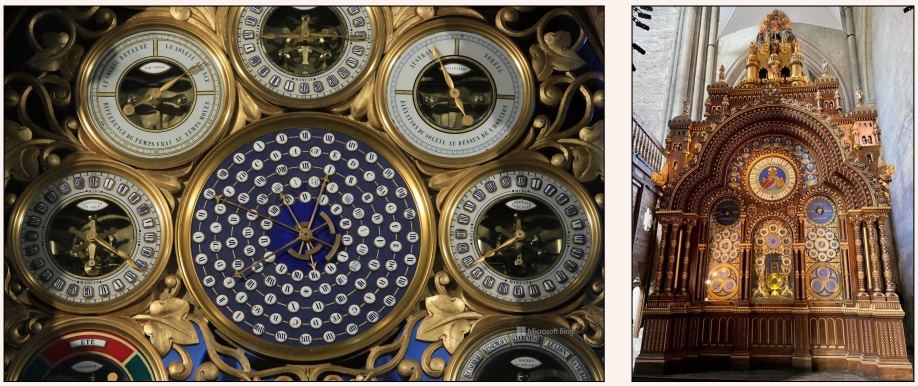
ومع أن بوفيه افتقرت إلى المكانة السياسية والاقتصادية لباريس أو ريمس، فقد تمتعت بسلطة كنسية مهمة بوصفها مقر أسقفية قوية. وفي المشهد التنافسي لكنيسة العصور الوسطى، تصرف الأساقفة غالباً باستقلال وطموح الأمراء العلمانيين. وكان من هؤلاء ميلو نانتوي، الذي بدأ بناء الكاتدرائية في عشرينيات القرن الثالث عشر. وكان من قدامى الحملة الصليبية الرابعة وعضواً نافذاً في كبار رجال الدين، فسعى إلى تأكيد مكانة بوفيه الروحية والمؤسسية بالعمارة. ولم تكن رؤيته تعبدية فحسب، بل رمزية أيضاً: إقامة كاتدرائية جريئة في حجمها وارتفاعها إلى حد يجعلها منارة للطموح المسيحي رغم صغر المدينة.

استطراد: ساعة بوفيه الفلكية

مع أن كاتدرائية بوفيه تشتهر ببنائها الحجري الجريء من القرن الثالث عشر، فإن أحد أعظم منجزاتها الهندسية يعود إلى القرن التاسع عشر. فالساعة الفلكية، التي بناها أوغست-لوسيان فيريتي بين عامي 1865 و1868، تحفة في الهندسة الميكانيكية الدقيقة تضاهي طموح الكاتدرائية الإنشائي نفسه.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومع أن كاتدرائية بوفيه[1] تشتهر ببنائها الحجري الجريء من القرن الثالث عشر، فإن أحد أعظم منجزاتها الهندسية يعود إلى القرن التاسع عشر. شيد صانع الساعات الفرنسي أوغست-لوسيان فيريتي الساعة الفلكية بين عامي 1865 و1868، وهي نظام ميكانيكي فائق التعقيد، الشكل 4.14. يزيد ارتفاعها على اثني عشر متراً وتضم أكثر من تسعين ألف مكون متشابك، فتقف تحفة للهندسة الدقيقة. وتقدم اثنتان وخمسون ميناءً مخرجات مستمرة عن ظواهر فلكية، منها مواضع الكواكب وكسوف الشمس وخسوف القمر ودورات المد، إلى جانب الوقت المدني في مدن متعددة. وتنفذ سلسلة من الآلات الذاتية، يقودها محرك مركزي وتروس مساعدة، عرضاً متزامناً تماماً تطلب تخطيطاً حركياً بالغ الدقة. وقد بنيت في عصر تجدد الاهتمام بالعمارة القوطية، فتجسد كيف حول مهندسو القرن التاسع عشر المعرفة الميكانيكية والفلكية إلى أنظمة متكاملة. وليست إضافة زخرفية متأخرة، بل تبين كيف يستطيع التصميم الميكانيكي محاكاة منطق المنشأ القوطي وطموحه: طبقات محسنة والتزام عميق بالتعبير عن المعلومات بالشكل.



شكل 4.14: ساعة بوفيه الفلكية

التشكيك في أسطورة الاستثنائية الإنشائية

يصور فهم شائع خاطئ بوفيه منشأة استثنائية إنشائياً، بلغت من طموح النسب حداً جعل الانهيار حتمياً. وهذا السرد، مع ما فيه من درامية، يحجب واقعاً إنشائياً أدق يكشفه التحليل المتأني للأبعاد.

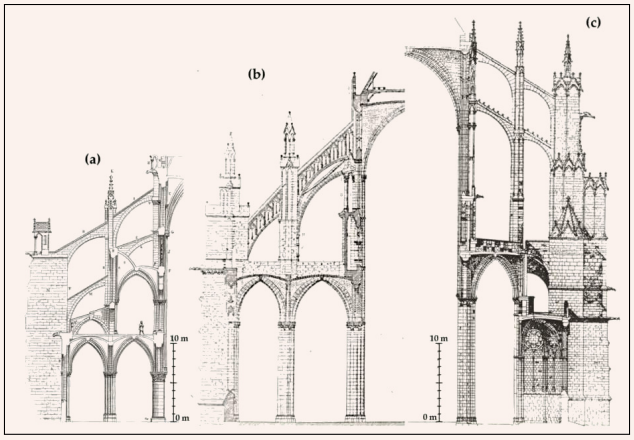
ويثور سؤال مشروع: هل كانت نسب كاتدرائية بوفيه استثنائية إنشائياً إلى حد يفسر وحده انهيارها الجزئي؟ يبدو أن الجواب لا. فعلى الرغم من الادعاءات المتكررة عن أبعادها الهائلة، ليست في الحقيقة أكبر كثيراً من أبعاد الكاتدرائيات القوطية الكبرى الأخرى التي بنيت في النصف الأول من القرن الثالث عشر، الجدول 4.2 والشكل 4.15. وكما يذكر Branner, 1997، تبلغ المسافة بين محاور الدعائم الرئيسة في خورس بوفيه 15.0 متراً، وهي تقريباً نفسها في بورج وشارتر وأميان وكولونيا، ولا تزيد إلا قليلاً على ريمس. ويقارب عرض الخورس الكلي 42 متراً، مماثلاً لبورج وأضيق فعلياً من البقية، فتكون الممرات الجانبية متواضعة نسبياً. والبعد الاستثنائي حقاً هو ارتفاع القبو البالغ 48 متراً، متجاوزاً كل كاتدرائيات العصر الأخرى، وإن اقتربت كولونيا منه عند 46 متراً. وفي الاتجاه الطولي، تراوحت البحور الأصلية الثلاثة للخورس بين ثمانية وتسعة أمتار تقريباً، وهي أصغر قليلاً من أوسع بحر في أميان وتقارب تماماً بحور ريمس وكولونيا.

انهيار 1284: قصة تحرٍ إنشائي

في تمام الثامنة مساء الجمعة 29 نوفمبر 1284، انهارت أقبية خورس بوفيه العليا انهياراً كارثياً. وكان الحدث مفاجئاً ومدمراً؛ فسقطت الأقبية الضخمة، وحطمت نوافذ زجاجية معشقة وكسرت دعائم خارجية. وغدا الخورس، الذي تصور ذروة للطموح

[1] يعمل مطار بوفيه-تيبه (BVA) اليوم في الأساس بوابة منخفضة الكلفة لرحلات اقتصادية إلى باريس. وقليل من الركاب يدرك أن واحدة من أشد كاتدرائيات أوروبا القوطية طموحاً تقف وراء مدرج المطار مباشرة، وأقل منهم من يقطع الرحلة القصيرة لزيارتها، كما فعل كاتب هذه السطور يوماً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 4.15: تحليل مقارن للمقطع العرضي، من حيث ارتفاع الصحن ونظام التدعيم: (أ) نوتردام باريس، و(ب) أميان، و(ج) بوفيه؛ رسم المؤلف استناداً إلى مقاطع Viollet-le-Duc, 1854

القوطي، غير صالح للاستعمال، فتوقفت الشعائر أربعين عاماً. ويقال إن الذخائر المقدسة، ولا سيما أضرحة القديسين جوست وجيرمير وإفروست، بقيت سليمة.

وجعل غياب المؤثرات الخارجية، من زلازل ورياح استثنائية أو عمل عسكري، الانهيار دراسة حالة قيّمة خاصة. فقد وقع تحت أحمال عادية، مقدماً رؤية نادرة إلى الحدود الإنشائية الذاتية للبناء القوطي.

وحير غياب الأسباب الخارجية المؤرخين طويلاً. ومع أن بعض المعلقين الأوائل أضفوا على الفشل مسحة رومانسية بوصفه مثالاً على تجاوز الطموح القوطي حدوده، يرفض تحليل هيمان الإنشائي هذه المزاعم بحسم. إذ يبين تحليل الحد أن الكاتدرائية كما شيدت كانت متزنة، وظلت كذلك أكثر من عقد. ويمثل هذا البقاء دليلاً تجريبياً على استقرار التكوين في البداية Heyman, 1967.

تحليل هيمان الثوري

تمثل دراسة جاك هيمان لبوفيه عام 1967 نقطة تحول في علم الآثار الإنشائي. فبتطبيق تحليل الحد اللدن على فشل تاريخي، بين كيف تستطيع النظرية الهندسية الحديثة إضاءة ممارسة البناء في العصور الوسطى وتحدي افتراضات قديمة عن السلوك الإنشائي القوطي.

يرى هيمان أن الانهيار لا يعزى إلى الهندسة العامة أو الارتفاع المفرط للمنشأ، بل يرجح أنه نشأ من عيب موضعي حاسم في التنفيذ، ربما تسلسل أو تفصيل أدخل أثناء البناء وأفلت من الفحص. ويبين تحليله أن الإزاحات الهندسية الصغيرة ولا انكماش الملاط طويل الأمد كانا وحدهما كافيين لبدء الفشل.[2] وعلى الرغم من تعدد النظريات، تظل الآلية الدقيقة غير مؤكدة، بما يعكس التفاعل المعقد بين الشكل والمادة والتنفيذ في البناء القوطي.

واتخذت بعد الانهيار مباشرة تدابير طارئة لتثبيت المنشأ المتضرر، منها إضافة أعمدة إلى أروقة الخورس، كما ذكر Wolfe **and** Mark, 1976 و Murray, 1989. ويظل الحدث من أهم الإخفاقات الإنشائية في العمارة القوطية، وتزيد أهميته المعرفة التقنية التي تقدمها الميكانيكا الإنشائية الحديثة.

[2] حتى في حالات الفشل الإنشائي الحديثة، لا يكون السبب الجذري غالباً نقصاً في التصميم العام، بل إهمال تفاصيل موضعية، مثل رداءة الوصلات أو عيوب المواد الخفية أو شروط حدودية مغفلة (Benouville, 1891). ومن الأمثلة المعروفة انهيار الجسر الفضي في فرجينيا الغربية عام 1967 بسبب كسر غير مكتشف في قضيب ذي عين واحدة (Administration, 1969).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الهندسة الجنائية: تحليل أونغيفيتر للقوى

نتج انهيار 1284 في الأساس من تشوه جانبي مفرط للدعائم الرئيسة تحت دفع الأقبية العالية. ويكشف التحليل الحديث كيف يمكن لعناصر منفردة تبدو كافية أن تفشل حين يولد تفاعلها حالة عدم استقرار حرجة.

فقد كان السبب الرئيس لانهيار الخورس التشوه الجانبي المفرط للدعائم تحت دفع القبو العالي. وكما يؤكد هيمان، لم ينشأ الفشل من سحق المادة أو فشلها في الشد، بل لأن الدعائم انحرفت جانبياً حتى خرج خط الدفع من مقطع البناء.

يعيد هيمان عرض تحليل أونغيفيتر، الشكل 4.16a، للقوى الرئيسة في مقطع نموذجي. ويحدد للدعامة الرئيسة دفع القبو العالي $H_1 = 3.24$ طن ورد فعله الرأسي V_1، إلى جانب دفع قبو الممر H_2 ورد فعله الرأسي V_2. وبعد حساب أوزان الجدران والعناصر الأخرى المحمولة لا مركزياً على الدعامة، يطرح أونغيفيتر السؤال: ما مقدار دفع الدعامة B اللازم كي يمر خط الدفع الكلي تماماً بمنتصف قاعدة الدعامة؟

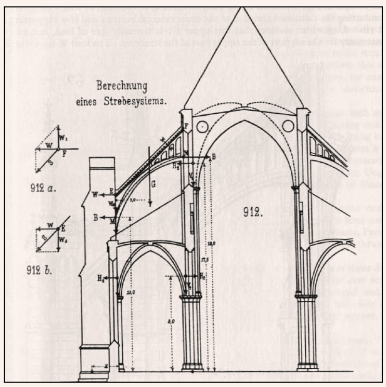
وبأخذ عزوم القوى حول نقطة المنتصف، توجد قيمة B مباشرة:

$$H_1 = 3.24 \text{ طن} \quad \text{عندما} \quad B = 3.02 \text{ طن} \tag{4.1}$$

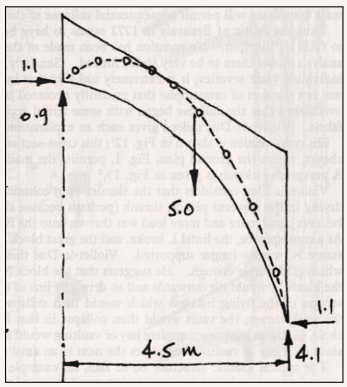
وتحدد هذه القيمة أدنى دفع للدعامة لازم للاتزان مع احتواء خط الدفع داخل البناء (الشكل 4.16a).

ويلاحظ هيمان أيضاً أن ليون بنوفيل نسب الفشل في تحليله عام 1891، على نحو صحيح، إلى الانحراف الجانبي تحت دفع الأقبية، وهي نتيجة تتفق تماماً مع التحليلين البياني والميكانيكي.

وتزداد المشكلة وضوحاً عند النظر إلى خط الدفع نفسه. فكما في الشكل 4.16b، يمر الخط قريباً جداً من حد بطن الدعامة عند منتصف الارتفاع، مؤكداً هشاشة الاتزان. وكان المنشأ شديد الحساسية لأي عيب طفيف، من هبوط أو انكماش للملاط أو عدم دقة بسيطة في البناء، إذ يدفع خط الدفع إلى خارج البناء ويسبب عدم الاستقرار.



(a) نظام القوى في مقطع نموذجي من الخورس، يبين دفعي القبو الرئيسين (H_1 وH_2)، وردي الفعل الرأسيين (V_1 وV_2)، ودفع الدعامة B اللازم للاتزان (Heyman, 1967)



(b) خط الدفع داخل مقطع الدعامة، وقربه من حد البطن عند منتصف الارتفاع بما يؤكد آلية عدم الاستقرار (Heyman, 1967)

شكل 4.16: تحليل فشل 1284 بعد الانهيار

إعادة البناء بعد 1284: تطبيق الدروس الهندسية

تمثل إعادة البناء بعد انهيار 1284 واحدة من أشمل عمليات التدعيم الإنشائي في التاريخ. فبدلاً من مجرد إعادة العناصر الفاشلة، طبق مجلس الكاتدرائية تغييرات منهجية عالجت الأسباب الأساسية لعدم الاستقرار.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

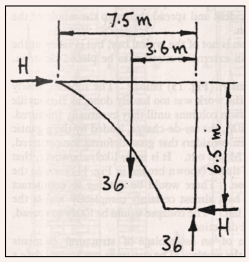
فقد عدلت إعادة البناء المنشأ تعديلاً كبيراً. وضُوعف عدد دعائم الخورس، الشكل 4.17b، بإضافة مساند وسطية، ونُصفت المسافات بين البحور. وزيدت سماكة بناء الدعائم، وخفض منسوب منشأ الأقبية لتقليل مقدار الدفع.



(a) مقارنة حالة ما قبل الانهيار، إعادة بناء يساراً، وحالة ما بعده يميناً في خورس بوفيه، مع إبراز التدعيم بمضاعفة الدعائم (Elizalde, 2025)



(b) منظر عام لخارج خورس بوفيه يبين الدعامة الطائرة المعاد بناؤها وزيادة ارتفاعها بعد انهيار 1284 (Elizalde, 2025)



(c) مخطط قوى الدعامة الطائرة السفلى بين *tas-de-charge* والدعامة الوسطية (Heyman, 1967)

شكل 4.17: إعادة بناء بوفيه بعد انهيار 1284

وأعيد تصميم الدعامات الطائرة بميول أشد لمقاومة الدفع الأفقي بكفاءة أكبر، الشكل 4.17c.

وزادت إعادة البناء الناتجة، المكتملة في معظمها عام 1337، متانة الخورس كثيراً. ومع ذلك يلاحظ هيمان أن درس الاتزان الدقيق للدفع في البناء القوطي نُسي على ما يبدو أثناء محاولة القرن السادس عشر إضافة برج مركزي، وهي محاولة فشلت بدورها.

وينبغي التنبيه إلى أن حرب المئة عام[3] أوقفت البناء عملياً، ولا سيما بسبب الضائقة الاقتصادية ونقص الموارد والغزوات المتكررة في شمال فرنسا حيث تقع بوفيه.

انهيار 1573: الطموح الرأسي يواجه الواقع المادي

يمثل انهيار البرج المركزي عام 1573 فئة مختلفة من الفشل الإنشائي، لم تدفعها عيوب التنفيذ بل عدم التوافق الأساسي بين الارتفاع الشديد وضعف التقييد الجانبي. ويقدم الفشل رؤية حاسمة إلى حدود التصميم الإنشائي التجريبي.

[3] وقعت بين عامي 1337 و1453، وكانت صراعاً بين مملكتي إنجلترا وفرنسا وحرباً أهلية في فرنسا في أواخر العصور الوسطى.

في 30 أبريل 1573، يوم الصعود، انهار برج بوفيه المركزي انهياراً كارثياً. وتصف روايات شهود العيان كيف سقط البرج الضخم عند نقطة التقاطع بعد لحظات من خروج رجال الدين والمصلين عقب شعائر اليوم. وكان الفشل مفاجئاً وعنيفاً؛ إذ انهارت أولاً الدعامتان الجنوبيتان عند التقاطع، فأطلقتا تفاعلاً متسلسلاً دمر برج الفانوس والأقبية المجاورة. والمثير للدهشة أن الإصابات كانت طفيفة فقط Branner, 1962.

ووضع الانهيار نهاية نهائية لطموح الكاتدرائية في علو لا يضاهى. فلم يبق برج الفانوس، المكتمل عام 1569، إلا أربع سنوات، مؤكداً خطورة توسيع النظام القوطي الإنشائي إلى ما وراء حدوده المثبتة تجريبياً.

التحليل الإنشائي: مشكلة غياب الصحن

يكشف فشل 1573 مبدأ أساسياً في التصميم القوطي: تحقق هذه المنشآت استقرارها بتوزيع منهجي للأحمال وتساند متبادل. فإذا أزيلت مكونات حاسمة أصبح النظام كله عرضة لانهيار متتابع.

ونُسب فشل برج الفانوس أساساً إلى عدم الاستقرار الهندسي لدعائم التقاطع تحت الحمل الرأسي الشديد الذي فرضه البرج. وكما يؤكد Branner, 1997 وWolfe **and** Mark, 1976، لم تصمم الدعائم أصلاً لحمل كهذا. وكان غياب الصحن، وهو جزء أصيل من المنشأ المخطط، يعني افتقار الدعائم الغربية إلى قيد جانبي حاسم.

ويبرز Wolfe **and** Mark, 1976 أيضاً رصد تشقق متقدم في الدعائم الجنوبية قبل الانهيار. وهذا يدل على أن أصل الفشل لم يكن مفاجئاً، بل تطور تدريجياً مع تشوه الدعائم تحت حمل مستمر، حتى تجاوزت اللامركزيات والإزاحات حدود الاستقرار الهندسي.

ويشير Branner, 1962 كذلك إلى ضعف التكامل الإنشائي بين البرج الجديد والنسيج القوطي القائم. فقد افتقرت واجهات البناء بين القديم والجديد إلى الاستمرارية اللازمة لتوزيع الأحمال بكفاءة.

واقترحت مشكلات الأسس عاملاً مساعداً. ويرى Elizalde, 2025 أن الهبوط التفاضلي، ولا سيما تحت الدعائم الجنوبية، ربما فاقم عدم الاستقرار القائم. لكن معظم الباحثين، ومنهم Murray, 1989، يعدون الهبوط عاملاً ثانوياً أمام عدم الاستقرار الهندسي المهيمن.

وخلاصة الأمر أن انهيار برج الفانوس حالة كلاسيكية لفشل إنشائي دفعه تراكم عدم الاستقرار الهندسي في دعائم نحيفة تحت أحمال ضغط عالية ومن دون تقييد جانبي كاف. ولم يكن فشلاً في مبادئ التصميم القوطي نفسها، بل في تمديدها خارج الغلاف الآمن الذي اختبرته الخبرة السابقة.

> لو اعتُمدت تدابير التدعيم الموصى بها عام 1571، لكان من المرجح تجنب الانهيار.
>
> Wolfe **and** Mark, 1976

ما بعد 1573: من الطموح إلى العملية

أحدث ما بعد انهيار 1573 تحولاً فلسفياً في بناء الكاتدرائيات، من السعي إلى ارتفاعات غير مسبوقة إلى قبول العملية الإنشائية. ويعكس هذا التحول تطوراً أوسع في الثقافة الهندسية نحو تقييم المخاطر والحدود التجريبية.

فقد تخلى مجلس الكاتدرائية نهائياً عن طموح التفوق الرأسي. وأوضح الانهيار أن مخاطر أي توسع رأسي جديد تفوق كثيراً أية مكافأة رمزية أو جمالية.

وشملت الاستجابة الفورية إزالة الأنقاض وتنفيذ تدابير تثبيت. ووفق Murray, 1989، استدعي الحرفيون خلال أيام لتقييم الضرر واقتراح إصلاحات موجهة. وتضمنت توصياتهم إعادة بناء دعامة التقاطع الشمالية الشرقية المتضررة بشدة، وإصلاح دعامة الخورس المجاورة (D5/6) ودعامة الممر عند C6. واستبدلت عدة دعامات طائرة متضررة أيضاً.

وكما يذكر Wolfe **and** Mark, 1976، فُككت بعناية المدماكات العليا من البناء غير المستقر لمنع مزيد من الفشل. واقتصر البناء الجديد على التثبيت: ركبت قضبان ربط حديدية عبر الأقبية المعرضة للخطر، وربط البناء عند نقاط الانطلاق الرئيسة. وقدمت هذه التدخلات السلامة الإنشائية على إحياء الطموح المعماري السابق.

وبحلول عام 1605، تخلى مجلس الكاتدرائية رسمياً عن فكرة بناء الصحن أو إعادة البرج. ومثل القرار نقطة تحول فلسفية من السعي القوطي إلى قبول القيود الإنشائية العملية.

وتقف كاتدرائية بوفيه اليوم إنجازاً استثنائياً ونصباً تحذيرياً معاً. فخورسها الشاهق وجناحها المبتور لا يمثلان فشلاً لهندسة العصور الوسطى، بل الخطر الكامن في دفع طرائق البناء التجريبية خارج حدودها المثبتة.

الدروس الهندسية من بوفيه

يقدم التاريخ الإنشائي لبوفيه رؤى دائمة للممارسة الهندسية المعاصرة. وتنبثق من انهياريها ثلاثة دروس أساسية:

التفاصيل الموضعية قد تطلق فشلاً عاماً: يبين انهيار 1284 كيف تستطيع عيوب تنفيذ أو تغيرات مادية تبدو طفيفة أن تسبب فشلاً كارثياً في أنظمة تعمل قرب حدود استقرارها. وتعالج بروتوكولات ضبط الجودة والتفتيش الحديثة هذه القابلية.

تكامل النظام حاسم: يوضح انهيار برج 1573 مخاطر إضافة عناصر إلى نظام إنشائي من دون بحث مسار الأحمال الكامل ومتطلبات الإسناد. وتحقق الكاتدرائيات القوطية استقرارها بالتكامل المنهجي؛ وقد يهدد حذف عناصر رئيسة أو تغييرها المنشأ كله.

للخبرة حدود: وقع الفشلان عندما تجاوز البناؤون الغلاف المثبت لممارسة البناء القوطية. فالابتكار يدفع التقدم، لكن تجاوز الحدود المتحققة تجريبياً يتطلب تحليلاً واختباراً دقيقين، وهما موردان لم يتاحا لبنائي العصور الوسطى لكنهما أساسيان في الهندسة الحديثة.

ويقف انهيار البرج المركزي لبوفيه عام 1573 شاهداً صارخاً على الحدود الإنشائية للطموح الرأسي في عمارة البناء. فقد كان برج الفانوس لفترة وجيزة أعلى منشأة في أوروبا، وتجاوز أسلافه القوطيين في الارتفاع لا في الحصافة الإنشائية.

ولم ينشأ الفشل من رداءة الصنعة أو نقص المعرفة، بل من خطأ حاسم في تقدير استجابة الدعائم النحيفة، المفتقرة إلى التقييد الجانبي الكافي، لأحمال الضغط المستمرة. وكما يؤكد Wolfe and Mark, 1976 و1997 ,Branner، لم تكن المشكلة حملاً زائداً فورياً بل عدم استقرار هندسي متقدماً. فقد ترك غياب الصحن، وهو جزء أصيل من التصميم، الدعائم الغربية بلا إسناد خطير ضد الانجراف الجانبي.

وخلال السنوات الأربع التي بقي فيها البرج، تراكمت عيوب أولية صغيرة إلى إزاحات قابلة للقياس. وتشوهت الدعائم تدريجياً تحت الدفع اللامركزي الذي فرضه وزن البرج الهائل. وفي النهاية بلغت الإزاحات عتبة حرجة تعذر عندها حفظ الاتزان، فانطلق الانهيار الكارثي.

وتظل بوفيه للمهندسين الإنشائيين والمؤرخين دراسة استثنائية للحد بين الجدوى الهندسية والاستقرار الإنشائي. وتؤكد أن النحافة وحدها ليست معيار فشل، لكن اجتماعها مع ضعف التدعيم ومسارات الأحمال اللامركزية وسوء استمرارية المواد قد يسبب انهياراً متقدماً حتى تحت أحمال ساكنة اسمياً.

وتقدم بوفيه للمحافظين المعاصرين درساً قوياً: تعمل جرأة التصميم القوطي ضمن حدود، وقد تتجاوز هذه الحدود بخطر حين يسبق الشكل القيود التجريبية لعصره.

وتقف الكاتدرائية اليوم، بخورسها الشاهق وجناحها المبتور، لا نصباً للطموح وحده، بل تذكرة دائمة بالاتزان الدقيق بين التطلع وقوانين الميكانيكا الثابتة.

4.4.2 كاتدرائية ميلانو: الهندسة والسياسة والجدل الإنشائي

يمثل تشييد كاتدرائية ميلانو واحدة من أروع حلقات اتخاذ القرار المعماري في التاريخ، إذ تلاقت الهندسة النظرية والخبرة العملية والسلطة السياسية في مناقشات تقنية محتدمة. وعلى خلاف بوفيه، التي تعرضت لفشل كارثي، تكشف قصة ميلانو كيف تستطيع المفاوضات المعقدة بين فلسفات هندسية متنافسة أن تصوغ العمارة التذكارية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التقاليد القوطية تلتقي الابتكار الإيطالي

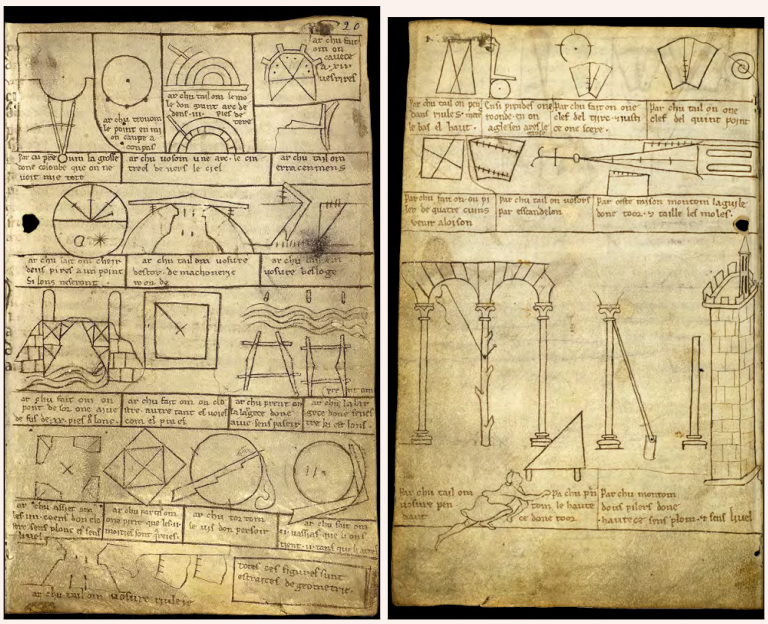
ازدهرت العمارة القوطية في أوروبا بعد العصر الرومانسكي، من أواخر القرن الثاني عشر إلى القرن السادس عشر، مع ظهور عصر النهضة. وعرفت أيضاً بعمارة الأقواس المدببة، وتميزت بارتفاع أكبر وضوء أوفر بكثير، أتاحتهما التحسينات التقنية في الأقبية والدعامات.

قبل القرن الخامس عشر، كانت المعرفة المعمارية تنتقل أساساً بالتلمذة العملية والأسرار الحرفية المصونة بعناية. وقد غير مشروع كاتدرائية ميلانو ذلك، إذ ولد بعض أقدم المناقشات التقنية الموثقة في تاريخ العمارة.

لم تُبنِ الكاتدرائيات القوطية اعتباطاً. فقد وجدت تقنيات للبناء، وكان للهندسة ونحت الحجر خصوصاً دور حاسم (Shelby, 1972). وانتقلت الخبرة في معظمها شفهياً من جيل من البنائين إلى الجيل التالي، وغالباً من الأب إلى الابن. ولحسن الحظ بقي استثناءان رئيسان: دفتر رسوم فيلار دو أونيكور من القرن الثالث عشر، وعدة كتيبات كتبها معلمو بناء ألمان في القرن الخامس عشر وأوائل السادس عشر. وتتيح هذه الوثائق تكوين صورة وافية إلى حد بعيد عن الهندسة التي استخدمها بناؤو العصور الوسطى.

فيلار دو أونيكور: الهندسة علماً إلهياً

في القرن الثالث عشر، جاب نحات الحجر الفرنسي فيلار دو أونيكور أنحاء واسعة من أوروبا وجمع دفتر رسومه الشهير، الذي يقدم رؤية قيمة لقوانين البناء وقواعد التناسب التي استخدمها البناؤون القوطيون (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858). ويكرر فيلار في ملاحظاته الإشارة إلى الهندسة، قائلاً: «لا تعجبوا من قولي إن كل علم لا يحيا إلا بعلم الهندسة»، بل افترض أن إقليدس تعلم الهندسة من إبراهيم في مصر. ولا يقدم عمله توثيقاً بصرياً لتفاصيل البناء فحسب، بل لمحة أيضاً عن الأساس الفكري والنظري لممارسات البناء القوطية. وعلى الرغم من أن الملاحظات ليست منهجية، فإنها تعكس رؤية متماسكة لتصميم تحكمه المبادئ الهندسية والتناسب.



شكل 4.18: رسوم هندسية من دفتر فيلار دو أونيكور، توضح قواعد وأنظمة للتناسب (De Honnecourt, 2006)

في أواخر العصر القوطي، كتب معلمو بناء ألمان عدة كتب صغيرة. وكان أقدمها طباعة كتاب ماتياس روريتسر *الهندسة بالألمانية*، المنشور عام 1486. وهو رسالة مكرسة للهندسة تحديداً. ويتكون الكتيب ذو الصفحات الاثنتي عشرة من أشكال موسومة بالحروف

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وشروح موجزة لتسع مسائل: إنشاء زاوية قائمة، وخماسي وسباعي وثماني الأضلاع؛ وإيجاد طول دائرة ومركزها؛ وإنشاء مربع ومثلث متساويي المساحة؛ ورسم قوالب وزخارف نهائية لجملون؛ ووضع مخطط جملون.

كاتدرائية ميلانو: مؤسسة فابريكا والابتكار المؤسسي

بدأ تشييد كاتدرائية ميلانو عام 1386 تحت إشراف *مؤسسة فينيراندا فابريكا دل دومو دي ميلانو*، وشكل نقطة تحول في التنظيم المعماري. فعلى خلاف نظام المعلم والمتدرب غير الرسمي الذي ميز بناء العصور الوسطى، أنشأت فابريكا إطاراً مؤسسياً للاستشارة التقنية جمع خبرات من أنحاء أوروبا.

ومن السمات اللافتة للدومو، التي تؤكدها الروايات المعاصرة مراراً، أن رعايتها وإصلاحها ليسا عملين متقطعين بل مستمرين. ففي كل لحظة تقريباً من تاريخها، ظل جزء من الكاتدرائية تحت السقالات، فيما يستبدل نحاتو الحجر الرخام المتآكل أو يصلحون الزخارف الحجرية الدقيقة أو يجددون العناصر النحتية. ولا يرى أهل ميلانو في هذه الصيانة الدائمة علامة فشل أو تدهور، بل الحالة الطبيعية للمبنى نفسه: فالدومو في تصورهم منشأ يجب الاعتناء به باستمرار لكي يدوم. ومن هذا المنظور يغدو البناء والحفظ والإصلاح عملية واحدة متصلة امتدت من أواخر القرن الرابع عشر إلى يومنا هذا (Povoledo, 2023).

قبل القرن الخامس عشر، كانت الكتابات عن العمارة قليلة جداً. لكن ذلك تغير مع تشييد كاتدرائية ميلانو، الذي بدأ عام 1386 برعاية *فينيراندا فابريكا دل دومو دي ميلانو*، وهي منظمة ما زالت قائمة إلى اليوم. وكان هذا المشروع من أهم حلقات تاريخ العمارة الإيطالية والأوروبية: أولاً، لتفرد المبنى نفسه، وهو أكبر كنيسة قوطية شيدت في إيطاليا؛ وثانياً، لإسهامات معماريين مرموقين من أنحاء أوروبا، كانوا يدعون دورياً لتقديم مقترحات؛ وثالثاً، للمناقشات التي أثارها على مدى أكثر من قرن بشأن الخيارات الإنشائية وممارسات البناء الإقليمية وتنازع سلطة الدوق والبلدية. وقد وصف Ackerman, 1949 توثيق هذا المشروع وصفاً شهيراً.

ومن الخصائص المميزة للدومو استخدام رخام *كاندوليا*، المستخرج من محاجر بحيرة ماجوري والمنقول إلى ميلانو عبر شبكة قنوات نافيلي، وهو ما يمنح الكاتدرائية لونها الشاحب المميز، الشكل 4.19a. وقد وفر دوق ميلانو جان غالياتسو فيسكونتي الرخام ومنح فابريكا حق الوصول المجاني إلى المحاجر، رمزاً لرعاية الدوق واتحاد السلطتين المدنية والدينية.

جدل الارتفاع الكبير: الهندسة في مواجهة البراغماتية

تمثل مناقشات ارتفاع كاتدرائية ميلانو واحداً من أقدم الصراعات الموثقة بين الهندسة النظرية والخبرة العملية في البناء. ويكشف الخلاف كيف قاربت تقاليد إقليمية مختلفة السؤال الأساسي المتعلق بالتناسب المعماري.

تركزت المناقشات الأولى على ارتفاع المبنى. فقد استخدم المخطط الأفقي الموضوع عام 1386 شبكة مربعة أبعادها 16 في 16 *براشيا*[4] للممرات الجانبية، ومستطيلات أبعادها 16 في 32 *براشيا* للصحن، الشكل 4.19b.

كانت المشكلة الأساسية أن ارتفاع المنشأ ظل غير محدد حتى بعد إنجاز الأساسات، وهو وضع لا يمكن تصوره في ممارسة البناء الحديثة لكنه كان من خصائص تطور البناء في العصور الوسطى.

كانت المشكلة أن ارتفاع المنشأ ظل غير محدد حتى بعد اكتمال الأساسات. ولأن الموقع كان ميلانو، لا مدينة من مدن جنوب إيطاليا، فقد شُيد المنشأ الناتج بالفعل من دون مخطط رأسي متسق. وفي عام 1391 دعا رئيس الأساقفة إلى مؤتمر للبت في «طول الأعمدة وارتفاع الكنيسة والنوافذ». وشملت المسائل الرئيسة ما إذا كان ينبغي للممرين على كل جانب أن يتساويا أو يختلفا في الارتفاع، وما إذا كان الارتفاع، المشروط جزئياً بشبكة المخطط الأرضي البالغة 16 في 16 *براشيا*، ينبغي أن يتبع تكويناً مستطيلاً أم مثلثياً، أي يعتمد المربعات أم المثلثات المتساوية الأضلاع: وفق *المربع* أو وفق *المثلث*.

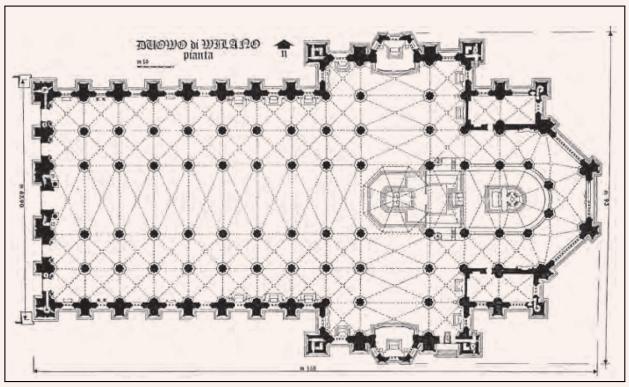
ثم تحدت هذا المخطط الأول إسهامات معماريين متأثرين بالطراز الفرنسي المشع وممارسات القوطية الألمانية العليا، التي تتجلى خصوصاً في كاتدرائية كولونيا التي شكلت مرجعاً لبعض المقترحات.

[4] كانت *البراشيا*، ومفردها *براشيو*، وحدة طول إيطالية سابقة للنظام المتري تختلف باختلاف المنطقة. وفي فلورنسا كانت البراشيا الواحدة تساوي نحو 58.4 سم، أي قرابة 23 بوصة، وشاع استعمالها في القياسات المعمارية والهندسية في عصر النهضة وبدايات العصر الحديث.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) رخام كاندوليا



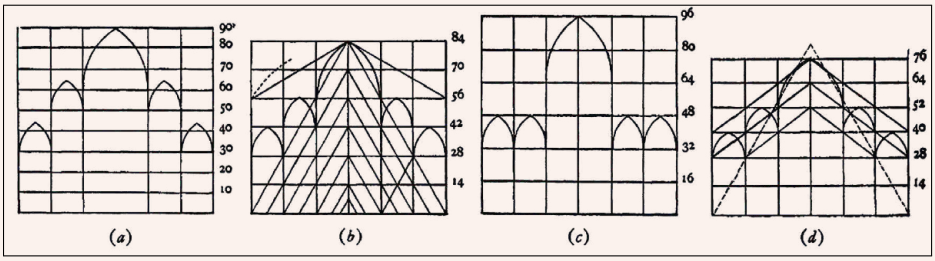
(b) المخطط الأفقي

شكل 4.19: دومو ميلانو

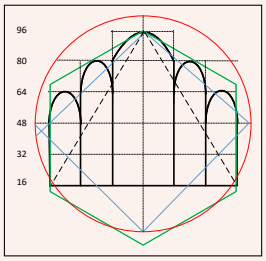
الهندسة المقدسة والكمال المعماري

كما لاحظ Sebregondi **and** Schofield, 2016، تكرر استدعاء المربع والمثلث المتساوي الأضلاع في الكتابات المعمارية من فيتروفيوس إلى فيلار دو أونيكور . وقد عدّا مقدسين منذ زمن أفلاطون، وانتميا إلى «نخبة هندسية» نشأ عنها تقليد يربط النظام الإلهي بالتصميم المعماري. ولأن المراد كان تشييد كاتدرائية، أي بيت للرب مقرون بأسمى خير وجمال مطلق، وجب أن يجسد المبنى الكمال الرياضي. وقد خلق ذلك توتراً بين الهندسة المثالية وواقع البناء. ومن ثم كان على المبنى أن يكون كاملاً: عملاً فنياً *كلياً*[5] يعكس كل عنصر فيه الانسجام الإلهي في مقابل اضطراب العالم.

يوضح الشكل 4.20a أربعة تصاميم مقترحة.



(a) المخططات المقترحة المتعاقبة (Ackerman, 1949)



(b) إعادة بناء مخطط ستورنالوكو (Sebregondi **and** Schofield, 2016)

شكل 4.20: مخططات التناسب للتصاميم المتعاقبة

تطور المقترحات المتنافسة

انبثقت من المناقشات أربعة مناهج متميزة، يعكس كل منها أولويات فلسفية وعملية مختلفة:

[5] عمل فني في كليته.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

دي فيتشنزو، 1390: سجل أول مجموعة من الملاحظات، وهي مصدر أولي، مع المخطط والأساسات الموضوعين قبل التأثير الأجنبي، والتوجيه الأولي للمقطع والارتفاع.

ستورنالوكو، 1391: اقترح تسوية بارعة بين الكمال الهندسي والبناء العملي. وتناول المشكلة الأساسية المتمثلة في أن ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع ($\sqrt{3}$) عدد غير نسبي، مما يجعل القياس الدقيق بأدوات العصور الوسطى مستحيلاً.

ستورنالوكو، 1391: اقترح انحرافاً صغيراً لكنه مهم عن مخطط المثلث المتساوي الأضلاع النقي هندسياً، وقد أوضحه Panof-sky, 1945. عالج ستورنالوكو لا نسبية ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع ($\sqrt{3}$)، التي حالت دون استخدام مقياس بسيط. فلقاعدة طولها 96 *براشيا*، يعطي المثلث ارتفاعاً مقداره $96\sqrt{3}/2 \approx 83.13$ *براشيا*. واقترح ستورنالوكو تقريب القيمة إلى 84 *براشيا*، وهي تقبل القسمة بسهولة إلى ستة أجزاء طول كل منها 14 *براشيا*. وأتاحت هذه التسوية التنفيذ باستخدام ستة أقسام أفقية متساوية.

يمثل الشكل 4.20b إعادة بناء بارعة: الشكل ANCpBq سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة؛ وAA ارتفاع الممر وميل الدعامة المستقبلي؛ وABC مثلث متساوي الأضلاع، أي ارتفاع الصحن؛ وAOpr مربع مرسوم داخل الدائرة يحدد قطره rO مناسيب نقاط الانطلاق؛ وتحدد AD/6 وBC/6 «الأشكال الرباعية»؛ وتساوي النسبة 16/14 المقدار BC/AD.

بارلر، 1392: اقترح هاينريش بارلر من كولونيا التخلي كلياً عن الهندسة المثلثية لمصلحة تصميم ذي مقطع مربع وارتفاع داخلي يبلغ 96 *براشيا*، مستلهماً تقليد القوطية الألمانية العليا الذي تمثله كاتدرائية كولونيا.

بارلر، 1392: اقترح تصميماً ذا مقطع مربع وارتفاع داخلي يبلغ 96 *براشيا*، ربما مستلهماً كاتدرائية كولونيا.

تسوية ميلانو: طور البناؤون المحليون حلاً هجيناً يستخدم نظامين هندسيين: مثلثاً متساوي الأضلاع حتى ارتفاع 28 *براشيا*، يعلوه مثلث فيثاغوري بأضلاع 3-4-5 ليبلغ الارتفاع الكلي 76 *براشيا*. وقد لبى هذا المنهج البراغماتي المثل الهندسية وقيود البناء معاً.

التسوية: طور بناؤو ميلانو مخطط ارتفاع جديداً أخفض باستخدام نظامين مثلثيين: المثلث المتساوي الأضلاع حتى 28 *براشيا*، ومثلث فيثاغوري بأضلاع 3-4-5 ليبلغ الارتفاع الكلي 76 *براشيا*. وكما أشار Ackerman, 1949، يعقد تعايش مقترحات متعددة قائمة على *المثلث* تفسير المصادر.

تدخل جان مينيو: العلم في مواجهة الفن

أدى جان مينيو، معلم البناء الفرنسي من باريس، دوراً محورياً وإن كان مثيراً للخلاف في تشييد دومو ميلانو (Ackerman, 1949). فقد دعي بصفته *خبيراً استشارياً* في تسعينيات القرن الرابع عشر، وراجع المقترحات الإنشائية التي وضعها بناؤو إيطاليا وأبدى تحفظات شديدة على كفايتها. وقد اشتهر بتحديد 54 عيباً إنشائياً، محذراً من أن الكاتدرائية في خطر *الانهيار*، وتراوحت العيوب بين قصور التدعيم وسوء تناسب قواعد الركائز، على طريقة فيتروفيوس. ودعا مينيو إلى العودة إلى الارتفاع السابق الأكثر صرامة هندسياً، البالغ 84 *براشيا*، الذي اقترحه ستورنالوكو.

أثارت انتقاداته سجالاً حاداً تمحور حول منهجين مختلفين جوهرياً للمعرفة البنائية. فقد أكد بناؤو ميلانو، مستندين إلى التقليد المحلي والخبرة العملية، أن *العلم* شيء *والفن* شيء *آخر*، وزعموا أن معرفتهم التجريبية أرجح من النظرية المجردة[6].

أصبح رد مينيو الشهير، «الفن بلا علم لا شيء»، شعاراً لدمج المبادئ النظرية بالبناء العملي. وقد استبق هذا النقاش التعليم الهندسي الحديث، الذي يسعى إلى الجمع بين الفهم العلمي والتطبيق العملي.

وجدير بالذكر أن مقولة مينيو سبقت حججاً مماثلة لمفكري عصر النهضة اللاحقين. فقد أعلن ليوناردو دا فينشي، بعد نحو قرن، أنه «لا يمكن تسمية أي بحث بشري علماً حقيقياً إن لم يمر بالبراهين الرياضية». وشدد ليوناردو على ذلك بقوله: «إن المتحمسين

[6] يمثل هذا التوتر بين المعرفة النظرية والخبرة العملية أحد أكثر النقاشات دواماً في الهندسة والعمارة. وقد ظهرت صراعات مماثلة عبر التاريخ: دعا فيتروفيوس في القرن الأول قبل الميلاد إلى مبادئ منهجية مع إقراره بأولوية الحرفيين ذوي الخبرة؛ وناقش مهندسو القرن التاسع عشر ما إذا كان التحليل الرياضي أم الاختبار التجريبي ينبغي أن يوجه تصميم الجسور الحديدية؛ وما زالت الممارسة المعاصرة تواجه العلاقة بين النمذجة الحاسوبية والخبرة الميدانية. وهكذا استبقت مناقشات ميلانو في تسعينيات القرن الرابع عشر سؤالاً معرفياً أساسياً ما زال محورياً في التعليم الهندسي والممارسة المهنية: كيف ينبغي دمج الفهم النظري والمعرفة العملية لتحقيق تصميم موثوق؟

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

للممارسة من دون علم كبحار يصعد سفينة بلا دفة أو بوصلة، فلا يعرف يقيناً إلى أين يمضي». وعكست هذه الأقوال حركة أوسع في عصر النهضة نحو دمج الملاحظة التجريبية بالصرامة الرياضية، وهو تحول فلسفي سيغير في النهاية الممارسة الهندسية والمنهج العلمي معاً. وبذلك مثل الجدل الذي بدأ في ميلانو صياغة مبكرة لمبادئ ستغدو أساسية للثورة العلمية (§5.3).

وعلى الرغم من التوتر الذي أحدثه مينيو، أبرز تدخله حالات عدم اليقين الإنشائي والهندسي التي ظلت بلا حل في تصميم الدومو المتطور. وأكد نقده التوازن الهش بين الممارسة التجريبية والاستدلال النظري، وهي جدلية واصلت تشكيل الفكر المعماري والخطاب الهندسي في عصر النهضة وما بعده.

الحل والإرث

أفضت مناقشات ميلانو في النهاية إلى تركيب عملي وازن بين المطالب المتنافسة. ودمج التصميم النهائي عناصر من مقترحات متعددة، فأنشأ منشأ يحقق المثل الهندسية والقيود العملية معاً. والأهم أن العملية الموثقة للاستشارة التقنية والنقاش أرست سوابق لاتخاذ القرار المعماري المنهجي.

ويبرهن اكتمال الدومو عبر قرون عدة، مع تعديلات وتكييفات مختلفة، على مرونة الأنظمة الإنشائية حسنة التصور. فعلى خلاف بوفيه، التي فشلت على نحو كارثي حين دفعت إلى ما وراء الحدود التجريبية، نجحت ميلانو بالحفاظ على المرونة واستيعاب الدروس المستفادة من خبرة البناء المستمرة.

4.4.3 بازيليك القديس بطرس: من الأزمة إلى التحليل العلمي

شكلت الأزمة الإنشائية في بازيليك القديس بطرس في القرن الثامن عشر نقطة تحول في الهندسة المعمارية. فللمرة الأولى، عولجت مشكلة إنشائية كبرى لا بالتعديل التجريبي بل بتحليل علمي منهجي. وقد أرست دراسة جيوفاني بوليني معايير جديدة للمنهج الهندسي، وبينت كيف تستطيع الميكانيكا النظرية إضاءة مشكلات البناء العملية.

تصميم ميكيلانجيلو الطموح

مثلت قبة بازيليك القديس بطرس، التي صمم ميكيلانجيلو معظمها واكتملت عام 1590، ذروة الطموح الإنشائي في عصر النهضة. وقد استلهمت قبة برونليسكي في فلورنسا، الشكل 4.4.4، لكنها تجاوزتها في الارتفاع والبحر معاً، فطرحت تحديات هندسية اختبرت حدود البناء الحجري.

علامات الإنذار المبكر والاستجابة المؤسسية

ظهرت في القبة بحلول أوائل القرن السابع عشر شقوق مقلقة. وعلى خلاف بنائي العصور الوسطى، الذين ربما عالجوا مثل هذه المشكلات بتقوية تدريجية، واجهت روما القرن الثامن عشر الأزمة بصرامة علمية غير مسبوقة.

كانت قبة بازيليك القديس بطرس في روما تبدي علامات تلف وتشقق منذ عام 1630. وبحلول عام 1742، بلغ التدهور حداً دفع البابا بندكت الرابع عشر إلى إصدار أمر بدراسة رسمية. وكلف في النهاية ثلاثة رياضيين، الآباء روجيرو جوزيبي بوسكوفيتش وتوماس لو سور وفرانسوا جاكييه، بتقييم المنشأ (Benvenuto, 1991b, pg. 352). وقد اختزل تحليلهم البناء المعقد للقبة، بما فيه القاعدة والدعامات والأسطوانة والقشرتان والفانوس، إلى مخطط ساكن مبسط قابل للتحليل الميكانيكي، أو ما يشبه في المصطلح الحديث منهج العناصر المحدودة. ولاحظوا هبوطاً في الأسطوانة والدعامات، مع هبوط الطرف العلوي لكل ضلع وانفتاح طرفه السفلي (López, 2006, pg. 1958).

تعيين بوليني: الخبرة والاستقلال

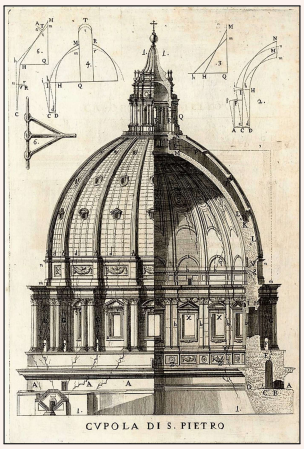
لم يقتنع البابا بندكت الرابع عشر بخلاصة اليسوعيين، فعين جيوفاني بوليني للتحقق من نتائجهم بصورة مستقلة. ولم يعكس تعيين بوليني سمعته المتنامية رياضياً وعالماً في الميكانيكا فحسب، بل إدراك الفاتيكان أن المشكلة تتطلب صرامة علمية وبصيرة عملية معاً. وكان بوليني، أستاذ جامعة بادوفا ومستشار الأعمال الهيدروليكية والميكانيكية، قد أثبت بالفعل قدرته على وصل النظرية بالبحث التجريبي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولم تقتصر مؤهلات بوليني على الرياضيات النظرية. فقد صمم أجهزة حساب ميكانيكية وطور أدوات متقدمة للدراسات الهيدروليكية. ولم يضاهه أحد من معاصريه في قدرته على قياس الظواهر الميكانيكية وتحويل المبادئ المجردة إلى حلول عملية.

الابتكار المنهجي: تحليل القطاعات

لاحظ بوليني أن شقوق القبة كانت قد قسمتها بالفعل إلى قطاعات تشبه الأهلة نصف الكروية، أو شرائح البرتقال، الشكل 4.21.



شكل 4.21: ملاحظة بوليني للشقوق في قبة القديس بطرس (Poleni, 1748)

ولأغراض التحليل، قسم القبة افتراضياً إلى خمسين هلالاً من هذا النوع (Heyman **and** Poleni, 1988). ثم قيم استقرار قوس ثنائي الأبعاد مكون من هلالين متجاورين يتكئ أحدهما على الآخر عند التاج. وبالاستعانة برسم لمقطع القبة، حسب بوليني وزن كل هلال، فقسمه إلى 16 قطاعاً وأخذ وزن الفانوس في الحسبان، الشكل 4.22a.

تجارب نموذج السلسلة الثورية

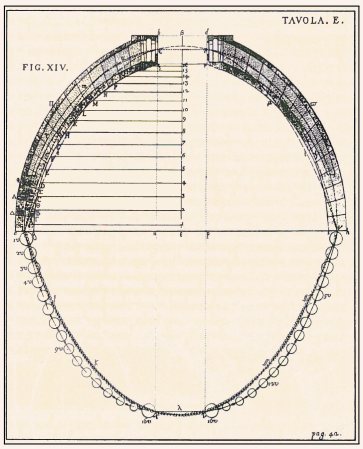
كان أبرع ابتكارات بوليني استخدام *نماذج فيزيائية* للتحقق من حساباته التحليلية. فقد قدمت تجاربه بالسلاسل المعلقة إثباتاً حدسياً للنتائج النظرية، وأوضحت العلاقة الأساسية بين الشد والضغط في الأنظمة الإنشائية.

ثم أنشأ نموذجين فيزيائيين من السلاسل: استخدم الأول كرات منتظمة تمثل منحنى سلسلياً مثالياً، وصنع الثاني من ست عشرة «كرة صغيرة من الرصاص توافق أوزانها الأوزان العددية المبينة في العمود الرابع من الشكل 4.22a». ثم قارن المنحنيات الفعلية بخطي الدفع، وخلص إلى أن الفروق كبيرة جداً مع المنحنى السلسلي، لكنها صغيرة جداً مع سلسلة كرات الرصاص، إذ يقع منحناها داخل القبو (Benvenuto, 1991b, pg. 382). ومن ثم استنتج بوليني، على نحو صحيح، أن القبة المقسمة افتراضياً مستقرة، وأن القبة الأصلية، متشققة أو غير متشققة، مستقرة من *باب أولى*.

ردد استخدام السلاسل المعلقة لمحاكاة خطوط الدفع الضاغطة أفكاراً طرحها روبرت هوك قبل قرن: *كما يعلق الخط المرن، يقف القوس الصلب إذا قلب*. وكان منهج بوليني إثباتاً فيزيائياً لهذا المبدأ واستباقاً للطرائق البيانية التي استخدمها مهندسو القرن التاسع عشر مثل كولمان ورانكين.

التقييم الشامل للضرر

شرع بوليني عندئذ في بحث «طبيعة» مواد القبة و«عوارضها»: الحجر والطوب والملاط. ودرس تأثير البرد والحرارة والرطوبة والجفاف. كما بحث أثر الاحتكاك وعيوب البناء الناتجة من «عمل الحرفيين»، والأضرار الخارجية كالصواعق والزلازل.



(b) نماذج السلاسل المعلقة

COLONNA I.	COLONNA II.	COLONNA III.	COLONNA IV.
NVMERI DE' CVNEI.	LVNGHEZZE DE' RAGGI.	PESI DE' CVNEI.	PROPORZIONE DE' PESI IN NVMERI MINORI.
A. 1.	200.	88976.	89.
B. 2.	198.	88086.	88.
C. 3.	195.	86752.	87.
D. 4.	191.	84972.	85.
E. 5.	184.	81858.	82.
F. 6.	177.	78743.	79.
G. 7.	168.	74740.	75.
H. 8.	159.	70735.	71.
K. 9.	148.	65842.	66.
L. 10.	135.	60059.	60.
M. 11.	122.	54275.	54.
N. 12.	108.	48047.	48.
P. 13.	92.	40929.	41.
Q. 14.	76.	33811.	34.
R. 15.	60.	26693.	27.
S. 16.	41.	18240.	18.
	2254.	1002758.	1004
S. 16.	43.	18240. Capo-lino. 81629.	81
		99869.	100.

(a) جدول يلخص البيانات والنتائج التجريبية

شكل 4.22: تشبيه بوليني بالسلسلة المعلقة (Poleni, 1748)

فلسفة التشخيص والمعالجة

جسدت توصيات بوليني النهائية فلسفة حفظ ستصبح معياراً في صون العمارة: أدنى قدر من التدخل، واحترام مقصد التصميم الأصلي، والرصد المنهجي للسلوك الإنشائي[7].

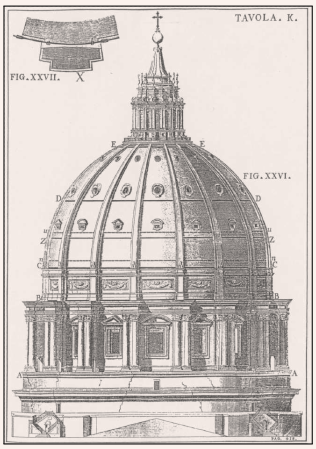
وخلاصة الأمر أن بوليني عزا الضرر الظاهر في القبة إلى عيوب مواد البناء وطرائق التنفيذ، لا إلى عدم الاستقرار الإنشائي. وأوصى بإعادة القبة إلى حالة تقارب أصلها قدر الإمكان. وشمل ذلك ملء الشقوق، ولا سيما في الأقواس الرئيسة، بأوتاد برونزية وحجارة مقطوعة خصيصاً وجص ناعم.

وكانت التوصية النهائية تقوية القبة بست حلقات حديدية جديدة. فعلى الرغم من أن القبة لم تكن في خطر انهيار وشيك، رأى بوليني أن من الحكمة تقويتها من أضرار لاحقة. وكان مقرراً وضع حلقات حديدية حول الأسطوانة لإسناد المنشأ الأسطواني، الشكل 4.23a. كما أضيفت حلقتان جديدتان حول القبة نفسها، وفحصت الحلقات القديمة وأخضعت للرصد.

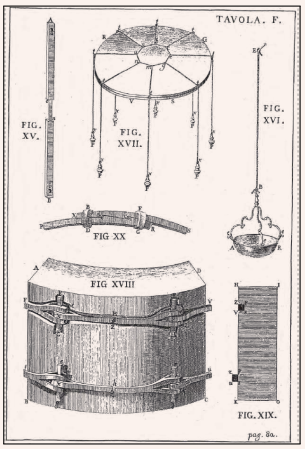
ردد اقتراح بوليني تقوية القبة بحلقات حديدية السلاسل المدفونة التي استخدمها برونليسكي في قبة سانتا ماريا دل فيوري في فلورنسا. غير أن حلقات بوليني كانت ظاهرة من الخارج وخاضعة للرصد، خلافاً لسلاسل برونليسكي المخفية داخل البناء، وهو قرار يعكس تطور فلسفة الشفافية الإنشائية والصيانة النشطة.

[7] خالف أوجين فيوليه-لو-دوك (1814–1879) هذه المبادئ مخالفة شهيرة في وقت لاحق، إذ قدمت «ترميماته» في القرن التاسع عشر الاكتمال الأسلوبي على الأصالة التاريخية. ومن أبرز الأمثلة أنه أضاف إلى نوتردام باريس برجاً مركزياً لم يوجد قط في التصميم الأصلي للعصور الوسطى، مبرراً الإضافة بأنها تكمل ما اعتقد أن البنائين الأصليين قصدوه. وقد انطوت فلسفته في «الترميم» على إنشاء نسخة مثالية من العمارة القوطية بدلاً من صون النسيج التاريخي الفعلي. ومع أن هذا المنهج أنتج نتائج لافتة بصرياً، فإنه ناقض جوهرياً مبدأي بوليني في الحد الأدنى من التدخل واحترام مقصد التصميم الأصلي. ويبين التباين بين محافظة بوليني العلمية وتدخلية فيوليه-لو-دوك الرومانسية تطور فلسفة الحفظ، إذ تميل الممارسة الحديثة عموماً إلى منهج بوليني الأكثر تحفظاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) مواقع الحلقات الست الجديدة



(b) تجارب السلاسل الحديدية لتطويق القبة

شكل 4.23: تقوية القبة (Poleni, 1748)

التحقق التجريبي وضبط الجودة

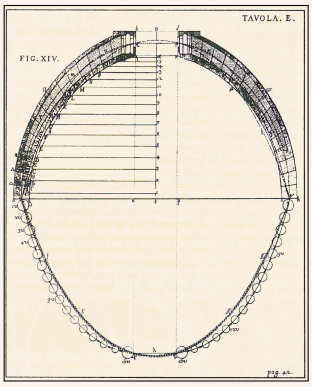
اختبر بوليني، وفاءً لعقله المتسائل، قضباناً حديدية أخذها من ورش مختلفة، الشكل 4.23b، ليتأكد من قدرتها على مقاومة إجهادات الطوق التي تفرضها القبة. وتعكس هذه الصرامة التجريبية التزامه الأوسع بإسناد التوصيات إلى دليل كمي.

الأثر الدائم في الممارسة الهندسية

استبق إطار بوليني التحليلي، القائم على شروط الاتزان والاستاتيكا البيانية، تقنيات تحليل الحد الحديثة. وأرسى اعتماده على النظائر الفيزيائية، مثل السلاسل المثقلة، أساس التطورات اللاحقة في نظرية المنشآت الحجرية، ولا سيما أعمال غاودي في §15.5.1.2 عند تصميم ساغرادا فاميليا.



(a) نموذج غاودي السلسلي لساغرادا فاميليا (Dragicevic and Jansen, 2012)



(b) نموذج بوليني بالسلسلة المعلقة

شكل 4.24: ساغرادا فاميليا لغاودي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أرسى إصرار بوليني على صون البناء الأصلي مع إضافة تقويات منفصلة قابلة للعكس مبادئ ما زالت محورية في حفظ العمارة. وقد وازن منهجه احترام التكامل التاريخي والاعتراف بالضرورة الإنشائية، وهي فلسفة ما زالت توجه حفظ التراث اليوم.

وتعد دراسة بوليني اليوم حالة تأسيسية في تعليم الهندسة الإنشائية، إذ تبين تكامل التحليل النظري والتحقق التجريبي والتطبيق العملي. ويمثل عمله جسراً بين التقاليد التجريبية لبناء العصور الوسطى والمناهج العلمية للهندسة الحديثة.

4.4.4 سانتا ماريا دل فيوري: انتصار حدس برونليسكي الهندسي

لعل قبة برونليسكي لسانتا ماريا دل فيوري أعظم إنجاز فردي في الهندسة الإنشائية قبل العصر الحديث. فقد بنيت من دون قوالب مؤقتة، واعتمدت كلياً على الضبط الهندسي والابتكار المادي، فبرهنت أن العبقرية التجريبية تستطيع تجاوز القيود الظاهرية للتقنية المتاحة. وعلى خلاف دراسات الحالة الثلاث الأخرى، نجحت فلورنسا بالابتكار لا عبر الفشل.

التحدي المستحيل

حين أعلنت سلطات كاتدرائية فلورنسا عام 1418 عزمها على إقامة قبة فوق التقاطع المثمن، عد معظم الخبراء المهمة مستحيلة. فقد تجاوز البحر كل قبة قائمة، وطرحت الهندسة المثمنة تحديات تقنية غير مسبوقة. ويزيد نجاح برونليسكي، حيث لم ير الآخرون إلا الاستحالة، إنجازه روعة.

الأبعاد الرمزية واللاهوتية

ربما أثرت *الكوميديا الإلهية* لدانتي، التي اكتملت قبل تصور القبة بعقود قليلة، في فلسفة تصميمها. فقد صور الشاعر الفردوس ككرات متحدة المركز، مستخدماً من *دائرة إلى دائرة* لوصف الفردوس المتخيل سلسلة من تسع دوائر متحدة المركز[8] (King, 2010).

ابتكار خفي: رباط عظم السمكة

ظل واحد من أبرع ابتكارات برونليسكي خفياً إلى أن كشفته بحوث أثرية حديثة. وقد غير اكتشاف نمط رص الطوب فهمنا لكيفية تحقيق القبة استقرارها الإنشائي أثناء البناء.

كان من الصعب تصور ترتيب الطوب لأن السطح الداخلي للقبة الداخلية كسي بالجص والطلاء، والسطح الخارجي للقبة الخارجية غطي بالقرميد. ولم يتضح الأمر أخيراً إلا حين اكتشف عام 2013 نموذج مصغر للقبة أثناء تجديد مبنى مجاور.

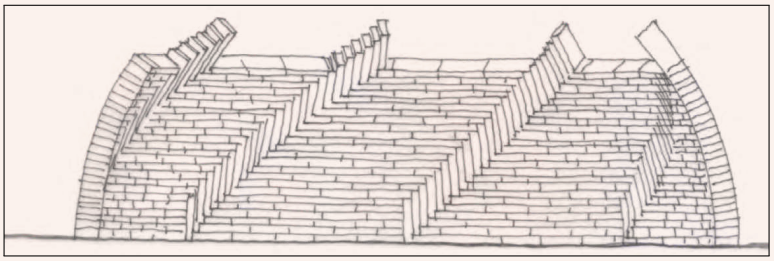
وتأكد أن برونليسكي استخدم ترتيباً للطوب يعرف بعظم السمكة، *سبينا دي بيشه*، الشكل 4.25a، على مسار حلزوني. وينبغي التنبيه إلى أن هذا النمط لم يكن جديداً تماماً، فقد استخدمه الرومان من قبل. وقيل إن الرومان استخدموا هذا النمط، المسمى *أوبوس سبيكاتوم*، لمقاومة الزلازل، وإن كان لأغراض زخرفية فقط. ويعطل هذا الترتيب ضعف مستوى الملاط، ويمنع انفصال أجزاء كبيرة من الجدران أو قصها وسقوطها إلى الأرض، ويلغي مستويات القص المستمرة، فيحول دون انتشار الشقوق.

في نظام برونليسكي، تقطع طوبات رأسية المدماك الأفقية كل ثلاثة أقدام تقريباً، فتقسم كل طبقة جديدة إلى قطاعات أقصر يبلغ طول كل منها نحو خمس طوبات. وأثناء التنفيذ، ربطت الطوبات الرأسية القطاعات القصيرة بعدة طبقات مكتملة أسفلها. وبعبارة أخرى، ثبت كل صف من خمس طوبات في موضعه بالطوبات الرأسية على جانبيه. وعملت هذه كمسندي كتب، تربط

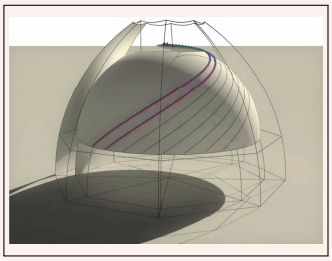
[8] يشير دانتي في الواقع إلى دوائر متحدة المركز في تصوير الجحيم، وإلى كرات متحدة المركز في تصوير السماء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الطبقة الجديدة بالطبقات المكتملة ذاتية الإسناد تحتها. ولمنع نشوء مستوى قص رأسي ضعيف، أزيحت عناصر *سبينا* دي بيشه الرأسية، الشكل 4.25a، لينتج فعلياً منحنى لوكسودرومي[109] (Pizzigoni, 2015)، الشكل 4.25b.



(a) ترتيب طوب *سبينا* دي بيشه (Corazzi, 2012)



(b) المنحنى اللوكسودرومي، أو الحلزون الكروي، (Pizzigoni, 2015)

شكل 4.25: ترتيب الطوب بنمط *سبينا* دي بيشه والمسار اللوكسودرومي

الضبط الهندسي من دون إسناد مؤقت

كان التحدي الكبير التالي رفع القبة: كيف يمكن ضبط تقوس الجدران الثمانية المنفردة أثناء البناء؟ كان انحراف لا يتجاوز بضع بوصات في أحد هذه الأضلاع، التي يزيد طول كل منها على 40 متراً، كفيلاً بمنع تحقق الاتصال. صحيح أن فرق البنائين امتلكت أدوات قياس أساسية، لكن معظمها لم يتغير كثيراً خلال ألف عام، ولم يكن بمستوى التحدي الذي فرضته هذه القبة.

مثل معظم الكاتدرائيات القوطية، كانت قباب عصر النهضة تتناسب وفق قاعدة *كوينتو أكوتو*. أي إن القبة تتكون من قوسين دائريين، نصف قطر كل منهما أربعة أخماس البحر، الشكل 4.26b. ولم يكن هذا الشكل أكفأ إنشائياً من القبة نصف الدائرية فحسب، لانخفاض الدفع الجانبي كثيراً، بل تبنى أيضاً شكل *فيسيكا بيسكيس*[11]، أو مثانة السمكة، والسمكة رمز ليسوع الناصري.

وما زالت المسألة حتى اليوم موضع تكهن واسع، واقترحت نظريات كثيرة. وبعد مراجعة عدد منها، وجد المؤلف المنهج الذي يدعو إليه Jones, Sereni **and** Ricci, 2010 الأكثر قبولاً.

طريقة الحبال: دقة هندسية بابتكار عملي

يمثل حل برونليسكي لمشكلة ضبط التقوس واحداً من أبدع أمثلة الهندسة العملية في التاريخ. فقد حولت طريقة الحبال مبادئ رياضية مجردة إلى تقنية بناء قابلة للتطبيق.

بعد بناء المنصة، الشكل 4.26c، حددت مواقع الأضلاع الرئيسة والثانوية، الشكل 4.26d. ثم وضعت لكل ضلع من أضلاع المثمن، الشكل 4.26e، مجموعتان من الحبال، أو *كوردا بلاندا*:

الحبل الثابت أنشأ نقاطاً مرجعية بمد حبال ذات طول محدد مسبقاً من مراكز *كوينتو أكوتو*. وقد نصفت هذه الحبال زوايا الأركان واصطفت مع السلاسل القطرية أسفلها، بما يضمن الاتساق الهندسي عبر المنشأ المثمن.

[9] اللوكسودروم، أو خط الاتجاه الثابت، منحنى على كرة يقطع جميع خطوط الطول بزاوية ثابتة. وفي الملاحة يمثل مساراً ذا اتجاه بوصلة ثابت، ويظهر خطاً مستقيماً في إسقاط مركاتور. وفي قبة برونليسكي منع هذا النمط الحلزوني تكوّن مستويات ضعف رأسية مستمرة قد تضر بالتكامل الإنشائي، ووزع الأحمال بفاعلية أكبر من الاصطفافات الرأسية المستقيمة.

[10] خط على سطح يقطع جميع خطوط الطول بزاوية ثابتة، لكنها ليست قائمة؛ ويقابل أقصر مسافة بين نقطتين على سطح كروي.

[11] تكوين هندسي ينشأ من تقاطع دائرتين متساويتي نصف القطر بحيث يقع مركز كل دائرة على محيط الأخرى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحبل الثابت

1. حدد كوينتو *أكوتو* الموافق لكل من الطرفين A وE.
2. مد حبلاً ثابتاً طوله يساوي نصف قطر القوس بحيث يقطع المحور الرأسي.
3. يجب أن ينصف الحبل زاوية الركن، لأن المنصف وحده يصطف مع المستوى الشعاعي الرأسي المار بقطر الركن المقابل أسفله، وأن يقع رأسياً فوق السلسلة القطرية السفلية وعلى استقامتها.
4. أسقط خط شاقول، من E_1 وA_1، إلى قطر الركن للتحقق من التنصيف.
5. تقابل نهاية الحبل السطح الداخلي للقبة الداخلية، A_1 وE_1.
6. مد الحبل أبعد لتعليم السطح الخارجي للقبة الخارجية، A_4 وE_4.

الحبل المتحرك ارسم على المنصة منحنى تبعد كل نقطة عليه 36 متراً أيضاً عن نقطة مقابلة على قطاع القبة المزمع بناؤه في الجهة المقابلة، أي بين ركنين متجاورين. ويجب أن يقطع الخط الواصل بين نقطة على المنحنى وقطاع القبة المحور الرأسي المركزي المقابل. ومن ثم يكون B_1-B مساوياً 36 م.13. والمنحنى الجديد مقعر؛ يشبه قوس دائرة لكنه في الحقيقة قوس محاري[12].

يمكن استخدام هذا القوس لتحديد مواضع الطوب وتقوس قطاع القبة الجاري بناؤه في الجهة المقابلة.

ألغاز بلا حل وبحوث مستمرة

على الرغم من البحث العلمي الواسع، تظل جوانب عدة من طريقة برونليسكي غامضة. فما زال الغرض الدقيق من نظام *غوالاندرينو* ذي الحبال الثلاثة، والطرائق الدقيقة لتعليم المحور المركزي للقبة، يحيران الباحثين.

تستند إعادة البناء هذه إلى دراسة Jones, Sereni **and** Ricci, 2010، التي بنى أصحابها نموذجاً للقبة بمقياس 1/5 لدعم نظرياتهم وتنقيحها. ومع ذلك تظل أسئلة مهمة عديدة بلا جواب. ما الغرض الدقيق من *غوالاندرينو* ذي الحبال الثلاثة، الذي يرد ذكره كثيراً ويظل عصياً على الفهم؟ هل كان جهاز أمان للبنائين؟ أم أداة هندسية لضبط رباط الجدار بالإشارة إلى ثلاثة اتجاهات للاصطفاف؟ وتبقى مسألة أخرى: كيف علم برونليسكي محور القبة بدقة؟

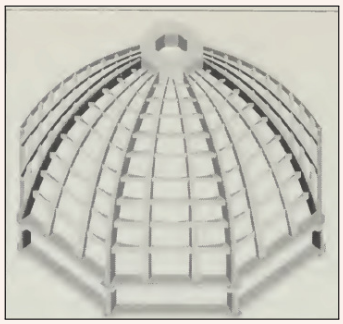
الابتكار الميكانيكي: الرافعة الثورية

بعد اتخاذ قرار العمل بلا أي منشأ للقوالب، بقي على برونليسكي مواجهة مشكلة كبيرة أخرى: كيف ترفع المواد إلى موقع البناء وتوضع بالدقة المطلوبة؟ وقد استلزم ذلك تصميم أجهزة متخصصة ذات تعقيد ميكانيكي غير مسبوق.

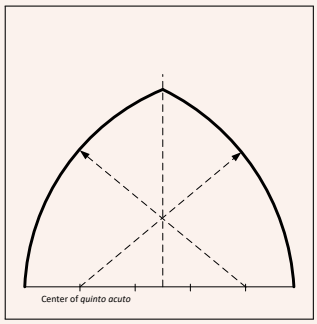
ابتكر برونليسكي رافعة تديرها الثيران تتكون من إطار خشبي تتصل به عدة أعمدة أفقية ورأسية يدير بعضها بعضاً بواسطة عجلات مسننة مختلفة الأحجام. وكانت الآلة، الشكل 4.27، تتحرك بواحد أو اثنين من الثيران مربوطين بعارضة تدير العمود الرأسي. وزود العمود بعجلتين مسننتين، إحداهما في أعلاه والأخرى في أسفله، ويمكن لأي منهما التعشيق مع عجلة أكبر كثيراً على محور أفقي. ولم يكن ممكناً تعشيق أكثر من عجلة واحدة على الدوار في الوقت نفسه؛ خصصت إحداهما لرفع الأحمال والأخرى لخفضها. وكان تغيير التروس يتم بلولب كبير ذي سن حلزوني. فعند تدويره في أي اتجاه، يرفع الدوار أو يخفضه بضع بوصات، فيعشق أحد ترسيه مع أسنان عجلة متصلة بأكبر بكرات الحبال الثلاث (King, 2010).

[12] المحاري منحنى ينشأ من نقطة ثابتة ومنحنى معطى ومسافة ثابتة. ويتكون تحديداً من جميع النقاط التي تبعد مسافة ثابتة عن منحنى معطى، مقيسة على خطوط تمر بنقطة ثابتة. وقد ابتكره الرياضي اليوناني القديم نيقوميدس، نحو 280–210 قبل الميلاد، لحل مسائل هندسية كلاسيكية مثل تثليث الزاوية. وفي طريقة برونليسكي، ضمن المنحنى المحاري على المنصة حفاظ البنائين على الموضع الدقيق ثلاثي الأبعاد للحجارة بإبقاء مسافات ثابتة إلى قطاعات القبة قيد البناء. والمحاري هنا مشتق من نقطة ثابتة O، وهي تقاطع المحور الرأسي والحبال الثابتة، ومنحنى آخر على المنصة، وطول d يساوي هنا 36 م.

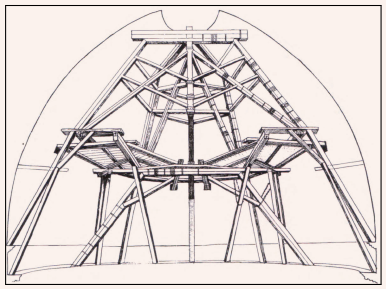
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



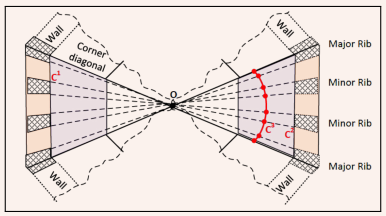
(a) تسع حلقات أفقية (King, 2010)



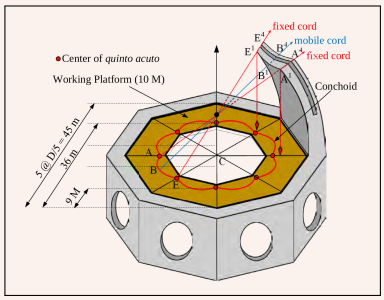
(b) كوينتو أكوتو



(c) السقالات (Nelli and Cec-cherelli, 1753)

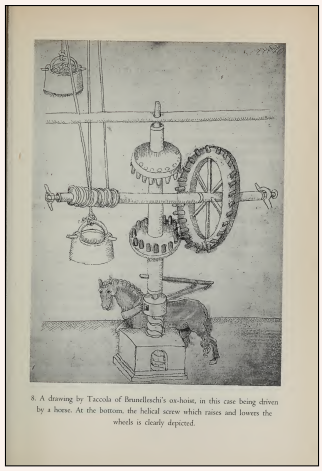


(d) المسقط الأفقي، مقتبس من Jones, Sereni and Ricci, 2010)



(e) الحبال الثابتة والمتحركة، مقتبس من Jones, Sereni and Ricci, 2010) بقلم Y. Gakuhari)

شكل 4.26: بناء قبة سانتا ماريا دل فيوري



شكل 4.27: رافعة برونليسكي التي تديرها الثيران (King, 2010)

بصيرة إنشائية: تقوية مدفونة

على خلاف قبة القديس بطرس، التي احتاجت إلى تقوية لاحقة بحلقات حديدية خارجية، دفن برونليسكي سلاسل أفقية داخل البناء منذ البداية. ويبرهن هذا المنهج الوقائي في مقاومة شد الطوق حدساً إنشائياً لافتاً، وربما يفسر لماذا لم تحتج قبة فلورنسا قط إلى تدخل إنشائي كبير.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إرث الابتكار العقلاني

وأخيراً، يعترف العالم ببرونليسكي «مخترعاً» للمنظور الخطي في عصر النهضة، ويراه كثيرون أول دعاة *العمارة العقلانية* الكبار. ولا تمثل قبته، التي صممت ونفذت بلا قوالب، أعجوبة هندسية فحسب، بل توليفاً للهندسة والرمزية والابتكار. وعلى خلاف قبة القديس بطرس التي احتاجت إلى تقوية لاحقة بحلقات حديدية، دفن برونليسكي داخل بناء القبة سلاسل أفقية لمقاومة شد الطوق منذ البداية، وهي استراتيجية وقائية ربما جنبت فلورنسا مصير التشقق الذي ظهر لاحقاً في روما.

خلاصة: أربعة دروس في الطموح الإنشائي

تلقي المصائر المتباينة لهذه المشروعات المعمارية الأربعة الكبرى الضوء على مبادئ أساسية في الهندسة الإنشائية ما زالت وثيقة الصلة اليوم:

- **بوفيه:** تبين العواقب الكارثية لتجاوز الحدود التجريبية من دون فهم كاف لآليات الفشل. فقد وقع الانهياران حين دفع البناؤون المنشأ إلى ما وراء النطاقات الإنشائية المثبتة.
- **ميلانو:** تبين كيف تستطيع الأطر المؤسسية والاستشارة المنهجية معالجة القرارات التقنية المعقدة. وقد أرست المناقشات بين النظرية والممارسة سوابق للتصميم القائم على الدليل ما زالت تؤثر في الممارسة المهنية.
- **القديس بطرس:** يمثل ظهور المنهج العلمي في التقييم الإنشائي. فقد أرسى منهج بوليني التحليلي معايير للبحث المنهجي والتحقق التجريبي وفلسفة الحفظ، ما زالت محورية في هندسة التراث.
- **فلورنسا:** تجسد كيف يستطيع التفكير المبتكر تجاوز القيود التقنية الظاهرية. فقد حقق توليف برونليسكي بين الضبط الهندسي والابتكار المادي والبراعة الميكانيكية ما عدته المناهج التقليدية مستحيلاً.

تكشف دراسات الحالة مجتمعة أن نجاح الهندسة الإنشائية لا يتطلب الكفاءة التقنية وحدها، بل الحكمة المؤسسية والصرامة المنهجية والرؤية المبتكرة أيضاً. ولا يزال الحوار بين المعرفة التجريبية والفهم النظري، الذي صيغ أول مرة في مناقشات ميلانو، يشكل طريقتنا في مواجهة التحديات الهندسية المعقدة اليوم.

4.5 جدول موجز

يقدم الجدول 4.3 ملخصاً زمنياً للأعمال والمنشآت والتحليلات الرئيسة المعروضة في هذا الفصل.

جدول 4.3: ملخص زمني للأعمال الرئيسة

السنة	المؤلف أو البنّاء	الكتاب أو المنشأ	ملخص المحتوى
1144	الأب سوجر	بازيليك كاتدرائية سان دوني (Como, 2013)	أول منشأ قوطي؛ أقبية مضلعة وأقواس مدببة وزجاج ملون؛ يمثل الانتقال من الكتلة الرومانسكية إلى الهيكل القوطي.
1194–1250م	علمو بناء شارتر	كاتدرائية شارتر (Como, 2013)	أعيد بناؤها بعد حريق؛ مزيج رومانسكي قوطي؛ دعامات طائرة مبكرة وبرنامج زجاج واسع.
1220–1288م	علمو بناء أميان	كاتدرائية أميان (Elizalde, 2025)	أعلى كاتدرائية قوطية مكتملة، قبوها 42.3 م؛ تدعيم محسن ونموذج للقوطية العليا.
1225–غير متعددون مكتملة		كاتدرائية بوفيه (Elizalde, 2025)	خورس بارتفاع 48 م؛ انهياران عامي 1284 و1573؛ دراسة جنائية لحدود النحافة القوطية؛ تؤكد التحليلات اللاحقة العيوب الموضعية والتدعيم.

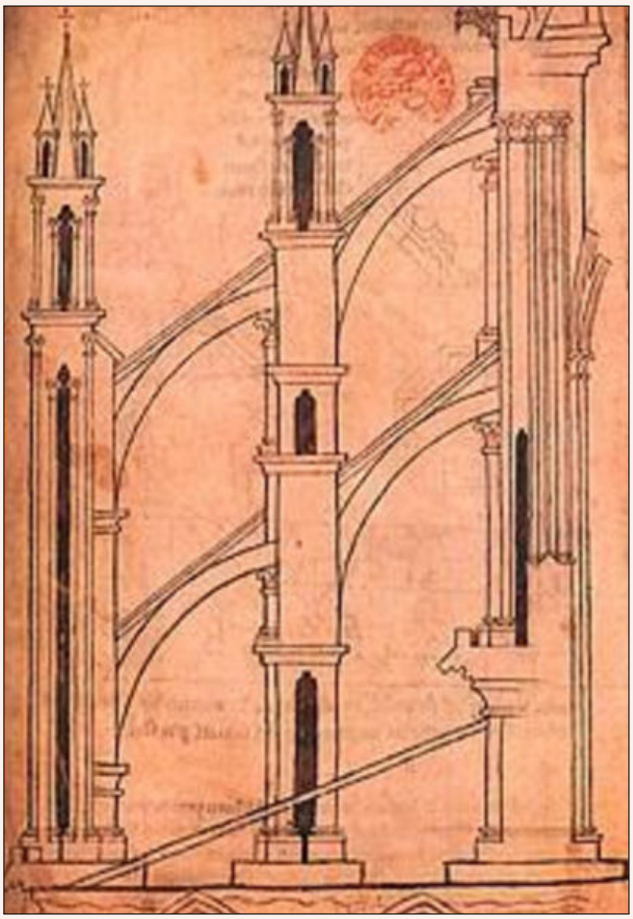
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السنة	المؤلف أو البنّاء	الكتاب أو المنشأ	ملخص المحتوى
1284	—	انهيار بوفيه عام 1284 (Heyman, 1967)	فشل قبو الخورس تحت الأحمال العادية؛ يبين تحليل الحد اتزاناً أولياً؛ ضاعفت إعادة البناء الركائز وزادت ميل الدعامات الطائرة.
1386–1965	المعددون	كاتدرائية ميلانو، الدومو، (Ackerman, 1949)	أكبر منشأ قوطي إيطالي؛ حوكمة فابريكا؛ مناقشات الارتفاع وفق *المربع* أو *المثلث*؛ نقد جان مينيو.
1391	ستورنالوكو	مخطط ارتفاع، 84 براشيا، (Sebregondi and Schofield, 2016)	عقلن ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع ليصبح قابلاً للقياس؛ وأثر في حل ميلانو الهجين.
1392	هاينريش بارلر	مقترح على طراز كولونيا، 96 براشيا، (Ackerman, 1949)	ارتفاع ذو مقطع مربع وفق سابقة القوطية الألمانية العليا.
نحو 1225–1250	فيلار دو أونيكور	دفتر الرسوم، كارنيه، (De Honnecourt, 2006)	قواعد التناسب والهندسة للبنائين؛ والهندسة المقدسة الموجهة للممارسة.
1486	ماتياس روريتسر	*الهندسة بالألمانية* (Shelby, 1972)	مسائل عملية في الهندسة القوطية؛ رسم المضلعات والجملونات والزخارف النهائية.
1590	ميكيلانجيلو، التصميم	قبة القديس بطرس (López, 2006)	قبة مزدوجة القشرة؛ أدى تشققها اللاحق إلى تحقيقات إنشائية في القرن الثامن عشر.
1742–1748	جيوفاني بوليني	تقرير عن قبة القديس بطرس (Poleni, 1748)	تحليل أوزان القطاعات؛ تجارب السلسلة المعلقة؛ أوصى بحلقات حديدية.
1418–1436	فيليبو برونليسكي	قبة سانتا ماريا دل فيوري (King, 2010)	بنيت بلا قوالب؛ رباط عظم السمكة وهندسة الحبال ورافعة الثيران وسلاسل مدفونة.
نحو 1750	بوسكوفيتش ولو سور وجاكييه	تقييمات القديس بطرس (Benvenuto, 1991b)	قراءة ميكانيكية مبكرة للتشوهات؛ تمهيد لتوليف بوليني.
1842	روبرت ويليس	في *إنشاء أقبية العصور الوسطى* (Willis, 1842)	رؤية الضلع عنصراً حاملاً رئيساً؛ خففتها الملاحظة والتحليل لاحقاً.
1854	فيوليه-لو-دوك	*المعجم العقلاني* (Viollet-le-Duc, 1854)	القبو بوصفه مجموعة أقواس؛ وفكرة «مرونة» البناء؛ منظور مؤثر في القرن التاسع عشر.
1891	ليون بنوفيل	تحليل بوفيه (Benouville, 1891)	يحدد الانحراف الجانبي للركائز تحت الدفع سبباً للفشل.
1966	جاك هيمان	*الهيكل الحجري* (Heyman, 1966)	تحليل الحد اللدن للبناء؛ ثلاثة افتراضات ومعيار الأمان بخط الدفع.
1967	جاك هيمان	دراسة بوفيه (Heyman, 1967)	تؤكد الاستقرار الأولي؛ وترجح عيباً موضعياً أو مشكلة في تسلسل التنفيذ.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السنة	المؤلف أو البنّاء	الكتاب أو المنشأ	ملخص المحتوى
1973	روبرت مارك	دراسات الأقبية بالمرونة الضوئية (Mark, Abel **and** O'Neill, 1973)	نماذج إيبوكسية تظهر مسارات الدفع ثلاثية الأبعاد وتركيزات الإجهاد.
2002	جون أوشندورف	أطروحة دكتوراه: *انهيار المنشآت الحجرية* (Ochsendorf, 2002)	تغير الهندسة سبباً للفشل؛ حركيات الكتل الصلبة وآليات الفشل القوطية.
2005	نيكولياكو وآخرون	هندسة الدعامات الطائرة (Nikolinakou, Tallon **and** Ochsendorf, 2005)	هندسة مثالية؛ أنماط السحق والانزلاق وعدم الاستقرار؛ وتأثير المعلمات.
2016	كيم وآخرون	العناصر المحدودة للدعامات الطائرة (Kim, 2016)	نوتردام وأميان وسانت إتيان؛ ترابطات الهندسة والإجهاد ومواطن الضعف.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



فيلار دو أونيكور، رسم للدعامات الطائرة، نحو 1230

استاتيكا بيانية مبكرة: قوى أخرجت إلى الخارج ووجهت نحو الأرض.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5 نشوء العقل العلمي

ملخص

يتتبع هذا الفصل نشوء التفكير العلمي منذ مظاهره الأولى في العصر الذهبي الإسلامي حتى تبلوره في الثورة العلمية وترسخه المؤسسي في عصر التنوير. ويبدأ من بيت الحكمة في بغداد، حيث حفظ العلماء التراث العلمي للعصور القديمة ووسعوه. ثم تنتقل الرواية إلى أوروبا الحديثة المبكرة، موضحة كيف حلت الملاحظة التجريبية والنمذجة الرياضية والتجريب المنهجي محل سلطة أرسطو والعقيدة اللاهوتية. وقد جسدت شخصيات محورية، مثل غاليليو ونيوتن وكبلر وهارفي، مناهج جديدة، في حين كانت مؤسسات مثل أكاديمية لينتشي وأكاديمية تشيمنتو رائدة في البحث العلمي التعاوني. وترسخ هذا التحول بإنشاء مؤسسات علمية دائمة، مثل الجمعية الملكية في لندن وأكاديمية العلوم في باريس. ويبين الفصل كيف أرسى ذلك العصر نموذجاً عاماً للتقدم العلمي، يبدأ بالملاحظة الدقيقة، ويمر بالتعرف التجريبي إلى الأنماط، وينتهي بالفهم النظري الأساسي؛ وهو ما تجسده الحركة من بيانات براهي الفلكية إلى قوانين كبلر ثم توليف نيوتن. ووسع التنوير هذا التحول، فنقل الذهنية العلمية إلى التعليم التقني والتطبيقات الهندسية العملية. ولم يغير هذا التحول الفكري فهم الإنسان للطبيعة فحسب، بل وضع الأسس المنهجية والمؤسسية للهندسة الحديثة والميكانيكا والتحليل المنهجي للمنشآت.

5.1 مقدمة 78
5.2 العالم الإسلامي: بيت الحكمة 79
5.3 الثورة العلمية 80
5.3.1 أسس المنهج الجديد 80
5.3.2 اكتشافات ثورية ومناهج جديدة . 82
5.3.3 المؤسسات العلمية المبكرة 84
5.3.4 التوليف والمأسسة 85
5.4 عصر التنوير: جسر ثقافي 87
5.4.1 انتشار التفكير العلمي 87
5.4.2 صعود التعليم التقني: مدارس الهندسة العسكرية 87
5.4.3 من الفلسفة الطبيعية إلى العلم التطبيقي 88
5.5 خاتمة 88

5.1 مقدمة

يمثل ظهور التفكير العلمي واحدة من أكثر الحلقات تأثيراً في التاريخ الفكري للإنسان. ويبحث هذا الفصل كيف انتقلت البشرية تدريجياً، بين القرنين التاسع والثامن عشر، من رؤية للعالم تقوم على السلطة والتقاليد والتكهن إلى رؤية تقوم على الملاحظة والتجريب والصياغة الرياضية.

تبدأ القصة في العصر الذهبي الإسلامي، حيث حفظت مراكز مثل *بيت الحكمة* التراث الفكري للعصور القديمة ووسعته. وقد بذرت هذه الجهود بذور اليقظة الفكرية اللاحقة في أوروبا. وحطمت الثورة العلمية قبضة المذاهب الأرسطية واللاهوتية، وأحلت محلها المناهج التجريبية والاستدلال الكمي. ولم يكتف غاليليو وديكارت وبيكون ونيوتن باقتراح نظريات جديدة، بل غيروا جذرياً طريقة بناء المعرفة نفسها.

وكان إنشاء المؤسسات العلمية تحولاً لا يقل أهمية. فقد كانت الأكاديميات المبكرة، مثل *أكاديمية لينتشي* و*أكاديمية تشيمنتو*، رائدة في البحث التعاوني القائم على الملاحظة والتجربة. وترسخ إرثها بإنشاء *الجمعية الملكية في لندن* و*أكاديمية العلوم*، اللتين أضفتا الصفة المؤسسية على البحث العلمي ووفرتا إطاراً دائماً لتقدمه.

وسع عصر التنوير هذا التحول، فنشر الذهنية العلمية خارج الفلسفة الطبيعية إلى المجتمع والتعليم والتقنية. وأرسى هذا الانتقال الإطار الفكري الذي سيولد في النهاية الهندسة الحديثة والميكانيكا والتحليل المنهجي للمنشآت. ويتتبع هذا الفصل ذلك الصعود للعقل.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5.2 العالم الإسلامي: بيت الحكمة

كان *بيت الحكمة* مركزاً فكرياً وثقافياً أنشئ في بغداد في عهد *الخلافة العباسية*، ولا سيما في خلافة *هارون الرشيد* (786–809م)، وازدهر في عهد خلفه *المأمون* (813–833م). وقد ظهر في القرن التاسع، قبل وقت طويل من *أكاديمية لينتشي* في روما، التي كثيراً ما تعد أول أكاديمية حديثة للعلوم.

وكان مكتبة ومعهداً للترجمة ومركزاً للبحث، وغدا رمزاً للعصر الذهبي الإسلامي ومحوراً لحفظ المعرفة وإثرائها ونشرها.



(a) مخطوطة تضم رسماً ليحيى بن محمود الواسطي، *المكتبة الوطنية الفرنسية*



(b) كتاب الحيل، الموسوعة البريطانية

شكل 5.1: بيت الحكمة

لم يكن ظهور بغداد مركزاً فكرياً وليد المصادفة. فقد جعلها موقعها الاستراتيجي عند تقاطع طرق التجارة الكبرى التي تصل آسيا وأفريقيا وأوروبا مركزاً تجارياً وبوتقة للأفكار معاً. وعزز الحكام العباسيون، ولا سيما المأمون، المعرفة بوصفها ركيزة أساسية للحكم، فمزجوا البحث العلمي بإدارة الدولة.

أسس بيت الحكمة أولاً مستودعاً للكتب والمخطوطات، ثم تطور سريعاً إلى مركز نابض استقطب علماء من خلفيات متنوعة: مسلمين ومسيحيين ويهوداً وزرادشتيين. وعمل هؤلاء معاً على ترجمة النصوص العلمية والفلسفية والطبية من اليونانية والسريانية والفارسية والسنسكريتية وغيرها إلى العربية، فأتاحوا معرفة الحضارات القديمة للعالم الإسلامي.

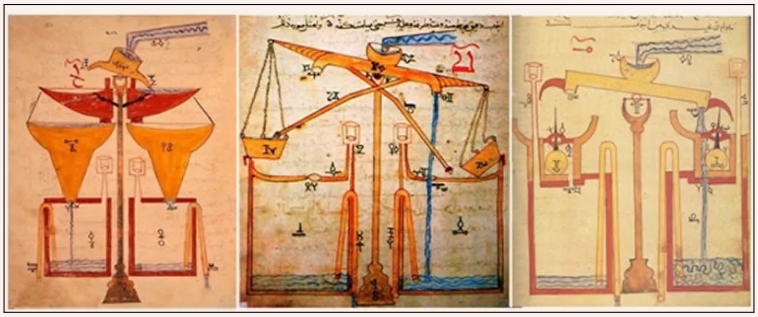
كانت حركة الترجمة التي قادها *بيت الحكمة* حاسمة في حفظ أعمال كبار المفكرين اليونان، مثل أرسطو وأفلاطون وأبقراط، ونقلها، إلى جانب الإسهامات الرياضية والفلكية لإقليدس وبطليموس. لكن المؤسسة كانت أكثر كثيراً من مكتب للترجمة، إذ كانت بوتقة لتقدم علمي أصيل. فقد وضع رياضيون مثل *الخوارزمي* أسس الجبر، وتحقق تقدم بارز في الطب والفلك والبصريات.

صمم الإخوة بنو موسى، أبناء عالم فلك في بغداد، بعض أقدم الآلات القابلة للبرمجة، ومنها أجهزة متقدمة للتحكم الآلي وابتكارات ميكانيكية وصفها *كتاب الحيل* (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850). وترجمت الرسائل العلمية التي أنتجها *بيت الحكمة* لاحقاً إلى اللاتينية وتسربت إلى أوروبا، فبذرت التطورات التي بلغت ذروتها في عصر النهضة، الشكل 5.2.

وإلى جانب العلم بمعناه التقليدي، رعى *بيت الحكمة* ثقافة البحث النقدي والاستقصاء التجريبي. واستضاف المناقشات وشجع الحوار بين تخصصات امتدت من الفلسفة واللاهوت إلى الرياضيات والعلوم الطبيعية. وعكس هذا الانفتاح الفكري روح العصر الذهبي الإسلامي الأوسع، حيث عد طلب المعرفة مسعى عاماً يتجاوز الحدود الثقافية والعرقية والدينية.

بلغت المؤسسة ذروتها في رعاية *المأمون*. فلم يكلف بترجمة الأعمال اليونانية الكبرى، وغالباً برعاية ملكية، فحسب، بل أطلق مشروعات علمية تجريبية. وكان من بينها قياس بالغ الدقة لمحيط الأرض، أنجزته فرق من الفلكيين أرسلت لقياس أقواس خطوط الطول في سهول سنجار وقرب الكوفة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 5.2: ثلاثة مزامير دائمة التشغيل: دلاء مائلة يساراً، وميزان في الوسط، وعوامات يميناً؛ مخطوطة طوب قابي، 1206

في زمن كانت فيه أجزاء كبيرة من أوروبا تكابد الركود الفكري في أوائل العصور الوسطى، أو ما يسمى «العصور المظلمة»، كانت مراكز مثل بيت *الحكمة* منارات للتعلم والحفظ والابتكار. واستمر هذا التفاوت في إنتاج المعرفة قروناً، حتى أعاد اكتشاف كثير من هذه النصوص في أوروبا الوسيطة إشعال البحث العلمي.

تزامن تراجع بيت *الحكمة* مع أفول الخلافة العباسية، وفاقمته الاضطرابات السياسية والمصاعب الاقتصادية. ووجه نهب المغول لبغداد عام 1258م ضربة كارثية، إذ دمر أو شتت معظم محتويات المكتبة.

ومع تدميره، بقي إرث بيت *الحكمة*. فقد أدى دوراً محورياً في حفظ المعرفة القديمة ونقلها إلى الحضارات اللاحقة، ولا سيما أوروبا، حيث أسهم في وضع أسس عصر النهضة. وما زال بيت *الحكمة* رمزاً دائماً للفضول الفكري والتوليف الثقافي، وممثلاً إحدى أكثر حقب التاريخ الإنساني حيوية.

ثم تراجع الإنجاز العلمي في الشرق الأوسط، ولم يعد تماماً إلى الذروة التي بلغها في العصر الذهبي الإسلامي. فمن بين جوائز نوبل العلمية كلها منذ عام 1901، لم تذهب سوى اثنتين إلى فائزين من المنطقة (The Economist, 2025).

5.3 الثورة العلمية

5.3.1 أسس المنهج الجديد

5.3.1.1 نهاية الفلسفة الطبيعية

كانت قبضة أرسطو، والكتاب المقدس بدرجة أقل، شديدة إلى حد أعاق تقدم الفيزياء حتى الثورة العلمية. وعندما ولد غاليليو، لم يكن ثمة علم بالمعنى الحديث، بل *فلسفة طبيعية*[1]. وعند وفاة غاليليو، كانت أسس العلم الحديث قد ترسخت.

وجدير بالذكر أن بذور هذا التحول كانت موجودة بالفعل في أواخر العصور الوسطى. فقد تحدى المفكر الفرنسي نيكول أوريم، نحو 1320–1382، جوانب أساسية من فيزياء أرسطو قبل غاليليو بوقت طويل. وطور طرائق بيانية لتمثيل الكميات المتغيرة، فابتكر في جوهر الأمر مفهوم رسم المتغيرات مع الزمن، وصاغ نظرية السرعة المتوسطة التي نسبت لاحقاً إلى غاليليو. كما بحث أوريم احتمال دوران الأرض حول محورها، واحتج بأن هذه الحركة لا يمكن تمييزها عن دوران السماوات، وإن رفض في النهاية مركزية الشمس لأسباب لاهوتية. ويمثل عمله خطوة مبكرة لافتة نحو ريضنة الفيزياء والتشكيك في السلطات الموروثة، ووضع أساساً فكرياً ستحققه الثورة العلمية كاملاً لاحقاً.

[1] يترجم عنوان نيوتن *المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية*، وهو يعكس استعمال «الفلسفة الطبيعية» آنذاك للدراسة المنهجية للطبيعة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5.3.1.2 دور الرياضيات والتنوير

أرخى التنوير أولاً قبضة أرسطو وأتاح للفلاسفة الطبيعيين التعامل مع العالم بالملاحظة والتجريب. وبعد ذلك بقليل وفر الرياضيون الأدوات الصورية اللازمة لاختزال الظواهر الفيزيائية المعقدة إلى جوهرها، ومكنوا الفيزيائيين من توجيه اهتمامهم إلى مشكلات جديدة (Truesdell, 1968).

5.3.1.3 فرنسيس بيكون وميلاد التجريبية

ترسخت فكرة أن التجريب وسيلة موثوقة للاكتشاف. ويعود قدر كبير من ذلك إلى كتابات المحامي الإنجليزي فرنسيس بيكون (1561–1626) (Bacon, 2000)، الذي دعا إلى منهج جديد جذري يقوم على الملاحظة والتجربة المنهجيتين. ورفض بيكون المناهج المبنية على المنطق المجرد أو التكهن اللاهوتي أو الرياضيات غير المنضبطة:

> لم توجد الفلسفة الطبيعية بعد نقية، بل أصابتها العدوى والفساد: بالمنطق في مدرسة أرسطو؛ وباللاهوت الطبيعي في مدرسة أفلاطون؛ وبالرياضيات في مدرسة أفلاطون الثانية، مدرسة بروكلوس وغيره، مع أن على الرياضيات أن تحد الفلسفة الطبيعية لا أن تنشئها أو تولدها. لكن يرجى خير أكبر من فلسفة طبيعية خالصة غير ممزوجة.
>
> Bacon, 2000 Novum Organum

وكان بيكون متشككاً في الاستدلال من مقدمات مسبقة بدليل غير كاف:

> ...عند إعداد مادة الفلسفة، يستخلص الناس الكثير من أمثلة قليلة، أو القليل من عدد كبير؛ وفي الحالتين تقوم الفلسفة على أساس أضيق مما ينبغي من الخبرة والتاريخ الطبيعي، وتطلق أحكاماً جازمة بأدلة لا تكفي.
>
> Bacon, 2000 Novum Organum

بدأ بيكون، برفض سلطة اللاهوت، عملية حاسمة هي الفصل بين العلم والدين. ويلخص قوله المعرفة قوة اعتقاده أن العلم ينبغي أن يخدم الإنسان. وقد وجدت هذه الروح صدى لدى الطبقات الصناعية الصاعدة في إنجلترا.

5.3.1.4 العقلانية: منهج ديكارت الاستنباطي

في حين دفع بويل وهوك التجريبية البيكونية إلى الأمام، ناصر ديكارت الاستنباط العقلي. ورأى أن المعرفة الحسية غير موثوقة وأن الحقيقة تنشأ من الاستدلال المنطقي. وعلى الرغم من اختلاف منهجيهما، اتفق ديكارت وبيكون على أن العلم ينبغي أن يكون عاماً وقابلاً للتحقق ومنفصلاً عن اللاهوت.

5.3.1.5 تحول الجامعات

تزامنت الثورة العلمية مع تحول تدريجي لكنه جوهري للجامعات الأوروبية من مراكز للتعلم المدرسي إلى مؤسسات تتبنى البحث التجريبي. فقد هيمن على جامعات العصور الوسطى المنهج المدرسي، أي البحث اللاهوتي والفلسفي المنهجي القائم على التوفيق بين فلسفة أرسطو والعقيدة المسيحية بالحجاج المنطقي.

تحدى المنهج العلمي الجديد هذا النهج بتقديم الملاحظة والتجربة على سلطة النص. وبدأت الجامعات تدريجياً إنشاء كراسي في الرياضيات والفلك والفلسفة الطبيعية تؤكد البحث التجريبي. واشتهرت جامعة بادوفا، حيث درس غاليليو، خصوصاً بتأكيد كلية الطب فيها الملاحظة التشريحية المباشرة وانفتاحها على الأفكار الفلكية الجديدة.

لم يكن التحول متجانساً ولا فورياً. فقد بقيت جامعات كثيرة معاقل للتعلم التقليدي إلى زمن متقدم من القرن الثامن عشر. لكن القبول التدريجي للمنهج التجريبي في المناهج الجامعية منح العلم الجديد شرعية مؤسسية، وساعد في تدريب أجيال متعاقبة من العلماء ذوي النزعة التجريبية. ويمثل تطور الجامعة من المدرسية الوسيطة إلى التجريبية الحديثة المبكرة أساساً مؤسسياً حاسماً لاستمرار نمو المعرفة العلمية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5.3.2 اكتشافات ثورية ومناهج جديدة

5.3.2.1 فلك الملاحظة: تيخو براهي

أحدث تيخو براهي (1546–1601) ثورة في علم الفلك لا بابتكار نظري، بل بدقة رصد غير مسبوقة. ومن مرصده أورانيبورغ في جزيرة هفن، جمع براهي أدق بيانات فلكية سابقة للتلسكوب في التاريخ. وبلغت دقة رصده المتأني لمواضع الكواكب، ولا سيما المريخ عبر عقود، نحو دقيقتين قوسيتين، وهو إنجاز لافت للرصد بالعين المجردة.

وضع نموذج براهي الكوني الهجين، المعروف بالنظام التيخوني، الأرض في المركز، تدور حولها الشمس والقمر، فيما تدور الكواكب الأخرى حول الشمس. ومع أن النموذج كان خاطئاً في النهاية، فقد مثل خطوة وسيطة حاسمة بين مركزية الأرض البطلمية ومركزية الشمس الكوبرنيكية. والأهم أن تأكيد براهي القياس الدقيق والجمع المنهجي للبيانات أرسى معايير جديدة للفلك التجريبي.

تحدى رصده للمستعر الأعظم عام 1572، المعروف اليوم بمستعر تيخو، عقيدة أرسطو في ثبات السماء، وأثبت أن السماوات يمكن أن تتغير بالفعل. وجسد هذا التحدي التجريبي للحكمة الموروثة اعتماد المنهج العلمي الناشئ على الملاحظة لا السلطة.

5.3.2.2 الفلك الرياضي: يوهانس كبلر

حول يوهانس كبلر (1571–1630) بيانات براهي الرصدية إلى قوانين رياضية غيرت فهمنا لحركة الكواكب. وبعد أن عمل مساعداً لبراهي وورث بياناته، أمضى كبلر سنوات يحاول التوفيق بين المشاهدات والمدارات الدائرية التي عدت منذ القدم الحركة السماوية «الكاملة».

جاء اختراقه حين أدرك أن مدارات الكواكب إهليلجية لا دائرية. وقدمت قوانين كبلر الثلاثة لحركة الكواكب، التي صيغت بين عامي 1609 و1619، أول وصف رياضي دقيق لسلوكها:

1. **قانون القطوع الناقصة**: تتحرك الكواكب في مدارات إهليلجية تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.
2. **قانون المساحات المتساوية**: يمسح الخط الواصل بين الكوكب والشمس مساحات متساوية في أزمنة متساوية.
3. **القانون التوافقي**: يتناسب مربع زمن دورة الكوكب طردياً مع مكعب نصف المحور الأكبر لمداره.

مثلت هذه القوانين تحولاً مفاهيمياً عميقاً: إذ تستطيع علاقات رياضية مشتقة من بيانات تجريبية وصف الظواهر الطبيعية بدقة غير مسبوقة. وبرهن كبلر أن الجمال الرياضي لا يكمن في كمال هندسي مفترض مسبقاً، بل في البساطة الأنيقة لقوانين الطبيعة. ووضعت إنجازاته الأساس الذي سيبني عليه نيوتن لاحقاً نظرية الجاذبية العامة.

5.3.2.3 من الملاحظة إلى النظرية: نموذج للتقدم العلمي

يشبه هذا التطور الميكانيكا التجريبية الحديثة شبهاً لافتاً. نجمع أولاً بيانات رصد دقيقة، كما فعل براهي؛ ثم نحدد العلاقات التجريبية والأنماط الرياضية فيها، كما فعل كبلر؛ وأخيراً نطور إطاراً نظرياً أساسياً يفسر العلاقات التجريبية ويتنبأ بها، كما فعل نيوتن. ويمكن بالفعل اشتقاق قوانين كبلر الثلاثة رياضياً من قانون نيوتن للجاذبية العامة وقوانين الحركة، وهو ما يبين كيف تكشف الاكتشافات التجريبية غالباً مبادئ أعمق كامنة وراءها.

يتكرر هذا النمط، الملاحظة ثم الترابط التجريبي ثم الفهم النظري، عبر تاريخ الميكانيكا والهندسة. فقد قادت ملاحظات هوك الدقيقة لتشوه النابض إلى قانونه التجريبي الذي يربط القوة بالإزاحة، ثم وجد أساسه النظري في ميكانيكا الأوساط المتصلة ونظرية المرونة. وفي الهندسة الإنشائية، حلت في النهاية محل قرون من قواعد التصميم التجريبية المستمدة من خبرة البناء وملاحظة الفشل طرائق عقلانية للتحليل الإنشائي قائمة على المبادئ الأساسية للاتزان والتوافق وسلوك المواد. وبالمثل أعطت تجارب كولوم المنهجية في الاحتكاك وضغط التربة علاقات تجريبية وجدت لاحقاً أساساً نظرياً في مبادئ ميكانيكا التربة ونظرية اللدونة.

ويصدق هذا التطور حتى في ميكانيكا الموائع: فقد توحدت تجارب توريتشيلي في جريان الموائع وملاحظات برنولي التجريبية لعلاقات الضغط والسرعة وارتباطات تجريبية كثيرة أخرى في النهاية ضمن الإطار النظري لمعادلات نافييه–ستوكس. وتتبع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الميكانيكا الحاسوبية الحديثة المسار نفسه: توجه المصادقة التجريبية النماذج التجريبية، ثم تحل محلها تدريجياً مناهج أكثر جوهرية كلما تعمق فهمنا النظري.

وتمثل طريقة العناصر المحدودة نفسها ذروة هذه العملية: أطر نظرية متقدمة تنفذ حاسوبياً، لكنها تظل محتاجة إلى المصادقة التجريبية والتحقق والمعايرة التجريبية.

5.3.2.4 ثورة التشريح: أندرياس فيزاليوس

كان أندرياس فيزاليوس (1514–1564) رائداً في الدراسة التجريبية لتشريح الإنسان، فتحدى خمسة عشر قرناً من المعرفة الطبية القائمة على السلطة. واستند عمله الكبير في *بنية جسم الإنسان* (1543) (Vesalius, 1998–2009) إلى التشريح المنهجي لجثث البشر بدلاً من الاعتماد على النصوص القديمة، ولا سيما نصوص جالينوس.

اكتشف فيزاليوس أخطاء كثيرة في التشريح الجالينوسي[2]: فالفك يتكون من عظم واحد لا اثنين، والكبد له فصان لا خمسة، وحاجز القلب غير مثقوب. وقد تبدو هذه التصحيحات صغيرة، لكنها مثلت ثورة منهجية أساسية: الملاحظة المباشرة تغلب سلطة النص.

أرسى منهجه مبدأ أن فهم الظواهر الطبيعية يتطلب بحثاً مباشراً لا الخضوع للسلطات الكلاسيكية. ووضعت الرسوم التشريحية المفصلة في في *بنية جسم الإنسان*، التي جمعت البراعة الفنية والدقة العلمية، معايير جديدة للتواصل العلمي وساعدت في نشر المنهج التجريبي في الطب الأوروبي.

5.3.2.5 جهاز الدوران: وليم هارفي

جسد وليم هارفي (1578–1657) المنهج العلمي الجديد باكتشاف الدورة الدموية، الذي نشره في *دراسة تشريحية لحركة القلب والدم في الحيوان* عام 1628 (Harvey, 1628). ومثل عمل هارفي تطبيقاً ناجحاً للاستدلال الكمي على الظواهر الحيوية.

حسب هارفي، بالملاحظة والقياس الدقيقين، أن القلب يضخ نحو 540 رطلاً من الدم في الساعة، وهو أكثر كثيراً مما يستطيع الجسم إنتاجه أو استهلاكه وفق النظرية الجالينوسية السائدة. وقاده هذا البرهان الكمي، مع ملاحظاته للصمامات أحادية الاتجاه في الأوردة والشرايين، إلى استنتاج أن *الدم لا بد أن يدور، بدلاً من أن ينتج ويستهلك باستمرار*.

أصبح منهج هارفي، الذي جمع الملاحظة التشريحية والتحليل الكمي والتحقق التجريبي، نموذجاً للبحث الحيوي التجريبي. وبرهن عمله أن المناهج العلمية الجديدة التي تطورت في الفلك والفيزياء تستطيع إحداث اكتشافات ثورية مماثلة في علوم الحياة.

5.3.2.6 غاليليو: لغة الطبيعة الرياضية

لنبذة عن سيرة غاليليو، انظر §6.6.2.

قدم غاليليو ابتكاراً منهجياً آخر. فبدلاً من البحث عن الأسباب النهائية، ركز على الوصف الرياضي للظواهر القابلة للملاحظة. وفي *الميكانيكا* (Galilei, 1594)، وهو كتاب دراسي للمهندسين، بين كيف تخضع الآلات لقوانين كمية، مستبقاً قوله اللاحق:

> الفلسفة، أي الطبيعة، مكتوبة في هذا الكتاب العظيم المفتوح أبداً أمام أعيننا، أعني الكون؛ لكن لا يمكن فهمه إلا إذا تعلم المرء أولاً لغته وتعرف الرموز التي كتب بها. إنه مكتوب بلغة رياضية... ومن دون معرفة هذه الوسيلة يستحيل فهم كلمة واحدة منه.
>
> Galilei, 1623 Il Saggiatore

[2] تشير النظرية الجالينوسية إلى تعاليم كلوديوس جالينوس الطبية، نحو 129–216م، التي هيمنت على الطب الأوروبي أكثر من 1400 عام. ووفق مذهبه، ينتج الكبد الدم باستمرار من الطعام وتستهلكه أنسجة الجسم، ويتحرك ذهاباً وإياباً كحركة المد بدلاً من الدوران. كما افترضت النظرية نظامين منفصلين للدم الوريدي والشرياني، وعدت القلب فرناً يسخن الدم لا مضخة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حطمت مشاهدات غاليليو بالتلسكوب الاعتقاد الأرسطي في كون ثابت لا يتغير. وأدت مناصرته لمركزية الشمس إلى محاكمته الشهيرة وإقامته الجبرية عام 1633، لكن إرثه أرسى المنهج الفرضي الاستنباطي: صغ فرضية، واستنبط نتائجها، ثم تحقق منها بالتجربة.

5.3.3 المؤسسات العلمية المبكرة

5.3.3.1 إيطاليا: أكاديمية لينتشي

قلما تقرن الثورة العلمية بالإسهام المبكر لمجموعة من الإيطاليين. ومع أنهم لم يصوغوا أسسها الفلسفية كما فعل ديكارت وبيكون، كانوا أول من تبناها بالكامل ووضعها موضع الممارسة.

أسس فريق من العلماء عام 1603 *أكاديمية لينتشي*، أو أكاديمية الوشق، التي تعد أول أكاديمية علمية حديثة. وحمل اسمها تلميحاً مزدوجاً إلى لينسيوس، أحد بحارة الأرغو حاد البصر، وإلى الوشق المشهور بحدة رؤيته (Freedberg, 2003).

رفض أعضاء الأكاديمية الحكمة المعتمدة عمداً كلما تعارضت مع الملاحظة والدليل التجريبي. ووضعهم التزامهم بالفحص البصري والتجريبي في طليعة ما سيغدو المنهج العلمي الحديث، في الوقت نفسه الذي كان فيه فرنسيس بيكون يصوغ مستقلاً فلسفته التجريبية في إنجلترا (Freedberg, 2003). وأدى تحديهم للسلطة الموروثة حتماً إلى صدامهم مع القوى المحافظة في الكنيسة الكاثوليكية.

ويتجسد هذا الصراع في مسيرة غاليليو غاليلي، أشهر أعضاء الأكاديمية. فعندما وجه منظاره إلى السماء، بدأ علم الكون الأرسطي، الذي تبنته الكنيسة حقيقة عقائدية، ينهار. وفقدت الأرض موضعها المميز في مركز الكون لمصلحة نموذج مركزية الشمس. وكان دعم الأكاديمية حاسماً في أكثر سنوات غاليليو إنتاجاً. كما تمتع بحماية البابا أوربان الثامن وابن أخيه الكاردينال فرانشيسكو باربريني، وهو نفسه عضو في الأكاديمية. لكن سحب أسرة باربريني دعمها لاحقاً كان كارثياً، إذ كان البابا أوربان الثامن هو من استدعى غاليليو في النهاية أمام محاكم التفتيش.

كانت *أكاديمية لينتشي* بالفعل مساهماً مبكراً، وإن لم ينل حقه من التقدير، في الثورة العلمية. وما زالت قائمة إلى اليوم بوصفها الأكاديمية الوطنية لإيطاليا ومركزاً حيوياً للحوار بين العلماء الإيطاليين والدوليين.

5.3.3.2 إيطاليا: أكاديمية تشيمنتو

كانت *أكاديمية تشيمنتو*، أو أكاديمية التجربة، جمعية علمية رائدة أسست في فلورنسا عام 1657 برعاية الدوق الأكبر فرديناند الثاني دي ميديشي والأمير ليوبولد دي ميديشي. وكانت من أقدم المؤسسات الأوروبية المكرسة صراحة للعلم التجريبي، ورمزت إلى تحول حاسم من الفلسفة الطبيعية التأملية نحو البحث التجريبي المنهجي. ويلخص شعارها *الاختبار وإعادة الاختبار* التزامها الصارم بالتجريب ورفض الاعتماد على السلطة أو الاستدلال النظري المجرد.

ضمت الأكاديمية علماء بارزين، منهم فينتشنزو فيفياني تلميذ غاليليو؛ وفرانشيسكو ريدي رائد علم الأحياء التجريبي؛ وإيفانجليستا توريتشيلي مخترع البارومتر؛ وجيوفاني ألفونسو بوريلي الباحث المبكر في الميكانيكا الحيوية؛ وكارلو رينالديني. وأجرى هؤلاء بحوثاً واسعة في ضغط الهواء وخصائص الفراغ والتمدد الحراري وميكانيكا الموائع. وحسنوا وطوروا أجهزة كالترمومتر ومقياس الرطوبة والبارومتر، لا أدوات للعرض فحسب، بل أجهزة دقيقة للتجريب المنهجي.

وشملت تجاربهم دراسة أثر ضغط الهواء في درجة غليان السوائل، وقابلية الهواء للانضغاط، وانتقال الحرارة. وسعوا إلى قياس الظواهر الطبيعية بطرائق تجاوزت الاستدلال التأملي تجاوزاً حاسماً.

وفي حين جمعت *أكاديمية لينتشي* علم الملاحظة بطموحات فلسفية واسعة، مثلت *تشيمنتو* تضييقاً للتركيز نحو المناهج التجريبية المعتمدة على الأدوات التي ستعرف العلم الحديث.

ومع أن *أكاديمية تشيمنتو* حلت بعد نحو عقد واحد فقط، قرابة عام 1667، كان أثرها في المجتمع العلمي كبيراً. فقد ساعدت روح الصرامة التجريبية فيها على ترسيخ المنهج العلمي معياراً للبحث. ولخص عمل الأكاديمية التجريبي في منشور عام 1667 *مقالات في التجارب الطبيعية المجراة في أكاديمية تشيمنتو* (Accademia del Cimento, 1667)، الذي أصبح نصاً تأسيسياً في تاريخ العلم التجريبي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

رأى أعضاء الأكاديمية أنفسهم، المتأثرين بشدة بمناهج غاليليو، أوصياء على إرثه، وأكدوا أن الملاحظة والتجريب، لا الميتافيزيقا، ينبغي أن يكونا حجر زاوية المعرفة العلمية.

وعلى الرغم من قصر حياتها، وضعت *أكاديمية تشيمنتو* أساساً حاسماً لإنشاء جمعيات علمية لاحقة، منها *الجمعية الملكية في لندن* و*أكاديمية العلوم* في فرنسا. وقد أضفت هذه المؤسسات الصفة الرسمية على المبادئ التجريبية التي كانت تشيمنتو رائدة فيها ووسعتها، وساعدت في تثبيت المنهج العلمي في صميم العلم الحديث.

5.3.4 التوليف والمأسسة

5.3.4.1 نيوتن: توليف المناهج

لنبذة عن سيرة نيوتن، انظر §6.6.7.

وحد إسحاق نيوتن (1642–1727)، المولود في سنة وفاة غاليليو، هذه المنهجية. فجسد كتابه *المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية* (Newton, 1687 PDF) الاستنباط الرياضي مطبقاً على القانون الفيزيائي، في حين جسد *البصريات* (Newton, 1704) التحقق التجريبي. وما زال منهج نيوتن المزدوج حجر زاوية الممارسة العلمية الحديثة. ويلخص الجدول 5.1 التحول المفاهيمي الذي أحدثته الثورة العلمية.

5.3.4.2 الجمعية الملكية وأكاديمية العلوم

بحلول منتصف أربعينيات القرن السابع عشر، كانت أفكار بيكون قد انتشرت على نطاق واسع، وبلغت ذروتها بإنشاء الجمعية الملكية في لندن لتحسين المعرفة الطبيعية عام 1660، وشعارها لا *تأخذ بكلام أحد*، أي لا تصدق أحداً لمجرد قوله. وأصبح اللورد برونكر أول رئيس لها، وكان روبرت بويل (1627–1691) عضواً مبكراً مؤثراً ثم رئيساً. وكان بويل، المستلهم من غاليليو وديكارت، تجريبياً متفانياً ورائداً في دراسة الغازات. وقد أثبت في تجربة شهيرة أن ريشة وكتلة من الرصاص تسقطان بالمعدل نفسه في الفراغ، مؤكداً تجارب غاليليو الفكرية.

عين بويل روبرت هوك[3] (1635–1703) أميناً للتجارب. وجسد هوك، الموسوعي البارع وصانع الأدوات، الروح التجريبية. ويبدأ كتابه *الفحص المجهري* (Hooke, 1665) بقوله:

> الحقيقة أن علم الطبيعة ظل زمناً أطول مما ينبغي عملاً للعقل والخيال وحدهما. وقد آن له أن يعود إلى بساطة الملاحظات وسلامتها في الأشياء المادية الظاهرة.
>
> Hooke, 1665 Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon

نشر هوك عام 1676 قانون المرونة الخطي، أو قانون هوك، مبيناً أن الانفعال يتناسب مع الإجهاد عند التشوهات الصغيرة. وما زال هذا المفهوم التأسيسي حاسماً في المرونة، ولا تزال العلاقات التكوينية من هذا النوع تحدد تجريبياً إلى اليوم.

مثل تأسيس *أكاديمية العلوم* في باريس عام 1666، إلى جانب الجمعية الملكية، المأسسة الدائمة للعلم. وقد أضفت الأكاديميتان الصفة الرسمية على روح الثورة العلمية: الاعتماد على الملاحظة التجريبية والتجريب والتحليل الرياضي.

جسدت هذه المؤسسات، بشعارات مثل شعار الجمعية الملكية *لا تأخذ بكلام أحد*، رفض المعرفة القائمة على السلطة. ووفرت إطاراً دائماً للبحث التعاوني ومراجعة الأقران والنشر العام للنتائج العلمية.

والأهم أن الأكاديميات لم تكن منتديات للفلسفة الطبيعية فحسب، بل سرعان ما امتدت إلى مجالات عملية: الفلك والملاحة والهندسة وعلم المواد والميكانيكا التطبيقية. وساعدت في تحويل العمل المنفرد للعلماء إلى المشروع الجماعي للعلم الحديث.

[3] انظر §6.6.6 لنبذة عن هوك.

5.3.4.3 التجربة والنظرية في العلم الحديث

يمتد هذا الازدواج إلى الهندسة. فالتجريبيون مثل موسخنبروك، والمنظرون مثل أويلر، يمثلون نمطين متوازيين للبحث: تجارب فيزيائية في عالم المادة و«تجارب» رياضية في عالم النماذج المجرد (Goss, 2009). وتستطيع النماذج الرياضية اقتراح التجارب الفيزيائية الجديرة بالإجراء، فيما تستطيع النتائج الفيزيائية تنقيح الافتراضات الرياضية أو تحديها. وحين نضج هذا التفاعل، كما يتجلى في قبول باوشينغر للإلاستيكا، أصبح سمة مميزة للعلم الحديث.

جدول 5.1: التحول المفاهيمي في الثورة العلمية

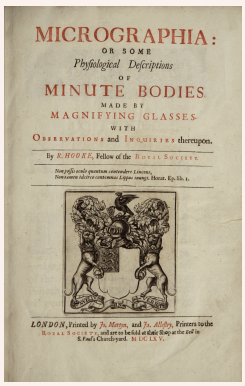
النموذج الجديد	النموذج القديم
المعرفة من الملاحظة والتجربة والاستدلال	المعرفة من السلطة، أرسطو والنصوص المقدسة
قوانين كمية رياضية	أوصاف نوعية
الأسباب الفاعلة، *كيف*	الأسباب الغائية، *لماذا*
كون قائم على مركزية الشمس	كون قائم على مركزية الأرض
كون دينامي تحكمه قوانين عامة	كون ساكن ثابت
منهج فرضي استنباطي يخضع للاختبار التجريبي	استنباط من المبادئ



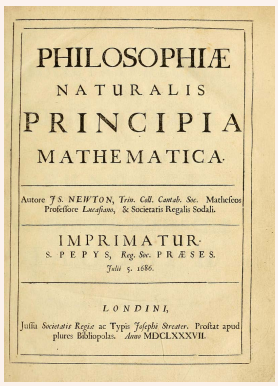
(a) بيكون (1626–1561)



(b) غاليليو (1642–1564)



(c) هوك (1703–1635)



(d) نيوتن (1727–1643)

شكل 5.3: الأعمال المؤسسة للثورة العلمية لدى غاليليو ونيوتن وبيكون وهوك

وضع هذا التحول الأساس الفكري لظهور الجمعيات العلمية الرسمية، التي جعلت المنهج العلمي الوسيلة المركزية للبحث في فهم العالم الطبيعي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) أكاديمية لينتشي (1603)



(b) أكاديمية تشيمنتو (1657)



(c) الجمعية الملكية (1660)



(d) أكاديمية العلوم (1666)

شكل 5.4: مأسسة العلم

5.4 عصر التنوير: جسر ثقافي

بحلول القرن الثامن عشر، امتدت الذهنية العلمية التي صاغها القرن السابق إلى ما وراء الرياضيات والفيزياء، فشملت الفلسفة والحكم والتعليم والحياة الفكرية الأوروبية الأوسع. وتميزت هذه الحركة، التنوير، بالإيمان بأن العقل البشري والملاحظة التجريبية والتفكير النقدي يمكن تطبيقها تطبيقاً عاماً، لا على الظواهر الطبيعية وحدها، بل على المجتمع الإنساني أيضاً[4].

5.4.1 انتشار التفكير العلمي

رسخ التنوير رفض الاحتكام إلى السلطة، سواء كانت لاهوتية أو أرسطقراطية أو مدرسية، لمصلحة الاستدلال المنهجي والدليل. ودافع مفكرون مثل فولتير وديدرو ومونتسكيو وكوندورسيه عن نشر المعرفة وسيلة لتحسين المجتمع. ولم يكن إنشاء أعمال شاملة مثل *الموسوعة* تمريناً فكرياً فحسب، بل مهمة ثقافية لإتاحة المعرفة للجميع (Diderot **and** d'Alembert, 1751).

نقل تبسيط فولتير لأفكار نيوتن التفكير العلمي إلى جمهور مثقف أوسع، فيما نظمت موسوعة ديدرو ودالمبير المعرفة الإنسانية منهجياً وفق مبادئ عقلانية. وبرهن هذا المشروع الضخم إيمان التنوير بأن جميع مجالات الخبرة الإنسانية، من الظواهر الطبيعية إلى المؤسسات الاجتماعية، قابلة للفهم بالبحث المنهجي والتحليل المنطقي.

وأصبح تأكيد المنهج العلمي للملاحظة وصياغة الفرضيات والاختبار التجريبي نموذجاً للإصلاح الاجتماعي والسياسي. وطبق مفكرو التنوير هذه المبادئ على الحكم والقانون والاقتصاد والتعليم، محتجين بأن التقدم الاجتماعي يمكن تحقيقه بالمناهج العقلانية نفسها التي أحدثت ثورة في الفلسفة الطبيعية.

5.4.2 صعود التعليم التقني: مدارس الهندسة العسكرية

شهد التنوير مأسسة منهجية للتعليم التقني، ولا سيما بإنشاء مدارس الهندسة العسكرية التي ستؤثر تأثيراً عميقاً في تطور الهندسة المدنية والعلوم التطبيقية. وقادت فرنسا هذا التحول، مدفوعة بالضرورة العسكرية ومثل التنوير في التعليم العقلاني العلمي.

أصبحت *المدرسة الملكية للهندسة* في ميزيير، التي أسست عام 1748، أول مدرسة هندسة بالمعنى الحديث في العالم. وتحت

[4] جرت التطورات العلمية في ذلك العصر على خلفية اضطرابات سياسية ودينية كبيرة، منها حرب الثلاثين عاماً والثورة الهولندية وصراعات الإصلاح الديني الأوسع. وساعدت الهجرة الفكرية، ولا سيما إلى مراكز متسامحة مثل الجمهورية الهولندية وسويسرا، على نشر الأفكار. وأتاح توسع صناعة الطباعة، خصوصاً في هولندا، انتشار أعمال علمية كانت تخضع للرقابة في أماكن أخرى، ومنها كتاب غاليليو *علمان جديدان* الذي نشرته دار إلزفير في ليدن.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إدارة كلود-أنطوان كوبليه ثم جان-رودولف بيرونيه، وضعت المدرسة منهجاً صارماً يجمع الرياضيات النظرية بالتطبيقات الهندسية العملية. ودرس الطلاب التفاضل والتكامل والميكانيكا والهيدروليكا وتصميم التحصينات، فدمجوا المبادئ العلمية بالممارسة الهندسية على نحو غير مسبوق.

وتطور هذا النموذج أكثر في *المدرسة الملكية للجسور والطرق*، التي أنشئت عام 1747 تحت إدارة جان-رودولف بيرونيه. ودربت المدرسة المهندسين المدنيين على بناء الجسور والطرق، وطبقت المناهج العلمية على تطوير البنية التحتية. وأصبح خريجوها عماد شبكة النقل الفرنسية، ونقلوا طرائق الهندسة العلمية إلى أنحاء أوروبا ومستعمراتها.

مثل منهج هذه المدارس توليفاً ثورياً: صرامة رياضية مشتقة من الثورة العلمية مقترنة بحاجات هندسية عملية. فتعلم الطلاب حساب التفاضل والميكانيكا وعلم المواد إلى جانب المساحة وتقنيات البناء وإدارة المشروعات. وأرسى هذا الدمج بين النظرية والممارسة نموذج التعليم الهندسي الحديث.

وأثرت مدارس الهندسة الفرنسية في إنشاء مؤسسات مماثلة لاحقاً في أوروبا والأمريكتين، منها الأكاديمية العسكرية الأمريكية في وست بوينت عام 1802 ومعاهد تقنية ألمانية مختلفة. وأصبح تأكيد الصرامة الرياضية المقترنة بالتطبيق العملي السمة الفارقة للتعليم الهندسي المهني، مميزاً إياه من التلمذة الحرفية التقليدية.

5.4.3 من الفلسفة الطبيعية إلى العلم التطبيقي

مد التحول التنويري الذهنية العلمية إلى مجالات عملية ستمكن الثورة الصناعية مباشرة. وانتشرت المؤسسات الرسمية المكرسة للعلوم التطبيقية في أنحاء أوروبا: مدارس الهندسة العسكرية والمدنية، والأكاديميات التقنية، والجمعيات العلمية. وأصبحت الصرامة الرياضية، التي كانت مقصورة من قبل على الهندسة البحتة أو الميكانيكا السماوية، أداة متزايدة لفهم المشكلات العملية في مقاومة المواد والبناء والآلات.

وشهدت هذه الفترة ظهور ما نسميه اليوم العلم الهندسي. فقد مثل التطبيق المنهجي للتحليل الرياضي على المشكلات العملية، من تصميم الجسور إلى الأنظمة الهيدروليكية، خروجاً جوهرياً من المناهج الحرفية التقليدية. وأصبحت المبادئ النظرية المشتقة من الثورة العلمية تطبق لحل تحديات واقعية في البناء والتصنيع والبنية التحتية.

لم تعد الميكانيكا في ذلك العصر شاغلاً هامشياً للهندسيين، بل أصبحت تخصصاً مركزياً وثيق الصلة بالبحث النظري والتطبيق الصناعي معاً. ووضع تطوير الأدوات الرياضية لتحليل السلوك الإنشائي وخصائص المواد وأداء الآلات الأساس الضروري لمهنة الهندسة كما نعرفها اليوم.

أرست ذهنية التنوير، بثقتها في التحليل العقلاني والتزامها بالتقدم وإيمانها بإمكان فك رموز الطبيعة بالرياضيات والتجربة، الإطار الفكري الذي سيمكن التطورات السريعة في القرن التاسع عشر: الثورة الصناعية والهندسة الحديثة والنظريات الصورية للمرونة ومقاومة المواد والتحليل الإنشائي. وأصبح الاقتناع بأن العقل البشري يستطيع تحسين شروط الحياة المادية منهجياً القوة المحركة للحضارة التقنية الحديثة.

5.5 خاتمة

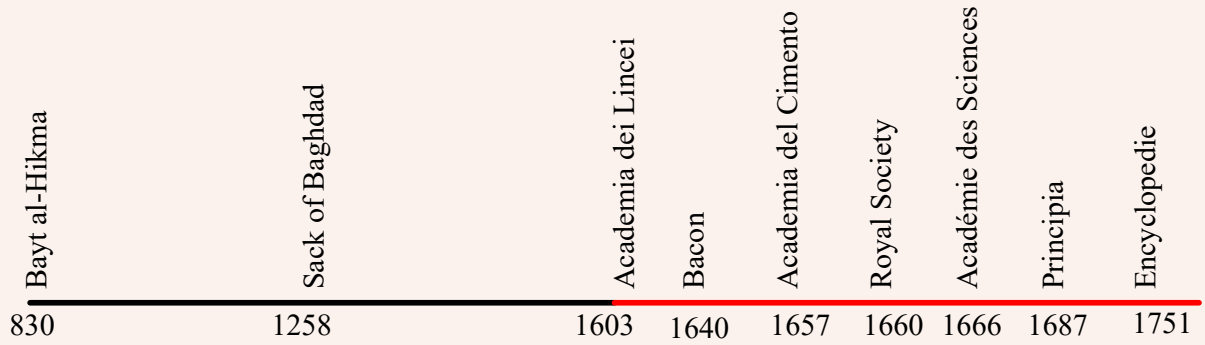
وخلاصة الأمر أن صعود العقل العلمي يمثل تحولاً فكرياً حاسماً امتد قرابة ألف عام. بدأ بحفظ المعرفة القديمة وتطويرها في المراكز الإسلامية مثل بيت الحكمة، واستمر بالاختراقات المنهجية للثورة العلمية، وبلغ ذروته بالترسيخ المؤسسي في عصر التنوير، فحرر البحث من قيود السلطة اللاهوتية والفلسفة التأملية.

وأرسى النهج الجديد، الملاحظة المنهجية والصياغة الرياضية والتحقق التجريبي، نموذجاً عاماً للتقدم العلمي: من جمع البيانات الدقيقة، إلى التعرف التجريبي على الأنماط، ثم الفهم النظري الأساسي. وقد أصبح هذا المنهج، الذي يجسده الانتقال من مشاهدات براهي إلى قوانين كبلر ثم توليف نيوتن، أساس كل تطور علمي وهندسي لاحق.

وكانت الثورة المؤسسية التي جعلت البحث العلمي مشروعاً تعاونياً تراكمياً على القدر نفسه من الأهمية. فقد حول إنشاء الأكاديميات العلمية ومدارس الهندسة السعي المنفرد للفلسفة الطبيعية إلى نظام العلم الحديث المنهجي، فيما أرست برامج التعليم التقني التنويرية نموذج التعليم الهندسي المهني القائم إلى اليوم.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

هيأ هذا الإطار الفكري، الجامع بين المنهج الصارم والدعم المؤسسي، المسرح لتطور الهندسة الحديثة والتحليل المنهجي للمنشآت وعلم الميكانيكا الكمي. وإلى هذا التطور نتجه الآن.



شكل 5.5: خط زمني لصعود العقل العلمي

وأخيراً، يسرد الجدول 5.2 جميع الكتب المستشهد بها في هذا الفصل.

جدول 5.2: ملخص زمني للأعمال الرئيسة

السنة	المؤلف	عنوان الكتاب	ملخص المحتوى
نحو 850	الإخوة بنو موسى	*كتاب الحيل* (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850)	آلات مبكرة قابلة للبرمجة وأجهزة تحكم آلي من بيت الحكمة في بغداد؛ مزج الميكانيكا بالهندسة العملية.
1543	أندرياس فيزاليوس	*في بنية جسم الإنسان* (Vesalius, 1998–2009)	ثورة تشريحية مبنية على التشريح المباشر لجثث البشر؛ صححت أخطاء جالينوس الراسخة؛ ورسوم علمية فاخرة أرست معايير جديدة.
نحو 1593	غاليليو غاليلي	*الميكانيكا* (Galilei, 1594)	رسالة هندسية تبين خضوع الآلات لقوانين كمية؛ وصياغة مبكرة للميكانيكا في صورة رياضية.
1620	فرنسيس بيكون	*الأورغانون الجديد* (Bacon, 2000)	دعوة تأسيسية للمنهج التجريبي؛ الملاحظة والتجربة المنهجيتان بدلاً من السلطة أو المنطق المجرد.
1623	غاليليو غاليلي	*المختبر* (Galilei, 1623)	يعلن أن «كتاب» الطبيعة مكتوب بالرياضيات؛ ويدافع عن القياس طريقاً لفهم الواقع الفيزيائي.
1628	وليم هارفي	*دراسة تشريحية لحركة القلب والدم في الحيوان* (Harvey, 1628)	اكتشاف الدورة الدموية؛ قياسات كمية تناقض نظرية جالينوس؛ وتكامل التشريح والملاحظة والاستدلال.
1665	روبرت هوك	*الفحص المجهري* (Hooke, 1665)	علامة فارقة في المجهر؛ نقوش مفصلة؛ تأكيد الملاحظة التجريبية على التكهن؛ ورؤى في سلوك المواد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السنة	المؤلف	عنوان الكتاب	ملخص المحتوى
1667	أكاديمية تشيمنتو	*مقالات في التجارب الطبيعية المجراة في أكاديمية تشيمنتو* (Saggi di Naturali Esperienze fatte nell'Accademia del Cimento, 1667)	تلخص بحوثاً تجريبية صارمة في ضغط الهواء والفراغ والظواهر الحرارية؛ وتقنن روح «الاختبار وإعادة الاختبار».
1687	إسحاق نيوتن	*المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية* (Newton, 1687)	توليف رياضي للميكانيكا والجاذبية العامة؛ يوحد قوانين كبلر بنظرية فيزيائية للحركة.
1704	إسحاق نيوتن	*البصريات* (Newton, 1704)	يجسد المنهج التجريبي في البصريات؛ ويدرس خصائص الضوء والألوان والحيود.
1751–1772	ديدرو ودالمبير	*الموسوعة* (Diderot and d'Alembert, 1751)	تنظيم شامل للمعرفة الإنسانية وفق مبادئ عقلانية؛ ووسيلة لنشر الفكر العلمي والاجتماعي للتنوير.



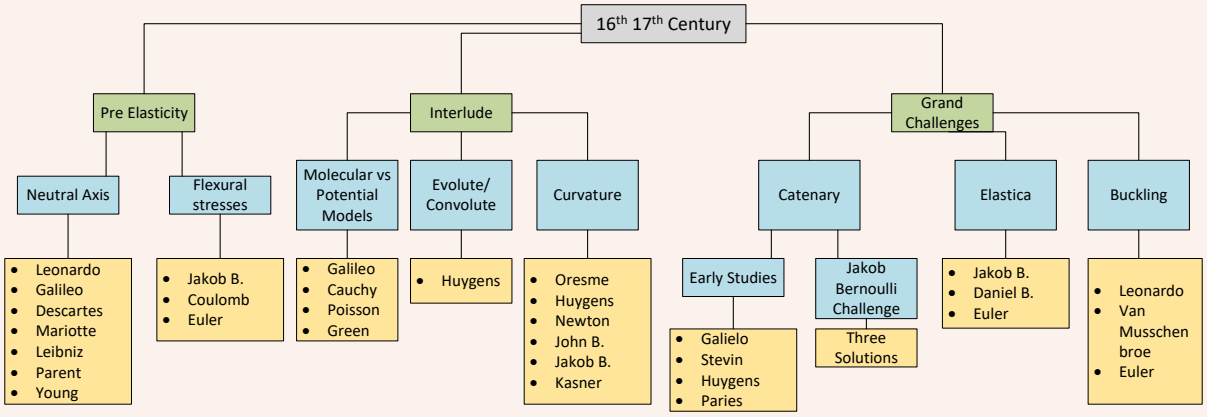
كارافاجيو، شك القديس توما (1601–1602)

يفحص توما الجرح بإصرار تجريبي، في الحركة المؤسسة للعلم التجريبي: رفض التصديق بلا دليل مباشر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فاصل أول: من الفلسفة الطبيعية إلى الميكانيكا التحليلية

الأسس المفاهيمية للتحليل الإنشائي.



Leonardo (1452-1519)	Bacon (1561-1626)	Galileo (1564-1642)	Descartes (1596-1650)
Mariotte (1620-1684)	Hooke (1635-1703)	Newton (1643-1727)	Leibniz (1646-1716)
Jacob B. (1654-1705)	Parent (1666-1716)	Johann B. (1667-1748)	Daniel B. (1700-1782)
Euler (1707-1783)	Coulomb (1736-1806)	Navier (1785-1836)	Cauchy (1789-1857)
St Venant (1797-1886)			

أرست الفصول السابقة الأسس الفكرية للمجال ببحث *الثورة العلمية*، الفصل 5.3، وعرض الشخصيات والأعمال المؤسسة التي شكلت الميكانيكا الحديثة، الفصل 6. وقد اعتمد هذا المنظور الموضوعي والتوليفي منهجاً، لأنه يقدم الاستمرارية المفاهيمية والبنية الفكرية على إعادة بناء زمنية بحتة للتطورات التقنية، وهي مؤجلة إلى الفصول التالية.

من المفيد عند هذه النقطة التوقف وجمع عدة خيوط مفاهيمية ظهرت في ذلك العصر التأسيسي، هي الهندسة والاتزان والتقوس والاستقرار. وقد تطورت هذه المفاهيم غالباً في عزلة نسبية، لكنها تقاربت تدريجياً نحو وجهة نظر تحليلية موحدة. وبعد التعريف بالشخصيات الرئيسة وأعمالها الكبرى والمناخ الفكري الذي عملت فيه، ننتقل الآن إلى التطورات التقنية نفسها. وتتبع الفصول الستة التالية التطور التاريخي من الميكانيكا المبكرة إلى الصياغة المنهجية للتحليل الإنشائي، من خلال التوضيح التدريجي للمفاهيم الأساسية، القوى الداخلية والتشوه والاستقرار، ثم توليفها النهائي في المناهج التحليلية الحديثة المستخدمة في الممارسة الهندسية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6 مجمع الرواد

ملخص

يؤدي هذا الفصل دور دليل لمن هو من ودليل لما كتبه كل منهم في آن واحد، لأهم الشخصيات التي وضعت أسس الميكانيكا الحديثة؛ إنه مجمع لرواد حولت حياتهم وأعمالهم الهندسة الإنشائية من حرفة تجريبية إلى علم رياضي. ويمتد من العصور القديمة حتى القرن التاسع عشر، فيعرض المفكرين الرواد: من رؤى موزي المبكرة للروافع في الصين القديمة، مروراً باستاتيكا أرخميدس التأسيسية، وقوانين غاليليو للتشابه، وديناميكا نيوتن، والأطر التغايرية لدى أسرة برنولي وأويلر ولاغرانج، وصولاً إلى ميكانيكا الأوساط المتصلة الصارمة عند كوشي وغرين وسان-فنان. ويستثنى من التسلسل ليوناردو دا فينشي، الذي عاش في القرن الخامس عشر، لأن دفاتره في الميكانيكا والتشريح والطيران وحركة الموائع تكشف عمقاً في الملاحظة التجريبية وفهماً على مستوى الأنظمة استبقا التفكير التحليلي لعلماء لاحقين.

لا يتتبع هذا الفصل الإنجازات الفردية فحسب، بل تطور تخصص بأكمله، موضحاً كيف نشأت الميكانيكا الإنشائية عند تقاطع الرياضيات والفلسفة الطبيعية والهندسة العملية. وتكشف الرواية كيف صاغت العلاقات الشخصية والتنافسات المؤسسية والتبادلات الثقافية تطور العلم الميكانيكي بقدر ما صاغته العبقرية الفردية. وإلى جانب السير، يستعرض الفصل النصوص المفصلية التي قننت هذه التطورات: الكتب الكبرى التي دربت أجيالاً من المهندسين وغيرت طريقة تحليل المنشآت.

وبدلاً من الخوض في التطور التقني الكامل للأفكار، وهو موضوع الفصول اللاحقة، يضع هذا العرض إسهامات أصحابها وتنافساتهم وسلالاتهم الفكرية في سياقها. والغاية تتبع الانتقال من الحدس الفيزيائي والهندسة إلى فهم صوري قائم على المعادلات للسلوك الميكانيكي. وتلخص الجداول الجامعة في النهاية إرث كل مساهم، والمنشورات المفصلية التي شكلت المجال، والمؤسسات التي دربت الممارسين، والتنافسات التي سرعت الاكتشاف؛ فتقدم رواية متماسكة لنشوء الميكانيكا الإنشائية تخصصاً متجذراً في التحليل.

6.1 مقدمة 93
6.2 الفلسفة والهندسة والاستاتيكا المبكرة . . . 94
6.2.1 موزي (نحو 470–391 ق.م.) . . 94
6.2.2 أرسطو (384–322 ق.م.) 95
6.2.3 إقليدس (نحو 300 ق.م.) 95
6.2.4 أرخميدس (نحو 287–212 ق.م.) 96
6.2.5 أبولونيوس البرغاوي (نحو 262–190 ق.م.) 97
6.3 الهندسة والآلات ونقل المعرفة 98
6.3.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو، نحو 80–70 ق.م. إلى ما بعد 15 ق.م. 98
6.3.2 هيرون الإسكندري (نشط نحو 62م) 98
6.3.3 ابن الهيثم (نحو 965–1040م) . 99
6.3.4 أبو الريحان البيروني (973–1048) 100
6.3.5 الخازني (نشط 1115–1130م) . 100
6.3.6 فيلار دو أونيكور (نشط نحو 1225–1250) 101
6.4 العمارة والتناسب والشكل الإنساني 101
6.4.1 ليون باتيستا ألبيرتي (1404–1472) 102
6.4.2 ليوناردو دا فينشي (1452–1519)102
6.4.3 أندريا بالاديو (1508–1580) . . 111
6.4.4 سيباستيانو سيرليو (1475–1554)112
6.4.5 جياكومو باروتسي دا فينيولا (1507–1573) 113
6.4.6 هوبير غوتييه (1660–1737) . 113
6.5 من النظام الرياضي إلى الميكانيكا 119
6.5.1 فرنسيس بيكون (1561–1626) 119
6.5.2 نيكولاس كوبرنيكوس (1473–1543)120
6.6 من الاستاتيكا الأولية إلى الثورة العلمية . . 121
6.6.1 سيمون ستيفن (1548–1620) . 121
6.6.2 غاليليو غاليلي (1564–1642) . 122
6.6.3 رينيه ديكارت (1596–1650) . 126
6.6.4 كريستيان هوينغنس (1623–1695)127
6.6.5 بليز باسكال (1623–1662) . . 129
6.6.6 روبرت هوك (1635–1703) . . 129
6.6.7 إسحاق نيوتن (1642–1727) . 135
6.6.8 غوتفريد لايبنتس (1646–1716) 139
6.6.9 أسرة برنولي (1654–1782) . . 141
6.6.10 ليونهارت أويلر (1707–1783) . 147
6.7 من الميكانيكا التحليلية إلى نظرية الوسط المتصل والمنشآت 151
6.7.1 شارل-أوغستان دو كولوم (1736–1806) 151
6.7.2 سيميون دني بواسون (1781–1840) 153
6.7.3 كلود لوي ماري هنري نافييه (1785–1836) 154

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.7.4 جان لو رون دالمبير (1717–1783) 158
6.7.5 جوزيف-لوي لاغرانج (1736–1813) 158
6.7.6 كوشي (أوغستان-لوي 1789–1857) 159
6.7.7 جورج غرين (1793–1841) . . 160
6.7.8 أديمار جان كلود باريه دو سان-فنان (1797–1886) 160
6.8 صعود الهندسة الإنشائية بوصفها تخصصاً . 161
6.8.1 كارل كولمان (1821-1881) . . 161
6.8.2 ويليام جون ماكورن رانكين (1820-1872) 162
6.8.3 كريستيان أوتو مور (1835–1918) 163
6.8.4 هنري موزلي (1801–1872) . . 164
6.8.5 جيمس كليرك ماكسويل (1831–1879) 165
6.9 المؤلفات التاريخية الكبرى في الميكانيكا . 166
6.9.1 إسحاق تودهَنتر (1820–1884) 166
6.9.2 ستيفن بروكوفييفيتش تيموشينكو (1878–1972) . . . 166
6.9.3 رينيه دوغاس (1897–1957) . 167
6.9.4 كليفورد أمبروز تروسدل الثالث (1919–2000) 168
6.10 نساء بارزات 168
6.11 التحليل والسياق 170
6.11.1 المنافسة والسرية والتقدم العلمي 170
6.11.2 الانتقال إلى العلوم الهندسية الحديثة 177
6.11.3 الثورة الفرنسية في التعليم الهندسي 178
6.12 الخلاصة: من الفلسفة الطبيعية إلى العلوم الهندسية 178
6.12.1 جداول موجزة 179

6.1 مقدمة

طرح Truesdell, 1968 السؤال الوجودي عن التجارب الأساسية التي قامت عليها الميكانيكا «الكلاسيكية»، قائلاً: «لم *أستطع* قط *العثور على واحدة منها*». والواقع أن الميكانيكا الحديثة تطورت تدريجياً بين القرنين السابع عشر والتاسع عشر، على نحو يعصي التسلسل الزمني البسيط أو الأصل الواحد. ولم يجر هذا التطور في عزلة، بل عبر شبكة معقدة من التبادل الفكري والتطور المؤسسي والتحول الثقافي غيرت جذرياً فهم الإنسان للعالم الفيزيائي.

يسعى هذا الفصل إلى عرض حياة أهم المساهمين وعلاقاتهم الفكرية، أولئك «العمالقة» الذين شكلوا الميكانيكا التحليلية والرياضيات، مع بحث السياقات المؤسسية والثقافية التي أتاحت اكتشافاتهم، والمنشورات المفصلية التي نشرت أفكارهم. ولا نبحث ما اكتشفوه فحسب، بل كيف دفعت ظروفهم الشخصية وتنافساتهم وتعاونهم تحول الميكانيكا من فلسفة طبيعية إلى علم رياضي. وإلى جانب هذه السير، نستعرض الكتب الكبرى التي قننت المعرفة الإنشائية: الرسائل والكتب الدراسية والأعمال المجموعة التي دربت أجيالاً من الممارسين وأرست أسس التحليل الحديث.

يقود الفصل سؤالان: من هم *الأشخاص الذين غيروا طريقتنا في التفكير في المنشآت*؟ وما *الكتب التي قننت تلك التغييرات*؟ لكننا نسأل أيضاً أسئلة أعمق: كيف أنشأت شبكة الأكاديميات والجامعات الأوروبية الناشئة شروط التقدم العلمي السريع؟ وكيف سرعت المنافسات الشخصية والتعاون الاكتشاف؟ وما دور التحديات الهندسية العملية في دفع الاختراقات النظرية؟ وكيف حول نشر النصوص الأساسية، من *حوارات* غاليليو إلى دروس نافييه، المعرفة الضمنية إلى علم صوري؟ ليس هذا فهرساً شاملاً، بل محاولة انتقائية تفسيرية لتحديد من يستحقون أن يذكروا في السلالة الفكرية للتحليل الإنشائي.

غالباً ما تروى مسيرة التقدم العلمي بالأفكار والنظريات، لكن وراء كل معادلة إنسان يدفعه الفضول والطموح والمثابرة، وأحياناً الصراع أو الشدة. ولم يكن هؤلاء ناقلين سلبيين للمعرفة، بل فاعلين في الثورات التي ساعدوا على إشعالها. والأهم أنهم كانوا جزءاً من شبكات اتصال ومنافسة وتعاون تجاوزت الحدود الوطنية والانتماءات المؤسسية. وقد دامت أفكارهم لأنها كتبت في كتب ومذكرات ورسائل تداولتها أوروبا وما وراءها.

نال بعضهم التقدير في حياته، وكافح آخرون للاعتراف بهم. عمل بعضهم في راحة الأكاديميات، وآخرون في عزلة أو تحت الشبهة. وتنقل بعضهم، مثل أويلر، بحرية بين بلاطات أوروبا وأكاديمياتها، فيما واجه آخرون، مثل غاليليو، اضطهاداً مؤسسياً. وبنى بعضهم على عمل معلميه بناء منهجياً، بينما حرس آخرون، مثل نيوتن، اكتشافاتهم بغيرة وخاضوا نزاعات مريرة على الأسبقية. وتذكرنا قصصهم بأن العلم ليس خوارزمية مجردة، بل مسعى إنساني تحركه المخيلة والمرونة والمثابرة المحضة.

وبالعودة إلى حياتهم ومنشوراتهم، لا نوضح إسهاماتهم فحسب، بل ندرك بعمق أكبر القوى الثقافية والفكرية التي صاغت تطور

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

علم المنشآت. فقد تطلب ظهور الميكانيكا تخصصاً رياضياً لا العبقرية الفردية وحدها، بل أيضاً تطور مؤسسات جديدة، مثل الجمعية الملكية و*أكاديمية العلوم*، وأشكال جديدة للتواصل العلمي عبر شبكات المراسلات والدوريات، وعلاقات جديدة بين المعرفة النظرية والتطبيق العملي. وينبغي قراءة هذا الفصل دليلاً مزدوجاً إلى من هو من و*ما الذي* كتبوه: إلى الشخصيات المؤسسة للميكانيكا والنصوص التي أكسبت أفكارهم الدوام. *أما التطورات التقنية والنظرية المحددة المنسوبة إلى كل منهم، فستبحث تفصيلاً في* فصول لاحقة.

ومع أن الفصل يتخذ منظوراً سيرياً وتاريخياً، فليس المقصود أن يكون رسالة تقنية. إذ ستبحث الصياغات التحليلية والاشتقاقات والبنى الرياضية التي قدمتها هذه الشخصيات في فصول لاحقة، حيث يعاد تناول أفكارهم بإيجاز أكبر وصرامة رياضية. ومن ثم يمثل النقاش الحالي تمهيداً إنسانياً وفكرياً، وإطاراً سياقياً يضيء الشخصيات والظروف والمنشورات التي شكلت التخصص، قبل الانتقال إلى العرض الصوري لإسهاماتهم النظرية.

عملت الشخصيات المعروضة أدناه ضمن مشهد مؤسسي سريع التطور يبحث بالتفصيل في أقسام الفصل الختامية.

6.2 الفلسفة والهندسة والاستاتيكا المبكرة

يجمع هذا القسم شخصيات نشأت الميكانيكا لديها ضمن *الفلسفة الطبيعية* و*الهندسة*، لا علماً مستقلاً. وعولجت مسائل القوة والاتزان والاستقرار بالضرورة المنطقية والتناسب والإنشاء الهندسي، وفهمت الاستاتيكا نتيجة للشكل المنظم لا للسببية الفيزيائية. والموضوع الجامع هو التعامل مع الأفكار الميكانيكية امتدادات للاستدلال الفلسفي والتجريد الهندسي.

6.2.1 موزي (نحو 470–391 ق.م.)

ولد موزي، المعروف أيضاً بمو دي، نحو عام 470 قبل الميلاد في تنغتشو الحالية بمقاطعة شاندونغ في الصين، وهي مصادفة المنطقة نفسها التي عاش فيها كونفوشيوس، المتوفى قبل مولد موزي بسنوات قليلة. وعلى خلاف كثير من فلاسفة عصره المنحدرين من أسر أرستقراطية، تشير الأدلة التاريخية إلى أنه صعد من الطبقات العاملة. ويرجح أنه تدرب نجاراً أو حرفياً، وقد شكلت هذه الخلفية العملية نظرته الفلسفية بعمق، فأسست تفكيره على الملاحظة التجريبية والمنفعة لا التأمل المجرد.

أسس موزي المدرسة الموهية، التي غدت إحدى أبرز المدارس المنظمة في عصر الممالك المتحاربة، نحو 475–221 قبل الميلاد، ونافست الكونفوشية في التأثير. وانتظم أتباعه، ومعظمهم تقنيون وحرفيون، في جماعة منضبطة درست النصوص الفلسفية والتقنية معاً. واشتهر الموهيون مهندسين عسكريين يصممون التحصينات وآليات الدفاع ضد الحصار، وهو ما يرجح أنه غذى اهتمامهم النظري بالميكانيكا.

مو جينغ يقدم مو جينغ (Mozi, 2013)، وهو مجموعة نصوص تنسب إلى أتباع موزي، رؤى متقدمة على نحو مدهش في الاستاتيكا، منها سلوك الروافع ومراكز الثقل والفائدة الميكانيكية. ويصوغ النص مبادئ الاتزان بدقة لافتة: فيميز موضع المرتكز من توزيع الأوزان، ويدرك أن اتزان العارضة يتطلب تساوي حاصل ضرب الوزن في المسافة على جانبيها؛ وهي صياغة ضمنية لقانون الرافعة قبل أن يصوغه أرخميدس بقرون.

وتضم الكتابات الموهية المتأخرة، نحو 300–200 قبل الميلاد، بحوثاً في البصريات والهندسة والميكانيكا، بل آثاراً من علم الفلك. ويبدو أن نظرية المعرفة لديهم قامت على الإيمان بوجود حقيقة موضوعية يمكن فهمها بالفحص والدراسة والاستدلال المنهجي، وهي مبادئ لن تصبح محورية في العلم الغربي حتى الثورة العلمية.

ومع أن التقليد الموهي لم يؤثر مباشرة في تطور الميكانيكا الغربية، إذ تراجعت المدرسة بعد توحيد تشين للصين عام 221 قبل الميلاد وما تلاه من إحراق الكتب، فإنه شاهد رائع على اكتشاف المبادئ الإنشائية الأساسية مستقلة في ثقافات مختلفة، ويظل من أقدم المعالجات المنهجية للاستدلال الميكانيكي خارج عالم البحر المتوسط.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.2.2 أرسطو (384–322 ق.م.)

ولد أرسطو في ستاغيرا، وهي مستعمرة يونانية في شبه جزيرة خالكيديكي. وكان أبوه نيقوماخوس طبيباً خاصاً للملك أمينتاس الثالث المقدوني، وهي صلة ستغدو مهمة لاحقاً. تيتم أرسطو صغيراً، فأرسل إلى أثينا في السابعة عشرة والتحق بأكاديمية أفلاطون، حيث بقي عشرين عاماً حتى وفاة أفلاطون عام 347 قبل الميلاد. ولما لم يختر لقيادة الأكاديمية، ربما لأصله الأجنبي أو تباعده الفلسفي الناشئ، غادر أثينا وقضى سنوات في آسيا الصغرى وليسبوس يجري بحوثاً أحيائية ستغذي كتاباته في علم الحيوان.

استدعى فيليب الثاني المقدوني أرسطو عام 343 قبل الميلاد ليعلم ابنه الإسكندر، وكان في الثالثة عشرة. ولا يعرف مضمون هذا التعليم على وجه الدقة، وإن بالغت فيه الأساطير اللاحقة. وحين تولى الإسكندر الحكم وبدأ حملاته، عاد أرسطو إلى أثينا وأسس مدرسته الخاصة، اللوقيون، عام 335 قبل الميلاد. ودرس فيها اثني عشر عاماً، وقيل إنه كان يحاضر ماشياً في الممرات المعمدة، ومن هنا جاء اسم أتباعه، المشائين. وبعد وفاة الإسكندر عام 323 قبل الميلاد، جعل العداء للمقدونيين أثينا خطرة على كل ذي صلة بالبلاط. فانسحب أرسطو إلى خالكيذا، وقيل إنه قال إنه لن يسمح لأثينا أن تخطئ في حق الفلسفة مرتين. وتوفي هناك في العام التالي.

الميكانيكا والتقليد المشائي تنسب *الميكانيكا* (Aristotle, 2000 PDF) كثيراً إلى أرسطو، لكن الأرجح أن عضواً لاحقاً في المدرسة المشائية ألفها،[1] وهي رسالة تأسيسية في الآلات البسيطة والمبادئ التي تحكم عملها. وقد كتبت نحو القرن الثالث قبل الميلاد، وتبحث الروافع والبكرات والأسافين واتزان القوى، وتقدم تفسيراً نوعياً لكيفية تضخيم الآلات جهد الإنسان.

تنظم الرسالة حول سؤال مركزي: لماذا تحرك القوى الصغيرة أوزاناً كبيرة بواسطة الأجهزة الميكانيكية؟ والجواب المقترح، أن للحركة الدائرية قدرة مولدة خاصة تجمع نزعات متعارضة، ساذج فلسفياً بمقاييس اليوم، لكنه محاولة حقيقية لتوحيد ظواهر ميكانيكية متنوعة بمبدأ تفسيري واحد.

الروافع والحركة ومبادئ التركيب المبكرة تعالج *الميكانيكا* خمساً وثلاثين مسألة تمتد من سلوك الموازين والمجاديف إلى ميكانيكا كاسرات الجوز والملاقط. ومعالجتها للرافعة مهمة بوجه خاص: فهي تدرك أن فاعلية الرافعة تعتمد على نسبة المسافتين عن المرتكز، مستبقة قانون الرافعة الذي سيبرهنه أرخميدس لاحقاً بصرامة. كما يناقش العمل متوازي أضلاع السرعات وتركيب الحركات، وهما مفهومان سيغدوان أساسيين في الميكانيكا العقلانية.

النقل والتأثير الطويل الأمد لا يخطئ المرء أثرها في المؤلفين اللاحقين. فقد طور أرخميدس كثيراً من الأفكار التي لمحت إليها *الميكانيكا*، ولا سيما تنقيح مفهوم مركز الثقل وتطوير مبادئ رياضية صارمة للاستاتيكا. وفي العصرين الهلنستي والروماني، وسع مؤلفون مثل هيرون الإسكندري وبابوس الأنظمة الميكانيكية، وجمعوا الأجهزة العملية والاعتبارات النظرية. وترجمت الرسالة إلى العربية في العصر الذهبي الإسلامي ثم إلى اللاتينية، فضمنت انتقالها إلى أوروبا في العصور الوسطى وعصر النهضة. واعترف علماء مثل غاليليو بإرث الفكر الميكانيكي اليوناني القديم في تحليلهم للحركة والروافع.

وهكذا تقف *الميكانيكا* عند أصل سلالة طويلة تصل البحث الفلسفي المبكر بالعلم الميكانيكي الحديث. وقد هيمنت نظرية أرسطو الأوسع للحركة، ولا سيما تمييزه الحركة الطبيعية من القسرية، على الفلسفة الطبيعية الغربية حتى أوائل القرن السابع عشر.

6.2.3 إقليدس (نحو 300 ق.م.)

لا نعرف شيئاً تقريباً عن حياة إقليدس. فقد عمل في الإسكندرية في عهد بطليموس الأول سوتر (323–283 ق.م.)، وهذه الحقيقة الواحدة تستنفد المعلومات الموثوقة عن سيرته. وأطلق الكتاب اللاحقون خيالهم: فقد ذكر بروكلوس، بعد ثمانية قرون، أن إقليدس كان أصغر من تلاميذ أفلاطون وأكبر من أرخميدس، وأنه أسس المدرسة الرياضية في الإسكندرية. وقد تكون الحكاية الشهيرة التي يسأل فيها بطليموس عن طريق أقصر إلى الهندسة فيجيبه إقليدس بأنه لا طريق ملكياً إليها مختلقة، إذ تروى قصة تكاد تطابقها عن مينايخموس والإسكندر.

ويبقى موطن إقليدس وتعليمه غير مؤكدين. وتزعم بعض المصادر العربية الوسيطة أنه ولد في صور، فيما تخلط مصادر أخرى

[1] اشتق مصطلح *المشائي* من كلمة يونانية تعني الميل إلى المشي، في إشارة إلى عادة أرسطو في التعليم وهو يتمشى مع طلابه في الممر المسقوف بمدرسة اللوقيون في أثينا.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بينه وبين الفيلسوف الأقدم إقليدس الميغاري، وهو خطأ استمر في رسوم عصر النهضة. ولا يمكن إثبات دراسته في أكاديمية أفلاطون بأثينا، وإن بدا ذلك معقولاً بالنظر إلى سلالته الرياضية. وضاعت شخصيته وطباعه تماماً؛ وما بقي هو العمل نفسه.

العناصر والمنهج البديهي لعل *عناصر* إقليدس (Euclid **and** Heath, 1956) أكثر الكتب الدراسية تأثيراً في التاريخ، إذ أرسى أسس الهندسة وبنية الاستدلال الاستنباطي نفسها. ويتكون من ثلاثة عشر كتاباً تنظم هندسة المستوى، الكتب الأول إلى السادس، ونظرية الأعداد، السابع إلى التاسع، وهندسة المجسمات، الحادي عشر إلى الثالث عشر، ضمن إطار بديهي صارم. ويبدأ إقليدس بالتعريفات والمصادرات والمفاهيم المشتركة، ثم يبين كيف يبنى صرح كامل من المعرفة بالتدرج المنطقي من مبادئ بديهية.

أصبحت البنية المنطقية لـ*العناصر*، تعريفات تتبعها مصادرات ومفاهيم مشتركة وقضايا وبراهين، النموذج المعتمد للاستدلال الصارم في العلوم. وليست هذه البنية تعليمية فحسب؛ إنها تجسد موقفاً منهجياً تنشأ فيه اليقينية من الاستنباط المنظم لا من السلطة أو تراكم التجارب.

التأثير في الميكانيكا والعمارة والاستدلال الهندسي يتجاوز أثر *العناصر* الرياضيات. فقد ظل أكثر من ألفي عام المدخل المعياري للتفكير المنطقي، ودرسه الفلاسفة والعلماء والمهندسون. وتأثيره في الميكانيكا الإنشائية مباشر وغير مباشر: فالهندسة الإقليدية توفر مباشرة أدوات تحليل العلاقات المكانية والتناسبات وخصائص الأشكال الضرورية للشكل الإنشائي؛ وبصورة غير مباشرة درب المنهج البديهي المهندسين على صياغة المشكلات بوضوح والمضي فيها منهجياً وإثبات النتائج بيقين.

اعتمد معماريو عصر النهضة مثل ألبيرتي وبالاديو النسب الإقليدية لإقامة علاقات توافقية في مبانيهم. ونمذج نيوتن عرض *المبادئ* صراحة على سابقة إقليدس. وظل *العناصر* ثاني أكثر الكتب طباعة بعد الكتاب المقدس حتى القرن العشرين، بأكثر من ألف طبعة. ومن ثم فإرثه ليس مجموعة من المعارف الهندسية وحدها، بل طريقة في التفكير: بنية بالبديهيات، ووضوح بالتدرج المنطقي، ويقين بالبرهان، ما يزال أساسياً في الممارسة الهندسية.

6.2.4 أرخميدس (نحو 287–212 ق.م.)

ولد أرخميدس في سرقوسة، أبرز مدن صقلية اليونانية، وكان، وفق بعض الروايات، قريباً من حاكمها الملك هيرون الثاني. وكان أبوه فيدياس فلكياً لا نعرف عنه غير ذلك. وسافر أرخميدس في مرحلة ما إلى الإسكندرية، حيث درس على خلفاء إقليدس وأقام صداقات فكرية دائمة. ووجه عدة رسائل إلى رياضيين إسكندريين، منهم كونون الساموسي، ودوسيثيوس الفرماوي، وإراتوستينس، الموسوعي الذي رأس المكتبة الكبرى. وعاد أرخميدس إلى سرقوسة وقضى فيها حياته العملية، متمتعاً بالرعاية الملكية ومنصرفاً إلى مسائل الهندسة والميكانيكا والهيدروستاتيكا.

تصور المصادر القديمة أرخميدس مثال المفكر المستغرق، الذي استحوذ عليه التأمل الرياضي حتى أهمل الطعام واضطر من حوله إلى جره إلى الحمام، حيث واصل رسم الأشكال في الزيت على جلده. أما القصة الشهيرة عن قفزه من الحمام صارخاً «وجدتها!» عند اكتشاف مبدأ الطفو، وهو يحقق في مقدار الذهب في تاج صنع لهيرون، فتظهر أول مرة عند فيتروفيوس بعد قرنين. وسواء صحت القصة حرفياً أم لا، فإنها تلتقط جوهر طريقة أرخميدس: التفاعل بين البصيرة الفيزيائية والبرهان الرياضي.

الموت والذاكرة والإرث الذي اختاره لنفسه أصبح موته أسطورياً. فعندما استولت قوات مرسيلوس الرومانية على سرقوسة عام 212 قبل الميلاد بعد حصار طويل، أخرته وفق بلوتارخ آلات حرب صممها أرخميدس، صادف جندي شيخاً يرسم أشكالاً هندسية في الرمل. وقيل إن أرخميدس قال: «لا تزعج دوائري»، فقتل في مكانه. وحزن مرسيلوس، الذي كان يرجو لقاء الرياضي الشهير، ورتب له دفناً كريماً. وبعد قرن ونصف، وجد شيشرون القبر في سرقوسة مهملاً يغطيه النبات، ولم يعرفه إلا بالكرة والأسطوانة المنقوشتين اللتين طلبهما أرخميدس، نصباً للنظرية التي عدها أعظم أعماله، وهي العلاقة بين حجمي الشكلين.

أسس الميكانيكا العقلانية يقف أرخميدس السرقوسي (Archimedes **and** Heath, 1897) مؤسساً للميكانيكا العقلانية، إذ جعل الاستاتيكا والهيدروستاتيكا علمين رياضيين. وتجمع أعماله الباقية، ومنها في *اتزان المستويات* وفي *الأجسام الطافية* وفي *الكرة والأسطوانة* ومنهج *النظريات الميكانيكية*، الصرامة الرياضية بالبصيرة الفيزيائية على نحو لم يضاه حتى الثورة العلمية.

يبرهن أرخميدس في *اتزان المستويات* قانون الرافعة من المبادئ الأولى، ويطور مفهوم مركز الثقل، مبيناً كيفية تعيينه لأشكال مستوية مختلفة، منها المثلثات ومتوازيات الأضلاع والقطاعات المكافئية. وتشكل هذه النتائج أساس التحليل الحديث للقوة والعزم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في الأنظمة الإنشائية. وقد أرسى منهجه، صياغة البديهيات واشتقاق النتائج رياضياً وتطبيقها على تكوينات فيزيائية، نموذج الميكانيكا النظرية.

الهيدروستاتيكا والاستقرار والمنهج الميكانيكي يفتتح في *الأجسام الطافية* علم الطفو، إذ يبرهن أن الجسم المغمور في مائع يتعرض لقوة صاعدة تساوي وزن المائع المزاح. وهذا العمل لا غنى عنه لفهم الأنظمة الإنشائية المتفاعلة مع الموائع، من هياكل السفن إلى الأساسات المغمورة. كما بحث أرخميدس استقرار الأجسام الطافية، وحدد شروط عودتها إلى الاتزان بعد إزاحتها، في إسهام مبكر ومتقدم على نحو رائع في تحليل الاستقرار.

يكشف *المنهج*، الذي فقد حتى أعيد اكتشافه عام 1906 في الطرس الشهير، كيف استخدم أرخميدس الاستدلال الميكانيكي لاكتشاف نتائج رياضية قبل برهانها بصرامة. ويضيء هذا الفصل الصريح بين الاكتشاف والبرهان الدور الخلاق للحدس الفيزيائي ضمن إطار استنباطي. وقد أصبح هذا النمط المنهجي، بصيرة فيزيائية توجه البرهان الرياضي، أساسياً في ممارسة الهندسة الإنشائية.

6.2.5 أبولونيوس البرغاوي (نحو 262–190 ق.م.)

ولد أبولونيوس في برغا، وهي مدينة يونانية في بمفيلية على الساحل الجنوبي لآسيا الصغرى. وسافر شاباً إلى الإسكندرية، حيث درس على خلفاء إقليدس واستوعب التقاليد الرياضية للموسيون. وتشير المصادر القديمة إلى أنه أقام أيضاً في برغامون، التي نافست مكتبتها مكتبة الإسكندرية ورعى ملوكها الأتاليون العلماء. وخارج هذه الحقائق القليلة، لا نعرف شيئاً تقريباً عن حياته؛ فلم تبق حكايات عنه ولا تظهر شخصيته، بل إن تواريخه تستنتج بصورة غير مباشرة من الرياضيين الذين يستشهد بهم ومن استشهدوا به لاحقاً.

تأتي لمحتنا الوحيدة تقريباً عن سيرته من رسائل التقديم للكتب الثمانية في عمله الكبير *المخروطات*. وتكشف الإهداءات رياضياً مندمجاً في شبكات المراسلات العلمية للعالم الهلنستي: يخاطب أبولونيوس يوديموس البرغاموني، ويرسل مسودات للتعليق ويعتذر عن التأخر في التأليف ويشير إلى نسخة سابقة أعدها على عجل في الإسكندرية لزائر يدعى نوكراتس. ويصف مراجعة واسعة بين النسخ ويؤكد الترتيب المنطقي الدقيق، ما يوحي بعامل منهجي شديد العناية بالعرض. كما يذكر ابناً يحمل اسم أبولونيوس أيضاً، أهدى إليه الكتب اللاحقة بعد وفاة يوديموس.

المخروطات وهندسة الأشكال المنحنية عرف أبولونيوس قديماً باسم «المهندس العظيم»، وهو لقب ميزه حتى في عصر حافل برياضيين استثنائيين. وتمثل مخروطاته (Perga, 1896) أرقى معالجة للقطوع المخروطية في العصور الكلاسيكية، إذ حلت محل جميع الأعمال السابقة وبقيت مرجعاً نهائياً قرابة ألفي عام. وفي ثمانية كتب، بقي منها سبعة، يبحث أبولونيوس منهجياً القطع الناقص والمكافئ والزائد، وهي منحنيات تنشأ من تقاطع مستوى بمخروط. وقد أدخل كثيراً من المصطلحات المستخدمة إلى اليوم، مشتقاً أسماء المنحنيات من علاقات هندسية تقوم على «النقص» و«المساواة» و«الزيادة» إزاء إنشاء مرجعي.

لا يكمن إنجاز *المخروطات* في فهرسة الخصائص فحسب، بل في إنشاء نظرية هندسية موحدة للأشكال المنحنية. فقد طور أبولونيوس طرائق تربط الأقطار والمماسات والناظمات وخطوط التقارب ضمن إطار استنباطي واحد، ووسع نتائج مينايخموس السابقة ونظمها وأضاف قضايا جديدة تماماً.

انتقاله إلى الميكانيكا والعمارة والشكل الإنشائي مع أن *المخروطات* تصور عملاً في الهندسة البحتة، أثبتت رؤاه أنها أساسية للفهم الرياضي اللاحق للشكل الإنشائي. فالمنحنى المكافئ، الذي درسه أبولونيوس تفصيلاً، يحكم هندسة خط مرن تحت حمل أفقي منتظم، وأصبح لاحقاً محورياً في تحليل الأقواس الحاملة لوزنها الذاتي. ويقوم القطع الناقص وراء هندسة كثير من إنشاءات القباب، فيما تظهر أشكال مخروطية ذات صلة في الأقبية وغيرها من الأنظمة الحجرية المنحنية.

تتبع خطوط الدفع ومسارات القوى في المنشآت الحجرية منحنيات كان أبولونيوس قد وصف خصائصها الهندسية قبل فهم معناها الميكانيكي بقرون. واعتمد معماريو عصر النهضة ومنظرو العصر الحديث المبكر، ثم المهندسون الإنشائيون، الهندسة الأبولوينية ضمناً وصراحة عند تحليل الأشكال المنحنية وتوزيع أحمالها.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.3 الهندسة والآلات ونقل المعرفة

يجمع هذا القسم مساهمين وحدهم انشغالهم بـ*الآلات* وبالصياغة العملية للمعرفة الميكانيكية ونشرها. وقد أكدت أعمالهم الوصف والتصنيف والرسم، ونقل التقنيات بالرسائل والمخططات. والخيط المشترك هو ظهور المعرفة الهندسية شيئاً *مقنناً* قابلاً للتعليم وإعادة الإنتاج.

6.3.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو، نحو 80–70 ق.م. إلى ما بعد 15 ق.م.

لا نعرف يقيناً إلا القليل عن حياة فيتروفيوس، وما نملكه يأتي كله تقريباً من إشارات إلى سيرته مبعثرة في رسالته. فقد خدم مهندساً عسكرياً في عهد يوليوس قيصر، مسؤولاً عن بناء آلات المدفعية وصيانتها، ومنها المنجنيقات والعقارب. ومنحته خبرته بمعدات الحصار معرفة مباشرة بميكانيكا الشد واللي وحركة المقذوفات، وهي معرفة عملية ستغذي مناقشاته النظرية اللاحقة.

واصل فيتروفيوس الخدمة الإمبراطورية في عهد أغسطس بعد اغتيال قيصر، وإن بدا أن دوره تقلص. ويذكر إشرافه على بناء بازيليك في فانوم فورتوناي، فانو الحالية، وهو المبنى الوحيد الذي ينسب تصميمه إلى نفسه. وكان فيتروفيوس حين ألف رسالته شيخاً يعيش من معاش ضمنته وساطة أوكتافيا أخت أغسطس. وتكشف كتابته قلق رجل يسعى إلى تثبيت إرثه بالعلم لا بالنصب، ويحمل إهداؤه إلى أغسطس نبرة تضرع لا تخفى.

ولا تكمن أهمية فيتروفيوس في مبانيه، إذ لم يبق منها شيء، بل في *العمارة*، الرسالة المعمارية الكاملة الوحيدة الباقية من العصور القديمة.

في العمارة يعد كتاب فيتروفيوس في *العمارة*، أو الكتب العشرة في العمارة، (Vitruvius **and** Morgan, 1914)، المكتوب نحو عام 25 قبل الميلاد، الرسالة المعمارية الكاملة الوحيدة الباقية من العصور الكلاسيكية. ويغطي تقريباً كل جوانب ممارسة البناء الروماني: تخطيط المدن ومواد البناء وتشييد المعابد والعمارة المدنية والمنزلية وإمداد المياه والمزاول والآلات.

وأشهر ما صاغه فيتروفيوس خصال العمارة الجيدة الثلاث: *المتانة*، أي السلامة الإنشائية؛ و*المنفعة*، أي الوظيفة؛ و*الجمال*، وهي مبادئ ما زالت أساساً للتفكير المعماري والإنشائي. وقدمت أوصافه لطرائق البناء وخصائص المواد وأنظمة التناسب لمعماريّي عصر النهضة نافذتهم الأساسية إلى الممارسة الكلاسيكية. واعتمد ألبيرتي وبالاديو وخلفاؤهما فيتروفيوس اعتماداً كبيراً، واستمر أثره عبر تطور تعليم الفنون الجميلة حتى القرن العشرين.

مركزية فيتروفيوس تبلغ أهمية فيتروفيوس التأسيسية لهذا الكتاب حداً يجعل حياته وكتاباته وتأثيره موضوعاً لثلاثة فصول مختلفة: الفصل الحالي، و§3.2.4.1، و§15.2.1.

6.3.2 هيرون الإسكندري (نشط نحو 62م)

ظلت تواريخ حياة هيرون موضع التباس زمناً طويلاً، بتقديرات تمتد ثلاثة قرون. وحسم السؤال حين لاحظ أوتو نويغباور أن *ديوبترا* هيرون يصف طريقة لتعيين المسافة بين روما والإسكندرية برصد متزامن لخسوف قمري، وأن المثال يوافق خسوف 13 مارس 62م. وهذا يثبت وجود هيرون في القرن الأول، معاصراً لنيرون وسينيكا وبليني الأكبر. وخارج هذا المرتكز الزمني، لا يمكن استرداد شيء تقريباً من حياته. ويوحي اسمه بأصل يوناني، لكن الإسكندرية كانت آنذاك شديدة التنوع، وربما كان مصرياً أو مختلط الأصل.

ارتبط هيرون بالموسيون، وإن ظل من غير الواضح هل كان عضواً رسمياً فيه أم معلماً مستقلاً. وتوحي كتاباته بمرب عملي يهتم بإيصال معرفة نافعة إلى الطلاب والممارسين أكثر من اهتمامه بالأناقة النظرية. وكتب يونانية تقنية في متناول الحرفيين والمهندسين، وضمت أعماله تعليمات مفصلة لبناء الأجهزة، في تباين واضح مع الأسلوب الرياضي المتقشف لأرخميدس أو أبولونيوس.

اتساع الأعمال وتعليم الميكانيكا تنسب المصادر القديمة إلى هيرون رسائل كثيرة، بقي عدد منها باليونانية أو في ترجمة عربية. وكان نطاقه لافتاً. يفهرس علم *الهواء* أجهزة تعمل بالهواء والماء والبخار، منها كرة أيولوس، وهي توربين رد فعل بدائي، وأبواب المعابد الآلية. ويصف *الأجهزة الآلية* آلات مسرحية ذاتية الحركة. ويبحث *الديوبترا* أدوات المساحة، فيما يعالج علم *المرايا*

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المرايا والانعكاس. وقامت سمعة هيرون قديماً وبعد ذلك إلى حد كبير على هذه الآليات البارعة، التي أكسبته وصفاً متعالياً بعض الشيء بأنه صانع ألعاب وعجائب مسرحية لا رياضي جاد.

الميكانيكا والآلات البسيطة والممارسة الهندسية طور هيرون الإسكندري (Alexandria, 1851) التطبيق العملي للمبادئ الميكانيكية بمعالجته المنهجية للآلات البسيطة والأنظمة الهيدروليكية والأجهزة الهوائية. وقد شغل هيرون، الناشط في الإسكندرية الرومانية في القرن الأول الميلادي، موضعاً محورياً بين ميكانيكا أرخميدس الرياضية والهندسة التطبيقية.

نقحت *ميكانيكاه*، المحفوظة أساساً في ترجمة عربية، استاتيكا أرخميدس بتحليل تفصيلي للآلات البسيطة الخمس: الرافعة والبكرة والإسفين واللولب والعجلة والمحور. وبين هيرون كيف تجمع هذه العناصر في آلات مركبة، وقدم إجراءات لحساب الفائدة الميكانيكية. وتناول مسائل عملية، مثل تحريك الأحمال الثقيلة بقوة محدودة وتصميم المكابس وبناء أجهزة الرفع، وهي مسائل وثيقة الصلة بالبناء والممارسة الإنشائية.

علم الهواء والأجهزة الآلية والنقل بحث علم *الهواء* السلوك الميكانيكي للهواء والماء تحت الضغط، ووصف أكثر من مئة جهاز، منها السحارات والنوافير وكرة أيولوس وآلات تديرها المياه الهابطة أو الهواء المسخن. ومع أن كثيراً من هذه الأجهزة خدم الطقوس أو الترفيه، فإن المبادئ الكامنة وراءها، انتقال الضغط ومرونة الهواء وتحويل الطاقة الحرارية إلى حركة ميكانيكية، استبقت مفاهيم محورية في الهندسة اللاحقة.

وكتب هيرون أيضاً في المساحة، *ديوبترا*، والمدفعية، *بيلوبويكا*، والقياس، *متريكا*، مبرهناً اتساع المعرفة التقنية القديمة. وانتقلت أعماله عبر علماء بيزنطيين ومسلمين إلى مهندسي عصر النهضة، مثل جيوفاني باتيستا ديلا بورتا وسيمون ستيفن، وأرست سوابق للتصميم العقلاني للأنظمة الميكانيكية.

6.3.3 ابن الهيثم (نحو 965–1040م)

ولد أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم في البصرة، وكانت مركزاً كبيراً للتجارة والعلم في بلاد البويهيين بجنوب العراق. وتلقى تعليماً واسعاً في اللاهوت والرياضيات والفلسفة الطبيعية، وشغل مدة منصباً إدارياً في مدينته. ويصف في مقطع من سيرته كيف خاب أمله في دعاوى الفرق الدينية المتنافسة، التي ترى كل منها أنها تملك الحقيقة وحدها، فاتجه إلى كتابات أرسطو طريقاً إلى معرفة يقينية. وشكل هذا التحول الفكري التزامه الدائم بالبحث المنهجي القائم على البرهان والاختبار التجريبي.

مصر ومشروع النيل والعزلة المنتجة حمل طموح ابن الهيثم إياه إلى مصر في عهد الخليفة الفاطمي الحاكم بأمر الله. وقيل إنه ادعى القدرة على تنظيم فيضان النيل السنوي، لكنه أدرك بعد مسح النهر وفحص بقايا الأعمال الهيدروليكية القديمة قرب أسوان أن المشروع يتجاوز إمكاناته. وخوفاً من تقلب الخليفة المشهور، تظاهر بالجنون وبقي قيد الإقامة الجبرية حتى وفاة الحاكم عام 1021. وخلال هذه العزلة القسرية، وفي السنوات التالية لإطلاقه، أنتج ابن الهيثم قدراً استثنائياً من الأعمال. وتنسب إليه المصادر اللاحقة أكثر من مئتي رسالة في موضوعات تمتد من البصريات والفلك إلى الهندسة ونظرية الأعداد.

البصريات والميكانيكا والبرنامج التجريبي اشتهر ابن الهيثم، المعروف في الغرب اللاتيني بألهازن، (Haytham, 1989) بكتاب *المناظر*، الذي غير فهم الرؤية والضوء بالتجريب المنهجي المقترن بالتحليل الهندسي. ورفض نظريات الإبصار الإشعاعية السابقة، وبرهن أن الرؤية تحدث حين يدخل العين ضوء منعكس عن الأجسام، وأيد قوله بتجارب مضبوطة تستخدم الفتحات والعدسات والأسطح العاكسة.

ومع أن شهرته تقوم أساساً على البصريات، فقد تناول ابن الهيثم مسائل ميكانيكية وثيقة الصلة بالتحليل الإنشائي. وبحث انتقال القوة وسلوك الأجسام الصلبة تحت الحمل، وحلل انتشار القوى في الأنظمة المتصلة. وتعالج كتاباته ميكانيكا الصدم، بما فيها التصادمات وانتقال الحركة، كما بحث حركة الأجسام على المستويات المائلة والمقذوفات، وهي موضوعات ستصبح محورية في ميكانيكا العصر الحديث المبكر.

المنهج والنقل والأهمية الإنشائية لعل إسهام ابن الهيثم الأبعد أثراً منهجي. فقد أصر على تأسيس النظريات الفيزيائية على الملاحظة المنهجية والتجارب المضبوطة والوصف الرياضي، وعلى رفض الاستدلال التأملي غير المؤيد بالخبرة. وقدم هذا النهج المنضبط نموذجاً للمنهج العلمي الذي سيغدو أساسياً في الفيزياء والتحليل الهندسي معاً. ويقوم إصراره على توافق النماذج الرياضية مع الواقع المشاهد وراء الأسس المعرفية للميكانيكا الإنشائية.

قضى عقوده الأخيرة في القاهرة، يعيش قرب الجامع الأزهر ويعيل نفسه بنسخ المخطوطات الرياضية. وتوفي هناك نحو عام 1040. وترجمت أعماله إلى اللاتينية في القرنين الثاني عشر والثالث عشر، وأثرت بعمق في العلم الأوروبي، فشكلت تقليد البصريات عند شخصيات مثل روجر بيكون، وويتلو، ثم كبلر في النهاية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.3.4 أبو الريحان البيروني (973–1048)

كان أبو الريحان البيروني (973–1048) (Al-Bīrūnī, 1910) من أكثر العقول العلمية أصالة في العالم الإسلامي الوسيط، وأسهم إسهامات مهمة في الفلك والرياضيات والجغرافيا والميكانيكا. ولد في خوارزم، في أوزبكستان الحالية، وقضى قدراً كبيراً من مسيرته في بلاط محمود الغزنوي، وصحب السلطان في حملاته إلى الهند التي أثمرت موسوعته *تحقيق ما للهند من مقولة مقبولة في العقل أو مرذولة*، وهي عمل رائد في الدراسة الثقافية والعلمية المقارنة.

تحقيق ما للهند تتركز إسهامات البيروني في الميكانيكا على منهجه المنهجي لقياس الكثافة والأوزان النوعية. فقد صمم وصنع أدوات دقيقة لتعيين الثقل النوعي للمعادن والأحجار الكريمة، وحقق نتائج تقارن جيداً بالقيم الحديثة. ووسعت طرائقه الهيدروستاتيكية مبادئ أرخميدس مع عناية دقيقة بمصادر الخطأ التجريبي، فأرست سوابق منهجية للتحليل الإنشائي اللاحق. وأدرك أن العلاقات الرياضية نفسها التي تحكم اتزان الموازين تنطبق على سلوك المواد في شروط مختلفة.

وأثرت منهجية البيروني العلمية الأوسع، إصراره على الملاحظة المنهجية والقياس الكمي والتوفيق بين النظرية والبيانات التجريبية، في تطور مناهج سلوك المواد التي غدت ضرورية في الهندسة الإنشائية. وبرهنت قياساته الجيوديسية، ومنها طريقة بارعة لتعيين نصف قطر الأرض برصد جبل، قوة الجمع بين النظرية الرياضية والقياس الدقيق؛ وهو نموذج سيطبقه المهندسون الإنشائيون لاحقاً على تحليل المباني والجسور.

6.3.5 الخازني (نشط 1115–1130م)

كان عبد الرحمن الخازني عبداً من أصل يوناني بيزنطي، جيء به إلى مرو في الدولة السلجوقية، تركمانستان الحالية، وكان مالكه موظف خزانة يدعى الخازن، ومنه أخذ اسمه. وأدرك سيده مواهبه الفكرية، فأتاح له تعليماً استثنائياً في الرياضيات والفلسفة الطبيعية. وبعد عتقه اختار الخازني البقاء في مرو والتفرغ للعلم، وقيل إنه عاش زاهداً ورفض هبة مقدارها ألف دينار من زوجة السلطان، لأن بضعة أرغفة كانت تكفي حاجاته المتواضعة.

كانت مرو في أوائل القرن الثاني عشر إحدى مدن العالم الإسلامي العظمى ومركزاً للعلم أنجب البيروني قبل قرن وحافظ على تقاليد نشطة في الفلك والعلوم الدقيقة. وعمل الخازني في هذا الوسط فلكياً في البلاط السلجوقي، وأنتج جداول فلكية، أو زيجاً، أهداها إلى السلطان سنجر، منقحاً عملاً سابقاً لعمر الخيام.

كتاب ميزان الحكمة وعلم الأوزان كان أعظم إنجازات الخازني العلمية *كتاب ميزان الحكمة*، الذي اكتمل نحو 1121–1122. وتمثل هذه الرسالة اللافتة واحدة من أرقى المعالجات الوسيطة للميكانيكا، إذ تبحث الاتزان والموازين والهيدروستاتيكا بعمق تحليلي استثنائي. وقد جمع الخازني، في ظل الرعاية السلجوقية، المعرفة الميكانيكية اليونانية، ولا سيما أعمال أرخميدس وإقليدس وميناوس، بتحقيقات أصلية وممارسة تجريبية محسنة.

تخصص الرسالة حيزاً واسعاً للقبان والميزان، بما فيه تحليل مفصل لمراكز الثقل والشروط الدقيقة للاتزان. وطور الخازني إجراءات منهجية لتعيين الثقل النوعي للمواد، وجمع جداول لنحو خمسين مادة، منها المعادن والأحجار الكريمة والسوائل. ولم تتجاوز دقة قياساته قرابة خمسة قرون.

الهيدروستاتيكا والدقة التجريبية والمنهج وسع الخازني مبادئ أرخميدس للطفو، وبحث كيف يتغير الوزن الظاهري لجسم مع كثافة الوسط المحيط. وأدرك أن وزن الجسم يعتمد على قياسه في الهواء أو الماء أو مائع آخر، وهي بصيرة وثيقة الصلة بتحليل الأنظمة المغمورة جزئياً أو كلياً. وتكشف أوصافه للموازين الهيدروستاتيكية أدوات قادرة على كشف فروق دقيقة في الكثافة، مستبقة موازين الدقة في العلم التجريبي الحديث المبكر.

ومع أن *ميزان الحكمة* لا يعنى بالعناصر الإنشائية بالمعنى الحديث، فإنه يجسد نهجاً سابقاً للحداثة في الاستدلال الميكانيكي يقوم على المبادئ الفيزيائية الأولى والتجربة الدقيقة والقياس الكمي. ومن هذا الوجه يقف الخازني صلة حاسمة بين هيدروستاتيكا أرخميدس والتقاليد التجريبية اللاحقة لميكانيكا العصر الحديث المبكر.

يختفي الخازني من السجل التاريخي بعد أوائل القرن الثاني عشر، فلا يعرف تاريخ موته ولا ظروفه.

6.3.6 فيلار دو أونيكور (نشط نحو 1225–1250)

لا يعرف عن حياة فيلار شيء خارج ما يمكن استنتاجه من حافظة الرسوم التي تحمل اسمه، والمحفوظة اليوم في المكتبة الوطنية الفرنسية. ويعرفه نقش في المخطوطة بأنه من أونيكور، وهي قرية في بيكاردي قرب كامبري شمال فرنسا. وتوحي الرسوم بمسيرة جوالة؛ فهي تضم رسوماً لكاتدرائيات لاون وريمس وشارتر ومو، وكنيسة الرهبنة السيسترسية في فوسيل، ما يدل على سفر واسع بين مواقع البناء الفرنسية في القرن الثالث عشر. وتصور ورقة تصميماً لأرضية من المجر، ما يوحي بأن رحلات فيلار تجاوزت منطقته الأصلية بكثير.

ويظل موضع خلاف علمي هل كان فيلار معلم بناء أم معمارياً أم كاتب محفل أم مجرد مراقب متعلم. وقد دفعت المستويات التقنية المتفاوتة للرسوم بعض المؤرخين إلى التشكيك في مكانته المهنية، فيما يؤكد آخرون اتساع اهتماماته وتماسك تفكيره الهندسي.

المحتويات والنسبة ومشكلة التأليف تضم الحافظة مخططات وواجهات معمارية، وتفاصيل للبناء القوطي منها الدعامات الطائرة والزخارف الحجرية الدقيقة، وأجهزة ميكانيكية مثل منشار تديره المياه وآلة حركة دائمة، ومخططات هندسية لقطع الحجر، ورسوم أجسام بشرية وحيوانية مختزلة إلى أطر هندسية مجردة. وأضافت أيد لاحقة مواد إلى المخطوطة، فعقدت نسبة الأوراق منفردة وصعبت تمييز عمل فيلار نفسه من الإضافات التالية.

والثابت أن المخطوطة تقدم نافذة نادرة إلى المعرفة العملية المتداولة بين البنائين القوطيين، وهي معرفة كانت تنتقل شفهياً إلى حد كبير داخل المحافل والورش ونادراً ما تدون. ومن هذا الوجه تتميز الحافظة بأنها تحفظ أنماطاً في الاستدلال لم تكن لتترك أثراً وثائقياً لولاها.

الهندسة والتصميم التجريبي والممارسة الإنشائية القوطية تقدم *حافظة* فيلار دو أونيكور (De Honnecourt, 1858) رؤية نادرة لا تقدر بثمن إلى طرائق التصميم التجريبي في العصور الوسطى. وتتكون المخطوطة من ثلاث وثلاثين ورقة رق، تحمل الرمز MS Fr 19093، ونحو 250 رسماً، وتوثق الهندسة العملية والمخيلة البنائية اللتين قام عليهما المعمار القوطي.

وتكتسب إجراءات فيلار الهندسية للتناسب والتوقيع أهمية خاصة. فقد اعتمد بناؤو العصور الوسطى تقنيات مثل وفق *المربع* ووفق *المثلث*، مستخدمين مربعات دوارة ومضلعات مرسومة داخل دوائر وإنشاءات تناسبية لربط المخطط والواجهة والمقطع. وحكمت هذه الطرائق قطع الحجر وتوقيع الأقبية والأبراج الصغيرة والزخارف الحجرية وتنسيق أنظمة مكانية معقدة من دون حساب عددي.

الحدس الإنشائي قبل الميكانيكا الصورية توضح الحافظة كيف وجهت الهندسة والتناسب والخبرة المتراكمة فهم السلوك الإنشائي قبل ظهور الاستاتيكا التحليلية بزمن طويل. وحقق البناؤون القوطيون إنجازات إنشائية استثنائية، أقبية حجرية رقيقة تعبر فضاءات شاسعة، وأنظمة تدعيم تحول الدفع إلى الأرض، وأبراجاً بارتفاع غير مسبوق، من دون نظريات صورية للقوة أو الاتزان. واعتمد نجاحهم على قواعد تجريبية وضبط هندسي وذاكرة جماعية لما نجح من قبل.

تقف حافظة فيلار شاهداً على هذا المزج بين معرفة الحرفة والحدس الإنشائي. فهي تلتقط لحظة انتقالية في تاريخ التحليل الإنشائي، عملت فيها الهندسة لا رياضيات مجردة، بل أداة تشغيلية مندمجة في ممارسة البناء.

6.4 العمارة والتناسب والشكل الإنساني

يعكس هذا التجميع تقليداً كانت فيه *البنية* و*التناسب* والشكل المعماري عناصر لا تنفصل. فقد كان الفهم الميكانيكي مندمجاً ضمناً في قواعد الانسجام والسابقة الكلاسيكية والمثل الإنسانية، لا معبراً عنه بالحساب. وأدرك الاستقرار وانتقال الأحمال بالشكل والتناسب قبل وجود التحليل الإنشائي الصوري بزمن طويل.

6.4.1 ليون باتيستا ألبيرتي (1404–1472)

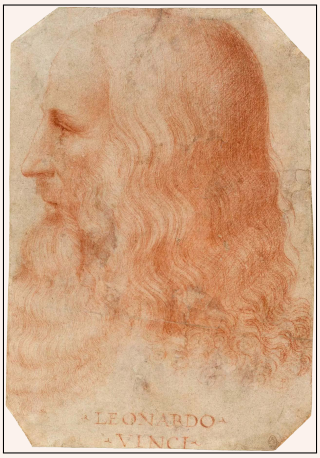
ولد ألبيرتي[2] في جنوة، ابناً غير شرعي للورينزو ألبيرتي، وهو تاجر فلورنسي ثري كان منفياً بسبب محن أسرته السياسية. وتلقى تعليماً إنسانياً واسعاً على نحو استثنائي، فدرس الكلاسيكيات في بادوفا والقانون الكنسي في بولونيا، حيث درس أيضاً الرياضيات والعلوم الطبيعية. وقيل إن ضغط دراسته سبب له انهياراً في أوائل العشرينيات، فاتجه بعده أكثر إلى الفنون البصرية والعمارة. وفي عام 1428 رفع الحظر عن أسرة ألبيرتي، ورأى ليون باتيستا فلورنسا أول مرة؛ وكان لقاؤه بقبة برونليسكي الصاعدة سيشكل مهنته اللاحقة.

انخرط ألبيرتي في السلك الكنسي، وحصل على منصب مختصر الرسائل البابوية في روما، وهو عمل وفر له دخلاً وترك له وقتاً للعلم. ولم يتزوج، وعاش متواضعاً رغم فرص الترقي، وأقام دائرة واسعة من المراسلات مع كبار إنسانيي عصره وفنانيه وأمرائه. ووصفه معاصروه بأنه كان رياضياً في شبابه وفارساً ولاعب جمباز ماهراً وصاحب ذاكرة عجيبة. ويسجل فازاري أنه كان لطيف المعشر كريماً بعلمه، يقدم المشورة بحرية للرسامين والنحاتين والمعماريين.

كانت تكليفاته المعمارية قليلة لكنها مؤثرة: معبد مالاتيستا في ريميني، وواجهة سانتا ماريا نوفيلا وقصر روتشيلاي في فلورنسا، وكنيستا سان سيباستيانو وسانت أندريا في مانتوفا. وعلى خلاف برونليسكي، لم يشرف ألبيرتي على البناء بنفسه، بل قدم تصاميم نفذها غيره، فأرسى التصور الحديث للمعماري مؤلفاً فكرياً لا معلم بناء. وتوفي في روما بعد أن أنتج رسائل في موضوعات امتدت من الرسم والنحت إلى التعمية والفلسفة الأخلاقية وتدبير المنازل.

6.4.2 ليوناردو دا فينشي (1452–1519)

ولد ليوناردو دا فينشي، الشكل 6.1، في 15 أبريل 1452 في بلدة فينشي الصغيرة بجمهورية فلورنسا. وكان ابناً غير شرعي لسير بييرو، كاتب عدل فلورنسي، وامرأة ريفية تدعى كاترينا. ولم يستطع ليوناردو، بوصفه *ابناً* غير شرعي، وراثة اسم أبيه أو مكانته المهنية؛ فلقب *دا فينشي* يعني ببساطة «من فينشي»، وهو نسبة إلى مكان لا اسم أسرة. ورباه أقاربه من جهة أبيه في الأساس، وتلقى تعليماً أولياً في القراءة والكتابة والحساب، وقليلاً من التعليم الصوري في اللاتينية، لغة العلماء. وقد كان استبعاده من التعليم الإنساني مفيداً على نحو متناقض؛ إذ تحرر من أعراف المدرسية وشروح أرسطو، وطور نهجاً للمعرفة يقوم على الملاحظة المباشرة والرسم والمقارنة لا سلطة النص. وكان ليوناردو المثال الأعلى لمثل العبقري الموسوعي في عصر النهضة، وتكشف دفاتره دراسات رائدة في الميكانيكا الإنشائية استبقت تطورات تلتها بقرون. وتضم آلاف الصفحات من الرسوم والملاحظات المكتوبة بخطه المعكوس المميز، وتوثق بحوثاً في كل مجال تقريباً من الفلسفة الطبيعية والهندسة.



شكل 6.1: ليوناردو دا فينشي

[2] للمزيد عن إسهامات ألبيرتي، انظر §15.2.2.1.

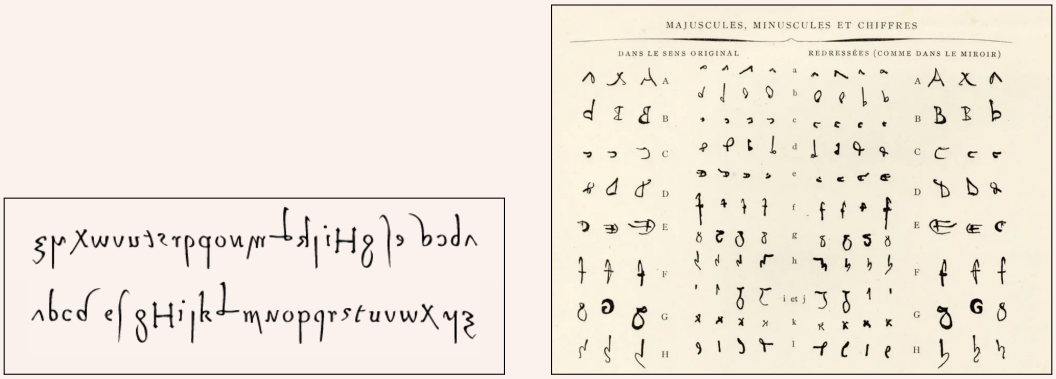
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التدرب في الورشة ودمج الفنون والميكانيكا تتلمذ ليوناردو، في نحو الرابعة عشرة، على أندريا دل فيروكيو في فلورنسا، أحد أمهر فناني العصر ومهندسيه. وتدرب هناك على الرسم والتصوير والنحت وعلم المعادن والرسم التقني والتصميم الميكانيكي. وكانت ورشة فيروكيو أقرب إلى بيئة هجينة يتشابك فيها الإنتاج الفني والتجريب الهندسي والممارسة المادية منها إلى محترف فنان تقليدي.

شكلت هذه الخبرة المبكرة نمط بحث ليوناردو طوال حياته: بصرياً ومخططياً وتوليفياً إلى أقصى حد. وعملت الورشة في الواقع مختبر بحث أولي، غرست فيه عادة التعامل مع المشكلات الفنية والميكانيكية والطبيعية صوراً لعملية بحث مشتركة.

الحياة الخاصة وممارسات الكتابة يعتقد على نطاق واسع أن ليوناردو كان مثلياً. ففي عام 1476 اتهم مع آخرين مجهولاً بالسدومية، وكانت جريمة في فلورنسا آنذاك. ومع أنه برئ لعدم كفاية الأدلة، لم يتزوج قط ولم يوثق له اهتمام عاطفي بالنساء. وتضم دفاتره أحياناً إشارات غير مباشرة توحي بمودة للرجال، لكن شؤونه الشخصية قليلة التدوين في غير ذلك.

كان ليوناردو أعسر ويعمل أساساً بالريشة والحبر، فطور عادة *الكتابة المعكوسة* المميزة، من اليمين إلى اليسار بحروف مقلوبة. ولا يعرف هل اتخذها لتجنب تلطيخ الحبر أم ضرباً من تدريب الذاكرة أم وسيلة للخصوصية. وجعلت هذه الممارسة، مع هجائه واختصاراته الخاصة، دفاتره صعبة القراءة وأسهمت في غموضها اللاحق، الشكل 6.2. واقترح بعض العلماء أن هذا الغموض يعكس أيضاً رغبة في حجب أفكار غير مألوفة في عصر كان التجديد الفكري يثير الريبة.



(a) فك الكتابة

(b) الأبجدية

شكل 6.2: شرح كتابة ليوناردو المعكوسة

ميلانو: الرعاية والملاحظة والقانون الطبيعي قضى ليوناردو أكثر سنواته المهنية إنتاجاً في ميلانو تحت رعاية لودوفيكو سفورزا، بدءاً من نحو عام 1482. وهناك أنتج أعمالاً فنية ضخمة مثل *العشاء الأخير*، وخدم أيضاً مصمماً لاحتفالات البلاط والتحصينات العسكرية والأنظمة الهيدروليكية. وتوثق دفاتره من تلك الفترة، التي جمعت لاحقاً في مجموعات مثل *المخطوطة الأطلسية* ومخطوطة مدريد، نطاقاً مدهشاً من البحث: التشريح والميكانيكا والبصريات والهيدروليكا والطيران والشكل الحضري.

آمن ليوناردو بأن الطبيعة تخضع لقوانين قابلة للاكتشاف، لكنه لم يبحث عنها بالاستنباط الرياضي كما فعل العلماء اللاحقون. بل سعى إليها بالملاحظة البصرية الدقيقة والقياس والرسم المتكرر. ويمثل عمله لحظة انتقالية بين الفلسفة الطبيعية الوسيطة القائمة على السلطة، والبحث التجريبي الذي سيميز العلم الحديث المبكر.

«الحركة سبب كل حياة».

تحرك هذه القناعة دفاتره المملوءة بتروس دوارة ومياه جارية وعوارض تنثني ومفاصل تتحرك وعضلات مشرحة، مرسومة كلها بوضوح يمزج الحدس الفني والاستدلال الميكانيكي.

الرؤية الهندسية والحدس الإنشائي تصور ليوناردو نطاقاً استثنائياً من المشروعات التقنية: آلات طيران لولبية، ومظلات، ومركبات مدرعة، وأجهزة رفع، وجسوراً دوارة. ولم ينفذ إلا القليل منها، لكن نطاقها المفاهيمي يجعله أقرب إلى مهندس استشرافي منه إلى حرفي تقليدي من القرن الخامس عشر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وتكتسب بحوثه في مقاومة المواد وسلوك العوارض وعمل الأقواس والعلاقة بين الشكل والحمل أهمية خاصة للتحليل الإنشائي. وتفتقر هذه الدراسات إلى الصياغة الرياضية للميكانيكا اللاحقة، لكنها تكشف وعياً ناشئاً بأن السلوك الإنشائي قابل للتحليل المنهجي لا بقواعد الإبهام وحدها. ومن هذا الوجه يقف ليوناردو سلفاً حاسماً لغاليليو ورياضنة الميكانيكا في القرن السابع عشر.

مقاومة المواد وسلوك العوارض تتميز دراسات ليوناردو الإنشائية بجمعها الملاحظة التجريبية والاختبار والتكهن النظري. فقد بحث مقاومة المواد، وأجرى تجارب على سعة شد الأسلاك الحديدية ومقاومة كسر العوارض الخشبية. ودرس العلاقة بين أبعاد العارضة وقدرتها على حمل الأحمال، وأدرك أن مقاومة الانحناء تعتمد على العرض ومربع العمق معاً، وهي بصيرة لن تصاغ صورياً حتى كتاب غاليليو *علمان جديدان* بعد أكثر من قرن.

الأقواس والأقبية والفشل الإنشائي لا تقل بحوثه في الأقواس والأقبية استباقاً. فقد حلل كيفية توزيع الأحمال في الأقواس، وأدرك أن القوس «لا ينكسر أبداً إذا لم يمس وتر القوس الخارجي القوس الداخلي»، ودرس العلاقة بين شكل القوس والدفع. وبحث أنماط التشقق في القباب والجدران، مطوراً فهماً حدسياً لفشل المنشآت الحجرية. وتكشف تصاميمه للتحصينات العسكرية والجسور والآلات تقديراً متقدماً للمبادئ الإنشائية.

الميكانيكا الحيوية والتشبيه الإنشائي درس ليوناردو أيضاً ميكانيكا جسم الإنسان، وأدرك تشبيهات بين البنى التشريحية والأنظمة الهندسية: العمود الفقري عموداً، والذراع رافعة، والأوتار كابلات. وأغنى هذا المنظور الحيوي الميكانيكي فهمه للعمل الإنشائي. وأدرك ليوناردو عبر بحوثه وحدة الملاحظة والتجريب والتجريد الرياضي، فوضع أساساً مفاهيمياً حاسماً لعلم المنشآت. ومع أن دفاتره لم تنشر حتى القرن التاسع عشر، فإنها توثق عقلاً يعالج المشكلات الإنشائية بمستوى من التطور لم يضاه حتى الثورة العلمية.

الفن والاكتمال والإرث الانتقائي على الرغم من مواهبه الاستثنائية، لم يكمل ليوناردو إلا أعمالاً قليلة نسبياً. وكثيراً ما ترك التكليفات، مدفوعاً إما بالكمالية أو بجاذبية مشكلات فكرية جديدة. ومع ذلك أصبحت الأعمال التي أكملها، ومنها *الموناليزا* و*الرجل الفيتروفي* و*العشاء الأخير*، أيقونات دائمة، لا بابتكارها الجمالي فحسب، بل بدمجها التشريح والتناسب والبنية المكانية.

السنوات الأخيرة في فرنسا دخل ليوناردو في سنواته الأخيرة خدمة الملك فرنسوا الأول. وانتقل عام 1516 إلى قصر كلو لوسي قرب أمبواز، وحصل على اللقب الشرفي «رسام الملك ومهندسه ومعماريه الأول». وتوفي هناك عام 1519، تاركاً آلاف الصفحات من الرسوم والملاحظات. وتشتت كثير منها أو فقد، لكن كثيراً بقي ليعاد اكتشافه بعد قرون.

يمثل موته نهاية عصر كان يستطيع فيه فرد واحد أن يسعى بصورة معقولة إلى معرفة شاملة. وسرعان ما سيجعل التوسع السريع للتخصص العلمي مثل هذا الاتساع متعذراً.

المخطوطات والأوراق والإرث المخطوط *المخطوطة*، وجمعها مخطوطات، مجلد مخطوط مربوط في مقابل اللفافة. وتتكون مخطوطات ليوناردو من رسوم وملاحظات وأوصاف تمتد إلى الميكانيكا والهندسة والرسم والتشريح والهندسة التطبيقية.

أما *الورقة*، وجمعها أوراق، فهي ورقة واحدة داخل مخطوطة. ويظهر المحتوى عادة على الوجه والظهر، وإن رقم جانب واحد فقط. وتتكون مخطوطات كثيرة لليوناردو من أوراق جمعت جمعاً فضفاضاً لا من مجلدات مربوطة رسمياً.

يسرد الجدول 6.1 أهم المخطوطات الباقية المنسوبة إلى ليوناردو دا فينشي، مع مواقعها الحالية ومحتوياتها.

تشكل هذه المخطوطات مجتمعة جزءاً محورياً من إرث ليوناردو دا فينشي العلمي والهندسي. وتوجد مخطوطات صغيرة أو مجزأة إضافية، لكن المذكورة هنا أكملها وأكثرها دراسة. ويرد أشمل جمع حديث لدفاتر ليوناردو في (Vinci, 1938 PDF).

استعراض مصور لفكر ليوناردو الإنشائي والمعماري من المنشورات البارزة التي تلتقط اتساع عبقرية ليوناردو المرجع (Istituto Geografico De Agostini, 1956 PDF). ولأن ليوناردو أسهم في تشكيل فهمنا الجماعي للفن والعلم معاً، ولأنه كرس اهتماماً مستمراً لموضوعين محوريين في هذا الكتاب، العمارة والمنشآت، نمنح هذا المجلد معالجة خاصة: أولاً بالملخص الآتي، ثم بإعادة عرض الصفحات ذات الصلة للقارئ.

يخرج هذا القرار من الممارسة المعتادة في الكتاب. فقد حرصنا في أجزائه كلها على ألا ندرج إلا الأشكال التي يمكن الإشارة إليها منفردة في النص، وعلى ألا يطغى حجمها على الصفحة. لكن ليوناردو دا فينشي حالة فريدة: فعلى الرغم من أنه لم يترك معادلة واحدة، تستحق أصالة عقله المحضة معاملة خاصة في العرض البصري. ولهذا نعيد للقارئ الفضولي التسلسل الكامل للصفحات التي تضم رسومه، أولاً في العمارة ثم في المنشآت، من (Istituto Geografico De Agostini, 1956 PDF). ومع أنها مصغرة لتلائم الصفحة، يظل النص سهل القراءة بمجرد التكبير، أو بالنقر على أيقونة PDF قرب الاستشهاد لتنزيل الوثيقة المصدر كاملة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.1: مخطوطات ليوناردو دا فينشي (Vinci, 1938)

المحتويات	الموقع	التاريخ	المخطوطة
المخطوطات الرئيسة			
الميكانيكا والهندسة والطيران والآلات العسكرية.	مكتبة أمبروزيانا، ميلانو	نحو 1478–1519	المخطوطة الأطلسية
ملاحظات في الميكانيكا والبصريات والهندسة.	المكتبة البريطانية، لندن	نحو 1480–1518	مخطوطة أروندل
الاستاتيكا والميكانيكا والتروس والتحصينات.	المكتبة الوطنية، مدريد	نحو 1490–1505	مخطوطتا مدريد الأولى والثانية
الهيدروليكا والأوزان والعلوم الطبيعية.	متحف فيكتوريا وألبرت، لندن	نحو 1490–1505	مخطوطات فورستر الأولى إلى الثالثة
ديناميكا الموائع والمستحاثات والضوء والفلك.	مجموعة خاصة	نحو 1506–1510	مخطوطة ليستر، هامر
قوائم مفردات ودراسات معمارية.	مكتبة تريفولزيانا، ميلانو	نحو 1487–1490	مخطوطة تريفولزيانو
شذرات من مخطوطات أخرى.	معهد فرنسا، باريس	أواخر القرن الخامس عشر	مخطوطتا أشبرنهام الأولى والثانية
دراسات في طيران الطيور والديناميكا الهوائية.	المكتبة الملكية، تورينو	نحو 1505	مخطوطة في طيران الطيور
رسالة في الرسم، بعد الوفاة.	مكتبة الفاتيكان	جمعت نحو 1570	مخطوطة أوربيناس
المخطوطات الثانوية والمجزأة			
رسوم تشريحية وعلمية.	المجموعة الملكية، وندسور	نحو 1490–1510	مجموعة مخطوطات وندسور
دراسات رياضية ومعمارية.	مكتبة الفاتيكان	نحو ثمانينيات وتسعينيات القرن الخامس عشر	مخطوطة فاتيكانوس
الميكانيكا والبصريات والهندسة.	معهد فرنسا، باريس	تواريخ مختلفة	مخطوطات باريس، A–E
الاستاتيكا والاتزان.	معهد فرنسا، باريس	نحو 1500	المخطوطة C، سلسلة باريس
الهندسة والأوزان والتشريح.	معهد فرنسا، باريس	نحو 1503–1505	المخطوطة R
مخطوطة معمارية صغيرة.	مجهول أو متشتت	أواخر القرن الخامس عشر	مخطوطة سولبياتي

ليوناردو باحثاً إنشائياً يعالج جزء «علم المنشآت» في (Istituto Geografico De Agostini, 1956) ليوناردو باحثاً مبكراً ومدركاً على نحو غير مألوف لما نسميه اليوم مقاومة المواد والسلوك الإنشائي، مقترباً منهما بالتجربة والاستدلال التناسبي والفحص الدقيق للفشل. ويبدأ القسم بربط الأشكال البنائية المتطورة بالتراكم التدريجي للمفاهيم العلمية والعملية، ويدعو صراحة إلى قراءة تاريخية تقنية للشكل الإنشائي لا أسلوبية بحتة.

وفي هذا الإطار تعرض ملاحظات ليوناردو المخطوطة محاولات للتعبير عن المقاومة بالأبعاد النسبية، الارتفاع والسماكة والتناسب، ولربط «القياسات والنسب» بالمطالب التي يجب أن تقاومها الآلات والمنشآت. وتركز المقاطع المصورة على المساند والأعمدة: يقترح قواعد، وإن لم تكن صحيحة دائماً بالمقاييس الحديثة، تربط السعة بالهندسة، ومنها تجارب فكرية وأمثلة عددية ترمي إلى إظهار الاتجاهات التناسبية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويؤكد الكتاب اهتمامه بالعمل المركب وزيادة الصلابة والمقاومة بجمع العناصر، مثل قوله إن القصب المربوط معاً يستطيع حمل أضعاف ما تحمله القصبات المنفردة، وهو حدس مبكر لأثر تجميع عناصر ضعيفة في نظام إنشائي. وإلى جانب العوارض والأعمدة، تتكرر الأقواس بوصفها موضوعاً إنشائياً، شكلاً للدراسة وموضعاً تكشف فيه الشقوق والكسور القوانين الكامنة، ما يعزز الفكرة الأوسع أن ليوناردو رأى الفشل مصدراً للمعلومات لا مجرد مشكلة.

وأخيراً، يبرز قسم المنشآت مخيلة ليوناردو التجريبية بمفهوم جهاز لاختبار الشد: يقترح تجهيزاً مضبوطاً لتحميل سلك حديدي بإضافات مقيسة من الوزن، وإعادة الاختبار عند أطوال مختلفة، وتسجيل موضع الفشل وكيفيته؛ وكان هدفه الصريح التعميم من تجارب متكررة إلى «قانون» لمقاومة المساند عبر المواد والتكوينات.

ليوناردو معمارياً يرفض جزء العمارة في (Istituto Geografico De Agostini, 1956) التعامل مع ليوناردو رساماً له اهتمامات معمارية «عرضية»، ويقول إن هذا البحث كان في الغالب مجزأ وأحادي النظرة، فأضاع وحدة عمله. وبدلاً من ذلك يصور تفكيره المعماري غير منفصل عن عادته الأوسع في البحث: يدرس المباني أشياء تفهم بالملاحظة والمقارنة والبحث عن القواعد الحاكمة، لا تمارين أسلوبية محضة.

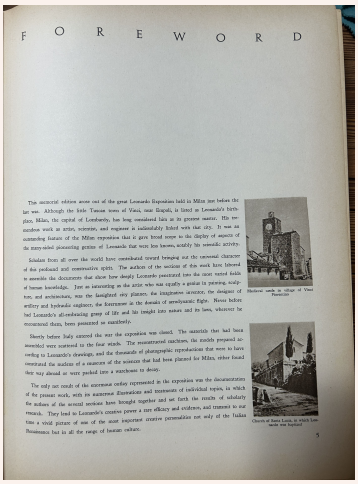
وتوضح اللوحات والتعليقات انتقاله بين عناصر معمارية ملموسة، مثل مخططات الكنائس وداخلها وواجهاتها ومخططات القباب وواجهات القصور والأبراج، وأسئلة أعم عن التناسب والتنظيم المكاني والترتيب الأخلاقي والعقلاني للبيئة المبنية. ومن الموضوعات المتكررة اعتماد ليوناردو القياس أداة تفسيرية مشروعة: فعندما دافع عن حل محدد لبرج تقاطع كاتدرائية ميلانو، احتكم إلى مبادئ تشبه ما يقوم عليه «الاكتمال البدني» للإنسان، موحياً بأن الصواب الإنشائي والتماسك العضوي تحكمهما قواعد متوازية.

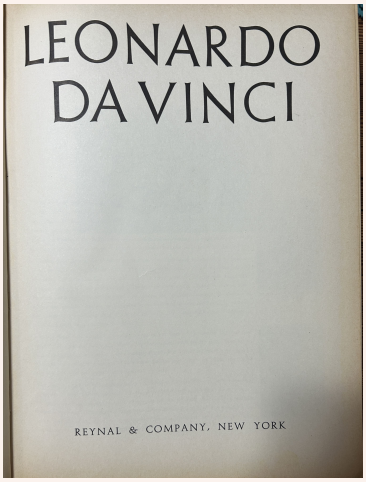
ويؤكد القسم أيضاً أن مجرد عد الرسوم أو فهرسة العناصر الزخرفية لا يجيب الأسئلة التفسيرية الحقيقية؛ فالمهم هو كيفية عمل الرسوم أجزاء من ممارسة بحث متطورة. ويناقش، ثم يرفض إلى حد بعيد، الجدل القديم بشأن ما إذا كانت رسوم ليوناردو المعمارية «مفاهيمية» فقط: فحتى إن أمكن قراءة بعض الأوراق توليفات معمارية بيانية توضح نتائج في الاستاتيكا والجمال، يقول التعليق إن الدراسة الدقيقة لمادة كاتدرائية ميلانو، ولا سيما مسائل برج التقاطع والقبة، ولمشروعات موثقة أخرى تكفي لإزالة أي شك جدي في معالجة ليوناردو مسائل العمارة معالجة ذات أثر تقني.

وتتوخى الرواية الحذر في قصص النسبة و«التأثير» أيضاً، ولا سيما ما يتعلق ببرامانتي: فهي تحذر من أن الاستنتاجات عن التأثير المباشر المبنية على تشابهات سطحية بين المخططات متسرعة غالباً، وتدعو إلى تمييز زمني ومفاهيمي لا ادعاءات واسعة عن تعاون روحي أو تفسير «تفوق» معلم بتأثير آخر. ويقترن هذا بصورة ليوناردو موثقاً دقيقاً: تؤكد الملاحظات والأمثلة القياسات والجمع المتعمد لبيانات الملاحظة والرجوع إلى خبراء وكتب، ما يدل على أن تفكيره المعماري قام على سير عمل تجريبي شديد التعطش للمعلومات بالنسبة إلى عصره.

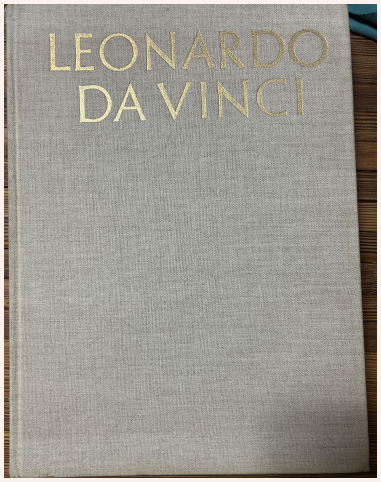
ويظهر البعد الحضري كذلك في مخططات الاتصال والمباني المنظمة بشوارع مرفوعة وأحياء مرتبة، ما يبين أن «العمارة» هنا تمتد من أنماط المباني إلى البنية التحتية والشكل الحضري. وتعرض أجزاء العمارة والمنشآت معاً ليوناردو لا مصمماً «يرسم المباني» أحياناً، بل مفكراً كانت لديه العمارة والضرورة الإنشائية والقياس والتشبيه والتجربة أجزاء من منهج واحد متصل؛ ويجعلها الكتاب مقروءة بمقتطفات مخطوطة ولوحات منتقاة تحفظ الحوار بين الأسئلة الهندسية، المساند والعوارض والقباب والأقواس وحركة المدينة، والأسئلة المعمارية.

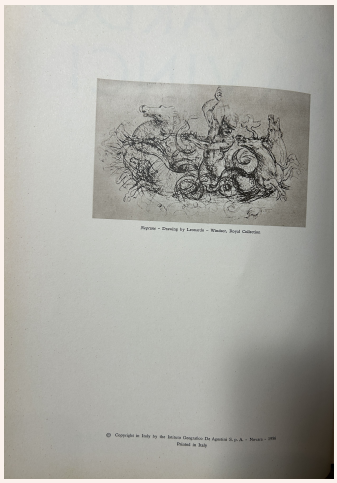
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


FOREWORD

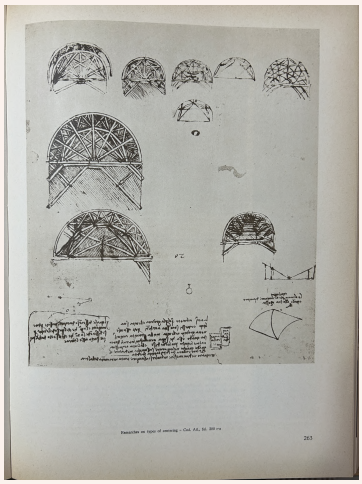

LEONARDO DA VINCI

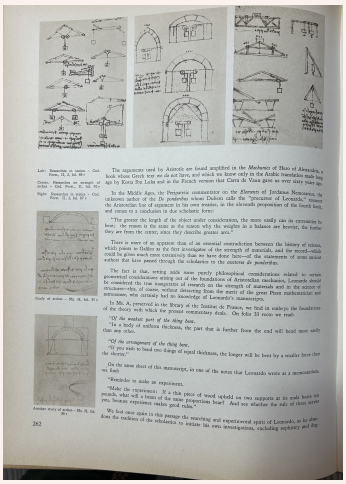
REYNAL & COMPANY, NEW YORK

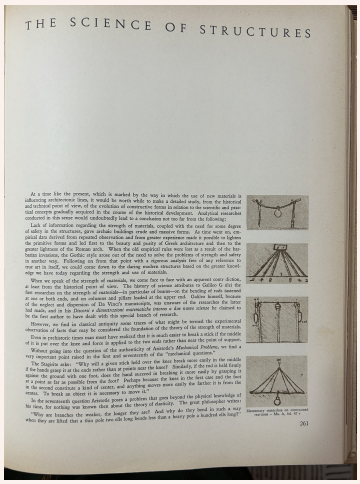

LEONARDO DA VINCI



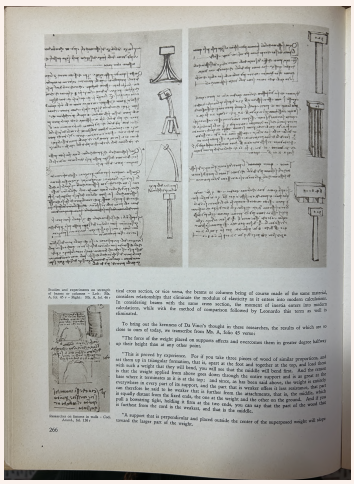
علم المنشآت

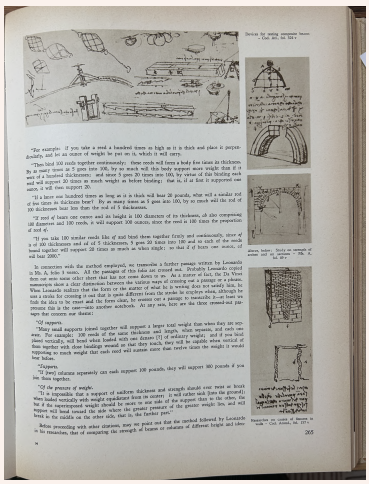


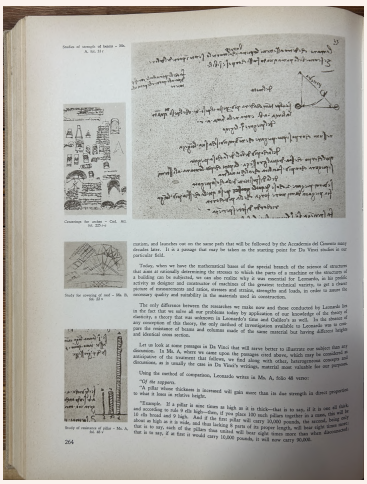


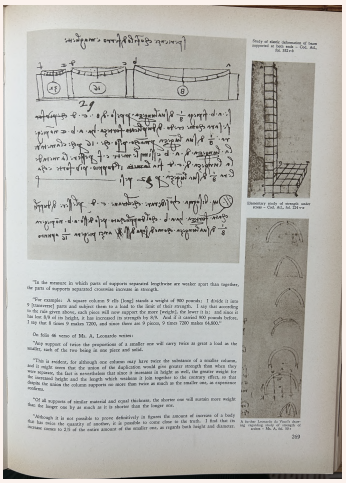

THE SCIENCE OF STRUCTURES

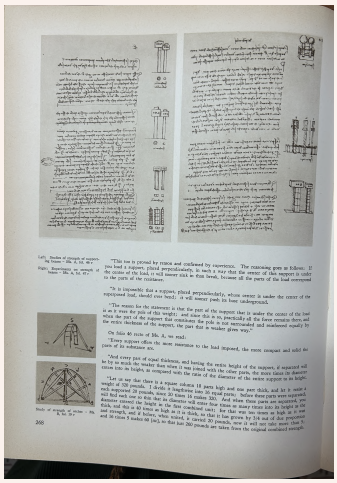
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

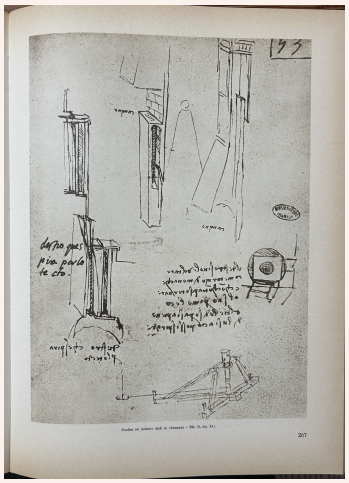


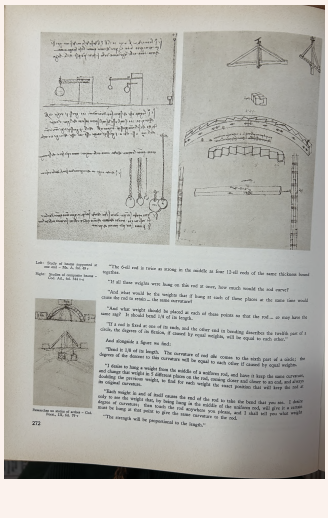


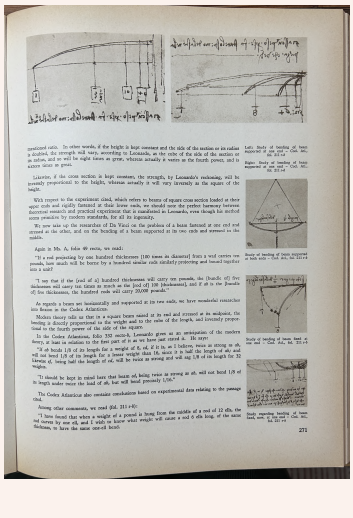


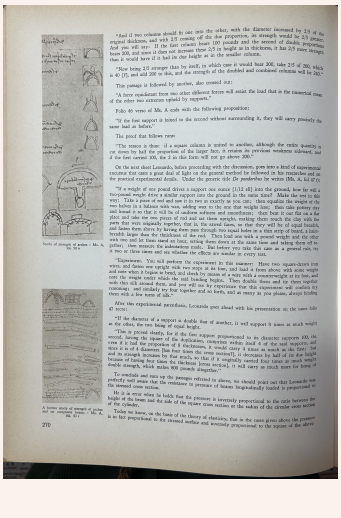




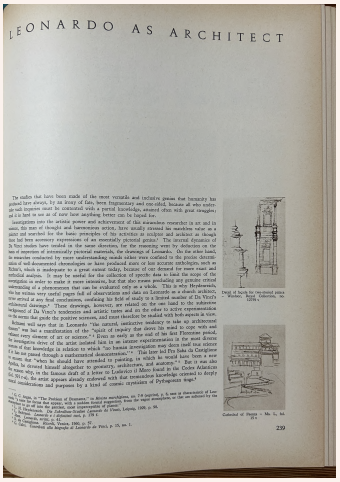


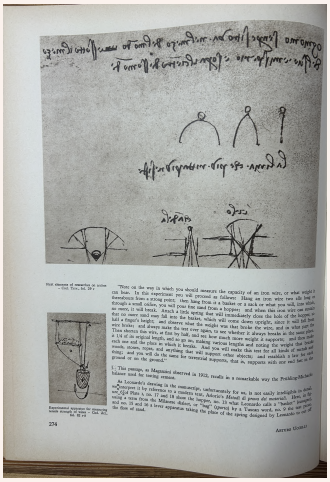


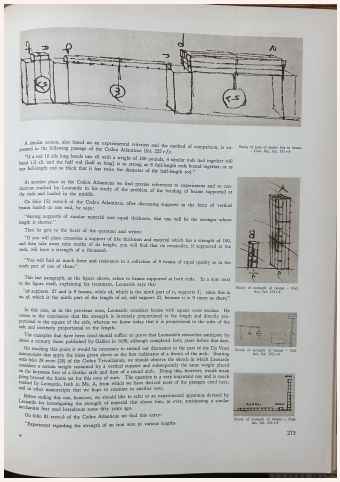




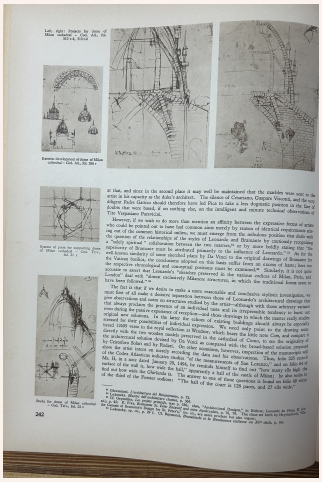
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

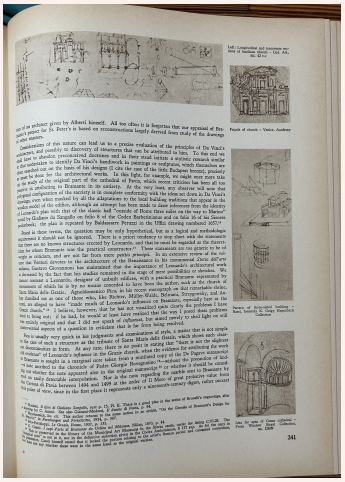


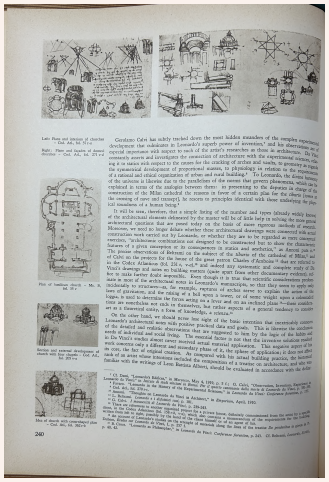




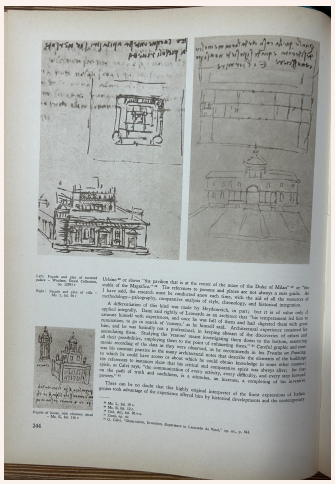
المعماري

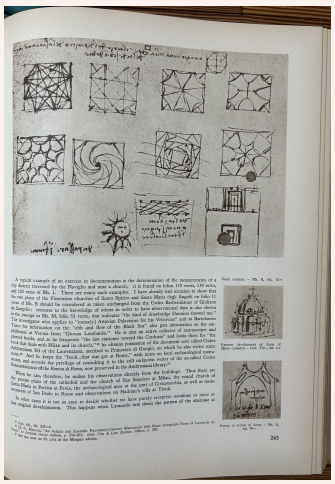




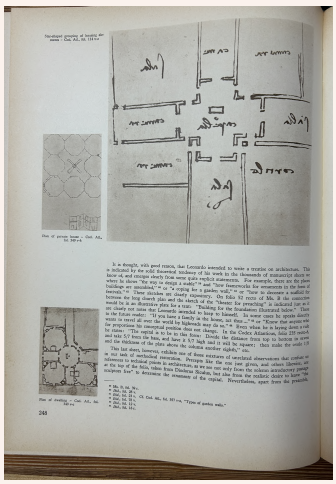


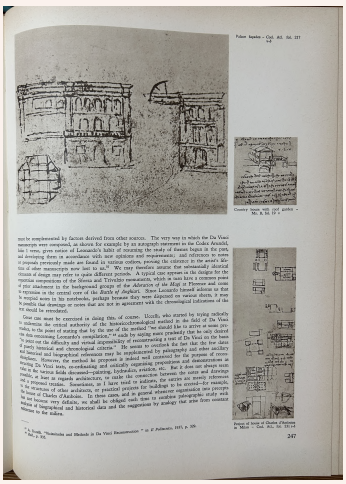


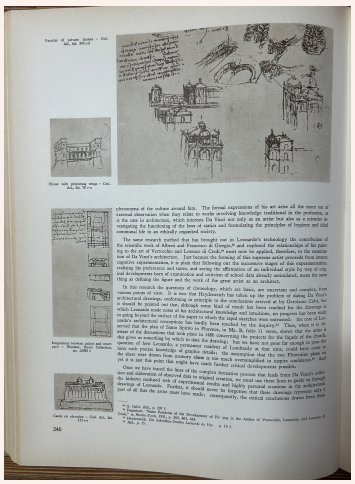


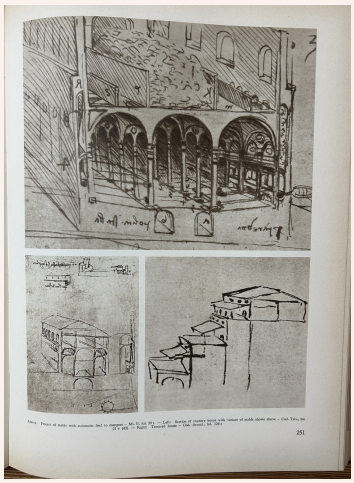


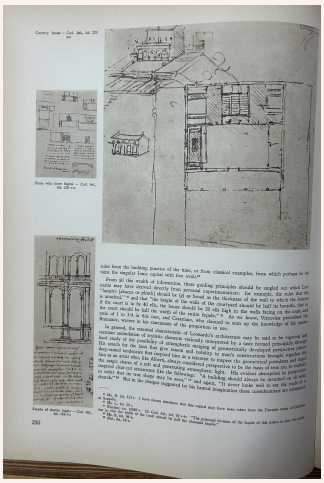
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

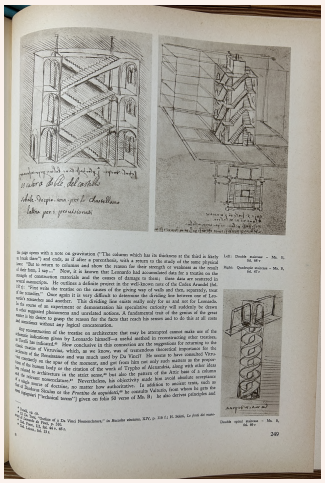


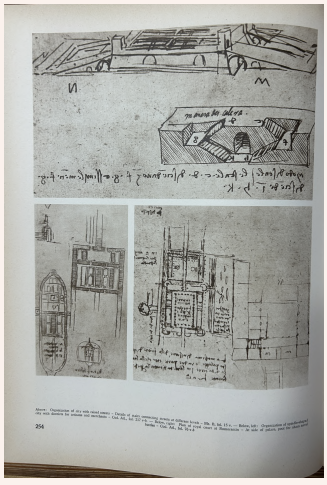


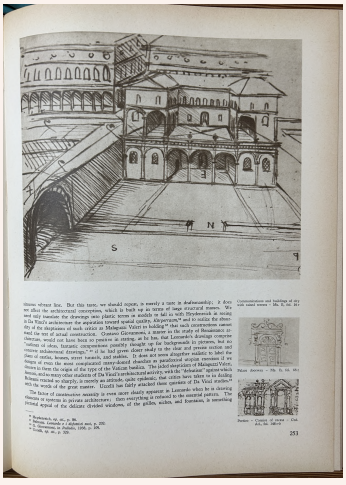


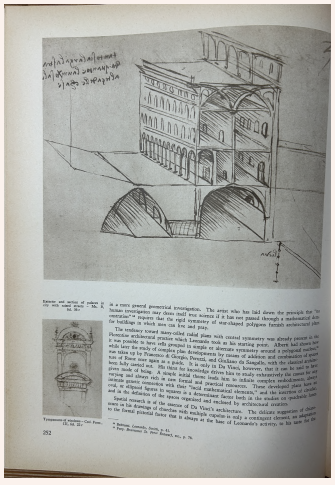




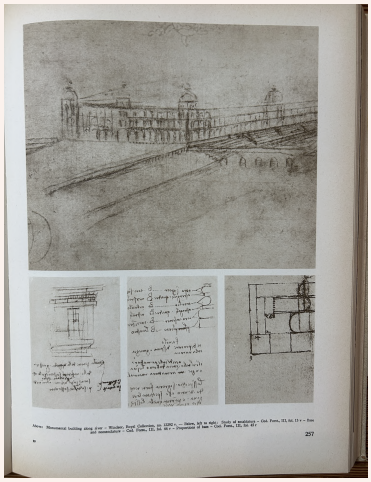


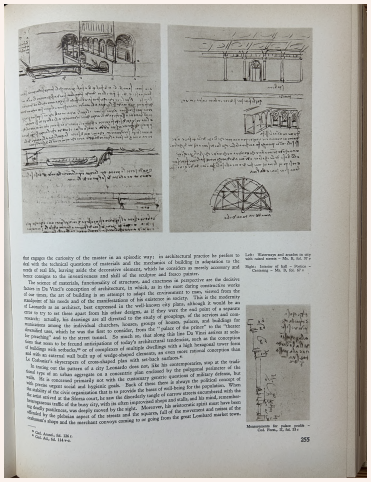
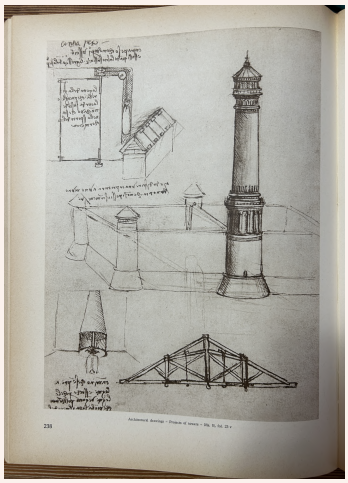
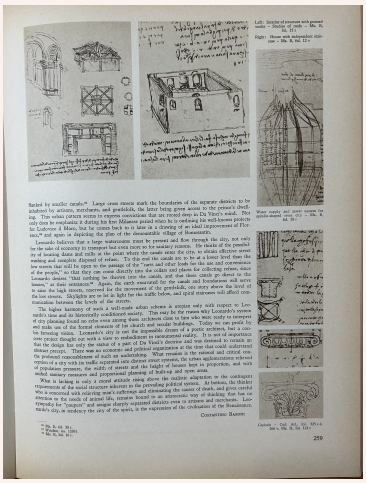






الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.




6.4.3 أندريا بالاديو (1508–1580)

ولد بالاديو في بادوفا عام 1508 باسم أندريا دي بييترو ديلا غوندولا،[3] وانتقل إلى فيتشنزا في عشرينيات القرن السادس عشر، وانتسب في نحو السادسة عشرة عام 1524 إلى نقابة البنائين ونحاتي الحجر المحلية. وعمل قرابة العقد التالي بناء ونحاتاً، وظلت الوثائق تصفه بـقاطع *الحجر* حتى عام 1542. ومن ثم كان تعليمه المبكر عملياً لا علمياً، متجذراً في المواد وتقنيات التنفيذ وواقع مواقع البناء؛ وهي خبرة تأسيسية ستشكل نظرته المعمارية دائماً، وتؤسس عمله النظري اللاحق على منطق البناء لا التأمل الجمالي المجرد.

جاء التحول الحاسم في أواخر ثلاثينيات القرن السادس عشر، حين لاحظ الشاعر والعالم الإنساني جان جورجو تريسينو عمله أثناء تشغيله في مشروعات بناء واتخذه تحت رعايته. وأدرك تريسينو موهبته، ومنحه الاسم الكلاسيكي «بالاديو»، نسبة إلى بالاس أثينا، وعرفه بالتعلم الإنساني. وكان تريسينو غارقاً في دراسة العمارة الرومانية القديمة وفيتروفيوس، المتاح مطبوعاً منذ أواخر القرن الخامس عشر، فشجع تعليم بالاديو الكلاسيكي وصحبه في رحلات دراسية إلى روما، حيث درس النصب القديمة وقاسها بنفسه منهجياً. وقدمت هذه اللقاءات مع العمارة الرومانية الإطار الفكري الذي مكنه من توليف الشكل الكلاسيكي وممارسة البناء المعاصرة.

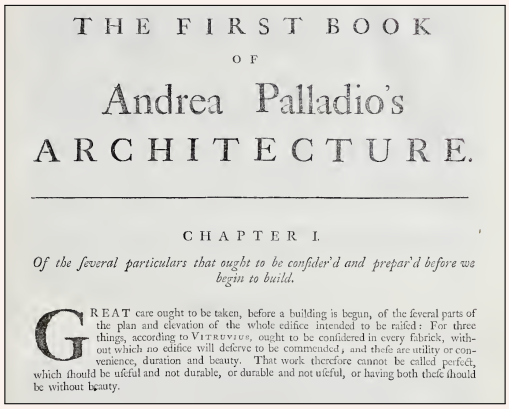
وبحلول نحو 1540، بدأ بالاديو يتلقى تكليفات معمارية ويظهر علناً في الدور الذي سيشتهر به. واتخذ فيتشنزا قاعدة أساسية،

[3] ترد تفاصيل إضافية عن إسهامه في §15.2.2.2.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأصبح أكثر معماريي أواخر عصر النهضة تأثيراً، فصمم الفيلات والقصور والكنائس في أنحاء فينيتو. ويقف عمله عند تقاطع الحرفة والنظرية الكلاسيكية والتناسب العقلاني.

غدا أندريا بالاديو (1508–1580) (Palladio, 1570) أكثر معماريي عصر النهضة تأثيراً، وربما أكثر المعماريين تأثيراً في العمارة الغربية كلها. وجمع كتابه *الكتب الأربعة في العمارة*، المنشور في البندقية عام 1570، النظرية المعمارية الكلاسيكية بالتعليم العملي الصارم في أكثر الرسائل المعمارية تأثيراً على الإطلاق. وقد مزج المبادئ النظرية والرسوم المقيسة للمباني الرومانية القديمة والعروض المفصلة لأعمال بالاديو نفسه في دليل شامل للتصميم شكل العمارة في العالم قروناً.[4]



THE FIRST BOOK
OF
Andrea Palladio's
ARCHITECTURE.

CHAPTER I.

Of the feveral particulars that ought to be conſider'd and prepar'd before we begin to build.

GREAT care ought to be taken, before a building is begun, of the feveral parts of the plan and elevation of the whole edifice intended to be raiſed: For three things, according to VITRUVIUS, ought to be conſidered in every fabrick, without which no edifice will deſerve to be commended, and theſe are utility or convenience, duration and beauty. That work therefore cannot be called perfect, which ſhould be uſeful and not durable, or durable and not uſeful, or having both theſe ſhould be without beauty.

شكل 6.3: بالاديو (Palladio, 1570)

6.4.4 سيباستيانو سيرليو (1475–1554)

ولد سيباستيانو سيرليو في بولونيا عام 1475، وتدرب رساماً قبل أن يتجه إلى العمارة. وعمل في روما في عقدي 1510 و1520، حيث استوعب دروس النصب القديمة وأعمال برامانتي وبيروتسي. وبعد نهب روما عام 1527، انتقل إلى البندقية ثم فرنسا، حيث خدم فرنسوا الأول وعمل في قصر فونتينبلو. وتوفي في فونتينبلو نحو عام 1554.

الأعمال الكاملة في العمارة أحدث سيرليو ثورة في نقل المعرفة المعمارية بتقديم الوضوح البصري على العرض النصي. وكان *الأعمال الكاملة في العمارة* (Serlio, 1996)، المنشور على أجزاء بين عامي 1537 و1575، أول رسالة معمارية تصمم أساساً حول الرسوم. فحيث كتب ألبيرتي وفيتروفيوس نثراً نظرياً كثيفاً، قدم سيرليو مئات الرسوم المحفورة على الخشب مصحوبة بشروح عملية في متناول البنائين والرعاة والمعماريين.

جعل نهج سيرليو العمارة الكلاسيكية متاحة على نطاق واسع، وأوصل مبادئ التصميم القديم وتصميم عصر النهضة إلى الممارسين في أنحاء أوروبا ممن لم يستطيعوا رؤية مباني إيطاليا أو تلقي تعليم إنساني. وعرضت كتبه في الطرز الكلاسيكية، التوسكاني والدوري والأيوني والكورنثي والمركب، كل طراز بمخططات منهجية تبين العلاقات التناسبية وملامح القوالب وتفاصيل التركيب.

ترجمت الرسالة إلى الهولندية والألمانية والفرنسية والإسبانية والإنجليزية، وأصبحت أكثر الكتب المعمارية انتشاراً في القرن السادس عشر. واستبق استخدام سيرليو المخططات لإيصال القواعد الهندسية للتصميم أهمية الطرائق البيانية في التحليل الإنشائي.

[4] سيكون القارئ المتنبه قد لاحظ أن عنوان العمل الحالي يكرم تحفة بالاديو. ويعترف المؤلف بهذا الاقتباس بإعجاب يفوق شعوره بالذنب، آملاً أن تتسرب إلى هذه الصفحات، بسحر التعاطف، ذرة من وضوح معلم البندقية ومنهجيته. نظم بالاديو فن العمارة في أربعة كتب؛ ونحاول الأمر نفسه لعلم المنشآت. أما هل سيتمتع هذا العمل ولو بجزء من عمر *الكتب الأربعة* الممتد خمسة قرون، فمتروك، ولحسن الحظ، للأجيال المقبلة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.4.5 جياكومو باروتسي دا فينيولا (1507–1573)

قنن جياكومو باروتسي دا فينيولا (1507–1573) (Vignola, 1969) الطرز الكلاسيكية الخمسة في نظام معياري دقيق أصبح المرجع القياسي للممارسة المعمارية والهندسية أكثر من ثلاثة قرون. وحقق كتابه *قاعدة الطرز المعمارية الخمسة*، المنشور أول مرة عام 1562، ما لم تحققه رسالة سابقة: عرضاً منهجياً كاملاً، دقيقاً رياضياً وواضحاً بصرياً، للنسب الكلاسيكية يستطيع كل ممارس كفء تطبيقه.

كان ابتكار فينيولا منهجياً. فقد جعل الوحدة، المعرفة بنصف قطر العمود عند قاعدته، الوحدة الأساسية التي تشتق منها جميع الأبعاد الأخرى. ويعبر عن كل عنصر في كل طراز، ارتفاع العمود ونسب السطح المعمد وملامح القاعدة والتاج والمسافة بين الأعمدة، بكسر أو مضاعف بسيط لهذه الوحدة. ويختزل النظام التصميم الكلاسيكي إلى حساب: إذا أعطي ارتفاع العمود المطلوب، تبعته الأبعاد الأخرى تلقائياً. وأزالت هذه العقلنة الالتباسات والتناقضات في المعالجات السابقة، ومنها معالجة سيرليو بل فيتروفيوس.

قاعدة الطرز المعمارية الخمسة، 1562 يتميز *الكتاب* باقتصاده. فهو يتكون كله تقريباً من اثنتين وثلاثين لوحة محفورة بنص ضئيل، يكفي بالكاد لشرح نظام التناسب. وجعله هذا الوضوح البصري عملياً للغاية، إذ استطاع المعماريون والبناؤون استخلاص ما يحتاجونه بنظرة. ومر الكتاب بمئات الطبعات والترجمات، وظل يطبع بلا انقطاع حتى القرن العشرين. وكان الكتاب المعماري بامتياز، يستخدم في الأكاديميات والورش في أوروبا والأمريكتين.

أثر منهج فينيولا المنهجي للأبعاد والنسب فيما يتجاوز الأسلوب المعماري بكثير. فقد جسد اختزاله الأحكام الجمالية المعقدة إلى علاقات عددية دقيقة الروح العقلانية التي ستميز الثورة العلمية. والعادة الذهنية التي تنتج أنظمة تناسب معيارية، منهجية وكمية وقائمة على القواعد، هي نفسها التي تنتج التحليل الإنشائي. ومن ثم لا تمثل رسالة فينيولا تقنيناً للذوق الكلاسيكي فحسب، بل خطوة نحو المعالجة العقلانية للشكل والبنية التي تميز الهندسة الحديثة.

6.4.6 هوبير غوتييه (1660–1737)

ولد هوبير غوتييه في نيم، وتدرب مهندساً عسكرياً في عهد لويس الرابع عشر، وهو عصر توسع طموح في البنية التحتية قصد منه ترسيخ السلطة الإدارية والاقتصادية للدولة الفرنسية. وشملت مسيرته الطرق والقنوات والجسور، وترقى إلى منصب مفتش *الطرق والجسور والموانئ البحرية والممرات في لانغدوك*، وهي من أكبر مقاطعات فرنسا.

نشر غوتييه عام 1716 كتابه *رسالة في الجسور* (Gautier, 1765)، في طبعته الرابعة، وهو أول كتاب يكرس بالكامل لبناء الجسور. ويفتتح العمل بشكوى لافتة، الشكل 6.4a:

> Les Auteurs qui ont traité de l’Architecture, n’ont point donné de regies pour conftruire des Ponts. Ils n’ont point traité à fond cette matière ni donné aucun détail, ils n’en ont parlé qu’en paffant; ils ont fupofé qu’un Architecte qui n’ignore rien de ce qui concerne la Profession, devoir savoir tout ce qui regarde les Ponts. Quelques-uns, comme Scamozzi, Palladio, Serlio, &c ont donné des modèles des Ponts de Maçonnerie, ou de Charpente; Vitruve & Vignolle n’en ont rien dit. J’ai tiré de ceux qui en ont traité tout ce qui a pu convenir à mon sujet, & je rapporte tout ce qu’ils ont publié ou fait sur cette matière, lorsque j’ai cru que cela pouvait être de quelque usage au Public; mais partout où j’ai vu que je pouvais aller au-delà en augmentant, ou en diminuant, pour éclaircir davantage les choses, je l’ai fait en sorte qu’elles fussent plus aisées à pénétrer. J’ai joint à tout cela l’expérience que je puis avoir de tous ces ouvrages, depuis plusieurs années que je travaille, & que je rapporte, afin que ceux qui ne savent pas puissent en profiter, pour qui uniquement j’ai fait ce Traité.

لم يقدم المؤلفون الذين عالجوا العمارة قواعد لبناء الجسور. ولم يبحثوا الموضوع بعمق أو يقدموا مناقشة مفصلة، بل ذكروه عرضاً. وافترضوا أن المعماري، الذي لا يجهل شيئاً مما يتعلق بالمهنة، ينبغي أن يعرف كل ما يخص الجسور.

قدم بعض المؤلفين، مثل سكاموتسي وبالاديو وسيرليو وغيرهم، نماذج لجسور حجرية أو خشبية؛ أما

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فيتروفيوس وفينيولا فلم يقولا عنها شيئاً. وقد استخلصت من كل من كتب في الموضوع ما يلائم غرضي، وأوردت كل ما نشروه أو فعلوه فيه حين رأيت أنه قد ينفع الجمهور.

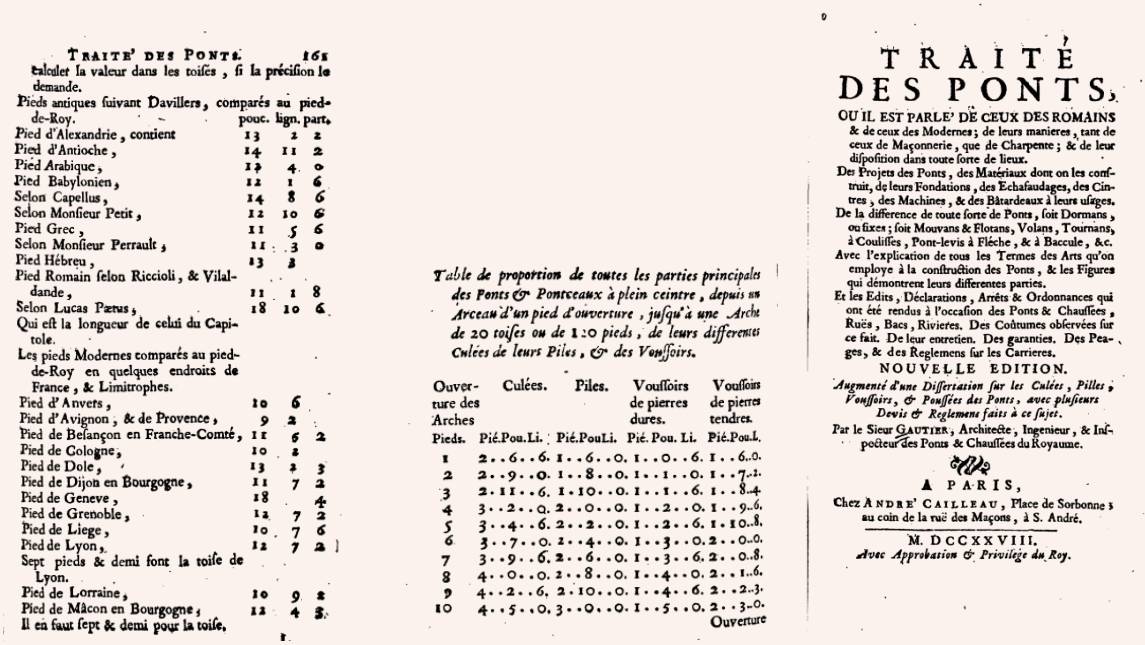
وحيثما رأيت أنني أستطيع المضي أبعد، بالإضافة أو الحذف، لتوضيح الأمور تماماً، فعلت ذلك حتى يسهل فهمها. وأضفت إلى هذا كله الخبرة التي اكتسبتها من هذه الأعمال خلال سنوات ممارستي الطويلة، وأوردتها لينتفع بها من لا يعرفون، ومن أجلهم وحدهم كتبت هذه الرسالة.

Gautier, 1765 Traité des ponts

والواقع أن فيتروفيوس لم يقل شيئاً عن الجسور، وكذلك فينيولا. وقدم بالاديو وسكاموتسي أمثلة بلا إرشاد منهجي. وقد قصد غوتييه صراحة إلى سد هذا النقص، فجمع كل ما نشر وأضاف إليه خبرته العملية الممتدة عقوداً.

تتسم *رسالة في الجسور* بنطاق موسوعي. فهي تبدأ بمسح تاريخي للجسور الشهيرة، جسر تراجان فوق الدانوب وجسور روما وجسر دو غار، ثم تنتقل منهجياً عبر أنواع الجسور وموادها وأساساتها والسدود المؤقتة والقوالب والآلات. ويناقش غوتييه الجسور الخشبية والحجرية، والثابتة والمتحركة، ومنها الجسور المتحركة والعائمة والدوارة. ويعالج هندسة الأقواس وأبعاد الركائز والكتفين والتحديات العملية لتأسيس المنشآت في الأنهار. ويظل العمل في مجمله وصفياً لا تحليلياً؛ إذ يعالج الأداء الإنشائي بالشكل والنسب والسوابق المتراكمة لا بالحساب.

وإلى جانب الشكل والبناء، يكرس غوتييه عناية استثنائية لما يمكن تسميته البنية التحتية العملية والإدارية للهندسة. فهو يضع مصطلحات تقنية دقيقة، ويقدم في الصفحة 161 جدولاً مفصلاً لوحدات الطول، *الأقدام*، من المقاييس البابلية إلى المستخدمة في مناطق أوروبا ومدن فرنسا المختلفة. ويوضح تنوع الوحدات بجلاء الصعوبات العملية التي واجهها المهندسون قبل التوحيد، ويساعد في تفسير كون إدخال المتر لاحقاً، الذي بدأ في الثورة الفرنسية وترسخ في عهد نابليون، من أهم الإصلاحات أثراً في تاريخ الممارسة الهندسية.



TRAITÉ DES PONTS,

OU IL EST PARLE' DE CEUX DES ROMAINS & de ceux des Modernes; de leurs manieres, tant de ceux de Maçonnerie, que de Charpente; & de leur disposition dans toute sorte de lieux.

Des Projets des Ponts, des Matériaux dont on les construit, de leurs Fondations, des Echafaudages, des Cintres, des Machines, & des Bâtardeaux à leurs usages.

De la difference de toute sorte de Ponts, soit Dormans, ou fixes; soit Mouvans & Flotans, Volans, Tournans, à Coulisses, Pont-levis à Fléche, & à Baccule, &c.

Avec l'explication de tous les Termes des Arts qu'on employe à la construction des Ponts, & les Figures qui démontrent leurs differentes parties.

Et les Edits, Déclarations, Arrêts & Ordonnances qui ont été rendus à l'occasion des Ponts & Chaussées, Ruës, Bacs, Rivieres. Des Coûtumes observées sur ce fait. De leur entretien. Des garanties. Des Peages, & des Reglemens sur les Carrieres.

NOUVELLE EDITION.

Augmenté d'une Dissertation sur les Culées, Pilles, Voussoirs, & Poussées des Ponts, avec plusieurs Devis & Reglemens faits à ce sujet.

Par le Sieur GAUTIER, Architecte, Ingenieur, & Inspecteur des Ponts & Chaussées du Royaume.

A PARIS,

Chez ANDRE' CAILLEAU, Place de Sorbonne; au coin de la ruë des Maçons, à S. André.

M. DCCXXVIII.

Avec Approbation & Privilége du Roy.

(a) صفحة الافتتاح

Table de proportion de toutes les parties principales des Ponts & Ponteeaux à plein ceintre, depuis un Arceau d'un pied d'ouverture, jusqu'à une Arche de 20 toises ou de 120 pieds, de leurs differentes Culées de leurs Piles, & des Voussoirs.

Ouverture des Arches	Culées.	Piles.	Voussoirs de pierres dures.	Voussoirs de pierres tendres.
Pieds.	Pié.Pou.Li.	Pié.PouLi.	Pié. Pou. Li.	Pié.Pou.L.
1	2..6..6.	1..6..0.	1..0..6.	1..6..0.
2	2..9..0.	1..8..0.	1..1..0.	1..7..2.
3	2.11..6.	1.10..0.	1..1..6.	1..8..4
4	3..2..0.	2..0..0.	1..2..0.	1..9..6.
5	3..4..6.	2..2..0.	1..2..6.	1.10..8.
6	3..7..0.	2..4..0.	1..3..0.	2..0..0.
7	3..9..6.	2..6..0.	1..3..6.	2..0..8.
8	4..0..0.	2..8..0.	1..4..0.	2..1..6.
9	4..2..6.	2.10..0.	1..4..6.	2..2..3.
10	4..5..0.	3..0..0.	1..5..0.	2..3..0.
				Ouverture

(b) تعريفات مختلفة للقدم

TRAITE' DES PONTS. 161

Calculer la valeur dans les toises, si la précision le demande.

Pieds antiques suivant Davillers, comparés au pied-de-Roy.

	pouc.	lign.	part.
Pied d'Alexandrie, contient	13	2	2
Pied d'Antioche,	14	11	2
Pied Arabique,	13	4	0
Pied Babylonien,	12	1	6
Selon Capellus,	14	8	6
Selon Monsieur Petit,	12	10	6
Pied Grec,	11	5	6
Selon Monsieur Perrault,	11	3	0
Pied Hébreu,	13	3	
Pied Romain selon Riccioli, & Vilalpandе,	11	1	8
Selon Lucas Pætus,	18	10	6

Qui est la longueur de celui du Capitole.

Les pieds Modernes comparés au pied-de-Roy en quelques endroits de France, & Limitrophes.

Pied d'Anvers,	10	6	
Pied d'Avignon, & de Provence,	9	2	
Pied de Besançon en Franche-Comté,	11	6	2
Pied de Cologne,	10	2	
Pied de Dole,	13	2	3
Pied de Dijon en Bourgogne,	11	7	2
Pied de Geneve,	18		4
Pied de Grenoble,	12	7	2
Pied de Liege,	10	7	6
Pied de Lyon,	12	7	2

Sept pieds & demi font la toise de Lyon.

Pied de Lorraine,	10	9	2
Pied de Mâcon en Bourgogne,	12	4	8

Il en faut sept & demi pour la toise.

(c) تحديد أبعاد الجسر

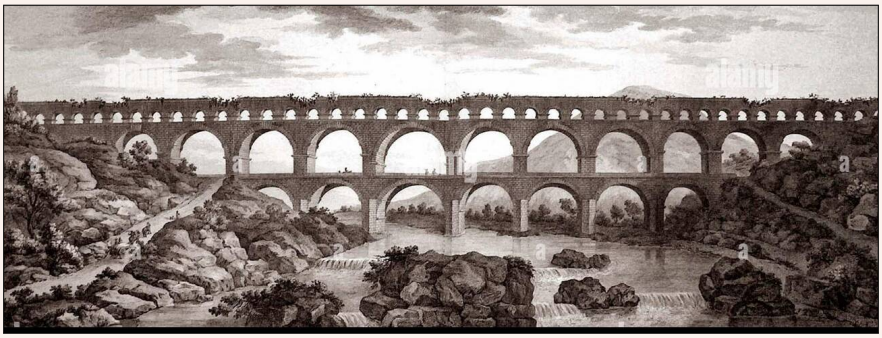
شكل 6.4: *رسالة في الجسور* (Gautier, 1765)

ويتناول غوتييه كذلك اللوائح والمراسيم المنظمة للأشغال العامة، الصفحة 196، وعقوبات التنفيذ المعيب، الصفحة 214، والتزامات الصيانة، الصفحة 217، والضمان العشري المفروض على البنائين، الصفحة 225. ويناقش رسوم عبور الجسور، الصفحة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

227، وإجراءات تقدير الكلفة، الصفحتان 231 و273، وشهادة التنفيذ الصحيح، الصفحة 325، وطرائق محاسبة الأشغال العامة، الصفحة 328، والموافقة الرسمية للسلطات على الوثائق الهندسية، الصفحة 340. ويلفت النظر خصوصاً رده الصريح على نقد المراجعين، الصفحة 409، وهو مثال مبكر لما نسميه اليوم مراجعة الأقران.

اتخذ غوتييه جسر دو غار نموذجاً في المسألة الحاسمة لسماكة القوس، الشكل 6.5. فسماكة أقواسه 4 أقدام لبحر 60 قدماً، ما يعطي النسبة الكلاسيكية 1/15، وهي القاعدة نفسها التي قدمها ألبيرتي قبل قرنين، الشكل 15.4. لكنه أدرك فوراً مشكلة: لا تصح القاعدة إلا للأقواس الكبيرة. فقوس صغير بحره 6 أقدام تعطيه القاعدة سماكة تقل عن 6 بوصات، «وهو مقدار يراه صغيراً جداً مقارنة بالسماكة الصحيحة التي يقول إنها 1.5 قدم» (Huerta, 2018). وهنا سجل غوتييه ملاحظة ذات أهمية أساسية، وهي



شكل 6.5: جسر دو غار

أول إدراك صريح أن تصميم الجسور غير *تناسبي* في جوهره:

> Il est certain qu’un grand Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu’un Ponceau qui porte la même voiture

---

> إن الجسر الكبير الذي يحمل عربة ثقيلة أقل حملاً بكثير من جسر صغير يحمل العربة نفسها.
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

تحتاج عبارة غوتييه إلى توضيح: فهو يعني أن *نسبة* حمل المرور إلى وزن الجسر الذاتي أصغر بكثير في الجسر الكبير منها في الصغير. فالجسر الكبير، لثقله، يهيمن عليه وزنه الذاتي، وتمثل العربة العابرة جزءاً ضئيلاً من الحمل الكلي. أما الجسر الصغير، لخفته، فيتعرض للعربة نفسها اضطراباً أكبر نسبياً. ولهذا تفشل القواعد التناسبية (ثابت t/s) للبحور الصغيرة: فالقيمة المطلقة للحمل الحي لا تتدرج مع المنشأ، مع أن الحمل الميت يفعل. وكان هذا أول إدراك صريح أن تصميم الجسر القوسي غير *تناسبي*.

ناقضت هذه البصيرة الافتراض الأساسي الذي قامت عليه القواعد التناسبية كلها منذ فيتروفيوس: أن الاستقرار الإنشائي يعتمد على الهندسة وحدها، مستقلاً عن الحجم المطلق.[5]

نشر غوتييه عام 1717 بحثاً في سماكة *أكتاف الجسور*، حاول فيه معالجة أكثر منهجية. ووضع جدولاً يعطي سماكة القوس بدلالة البحر، ويميز الحجر الصلب من اللين. وأبقى للأقواس ذات البحور 40 قدماً فأكثر قاعدة ألبيرتي 1/15. أما الأقواس الأصغر فوصف لها إضافة قدم واحدة إلى 1/24 من البحر، وهو تصحيح غير تناسبي يعترف بشدة تعرض المنشآت الصغيرة للأحمال المركزة. وصدرت *رسالة في الجسور* في أربع طبعات، 1716 و1728 و1755 و1765، وكثر الاستشهاد بها في القرن الثامن عشر؛ وأدخل بيليدور جداول غوتييه في كتابه المؤثر *علم المهندسين* (De Belidor, 1729).

[5] كما هو معروف، تحدى غاليليو هذه النظرة لاحقاً بمثاله الشهير عن تحجيم العظام، الصفحة 488. وبعد زمن طويل صاغ Bažant, 1976 مفهوم أثر الحجم في المنشآت، ثم وسعه Saouma, Natekar **and** Hansen, 2003 صراحة لردم الفجوة بين اللدونة وميكانيكا الكسر.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لم يطور غوتييه نظرية رياضية للأقواس أو الدفع. فقد اعتمدت هندسته التناسب والسوابق وحكم البنّاء الخبير. ومع ذلك، بعزله الجسور موضوعاً مستقلاً للدراسة المنهجية، وإدراجه الهندسة ضمن إطار قانوني وإداري شامل، واعترافه الصريح بالطبيعة غير التناسبية لمسألة التصميم، وضع الأساس الفكري والمؤسسي الذي سيبني عليه خلفاؤه.

ومن هذا الوجه، يقف غوتييه في تباين مفيد مع جان-رودولف بيرونيه. فإسهامه يكمن في التقنين الموسوعي للممارسة، المصطلحات واللوائح والتمويل والصيانة والتناسب، وتوثيق كيفية تصور الجسور وتنفيذها وإدارتها أشغالاً عامة. أما بيرونيه، بعد جيل، فسيمثل نضج هذا التقليد: توحيد التعليم الهندسي والإشراف المركزي وتنفيذ جسور قوسية حجرية ضخمة بنحافة غير مسبوقة. ويمر الانتقال من المعرفة الحرفية إلى تخصص تقني منظم، من حدس معلم البناء إلى منهج المهندس، مروراً حاسماً بـ*رسالة* غوتييه.

الوحدات

لم يكن في فرنسا، فضلاً عن أوروبا كلها، نظام موحد للقياس حين كتب غوتييه *رسالة في الجسور*. وكان الطول يعبر عنه بوحدات مركبة، *القدم والبوصة والخط*، تختلف قيمها المطلقة لا من بلد إلى آخر فحسب، بل كثيراً من مدينة إلى أخرى، الشكل 6.4b. وطرح هذا التنوع صعوبات عملية كبيرة في التصميم والتقدير والتنفيذ، ولا سيما في الأشغال العامة الكبيرة الممتدة زمناً طويلاً أو العابرة لولايات متعددة. وكان غوتييه شديد الوعي بالمشكلة، كما يتضح من جدوله المفصل للأقدام المختلفة المستخدمة، من المقاييس القديمة إلى المعتمدة في مناطق فرنسا المختلفة. وتعكس عنايته الدقيقة بالوحدات واقع الممارسة الهندسية في أوائل القرن الثامن عشر، حين كانت القواعد التناسبية والمقاييس المركبة الوسيلة الموثوقة الوحيدة لضمان الاتساق في غياب قياس معياري. وحلت المشكلة في نهاية المطاف خلال الثورة الفرنسية، حين أدخل النظام المتري عام 1795، ثم رسخ وفرض في أنحاء فرنسا في عهد نابليون في أوائل القرن التاسع عشر.

جدول غوتييه التناسبي للجسور نصف الدائرية، جدول الصفحة 368

ماهية الجدول: النطاق والغرض. يقدم غوتييه الجدول صراحة بصفته جدول *تناسب* لجميع *الأجزاء الرئيسة للجسور والعبارات ذات الأقواس نصف الدائرية*. ويبدأ نطاق البحور المعلن بقوس فتحته قدم واحدة وينتهي بقوس مقداره 20 تويزاً، أي 120 قدماً. والغرض عملي: فبمجرد معرفة الفتحة، يقدم الجدول بنظرة واحدة الأبعاد الحجرية الرئيسة اللازمة لتناسب العمل، الشكل 6.4c.

تنظيم الجدول: الأعمدة. يرتب الجدول وفق تزايد فتحة *الأقواس*، معبراً عنها بالأقدام. ويقدم لكل فتحة:

- **الأكتاف**: بعداً موصى به للأكتاف، بالأقدام والبوصات والخطوط.
- **الركائز**: بعداً موصى به للركائز، بالأقدام والبوصات والخطوط.
- **صنجات الحجر الصلب**: سماكة موصى بها للصنجات، أي حلقة القوس، من *الحجر الصلب*.
- **صنجات الحجر اللين**: سماكة موصى بها للصنجات، أي حلقة القوس، من *الحجر اللين*.

وهكذا يفصل الجدول التناسب الذي تحكمه الهندسة، الفتحة والركيزة والكتف، من تصحيح جودة المادة، الحجر الصلب أو اللين، المطبق على بعد الصنجات.

معنى المدخلات: ما الذي يتحكم فيه كل رقم. ليست المدخلات في استعمال غوتييه نسباً مجردة؛ بل أبعاد قابلة للاستخدام مباشرة في الرسوم والتقديرات وقرارات الموقع:

- **الفتحة** هي البحر الصافي للقوس.
- يحكم بعد **الركيزة** سماكة المساند الوسيطة بين الأقواس؛ ومن ثم يتحكم في الاستقرار، بالكتلة، وفي إعاقة الجريان، أي مقدار تضييق النهر.
- يحكم بعد **الكتف** مساند الطرفين؛ وهو عادة أكبر من الركيزة لأنه يقاوم الدفع عند نهاية سلسلة الأقواس ويتفاعل مع ردم الاقتراب والتربة المحتجزة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- بعد **الصنجات**، للحجر الصلب أو اللين، هو سماكة حلقة القوس، أي الحزام الحجري المكون له. وهو أقرب مؤشر مباشر في الجدول إلى الطلب الضاغط الموضعي وجودة الحجر والفواصل.

عمودا الحجر الصلب واللين: لماذا قيمتان للصنجات. من السمات المهمة الفصل الصريح بين *الحجر الصلب* و*الحجر اللين*. ويعترف غوتييه بأن نسبة هندسية واحدة لا تكفي: فللفتحة نفسها يجب أن تكون الحلقة أسمك حين يكون الحجر ليناً، أي أضعف وأكثر عرضة للسحق والتلف وعيوب الفواصل. ومن ثم يعمل الجدول تصحيحاً مادياً بسيطاً قابلاً للتطبيق: أبق منطق الفتحة والركيزة والكتف نفسه، واختر سماكة الصنجات بحسب جودة الحجر.

كيفية قراءة صف: سير العمل. سير العمل المقصود مباشر:

1. اختر الصف الموافق لـ*فتحة الأقواس* بالأقدام.
2. اقرأ أفقياً لتحصل على الأبعاد الموصى بها لـ*الأكتاف* و*الركائز*.
3. اختر سماكة *الصنجات* من عمود المادة المناسب، الحجر الصلب أو اللين.
4. استخدم القيم نسباً أساسية للرسوم وكشف التقدير؛ ثم عدلها عند الضرورة وفق قيود الموقع، مثل شروط الأساس والفيضانات وخلوص الملاحة.

ما يفعله الجدول وما لا يفعله مفاهيمياً. يقنن الجدول منطق تصميم سابقاً للتحليل: يعالج الاستقرار بالكتلة والتناسب والسوابق، لا بالحساب الصريح لخط الدفع. ومع ذلك فهو أكثر من مجموعة أمثلة منفصلة؛ إنه مخطط تناسبي منهجي يربط الفتحة بالأجزاء المقاومة الرئيسة، الأكتاف والركائز وسماكة الحلقة، ويدخل تصحيحاً صريحاً لجودة المادة بعمودي الصنجات.

وحدات الأبعاد: أقدام وبوصات وخطوط. تعطى جميع المدخلات بالنظام الفرنسي التقليدي: *القدم* و*البوصة* و*الخط*. وتنقسم القدم إلى 12 بوصة، والبوصة إلى 12 خطاً. ومن ثم تقرأ القيمة المكتوبة في الجدول مثلاً «4..6..9» على أنها 4 أقدام و6 بوصات و9 خطوط. وتتيح هذه القاعدة استخدام الجدول مباشرة في توقيع مقاسات البناء الحجري بلا حساب وسيط، وتعكس في الوقت نفسه واقع العصر العملي: عمل المهندسون والمقاولون بتقسيمات مركبة لا بوحدات عشرية.

6.4.6.1 جان-رودولف بيرونيه

إذا كان غوتييه قد أسس تخصص هندسة الجسور، فإن جان-رودولف بيرونيه أوصله إلى النضج. ولد بيرونيه في سورين قرب باريس، وبدأ مسيرته بالعمل لدى أحد كبار معماريي المدينة، وظل طوال حياته مهتماً بالعمارة إلى جانب الهندسة. وفي عام 1747، وهو في التاسعة والثلاثين، عين أول مدير لـ*مدرسة الجسور والطرق* المنشأة حديثاً، وظل في منصبه حتى وفاته بعد سبعة وأربعين عاماً. وأصبح عام 1763 كبير مهندسي *هيئة الجسور والطرق*، وانتخب عام 1765 عضواً في *أكاديمية العلوم*. وأشرف على أهم الأشغال العامة الفرنسية في النصف الثاني من القرن، وصمم بنفسه واحداً وعشرين جسراً، بني منها ثلاثة عشر.

احتفي بجسور بيرونيه لجرأتها وخفتها، الشكل 6.6a. وحقق جسر نويي (1774)، وجسر سانت-ماكسنس (1772–1786)، وجسر الكونكورد (1787–1791) نسب نحافة أدهشت المعاصرين وظلت بلا نظير عقوداً. فحيث وصف ألبيرتي النسبة 1/15، وتراوحت الجسور الرومانية عادة بين 1/10 و1/12، اقتربت أقواس بيرونيه من 1/24 أو تجاوزتها. ولم يكن ذلك تهوراً، بل ثقة ولدت من الملاحظة المنهجية.

في عام 1748، بعد سنة واحدة فقط من تعيينه مديراً للمدرسة، كتب بيرونيه مذكرة غير منشورة بعنوان «مذكرة في السماكة اللازمة لصنجات المفتاح في أقبية الجسور المختلفة». وتمثل هذه الوثيقة، المحفوظة في مكتبة مدرسة الجسور والطرق، أكثر دراسة تجريبية منهجية لنسب الجسور قبل القرن التاسع عشر (Huerta, 2018).

كان منهج بيرونيه تجريبياً بامتياز. فقد جمع جدولاً لأكثر من مئتي جسر قوسي، قديمة ومعاصرة ونصف دائرية ومفلطحة، وسجل بحورها وسماكات أقواسها. وكان هدفه استخلاص قاعدة عامة من أفضل الأمثلة القائمة، التي تجمع المتانة والاقتصاد، توجه التصميم في المستقبل. وكتب: «في مسائل البناء لا يمكن للتكهن وحده أن يغلب الخبرة».

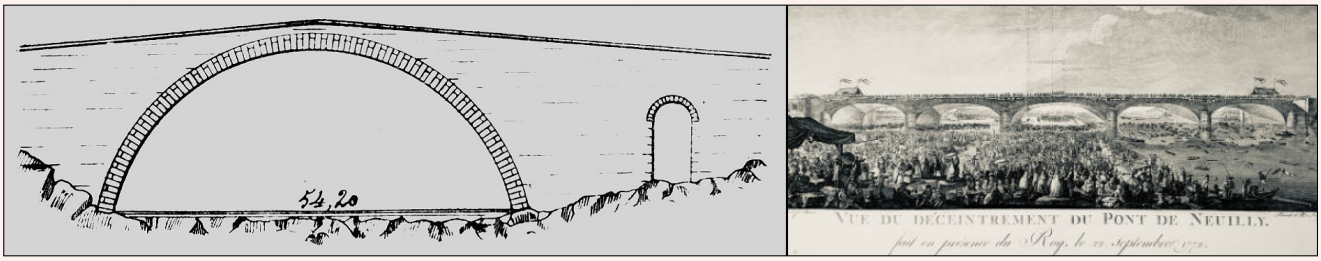
واشتق بيرونيه من هذه الدراسة المنهجية صيغة خطية بسيطة للأقواس نصف الدائرية. ينبغي أن تكون السماكة t، بالأقدام:

$$t = \frac{s}{24} + 1 - \frac{s}{144}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث s البحر بالأقدام. يأخذ الحد الأول واحداً من أربعة وعشرين من البحر؛ ويضيف الثاني قدماً واحدة «لمصلحة الأقواس الأصغر التي يجب أن تحمل مرور الأحمال نفسها التي تحملها الكبيرة»؛ ويطرح الثالث خطأً واحداً، أي 1/12 بوصة، لكل قدم من البحر لموافقة نسب أجرأ الجسور القائمة. وتختزل العبارة تقريباً إلى $t = 1 + s/28.8$، أو بالوحدات المترية $t = 0.325 + 0.035s$ متراً.

لا تكمن أهمية قاعدة بيرونيه في تعقيدها الرياضي، فهي مجرد ملاءمة خطية لبيانات تجريبية، بل في نتائجها. فللجسور الكبيرة أعطت سماكات تساوي نحو نصف ما تعطيه قاعدة ألبيرتي–غوتييه. وكان جسر فيي-بريود الوسيط العظيم، الشكل 6.6b، ذو البحر 54.6 م والسماكة الفعلية 2.1 م عند المفتاح، يطابق قاعدة بيرونيه تقريباً، إذ تتنبأ بـ2.09 م، في حين تعطي قاعدة ألبيرتي 1/15 مقدار 3.64 م. وهكذا قننت القاعدة النسب النحيفة التي حققها بناؤون جريئون تجريبياً ومنحتها الشرعية، وحولت الممارسة الاستثنائية إلى إرشاد معياري.



(a) جسر نويي (b) جسر فيي-بريود

شكل 6.6: جسور بيرونيه

عرض كتاب بيرونيه عام 1788 وصف *مشروعات الجسور وبنائها* (Perronet, 1782) عمل حياته بتفصيل شامل: تصميم جسور نويي ومانت وأورليان ونوجان-سور-سين وسانت-ماكسنس وبناؤها، مع الآلات والسدود المؤقتة والقوالب وتسلسلات التنفيذ المستخدمة. والعمل صرح في التوثيق التقني، يحفظ معرفة كانت ستختفي باكتمال البناء. وكما لاحظ بيرونيه في مقدمته، فإن فن بناء الجسور «لا يترك أثراً بعد اكتمالها: فلا تعود الوسائل التي تغلب بها الفن على الصعوبات التي لا تحصى في تأسيس هذه الكتل الهائلة ورفعها ظاهرة، كما أن قطع الحجارة ووضعها وتجميع القوالب الخشبية وطريقة نزعها من الأقبية تطلبت من البنّاء عناية ومناورات يجهلها حتى رجال المهنة الذين لم تتح لهم متابعة أعمال كبرى من هذا النوع».

6.4.6.2 الانتقال من التناسب إلى الخبرة

لم يستخدم غوتييه ولا بيرونيه الميكانيكا التحليلية بالمعنى الحديث. وكانت نظرية القوس التي طورها لا هير وكوبليه وغيرهما معروفة لهما، لكنهما رأياها قاصرة عن تعقيد التصميم الفعلي للجسور. وبعبارة رانكين بعد قرن، الشكل 6.7:

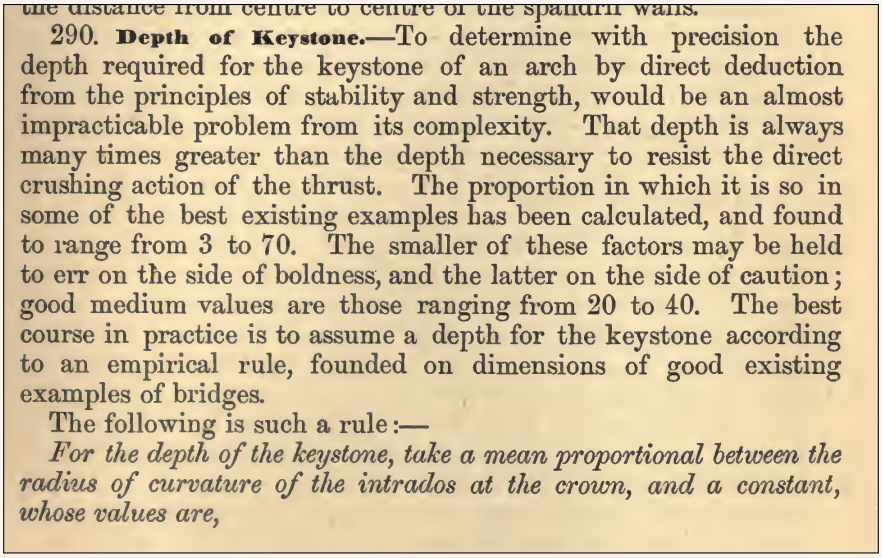
> إن تعيين العمق اللازم لمفتاح القوس بدقة باستنباط مباشر من مبادئ الاستقرار والمقاومة سيكون مسألة تكاد تستعصي على الحل لشدة تعقيدها.
>
> Rankine, 1862 A Manual of Civil Engineering

وظل أفضل مسار «افتراض عمق للمفتاح وفق قاعدة تجريبية تقوم على أبعاد أمثلة جيدة من الجسور القائمة».

كان ما حققه غوتييه وبيرونيه أدق من النظرية: مأسسة المعرفة التجريبية المنهجية. فمن خلال مدرسة الجسور والطرق، التي أدارها بيرونيه قرابة نصف قرن، لم تعد الممارسة الهندسية تنتقل بالتلمذة النقابية، بل بالتعليم المنظم والتوثيق المكتوب والطرائق المعيارية. وقد أنجز جيلهما الانتقال من معلم البناء إلى المهندس المدني، ومن الحرفة إلى المهنة.

وجسدت قواعدهما تحولاً معرفياً حاسماً. افترضت القواعد التناسبية لألبيرتي وبالاديو أن الاستقرار الإنشائي مسألة هندسة وحدها: القوس الذي يقف عند مقياس يقف عند كل مقياس. وأدرك غوتييه أن الافتراض يفشل للجسور تحت أحمال المرور، ونظم بيرونيه التصحيح غير التناسبي. وهذه البصيرة، أن الحجم المطلق مهم وأن النسب نفسها تعطي هوامش أمان مختلفة عند

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



the distance from centre to centre of the spandril walls.

290. **Depth of Keystone.**—To determine with precision the depth required for the keystone of an arch by direct deduction from the principles of stability and strength, would be an almost impracticable problem from its complexity. That depth is always many times greater than the depth necessary to resist the direct crushing action of the thrust. The proportion in which it is so in some of the best existing examples has been calculated, and found to range from 3 to 70. The smaller of these factors may be held to err on the side of boldness, and the latter on the side of caution; good medium values are those ranging from 20 to 40. The best course in practice is to assume a depth for the keystone according to an empirical rule, founded on dimensions of good existing examples of bridges.

The following is such a rule:—

For the depth of the keystone, take a mean proportional between the radius of curvature of the intrados at the crown, and a constant, whose values are,

شكل 6.7: تقييم Rankine, 1862 لأبعاد مفاتيح الأقواس

مقاييس مختلفة، ستجد تعبيرها النظري في النهاية في تحليل الأبعاد والنظرية الحديثة للتشابه الإنشائي. لكن إدراكها العملي جاء أولاً، بالجدولة الصبورة لمئتي جسر على يد مهندس وثق بالخبرة أكثر من التكهن.

يمثل غوتييه وبيرونيه معاً ظهور الهندسة المدنية تخصصاً علمياً يقوم على الهندسة والخبرة والتعليم المنهجي، لكنه ما زال سابقاً للأدوات التحليلية الصورية التي ستتطور في القرن التاسع عشر. ويقفان عند المفصل بين التقليد الإنساني للتناسب، الذي تتبعه هذا القسم من فيتروفيوس عبر ألبيرتي وبالاديو، والتقليد العلمي للميكانيكا الذي سيغير الهندسة الإنشائية في القرن المقبل.

6.5 من النظام الرياضي إلى الميكانيكا

يجمع هذا القسم شخصيات أدخلت قدراً متزايداً من *النظام الرياضي* في دراسة الظواهر الفيزيائية. فطبقت الهندسة والطرائق التحليلية المبكرة تدريجياً على مسائل الحركة والاتزان، وأعيد تشكيل الميكانيكا مجالاً منظماً رياضياً. وما يوحد هذه الإسهامات هو تحويل الاستدلال الميكانيكي إلى مشروع رياضي منظم.

6.5.1 فرنسيس بيكون (1561–1626)

ولد فرنسيس بيكون عام 1561 في أسرة إنجليزية مرموقة؛ وكان أبوه حامل الختم العظيم في عهد إليزابيث الأولى. ودرس في كامبريدج وغريز إن، وسلك مهنة في القانون والسياسة بلغت ذروتها بتعيينه مستشاراً أعلى في عهد جيمس الأول. وانتهت مسيرته السياسية بالعار حين أدين بقبول الرشاوى عام 1621، فتفرغ بعد ذلك للكتابة الفلسفية والعلمية حتى وفاته عام 1626، وقيل بسبب برد أصابه وهو يجرب تجميد دجاجة في الثلج.

الأورغانون الجديد والمنهج التجريبي وضع كتاب بيكون *الأورغانون الجديد* (Bacon, 2000)، المنشور عام 1620، الأساس الفلسفي للمنهج التجريبي والاستدلال الاستقرائي اللذين غدوا أساسين للعلم والهندسة الحديثين. وقد ناقض العنوان عمداً *أورغانون* أرسطو، معلناً قصد بيكون استبدال منطق المدرسية بمنهج جديد لبحث الطبيعة.

مذهب الأوهام كان مذهب «الأوهام» محور نقد بيكون للمعرفة الموروثة، وهي تحيزات منهجية تشوه الفهم البشري. فأوهام القبيلة تنشأ من الطبيعة البشرية نفسها، مثل ميلنا إلى رؤية أنماط لا وجود لها؛ وأوهام الكهف من المزاج الفردي والتعليم؛ وأوهام

السوق من غموض اللغة؛ وأوهام المسرح من الأنظمة والمذاهب الفلسفية الموروثة. وقد استبق هذا التصنيف للخطأ المعرفي الاهتمام الحديث بالتحيز التجريبي، وما زال وثيق الصلة بالحكم الهندسي، حيث قد تقود الثقة المفرطة وتحيز التأكيد والاعتماد على السوابق إلى فشل إنشائي.

بيت سليمان والجمعية الملكية دعا بيكون، بدلاً من الجدل المدرسي، إلى برامج منظمة للبحث التجريبي: ملاحظة منهجية للظواهر، وتجارب مضبوطة لعزل الأسباب، وتسجيل دقيق للنتائج، وتعميم استقرائي من الدليل المتراكم. ووصف عمله اليوتوبي *أطلنطس الجديدة* (1627) «بيت سليمان»، وهي مؤسسة ترعاها الدولة مكرسة للبحث المنهجي في الطبيعة بالتجربة والتعاون والتطبيق العملي للمعرفة. وقد ألهمت هذه الرؤية مباشرة مؤسسي الجمعية الملكية عام 1660، الذين رأوا أنفسهم محققين لبرنامج بيكون. وأرست تجارب الجمعية المبكرة في مقاومة المواد وضغط الهواء والأجهزة الميكانيكية الإطار المؤسسي الذي عمل فيه هوك وبويل ونيوتن.

القيود والإرث ينبغي التنبيه إلى أن بيكون نفسه كان متشككاً في الرياضيات أداة لبحث الطبيعة، وهو قيد مهم يميزه من غاليليو وديكارت. وقد كان منهجه الاستقرائي قوياً في التاريخ الطبيعي والكيمياء، لكنه أقل ملاءمة للميكانيكا، حيث أثبت الاستنباط الرياضي من المبادئ ثمراً أكثر من مجرد تعداد الحالات. ومع ذلك، شكل إصراره على التجربة في مقابل السلطة، ورؤيته للبحث المنظم، الثقافة التي ازدهرت فيها الفيزياء الرياضية في النهاية.

كان إسهام بيكون في الهندسة الإنشائية منهجياً لا تقنياً. فقد أصبح تأكيده التجريب المنظم جزءاً أصيلاً من المنهج العلمي الذي يستخدمه المهندسون لتوصيف سلوك المواد والتحقق من النماذج التحليلية وتطوير إجراءات التصميم. والمختبر الإنشائي الحديث سليل مباشر لرؤية بيكون في البحث التجريبي المنظم.

6.5.2 نيكولاس كوبرنيكوس (1473–1543)

الحياة

ولد نيكولاس كوبرنيكوس عام 1473 في تورون ببروسيا الملكية، وكانت آنذاك جزءاً من مملكة بولندا. وتيتم في العاشرة، فرباه خاله الأسقف وأتاح له تعليماً ممتازاً. ودرس كوبرنيكوس في جامعة كراكوف، ثم في إيطاليا، في بولونيا القانون والفلك، وفي بادوفا الطب، وفي فيرارا القانون الكنسي. وقضى معظم حياته البالغة كاهناً قانونياً في كاتدرائية فراونبورغ، وتركت له واجباته الكنسية وقتاً للرصد الفلكي والحسابات الرياضية.

طور كوبرنيكوس نظرية مركزية الشمس عبر عقود، وداول مخطوطة موجزة، *التعليق الصغير*، بين أصدقائه نحو عام 1514، لكنه أخر النشر الكامل حتى أواخر حياته. ووفق الأسطورة، تسلم أول نسخة مطبوعة من عمله الكبير على فراش موته عام 1543.

في دوران الأجرام السماوية وأهميته للميكانيكا اقترح كتاب كوبرنيكوس في *دوران الأجرام السماوية* (Copernicus, 1995)، المنشور عام 1543، أن الأرض والكواكب تدور حول الشمس، وهي فرضية ناقضت الحس المشترك والسلطة المتراكمة لعلم الكون القديم والوسيط معاً. ولا تكمن أهميته للميكانيكا الإنشائية في نموذج مركزية الشمس نفسه، بل في التحول المعرفي الذي تطلبه: تستطيع النمذجة الرياضية كشف حقائق تناقض الملاحظة الحسية المباشرة.

وبالسماح للأرض نفسها بالحركة، تحدى كوبرنيكوس ضمنياً تمييز أرسطو السكون الطبيعي من الحركة الطبيعية. فلم تعد الحركة خاصية مطلقة مرتبطة بمركز الكون، بل خاصية نسبية تعتمد على إطار الراصد. وقوض هذا القطع المفاهيمي قروناً من حركيات أرسطو، ومهد لإعادة تصور القصور والحركة النسبية وأطر المرجع التي ستغدو محورية في الميكانيكا الكلاسيكية.

برهن كوبرنيكوس أن نموذجاً متسقاً رياضياً وداخلياً يستطيع تقديم وصف للواقع أدق من وصف يقوم على الخبرة اليومية. ومن هذا الوجه ارتفع الاتساق الرياضي من أداة وصف إلى معيار للحقيقة الفيزيائية. وقد وضعت هذه القفزة الفكرية، الثقة بالتجريد الرياضي فوق الدليل الحسي، أساس معالجة الميكانيكا علماً عاماً محكوماً بالقوانين لا حرفة تجريبية.

وأدخلت الثورة الكوبرنيكية ضمنياً مسألة أطر المرجع: فالحركات المشاهدة من الأرض ليست مطلقة، بل نسبية إلى منصة متحركة. وسيستلزم هذا الإدراك لاحقاً مفاهيم مثل الأطر العطالية والقوى الظاهرية، وهي أفكار تظل أساسية في الديناميكا، وفي النهاية في تحليلات الهندسة الإنشائية التي تتضمن التسارع والاهتزاز والإثارة الزلزالية.

لكن ينبغي التنبيه إلى أن كوبرنيكوس أبقى المدارات الدائرية والتدويرات، مقدماً الانسجام الرياضي على السببية الفيزيائية. ولم تظهر الآثار الميكانيكية الكاملة لمركزية الشمس إلا مع تخلي كبلر عن الحركة الدائرية وصياغة نيوتن للديناميكا العامة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وتقوم عالمية القانون الطبيعي الضمنية في النظام الكوبرنيكي، التي حققها نيوتن كاملاً بعد قرن ونصف، وراء مشروع الهندسة الإنشائية كله: فمبادئ الاتزان والحركة نفسها تنطبق على قوس روماني أو قبو قوطي أو ناطحة سحاب حديثة.

6.6 من الاستاتيكا الأولية إلى الثورة العلمية

تمثل الشخصيات المجموعة هنا الانتقال من المذاهب الموروثة إلى ميكانيكا تقوم على *التجربة والقياس*. فقد أعيدت صياغة مفاهيم مثل القوة والقصور والاتزان بالملاحظة والتوليف الرياضي. ويلتقط هذا القسم التحول الحاسم الذي غدت به الاستاتيكا والديناميكا علمين مؤسسين في الفيزياء.

6.6.1 سيمون ستيفن (1548–1620)

ولد سيمون ستيفن في بروج عام 1548، في الأراضي المنخفضة الإسبانية، بلجيكا الحالية. ولا يعرف يقيناً إلا القليل عن تعليمه الصوري، لكن مسيرته المبكرة كانت عملية بوضوح: عمل كاتباً ومحاسباً ومهندساً قبل دخوله الحياة الأكاديمية. وعلى خلاف كثير من معاصريه، لم يخرج ستيفن من تقليد إنساني جامعي. بل شكل نموه الفكري احتكاكه المباشر بالتجارة والأعمال الهندسية وحل المشكلات التطبيقية. وأثرت هذه الخلفية عميقاً في نظرته العلمية، فأسست ميكانيكاه على الاستدلال الفيزيائي الملموس لا التجريد المدرسي.

دخل ستيفن في أواخر ثمانينيات القرن السادس عشر خدمة الأمير موريس ناساو، وأصبح مهندساً عسكرياً ومستشاراً ومعلماً. ووضعته هذه الصلة عند تقاطع الرياضيات وتصميم التحصينات والهيدروليكا والميكانيكا، ووفرت له الدافع العملي والدعم المؤسسي لعمله العلمي.

حول سيمون ستيفن (1548–1620) (Stevin, 1955–1966) الاستاتيكا تحولاً أساسياً من الوصف النوعي إلى التحليل الرياضي الصارم، وأرسى مبادئ ما زالت محورية في الهندسة الإنشائية. وكان كتابه *مبادئ فن الوزن*، المنشور بالهولندية عام 1586، أول معالجة رياضية شاملة لاتزان القوى منذ أرخميدس، وقد تجاوز المعلم القديم من عدة وجوه.

المستوى المائل أشهر إسهامات ستيفن برهانه قانون المستوى المائل بتجربة *إكليل الكرات* الفكرية الشهيرة. فقد تخيل سلسلة من كرات متساوية التباعد متدلية فوق موشور مثلثي: ولأن السلسلة لا تتحرك تلقائياً، يجب أن تتناسب القوى على كل جانب مع أطوال الجوانب، ومن ثم مع جيوب الزوايا. وأثبت هذا البرهان الأنيق، الذي خلده ستيفن بشعار «ما يبدو عجيباً ليس بعجيب»، تحليل القوى على الأسطح المائلة من دون الرجوع إلى الديناميكا أو الإزاحات الافتراضية.

تركيب القوى واتزانها طور ستيفن من هذا الأساس متوازي أضلاع القوى، مبيناً أن قوتين تؤثران في نقطة يمكن جمعهما في محصلة واحدة بإكمال متوازي الأضلاع. ومكن هذا المبدأ، الأساسي لكل ميكانيكا المتجهات اللاحقة، من التحليل المنهجي لأنظمة القوى في المنشآت. وبين ستيفن كيفية تحليل القوى إلى مركبات، وجمع قوى متعددة في محصلات، وتعيين شروط الاتزان للأجسام الخاضعة لقوى عدة، وهي العمليات الأساسية للتحليل الإنشائي.

الشغل الافتراضي والاتزان العام صاغ ستيفن أيضاً مبادئ تكافئ الشغل الافتراضي، إذ أدرك تحقق الاتزان حين لا تنتج الإزاحات الافتراضية الصغيرة شغلاً صافياً. ومع أن البصيرة لم تصغ بلغة الميكانيكا التحليلية اللاحقة، فقد استبقت واحدة من أقوى طرائق التحليل الإنشائي. وسيعمم دالمبير ولاغرانج وغيرهما مبدأ الشغل الافتراضي لاحقاً، فيغدو لا غنى عنه لتحليل الأنظمة غير المحددة استاتيكياً.

الهيدروستاتيكا والترميز والروح الهندسية إلى جانب الاستاتيكا، قدم ستيفن إسهامات مهمة في الهيدروستاتيكا، فبرهن أن الضغط في مائع يعتمد على العمق وحده لا على شكل الوعاء الحاوي، وهي المفارقة الهيدروستاتيكية. وكان رائداً أيضاً في الاستخدام المنهجي للترميز العشري، ومدافعاً قوياً عن كتابة الأعمال العلمية باللغة العامية لا اللاتينية. وعكس اختياره الهولندية قناعة بأن المعرفة العلمية ينبغي أن تكون متاحة للمهندسين والحرفيين والممارسين، لا محصورة في نخبة العلماء.

ويجعل هذا التصور العملي والمساواتي للعلم، الرياضيات في خدمة الهندسة، ستيفن شخصية انتقالية بين الفلسفة الطبيعية لعصر النهضة والعلم الهندسي الحديث. وقد وضع عمله الأساس المفاهيمي للتطورات اللاحقة في الاستاتيكا والتحليل الإنشائي والميكانيكا التطبيقية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.6.2 غاليليو غاليلي (1564–1642)

النشأة والتعليم ونمط جديد للبحث ولد غاليليو غاليلي في بيزا عام 1564 لأسرة متواضعة الحال. وكان أبوه فينتشنزو موسيقياً ومنظراً ذا عقل متشكك متسائل، وهي صفات سيرثها ابنه. وتعلم غاليليو الموضوعات الكلاسيكية مثل اللاتينية واليونانية والمنطق، الشكل 6.9a، ثم أصبح شخصية محورية في تحول الفلسفة الطبيعية إلى العلم الحديث. وتزامنت حياته مع عصر اضطراب فكري عميق في أوروبا، حيث واجهت السلطات التقليدية في العلم والدين والسياسة تحديات غير مسبوقة من أشكال جديدة للبحث التجريبي والاستدلال الرياضي.

ينسب إليه على نطاق واسع أنه من أوائل من اعتمدوا ما نسميه اليوم *المنهج العلمي*: صياغة الفرضيات وإجراء التجارب وتفسير النتائج التجريبية. ومع أن كلمة «علم» لم تكن قد اكتسبت معناها الحديث، كان منهج جديد للبحث يتشكل في أنحاء أوروبا عند وفاة غاليليو عام 1642. ومثل هذا المنهج تحولاً جوهرياً من اعتماد العصور الوسطى على سلطة النص والاستنباط المنطقي إلى تأكيد جديد للملاحظة المباشرة والوصف الرياضي والتحقق التجريبي.

يقف غاليليو عند تقاطع العلم والفلسفة والهندسة والسلطة المؤسسية. ولم تمثل حياته فجر الميكانيكا التجريبية والفيزياء الحديثة فحسب، بل جسدت أيضاً التوتر بين الاستدلال العلمي الناشئ والمعتقدات العقائدية الراسخة.

نستعرض فيما يأتي قوس مسيرته، من سنواته التأسيسية وتجاربه الشهيرة، وإن ربما كانت مختلقة، في برج بيزا، إلى الكشوف السماوية التي تحدت علم الكون الأرسطي وأثارت غضب الكنيسة الكاثوليكية. ولم يكن كتاباه *حوار حول النظامين الرئيسين للعالم، البطلمي والكوبرنيكي* و*مباحث وبراهين رياضية حول علمين جديدين يتعلقان بالميكانيكا والحركات الموضعية* مجرد نصين علميين؛ بل كانا بيانين فكريين لنظرية معرفة جديدة متجذرة في الملاحظة والتجريد الرياضي.

ويركز الجزء الأخير من هذا القسم على فكرة ذات أهمية خاصة للمهندسين الإنشائيين: التحجيم. فقد كان غاليليو أول من صاغ مبدأ أن الطبيعة لا تتدرج بانتظام، وأدرك أن المنشآت الكبيرة تواجه قيوداً ميكانيكية مختلفة جوهرياً عن الصغيرة. وستتردد هذه البصيرة بعد قرون في ممارسات التصميم عند غاودي وإيسلر وموسميشي، الذين بحثوا مثله عن الشكل الإنشائي بالتجربة الفيزيائية والحدس الهندسي.

ومن ثم يمتد إرث غاليليو بعيداً وراء اكتشافاته؛ فهو قائم في المناهج التي ابتكرها والمقاومة التي تحملها والمخيلة الإنشائية التي ساعد على إطلاقها.

علمان جديدان والميكانيكا الإنشائية الكمية يعد غاليليو غاليلي (1564–1642) (Galilei, 1638 PDF) بحق مؤسس الميكانيكا الإنشائية علماً كمياً. فقد أرسى كتابه *مباحث وبراهين رياضية حول علمين جديدين يتعلقان بالميكانيكا والحركات الموضعية*، المنشور في ليدن عام 1638 حين كان قيد الإقامة الجبرية، دراسة مقاومة المواد وميكانيكا المنشآت على أساس رياضي لأول مرة.

و«العلمان الجديدان» في العنوان هما علم الحركة، الحركيات والديناميكا، وعلم مقاومة المواد والمنشآت. ويشغل الأخير «اليومين» الأول والثاني من الحوار، ويبحث مسائل وثيقة الصلة بالهندسة: لماذا تحتاج المنشآت الكبيرة إلى مادة أكثر نسبياً من الصغيرة؟ وكيف تعتمد مقاومة العارضة للكسر على أبعادها؟ وما الذي يحدد مقاومة حبل أو عمود أو عظم؟

أصبح تحليل غاليليو للعارضة الكابولية نقطة انطلاق كل عمل لاحق في الانحناء. فقد نمذج عارضة بارزة من جدار ومحملة عند طرفها الحر، وأدرك أن الفشل يحدث بالدوران حول الحافة السفلية للمقطع المثبت. وكان استنتاجه، أن حمل الكسر يتناسب مع عرض العارضة ومربع عمقها وعكسياً مع طولها، صحيحاً نوعياً، مع أن افتراضه إجهاد شد منتظماً على المقطع أدى إلى خطأ كمي. ولن يحدد توزيع الإجهاد الصحيح حتى أعمال باران وكولوم ونافييه في القرون التالية.

ولعل أعمق بصائر غاليليو تعلقت بقوانين التحجيم. فقد برهن أن التشابه الهندسي لا يعني التشابه الميكانيكي: المنشأ المكبر بانتظام في جميع أبعاده يصبح أضعف نسبياً لأن الحجم، ومن ثم الوزن، يزداد بمكعب البعد الخطي، في حين تزداد مساحة المقطع، ومن ثم المقاومة، بمربعه فقط. ويفسر «قانون المربع والمكعب» هذا لماذا تكون عظام الحيوانات الكبيرة أسمك نسبياً من عظام الصغيرة، ولماذا تستحيل الحشرات العملاقة، ولماذا لا يمكن للتصميم الإنشائي استقراء النماذج الصغيرة إلى مبان كبيرة بلا مراعاة أثر الحجم. ومثل هذا الإدراك القطع النهائي مع قواعد التحجيم التجريبية إلى التصميم الإنشائي التحليلي.

أرسى منهج غاليليو، الجمع بين التحليل الرياضي والملاحظة التجريبية واختبار التنبؤات النظرية بالقياس الفيزيائي، نموذج الميكانيكا الإنشائية. وبدأ عمله تحويل البناء من حرفة توجهها التقاليد والخبرة إلى علم تطبيقي يقوم على مبادئ عامة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الفيزياء: برج بيزا التحق غاليليو أولاً بجامعة بيزا عام 1581 لدراسة الطب، لكنه سرعان ما ترك ذلك الطريق لمصلحة الرياضيات والفلسفة. ومع أنه غادر بلا شهادة، عين أستاذاً للرياضيات في بيزا عام 1589 وهو في الخامسة والعشرين فقط. وعكس التعيين إدراكاً متزايداً للقيمة العملية للمعرفة الرياضية، حتى مع استمرار كثير من العلماء التقليديين في عد الرياضيات أدنى من الفلسفة الطبيعية.[6]

وفق حكاية شائعة لكنها غير مؤكدة تاريخياً، برهن غاليليو أن الأجسام مختلفة الكتل تسقط بالمعدل نفسه بإسقاطها من برج بيزا المائل. وتأتي الرواية من سيرة فيفياني عام 1654، *رواية تاريخية لحياة غاليليو*، التي كتبت بعد وفاة غاليليو بزمن. وسواء وقعت التجربة كما وصفت أم لا، فإنها تلتقط جوهر تحديه لفيزياء أرسطو.

وكما بين Moody, 1951 PDF، لم تتشكل آراء غاليليو في تجربة السقوط الحر والمقاومة والحركة في الفراغ بأرسطو وحده، بل أيضاً بنقاد من العصور الوسطى مثل ابن باجة ومعلقين لاحقين.

قدم غاليليو في رسالته عام 1590 في حركة *الأجسام الثقيلة الهابطة طبيعياً والمقذوفات* أفكاراً ثورية عن الحركة: (1) تسقط الأجسام بالمعدل نفسه بغض النظر عن الكتلة؛ و(2) تزداد السرعة خطياً مع الزمن؛ و(3) تتناسب المسافة المقطوعة مع مربع الزمن المنقضي. ووضعت هذه البصائر أسس الديناميكا وأطلقت عصر الميكانيكا التجريبية. والأهم أنها برهنت قدرة العلاقات الرياضية على وصف الظواهر الفيزيائية بدقة غير مسبوقة، وقدمت نموذجاً للمنهج الكمي الذي سيعرف الفيزياء الحديثة.

أكسبه نقده العلني للأرثوذكسية الأرسطية وأسلوبه الحاد في النقاش أعداء، فلم يجدد عقده عام 1592.

الفلك: الحوارات في العام نفسه حصل غاليليو على منصب أرفع في جامعة بادوفا، وبقي فيها حتى عام 1610. وكانت سنواته هناك غزيرة الإنتاج: حاضر في قاعات مكتظة، وباع أدوات من تصميمه، وقدم استشارات خاصة في الرياضيات والهندسة. وألف أيضاً في *علم الميكانيكا*، معالجاً مبادئ الاستاتيكا. وبين هذا العمل كيف يطبق التحليل الرياضي على مسائل ميكانيكية عملية، فردم الفجوة بين المعرفة النظرية والتطبيق الهندسي.

في عام 1609، وبعد سماعه باختراع هولندي للرؤية البعيدة، بنى غاليليو منظاراً خاصاً به. وقد أدهشته قدراته. فرصد به سطح القمر المليء بالحفر، وأطوار الزهرة، والنجوم التي لا تحصى في درب التبانة، والأشد إثارة أربعة أقمار تدور حول المشتري.

وكان زحل من أكثر مشاهداته حيرة، إذ بدا غريب الشكل في منظاره البدائي. ولعجزه عن تمييز ما نعرفه اليوم بحلقات زحل، رأى ما يشبه كوكباً ثلاثياً أو كوكباً ذا مقبضين. ووفق عادة العلماء في إثبات الأسبقية مع حفظ السر، أعلن اكتشافه عام 1610 بالعبارة المعماة *Altissimum planetam tergeminum Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras*، التي يكشف حلها العبارة *observavi*، أي «رصدت أعلى الكواكب ثلاثياً». وأتاح هذا النهج التعموي للفلكيين ادعاء السبق في الاكتشاف، مع منح أنفسهم وقتاً لتأكيد المشاهدات؛ وهي ممارسة عكست الطبيعة التنافسية للفلك التلسكوبي المبكر والحذر اللازم عند تحدي المعتقدات الكونية الراسخة.

زعزعت هذه الاكتشافات، المنشورة عام 1610 في *الرسول النجمي*، أسس علم الكون الأرسطي. ولطلب حظوة كوزيمو الثاني دي ميديشي، سمى غاليليو الأقمار «نجوم ميديشي»، فضمن الرعاية والشهرة الدولية. ويوضح هذا الاسم الاستراتيجي كيف اعتمد التقدم العلمي في العصر الحديث المبكر لا على الاكتشاف وحده، بل على اجتياز شبكات معقدة من الرعاية والنفوذ السياسي.

وفي عام 1611، أدخل *أكاديمية لينتشي*، وهي من أقدم الجمعيات العلمية. لكن الجدل كان يلوح.

أيدت مشاهدات غاليليو مركزية الشمس الكوبرنيكية، أي دوران الأرض حول الشمس. لكن الكنيسة كانت قد أعلنت النظرية هرطقة حديثاً. وفي عام 1616 وضع كتاب كوبرنيكوس في *دوران الأجرام السماوية* على *فهرس الكتب المحرمة*[7]، وأمر الكاردينال بيلارمين غاليليو بالتخلي عن الفكرة.

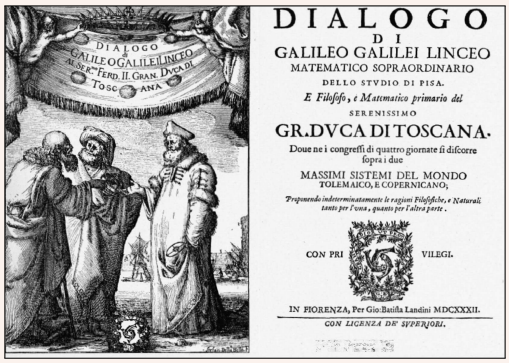
---

[6] يمتد هذا الإدراك في العصر الحديث بعيداً وراء الأوساط الأكاديمية: فليس من غير المعتاد أن توظف شركات وول ستريت رياضيين، وتطبق خبرتهم في التحليل الكمي والنمذجة العشوائية والتحسين على مسائل مالية معقدة.

[7] لم يكن *فهرس الكتب المحرمة* الذي حفظته محاكم التفتيش الرومانية فريداً في التاريخ. فقد نفذت أنظمة شمولية جهوداً مماثلة لقمع الأدب المخالف أو الخطر أيديولوجياً، ولا سيما النازيون الذين نظموا إحراق الكتب ووضعوا قوائم سوداء للمؤلفين «غير الألمان»، والاتحاد السوفيتي الذي راقب النصوص التخريبية وحصر الكتب المحظورة في أقسام «حفظ خاص» مقيدة بالمكتبات. وفي وقت أحدث، شهدت الولايات المتحدة عودة لحظر الكتب محلياً، استهدف كثيراً أعمالاً عن العرق والجندر والجنسانية، ولا سيما في المناخ السياسي الذي شكله عصر ترامب، ما جدد القلق بشأن الرقابة والحرية الفكرية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

امتثل غاليليو مدة. لكن الكاردينال باربريني، وهو من المعجبين به، أصبح البابا أوربان الثامن عام 1623. وتشجع غاليليو فنشر حوار حول *النظامين الرئيسين للعالم، البطلمي والكوبرنيكي* (Galilei, 1632)، الشكل 6.8.



شكل 6.8: حوارات غاليليو غاليلي (Galilei, 1632)

عرض الكتاب مناقشة بين ثلاثة محاورين: سيمبليسيو الأرسطي، وساغريدو الرجل المحايد، وسالفياتي الكوبرنيكي؛ لكنه لم يكن محايداً البتة. فقد خان اسم سيمبليسيو نفسه، أي «الساذج»، موقف المؤلف.

وكتب أينشتاين لاحقاً:

> ينكشف هنا رجل يملك الإرادة المتقدة والذكاء والشجاعة ليقف ممثلاً للتفكير العقلاني...
>
> Einstein, 1954 Ideas and Opinions

كان غاليليو قد تجاوز حده. ولم تستحسن الكنيسة الأمر.

فاصل: محاكم التفتيش بعد نشر *الحوارات* بقليل، حظرت محاكم التفتيش بيعها، وأمر غاليليو بالمثول في روما للمحاكمة. وفي يونيو 1633 أدين بـ«الاشتباه الشديد في الهرطقة»، وخفف حكم السجن فوراً إلى إقامة جبرية دائمة. وأجبر على التراجع علناً عن آرائه في مركزية الشمس، وإن تقول الأسطورة إنه تمتم في نهاية تراجعه بالعبارة المتحدية ومع ذلك فهي تدور[8]. وأصبحت محاكمة غاليليو لحظة حاسمة في العلاقة بين العلم والسلطة المؤسسية، وجعلته شهيداً للحرية الفكرية، كما بينت الكلفة الشخصية لتحدي المعتقد السائد.[9]

كانت محاكم التفتيش الرومانية، التي أنشأها البابا بولس الثالث عام 1542، نظاماً من المحاكم هدفه استئصال الهرطقة وحفظ العقيدة الكاثوليكية، ولا سيما رداً على الإصلاح البروتستانتي. وعلى خلاف محاكم التفتيش الوسيطة السابقة، كانت مركزية تحت إشراف مجمع المكتب المقدس وبإشراف بابوي مباشر. ومع أنها قصدت منع الخطأ العقائدي، قمعت أيضاً المخالفة وراقبت المنشورات وحرست الحد بين العلم والدين. وأصبحت قضية غاليليو من أشهر حلقاتها سوءاً، ورمزاً للصدام بين البحث الحر والسلطة المؤسسية.

[8] منذ النشر الكامل لوثائق محاكمة غاليليو في سبعينيات القرن التاسع عشر، نسبت المسؤولية الكاملة عن إدانته عادة إلى الكنيسة الكاثوليكية. غير أن هذا يحجب الدور المؤثر للفلاسفة الأكاديميين الذين أقنعوا اللاهوتيين أولاً بخلط نظرياته العلمية بالهرطقة. وفي عام 1979، بدأ البابا يوحنا بولس الثاني تحقيقاً رسمياً في محاكمته، انتهى بتقرير لجنة بابوية عام 1992 أقر بخطأ الفاتيكان.

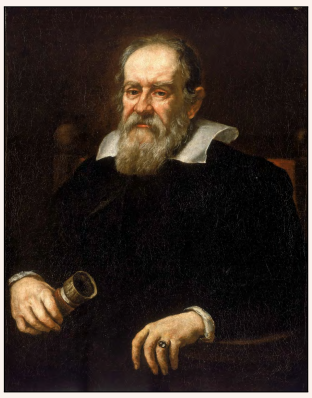
[9] كثيراً ما تقارن هذه القضية بمحاكمة سكوبس، أو «محاكمة القرد»، عام 1925 في تينيسي، حين تعرض تدريس التطور في المدارس العامة للطعن بموجب قانون الولاية، فأظهرت توتراً مماثلاً بين الأفكار العلمية والأعراف الاجتماعية أو الدينية السائدة. ومن المؤسف أننا قد نشهد في عام 2025 في عهد ترامب عودة إضافية في الاتجاه نفسه، مثل حجب الكتب عن المكتبات العامة وإنكار العلم الراسخ ورفض القيمة المثبتة للقاحات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المنهجية: المباحث بدأ غاليليو عام 1634، وهو محبوس في فيلته بأرتشيتري، العمل على ما سيغدو آخر كتبه وربما أهمها: *مباحث وبراهين رياضية حول علمين جديدين يتعلقان بالميكانيكا والحركات الموضعية*. ووسع الكتاب الميكانيكا التي طورها في أوائل مسيرته. وسيثبت هذا العمل أثراً في تطور العلم الهندسي يفوق اكتشافاته الفلكية، إذ وضع الأساس الرياضي لفهم سلوك المواد والاستجابة الإنشائية.

هربت المخطوطة (Galilei, 1638 PDF)، المبينة في الشكل 6.9b، من إيطاليا وطبعتها دار إلزفير في ليدن بهولندا عام 1638، خارج متناول محاكم التفتيش.

توفي غاليليو بعد أربع سنوات عام 1642. وبسبب إدانته، دفن في موضع مغمور حتى أعيد دفنه عام 1737.



(a) فلكي وفيزيائي ومهندس، موسوعي بامتياز


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſeuirii. M. D. C. XXXVIII.

(b) مباحث حول علمين جديدين (Galilei, 1638 PDF)

شكل 6.9: غاليليو غاليلي

ومن المفارقات أن محاكم التفتيش لم تتخذ إجراء ضد الكتاب الجديد. بل إن خمسين نسخة وصلت إلى مكتبات روما نفدت سريعاً.

وعلى خلاف *الحوارات* التي تناولت قضايا فلسفية ولاهوتية، بقيت *المباحث* بأمان في نطاق الميكانيكا الفيزيائية، كما يدل عنوانها الفرعي: *الميكانيكا والحركات الموضعية*، الجدول 6.2. وكان العمل الجديد أشد تقنية وموجهاً جزئياً إلى المهندسين. وقد تجنب، بتركيزه على المسائل الميكانيكية العملية لا التكهن الكوني، الخلافات اللاهوتية التي جعلت *الحوارات* خطرة.

يبرز للمهندسين الإنشائيين موضوعان: مقاومة العوارض الكابولية، §7.2.2، ومفهوم التحجيم. ويكتسب الأخير أهمية محورية.

التحجيم أساسي في الهندسة الإنشائية الحديثة. ولعل غاليليو أول من قدمه، وإن لم يفعل بالمعنى الجبري أو البعدي المستخدم اليوم. فقد كان أول من أدرك أن الكائنات أو الأجسام الأصغر في الطبيعة ليست نسخاً مصغرة فحسب من الأكبر.

وفي القضية التاسعة من *المباحث*، في اليوم الثاني، يقول غاليليو بلسان سالفياتي:

> ...رسمت ذات مرة شكل عظم أطلتُه ثلاث مرات، الشكل 6.10، ثم زدت سماكته بنسبة تجعله يؤدي في الحيوان الكبير ما يؤديه العظم الأصغر في الحيوان الصغير: وهذه هي الصور؛ ترون مقدار عدم التناسب الذي يصيب شكل العظم المكبر... ولسحقه وزنه الذاتي وسقط.
>
> Galilei, 1638 PDF Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

لم يملك غاليليو الأدوات الصورية لتحليل الأبعاد، الذي سيقدمه Vashy, 1892 لاحقاً. لكنه فهم الفكرة المركزية: فالوزن الذي يحمله العظم يزداد مع الحجم (L^3)، فيما لا تزداد مقاومته إلا مع مساحة المقطع (L^2). ومن ثم يتطلب التكبير بمعامل 3 عظاماً أعرض من ثلاثة أمثال، أي قرابة $3^{3/2} \approx 5$، لتحمل الوزن المضاف.[10]

[10] يستبق استدلال غاليليو النوعي مفهوم *أثر الحجم* الحديث الذي صاغه Bažant, 1984 وراجع اشتقاقه Saouma **and**

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.2: أيام حوارات غاليليو ومباحثه الأربعة

المباحث (Galilei, 1638)	الحوارات (Galilei, 1632)	العنوان
مباحث وبراهين رياضية حول علمين جديدين	حوار حول نظامي العالم	العنوان
الميكانيكا والحركات الموضعية	البطلمي والكوبرنيكي	العنوان الفرعي
اللاتينية	الإيطالية	لغة الطباعة
		اليوم
مقاومة الأجسام للانفصال	ضد الفيزياء الأرسطية	1
سبب التماسك	قانون القصور	2
الحركة المتسارعة طبيعياً	تحليل الظواهر الفلكية	3
حركة المقذوفات	التفسير الكوبرنيكي للنظام الشمسي	4


DEL GALILEO. 129
E per vn breue esempio di questo che dico disegnai già la figura di vn' osso allungato solamente tre volte, & ingrossato con tal proportione, che potesse nel suo animale grande far l' uffizio proporzio-

شكل 6.10: تحجيم غاليليو للعظام (Galilei, 1638)

كانت بصيرته ثورية لأنها بينت أن الأشكال الطبيعية ليست اعتباطية، بل تمثل حلولاً مثلى لقيود ميكانيكية، وهو مبدأ سيلهم أجيالاً من المهندسين والمعماريين.

وكانت هذه البصيرة، أن التشابه الهندسي يؤدي إلى اختلاف إنشائي، ثورية. فقد فتحت للمهندسين والمعماريين باب النمذجة الفيزيائية.

6.6.3 رينيه ديكارت (1596–1650)

يمثل رينيه ديكارت شخصية انتقالية بين الفلسفة الكلاسيكية والعلم الحديث. ومع أنه اشتهر خصوصاً بمقولته الفلسفية *أنا أفكر، إذن أنا موجود*[11]، فقد أثر ديكارت بعمق في الميكانيكا والرياضيات بإطاره العقلاني وإسهاماته التأسيسية في الهندسة والفيزياء. ووفر منهجه المنظم للمعرفة، القائم على الشك المنهجي والاستدلال الرياضي، الأساس الفلسفي للثورة العلمية اللاحقة.

Barton, 1994، وهو يقيس الانخفاض المنهجي في المقاومة الاسمية للمنشآت مع زيادة حجمها، بتطبيقات تمتد من ميكانيكا الكسر إلى قوانين التحجيم في المواد شبه الهشة.

[11] إن عبارة *Cogito, ergo sum* (باللاتينية: «أنا أفكر، إذن أنا موجود») هي العبارة المؤسسة لفلسفة رينيه ديكارت. صيغت أولاً بالفرنسية في صورة *Je pense, donc je suis* في مؤلفه الصادر عام 1637 *مقال عن المنهج*، ثم ظهرت باللاتينية في *Principia Philosophiae* (1644). وهي تعبر عن أن فعل التفكير نفسه برهان لا يمكن إنكاره على وجود المرء.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الهندسة قدم ديكارت في مؤلفه الصادر عام 1637 *الهندسة* (Descartes, 1637b)، وهو ملحق بمؤلفه الأكثر فلسفية مقال عن *المنهج*، الهندسة التحليلية، رابطاً الجبر بالهندسة الإقليدية (§6.2.3) من خلال تمثيل المنحنيات بمعادلات جبرية في نظام إحداثي. ومهد هذا الابتكار لتطور حساب التفاضل والتكامل لاحقاً، وأصبح ضرورياً لصياغة الميكانيكا في صورة رياضية. ووفر نظام الإحداثيات الديكارتية اللغة الرياضية اللازمة لوصف الحركة وعلاقات القوى كمياً، فأتاح الميكانيكا التحليلية التي سيطورها نيوتن وأويلر ولاغرانج.

واقترح ديكارت أيضاً ثلاثة قوانين للحركة، مؤكداً الحركة القصورية عند غياب القوى الخارجية، في انفصال واضح عن الديناميكا الأرسطية. ومع أن صيغ نيوتن الأدق حلت محل قوانينه في نهاية المطاف، فقد أرسى ديكارت الأساس للنظر إلى الطبيعة بوصفها محكومة بمبادئ ميكانيكية، وهي رؤية تبناها وصقلها مفكرون مثل هوينغنس ولايبنتس وآل برنولي.

وقدم ديكارت كذلك صورة مبكرة من مبدأ الانحفاظ، مجادلاً بأن الله يحفظ «كمية الحركة» الكلية نفسها في الكون. ومع أن تصوره القياسي، أي الكتلة مضروبة في السرعة من دون اعتبار للاتجاه، كان خاطئاً فيزيائياً—إذ سيبين هوينغنس لاحقاً أن التصادمات تحفظ كمية الحركة بوصفها كمية متجهة—فقد رسخ توقع خضوع التفاعلات الميكانيكية لقوانين الانحفاظ، وهو مبدأ موجّه سيغدو محورياً في تطور الميكانيكا التحليلية.

وسادت فيزياء القارة الأوروبية نظريته الدوامية لحركة الكواكب، التي فسرت الميكانيكا السماوية بمادة دوارة لا بفعل عن بعد، إلى أن قدم كتاب نيوتن *المبادئ الرياضية* بديلاً متفوقاً رياضياً. وشكل الانتصار اللاحق للجاذبية النيوتنية على الدوامات الديكارتية المناقشات المنهجية في القرن الثامن عشر: هل ينبغي للميكانيكا أن تبحث عن تفسيرات ميكانيكية، أي قوى تماس، أم تقبل أوصافاً رياضية لقوى غير مفسرة؟ واستمر هذا التوتر عند أويلر ولاغرانج، ولم يحسم تماماً إلا مع نظرية الحقول في القرن التاسع عشر.

وعلى خلاف غاليليو، الذي ارتكزت فيزياؤه على الملاحظة التجريبية، ناصر ديكارت الاستدلال الاستنباطي من المبادئ الأولى. وأثر إصراره على كون ميكانيكي حتمي بعمق في المناخ الفكري للقرن السابع عشر. وكان هذا الإطار الفلسفي ضرورياً لقبول الأوصاف الرياضية للظواهر الطبيعية حتى حين تعارضت مع الحس السليم أو العقيدة الدينية. ولذلك ينبغي أن ينسب الفضل إلى ديكارت لا في الابتكار الرياضي وحده، بل أيضاً في تشكيل الأساس المفاهيمي للميكانيكا الكلاسيكية.

6.6.4 كريستيان هوينغنس (1623–1695)

ولد كريستيان هوينغنس في أسرة مرموقة. فقد وصف أبوه قسطنطين هوينغنس بأنه «ألمع شخصية في تاريخ الأدب الهولندي»، وعُرف كريستيان نفسه بأنه «أمير فلاسفة هولندا، وأحد أعظم علماء القرن السابع عشر». وكان قسطنطين دبلوماسياً درس الفلسفة الطبيعية وأقام في إنجلترا في عهد جيمس الأول. وبفضل صلات أبيه، دخل كريستيان مبكراً أرفع الأوساط العلمية في عصره. وتوضح هذه النشأة المتميزة كيف كانت الشبكات العلمية في القرن السابع عشر تعتمد كثيراً على العلاقات الاجتماعية والمكانة الأسرية، حتى حين أصبحت الجدارة والاكتشاف متزايدي الأهمية في السمعة العلمية.

تلقى كريستيان تعليماً خاصاً حتى السادسة عشرة؛ فدرس الهندسة، وبنى نماذج ميكانيكية، وتعلم مهارات اجتماعية مثل العزف على العود. وتأثر تعليمه الرياضي بقوة بديكارت، الذي كان يزور بيت هوينغنس أحياناً وأبدى اهتماماً شخصياً بنمو الصبي الفكري.

ثم درس هوينغنس القانون والرياضيات، وواصل دراستهما من 1647 إلى 1649. ومن خلال صلة أبيه بالموسوعي الفرنسي مارين ميرسين، بدأت مراسلات بين ميرسين وهوينغنس الشاب. وطرح ميرسين عليه مسائل عدة، منها تحديد شكل حبل معلق بين دعامتين. ومع أن هوينغنس لم يحل *مسألة السلسلة المعلقة*، فقد نجح في حل سؤال متصل: كيف توزع الأوزان على طول الحبل بحيث يتخذ شكلاً قطعياً مكافئاً. ولم يبرهن ذلك على ابتكاره فحسب، بل على انخراطه المبكر في مسائل تقع عند ملتقى الهندسة والفيزياء. وأظهر هذا العمل المبكر كيف كانت المسائل الرياضية النظرية تنشأ كثيراً من تحديات ميكانيكية عملية، وهي صلة ستطبع جانباً كبيراً من علم القرن السابع عشر.[12]

[12] يمكن العثور على موازاة حديثة في الهندسة الإنشائية في عمل Cross, 1932، الذي وفر أسلوب توزيع العزوم لديه (1930) حلاً تحليلياً أنيقاً للتحدي العملي المتمثل في تحليل الإطارات غير المحددة استاتيكياً؛ أو في Przemieniecki, 1968، الذي قدم إطاراً تحليلياً منظماً للمنشآت المعقدة في هندسة الطيران والهندسة المدنية؛ أو حتى في Saouma **and** Perotti, 2004 لنمذجة تفاعلات الركام القلوي. وفي جميع هذه الحالات، حفزت حاجات التصميم العملية تطوير أدوات تحليلية جديدة وقوية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

النطاق والمسار: المقاريب والنواسات والضوء يقف كريستيان هوينغنس بين أكثر العقول العلمية أصالة في القرن السابع عشر، وقد وصل عمله بين الرياضيات والفلك والميكانيكا والبصريات. ويكشف مساره خيطاً بحثياً متصلاً انتقل من رصد الأجرام السماوية بمقاريب محسنة، إلى ابتكار ساعات النواس وتحليلها لقياس الزمن بدقة، وانتهى إلى النظرية الموجية للضوء. ولا يرسم هذا الانتقال—من المقاريب إلى النواسات، ومن النواسات إلى الضوء—مسار تطوره الفكري فحسب، بل يعكس أيضاً التحول الأوسع في الفلسفة الطبيعية نحو الدقة الرياضية والنمذجة الفيزيائية. وقد جسد هوينغنس نمطاً جديداً من العلماء برز في القرن السابع عشر: يجمع التطور النظري بالمهارة الهندسية العملية، ويتنقل بحرية بين الرياضيات البحتة والميكانيكا التطبيقية.[13]

وتجعل ابتكارات هوينغنس واسعة النطاق، ومنها اكتشاف أكبر أقمار زحل، وبناء أول ساعة نواس عملية، وصياغة ما يسمى اليوم مبدأ هوينغنس في بصريات الموجات، منه شخصية تأسيسية في نشوء العلم الحديث. ويعكس عمله سعياً إلى الأناقة الهندسية والوضوح التجريبي، متجذراً في التقليد الديكارتي لكنه يتطور نحو الميكانيكا الأكثر ديناميكية التي سيصوغها نيوتن لاحقاً. ومع أن تأثير نيوتن الهائل كثيراً ما حجبه، فقد قدم هوينغنس رؤية بديلة ومتكاملة في جوانب كثيرة للقانون الفيزيائي، تتصدر فيها الموجات والمنحنيات والاهتزازات المشهد.

من المقاريب إلى النواسات: قياس الزمن وساعة النواس تطلب العمل الفلكي قياساً دقيقاً للزمن (انظر §6.6.6)، ودفع هذا التحدي هوينغنس إلى معالجة المسألة مباشرة. ففي عام 1656، سجل براءة أول ساعة نواس، محسناً دقة قياس الزمن تحسناً جذرياً. وارتبط بحثه في النواسات ارتباطاً وثيقاً بعمله الرياضي على المنحنى الدويري، الذي درسه استجابة لتحد من باسكال. وإذ اعتقد أن نواساً ذا قوس تأرجح أكبر سيكون أنفع على السفن، اخترع هوينغنس النواس الدويري. وبنى ساعات نواس عدة لتحديد خط الطول في البحر، واختبرت في تجارب بحرية عام 1662 ثم عام 1686. وتوجت هذه الجهود بمؤلفه المؤسس *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*، الذي وصف فيه نظرية حركة النواس. ومثل هذا العمل واحداً من أول التطبيقات الناجحة للرياضيات المتقدمة في حل مسألة عملية ملحة ذات أهمية عالمية.

الأكاديميات والممارسة العلمية الدولية زار هوينغنس لندن عام 1661، وجمع معلومات عن الجمعية الملكية المنشأة حديثاً، التي انتخب عضواً فيها عام 1663. وجعلته عضويته في الجمعية الملكية وفي *Académie des Sciences* واحداً من أوائل العلماء الدوليين حقاً، القادرين على تيسير التواصل والتعاون عبر الحدود الوطنية.

وفي عام 1666، قبل دعوة جان-باتيست كولبير للمساعدة في تأسيس *Académie des Sciences* الجديدة . ولدى وصوله إلى باريس وجد المؤسسة لم تبدأ عملها بعد. وعقدت الاجتماعات الأولى في مكتبة كولبير، ثم انتقلت إلى *Bibliothèque du Roi* حيث أقام هوينغنس. وتولى دوراً قيادياً وساعد في تنظيم الأكاديمية استناداً إلى معرفته بطريقة عمل الجمعية الملكية في إنجلترا.

ديناميكا الأجسام الممتدة: الحركة الدائرية والنواس المركب قدم كريستيان هوينغنس (1629–1695) (Huygens, 1986) إسهامات أساسية في الديناميكا أرست مفاهيم جوهرية للتحليل الإنشائي تحت الأحمال المتغيرة زمنياً. ويعد كتابه *ساعة النواس*، المنشور عام 1673، تحفة من الفيزياء الرياضية في القرن السابع عشر، إذ يجمع الاختراع العملي بالتحليل النظري العميق.

والأهم للميكانيكا أن هوينغنس حلل حركة الأجسام في مسارات دائرية، واشتق تعبير القوة الطاردة المركزية: $F = mv^2/r$. وتنطبق هذه النتيجة، الضرورية لفهم الحركة الدورانية، مباشرة على المسائل الإنشائية التي تشمل الآلات الدوارة والحركة المنحنية والتحميل الديناميكي.

وطور هوينغنس أيضاً مفهوم مركز التذبذب، أي النقطة التي يمكن تركيز كتلة جسم ممتد عندها من دون تغيير دور تذبذبه، مستبقاً أفكار الأنظمة المكافئة المستخدمة في الديناميكا الإنشائية. وأرسى عمله على النواس المركب طرائق لتحليل ديناميكا الأجسام الصلبة تمتد مباشرة إلى تحليل اهتزاز العناصر الإنشائية.

ويضم *ساعة النواس* كذلك أول اشتقاق صحيح لصيغة التسارع المركزي ونتائج مهمة في متطورات المنحنيات ومتشابكاتها. وقد جسد جمع هوينغنس بين الصرامة الرياضية والتطبيق العملي العلاقة الناشئة بين العلم والتقانة التي ستطبع الهندسة الإنشائية.

من النواس إلى الضوء: الموجات ومبدأ هوينغنس قدم هوينغنس عام 1678 ما سيعرف لاحقاً باسم *مبدأ هوينغنس*: كل نقطة في جبهة موجة ضوئية تعمل مصدراً لمويجات كروية ثانوية، وجبهة الموجة الجديدة هي غلاف هذه المويجات. وأتاح هذا الإنشاء لهوينغنس اشتقاق قانوني الانعكاس والانكسار، وتفسير الانتشار الخطي والكروي للضوء.

وعانى هوينغنس طوال حياته نوبات طويلة من الكآبة، كان إنتاجه خلالها قليلاً، أعقبتها فترات من الإبداع المكثف، مما قد يشير،

[13] سيواصل هذا التكامل بين النظرية والتطبيق لاحقاً أشخاص مثل كلود-لوي نافييه (انظر §6.7.3 لرواية تصميمه غير الناجح للجسر)، الذي جمع الصرامة الرياضية بتطبيقات الهندسة الإنشائية، فضلاً عن ميكانيكيين آخرين في القرن التاسع عشر.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بمصطلحات التشخيص الحديث، إلى نزعات ثنائية القطب. ومن الغريب أنه، بخلاف كثير من معاصريه مثل ديكارت ولايبنتس ونيوتن، لم يبد اهتماماً كبيراً بالبحث الميتافيزيقي أو الفلسفي. وظل تركيزه منصباً على الظواهر القابلة للرصد والقوانين الرياضية. وسيغدو هذا التركيز التجريبي سمة للنهج الهندسي في الميكانيكا الذي سينشأ في القرن التالي.

6.6.5 بليز باسكال (1623–1662)

ولد بليز باسكال في كليرمون-فيران عام 1623 في أسرة مثقفة. وتولى أبوه إتيان باسكال، وهو قاض وعالم رياضيات هاو، مسؤولية تعليمه مباشرة بعد وفاة أمه المبكرة. وظهرت موهبة باسكال الرياضية في سن صغيرة على نحو استثنائي: ففي أوائل مراهقته أعاد بصورة مستقلة اكتشاف نتائج في الهندسة الإقليدية، وكتب في السادسة عشرة مقالة مؤثرة عن القطوع المخروطية جذبت انتباه ديكارت. وشكل هذا الانغماس المبكر في الرياضيات، مع بيئة منزلية شجعت الاستقلال الفكري، دمج باسكال الدائم بين النظرية والتجربة والتأمل الفلسفي.

التجربة والضغط وطبيعة الموائع أرسى عمله المبكر أسساً لميكانيكا الموائع ونظرية الضغط. ففي مراهقته صمم وبنى آلة حاسبة ميكانيكية، الباسكالين، وكانت من أوائل الأجهزة المعدة لأتمتة العمليات الحسابية. وفي عشرينيات عمره أجرى تجارب رائدة على الضغط الجوي، موسعاً عمل توريتشيلي ومبيناً أن الضغط الجوي ينخفض مع الارتفاع بقياس تغيرات البارومتر أثناء صعود بوي دو دوم.

وتحدت هذه التجارب بصورة حاسمة المذهب الأرسطي الذي أنكر وجود الفراغ. وبين باسكال أن وزن الهواء، لا أي نفور جوهري من الخلاء، هو الذي يسند عمود الزئبق في البارومتر. وجسد عمله موقفاً علمياً جديداً: استدلال رياضي توجهه تجارب مصممة بعناية، لا السلطة أو الحجة الكيفية.

الهيدروستاتيكا وقانون باسكال صاغ باسكال في رسالته الصادرة عام 1647، *رسالة في توازن السوائل*، مبادئ الهيدروستاتيكا وقدم ما يعرف اليوم بقانون باسكال: ينتقل الضغط المطبق على مائع محصور دون نقصان في جميع الاتجاهات. ووحدت هذه النتيجة استاتيكا الموائع، وأصبحت أساساً للأجهزة الهيدروليكية، من المكابس والمصاعد إلى التطبيقات الهندسية اللاحقة التي تنقل القوة بواسطة الموائع.

وعالجت صياغة باسكال الضغط بوصفه حقلاً قياسياً داخل المائع مستقلاً عن شكل الوعاء، وهي نقلة مفاهيمية واءمت ميكانيكا الموائع مع الأوصاف الحقلية الناشئة للظواهر الفيزيائية. ومع أن استدلاله صيغ من دون الأدوات اللاحقة للمعادلات التفاضلية الجزئية، فقد استبق نهج الوسط المتصل الذي سيطوره أويلر ونافييه بصورة أكمل.

الموقع في تطور الميكانيكا ومع أن عمل باسكال لا يرتبط مباشرة بالميكانيكا الإنشائية بمعناها الضيق، فإن تحليله للضغط والموائع كانت له آثار دائمة في تصميم المنشآت الخاضعة لقوى الموائع وتحليلها، ومنها السدود والجدران الساندة والآلات الهيدروليكية، ولاحقاً مسائل التفاعل بين المائع والمنشأ. وشكلت إسهاماته جزءاً رئيسياً من الأساس الفكري الذي سيبني عليه آل برنولي وأويلر ونافييه نظريات منظمة لحركة الموائع وضغطها.

ولعل الأهم أن جمع باسكال بين النظرية الرياضية والممارسة التجريبية قدم نموذجاً لتقدم العلوم الهندسية: بالتفاعل المنظم بين الاستدلال المجرد والتحقق التجريبي. وأصبح هذا الإرث المنهجي، الواصل بين الحساب والتجربة، سمة مميزة للميكانيكا الحديثة والعلوم الهندسية[14].

6.6.6 روبرت هوك (1635–1703)

ولد روبرت هوك عام 1635 في جزيرة وايت، ابناً لرجل دين أنغليكاني متواضع الحال. وكان ضعيف البنية في طفولته ولم يكن متوقعاً أن يبلغ سن الرشد، فتلقى أولاً تدريباً في الرسم والمهارات الميكانيكية بدلاً من الدراسات الكلاسيكية. وبعد وفاة أبيه انتقل هوك إلى لندن، حيث جذبت مواهبه انتباه كبار المفكرين. ودرس لفترة قصيرة في مدرسة وستمنستر ثم في أكسفورد، حيث عمل مساعداً لروبرت بويل. وشكل هذا الانغماس المبكر في الممارسة التجريبية وصناعة الأدوات وحل المسائل عملياً تأكيد هوك طوال حياته على الملاحظة والأجهزة والبراعة الميكانيكية، أكثر من الصياغة الرياضية المنظمة.

[14] يعبر عن ذلك في الاصطلاح الحديث Thacker **andothers,** 2004.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إن روبرت هوك بالفعل واحد من أكثر شخصيات علم القرن السابع عشر إثارة، ومن أقلها تقديراً على نحو مأساوي. فلولا أن نيوتن حجبه وناصبه العداء، لربما تذكره التاريخ عملاقاً محورياً في العلوم الميكانيكية. وكان هوك متعدد المواهب بصورة استثنائية: فيزيائياً وفلكياً ومخترعاً وباحثاً مجهرياً ومعمارياً ومهندساً. وبصفته *أمين التجارب* في الجمعية الملكية زمناً طويلاً، ثم أمين سرها، كان حاسماً في تحديد الثقافة التجريبية لذلك العصر. ووضعه دوره في الجمعية الملكية في مركز الاتصال العلمي الأوروبي، حيث لم يجر أبحاثه الخاصة فحسب، بل يسر عمل الآخرين وساعد في إرساء قواعد التحقق التجريبي التي أصبحت مركزية في العلم الحديث. وقدم إسهامات رائدة في المرونة والفلك وصناعة الساعات والمجهر، لكن كثيراً من بصائره ظل غير مطور أو نسب إلى غيره. ويستعرض هذا القسم بإيجاز إسهاماته في الميكانيكا والهندسة، مع عناية خاصة بدوره في قياس الزمن ونزاع الجاذبية مع نيوتن.

تحدي خط الطول اعتمدت الملاحة البحرية اعتماداً كبيراً على الأساليب السماوية. فبينما أمكن تحديد خط العرض بالسدس لقياس ارتفاع الشمس أو القمر في أوقات معلومة، كان تحديد خط الطول في البحر أصعب كثيراً، إذ تطلب ساعة بالغة الدقة لمقارنة الزمن المحلي بزمن خط طول مرجعي. ولم يكن قياس الزمن بهذه الموثوقية ممكناً بعد في القرنين السابع عشر والثامن عشر. وأدى العجز عن تحديد خط الطول إلى حوادث غرق كثيرة وقلق سياسي. وتبين هذه المسألة كيف كانت التحديات العملية تقود الابتكار النظري، إذ حفزت الحاجة الملحة إلى الملاحة الدقيقة تطورات في صناعة الساعات والميكانيكا السماوية معاً.

وأصبح هذا التحدي الملاحي قضية وطنية. ففي عام 1714 أقر البرلمان البريطاني *قانون خط الطول* لتحفيز الابتكار في تحديد خط الطول. وخصص القانون مكافآت مالية كبيرة لأي طريقة عملية تقيس خط الطول في البحر بدقة، إلى جانب مخصصات سنوية أصغر للباحثين العاملين في رسم خرائط العالم[15].

هوك وميكانيكا قياس الزمن كان قياس الزمن الدقيق من المتطلبات الرئيسية لتحديد خط الطول، فوضع صناعة الساعات في قلب الابتكار العلمي. وكان كريستيان هوينغنس، مستلهماً فكرة غاليليو في تطبيق خصائص تساوي الزمن للنواس على ضبط الوقت، قد نجح في صنع ساعة نواس تستخدم آلية إفلات بعجلة تاجية (انظر §6.6.4). واقترح هوك بدوره حلاً مختلفاً جذرياً: عجلة اتزان يضبطها نابض، مقترنة بنمط جديد من آلية الإفلات.

وفي عام 1675 نشر هوك *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*، وهي رسالة تركز على الأدوات المقربية وصناعة الساعات، ولا سيما اختراع آلية الإفلات المرساوية وعجلة الاتزان المنظمة بنابض. وعلى نحو معتاد في المطبوعات العلمية البريطانية المبكرة، افتقر العمل إلى رسوم تفسيرية. وأعاد Hall, 1951 لاحقاً بناء شرح بصري لآلية هوك، كما في الشكل 6.11b.

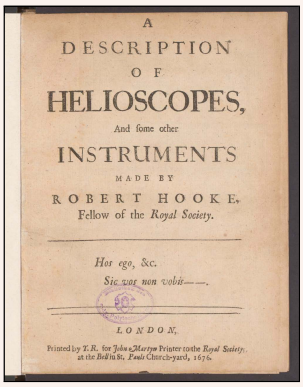
قصد تصميم هوك لآلية الإفلات أن يقدم حلاً أصغر وأمتن من النواس، فيكون أنسب للاستخدام على السفن. ومع أن هوينغنس نجح في نهاية المطاف في صنع ساعات نواس صالحة للتجارب البحرية، ظلت ابتكارات هوك في صناعة الساعات مؤثرة. وساعد عمله في إرساء أساس التطورات اللاحقة في ساعات عجلة الاتزان والكرونومترات البحرية.

الميكانيكا والنزاع مع نيوتن تجاوزت بصيرة هوك العلمية قياس الزمن كثيراً. فقد كان من أوائل المفكرين الذين صاغوا حركة الأجرام السماوية بوصفها مسألة ميكانيكية. واقترح أن حركة الكواكب تنتج من اجتماع حركة قصورية خطية وقوة جذب موجهة نحو مركز المدار. وأدرك أيضاً أن قوة الجذب هذه ستتغير على الأرجح مع المسافة. لكنه لم يستطع اشتقاق العلاقة الرياضية الدقيقة أو إثبات المدارات الإهليلجية التي تنبأ بها كبلر. ويوضح هذا القصور الدور الحاسم للتطور الرياضي في تحويل البصائر الفيزيائية إلى نظريات علمية صارمة.

وعندما نشر نيوتن المجلد الأول من *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* عام 1686، ادعى هوك أنه زود نيوتن من قبل بالفكرة الجوهرية للجاذبية العامة. وأنكر نيوتن بدوره هذا الادعاء بشدة، وأشار إلى أن هوك لم يقدم أي اشتقاق صارم أو برهان هندسي. وسرعان ما تصاعد النزاع. وكان نيوتن ساخطاً بالفعل على انتقادات هوك السابقة، فاستغل الفرصة للتقليل من إسهاماته ومحو أثره من السجل. وأصبح تنافسهما واحداً من أشد الخصومات مرارة في تاريخ العلم. بل امتد انتقام نيوتن من هوك إلى ما بعد القبر، (Westfall, 1980).

وعلى الرغم من الجدل المحيط بنزاعات الأسبقية بينه وبين نيوتن، يقر المؤرخون المعاصرون بأن هوك أدرك البصيرة الفيزيائية في صميم نظرية نيوتن للجاذبية، لكنه افتقر إلى الأدوات الرياضية لصياغتها. واستبقت حدوسه قانون التربيع العكسي وميكانيكا المدارات، مما جعله شخصية تأسيسية، وإن لم تنل حقها، في تطور الميكانيكا الكلاسيكية (Westfall, 1980; Inwood, 2002).

[15] لم يختلف هذا الجهد عن جوائز التقنية رفيعة المستوى اليوم، مثل تحدي داربا للروبوتات، إذ جمع الحاجات العسكرية الاستراتيجية بالبحث العلمي الأساسي.


A
DESCRIPTION
OF
HELIOSCOPES,
And some other
INSTRUMENTS
MADE BY
ROBERT HOOKE,
Fellow of the Royal Society.
Hor ego, &c.
Sic vos non vobis——.
LONDON,
Printed by T.R. for John Martyn Printer to the Royal Society, at the Bell in St. Pauls Church-yard, 1676.

(a) صفحة غلاف هوك لعام 1675 لكتاب وصف *المناظير الشمسية وأدوات أخرى* Hooke, 1676

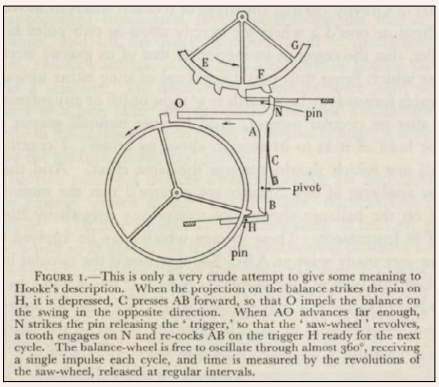


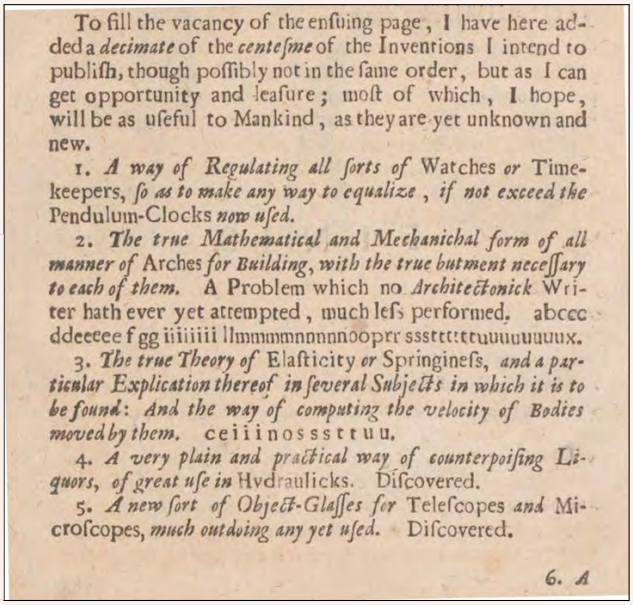
FIGURE 1.—This is only a very crude attempt to give some meaning to Hooke's description. When the projection on the balance strikes the pin on H, it is depressed, C presses AB forward, so that O impels the balance on the swing in the opposite direction. When AO advances far enough, N strikes the pin releasing the 'trigger,' so that the 'saw-wheel' revolves, a tooth engages on N and re-cocks AB on the trigger H ready for the next cycle. The balance-wheel is free to oscillate through almost 360°, receiving a single impulse each cycle, and time is measured by the revolutions of the saw-wheel, released at regular intervals.

(b) شرح آلية إفلات هوك في ساعة Hall, 1951

شكل 6.11: هوك والساعة

لغزان حرفيان غيرا المجال

في الأقواس أكثر ما يهمنا نحن المهندسين الإنشائيين هو ما كتبه هوك في ملحق منشوره لعام 1675 (انظر الشكل 6.12).


To fill the vacancy of the enſuing page, I have here added a *decimate* of the *centeſme* of the Inventions I intend to publiſh, though poſſibly not in the ſame order, but as I can get opportunity and leaſure; moſt of which, I hope, will be as uſeful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. *A way of Regulating all ſorts of* Watches *or* Time-keepers, *ſo as to make any way to equalize, if not exceed the* Pendulum-Clocks *now uſed.*

2. *The true Mathematical and Mechanichal form of all manner of* Arches *for Building, with the true butment neceſſary to each of them.* A Problem which no *Architectonick* Writer hath ever yet attempted, much leſs performed. abccc ddeeeee f gg iiiiiiii llmmmmnnnnnoooprr ssssttttttuuuuuuuux.

3. *The true Theory of* Elaſticity *or* Springineſs, *and a particular Explication thereof in ſeveral Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them.* ceiiinosssttuu.

4. *A very plain and practical way of counterpoiſing Liquors, of great uſe in* Hydraulicks. Diſcovered.

5. *A new ſort of Object-Glaſſes for* Teleſcopes *and* Microſcopes, *much outdoing any yet uſed.* Diſcovered.

6. *A*

(a)

ولملء الفراغ في الصفحة التالية، أضفتُ عُشرَ جزءٍ من مئة [أي جزءًا من ألف] من الاختراعات التي أنوي نشرها، وإن لم يكن ذلك بالضرورة بالترتيب نفسه، بل بحسب ما تتيحه لي الفرصة والوقت؛ وأكثر هذه الاختراعات، كما أمل، سيكون نافعًا للبشرية بقدر ما هو إلى الآن مجهول وجديد.

2. الشكل الرياضي والميكانيكي الصحيح لجميع أنواع الأقواس المستعملة في البناء، مع المساند الجانبية الصحيحة اللازمة لكل واحد منها؛ وهي مسألة لم يحاول أي مؤلف في فن العمارة حتى الآن أن يتناولها، فضلًا عن أن ينجح في حلّها.

abccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux

3. النظرية الصحيحة للمرونة أو القابلية للنابضية، مع شرح خاص لها في عدد من الأجسام والموضوعات التي تظهر فيها؛ وكذلك طريقة حساب سرعة الأجسام التي تتحرك بفعل هذه المرونة.

ceiiinossstuu.

(b)

شكل 6.12: ألغاز هوك الحرفية لعام 1675 في *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676)

من المدهش أن هوك أودع في هذا الكتاب المخصص للساعات وقياس الزمن ادعاءات تتعلق بمبدأين علميين كبيرين، بل ربما

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ثلاثة[16]. ولملء فراغ الصفحة التالية، أضاف هوك قائمة بعشرة اختراعات نوى نشرها، شفر أربعة منها، على عادته، في صورة ألغاز حرفية[17]، وهي وسيلة فضلها طوال حياته المهنية لضمان الأسبقية مع تأخير الكشف الكامل. ومن الأربعة لم يكشف لاحقاً إلا اثنين، أما الآخران فما زالا بلا حل إلى اليوم. وكان أول اللغزين المكشوفين يهم المهندسين الإنشائيين، والثاني يهم الميكانيكيين.

يقرأ لغز هوك الأول:

abcccddeeeeefggiiiiiiiiillmmmmnnnnnoooprrsssttttttuuuuuuuux.

Hooke, 1676 A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

ولم يكشف منفذ وصية هوك، ريتشارد وولر، الصيغة غير المشفرة إلا بعد وفاة هوك، في (Hooke, 1705):

[19] *Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*

كما يتدلى حبل مرن، كذلك تقوم، إذا قلبت، قطع القوس الصلبة المتلامسة.

Hooke, 1705 The Posthumous Works of Robert Hooke

وبعبارة أخرى، فإن الشكل المثالي للقوس هو بالضبط شكل حبل معلق حراً، بعد قلبه رأساً على عقب. وقد فهم هوك أن مواد البناء تقاوم الضغط لا الشد، بينما يتصرف الحبل على النقيض. وتظل هذه البصيرة في مسار الحمل وإيجاد الشكل أساساً للهندسة الإنشائية. وألهم المبدأ لاحقاً أجيالاً من المعماريين والمهندسين، من تصميم كريستوفر رن لكاتدرائية سانت بول إلى أقواس أنطوني غاودي السلسلية الثورية في ساغرادا فاميليا.

لكن بصيرة هوك لم تحدث أثراً فورياً كبيراً آنذاك. فقد أدت صيغته المبهمة وغياب التفصيل ومحدودية الانتشار إلى إغفال معاصريه للآثار الإنشائية إلى حد كبير. ولم تدرس العلاقة بين السلاسل المعلقة والأقواس المستقرة بصرامة أكبر إلا في القرن الثامن عشر، ولا سيما على يد بوليني الذي حلل خط الدفع في قبة القديس بطرس. ثم وضع أشخاص مثل كولمان وهيمان ملاحظة هوك لاحقاً في بؤرة رياضية وبيانية أوضح، مثبتين مكانها في نظرية المنشآت المبنية. تناقش المنشآت المستلهمة من السلسلة المعلقة في §15.5.1.

للتفاصيل التحليلية، انظر §30.3.3

في النوابض يتعلق اللغز الثاني بما اشتهر به هوك أكثر من غيره في الميكانيكا: العلاقة الخطية بين القوة والإزاحة في الأجسام المرنة.

وعلى خلاف اللغز الأول، الذي لم يحل إلا بعد وفاته، كشف هوك هذا اللغز الثاني بنفسه في *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies* (Hooke, 1678)، كما في الشكل 6.14. ولخص ذلك المنشور نتائج تجارب هوك على المواد المرنة، ومثل أول مناقشة علمية للسلوك المرن للمواد الصلبة.

وكان هوك قد أعلن الاكتشاف أول مرة عام 1675[20] في ملحق لـ*A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676). ولحرصه على ضمان الأسبقية، لم يصرح بالقانون بل شفره هكذا:

---

[16] على غرار فيرما الذي كتب نحو عام 1637 في هامش نسخة من *الحساب* أن لديه برهاناً على عدم وجود $n \neq 2$ بحيث $a^n + b^n = c^n$، لكنه أكبر من أن يتسع له الهامش.

[17] اللغز الحرفي كلمة أو عبارة تتكون بإعادة ترتيب حروف كلمة أو عبارة أخرى، وتستخدم عادة جميع الحروف الأصلية مرة واحدة بالضبط. وفي عصر هوك كان الحرفان u وv يستخدمان بالتبادل للدلالة على المصوت u أو الصامت v. وبينما استخدم نيوتن عبارة لاتينية مشفرة[18]، استخدم هوك لغزاً لاتينياً. وحاول كلاهما «إخفاء» اكتشافاته، ربما لضمان الأسبقية مع تأجيل الإفصاح.

[19] في اللاتينية، الحرفان «u» و«v» قابلان للتبادل.

[20] يحمل *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* تاريخ طبع 1676، لكنه وزع فعلياً في أكتوبر 1675.

ceiinosssttuu

Hooke, 1676 A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

وجاء الحل بعد ثلاث سنوات، عام 1678[21]. وفك هوك شفرته هكذا:

Ut tensio sic vis

كما الاستطالة، كذلك القوة.

Hooke, 1678 Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

إن نظرية النوابض، رغم محاولات شتى قام بها رياضيون بارزون في هذا العصر، لم ينشرها أحد حتى الآن. وقد مضى نحو ثمانية عشر عاماً منذ اكتشفتها أول مرة، لكنني كنت أنوي تطبيقها في استعمال خاص، فامتنعت عن نشر البرهان.

ومنذ نحو ثلاثة أعوام تفضل جلالته بمشاهدة التجربة التي اختبرت بها هذه النظرية في وايتهول، وكذلك ساعتي النابضية.

ومنذ نحو عامين طبعت هذه النظرية في لغز حرفي في ختام كتابي عن أوصاف المناظير الشمسية، وهو *ceiinosssttuu*، أي *Ut tensio sic vis*؛ ومعناه أن قوة أي نابض تتناسب مع شده: فإذا مدت قوة واحدة النابض أو حنته مسافة واحدة، حنته قوتان مسافتين، وثلاث قوى ثلاث مسافات، وهكذا. ولما كانت النظرية موجزة جداً، كانت طريقة اختبارها سهلة جداً. ...

خذ سلكاً طوله 20 أو 30 أو 40 قدماً، وثبت طرفه العلوي بمسمار، وثبت في الطرف الآخر كفة تستقبل الأوزان. ثم قس بالفرجار المسافة من أسفل الكفة إلى الأرض أو الأرضية تحتها، وسجلها؛ ثم ضع الأوزان في الكفة وقس استطالات السلك المختلفة وسجلها. وقارن بعد ذلك استطالات السلك المختلفة، فستجد دائماً أن نسب بعضها إلى بعض هي النسب نفسها بين الأوزان التي أحدثتها.

Hooke, 1678 Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

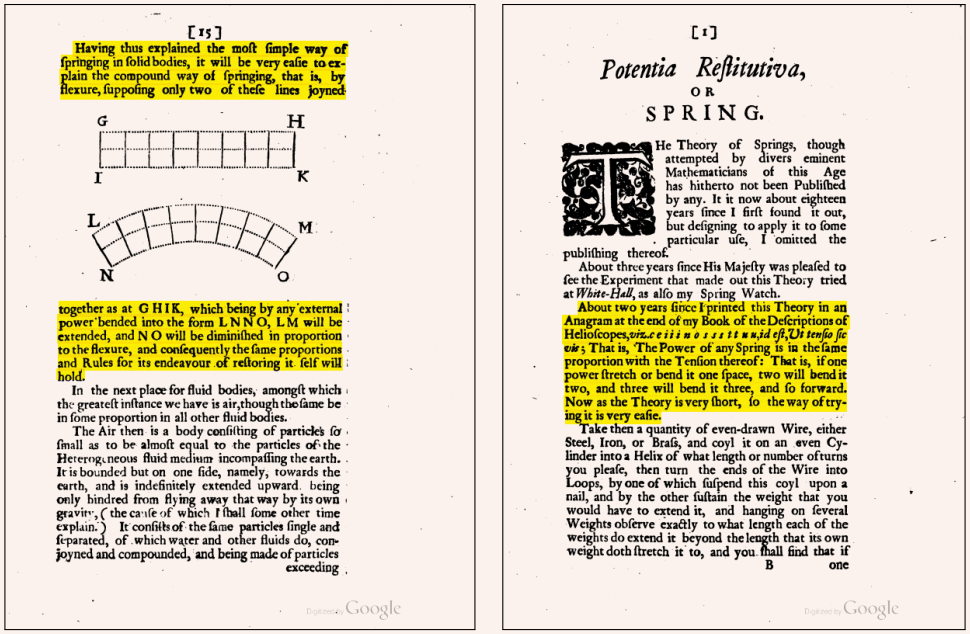
تظهر صياغة هوك القانونية لقانون النوابض، كما وردت في *De Potentia Restitutiva*، في الشكل 6.13.

الرسم الأيقوني للنابض كان هم هوك الأساسي إثبات الأسبقية لقانون كوني من قوانين الطبيعة، لا تقديم رسم تعليمي أو تجريبي معياري. فبعد أن اكتشف القانون قبل نحو عقدين، ونشره مشفراً في صورة لغز حرفي، وعرضه علناً أمام الجمعية الملكية، كان هدفه تأكيد العمومية لا التعليم. ولذلك لم يتعامل هوك مع النوابض بوصفها جهازاً واحداً، بل فئة واسعة من ظواهر الاسترداد، تشمل اللفائف المعدنية والأسلاك المشدودة والخشب المحني والأوتار المهتزة ونوابض اتزان الساعات والأقواس، بل مرونة الهواء أيضاً. ومن ثم تصور أشكاله تطبيقات فيزيائية وإنشاءات هندسية متعددة، من أطوال ومساحات ومجاميع للقوة وعلاقات بين السرعة والموضع، بدلاً من مخطط واحد.

فلا غرابة إذن في أن مخطط الكتلة والنابض المألوف اليوم، والمرتبط عادة بقانون هوك، لا يظهر في الطبعة الأولى من *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678). وعلى الرغم من جهد كبير، لم أستطع تعقب أصل الشكل الأيقوني المبين في الشكل 6.14. ويبدو أن نسبته إلى هوك مشتقة من Andrade, 1950، وإن جاءت هناك أيضاً بطريق غير مباشر.

[21] على خلاف الباحثين المعاصرين المتسابقين إلى النشر، لم يكن تأخير الإفصاح غريباً في القرنين السابع عشر والثامن عشر. ومن الأمثلة اللاحقة المعروفة داروين، الذي طور نظرية التطور في أواخر ثلاثينيات القرن التاسع عشر، لكنه انتظر حتى 1859 لنشر *أصل الأنواع*، أي تأخيراً دام نحو عشرين عاماً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



[15]

Having thus explained the moſt ſimple way of ſpringing in ſolid bodies, it will be very eaſie to explain the compound way of ſpringing, that is, by flexure, ſuppoſing only two of theſe lines joyned

together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminiſhed in proportion to the flexure, and conſequently the ſame proportions and Rules for its endeavour of reſtoring it ſelf will hold.

In the next place for fluid bodies, amongſt which the greateſt inſtance we have is air, though the ſame be in ſome proportion in all other fluid bodies.

The Air then is a body conſiſting of particles ſo ſmall as to be almoſt equal to the particles of the Heterogeneous fluid medium incompaſſing the earth. It is bounded but on one ſide, namely, towards the earth, and is indefinitely extended upward being only hindred from flying away that way by its own gravity, (the cauſe of which I ſhall ſome other time explain.) It conſiſts of the ſame particles ſingle and ſeparated, of which water and other fluids do, conjoyned and compounded, and being made of particles exceeding

[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It it now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz. c e i i i n o s s s t t u u, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

شكل 6.13: رسم هوك للانثناء المرن من *De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)

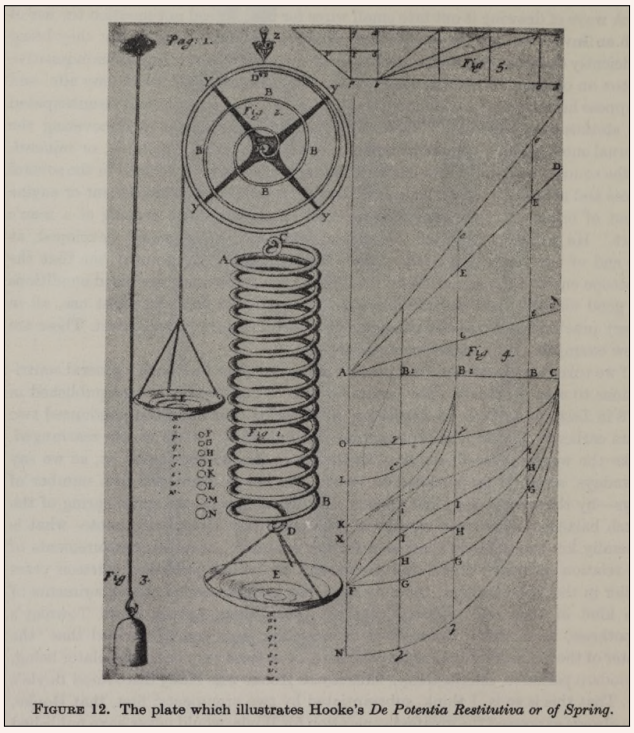


FIGURE 12. The plate which illustrates Hooke's *De Potentia Restitutiva or of Spring.*

شكل 6.14: نابض لولبي يحمل أوزاناً معلقة. ينسب هذا الرسم الأيقوني عادة إلى هوك، مع أن مصدره لا يزال غير واضح؛ والرسم المعاد هنا مأخوذ من Andrade, 1950.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويستحق السياق بعض البيان. فقد عانت سمعة هوك طويلاً من حجب نيوتن له، وصارت عرضة لنقد عابر قليل التروي. وسعى Andrade, 1950 إلى تصحيح ذلك، مجادلاً بأن روبرت هوك، بين جميع عباقرة ربيع العلم ذاك، يملك حجة قوية ليعد أعظمهم. وفي هذا السياق التأهيلي قدم أندرادي الشكل، الذي ربما حفر لطبعات لاحقة تحت إشراف هوك نفسه، وإن ظل ذلك غير مؤكد.

رسوم هوك الفعلية تبين رسوم هوك الفعلية، مثل الصفائح المنحنية في الشكل 6.13، نهجه الهندسي في المرونة. وفي هذا الإنشاء يوصل خطان مستقيمان GHIK عند طرفيهما وتحنيهما «قوة» خارجية إلى الشكل المنحني LNNO؛ وتتناسب الاستطالتان LM وNO مع الانثناء. ويجسد ذلك منهج هوك في التفكير في قوة الاسترداد من خلال علاقات هندسية قابلة للرصد، كالأطوال والانحناءات والاستطالات المتناسبة، لا بالتجريد الجبري.

إن التعبير الجبري المألوف $F = kx$ صياغة لاحقة في حد ذاته. أما عبارة هوك للمبدأ، *ut tensio, sic vis*، أي «كما الاستطالة، كذلك القوة»، فتعبر عن قانون المرونة بوصفه تناسباً متجذراً في الهندسة لا في الجبر الرمزي. وعند هوك ظهرت المرونة من خلال نسب الاستطالات والأطوال والقوى في تطبيقات فيزيائية مختلفة، من دون اللجوء إلى ثابت مجرد. ونقل توماس يونغ هذا النمط الهندسي من التفكير وصقله كثيراً، إذ قدم أول تعميم منظم للسلوك المرن في *محاضرات في الفلسفة الطبيعية* لعام 1807 (Young, 1807).

ولم يبدأ يونغ بمعادلة على صورة $F = kx$؛ بل عرّف المرونة التامة بالاستدلال التناسبي، فالقوى المتساوية تحدث استطالات متساوية والقوى المتناسبة استطالات متناسبة، ثم قدم مقياساً للمرونة بتطبيع هذا التناسب نسبة إلى أبعاد الجسم. وهكذا أصبحت المرونة خاصية للمادة مستقلة عن هندسة بعينها، وهو ما يعرف اليوم بمعامل يونغ. ولم تظهر التعبيرات الجبرية إلا بعد ترسيخ هذا التطبيع الهندسي، وهو تطور يمكن رد جذوره المفاهيمية إلى أويلر منذ عام 1727.[22]

التعريف 318. تتمدد المادة تامة المرونة وتنضغط ابتداءً بدرجات متساوية تحت قوى متساوية، وبدرجات متناسبة تحت قوى متناسبة.

التعريف 319. معامل مرونة أي مادة هو عمود من المادة نفسها، قادر على إحداث ضغط على قاعدته نسبته إلى الوزن الذي يسبب درجة معينة من الانضغاط كنسبة طول المادة إلى النقص في طولها.

Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

انظر §7.3.2.6 لمعالجة إسهامات يونغ في الانثناء ضمن سياقها.

6.6.7 إسحاق نيوتن (1642–1727)

ولد إسحاق نيوتن قبل أوانه يوم عيد الميلاد عام 1642 في وولسثورب بلينكولنشاير، في أسرة زراعية محدودة الموارد. وكان أبوه قد توفي قبل ولادته، وقضى نيوتن جانباً كبيراً من طفولته بعيداً عن أمه بعد زواجها ثانية، وهي تجربة يبدو أنها عززت انطواءه واعتماده على نفسه طوال حياته. ولم يبد في صباه اهتماماً كبيراً بالزراعة، لكنه أظهر ولعاً مبكراً بالأجهزة الميكانيكية، فبنى ساعات شمسية وساعات مائية وآلات صغيرة. وتلقى تعليمه أولاً في مدرسة القواعد المحلية، ثم في كلية ترينيتي بجامعة كامبريدج، حيث تعرف في البداية إلى الفلسفة الطبيعية الأرسطية، لكنه سرعان ما ابتعد عنها إلى البحث الرياضي والفيزيائي المستقل. وشكلت هذه العزلة المبكرة، الاجتماعية والفكرية معاً، أسلوب عمل اتسم بالتركيز الشديد والسرية وتفضيل اليقين الاستنباطي على المخالطة التجريبية.

من غاليليو إلى الميكانيكا العامة ولد إسحاق نيوتن يوم عيد الميلاد عام 1642، وهو العام نفسه الذي توفي فيه غاليليو، وكأنه انتقال رمزي للشعلة في تاريخ العلم. ونشأ في ريف لينكولنشاير بإنجلترا، والتحق بكلية ترينيتي في كامبريدج عام 1661، ثم أصبح أستاذ الرياضيات اللوكاسي.[23] وبنى نيوتن على بصائر غاليليو في التسارع ورؤية ديكارت الميكانيكية للعالم، لكنه تجاوزهما كليهما بصورة حاسمة. فقد اقترح ديكارت أن الحركة السماوية تحكمها دوامات من مائع خفي وأن القوى لا بد أن تعمل بالتماس.

[22] خطا أويلر خطوة مبكرة نحو ثابت مادي للمرونة المحورية، فقدم معامل *استطالة*، أي معامل تناسب يربط الاستطالة الطولية بالقوة المطبقة بعد التطبيع بأبعاد الجسم، واستخدمه لربط الاستطالة من نمط هوك بانحناء الأجسام المرنة. وقد كتبت هذه النتيجة نحو 1727/28 ولم تظهر إلا بعد وفاته عام 1862؛ انظر مؤلف أويلر *De oscillationibus annulorum elasticorum* (Euler, 1862) والرواية التاريخية عند تروسدل (Truesdell, 1960).

[23] سيتولى ستيفن هوكينغ هذا الكرسي المرموق لاحقاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

واستبدل نيوتن بذلك مفهوماً ثورياً: التجاذب الثقالي عن بعد. وبصياغة قوانين الحركة وإظهار أن مدارات كبلر الإهليلجية للكواكب تنتج منها طبيعياً، صحح أخطاء ديكارت ووحد ميكانيكا الأرض والسماء في إطار واحد. ولعل هذا التوحيد كان أعظم إنجاز فكري للثورة العلمية، إذ بين أن القوانين الرياضية نفسها تحكم التفاح الساقط والكواكب المدارية.[24]

وضاهت عبقرية نيوتن نزعة شخصية حادة. فمع أنه كان منعزلاً وصدامياً في أحيان كثيرة، خاض خصومات فكرية شرسة، أشهرها مع روبرت هوك بشأن قانون التربيع العكسي، ومع غوتفريد لايبنتس بشأن اختراع حساب التفاضل والتكامل. وحفزت هذه النزاعات، على مرارتها، تطوير مبادئ علمية رئيسية وتوضيحها. ومن المفارقات أن طبيعة نيوتن السرية والتنافسية، رغم ضررها الشخصي، ربما سرعت التقدم العلمي بإجباره ومعاصريه على تطوير براهين أدق وشروح أوضح لإثبات ادعاءاتهم. وسيشكل توليف نيوتن للرياضيات والفيزياء والفلك مسار العلم قروناً، وهو يعد على نطاق واسع أكثر العلماء تأثيراً في التاريخ.

وكان أيضاً شخصية شديدة التعقيد: لم يكن رياضياً وفيزيائياً فحسب، بل خيميائياً ولاهوتياً. وقضى عقوداً في دراسة التسلسل الزمني للكتاب المقدس والتحول الخيميائي، وإن بقيت هذه الأبحاث غير منشورة في حياته. وكان عضواً مؤسساً في الجمعية الملكية، ثم تولى رئاستها، وشغل كذلك منصباً حكومياً نافذاً هو رئيس دار السك الملكية. ويعكس اتساع نشاطه، من العلم الصارم والتأمل الصوفي إلى القيادة المؤسسية والخدمة الوطنية، ثراء المشهد الفكري في القرن السابع عشر وتناقضاته.

وتأتي فيما يلي مناقشات مركزة لإسهامات نيوتن في الرياضيات والفيزياء والميكانيكا. وتؤكد هذه الأقسام الفرعية الأسس التقنية التي ثبتت دوره في تشكيل الرؤية العلمية الحديثة للعالم.

الرياضي ولد إسحاق نيوتن يوم عيد الميلاد في عام وفاة غاليليو، وبرز شخصية شامخة في تاريخ العلم. وكان رياضياً وفيزيائياً وفلكياً ولاهوتياً، وشغل أستاذية الرياضيات في جامعة كامبريدج، ويعد على نطاق واسع أكثر العلماء تأثيراً في التاريخ.

حتى تدخل نيوتن، سادت الميكانيكا الأرسطية: إذ اعتقد أن الأجسام *تسعى* إلى حالتها الطبيعية من السكون. وغير نيوتن هذه النظرة جذرياً بقوله إن الجسم يبقى في حركة منتظمة ما لم تؤثر فيه قوة خارجية، فوضع القصور لا السكون في صميم الحركة. وأعادت هذه المراجعة، المرتبطة بمعالجته الرياضية الواضحة للاحتكاك والمقاومة، تعريف مفهوم القوة.

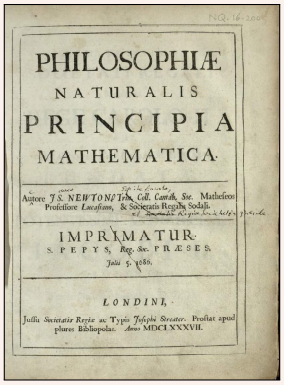
وكان كبلر قد صاغ في الفلك قوانينه التجريبية الثلاثة لحركة الكواكب، استناداً إلى رصود تيخو براهي الدقيقة . لكن إطاراً نظرياً موحداً كان مفقوداً. وجاء حافز اختراق نيوتن عام 1684 حين زاره الفلكي إدموند هالي بسؤال حاسم: أي منحنى سيرسمه كوكب إذا اتبعت قوة الجاذبية قانون التربيع العكسي مع المسافة؟ فأجاب نيوتن فوراً: «قطع ناقص»، مدعياً أنه حسب ذلك من قبل. ولما لم يجد عمله الأصلي، وعد هالي بإرسال الاشتقاق، مما أدى إلى تأليف في *حركة الأجسام في المدار*. وأثارت هذه الرسالة، التي برهنت رياضياً أن المدارات الإهليلجية تنشأ طبيعياً من تجاذب يتبع التربيع العكسي، إعجاب هالي حتى حث نيوتن على توسيعها. وكانت النتيجة مؤلف نيوتن الضخم لعام 1687، *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687 PDF)، الشكل 6.15a. وفيه اشتق بصورة منظمة قوانين الحركة والجاذبية العامة، وواصل بين ميكانيكا الأرض وديناميكا السماء بمجموعة مبادئ واحدة متماسكة.

تؤسس قوانين الحركة الثلاثة التي قدمها *المبادئ الرياضية* للميكانيكا الكلاسيكية والهندسة معاً، وستحلل بتفصيل تقني أكبر لاحقاً في هذا الكتاب. وكانت إسهامات نيوتن في البصريات، ولا سيما في الرياضيات، عميقة بالقدر نفسه. غير أن نزاعه السيئ الصيت مع لايبنتس حول اختراع حساب التفاضل والتكامل شوه إرثه الرياضي. فقد ظهرت نسخة نيوتن، القائمة على الكميات المتناهية الصغر والمعبر عنها بترميز *الفلوكسونات*[25] في مخطوطات منذ 1666، لكنها لم تعلن حتى 1693. وعلى النقيض بدأ لايبنتس استخدام التفاضلات عام 1675، وقدم الترميز الحديث $\int$ وdy/dx الذي أصبح معيارياً. وبينما يقر المؤرخون المعاصرون بتطوير الرجلين لحساب التفاضل والتكامل بصورة مستقلة، اتهم تحقيق الجمعية الملكية، الذي ترأسه نيوتن وكتبه سراً بنفسه،

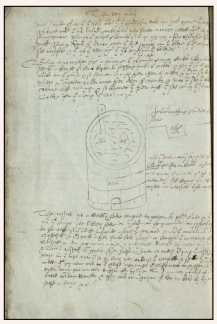
[24] يمتد هذا التوحيد أبعد في الفيزياء الحديثة: فميكانيكا الكم، التي طورت أولاً لوصف الظواهر الذرية ودون الذرية، لها تطبيقات أيضاً في الفيزياء السماوية، مثلاً في نمذجة باطن النجوم والأقزام البيضاء والنجوم النيوترونية وعمليات مثل النفق الكمومي في السياقات الفيزيائية الفلكية.

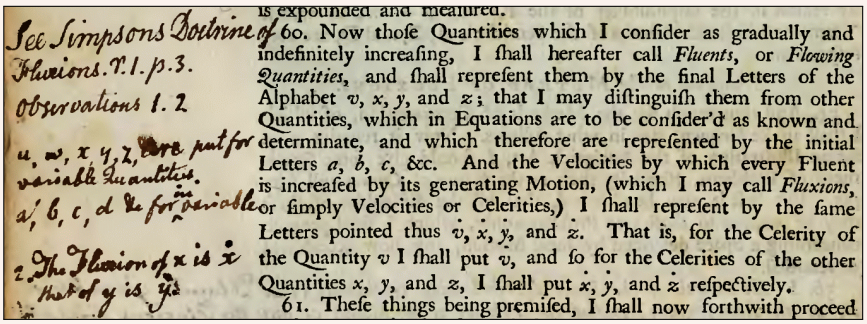
[25] سمى نيوتن الكميات المتغيرة زمنياً *كميات متدفقة*، ومعدلات تغيرها اللحظية *فلوكسونات*، ورمز إليها بنقطة فوق المتغير (مثلاً $\dot{x}$). وهذا يكافئ المشتقة الحديثة $\frac{dx}{dt}$، لكنه معبر عنه في إطار هندسي مؤسس على الزمن. وطور نيوتن هذا الأسلوب في منتصف ستينيات القرن السابع عشر، وإن لم ينشر إلا بعد وفاته في *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1736).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) صفحة غلاف *المبادئ الرياضية* (Newton, 1687) (PDF)





(c) الخيمياء

(b) الفلوكسون

شكل 6.15: إسحاق نيوتن

لايبنتس بـالانتحال. وكانت لهذا النزاع المرير عواقب دائمة على الرياضيات الأوروبية، إذ عزل الرياضيون البريطانيون أنفسهم إلى حد كبير عن تطورات القارة قرابة قرن، فأضروا بأنفسهم.

وفي مراسلاته مع لايبنتس، شفر نيوتن اكتشافاته بألغاز حرفية لإثبات الأسبقية مع حفظ السرية، مثل

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux

Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa أو

إذا أعطيت معادلة تشمل أي عدد من الكميات المتدفقة، فأوجد الفلوكسونات؛ والعكس.

”Newton, 1960 “*Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676*

وهو يلخص فعلياً النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل في صيغة مبهمة.

ونشأ نزاع شرس آخر مع روبرت هوك، الذي ادعى عام 1679 أن نيوتن أخذ منه قانون التربيع العكسي للتجاذب. ومع أن هوك صاغ بصيرة كيفية، لم يطورها رياضياً قط. وحول *المبادئ الرياضية* الفكرة إلى قانون كمي عام للجاذبية. ويرفض معظم المؤرخين تهمة الانتحال، لكن التنافس ترك أثراً لا يمحى في إرث الرجلين.

وعلى الرغم من مكانة *المبادئ الرياضية* الأسطورية اليوم، كاد ألا ينشر. فلم يستطع نيوتن ولا الجمعية الملكية تمويله. وتكفل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الفلكي إدموند هالي بالتكاليف في نهاية المطاف، فلم يمول الطباعة فحسب، بل تولى التوزيع أيضاً. وأرسل هالي نسخاً إلى نيوتن لاستعماله الشخصي، وعمل من خلال بائعي الكتب لضمان انتشار أوسع (Cohen, 2013). وتوضح هذه الحلقة كيف اعتمدت حتى أعظم الأعمال العلمية على العلاقات الشخصية والمبادرة الفردية لتنتشر.

ويجدر تصحيح تصور شائع خاطئ عن قانون نيوتن الثالث. فكثيراً ما يحرف إلى «لكل فعل رد فعل مساو له ومعاكس»، بما يوحي بزوج من القوى المتوازنة ذاتياً على الجسم نفسه. والحقيقة أن القانون يقول إنه إذا أثر الجسم A في الجسم B بقوة F_a، أثر الجسم B في الجسم A بقوة F_b مساوية ومعاكسة. ولما كانت القوتان تؤثران في جسمين مختلفين، فإنهما لا تعنيان الاتزان (Cohen, 2002).

الخيميائي أخيراً وليس آخراً، انخرط نيوتن بعمق أيضاً في الخيمياء، التي كانت تسمى آنذاك *chymistry*[26]. وكان من أهدافها الرئيسية اكتشاف حجر *الفلاسفة* ، وهو مادة أسطورية اعتقد أنها تحول المعادن الوضيعة إلى ذهب. وكان مسعى ثانوي آخر هو *إكسير الحياة* ، الذي قيل إنه يمنح طول العمر أو الخلود.

قد تبدو هذه الأهداف خيالية للقارئ الحديث، لكن الخيمياء لم تعد هامشية أو علماً زائفاً في القرن السابع عشر. بل كانت مسعى فكرياً جاداً ومشروعاً، يتداخل مع ما سيصير لاحقاً الكيمياء الحديثة وعلم المعادن والطب. وشارك فيها فلاسفة طبيعيون كثيرون، منهم بويل وغلاوبر وحتى كبلر. وجمعت الخيمياء التجريب العملي بفلسفة هرمسية متجذرة في التقاليد الكلاسيكية والصوفية. وتبدو لغتها الرمزية وأطرها المجازية مبهمة اليوم، لكن طرائقها شملت في أحيان كثيرة عملاً مخبرياً حقيقياً بالأفران والبواتق وأجهزة التقطير. ومن جوانب كثيرة، وفرت الممارسة الخيميائية تقنيات تجريبية ومهارات مخبرية حاسمة دمجت لاحقاً في الكيمياء الحديثة وعلم المواد.

وكان عمل نيوتن الخيميائي منظماً وواسعاً. ففي غضون عقد جمع *الفهرس الكيميائي*، وهو قائمة أبجدية بالمواد والعمليات والمصطلحات المجازية استخلصها من قراءته لأكثر من 150 رسالة خيميائية (Newton, 1680). وأجرى تجارب كثيرة في السر، قاصداً فك وصفات القدماء والكشف عن التركيب الحقيقي للمادة. ولم يشارك هذه الأنشطة علناً في حياته، جزئياً لأن الخيمياء كانت تعمل عند حافة الاحترام الأكاديمي، وجزئياً لارتباطها بالسرية والقوة.

وبعد وفاته عام 1727، عدت مخطوطات نيوتن الخيميائية «غير صالحة للطباعة»، وظلت محجوبة إلى حد كبير عن الجمهور. ولم يبدأ الباحثون فحص هذه الكتابات بصورة منظمة إلا في القرن العشرين. واليوم لا ينظر إلى انغماس نيوتن في الخيمياء بوصفه انحرافاً عن العلم، بل انعكاساً لمدى نفاذ الحدود بين العلم والفلسفة والتصوف بعضها إلى بعض في العصر الحديث المبكر.

وقد يظل من الصعب على القارئ الحديث التوفيق بين عبقرية نيوتن العلمية وتفانيه في مجال كثيراً ما يساء فهمه أو يستبعد. لكن في هذا التجاور تحديداً نلمح الطابع الانتقالي لفكر القرن السابع عشر، عالم تعايشت فيه الرياضيات الصارمة والتأملات الميتافيزيقية والكيمياء التجريبية في عقل واحد. وتذكرنا مساعي نيوتن الخيميائية بأن أكثر العقول العلمية عقلانية تعمل ضمن السياقات الثقافية والفكرية لعصرها، وأن حدود ما نعده «علمياً» تغيرت تغيراً جذرياً عبر القرون.

عالم المرونة؟ لم يؤد نيوتن إلا دوراً محدوداً في التطور التاريخي لنظرية المرونة (Todhunter **and** Pearson, 1893). لكنه طرح في مؤلفه المتأخر *البصريات* (Newton, 1717) سلسلة من «الاستفسارات» التأملية، يقدم الاستفسار الحادي والثلاثون منها، عن «التجاذبات الاختيارية»، اقتراحاً بأن قوى الجذب بين الجسيمات الصغيرة قد تكون أساس الظواهر العيانية.

> فمن المعروف جيداً أن الأجسام يؤثر بعضها في بعض بتجاذبات الجاذبية والمغناطيسية والكهرباء؛ وتبين هذه الأمثلة نهج الطبيعة ومسارها، وتجعل من غير المستبعد وجود قوى تجاذب أخرى غيرها. فالطبيعة شديدة الاتساق والتوافق مع ذاتها.
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[الاستفسار 31]

[26] كان مصطلح *chymistry* في القرن السابع عشر يشير إلى مجال واسع يشمل الخيمياء التأملية والكيمياء التجريبية الناشئة معاً. ولم يكن بعد العلم التجريبي الكامل الذي نعرفه اليوم، بل مزيجاً من علم المعادن العملي والفلسفة الصوفية والممارسة المخبرية المبكرة. ولم ينفصل مصطلح *chemistry* الحديث انفصالاً تاماً عن *alchemy* حتى القرن الثامن عشر.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وفي هذا الاستفسار، يتصور نيوتن المادة كلها مؤلفة من جسيمات صلبة مكدسة تراخياً، لا تكاد تتلامس إلا عند نقاط قليلة. ثم يقدم حدساً مبكراً للتماسك والسلوك المرن:

> قد تتماسك جسيمات المادة الصغيرة بأقوى التجاذبات، فتؤلف جسيمات أكبر أضعف قوة؛ وقد يتماسك كثير منها فيؤلف جسيمات أكبر لا تزال قوتها أضعف؛ وهكذا في تعاقبات متنوعة إلى أن ينتهي التدرج عند أكبر الجسيمات، التي تعتمد عليها عمليات الكيمياء وألوان الأجسام الطبيعية، والتي تؤلف بالالتصاق أجساماً ذات مقدار محسوس. فإذا كان الجسم متراصاً، وانحنى أو خضع إلى الداخل تحت الضغط من دون انزلاق أجزائه، فهو صلب ومرن، يعود إلى شكله بقوة ناشئة من التجاذبات المتبادلة بين أجزائه.
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[الاستفسار 31]

ويستبق هذا المقطع المحاولات اللاحقة لربط الاستجابة المرنة العيانية بقوى الجذب الداخلية. وباستثناء هذه البصيرة التأملية، يقع إسهام نيوتن الآخر الوحيد المعروف في المرونة في مقطع موجز من *المبادئ الرياضية* يتناول تصادم الأجسام المرنة. وظل أثره في التطور الصوري لنظرية المرونة محدوداً.

وستظهر الصياغة الرياضية الصارمة للمرونة في القرون التالية. وكان قانون هوك التجريبي الذي يربط القوة بالإزاحة في النوابض، والمنشور أول مرة عام 1678، خطوة مبكرة حاسمة (انظر §6.12). ثم قدم أوغستان-لوي كوشي الإجهاد وصاغ الاتزان في الأوساط المتصلة؛ ووسع كلود-لوي نافييه هذه الأفكار إلى نظرية خطية منظمة ما زالت مستخدمة في الميكانيكا الإنشائية إلى اليوم.

المبادئ الرياضية والإطار النيوتني للتحليل الإنشائي حقق إسحاق نيوتن (1642–1727) (Newton, 1687) التوليف الكبير الذي وحد ميكانيكا الأرض والسماء، وأرسى الإطار المفاهيمي الذي يعمل داخله كل تحليل إنشائي لاحق. وصاغ كتابه *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*، أي المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية، المنشور أول مرة عام 1687، قوانين الحركة والجاذبية العامة التي تحكم ظواهر تبدأ من سقوط التفاح إلى دوران الكواكب، والأهم للهندسة من انحراف العوارض إلى انهيار المنشآت.

وتوفر قوانين نيوتن الثلاثة للحركة أساس الميكانيكا الإنشائية. فالقانون الأول، القصور، يقرر أن الأجسام تبقى ساكنة أو في حركة منتظمة ما لم تؤثر فيها قوى، وهو الأساس المفاهيمي للاتزان الاستاتيكي. ويكمم القانون الثاني العلاقة بين القوة والكتلة والتسارع، فيتيح التحليل الديناميكي للمنشآت المعرضة لأحمال متغيرة زمنياً. ويضمن القانون الثالث أن قوى التفاعل تقع في أزواج متساوية ومتعاكسة على أجسام مختلفة، وهو مبدأ ضروري لتحليل الجسم الحر وتحديد ردود الأفعال.

وتختزل قوانين نيوتن للمنشآت الاستاتيكية إلى شروط الاتزان: يجب أن ينعدم المجموع المتجهي للقوى كلها ($\sum \mathbf{F} = 0$)، وأن ينعدم مجموع العزوم حول أي نقطة ($\sum \mathbf{M} = 0$). وتتيح هذه العلاقات، عند تطبيقها بصورة منظمة، تحليل الجمالونات والعوارض والإطارات والأقواس وغيرها من الأشكال الإنشائية. وكل مخطط جسم حر يرسمه مهندس إنشائي هو تطبيق للميكانيكا النيوتنية.

وقدم *المبادئ الرياضية* أيضاً الجهاز الرياضي، أي حساب الفلوكسونات المعروض في صورة هندسية، الذي أتاح لاحقاً تحليل الأنظمة المتصلة. فالمعادلات التفاضلية التي تحكم انحراف العوارض واستقرار الأعمدة والديناميكا الإنشائية تعبيرات عن الميكانيكا النيوتنية مطبقة على أجسام قابلة للتشوه. وإلى جانب النتائج بعينها، أرسى نيوتن مثال الميكانيكا العقلانية: نظام رياضي متسق ذاتياً قادر على التنبؤ بالسلوك الفيزيائي من المبادئ الأولى. ويقوم مشروع الهندسة الإنشائية على هذا الاقتناع: يمكن تحليل المنشأ قبل بنائه والتنبؤ باستجابته لأحمال لم يختبرها قط، لأن القوانين نفسها تحكم جميع الظواهر الميكانيكية.

6.6.8 غوتفريد لايبنتس (1646–1716)

ولد غوتفريد فيلهلم لايبنتس عام 1646 في لايبزيغ، ابناً لأستاذ في الفلسفة الأخلاقية. وتيتم صغيراً، فأتيح له دخول مكتبة أبيه الواسعة بلا قيد، وثقف نفسه بقراءة واسعة في الأدب الكلاسيكي والفلسفة والمنطق والرياضيات والقانون. وعززت هذه النشأة العصامية إلى حد كبير اتساعاً فكرياً استثنائياً وإيماناً دائماً بوحدة المعرفة. وتلقى لايبنتس تعليماً نظامياً في القانون لا الرياضيات، فطور أفكاره العلمية مستقلاً عن التعليم الأكاديمي، وتعامل مع الرياضيات بوصفها لغة رمزية قادرة على التعبير عن حقائق عامة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وشكل هذا الانغماس المبكر في المنطق والميتافيزيقا تأكيده اللاحق على الأنظمة الصورية والترميز والمناهج العامة، وهي سمات ميزت نهجه في الميكانيكا وحساب التفاضل والتكامل عن أسلوب نيوتن الأكثر هندسية وارتكازاً إلى الفيزياء.

موسوعي القرن السابع عشر كان غوتفريد فيلهلم لايبنتس موسوعياً ألمانياً، وفيلسوفاً ورياضياً، ضاهى نطاقه الفكري نطاق أي شخصية في القرن السابع عشر. وكان مفكراً لامعاً وكاتباً غزير الإنتاج، قدم إسهامات تأسيسية في المنطق والميتافيزيقا والقانون والتاريخ، وفي سياق هذا الفصل، الرياضيات والميكانيكا. وعلى خلاف كثير من معاصريه الذين تخصصوا في مجالات بعينها، رأى لايبنتس أن المعرفة كلها مترابطة، وأن التقدم في مجال يمكن أن يضيء مسائل في مجالات أخرى، وهي رؤية أثبتت خصوبتها البالغة في تطوير الفيزياء الرياضية.

سنوات التكوين وتأثير باريس في أوائل ربيع عام 1672 وصل إلى باريس مبعوث ألماني: كان لايبنتس، في منتصف عشرينياته آنذاك، يقوم بمهمة دبلوماسية لمولاه البارون فون بوينبورغ. وكانت الرحلة سياسية في ظاهرها، لكنها غيرته فكرياً. ففي باريس التقى مجتمعاً نابضاً من العلماء والفلاسفة. والأهم أنه التقى كريستيان هوينغنس، الذي أصبح مرشده في الرياضيات. وتحت توجيه هوينغنس انتقل لايبنتس من التأمل الفلسفي إلى التحليل الرياضي الصارم. وتوضح هذه الرعاية كيف عملت الشبكات الأوروبية غير الرسمية آليات حاسمة لنقل المعرفة الرياضية وتطويرها.

اختراع حساب التفاضل والتكامل طور لايبنتس في سنواته الباريسية (1672–1676) أسس ما أصبح حساب التفاضل والتكامل. وقدم عام 1675 الرمز $\int$ للتكامل وd للتفاضلات، وهما رمزان ما زالا مستخدمين عالمياً اليوم. وعلى خلاف نيوتن، الذي استخدم ترميز *الفلوكسونات* ونشر على مضض، سارع لايبنتس إلى نشر نتائجه وتداولها، وهو اختلاف في الممارسة العلمية ساعد في إشعال النزاع المرير على الأسبقية (انظر §6.6.7). وقابل استعداد لايبنتس لمشاركة الاكتشافات علناً سرية نيوتن، وأفاد في نهاية المطاف التطور الأوسع للتحليل الرياضي.

نزاع الأسبقية في حساب التفاضل والتكامل خالفت رؤية لايبنتس للكميات المتناهية الصغر بوصفها كميات مثالية حجج نيوتن الهندسية. ومع اتفاق الباحثين المعاصرين على أن الرجلين طورا الحساب بصورة مستقلة، اتهم أنصار نيوتن، ولا سيما الجمعية الملكية في تقرير كتبه نيوتن سراً، لايبنتس بالانتحال. واستقطبت القضية المجتمعات العلمية في أنحاء أوروبا، وعكرت العلاقات بين الرياضيين البريطانيين والقاريين عقوداً. وكانت لهذا النزاع عواقب عميقة على تطور الرياضيات، إذ ازداد عزل الرياضيين البريطانيين عن تقدم القارة، فعاق ذلك تقدمهم أنفسهم.[27]

الميتافيزيقا والآلية إلى جانب حساب التفاضل والتكامل، قدم لايبنتس رؤية ميكانيكية للعالم متجذرة في مبادئ ميتافيزيقية. وكان مفهومه عن *الموناذات*، أي الوحدات غير القابلة للانقسام والشبيهة بالنفوس، محاولة للتوفيق بين الآلية وتفسير فلسفي للوحدة والانسجام المقرر سلفاً. ومع تجريده، ألهم هذا العمل مفكرين لاحقين في العلم والفلسفة معاً، منهم كانط، وبصورة غير مباشرة بعض جوانب نظرية الحقول.

الحاسبة الميكانيكية والاهتمامات الهندسية تعاون لايبنتس مع المهندسين وسعى إلى ابتكارات عملية. وصمم *الحاسب المتدرج*، وهو آلة حاسبة ميكانيكية تستطيع الضرب والقسمة، مبنياً على آلة بليز باسكال السابقة للجمع. ومع نقصها الميكانيكي، كانت محاولة جريئة لأتمتة الحساب، وكثيراً ما تعد سلفاً لآلات الحوسبة اللاحقة. ويبين هذا العمل اقتناع لايبنتس بأن للرياضيات النظرية تطبيقات عملية، وهي رؤية ستصبح مركزية في العلوم الهندسية.[28]

المنطق الرمزي واللغة العامة استبقت رؤيته للغة علمية عامة، *characteristica universalis*، مقترنة بحساب منطقي صوري، *calculus ratiocinator*، تطورات في المنطق الرمزي وعلم الحاسوب بعد قرون. وقصدت هذه الجهود اختزال الاستدلال إلى حساب، وأثرت في مفكرين لاحقين مثل بول وفريغه وتورينغ.

القوة الحية ونقاشات الانحفاظ قدم لايبنتس في الميكانيكا مفهوم *vis viva*، أي «القوة الحية»، المتناسب مع mv^2، بوصفه كمية محفوظة في العمليات الميكانيكية. ووضعه ذلك في خلاف مع المدرسة النيوتنية التي أكدت كمية الحركة (mv) بوصفها الكمية المحفوظة الأساسية. واستمر النقاش طويلاً حتى القرن التاسع عشر، وأسهم في النهاية في الفهم الحديث لانحفاظ الطاقة. وكان لهذا الإدراك المبكر لانحفاظ الطاقة أهمية حاسمة في الديناميكا الحرارية اللاحقة والتحليل الهندسي للآلات والمنشآت.

---

[27] نشأ نزاع بالحدة نفسها في الهندسة الجيوتقنية بين كارل ترزاغي وباول فيلونغر في ثلاثينيات القرن العشرين، بشأن الأسس الرياضية لميكانيكا التربة وصحة مبدأ الإجهاد الفعال، (Goodman, 1999). وأصبح الجدل شديد الخصوصية ومشحوناً سياسياً، وانتهى نهاية مأساوية بوفاة فيلونغر، وشكلت تداعياته مسار أبحاث ميكانيكا التربة وقبولها عقوداً.

[28] يمكن رؤية مثال حديث لهذه الفلسفة في عمل بنوا ماندلبرو، الذي وجدت هندسته الكسيرية، وهي بناء نظري أصلاً، تطبيقات واسعة في الهندسة، من نمذجة السطوح الخشنة والأوساط المسامية إلى تحسين معالجة الإشارة وتصميم الهوائيات.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المعادلات التفاضلية والنمذجة الفيزيائية أرسى لايبنتس أيضاً أساس استخدام المعادلات التفاضلية لنمذجة الأنظمة الديناميكية. وأتاح وضوح ترميزه وصياغته الجبرية التعبير المنظم عن التغير والقانون الفيزيائي، وهما أداتان أصبحتا مركزيتين في الميكانيكا التي طورها أويلر ولاغرانج وغيرهما.

الرؤية المؤسسية والدبلوماسية العلمية أدى لايبنتس دوراً مهماً في تأسيس أكاديميات علمية، منها ما سيصبح أكاديمية برلين. ودعا إلى توحيد الجهود العلمية عبر الحدود الوطنية، مستبقاً شبكات التعاون الدولي الحديثة. وتعكس رؤيته المؤسسية فهماً أن التقدم العلمي لا يتطلب العبقرية الفردية وحدها، بل هياكل منظمة للتعاون المستدام أيضاً.[29]

الإحالات المتقاطعة والتأثير تحيل مواضع متعددة في هذا المجلد إلى تفاعلات لايبنتس مع نيوتن (§6.6.7)، وتتلمذه على هوينغنس (§6.6.4)، وأصدائه عند شخصيات لاحقة مثل كوشي وأويلر، اللذين ساعدا في وصل الصرامة الرياضية بالحدس الفيزيائي.

حساب التفاضل والتكامل والتفكير التغايري والإرث الهندسي شارك غوتفريد فيلهلم لايبنتس (1646–1716) (Leibniz, 1969) في تطوير حساب التفاضل والتكامل بصورة مستقلة عن نيوتن، وقدم الترميز والإطار المفاهيمي اللذين أصبحا معياريين في رياضيات القارة، ثم في التحليل الهندسي عالمياً. وأرست إسهاماته في الميكانيكا، وإن كانت أقل شهرة من إسهامات نيوتن، مبادئ تغايرية أصبحت أدوات ضرورية في التحليل الإنشائي.

وكان ترميز لايبنتس، dx وdy و$\int$ وd/dx، عملياً للحساب أكثر كثيراً من فلوكسونات نيوتن، وهو مستخدم عالمياً اليوم. وجعل تطويره المنظم لقواعد التفاضل والتكامل، المعروض في أوراق منذ ثمانينيات القرن السابع عشر، حساب التفاضل والتكامل متاحاً للرياضيين والمهندسين في أنحاء أوروبا. وعمل آل برنولي وأويلر ولاغرانج والأجيال اللاحقة من الميكانيكيين جميعاً داخل إطار لايبنتس.

وإلى جانب الترميز، أسهم لايبنتس بمفاهيم أساسية في الميكانيكا. فقد بدأ مبدؤه في *vis viva*، أي ما نسميه اليوم الطاقة الحركية، النهج القائم على الطاقة في الميكانيكا، المكمل لصياغة نيوتن القائمة على القوى. ووفر إدراك أن كميات بعينها، كالطاقة والشغل، تحفظ في العمليات الميكانيكية أدوات قوية لتحليل الأنظمة التي يصعب فيها التحليل المباشر للقوى.

وانخرط لايبنتس أيضاً في أسس الميكانيكا، فناظر نيوتن وأتباعه بشأن طبيعة المكان والزمن والقوة. واستبق مبدأ السبب الكافي لديه، أي أن لا شيء يحدث بلا سبب، المبادئ التغايرية: فمن بين جميع الحركات الممكنة تختار الطبيعة حركة تجعل كمية ما قيمة قصوى أو دنيا. وقد طور أويلر ولاغرانج وهاملتون هذا المسار الفكري رياضياً، فأدى إلى مبدأ الفعل الأصغر والصيغ التغايرية التي تقوم عليها الميكانيكا الإنشائية الحديثة.

ويشمل إرث لايبنتس للهندسة الإنشائية جهاز حساب التفاضل والتكامل، ومفاهيم الطاقة الكامنة وراء طرائق الشغل الافتراضي وطاقة الانفعال، والإطار التغايري الذي يتيح تحليل العناصر المحددة. وشكل التقليد اللايبنتسي، التحليلي والمنظم والموجه حسابياً، تطور الميكانيكا الإنشائية في القارة، وساعد من خلال المدرسة متعددة التقانات وخلفائها في إرساء النهج الرياضي للهندسة السائد اليوم.

6.6.9 أسرة برنولي (1654–1782)

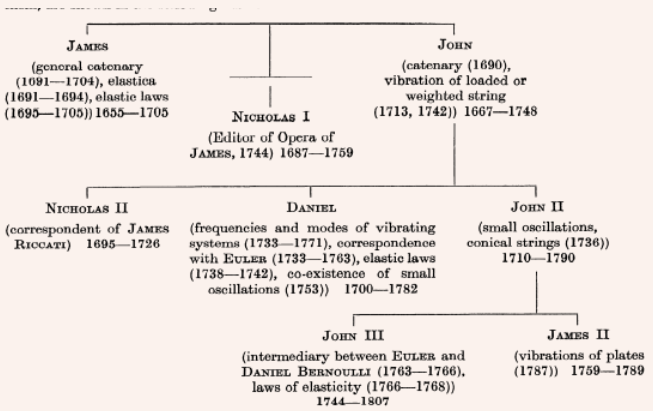
هرب ياكوب برنولي، تاجر توابل، من هولندا اتقاءً للاضطهاد الديني الإسباني، وانتقل إلى بازل في سويسرا عام 1620، وكانت آنذاك مركزاً تجارياً رئيسياً في أوروبا الوسطى، حيث منح الجنسية عام 1622. ونجح ياكوب وابنه نيكلاوس أولاً كتاجرين وازدهرت أعمالهما. ويعكس انتقال الأسرة من التجارة إلى الرياضيات التغيرات الاجتماعية الأوسع في القرن السابع عشر، حين أتاح الرخاء التجاري فرصاً للبحث الفكري، وأصبحت المهارات الرياضية متزايدة القيمة للملاحة والهندسة والفلسفة الطبيعية.

وكان أحفاد نيكلاوس (1623–1708) هم الذين أصبحوا رياضيين بارزين لأكثر من قرن. وأشهرهم ابناه ياكوب ويوهان، وحفيده دانيال.

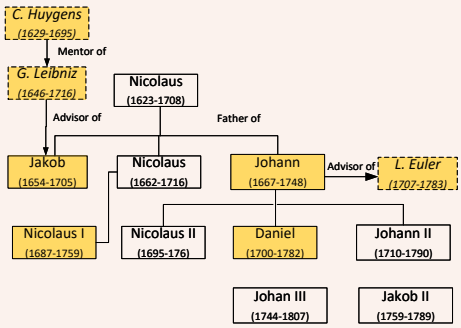
[29] تظهر موازاة حديثة في المبادرات البحثية الواسعة التي تمولها المؤسسة الوطنية للعلوم في الولايات المتحدة (NSF)، مثل شبكة جورج إي. براون الابن لمحاكاة هندسة الزلازل (NEES) وخليفتها بنية أبحاث هندسة الأخطار الطبيعية (NHERI). وتجمع هذه البرامج فرقاً متعددة المؤسسات من الجامعات والمختبرات الوطنية والصناعة لمعالجة تحديات هندسية معقدة، بتجميع الخبرة والموارد والمنشآت التجريبية بطرق لا يستطيعها باحث واحد.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن الجدير بالذكر أن لايبنتس علم يوهان، الذي علم بدوره أويلر، فكونوا سلالة فكرية لافتة شكلت الرياضيات الحديثة. وتبين سلسلة التوجيه هذه كيف انتقلت المعرفة الرياضية عبر العلاقات الشخصية والتعليم المباشر، وأنشأت تقاليد متصلة للفكر الرياضي امتدت عبر الأجيال والحدود الوطنية. لو كان للميكانيكا عائلة مالكة، لحكمها آل برنولي بلا شك[30]. غير أن سلالتهم لم تخل من



(Truesdell, 1960) b)، ملاحظة: يشار إلى ياكوب ويوهان برنولي أيضاً باسمَي جيمس وجون في المصادر الإنجليزية



(a)

شكل 6.16: شجرة أسرة برنولي، مع إبراز أفرادها الذين يناقشهم هذا الكتاب، ودائرتهم الفكرية

الدراما؛ فالتنافس الشديد والموثق جيداً بين ياكوب ويوهان مثال للمنافسة الشرسة التي ترافق العبقرية العظيمة أحياناً (Peiffer, 2006). وقد وثقت نزاعاتهم الأسرية حتى إنها توفر نافذة فريدة على الديناميات الشخصية التي دفعت المنافسة العلمية في العصر الحديث المبكر.[31]

وتجدر الإشارة إلى أن منصة برنولي-أويلر على الإنترنت (BEOL) تعمل مركزاً بحثياً متخصصاً لاستكشاف رياضيات العصر الحديث المبكر وعلومه. وهدفها الأساسي الدمج السلس للأعمال والمراسلات الواسعة لأبرز أفراد سلالة برنولي وللرياضي المؤثر ليونهارت أويلر.

6.6.9.1 ياكوب برنولي (1654–1705)

كان ياكوب برنولي أول رياضي في سلالة برنولي. وهو الابن الأكبر للتاجر الناجح نيكلاوس برنولي (1623–1708) وزوجته مارغريتا شوناور. وبإصرار أبيه، أكمل ياكوب درجة *ماجستير الآداب* في اللاتينية واليونانية والفلسفة عام 1671، ثم درس اللاهوت. وعلى الرغم من ولعه المتزايد بالرياضيات، ألزم بمواصلة اللاهوت، وحصل على درجة *الإجازة* عام 1676. وانضم لاحقاً إلى الخدمة الدينية في بازل، لكنه واصل طلب العلم عصامياً، فعلم نفسه الرياضيات والفلك من الكتب الأولية. وكان هذا النهج العصامي شائعاً بين أوائل الرياضيين، إذ ظل التعليم الرياضي النظامي ضعيف التطور في معظم الجامعات الأوروبية.

[30] في العصر الحديث ستكون «العائلة المالكة» هي آل كوري، وهم سلالة علمية نال أفرادها خمس جوائز نوبل بالمجموع. فقد تقاسم ماري وبيير كوري جائزة الفيزياء عام 1903 لعملهما على النشاط الإشعاعي. ونالت ماري كوري جائزة نوبل ثانية في الكيمياء عام 1911 لاكتشاف الراديوم والبولونيوم، فصارت الشخص الوحيد الذي يفوز بجائزتي نوبل في علمين مختلفين. وتقاسمت ابنتهما إيرين جوليو-كوري وزوجها فريديريك جوليو جائزة الكيمياء عام 1935 لتخليق عناصر مشعة جديدة. وشكلت إسهامات الأسرة فهمنا للفيزياء الذرية والكيمياء من أساسه، وأرست إرثاً علمياً متعدد الأجيال يضاهي هيمنة آل برنولي على الرياضيات والميكانيكا في القرنين السابع عشر والثامن عشر.

[31] استمرت المنافسات العلمية في العصر الحديث في تشكيل مسارات البحث، مثل التنافس الشديد بين جيمس واتسون ومجموعة روزاليند فرانكلين في كشف بنية الحمض النووي، أو النزاع الطويل بين ستيفن هوكينغ وليونارد سسكيند بشأن مفارقة معلومات الثقب الأسود. ومثل نزاع آل برنولي، جمعت هذه المنافسات رهانات نظرية عميقة بأبعاد شخصية قوية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الأسفار والنمو الفكري بدأ ياكوب في أغسطس 1676 السفر طلباً للإثراء الفكري. وكانت جنيف محطته الأولى، حيث أمضى عشرين شهراً يعلم فتاة كفيفة موهوبة، إليزابيث فالدكيرش (1660–1728)، واخترع لها نظاماً للكتابة[32]. وحضر مناقشات لاهوتية، وبدأ عام 1677 تسجيل تأملاته العلمية في دفتره *Meditationes* ومذكرات أسفاره في *Reisb uchlein*.

وانتقل برنولي من جنيف إلى فرنسا، أولاً إلى ليموزان معلماً لماركيز دو لوستانج، ثم إلى بوردو، وبعدها إلى مدن مثل نانت وسومور وباريس. وأتقن الفرنسية خلال هذه الفترة وتأثر بعمق بفلسفة ديكارت الطبيعية. وعاد لفترة قصيرة إلى بازل عام 1680 قبل أن يبدأ جولة استمرت ثمانية عشر شهراً في هولندا وإنجلترا. وفي لايدن حضر محاضرات في الرياضيات وألقاها. وتوضح هذه الأسفار الواسعة كيف انتشرت المعرفة الرياضية عبر الشبكات الشخصية، وكيف اكتسب الباحثون الشباب الخبرة بالسعي إلى مراكز التعليم الراسخة.

لقاءات علمية في لندن وصل برنولي إلى لندن في أغسطس 1682، حيث التقى جون فلامستيد (1646–1719) وروبرت هوك (1635–1703). وفي 12 أغسطس 1682 حضر اجتماعاً للجمعية الملكية تضمن تجربة عن مقاومة المواد. وسيؤثر تعرضه للنهج التجريبي في المسائل الميكانيكية تأثيراً عميقاً في عمله النظري اللاحق على المرونة.

العودة إلى بازل والمسيرة الأكاديمية استقر برنولي في بازل بعد عودته إلى سويسرا في أكتوبر 1683، وتزوج يوديت شتوبانوس عام 1684، وأنجبا طفلين. وكان اهتمامه قد تحول آنذاك إلى الفيزياء التجريبية، ربما بتأثير أعمال روبرت بويل (1627–1691). ومن 1683 إلى 1686 ألقى محاضرات في الفيزياء التجريبية، جمعت في *Collegium Experimentale sive curiosum*، وهي مجموعة من التجارب والتأملات الفيزيائية والميكانيكية، عرضت غالباً بأسلوب نقاشي أو تعليمي.

الإسهامات الرياضية والأستاذية ازداد نشر برنولي في الرياضيات بعد 1685، فدرس الطبعة اللاتينية الثانية من Descartes, 1637b وحساب لايبنتس للكميات المتناهية الصغر. وشملت أبحاثه الهندسة الجبرية والتفاضلية والمتسلسلات والاحتمالات وحساب التغاير والتكامل. وعين عام 1687 أستاذاً للرياضيات في جامعة بازل، وظل في المنصب حتى وفاته. وأكدت فلسفته للمعرفة بناء الفهم تدريجياً من أسس مستقرة. وأصبح هذا النهج المنظم لبناء المعرفة سمة لمدرسة بازل الرياضية ، وأثر في أجيال من الطلاب.

التعاون والتنافس مع يوهان علم ياكوب أخاه الأصغر يوهان (1667–1748) الرياضيات، ثم أصبح منافسه. وتعاونا أولاً حين كان ياكوب يدرس الفيزياء وكان يوهان يدرس الطب. وأتقنا معاً حساب لايبنتس التفاضلي في غضون أيام، وسرعان ما طبقاه على مسائل معقدة، منها تحليل المنحنيات. وساعد عملهما في تطوير المنهج إلى حد أن لايبنتس شكرهما علناً عام 1696. ويبين هذا الإتقان السريع موهبة الأخوين الرياضية وقوة التعلم التعاوني، حتى مع تدهور علاقتهما لاحقاً بفعل ضغوط المنافسة.

أسس الميكانيكا العقلانية أدت أبحاث ياكوب برنولي إلى أربع مسائل تأسيسية، يعدها Truesdell, 1968 معالم في تاريخ الميكانيكا العقلانية:

1. اشتقاق قانون الانحناء في شريط مرن من قانون استطالة الألياف الطولية.
2. تحديد موضع الليف المحايد في عارضة منحنية وطبيعة القوى المؤثرة في مقطع عرضي.
3. توحيد نظرية الخطوط المرنة، المحكومة باتزان القوى، مع نظرية الأشرطة المرنة، المحكومة باتزان العزوم.
4. تحديد الاستجابة المرنة للمواد.

وأرست هذه الإنجازات أساس النظرية الكلاسيكية للمرونة، ولا سيما تطوير *الإلاستيكا*، وهي نموذج رياضي للتشوهات الكبيرة في القضبان والعوارض النحيلة. واستبق عمل ياكوب الرائد على شكل المنحنيات المرنة إسهامات أويلر اللاحقة، الذي سيضفي بتحليله الصيغة النظامية على الموضوع.

الإلاستيكا والتحليل الإنشائي طرح برنولي مسألة *الإلاستيكا* عام 1691، وقدم حلها في أعمال متعاقبة توجت بمنشوره لعام 1694 *Curvatura Laminae Elasticae*، (Bernoulli, Jakob, 1694). وبين أن المنحنى الذي يتخذه شريط مرن رقيق ينحني تحت قوة طرفية يمكن وصفه بمعادلة تفاضلية. وبالاستدلال الهندسي ومفهوم الانحناء، اشتق علاقات بين عزم الانحناء والموضع على طول الشريط، وبرهن أن نصف قطر الانحناء يتغير مع المسافة العمودية من الحمل المطبق. ومثل تحليله، رغم

[32] لا يسع المرء إلا احترام والدي إليزابيث لإسناد تعليم ابنتهما الكفيفة إلى شخصية موهوبة كهذه في القرن السابع عشر.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعبيره بمزيج من صيغ الكميات المتناهية الصغر، خطوة كبرى في صياغة الاستقرار المرن والتشوه اللاخطي. وكان أول معالجة رياضية منظمة لسلوك الانحرافات الكبيرة في العناصر الإنشائية، مستبقاً التحليل اللاخطي الحديث بقرون.

التلقي والإرث أدرك كريستيان هوينغنس وغوتفريد لايبنتس كلاهما صعوبة مسألة *الإلاستيكا*. بل شك هوينغنس في إمكان حلها بأناقة، وإن أقر لاحقاً بإنجاز برنولي. وتبين هذه الانتقادات مدى تقدم بصيرة برنولي، مع بعض أوجه القصور، مثل افتراضه أن الليف المحايد يبقى بلا تشوه، وهو ما صححته نظرية المرونة الحديثة.

وسيظهر تحدي *الإلاستيكا* من جديد في القرن التالي. فقد اقترح دانيال برنولي النهج التغايري على ليونهارت أويلر، الذي عمم المسألة أخيراً باستخدام حساب التغاير. ومهد ذلك للنظرية الحديثة للاستقرار المرن والتحليل الإنشائي، وواصل بين أعمال آل برنولي ولايبنتس وهوينغنس وأويلر.

خلاصة: التجريبية والميكانيكا العقلانية إلى جانب صرامة ياكوب الرياضية، عكست طرائقه موقفاً فلسفياً وضع الملاحظة التجريبية والاستدلال المتدرج في صميم البحث العلمي. وعند Truesdell, 1968 PDF، تدين الميكانيكا العقلانية في إنشائها لياكوب برنولي بقدر ما تدين لنيوتن. ولم يستمر إرثه في أعماله وحدها، بل أيضاً في تأثيره في أخيه يوهان وتلميذه أويلر وأجيال الميكانيكيين الذين بنوا على أسسه المفاهيمية. وأرسى جمع ياكوب بين الملاحظة التجريبية والتحليل الرياضي منهجية ستصبح مركزية في العلوم الهندسية[33].

6.6.9.2 يوهان برنولي (1667–1748)

أدى يوهان برنولي، أخو ياكوب الأصغر وأبو دانيال، دوراً محورياً في نشر حساب لايبنتس وتطويره. وبعد أن عرفه ياكوب إلى الرياضيات، أصبح يوهان مناصراً متحمساً لحساب التفاضل ومن أوائل مستخدميه المنظمين في الفيزياء والميكانيكا. ومن إنجازاته البارزة حل مسألة أقصر زمن[34]، وأسهم في دراسة الخطوط الجيوديسية والسلاسل المعلقة وحركة الموائع. وكان حله لمسألة أقصر زمن، أي إيجاد منحنى أسرع انحدار، من أول التطبيقات الكبرى للطرائق التغايرية، وساعد في إرساء حساب التغاير فرعاً رياضياً جديداً.

شغل يوهان كرسي الرياضيات في خرونينغن، ثم خلف أخاه في جامعة بازل. وجاء تأثيره الأبقى من خلال طلابه، وأشهرهم ليونهارت أويلر، الذي وجهه منذ صغره. ويضم منشوره لعام 1713، *Opera Omnia*، كثيراً من أبرز إسهاماته في حساب التفاضل والتكامل والميكانيكا. وأكد نهجه التعليمي التطبيق العملي للتقنيات الرياضية على المسائل الفيزيائية، وهو نهج سيؤثر بعمق في أويلر والأجيال اللاحقة من الفيزيائيين الرياضيين، (Reddy, 2017).

6.6.9.3 فاصل: *Opera Omnia*

مع أن ياكوب ويوهان برنولي ولدا في السلالة الرياضية نفسها، فقد سلكا مسارين متداخلين لكن متميزين في تشكيل حساب التفاضل والتكامل والميكانيكا والاحتمالات. وتقدم أعمالهما المجموعة، المنشورة كل على حدة بعنوان *Opera Omnia*، سجلاً حاسماً لإرثهما الفكري. ويقدم الجدول أدناه توليفاً متقابلاً لإسهاماتهما الرئيسية، مستخلصاً من مجلدات *Opera Omnia*، الجدول 6.3.

6.6.9.4 دانيال برنولي (1700–1782)

ولد دانيال برنولي في خرونينغن بهولندا، الابن الثاني ليوهان برنولي وابن أخ ياكوب برنولي. ونشأ في أسرة غارقة في الرياضيات والبحث العلمي، وإن شاب التنافس علاقته بأبيه كثيراً. ووجه يوهان تعليم دانيال في الرياضيات أولاً، لكن مع نضج مواهب دانيال

[33] تجسد الهندسة الإنشائية الحديثة هذا التكامل في أنظمة مراقبة صحة المنشآت، مثل الأنظمة المستخدمة على الجسور الكبرى كجسر غولدن غيت، حيث تدمج بيانات المجسات الآنية، من انفعال وإزاحة واهتزاز، باستمرار مع نماذج العناصر المحددة ومعادلات الاستجابة الديناميكية للتحقق من التنبؤات النظرية وتحسين جدولة الصيانة.

[34] مسألة أقصر زمن: إذا أعطيت النقطتان A وB، فما المنحنى الذي تنزلق عليه جسيمة من A إلى B في أقصر زمن تحت تأثير الجاذبية وحدها؟ والحل منحنى دويري، وجده نيوتن وياكوب برنولي ولايبنتس ولوبيتال ويوهان برنولي نفسه، فكان لحظة تأسيسية في تطور حساب التغاير. وفي الملاحة الجوية، منحنى أقصر زمن هو مسار الطيران الأمثل على الكرة أو الإهليلج.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.3: إسهامات ياكوب ويوهان برنولي الرئيسية كما تعكسها *Opera Omnia*

المجال	السنة (النشر)	الإسهام / العمل	المؤلف
الاحتمالات	1713 (بعد وفاته)	*Ars Conjectandi*، رسالة تأسيسية في نظرية الاحتمالات تقدم قانون الأعداد الكبيرة	**ياكوب برنولي**
حساب التغاير	العقد الأول من القرن الثامن عشر	دراسات مبكرة للمسألة متساوية المحيط	
التحليل	ثمانينيات وتسعينيات القرن السابع عشر	تطوير مفكوكات المتسلسلات الأسية واللوغاريتمية	
الحساب / الأسس	تسعينيات القرن السابع عشر	مراسلات مع لايبنتس بشأن حساب التفاضل	
حساب التغاير	1697	*Meditationes de Curva Isochrona Paracentrica*، يحل مسألة أقصر زمن	**يوهان برنولي**
الميكانيكا / المعادلات التفاضلية	1710–1690	أعمال في ديناميكا الموائع والمعادلات التفاضلية، مثل النمو الأسي واللوالب اللوغاريتمية	
الثقافة الرياضية	العقد الأول من القرن الثامن عشر	تحديات وجدالات رياضية علنية، مثلاً ضد نيوتن وتايلور	
الرياضيات العامة	1740–1690	مراسلات مع نيوتن ولايبنتس وأويلر وأبنائه	

ونيلها الاعتراف، تحول فخر يوهان إلى استياء. وبلغ التوتر ذروته حين قدم يوهان، من دون اسمه، عملاً منافساً إلى مسابقات دخلها دانيال، بل حاول ادعاء الفضل في اكتشافاته. وتوضح هذه الدينامية الأسرية كيف أمكن لضغوط المنافسة في الثقافة العلمية للقرن الثامن عشر أن تشوه حتى أوثق العلاقات.

وعلى الرغم من هذه التحديات، تابع دانيال تعليماً واسعاً، فنال الدكتوراه في الطب والرياضيات معاً. وشغل مناصب أكاديمية في الفيزيولوجيا والرياضيات، وظل نشطاً فكرياً في مجالات متنوعة كميكانيكا الموائع والاحتمالات والمرونة والاقتصاد. واستقر في نهاية المطاف في بازل، حيث درّس ونشر جانباً كبيراً من أعماله المؤثرة.

واتسم دانيال بالتواضع والتعاون، وحافظ على صداقات وتبادلات علمية مع كبار علماء عصره، منهم أويلر الذي جمعته به مراسلات طويلة مثمرة. وناقضت روحه التعاونية تنافس أبيه تناقضاً حاداً، وساعدت في إرساء الثقافة العلمية الأكثر انفتاحاً التي ستطبع عصر التنوير.

إعادة الصياغة التغايرية لمسألة الإلاستيكا وسع دانيال برنولي، ابن يوهان وابن أخ ياكوب، إرث الأسرة في الميكانيكا بتقديم نهج تغايري لمسألة *الإلاستيكا* . وبينما كان ياكوب برنولي قد صاغ حالة *الإلاستيكا* المستطيلة وحلها في تسعينيات القرن السابع عشر بالاستدلال الهندسي وحساب التفاضل المبكر، اقترح دانيال تعميماً بعيد المدى.

للتفاصيل التحليلية، انظر الفصل 9

اقترح دانيال على ليونهارت أويلر في رسالة مؤرخة عام 1742 أن شكل قضيب مرن ينبغي أن يتحدد بتصغير طاقة وضعه المرنة. وعلى وجه التحديد، عبر عن الطاقة الكلية بتكامل يتضمن مربع الانحناء على طول العارضة. وأعادت هذه البصيرة صياغة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإلاستيكا بوصفها مسألة تغايرية، ففتحت الباب لاستخدام حساب التغاير في المرونة. وسيصبح هذا النهج القائم على الطاقة في نهاية المطاف أساس الطرائق الحسابية الحديثة في الميكانيكا الإنشائية، ومنها تحليل العناصر المحددة.

وعمل أويلر بهذا الاقتراح، فحل مسألة *الإلاستيكا* العامة بعد ذلك بقليل. وأنجبت معالجته ما نعرفه اليوم بنظرية عارضة أويلر–برنولي، وأصبحت تأسيسية في دراسة الاستقرار المرن والميكانيكا الإنشائية.

ومن ثم كان إسهام دانيال محورياً: فبإعادة تفسير تحد هندسي بوصفه مبدأ لتصغير الطاقة، وصل الميكانيكا الكلاسيكية بالطرائق التحليلية الحديثة. ووحدت بصيرته عمل ياكوب الرائد بالإطار التغايري الناشئ الذي سيهيمن على ميكانيكا القرنين الثامن عشر والتاسع عشر.

الديناميكا المائية وميكانيكا الموائع إلى جانب إسهاماته في المرونة، اشتهر دانيال برنولي بعمله في ميكانيكا الموائع. فقد أرست رسالته الصادرة عام 1738 *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii* (Bernoulli, Daniel, 1738) أساس دراسة سلوك الموائع، وقدمت ما يعرف اليوم بمبدأ برنولي، أي أن ازدياد سرعة المائع يحدث بالتزامن مع انخفاض الضغط أو طاقة الوضع.

وينطبق هذا المبدأ، المشتق من انحفاظ الطاقة، على طيف واسع من الأنظمة الميكانيكية، منها جريان الهواء فوق الأجنحة والجريان في الأنابيب والدورة الدموية. ومعادلة برنولي للجريان غير القابل للانضغاط وعديم اللزوجة أساسية اليوم في ميكانيكا الموائع، وهي علاقة رئيسية في الديناميكا المائية النظرية والتطبيقية معاً. وبين هذا العمل كيف يمكن تطبيق المبادئ الرياضية نفسها في فروع مختلفة من الميكانيكا، مؤكداً وحدة العلم الفيزيائي[35].

الاهتزازات الميكانيكية والاستقرار أسهم دانيال برنولي أيضاً في نظرية الاهتزازات الميكانيكية. فدرس الاهتزازات المستعرضة للقضبان المرنة وتراكب الأنماط التوافقية، مستبقاً تحليل فورييه. وكان تحليله للأنظمة المهتزة من أوائل ما جمع الاستدلال الميكانيكي بالأدوات التحليلية، ومهد للتطورات اللاحقة في الصوتيات والديناميكا الإنشائية ونظرية الموجات.

وأظهرت أبحاثه في استقرار المنشآت والتفاعل بين الحمل والتشوه والاستجابة الديناميكية مزيداً من اتساع بصيرته الميكانيكية. وأغنت هذه الأبحاث فهم استجابة الأنظمة للقوى المتغيرة، وهي مسألة محورية في الميكانيكا العقلانية. وأرسى عمله على الأنظمة المهتزة الأساس الرياضي لفهم الرنين والتضخيم الديناميكي، وهما ظاهرتان حاسمتان في التصميم الإنشائي الحديث[36].

الإرث في الميكانيكا ينبع إرث دانيال برنولي في الميكانيكا من قدرته على *توليف الهندسة والفيزياء والمبادئ التغايرية في إطار متماسك*. فقد وصل إرث ياكوب بمبادئ الطاقة في الميكانيكا الحديثة، وأفاد عمل أويلر التأسيسي، وأرسى أسساً جوهرية في تحليل الموائع والمنشآت معاً. ولا يزال اسمه مقترناً بنماذج نظرية رئيسية في الميكانيكا، من العوارض والموائع إلى الاهتزازات، مؤكداً مكانه المركزي في تطور المجال. ولعل الأهم أن نهج دانيال بين كيف يستطيع التحليل الرياضي توحيد ظواهر فيزيائية تبدو متباعدة تحت مبادئ مشتركة، وهي رؤية ستصبح مركزية في فيزياء وهندسة القرن التاسع عشر[37].

---

[35] فمثلاً تحكم المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة، $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$، ظواهر فيزيائية متنوعة: تذبذب كتلة على نابض، وحركة نواس عند الزوايا الصغيرة، واهتزاز الجزيئات في البلورات، وسلوك دوائر LC الكهربائية، وانتشار الموجات الصوتية. وتتيح هذه الوحدة الرياضية لبصائر من مجال واحد، كالنوابض الميكانيكية، إضاءة ظواهر في مجالات مختلفة تماماً، كالهندسة الكهربائية أو الفيزياء الجزيئية، فتجسد تجاوز العلاقات الرياضية الأساسية للحدود بين فروع الفيزياء.

[36] من الأمثلة الحديثة انهيار جسر تاكوما نارو‌ز عام 1940، حين سببت اهتزازات الرياح عند التردد الطبيعي للجسر فشلاً رنينياً كارثياً؛ وتصميم ناطحات السحاب المعاصرة، حيث يجب على المهندسين مراعاة الاهتزازات الناجمة عن الرياح واستخدام مخمدات كتلية مضبوطة، مثل المخمد ذي 660 طناً في تايبيه 101، لمقاومة آثار الرنين التي قد تجعل المباني غير قابلة للسكن أو غير مأمونة إنشائياً.

[37] تتبع ظواهر فيزيائية كثيرة الصيغة الرياضية العامة $\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u) + s$، حيث u متغير الحالة، وρ يمثل سعة التخزين، وD خاصية النقل، وs حد المصدر. وتحكم هذه المعادلة انتقال الحرارة، أي توزع درجة الحرارة؛ وانتشار الكتلة، أي حقول التركيز؛ والكهرباء الساكنة، أي الجهد الكهربائي؛ وجريان المياه الجوفية، أي الارتفاع الهيدروليكي؛ والتشوه المرن، أي الإزاحة؛ والحقول الكهرومغناطيسية، أي الجهد المغناطيسي؛ وانتشار الموجات الصوتية، أي الضغط. وتتيح الوحدة الرياضية تطبيق الطرائق العددية وتقنيات الحل نفسها على هذه المجالات الفيزيائية المتنوعة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.6.10 ليونهارت أويلر (1707–1783)

ولد ليونهارت أويلر في 15 أبريل 1707 في بازل، التي كانت آنذاك مركزاً مزدهراً للتعليم في الاتحاد السويسري. وكان أبوه باول أويلر قساً بروتستانتياً درس الرياضيات على ياكوب برنولي، أما أمه مارغريت بروكر فمن أسرة علماء. ومع أنه أعد أولاً لمسيرة كنسية، أظهر أويلر منذ صغره استعداداً استثنائياً للرياضيات. وعلمه أبوه المبادئ الأولية، لكن سرعان ما اتضح أن قدراته تتجاوز كثيراً ما يمكن أن يستوعبه التعليم اللاهوتي التقليدي.

من بازل إلى بلاطات أوروبا: السنوات المبكرة وسانت بطرسبرغ ولد ليونهارت أويلر[38]، وهو على الأرجح أكثر الرياضيين تنوعاً، وبالتأكيد أغزرهم إنتاجاً، ابناً لقس قرب بازل. والتحق بجامعة بازل عام 1720، وكانت آنذاك مركزاً مهماً للبحث الرياضي بفضل محاضرات يوهان برنولي المؤثرة، التي جذبت رياضيين شباباً من أنحاء أوروبا. وسرعان ما عرفت موهبة أويلر الاستثنائية، فقدم له برنولي إلى جانب محاضراته الرسمية تعليماً خاصاً أسبوعياً. ونال أويلر درجة الماجستير في السادسة عشرة، وقبل العشرين كان قد شارك في مسابقة دولية ترعاها أكاديمية العلوم الفرنسية ونشر أول ورقة علمية له. ويوضح هذا الاعتراف المبكر كيف بدأت شبكة الأكاديميات والمسابقات الأوروبية الناشئة تعرف الموهبة الرياضية وترعاها عبر الحدود الوطنية[39].

تأسست *Academia Scientiarum Imperialis Petropolitana*، أي أكاديمية العلوم الروسية، عام 1725 في سانت بطرسبرغ بأمر بطرس الأكبر في إطار حملته الأوسع لتغريب روسيا. وكان ابنا يوهان برنولي، نيكولاوس ودانيال، بين أول أعضاء هيئة التدريس المستقطبين[40]، وبعد انتقالهما إلى روسيا ساعدا أويلر في الحصول على منصب عضو مشارك. وانتقل أويلر إلى سانت بطرسبرغ في صيف 1727، وتمكن من التركيز حصراً على البحث الرياضي، بلا أعباء تدريسية أو إدارية[41]. وانضم إلى قسم الفيزياء في الأكاديمية عام 1730. وحين عاد دانيال برنولي إلى بازل عام 1733 بعد وفاة أخيه عام 1726، خلفه أويلر رئيساً لقسم الرياضيات. وأنشأت هذه الحركة بين الأكاديميات الأوروبية سوقاً دولية للمواهب الرياضية سرعت انتشار الأفكار والطرائق في أنحاء القارة.[42]

يجسد مسار أويلر المبكر نشوء الأكاديمية العلمية الحديثة: نظام يتعرف إلى الموهبة باكراً، ويرعاها عبر الحدود الوطنية، وينشئ فضاءات مؤسسية للعمل الفكري المركز. وسيصبح، بحسب الراجح، أغزر الرياضيين إنتاجاً في التاريخ، بإسهامات شملت الميكانيكا وحساب التفاضل والتكامل ونظرية الرسوم ونظرية الأعداد والفلك.

الانتقال إلى برلين ومولد حساب التغاير كتب أويلر أثناء وجوده في الأكاديمية الروسية بسانت بطرسبرغ كتابه الشهير في الميكانيكا *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*، أي الميكانيكا أو علم الحركة معروضاً تحليلياً (1736). وفي هذا العمل قدم طرائق تحليلية بدلاً من الاعتماد على الطرائق الهندسية التي استخدمها نيوتن، فكان نقطة تحول في صياغة الميكانيكا. وفي الفترة نفسها تقريباً بدأ أويلر دراسة المنحنيات المرنة، وهو موضوع سرعان ما قاده إلى إسهامات تأسيسية. ومثل هذا الانتقال من الطرائق الهندسية إلى التحليلية تغيراً في معالجة المسائل الميكانيكية، إذ أكد المعالجة الجبرية والمعادلات التفاضلية بدلاً من الإنشاءات الهندسية.

اعتلى فريدريك الثاني، الذي سيعرف لاحقاً بفريدريك العظيم، عرش بروسيا عام 1740. وكان راعياً للعلم والفلسفة، وسعى إلى جلب العلماء البارزين إلى الأكاديمية البروسية. وكان أويلر قد عرف آنذاك بوصفه من أبرز رياضيي أوروبا، فدعاه فريدريك إلى الانضمام إلى أكاديمية برلين. ومع تصاعد الاضطرابات السياسية في روسيا، قبل أويلر وانتقل إلى برلين في صيف 1741. ورغم

[38] بحلول أوائل عام 1783 كان قد نشر 530 دراسة، وارتفع العدد إلى 771 بحلول 1826. وفي عام 1844 اكتشف أحد أحفاد أحفاده مواد مخطوطة إضافية.

[39] يستمر هذا النمط اليوم، كما يتضح من تحول الحاصلين على نوبل وميدالية فيلدز بصورة معتادة إلى أعضاء أجانب في أكاديميات وطنية متعددة، مثل الجمعية الملكية أو الأكاديمية الوطنية للعلوم أو *Académie des Sciences*، ومن خلال التعاون العلمي الدولي الحديث والزمالات الزائرة وبرامج استقطاب المواهب العالمية التي تتجاوز الحدود الوطنية للاعتراف بالتميز العلمي ورعايته.

[40] كما تستقطب الجامعات «المرموقة» اليوم أعضاء هيئة التدريس من أنحاء العالم.

[41] على نحو يشبه الباحثين في معهد الدراسات المتقدمة في برنستون.

[42] يوازي هذا النمط التاريخي للحركة الفكرية في أوروبا برنامج إيراسموس الحديث للطلاب، الذي يسر منذ 1987 التبادل الأكاديمي بين المؤسسات الأوروبية، وأنشأ شبكات تتجاوز الحدود الوطنية وتسرع التلاقح بين الأفكار والطرائق والمناهج البحثية في أنحاء القارة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الانتقال، احتفظ بصلته بالأكاديمية الروسية، وواصل نشر أوراق كثيرة في *Commentarii Academiae Petropolitanae*، أي مذكرات الأكاديمية الروسية. وتبين هذه الحركة كيف عمل باحثو القرن الثامن عشر في فضاء فكري أوروبي، متنقلين بين البلاطات والأكاديميات مع ظهور الفرص.

واصل أويلر في برلين أبحاثه الغزيرة، ونشر بانتظام في المجلدات السنوية للأكاديميتين البروسية والروسية. وفي عام 1744 نشر عمله البارز *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio prob-lematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* ، أي منهج إيجاد الخطوط المنحنية ذات خواص القيم العظمى أو الصغرى، أو حل المسألة متساوية المحيط بأوسع معانيها، (Euler, 1744b). وكان أول كتاب في حساب التغاير، وضم في ملحقه أول معالجة منظمة للمنحنيات المرنة. ويقرأ القسم الافتتاحي من الكتاب:

> أدرك أعظم المهندسين منذ زمن بعيد أن المنهج المعروض في هذا الكتاب ليس بالغ النفع في التحليل نفسه فحسب، بل يساعد كثيراً في حل المسائل الفيزيائية أيضاً. فلما كان نسيج الكون في غاية الكمال وعمل خالق بالغ الحكمة، لا يحدث شيء على الإطلاق في الكون من دون أن تظهر فيه قاعدة ما للقيمة العظمى أو الصغرى. لذلك لا شك أن آثار الكون كلها يمكن تفسيرها بالنجاح نفسه من العلل الغائية بمنهج القيم العظمى والصغرى، ومن العلل الفاعلة ذاتها. ولهذه الحقيقة أمثلة دقيقة كثيرة هنا وهناك، حتى إننا لا نكاد نحتاج مزيداً لإثباتها؛ بل لا يبقى إلا أن نجد في كل نوع من المسائل العلمية الكمية التي تتخذ القيمة العظمى أو الصغرى، وهي مسألة تبدو أقرب إلى العلم الطبيعي، أي الفلسفة، منها إلى الرياضيات. ولما كانت هناك طريقتان لمعرفة آثار الطبيعة، إحداهما بالعلل الفاعلة وتسمى عادة المنهج المباشر، والأخرى بالعلل الغائية، يستخدم الرياضي كليهما بالنجاح نفسه.
>
> فإذا كانت العلل الفاعلة شديدة الخفاء، بينما تقل صعوبة إدراك العلل الغائية، حلت المسألة عادة بالمنهج غير المباشر؛ وعلى العكس يستخدم المنهج المباشر حين يمكن تحديد الأثر من العلل الفاعلة. لكن يجب قبل كل شيء بيان أن كل منهج يفتح طريقاً إلى الحل؛ ومن ثم لا يقوي أحدهما الآخر كثيراً فحسب، بل نجد أسمى المتعة في اتفاقهما. وهكذا اكتشف منحنى الحبل أو السلسلة المعلقة بطريقتين: إحداهما قبلياً من التحميل بفعل الجاذبية، والأخرى بمنهج القيم العظمى والصغرى، إذ أدرك أن الحبل يجب أن يتخذ انحناء يجعل مركز ثقله عند أدنى موضع ممكن. وبالمثل حدد انحناء الأشعة في وسط شفاف قبلياً، ومن مبدأ وجوب وصولها إلى نقطة معينة في أقصر زمن معاً. وقد قدم آل برنولي المشهورون وغيرهم أمثلة كثيرة أخرى كهذه...
>
> ومع ذلك ... كثيراً ما يصعب إدراك القيمة العظمى أو الصغرى، حتى إن كان الحل قد وجد قبلياً. وهكذا، مع أن الشكل المنحني الذي يتخذه شريط مرن معروف منذ زمن بعيد، لم ينجز أحد بعد بحث ذلك المنحنى بمنهج القيم العظمى والصغرى، أي بالعلل الغائية. ولذلك، لما أشار إليّ دانيال برنولي، الأشهر والأعمق بصيرة في هذا النوع الأرفع من العلم الطبيعي، إلى أن القوة الكلية المخزنة في الشريط المرن المنحني يمكن التعبير عنها بصيغة معينة يسميها قوة الوضع، وأن هذا التعبير يجب أن يكون قيمة صغرى في المنحنى المرن ...، لا يسعني أن أدع هذه الفرصة المرغوبة جداً لتوضيح فائدة منهجي تفوتني، وأنا أنشر أيضاً هذه الخاصية اللافتة للمنحنى المرن التي اكتشفها برنولي الشهير. ولما كانت هذه الخاصية تشمل مشتقات ثانية، فإن الطرائق المعالجة أعلاه لحل المسائل متساوية المحيط[43] لا تكفي لتطويرها.
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

يلخص هذا المقطع نهج أويلر الفلسفي في الميكانيكا: يمكن فهم الظواهر الطبيعية بالتحليل السببي ومبادئ المثالية معاً، وتتيح الرياضيات الوصول إلى كليهما.

سنوات برلين اللاحقة والعودة إلى روسيا كتب أويلر في برلين أعمالاً كبرى عدة، منها *Introductio in analysin infinito-rum* (1748). ويعد على نطاق واسع نصاً تأسيسياً للتحليل الرياضي الحديث. فقد عرّف فيه أويلر الدوال، وقدم الترميز الحديث للدوال الأسية والمثلثية، وعالج المتسلسلات اللانهائية بوصفها موضوعات تحليلية مركزية. وامتد تأثيره إلى القرن التاسع عشر، فشكل التحليل والدوال المركبة بل نظرية فوريه، ووفر أسساً نظرية لرياضيات الهندسة.

وبحلول 1759، أصبح أويلر الرئيس *الفعلي* للأكاديمية، وأثقلته مسؤوليات تنفيذية متزايدة. وكلف أثناء حرب السنوات السبع

[43] يمكن ترجمة المسائل متساوية المحيط في حساب التغاير ترجمة تقريبية بأنها أمثلة لمثالية تابع تحت قيد تكاملي.

أيضاً بتأمين التمويل لاستمرار العمل. وفي عام 1760 احتل الجيش الروسي المغير برلين ونهب منزل أويلر. واعتذر القائد الروسي وأمر بتعويضه؛ وأرسلت الإمبراطورة إليزابيث هدية إضافية زادت على خسائره. وتوضح هذه الحادثة الاحترام الدولي الذي حظي به أويلر ومثال الحياد العلمي القادر على تجاوز النزاعات الوطنية.

أصبحت كاترين الثانية إمبراطورة روسيا عام 1762. وكانت مناصرة قوية للعلم والتنوير، وسعت إلى إحياء أكاديمية العلوم الروسية. وبدأت مفاوضات لإعادة أويلر إلى سانت بطرسبرغ. وقدمت كاترين عرضاً أجزل من فريدريك الثاني، فعاد أويلر عام 1766 إلى روسيا بعد خمسة وعشرين عاماً مثمرة في برلين. واستقبل بحرارة في البلاط، وقدمت له كاترين منزلاً[44]. وبأمان مالي، كرس أويلر نفسه من جديد للبحث كاملاً.

وكان أويلر يقترب آنذاك من الستين، وقد تدهور بصره بشدة. فقد الرؤية في إحدى عينيه عام 1735، وتكون ساد في الأخرى أدى إلى عمى شبه كامل. ومع ذلك ازداد إنتاجه. ومن اللافت أن عدد الأوراق التي أنجزها سنوياً في هذه المرحلة الأخيرة تجاوز أي فترة سابقة[45]. وعمل مع مساعدين أملى عليهم شروحاً كاملة للمسائل وطرائق الحل[46]. وبين 1766 و1783 أنتج أويلر أكثر من 400 ورقة. وبعد أكثر من أربعين عاماً على وفاته، ظلت أكاديمية العلوم الروسية تنشر أعماله في مذكراتها السنوية. وتبين هذه الإنتاجية قدرات أويلر الذهنية وفعالية العمل العلمي التعاوني.

الإرث و*Opera Omnia* لا غرابة في أن عمل أويلر ظل أشهر وأعلى تقديراً في الاتحاد السوفييتي منه في جانب كبير من أوروبا الغربية حتى أواسط القرن العشرين. وفي عام 1907 أطلق مشروع تحريري ضخم بالتعاون بين لجنة أويلر السويسرية وأكاديمية العلوم في الاتحاد السوفييتي وأكاديمية العلوم في جمهورية ألمانيا الديمقراطية، التي عدت نفسها الخليفة القانوني للأكاديمية البروسية. ويعكس هذا التعاون الدولي لحفظ إرث أويلر استمرار أهمية عمله.

وأدى الجهد إلى نشر *Leonhardi Euleri Opera Omnia*، وهي الطبعة العلمية الحاسمة لأعمال أويلر الكاملة، المنظمة في ثلاث سلاسل:

1. الرياضيات (29 مجلداً)؛
2. الميكانيكا والفلك (31 مجلداً)؛
3. الفيزياء والمنوعات (12 مجلداً).

وعلى الرغم من الانقطاعات بسبب حربين عالميتين والقيود الاقتصادية اللاحقة، تكاد الطبعة المطبوعة، في 72 مجلداً، تكتمل. ووفق أحدث تحديث، لم ينشر سوى مجلدين في نظرية الاضطراب في الفلك (Kleinert, 2015).

يعد أويلر عالمياً واحداً من أعظم الرياضيين وأغزرهم إنتاجاً في التاريخ.[47] وقد أرست إسهاماته أسس تخصصات متعددة. ومع أكثر من 866 عملاً منشوراً واكتشافات شملت الرياضيات والفيزياء والفلك والهندسة، لا يضاهى تأثير أويلر. وكما أعلن بيير-سيمون لابلاس: «اقرؤوا أويلر، اقرؤوا أويلر، فهو معلمنا جميعاً».

ولعل الأروع أن أويلر يرتبط أيضاً بواحدة من أشهر المعادلات في الرياضيات، هوية أويلر:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{6.1}$$

وتوحد هذه الهوية خمسة ثوابت: e وi وπ و1 و0، وتجمع الجمع والضرب والأس في عبارة واحدة. وهي تنتج من صيغة أويلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ التي تصل الدوال الأسية بعلم المثلثات والتحليل المركب.

فهرس موجز للإسهامات الرياضية الكبرى تشمل إسهاماته التأسيسية:

[44] ما قد نسميه اليوم «حزمة بدء العمل».
[45] كما ألف بيتهوفن سيمفونيته التاسعة وهو أصم، لم يثن العمى أو العمر أويلر.
[46] على غرار ستيفن هوكينغ الذي اعتمد على المساعدين لتنفيذ مهام معقدة مع احتفاظه بالتحكم الإبداعي.
[47] من الرياضيين الآخرين الذين يذكرون كثيراً في نقاشات «الأعظم»: كارل فريدريش غاوس وأرخميدس وإسحاق نيوتن وغوتفريد فيلهلم لايبنتس وديفيد هيلبرت وهنري بوانكاريه وبرنهارد ريمان. ويكمن تميز أويلر جزئياً في إنتاجه؛ إذ تضم أعماله المجموعة، *Opera Omnia*، أكثر من 70 مجلداً.

الطوبولوجيا ونظرية الرسوم (1736) حل أويلر عام 1735 مسألة جسور كونيغسبرغ السبعة، وقدم *geometria situs*، أي هندسة الموضع، وأرسى أسس نظرية الرسوم والطوبولوجيا (Euler, 1741).

الترميز والرمزية الرياضية (1748) قدم أويلر رموزاً مثل e وi وπ و$f(x)$ وΣ، أو وحّد استخدامها، وكذلك الترميز الحديث لعلم المثلثات ($\sin$ و$\cos$ و$\tan$). وأسهم استخدامها المنظم في *Introductio in analysin infinitorum* إسهاماً حاسماً في تدويل الرياضيات (Euler, 1748).

أسس التحليل الحديث (1748) وضع أويلر في *Introductio in analysin infinitorum* مفهوم الدالة في مركز التحليل، وعالج المتسلسلات اللانهائية والدوال الأسية واللوغاريتمية وعلم المثلثات معالجة موحدة (Euler, 1748).

حساب التغاير (1744) أسس أويلر حساب التغاير في *Methodus inveniendi lineas curvas*، محولاً مسائل مثالية متفرقة إلى نظرية تحليلية منظمة (Euler, 1744b). وسيدرس ذلك بمزيد من التفصيل في §9.3.2.2.

نظرية الأعداد التحليلية (1730–1750) طبق أويلر الطرائق التحليلية على دراسة الأعداد الأولية، وأثبت لا نهايتها بحجج التباعد، وقدم صيغة جداء أويلر (Euler, 1748).

يلخص الجدول 6.4 الأعمال الكبرى.

جدول 6.4: أعمال ليونهارت أويلر الكبرى

المحتوى / الأهمية	مكان التأليف	السنة	العنوان (باللاتينية)
أعاد صياغة الميكانيكا النيوتنية بالمعادلات التفاضلية؛ عمل تأسيسي في الميكانيكا التحليلية.	سانت بطرسبرغ	1736	*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*
رسالة تأسيسية في حساب التغاير؛ قدمت ما سيصبح معادلة أويلر–لاغرانج.	سانت بطرسبرغ	1744	*Methodus inveniendi lineas curvas...*
عرفت الدوال تحليلياً، وعالجت المتسلسلات اللانهائية بصرامة، وأرست أساس التحليل الحديث.	سانت بطرسبرغ	1748	*Introductio in analysin infinitorum*
عرض منظم لحساب التفاضل، يشمل المشتقات الجزئية والمعادلات التفاضلية.	برلين	1755	*Institutiones calculi differentialis*
عمل شامل في حساب التكامل، يضم طرائق التكامل وحلول المعادلات التفاضلية.	برلين	1770–1768	*Institutiones calculi integralis* (3 مجلدات)
رسائل في تبسيط العلوم تغطي الفيزياء والفلك والفلسفة، كتبت للأميرة فريدريكه شارلوته البروسية.	برلين	1772–1768	*Lettres à une princesse d'Allemagne*

أويلر والأسس الرياضية للميكانيكا الإنشائية كان ليونهارت أويلر (Euler, 1744b) أغزر الرياضيين إنتاجاً في التاريخ، والشخصية التي أرست، أكثر من أي شخص آخر، الأسس الرياضية للميكانيكا الإنشائية. وتمتد إسهاماته إلى كل مجال تقريباً في الميكانيكا والرياضيات التطبيقية، وما زال المهندسون الإنشائيون يستخدمون كثيراً من نتائجه.

كان ميكانيكا أويلر (1736) أول رسالة شاملة تطبق حساب التفاضل والتكامل بصورة منظمة على المسائل الميكانيكية، وتعيد صياغة ميكانيكا نيوتن بلغة تحليلية لا هندسية. فحيث عرض نيوتن الديناميكا بإنشاءات هندسية، عبر أويلر عن المبادئ بمعادلات تفاضلية قابلة للمعالجة المنظمة. وأتاحت هذه الإعادة، أي الميكانيكا بوصفها تحليلاً، حل مسائل تتجاوز قدرة الطرائق الهندسية، وأرست إطاراً لتحليل الحركة والقوة والاتزان.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويظل اشتقاق أويلر لحمل الانبعاج الحرج للأعمدة (1744) واحداً من أهم النتائج في نظرية الاستقرار الإنشائي. وينشأ مفهوم شكل نمط الانبعاج أيضاً من تحليل أويلر.

وأرسى عمل أويلر على المنحنى المرن المعادلة التفاضلية التي تحكم انحراف العارضة، رابطة الأحمال المطبقة بالتشوه:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

ومع شروط حدية مناسبة، تعطي هذه الصياغة الانحرافات والدورانات والقوى الداخلية للعوارض تحت أي تحميل. ويشتق جانب كبير من التحليل الكلاسيكي للعوارض من هذه المعادلة.

وطور أويلر كذلك حساب التغاير، فأتاح طرائق الطاقة في التحليل الإنشائي، كاستيغليانو والطاقة الكامنة الدنيا ورايلي–ريتز، والطرائق الداعمة للأمثلية الإنشائية الحديثة. ووسع عمله في ديناميكا الأجسام الصلبة وميكانيكا الموائع والمرونة الأدوات الرياضية المتاحة للمهندسين.

إن الحجم المجرد لإنتاج أويلر مذهل: تملأ أعماله المجموعة أكثر من 70 مجلداً. وواصل إنتاج الرياضيات حتى بعد فقد بصره، عملياً أوراقاً في الميكانيكا والتحليل ونظرية الأعداد حتى وفاته. ويعود جزء من نسب كل طريقة تحليلية تقريباً يستخدمها المهندسون الإنشائيون إلى عمل أويلر.

6.7 من الميكانيكا التحليلية إلى نظرية الوسط المتصل والمنشآت

يجمع هذا القسم المساهمين الذين وسعوا *الميكانيكا التحليلية* من الجسيمات والأجسام الصلبة إلى *الأوساط المتصلة والمرونة* والاستجابة الإنشائية. وكُيفت المبادئ المجردة لوصف التشوه وسلوك المواد في الأجسام الحقيقية. والموضوع الموحد هو تكامل الصياغة الرياضية مع البنية الفيزيائية.

6.7.1 شارل-أوغستان دو كولوم (1736–1806)

مقتبس من *Timoshenko, 1953*) ولد شارل-أوغستان دو كولوم عام 1736 في أنغوليم بفرنسا، في أسرة ذات صلة بالخدمة الإدارية والتقنية للدولة. وتلقى تعليماً رياضياً متيناً في باريس قبل أن يلتحق بسلاح الهندسة العسكرية، حيث أعده تدريب متقدم في الهندسة والميكانيكا والإنشاء للخدمة العملية. وشكل هذا المسار المؤسسي، الذي جمع التعليم الرياضي بالتعرض المباشر لمسائل هندسية حقيقية، نهج كولوم طوال حياته: تجريب دقيق يهديه الاستدلال التحليلي، وموجه دائماً نحو التطبيق العملي.

مهندس في الميدان: المارتينيك وأصول مذكرة كان شارل-أوغستان دو كولوم شخصية آسرة توضح مسيرتها تنامي الصلة بين الهندسة العملية والميكانيكا النظرية في القرن الثامن عشر. وبعد تعليمه الأولي في باريس، انضم إلى سلاح المهندسين العسكريين وأرسل إلى جزيرة المارتينيك. وأشرف تسع سنوات على أعمال إنشائية واجهته بالسلوك الميكانيكي للمواد وحقائق الأداء الإنشائي. وفي الجزيرة، بعيداً عن الوسط الفكري المحفز في العاصمة، كتب ورقته التأسيسية *Sur une Application des Règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*، وقدمها إلى أكاديمية العلوم الفرنسية عام 1773. ويجسد هذا العمل كيف أمكن للممارسة الهندسية الاستعمارية أن تدفع الابتكار النظري وتقدم الميكانيكا. وكتب كولوم في مقدمتها بتواضعه المعهود:

> كانت هذه المذكرة، التي كتبتها منذ أعوام، معدة أولاً لاستعمالي الشخصي في العمل الذي كنت أزاوله في مهنتي. وإذا تجرأت على تقديمها إلى هذه الأكاديمية، فذلك لأن أضعف الجهود تلقى منها قبولاً كريماً حين يكون لها مقصد نافع. وفضلاً عن ذلك، فإن العلوم صروح مكرسة للخير العام. وينبغي لكل مواطن أن يسهم فيها بقدر مواهبه. وبينما يحمل الرجال العظماء إلى قمة الصرح حيث يستطيعون تخطيط الطوابق العليا وبناءها، لا ينبغي للصناع العاديين المنتشرين في الطوابق السفلى أو المختبئين في عتمة الأساسات إلا أن يسعوا إلى إتقان ما أنشأته أيد أقدر.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Coulomb, 1773a *"Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture"*

العودة إلى فرنسا: الاحتكاك والآلات والمنهج التجريبي استأنف كولوم عمله مهندساً بعد عودته إلى فرنسا، ودخل بصورة مباشرة أكثر في الحياة العلمية للأكاديمية. وتقاسم جائزة منحت لورقة عن التصميم الأمثل للبوصلة. وفي عام 1781 نال جائزة أخرى للأكاديمية عن مذكرته *Théorie des machines simples*، التي عرض فيها نتائج تجارب واسعة على احتكاك المواد، الجافة والمزلقة معاً. ووفرت هذه القياسات المنظمة بيانات حاسمة للتصميم الميكانيكي، وساعدت في إرساء أساس تجريبي لعلم الاحتكاك والتآكل والتزييت[48].

وبعد 1781 تمركز كولوم دائماً في باريس. وهناك انتخب في الأكاديمية وأتيح له الوصول إلى منشآت بحثية أفضل. وتحول على نحو متزايد إلى الكهرباء والمغناطيسية،[49] وطور ميزان التواء شديد الحساسية لقياس القوى الكهربائية والمغناطيسية الضئيلة. وفي أثناء ذلك بحث مقاومة الأسلاك للالتواء، وهو مجال يستكشف بمزيد من التفصيل في §10.3.2.1.

العمل على الالتواء والمرونة لم تقدم تجارب كولوم على الالتواء فهم المغناطيسية فحسب، بل أرست أيضاً أساس ميكانيكا الالتواء. فاشتق علاقات بين عزم الالتواء والتشوه الزاوي، ومهدت قياساته لمقاومة القص في الأسلاك للتطورات اللاحقة في المرونة. ولم تكن هذه البصائر ملحقاً عارضاً بأبحاثه الكهربائية، بل أصبحت حجر زاوية في توصيف المواد المرنة. ومثلت تجاربه الالتوائية بعض أدق القياسات الميكانيكية في القرن الثامن عشر، وأرست طرائق سيستخدمها المهندسون أجيالاً.

ولم يسهم عالم آخر في القرن الثامن عشر في ميكانيكا الأجسام المرنة بقدر كولوم. وتقع منجزاته التأسيسية في المرونة أساساً في مذكرته لعام 1773، التي ساعدت في وصل ممارسة الإنشاء التجريبية بالميكانيكا النظرية الناشئة.

التأثير والإرث في الميكانيكا مع أن كولوم قد لا يضاهي نيوتن أو أويلر أو آل برنولي في الأطر النظرية الشاملة، فقد أرسى عمله التجريبي الدقيق أسساً حاسمة للميكانيكا التطبيقية. وأثرت دراساته للاحتكاك والالتواء والمرونة في أعمال نافييه وكوشي وسان-فنان في القرن التاسع عشر، الذين وسعوا نظرية الإجهاد والانفعال وصاغوها. ويقيم إرث كولوم في قدرته على تحويل القياسات الدقيقة إلى قوانين فيزيائية دائمة. ولعل الأهم أنه بين كيف يمكن للبحث التجريبي المنظم أن ينتج علاقات كمية مهمة نظرياً ونافعة عملياً في آن واحد.

السمات الشخصية والتحديات التاريخية اتسمت شخصية كولوم بالتواضع والاجتهاد. فعلى الرغم من عمله أعواماً في عزلة استعمارية بعيدة عن مراكز التعليم الأوروبية، لم يتوقف عن أبحاثه العلمية. وكثيراً ما وصف نفسه بأنه مجرد «بان في أساس» العلم، تاركاً الفضل العلني للآخرين. لكن مثابرته، ولا سيما في صقل التجارب، وضعته في طليعة الميكانيكا التطبيقية في القرن الثامن عشر.

ومع أنه يذكر اليوم غالباً بقانونه في الكهرباء الساكنة، فإن إسهامات كولوم في الميكانيكا لا غنى عنها: فقد قدم بيانات تجريبية صارمة ونماذج فيزيائية وجهت نضج علم المنشآت في القرون اللاحقة. وتجسد مسيرته المهندس-العالم الذي جمع الخبرة العملية بالبصيرة النظرية، فقدم الممارسة الهندسية والفهم العلمي معاً[50].

[48] علم الاحتكاك والتآكل والتزييت علم متعدد التخصصات يدرس الاحتكاك والبلى والتزييت بين السطوح المتفاعلة في حركة نسبية. ويشمل تصميم المحامل والتروس والسطوح المنزلقة، وتطوير مواد التزييت ومعالجات السطوح لتقليل فاقد الطاقة وتدهور المواد في الأنظمة الميكانيكية، فضلاً عن احتكاك التربة والمنشأ في الهندسة الجيوتقنية واحتكاك الخرسانة في تطبيقات البناء والبنية التحتية.

[49] ومن الطريف، كما سنرى لاحقاً، أن أبحاثه في الالتواء أتاحها جهاز صمم أصلاً للدراسات المغناطيسية.

[50] من الأمثلة البارزة في الهندسة الإنشائية والميكانيكية غوستاف إيفل، الذي جمع التحليل النظري المتقدم لأحمال الرياح وإجهادات المواد بتقنيات إنشائية مبتكرة للجسور والأبراج؛ وجون أوغسطس روبلينغ، الذي طور النظرية الرياضية لتصميم الجسور المعلقة والطرائق الهندسية العملية التي أتاحت جسر بروكلين؛ وستيفن تيموشينكو، الذي أنشأ نظريات تأسيسية للعوارض والصفائح وهو يحل مسائل واقعية في الاهتزازات الإنشائية والاستقرار. ومن المؤسف أن التخصص المهني الحديث فصل إلى حد كبير البحث النظري عن الممارسة الهندسية، فلم يعد سوى قلة من الممارسين المعاصرين يجمعون الفهم العلمي العميق والخبرة الهندسية العملية، وفي المقابل يفهم علماء كثيرون النظرية لكنهم يفتقرون إلى الخبرة الهندسية العملية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.7.2 سيميون دني بواسون (1781–1840)

ولد سيميون دني بواسون عام 1781 في بيثيفييه بفرنسا، في أسرة محدودة الموارد. وعرفت موهبته الرياضية الاستثنائية مبكراً، وقبل في *École Polytechnique* بعد وقت قصير من تأسيسها، في خضم إعادة تنظيم التعليم العلمي الفرنسي بعد الثورة. وهناك تأثر بلابلاس ولاغرانج، اللذين شكل نهجهما التحليلي في الميكانيكا تطوره الفكري بعمق. وعلى خلاف كثير من المهندسين-العلماء في جيله، سلك بواسون مساراً يغلب عليه الطابع الرياضي، مفضلاً العمومية التحليلية والاكتمال الصوري على البحث التجريبي.

محلل من جيل ما بعد الثورة كان سيميون دني بواسون رياضياً وفيزيائياً فرنسياً ما زال اسمه راسخاً في فروع علمية متعددة، من الاحتمالات إلى المرونة. وبرز بواسون، تلميذ لابلاس ومعاصر فورييه، شخصية مركزية في المرحلة الانتقالية بين القرنين الثامن عشر والتاسع عشر، إذ حمل تقليد الميكانيكا التحليلية عند لاغرانج ولابلاس إلى الأمام، وكيفه مع الحاجات الناشئة لفيزياء الوسط المتصل والهندسة.

وتزامنت مسيرته مع الترسخ المؤسسي للتعليم العلمي والهندسي في فرنسا، ولا سيما من خلال *École Polytechnique*، حيث طبقت الصرامة الرياضية بصورة منظمة على مسائل الميكانيكا والمواد والعلوم الفيزيائية. وانتمى بواسون إلى الجيل الأول الذي لم يعد التحليل المتقدم عنده مجرد أداة للميكانيكا السماوية، بل لغة لوصف السلوك الداخلي للمادة.

المرونة والثابت المرن الثاني اشتهر بواسون في الميكانيكا بتقديم الثابت المرن الثاني، الذي يسمى اليوم *نسبة بواسون*، ويكمم الانكماش الجانبي لمادة معرضة لاستطالة محورية. ومثل هذا المفهوم خطوة حاسمة تتجاوز تناسب هوك، بإدراك أن التشوه ثلاثي الأبعاد بطبيعته: فالتمدد في اتجاه يسبب بالضرورة انكماشاً في الاتجاهات المستعرضة.

وصقلت صياغة بواسون نظرية المرونة الخطية التي بدأها نافييه، ووفرت طريقة منظمة لربط الانفعالات الطولية والمستعرضة في جسم صلب متساوي الخواص. وبتحديد نسبة بواسون بوصفها خاصية جوهرية للمادة، ساعد بواسون في تحويل المرونة من مجموعة قوانين أحادية البعد إلى نظرية حقيقية للوسط المتصل. وأرست هذه البصيرة أساساً ضرورياً لتوضيحات سان-فنان اللاحقة ومعادلات نافييه–لاميه المكتملة.

رياضنة سلوك الوسط المتصل يمثل عمل بواسون مرحلة حاسمة في *رياضنة* سلوك المواد. فبدلاً من الاعتماد على الحدس الهندسي أو القياس التجريبي وحدهما، سعى إلى وصف الاستجابة المرنة بمعادلات تفاضلية جزئية تحكم حقول الإجهاد والانفعال والإزاحة في الجسم كله. وبذلك ساعد في إرساء مسألة القيم الحدية إطاراً طبيعياً للمرونة وميكانيكا الوسط المتصل.

وقادت هذه الرؤية التحليلية بواسون أيضاً إلى نتائج مهمة خارج المرونة. فقد نشأت معادلته، المعروفة اليوم باسم *معادلة بواسون*، في دراسة جهود الجاذبية والكهرباء الساكنة، لكن بنيتها الرياضية تظهر من جديد في المرونة وميكانيكا الموائع وانتقال الحرارة. وتجسد المعادلة كيف تحدد المصادر المحلية، من قوى وشحنات وكثافة كتلية، سلوك الحقل العام، وهو مفهوم مركزي في التحليل الإنشائي والفيزيائي.

العلاقة مع نافييه والمسألة الهندسية اتسمت مسيرة بواسون بتوتر فكري مع كلود-لوي نافييه، ولا سيما بشأن دور الرياضيات المجردة في الهندسة. فقد فضل بواسون الاكتمال الرياضي والأناقة التحليلية، بينما أكد نافييه النمذجة الفيزيائية والقابلية للتطبيق العملي. ولم تكن هذه الخلافات شخصية فحسب، بل عكست انقساماً تخصصياً أعمق بين نظرية الوسط المتصل الموجهة رياضياً والتحليل الإنشائي الموجه هندسياً.

وبأثر رجعي، أثمر التنافس. فعزز إصرار بواسون على الاتساق التحليلي الأسس النظرية للمرونة، بينما ضمنت رؤية نافييه الهندسية صلتها بالمنشآت الحقيقية. وشكلت جهودهما مجتمعة صورة نظرية المرونة التي سيوضحها لاحقاً لاميه وسان-فنان.

اتساع التأثير والإرث إلى جانب الميكانيكا، قدم بواسون إسهامات دائمة في نظرية الاحتمالات، أي توزيع بواسون، والديناميكا التحليلية، أي أقواس بواسون، والفيزياء الرياضية. وأثر عمله في انتشار الموجات وضغط الموائع والكهرباء الساكنة في فيزياء القرن التاسع عشر بالعمق نفسه الذي أثرت به نظرياته المرنة في الهندسة.

وفي الميكانيكا الإنشائية، لا يكمن إرث بواسون في صيغ منفردة، بل في دوره جسراً: فقد ساعد في نقل المرونة من الحدس الميكانيكي المبكر إلى نظرية متماسكة رياضياً للوسط المتصل. ولا تزال المعلمات التي تحمل اسمه لا غنى عنها في النماذج التكوينية الحديثة وصيغ العناصر المحددة وتوصيف المواد.

للتفاصيل التحليلية، انظر §10.3.2.5

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.7.3 كلود لوي ماري هنري نافييه (1785–1836)

ولد كلود لوي ماري هنري نافييه في ديجون عام 1785. وتوفي أبوه حين كان في الرابعة عشرة، فتولى تربيته خاله إ. غوتيه، وهو مهندس جسور شهير وعضو في *Corps des Ponts et Chaussées* . ووجهت هذه الصلة الأسرية نافييه إلى عالم الهندسة في سن مبكرة. وشكلت نشأته داخل المؤسسة الهندسية الفرنسية اقتناعه بأن النظرية الرياضية ينبغي أن توجه الإنشاء العملي، وهي رؤية ستحدد مسيرته كلها.

دخل نافييه في السابعة عشرة *École Polytechnique* المرموقة، بترتيب متواضع بين دفعة داخلة من 117 طالباً. وعلى الرغم من هذه البداية، سرعان ما تميز وصعد إلى العشرة الأوائل مع نهاية عامه الأول. ثم انضم إلى *Corps des Ponts et Chaussées* ، حيث أمضى بقية مسيرته موازناً بين المسؤوليات الإدارية والأكاديمية والعلمية. ومثل هذا المسار المؤسسي، من المدرسة متعددة التقانات إلى هيئة الجسور والطرق، النموذج الجديد للتعليم الهندسي العلمي الذي ابتكرته فرنسا وانتشر في نهاية المطاف في أوروبا.

تأثر نافييه أثناء دراسته في *École Polytechnique* بجوزيف فورييه، الذي أثر نهجه التحليلي للحرارة والموجات بعمق في تفكير نافييه (Cannone **and** Friedlander, 2003). وعلى خلاف كثير من مهندسي عصره المعتمدين على القواعد التجريبية، دعا نافييه إلى منهجية صارمة رياضياً. وحرر ونشر رسالة خاله *Traité des ponts* (Gauthey, 1813)، جامعاً البصائر التاريخية بالصرامة النظرية.

وامتد تأثير نافييه إلى ما وراء البحث. فقد أدخلت كتبه الهندسة الميكانيكا التحليلية في التعليم الهندسي، وكانت نقطة تحول في انتقال التخصص من حرفة تجريبية إلى صرامة علمية. ووفرت هذه النصوص أساس تطبيق الطرائق الرياضية على المسائل الهندسية، ولا سيما في المرونة وميكانيكا الموائع. وأرسى نهجه التعليمي نموذج التعليم الهندسي الحديث، مؤكداً المبادئ الرياضية بدلاً من القواعد التجريبية.

ولم تخل مسيرته من احتكاك مؤسسي. فقد أجرى نافييه أبحاثه النظرية، ولا سيما اشتقاقه لمعادلات حركة الموائع اللزجة في أوائل عشرينيات القرن التاسع عشر، في شيء من التحفظ، لأن رؤساءه أعطوا الأولوية للتصميم العملي للجسور. وعكس ذلك انقساماً مؤسسياً أوسع بين الهندسة النظرية والعملية، وهي ثنائية تجاوزها نافييه في نهاية المطاف. وأكسبته قدرته على توليف الممارسة والنظرية تقدير *Académie des Sciences* والمهندسين الممارسين معاً (Cannone **and** Friedlander, 2003).

وكان له أيضاً منافسون مهنيون، ولا سيما سيميون دني بواسون، الذي قدم الثابت المرن الثاني، نسبة بواسون، وطرح آراء منافسة في نظرية المرونة. ومع أن مناقشاتهما كانت خلافية أحياناً، فقد حفزت صقل النماذج المرنة ومهدت لتطورات سان-فنان اللاحقة.

الانثناء حدد نافييه في كتابه لعام 1826 *Leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*، أي محاضرات ألقيت في المدرسة الملكية للجسور والطرق عن تطبيق الميكانيكا في إقامة المنشآت والآلات، (Navier, 1826) موضع المحور المحايد في انحناء العوارض المرنة بدقة. وبتطبيق شروط الاتزان الأفقي والرأسي واتزان العزوم، بين أن المحور المحايد يمر بمركز مساحة المقطع العرضي. وأرسى عمله مبادئ تأسيسية عدة: أن المقاطع المستوية تبقى مستوية أثناء الانحناء؛ وأن المحور المحايد يقع في منتصف العمق للمقاطع المستطيلة؛ وأن هذه النتائج لا تصح إلا ضمن الحد المرن. وأصبحت هذه المبادئ حجر زاوية في نظرية العوارض الحديثة، وما زالت أساسية في التحليل الإنشائي اليوم (§7.3).

وقدم نافييه علاقة الانحناء الخطية $M = fS$، فأرسى حجر زاوية في نظرية العوارض الكلاسيكية. وعلى خلاف أسلافه مثل باران وكولوم، الذين ظلت إسهاماتهم أكاديمية إلى حد كبير، انتشرت صيغ نافييه في التصميم الهندسي بفضل وضوحها وصرامتها وقابليتها للتطبيق.

المرونة كثيراً ما ينسب إلى نافييه تأسيس نظرية المرونة الحديثة. ففي عام 1821 قدم إلى *المعهد* مذكرة تأسيسية، *Mémoire sur les lois du mouvement des corps solides* (Navier, 1827b) صاغ فيها المعادلات العامة للاتزان والحركة لجسم مرن متصل. ولم تنطبق هذه المعادلات على النقاط الداخلية وحدها، بل حددت أيضاً شروط الحدود.[51] ومثلت هذه الصياغة أول وصف رياضي كامل للسلوك المرن في الأوساط المتصلة، ووفرت الأساس النظري لجميع التطورات اللاحقة في ميكانيكا المواد الصلبة.

[51] يشمل هذا النظام الكامل 15 معادلة حقلية مقترنة: 3 معادلات اتزان، و6 علاقات تكوينية هوكية بين الإجهاد والانفعال، و6 معادلات هندسية بين الانفعال والإزاحة، تقابل 15 مجهولاً: 6 إجهادات و6 انفعالات و3 إزاحات.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

استخدم نافييه في البداية ثابتاً مرناً واحداً، ثم عدل الصياغة عام 1822 لتضم معلمتين مستقلتين للمادة، فزاد عمومية النموذج. وصقل تلميذه سان-فنان هذه الصيغ لاحقاً، لكن نافييه أرسى البنية التأسيسية للنظرية.

ويظل منشوره لعام 1826 *Leçons*، (Navier, 1826) معلماً في الأدب الهندسي. فقد قدم أول نظرية عامة للأجسام الصلبة المرنة، وأول معالجة منظمة للميكانيكا الإنشائية. ولم يكن آنذاك حد فاصل واضح بين نظرية المرونة والهندسة الإنشائية، وكانت شخصيات مثل نافييه منخرطة بعمق في كليهما.

الموائع اللزجة توج عمل نافييه في ميكانيكا الموائع بصياغة المعادلات المعروفة اليوم بمعادلات نافييه–ستوكس. وقدمت ورقته لعام 1822 مفهوم الاحتكاك الداخلي، أي اللزوجة، واقترحت أن المقاومة في المائع تتناسب مع معدل الانفعال، وهي فرضية سبقت عصرها. ومع أن عمله أغفل في البداية، فقد شكل العمود الفقري المفاهيمي للتطورات اللاحقة في ميكانيكا الوسط المتصل، وما زال مركزياً في ديناميكا الموائع اليوم. ولهذه المعادلات تطبيقات عملية واسعة تشمل تصميم الطائرات والسيارات، أي الديناميكا الهوائية وتقليل السحب؛ والتنبؤ بالطقس ونمذجة المناخ؛ ومحاكاة تيارات المحيط؛ وتحليل جريان الدم في طب القلب والأوعية؛ وحساب أحمال الرياح على المباني والجسور؛ وتصميم المضخات والعنفات والمراوح؛ وجريان خطوط أنابيب النفط والغاز؛ ونمذجة انتشار التلوث؛ وتصميم هياكل السفن؛ وتحسين أنظمة التدفئة والتهوية وتكييف الهواء. وهذه المعادلات أساسية لبرامج ديناميكا الموائع الحسابية المستخدمة في التخصصات الهندسية.

الإرث يكمن إرث نافييه الدائم في قدرته على توليف الملاحظة التجريبية والصياغة التحليلية. فقد حول ميكانيكا المنشآت والموائع إلى تخصصات تحكمها المعادلات التفاضلية بدلاً من الجداول التجريبية. وعلمت كتبه أجيالاً من المهندسين لغة جديدة للدقة، وما زالت نظرياته أحجار زاوية في دراسة المرونة والديناميكا المائية.

ومع أنه ليس معروفاً على نطاق واسع مثل نيوتن أو أويلر في السجل العلمي العام، يقف نافييه بين العمالقة في الهندسة والميكانيكا التطبيقية لدوره في تحويل الهندسة إلى علم دقيق. وأرسى نهجه نموذج العلوم الهندسية الذي ما زال يهدي المجال اليوم: التطبيق المنظم للتحليل الرياضي على المسائل العملية.

إخفاق الجسر حتى نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر، بنيت معظم المنشآت بالحجر. لكن الثورة الصناعية (1760–1840)، ولا سيما إنتاج الحديد، حفزت بناء جسور معدنية جديدة في إنجلترا والولايات المتحدة. وكان جون سميتون (1721–1792) أول مهندس بارز يستخدم الحديد الزهر على نطاق واسع. وبنى أبراهام داربي أول جسر من الحديد الزهر (1776–1779) فوق نهر سيفرن. وتبعت بلدان أخرى إنجلترا، وبحلول مطلع القرن ظهرت جسور الحديد الزهر في ألمانيا وفرنسا. وصنعت هذه الجسور في هيئة أقواس. ولم تكن المنشآت الجديدة تحدد أبعادها بصورة صحيحة دائماً، فانهار كثير منها[52]. وخلص المهندسون إلى أن جسور الحديد الزهر قد لا تكون مأمونة للبحور الكبيرة، وبدأوا بناء الجسور المعلقة (Timoshenko, 1953). ويوضح هذا الانتقال كيف تدفع الإخفاقات الإنشائية الابتكار في المواد والأشكال الإنشائية معاً.

بنى جيمس فنلي أول جسر من هذا النوع في بنسلفانيا عام 1796. وكان فنلي مهندساً ماهراً يعمل في بيئة شديدة الاختلاف عن بيئة نافييه في إحدى *المدارس الكبرى*، أي ريف أمريكا نحو عام 1800. وكان عملياً وتجريبياً، ونجح في السعي إلى تصميمات صالحة وبسيطة وعامة يستطيع حدادو الريف بناءها. ومن دلائل نجاحه أنه كان يملك عدداً من البراءات بحلول 1820، وكان أكثر من أربعين جسراً معلقاً بالسلاسل قد بني في الولايات المتحدة. وتبنى صمويل براون، وهو قبطان بحري متقاعد، ابتكارات فنلي ووسعها في بريطانيا، وحدد بالتجارب أكفأ شكل للوصلات الحديدية في كبل الجسر المعلق. وأصبح من كبار بناة الجسور المعلقة، ومنها جسر الاتحاد فوق نهر تويد عام 1820، الذي بلغ بحره 436 قدماً، أي نحو ضعف أطول بحر لأي جسر بني في الولايات المتحدة. وتلت جسر الاتحاد بعد وقت قصير منجزات هندسية أخرى في بريطانيا، منها جسور بناها رواد الثورة الصناعية مثل برونل وستيفنسون وتلفورد (Cannone **and** Friedlander, 2003). ويبين هذا التبادل عبر الأطلسي كيف تجاوز الابتكار الهندسي الحدود الوطنية حتى في عصر محدود الاتصالات.

تبع المهندسون البريطانيون الأمريكيين، وبني عدد كبير من هذه الجسور في إنجلترا في الربع الأول من القرن التاسع عشر. وكان أهمها جسر ميناي، ببحر مركزي قدره 550 قدماً، وصممه تلفورد (1757–1834). وكان المرجع الكلاسيكي لـ Pope, 1811 قد نشر آنذاك. وشعرت الحكومة الفرنسية بأنها تخلفت، فدعت *École des Ponts et Chaussées* إلى المساعدة في تطوير تقنية الجسور المعلقة. وكان من الطبيعي أن تتطلع إلى بريطانيا. وبطلب من رؤسائه، سافر نافييه، الذي كان قد نشر عمل خاله عن الجسور، مرتين إلى بريطانيا عامي 1821 و1823 لدراسة الجسور المعلقة. ثم قدم *Rapport et Mémoire sur les Ponts Suspendus* (Navier,

[52] ربما كانت انهيارات هشة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

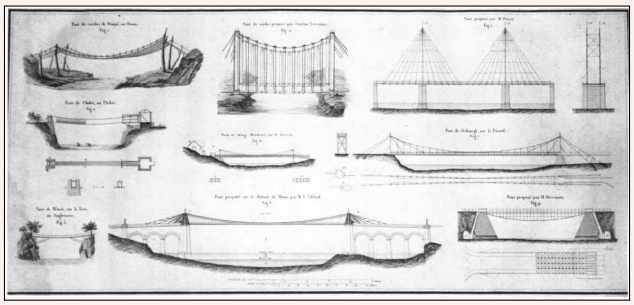
1830)، الذي لا يضم مراجعة تاريخية للمجال ووصفاً لأهم الجسور القائمة فحسب، بل الطرائق النظرية لتحليل هذه المنشآت أيضاً.

قدم نافييه في هذا الكتاب لأول مرة النهج التحليلي والمجرد للرياضي إلى الموضوع. وسعى إلى بيان قوة التجريد وتحديه في مقابل نهج تجريبي مخصص. وفعل ما يفعله الرياضيون التطبيقيون في بناء نموذج رياضي. وكما قال:

> [تتطلب النمذجة] فناً خاصاً يقوم على استبدال المسائل نفسها المراد حلها بمسائل أخرى لا تختلف عنها إلا بأقل قدر ممكن، ويمكن تطبيق الرياضيات عليها.
>
> Navier, 1830 Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus

واقترح نافييه إعادة صياغة النتائج بحيث تحدد الحدود النظرية التي ينبغي أن تكون ضمنها صالحة، واستخدام التحليل الرياضي لتحديد العلاقات بين المعلمات المهمة. وظل هذا التقرير خمسين عاماً واحداً من أهم الكتب التي تناولت تصميم الجسور المعلقة. ونقتبس مقطعاً من (Picon, 1988):

> يرجح أن ينتشر استخدام الجسور المعلقة قريباً؛ وبهذه الوسيلة سننشئ روابط اتصال في مواضع يبدو ذلك فيها الآن مستحيلاً ...وستظهر هذه المنشآت أناقة كبيرة في الشكل، تحددها دائماً قوانين الاتزان الطبيعية؛ ويمكنها أيضاً، إذا صممها مهندس موهوب، أن تسهم في تجميل العواصم، أو إذا علقت فوق أودية سحيقة، أن تحدث أروع الآثار في المشاهد الخلابة للمناطق الجبلية. وستقدم هذه الصروح للخيال صورة عن قوة الفنون البشرية وهي تتغلب، من أجل الخير العام، على عقبات عظيمة أقامتها الطبيعة وظلت طويلاً تعد منيعة.
>
> "Picon, 1988 *"Navier and the introduction of suspension bridges in France*



شكل 6.17: رسم نافييه للجسور المعلقة، من جسور الحبال البدائية للشعوب الأصلية إلى جسر ميناي لتلفورد (Picon, 1988)

وحان الوقت ليفعل نافييه نظرياته، فاقترح مشروعاً لجسر معلق فوق نهر السين في باريس، قبالة ليزانفاليد، وعده تطبيقاً لأبحاثه النظرية. وكان الجسر سيتكون من أبراج على الطراز المصري، قطرها 3 م وارتفاعها نحو 15 م، تفصل بينها مسافة 170 م، تمر فوقها سلاسل تتكون كل منها من تسعة صفوف من وصلات مستطيلة من الحديد المطاوع. وكانت السلاسل ستحمل منصة عرضها 9.5 م ووزنها نحو 600 طن. وكان مشروعاً طموحاً يكاد حجمه يساوي جسر ميناي لتلفورد. ووافقت عليه سلطات *Ponts et Chaussées* عام 1823. وادعى نافييه أنه حسم نهائياً الطلاق بين النظرية والممارسة، الذي لا يليق «بهيئة مستنيرة مثل *Ponts et Chaussées*» (Picon, 1988).

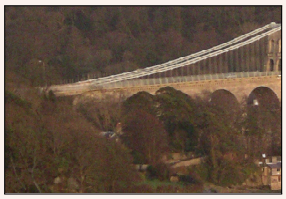
ولم تكن في الواقع حاجة ملحة إلى جسر في هذا الموضع، كما كان الحال في شرق باريس. بل طلب نافييه العظمة والجمال، صرحاً يضيف إلى مجد فرنسا وهيئته المحبوبة *Corps des Ponts et Chaussées*. وأراد البرهنة على إمكان صنع جسر جميل من الحديد لا الحجر، وعلى إمكان صنعه وفق إملاءات التحليل النظري. وكما كتب:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

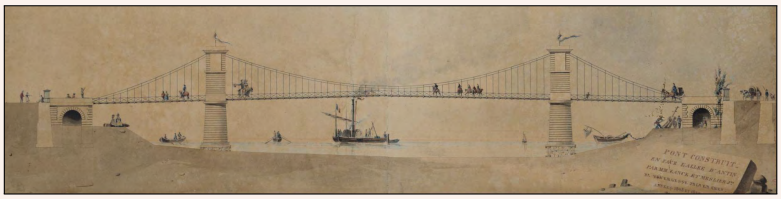
> لا توجد ضرورة ملحة لبناء جسر إلى الشانزليزيه ...لكن إذا أريد بناؤه، فليجعل نصباً ...وليحسب ترتيبه بفكرة إنشاء صرح يقره الفانون، ويروق للجمهور، ويشرف الإدارة.
>
> ...لم تكن هذه الدراسة [للجسور المعلقة] ممكنة لولا التقدم الذي أحرزه التحليل الرياضي في الأزمنة الأخيرة، ولولا المؤسسات التي يطلع بوساطتها المسؤولون عن توجيه الأشغال العامة على أكثر أفكار الرياضيات تقدماً.
>
> Navier, 1823 Rapport à Monsieur le Ministre de l’Intérieur sur le projet d’un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées

وهكذا قدم نافييه عام 1823 خططاً دقيقة إلى رؤسائه في *Corps des Ponts et Chaussées*. وصمم كل تفصيل على أساس التحليل النظري، وكان نافييه واثقاً بما يكفي حتى لا يلجأ إلى الممارسة الهندسية المعتادة المتمثلة في «المبالغة في المتانة»، أي إضافة معامل أمان. وسيكون مثل هذا الاطمئنان مستحيلاً اليوم؛ فالمواصفات الحديثة تتضمن معاملات أمان تقابل مؤشرات موثوقية[53]. وقدمت لجنة خبراء تقريراً شديد الإيجابية عن مشروع نافييه، مقتنعة بأن «النظرية تنير الممارسة في كل موضع» (Cannone **and** Friedlander, 2003). وتوضح هذه الحلقة وعد العلوم الهندسية المبكرة وخطرها معاً: قوة *التحليل الرياضي مقترنة بفهم ناقص لعدم اليقين العملي*[54].

كان الجسر قد اكتمل عملياً حين ظهرت حركة طفيفة في حفر مراسي السلاسل. وتفاقمت هذه الحركة في جهة الشانزليزيه بانكسار إحدى قنوات مياه المدينة، وقطرها 0.32 م، في ليلة 6–7 سبتمبر 1826. وشكل سيل الماء الناتج، تحت ارتفاع ضغط 30 م، من خزانات شايو بركة إلى جانب الحفريات غير المكتملة، وأدى إلى تسرب في أعمال ترابية منجزة. ونصبت سقالات، لكن المد العالي وصقيع الشتاء والمخاوف المالية أخرت التدعيم الطارئ للمراسي. وتقرر تأجيل الإصلاحات إلى الموسم التالي وتفكيك السطح والسلاسل. وفي النهاية هدم العمل المكتمل (Cannone **and** Friedlander, 2003). ومن ثم لم يكن الإخفاق إنشائياً بل جيوتقنياً[55]. ويذكر هذا الإخفاق بأن أكثر التحليلات الإنشائية تطوراً لا تكون أفضل من فهم النظام الكامل، بما في ذلك الأساسات والظروف البيئية.



(a) جسر لتلفورد فوق ميناي



(b) جسر بون ديزانفاليد الذي اقترحه نافييه

شكل 6.18: نافييه وتلفورد: الجسور

ظهرت في الصحافة مقالات ساخرة ضد الهيئة، وأشير إلى نافييه بأنه «ذلك العالم البارز الذي تفشل حساباته في باريس». وشكلت لجنة حكومية للتحقيق في التداعيات التقنية والمالية لحادث *Pont des Invalides*. ووجه النقد إلى الهيئة لشدة تعلقها بالنظرية ولاستبدادها ونخبويتها مقارنة بالمؤسستين الهندسيتين البريطانية والأمريكية. وقيل إن السلاسل لا بد أنها كانت أثقل من أن تتحملها الدعامات إذا لم تصمد أمام «حادث طفيف». وفي المقابل أشيد بالمنجزات المتفوقة لبناة الجسور البريطانيين لأنهم لم «يؤيضنوا» المسألة. وتوضح تداعيات إخفاق نافييه التوتر المستمر بين النهجين النظري والتجريبي في الهندسة، وهو نقاش ما زال قائماً بصور مختلفة اليوم.

[53] تناقش في §35.3 ولا تقل عن 3.

[54] من أمثلة الهندسة الإنشائية انهيار جسر تاكوما ناروز عام 1940، ومسألة الاهتزاز الجانبي في جسر الألفية بلندن عام 2000، وتدعيم مركز سيتيكورب عام 1978 لمواجهة الرياح المائلة.

[55] حالة نافييه ليست فريدة. فقد توفي مويسيف بعد ثلاث سنوات من إتمام جسر تاكوما ناروز المعلق وانهياره (1940). وفي فرنسا، بعد مئة عام من حادث جسر نافييه، انهار سد مالباسي الذي صممه المهندس الكبير خريج المدرسة متعددة التقانات أندريه كوين، وكان قد صمم آنذاك نحو 100 سد، ومرة أخرى لم يكن إخفاقاً إنشائياً بل انزلاقاً صخرياً، فقتل 423 شخصاً. وتأثر كوين عميقاً بالحادث وتوفي بعد ستة أشهر (Londe, 1987).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والحق أن مسار نافييه من منظر ورياضي إلى بان للجسور لا يمكن إلا أن يقارن بالمسار الأكثر عملية.

6.7.4 جان لو رون دالمبير (1717–1783)

ولد جان لو رون دالمبير في باريس عام 1717، وترك رضيعاً على درجات كنيسة سان-جان-لو-رون التي أخذ منها اسمه. وربته أسرة حاضنة، ثم دعمه أبوه البيولوجي، وهو ضابط مدفعية، مالياً وإن في تكتم. وتلقى دالمبير تعليماً صارماً في كوليج دي كاتر-ناسيون، أو كوليج مازاران، حيث تدرب في الرياضيات والفلسفة والعلوم. ومع أنه وجه أولاً إلى اللاهوت والقانون، سرعان ما تحول بصورة حاسمة إلى الرياضيات، وتابع البحث العلمي إلى حد كبير خارج الهياكل الأكاديمية النظامية. وعزز هذا المسار غير المألوف استقلال فكره وتأكيده الاستدلال المجرد على التقليد.

الديناميكا والاختزال إلى الاتزان كان جان لو رون دالمبير مفكراً محورياً في عصر التنوير، وساعد عمله في تحويل الميكانيكا من إطار هندسي تقوده القوى إلى إطار قائم على مبادئ مجردة. وفي *Traité de Dynamique*، (d’Alembert, 1743) قدم ما يسمى اليوم مبدأ دالمبير. ويقول هذا المبدأ إن مجموع القوى المطبقة وقوى القصور، مأخوذة بإشارة معاكسة، يجب أن ينعدم لجميع الإزاحات الافتراضية. وبإدخال القصور في صورة قوة وهمية، أعاد دالمبير صياغة قانون نيوتن الثاني شرطاً للاتزان.

> *للتفاصيل التحليلية، انظر §34.3.1*

وكانت إعادة الصياغة هذه عميقة. فقد حولت مسائل الحركة إلى مسائل تكافئ الاستاتيكا صورياً، وأتاحت بذلك تطبيق طرائق الشغل الافتراضي والاتزان على الديناميكا. وقدم دالمبير بهذا جسراً مفاهيمياً بين الميكانيكا النيوتنية والميكانيكا التحليلية التي سيصوغها لاغرانج لاحقاً. ومن ثم يقف *Traité de Dynamique* عملاً تأسيسياً لتطوير طرائق الشغل الافتراضي والإحداثيات المعممة ومبادئ الطاقة التي ستهيمن على ميكانيكا القرن التاسع عشر والتحليل الإنشائي.

الموسوعة والبرنامج العقلاني كان دالمبير أيضاً مساهماً رئيسياً في *الموسوعة*، وعمل محرراً مشاركاً مع ديدرو لمقالاتها الرياضية والعلمية. وأصبح بهذا الدور أحد أبرز أصوات العقلانية والصياغة العلمية في فرنسا القرن الثامن عشر. وشكل إصراره على الوضوح والتجريد والبنية الرياضية عرض الميكانيكا بوصفها علماً استنباطياً لا مجموعة قواعد تجريبية. ومن خلال *الموسوعة* ساعد دالمبير في نشر الميكانيكا الرياضية إلى جمهور فكري واسع، وأدخل الاستدلال العلمي في النسيج الثقافي لعصر التنوير.

الاهتزازات وانتشار الموجات إلى جانب الديناميكا، قدم دالمبير إسهامات تأسيسية في نظرية الاهتزازات. وأدى تحليله للوتر المهتز إلى صياغة معادلة الموجة أحادية البعد، وهي من أقدم المعادلات التفاضلية الجزئية وأهمها في الفيزياء الرياضية. ومع أن عمله أثار جدلاً في البداية، ولا سيما بشأن شروط الحدود والحلول المقبولة، فقد أرسى عمله على انتشار الموجات أساس التطورات اللاحقة في المرونة والصوتيات والديناميكا الإنشائية، حيث تحكم معادلات الموجات اهتزاز الأوتار والعوارض والصفائح والأوساط المتصلة.

الموقع في تطور الميكانيكا مع أن أسلوب دالمبير كان أقل انتظاماً وشمولاً من أسلوب لاغرانج، فإن ابتكاراته المفاهيمية تجعله شخصية انتقالية حاسمة بين الميكانيكا النيوتنية والميكانيكا التحليلية الحديثة. فقد أوضح دور القصور، وصاغ اختزال الديناميكا إلى الاتزان، وقدم بنى رياضية أصبحت لا غنى عنها لنظريات المرونة والاهتزاز اللاحقة. وساعد دالمبير، من خلال عمله التقني ودوره التحريري في *الموسوعة* معاً، في إرساء الميكانيكا علماً عقلانياً مجرداً قابلاً للتطبيق العام.

6.7.5 جوزيف-لوي لاغرانج (1736–1813)

ولد جوزيف-لوي لاغرانج في تورينو عام 1736، وكانت آنذاك جزءاً من مملكة سردينيا. وشغل أبوه منصباً حكومياً وفر للأسرة في البداية أمناً مالياً، لكن ثروتها تراجعت لاحقاً، فعزز ذلك اعتماد لاغرانج على الإنجاز الفكري لا المكانة الاجتماعية. ومع أنه أعد أولاً لمسار قانوني أو إداري، تحول في شبابه بصورة حاسمة إلى الرياضيات بعد أن درس مستقلاً أعمال غاليليو ونيوتن وأويلر. ومن اللافت أنه كان عصامياً إلى حد كبير في الرياضيات العليا، وطور أفكاره خارج أي مدرسة نظامية أو تقليد راسخ.

وفي التاسعة عشرة كتب لاغرانج إلى أويلر يصف نتائجه المبكرة في حساب التغاير. وعرف أويلر موهبته فوراً، وأصبح مرشده ومناصره، وساعد في ضمان صعوده السريع داخل المجتمع العلمي الأوروبي. وشكل هذا الاستقلال المبكر، مقترناً بتشجيع أبرز محللي العصر، تفضيل لاغرانج الدائم للاستدلال المجرد والطرائق العامة على الحجج الهندسية أو التجريبية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الميكانيكا التحليلية وإقصاء القوة أعاد جوزيف-لوي لاغرانج بناء الميكانيكا من أساسها بعمله البارز *Mécanique Analytique* (Lagrange, 1788)، حيث ألغى مفهوم القوة بوصفه مفهوماً أولياً، وبنى النظرية كلها بدلاً من ذلك على مبدأ الشغل الافتراضي والطاقة. وبإدخال الإحداثيات المعممة والطرائق التغايرية، طور لاغرانج إطاراً يطبق بصورة موحدة على الأنظمة الميكانيكية المعقدة، سواء في الاستاتيكا أو الديناميكا. ومثل هذا النهج الغاية القصوى في *رياضنة* الميكانيكا، إذ اختزل جميع المسائل الفيزيائية إلى تمارين في الهندسة التحليلية وحساب التفاضل والتكامل.

وعلى خلاف ميكانيكا نيوتن، المتجذرة في القوى والمخططات والإنشاءات الهندسية، لم تتطلب صياغة لاغرانج سوى كميات قياسية وإحداثيات ومشتقات. وأدمجت القيود، سواء كانت تكاملية أم غير تكاملية، بصورة منظمة من خلال الإحداثيات المعممة بدلاً من حلها ببراعة هندسية. وأتاح هذا التجريد معالجة مسائل غير مسبوقة التعقيد بوضوح مفاهيمي واقتصاد رياضي.

***Mécanique Analytique* وإرثها** رفع نهج لاغرانج الميكانيكا إلى فرع من الرياضيات البحتة، وأرسى أساس تطورات لاحقة في الفيزياء، منها ميكانيكا هاملتون ونظرية الحقول والديناميكا التحليلية الحديثة. وتعلن المقدمة الشهيرة لـ*Mécanique Analytique* أن «القارئ لن يجد أي شكل في هذا العمل»، وهو تصريح مقصود بالمنهج: ينبغي ترميز البصيرة الفيزيائية كلها في المعادلات لا المخططات.

وتظل صيغ لاغرانج مركزية في الميكانيكا النظرية الحديثة والديناميكا الهندسية ونظرية التحكم. وتعود طرائق الطاقة والإحداثيات المعممة والمبادئ التغايرية، وهي اليوم أدوات معيارية في اشتقاق معادلات الحركة والاتزان، مباشرة إلى عمله. وستثبت هذه الرؤية التحليلية المحضة في القرن العشرين توافقها خصوصاً مع الميكانيكا الحسابية، حيث تمثل الأنظمة الفيزيائية وتحل بالمعالجة العددية للمعادلات لا بالإنشاء الهندسي.

يرد المزيد عن إسهامات لاغرانج العلمية في §10.3.2.2.

6.7.6 كوشي (أوغستان-لوي 1789–1857)

ولد أوغستان-لوي كوشي في باريس عام 1789، في مستهل الثورة الفرنسية. وتلقى تعليمه الرياضي في *École Polytechnique* المنشأة حديثاً، وهي مؤسسة أنشئت صراحة لتزويد الدولة بمهندسين مدربين في التحليل المتقدم. وتميز كوشي مبكراً بقدراته التحليلية الاستثنائية، وسرعان ما سلك مسيرة أكاديمية جمعت الرياضيات والميكانيكا والخدمة العامة. وتزامنت سنوات تكوينه مع تحول أوسع للميكانيكا في فرنسا، حيث ازداد النظر إلى التحليل الصارم بوصفه الأساس الصحيح للنظرية الفيزيائية.

الإجهاد عند نقطة والرؤية الموضعية للميكانيكا قدم أوغستان-لوي كوشي إسهامات عميقة في الرياضيات والميكانيكا النظرية، وأعاد تشكيل الأسس التحليلية للمرونة وميكانيكا الوسط المتصل من جذورها. وكان إسهامه الميكانيكي المركزي تقديم مفهوم *الإجهاد عند نقطة*. فقبل كوشي، حلل الميكانيكيون القوى المؤثرة في مقاطع عرضية كاملة، مثل الشد الكلي في قضيب أو محصلة الضغط في عمود. واستبدل كوشي بهذه الرؤية التكاملية رؤية موضعية، معرفاً الإجهاد بأنه النهاية لنسبة القوة إلى المساحة حين تنكمش المساحة إلى نقطة.

وأتاح هذا الانتقال من المحصلات العامة إلى الحقول النقطية صياغة معادلات تفاضلية جزئية تحكم حالة القوى الداخلية لأجسام بأي شكل وتحت أي تحميل، وهي المعادلات الأساسية للمرونة. وهكذا تحولت الميكانيكا من مجموعة حجج لاتزان القوى إلى تخصص حقلي تحكمه قوانين موضعية.

موتر الإجهاد والاتزان كانت إحدى البصائر الرئيسية أن الإجهاد عند نقطة لا يمكن تمثيله بكمية قياسية واحدة ولا حتى بمتجه. بل إن متجه الشد السطحي، أي القوة لكل وحدة مساحة، المؤثر في سطح يمر بنقطة يعتمد على اتجاه ذلك السطح. وبرهن كوشي أن هذا الاعتماد خطي: فإذا عرفت متجهات الشد على ثلاثة مستويات متعامدة، أمكن تحديد الشد على أي مستوى بتحويل خطي. وتعرف هذه النتيجة *موتر الإجهاد*، وهو موتر من الرتبة الثانية له تسعة مركبات، ستة منها مستقلة تحت شروط الاتزان.

وحدت صياغة موتر الإجهاد ظواهر بدت متباعدة من قبل: الشد والضغط والقص وتراكيبها في حالات إجهاد معقدة. واشتق كوشي قوانين التحويل التي تربط مركبات الإجهاد في أنظمة إحداثية مختلفة، وحدد الإجهادات الرئيسية والاتجاهات الرئيسية، وأرسى معادلات الاتزان الموضعية التي يجب أن تحققها حقول الإجهاد في الجسم كله. ووضعت هذه التطورات الأساس الرياضي لميكانيكا الوسط المتصل الحديثة.

من المرونة إلى الحساب يقع إطار كوشي في صميم الميكانيكا الحسابية الحديثة. فكل تحليل بالعناصر المحددة يحسب موترات الإجهاد عند نقاط التكامل، ويحولها إلى الإحداثيات الرئيسية، ويقارنها بالقوانين التكوينية ومعايير الانهيار، وهي إجراءات تنحدر مباشرة من صياغة كوشي. وقد وفر عمله اللغة والبنية اللازمتين للتطوير اللاحق للطرائق العددية في ميكانيكا المواد الصلبة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الصرامة والإرث إلى جانب الإجهاد، أسهم كوشي في نظرية الانفعال والعلاقات التكوينية التي تربط الإجهاد بالتشوه، وفي الأسس الصارمة للتحليل الرياضي، ومنها التعريفات الدقيقة للنهايات والتقارب والدوال المركبة. وحول إصراره على الدقة المنطقية الميكانيكا من فرع في الفلسفة الطبيعية إلى علم رياضي. ولا يزال الجهاز المفاهيمي الذي قدمه، من موترات الإجهاد والانفعال ومعادلات الاتزان والتوافق والعلاقات التكوينية، أساس ميكانيكا المواد الصلبة والهندسة الإنشائية.

يرد المزيد عن إسهامات كوشي العلمية في §10.3.2.4.

6.7.7 جورج غرين (1793–1841)

ولد جورج غرين عام 1793 في نوتنغهام بإنجلترا، في أسرة محدودة الموارد. ولم يتلق إلا قدراً يسيراً من التعليم النظامي، وعمل معظم حياته طحاناً، مساعداً في تشغيل طاحونة أسرته الهوائية. ومع ذلك طلب غرين الرياضيات مستقلاً، ودرس أعمالاً تحليلية متقدمة بنفسه إلى حد كبير. وجرى تطوره العلمي في عزلة شبه تامة عن المؤسسات الأكاديمية، مما يجعل إسهاماته اللاحقة أكثر لفتاً. ولم يدخل جامعة كامبريدج إلا في أواخر حياته، حيث عرف عمله السابق أخيراً وأدمج في التيار الرياضي العام.

مقالة 1828 ونظرية الجهد نشر غرين عام 1828، وهو يعمل خارج المجتمع العلمي الراسخ، مقالة فريدة بعنوان *مقالة في تطبيق التحليل الرياضي على نظريتي الكهرباء والمغناطيسية*. وقدمت هذه المقالة ما يعرف اليوم بنظرية غرين ودوال غرين، وهما مفهومان سيصبحان تأسيسيين في الفيزياء الرياضية.

ومع أن المقالة صيغت ضمن نظرية الجهد، امتدت آثارها أبعد كثيراً من الكهرباء والمغناطيسية. وبتقديم هويات تكاملية تربط قيم الحقل داخل مجال بقيمه على الحد، وفر غرين طريقة قوية لحل مسائل القيم الحدية. وأثبتت هذه الأفكار ضرورتها لا في الكهرباء الساكنة وحدها، بل في المرونة وميكانيكا الموائع وانتقال الحرارة، حيث تشترك المعادلات الحاكمة في بنية إهليلجية عامة.

طرائق الطاقة والرؤية التغايرية قدم عمل غرين ضمناً رؤية قائمة على الطاقة والتغاير لحل المعادلات التفاضلية الجزئية. وبالتعبير عن الحلول بمؤثرات تكاملية ودوال نواة، أرسى أساس طرائق سيصوغها لاحقاً تومسون، اللورد كلفن، ورايلي وغيرهما في دراسة الطاقة المرنة والاستقرار والاهتزاز. وكشف نهجه كيف يمكن استخدام الكميات العامة، كالطاقة والشغل، لتحديد سلوك الحقل الموضعي، وهي رؤية مركزية في ميكانيكا الوسط المتصل الحديثة.

طرائق الحدود والإرث الحسابي على الرغم من أن غرين لم ينشر في حياته إلا حفنة من الأوراق، فإن إرثه دائم. وتشكل دوال غرين اليوم العمود الفقري لكثير من التقنيات التحليلية والعددية في الهندسة والفيزياء. وعلى وجه الخصوص، تعتمد الطرائق الحسابية الحديثة القائمة على الحدود، وأبرزها طريقة العناصر الحدية (BEM)، اعتماداً كاملاً على هويات غرين لتحويل مسائل الحجم إلى صيغ حدية مكافئة. وتستخدم هذه الطرائق على نطاق واسع في المرونة الخطية والصوتيات والكهرومغناطيسية وميكانيكا الكسر وديناميكا الموائع.

وحدة الفيزياء الرياضية يقف عمل غرين برهاناً لافتاً على وحدة الفيزياء الرياضية: فالتقنيات المطورة لنظرية فيزيائية تظهر كثيراً من جديد، من دون تغير كبير، في نظريات أخرى. وتجسد مقالته لعام 1828 كيف يمكن لبصيرة رياضية عميقة، حتى حين تطور في عزلة وتطبق على مسألة ضيقة، أن تشكل تخصصات كاملة. وتظل أفكار غرين لا غنى عنها في الميكانيكا الإنشائية والتحليل الحسابي بعد قرابة قرنين من تقديمها.

6.7.8 أديمار جان كلود باريه دو سان-فنان (1797–1886)

ولد أديمار جان كلود باريه دو سان-فنان عام 1797 في فيلييه-أون-بيير بفرنسا. وتدرب مهندساً مدنياً، والتحق بـ*École des Ponts et Chaussées*، حيث اقترن التعليم الرياضي الصارم صراحة بالتعليم الهندسي العملي. وحدد هذا التكوين المزدوج، التحليلي والإنشائي، مسيرته كلها. وعلى خلاف الميكانيكيين الأكاديميين المحض، عمل سان-فنان عند ملتقى النظرية والتطبيق، باحثاً عن صيغ سليمة رياضياً وقابلة لاستخدام المهندسين الممارسين.

تنظيم نظرية المرونة اشتهر سان-فنان أكثر بصقل نظرية المرونة التي طورها أسلافه، ولا سيما نافييه وكوشي، وتنظيمها. وحسن عمومية نظرية المرونة بإدخال قوى الجسم وشروط الحدود صراحة، معالجاً قيود صيغ نافييه الأصلية. وبذلك حول المرونة من نظرية أنيقة رياضياً لكنها ناقصة إلى إطار متماسك قابل للتطبيق على المسائل الهندسية الحقيقية.

وأدى سان-فنان دوراً وسيطاً حاسماً بين ميكانيكا الوسط المتصل المجردة والممارسة الهندسية. وبترجمة المفاهيم الميكانيكية

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المعقدة إلى منهجيات يستطيع المهندسون تطبيقها مباشرة، أرسى جانباً كبيراً من الأساس النظري للتحليل الإنشائي الحديث، وهو أساس ما زال مركزياً في الممارسة الهندسية اليوم.

التواء القضبان المنشورية وانحناؤها تتعلق أشهر إسهامات سان-فنان بالتواء القضبان المنشورية وانحنائها. وكانت مسألة الالتواء، أي تحديد توزيع الإجهاد وزاوية الالتواء حين يتعرض قضيب لعزم لي، قد قاومت الحل للمقاطع العرضية غير الدائرية. وطور سان-فنان طريقة عامة قائمة على دوال الإجهاد أتاحت حلولاً للمقاطع المستطيلة والإهليلجية وغيرها من المقاطع غير الدائرية.

وكشفت نتائجه ظواهر مهمة ومخالفة للحدس: يقع إجهاد القص الأقصى في مقطع مستطيل عند منتصف الضلعين الأطول لا عند الزوايا، وتكون المقاطع المفتوحة رقيقة الجدران ضعيفة جداً في الالتواء مقارنة بالمقاطع المغلقة. وتظل هذه البصائر ذات صلة مباشرة بالتصميم الإنشائي الحديث.

وفي الانحناء، وسع سان-فنان نظرية نافييه للعوارض إلى المقاطع غير المتناظرة، مبيناً كيف تسبب الأحمال التي لا تمر بمركز القص انحناءً والتواءً مجتمعين. وحلل تركيزات الإجهاد قرب نقاط تطبيق الحمل وعند الانقطاعات الهندسية، مبيناً كيف يمكن لحقول الإجهاد الموضعية أن تختلف اختلافاً كبيراً عن تنبؤات نظرية العوارض الأولية. وأظهرت حلوله للأحمال المركزة أن هذه الآثار الموضعية تتلاشى سريعاً مع الابتعاد عن الحمل.

مبدأ سان-فنان قادت هذه الملاحظات إلى مبدأ سان-فنان، ولعله أكثر إسهاماته تأثيراً. ويقول المبدأ إن حقل الإجهاد على مسافة كافية من منطقة محملة يعتمد على محصلة القوة والعزم فقط، لا على التوزيع التفصيلي للحمل.

ولهذا المبدأ عواقب عملية عميقة: فهو يتيح للمهندسين استبدال شروط حدية معقدة بأخرى مكافئة استاتيكياً، وتحليل المنشآت من دون معرفة دقيقة بتوزيعات الأحمال، والاطمئنان إلى أن التفاصيل الموضعية للدعامات والوصلات لا تؤثر كثيراً في الإجهادات بعيداً عن تلك المناطق. ويقوم مبدأ سان-فنان وراء افتراضات تبسيطية كثيرة في التحليل الإنشائي، ويبرر استخدام شروط حدية مثالية.

العمل التحريري والإرث حرر سان-فنان أيضاً الطبعة الثالثة من *Résumé* لنافييه، وأضاف إليها شروحاً واسعة، وترجم رسالة كليبش في المرونة، مضيفاً ملاحظات ضخمة كانت في ذاتها إسهامات أصلية. وحول عمل حياته المرونة من نظرية مصقولة رياضياً إلى أداة هندسية عملية.

وتظل صيغ الصلابة الالتوائية وتوزيعات الإجهاد في العوارض المنحنية والتقوس الالتوائي للمقاطع غير الدائرية والمبدأ الذي يحمل اسمه جزءاً من لغة العمل اليومية للمهندسين الإنشائيين.

يرد المزيد عن إسهامات سان-فنان العلمية في §10.3.2.8.

6.8 صعود الهندسة الإنشائية بوصفها تخصصاً

يعكس هذا القسم نشوء *الهندسة الإنشائية* بوصفها تخصصاً علمياً ومهنياً مستقلاً. فقد صيغت طرائق التحليل والتصميم، وتوضحت العلاقة بين النظرية والممارسة. وينصب التركيز على التأسيس المؤسسي والتقنين والهوية التخصصية.

6.8.1 كارل كولمان (1821-1881)

النشأة والتكوين الهندسي ولد كارل كولمان عام 1821 في بيرغتسابرن بمنطقة بالاتينات الألمانية. وتدرب مهندساً في معهد كارلسروه متعدد التقانات، حيث تلقى تعليماً صارماً في الرياضيات والميكانيكا والإنشاء العملي. وأظهر كولمان منذ البداية ميلاً قوياً إلى الاستدلال الهندسي والتمثيل البصري، مفضلاً النهج البياني الحدسي على الحساب الجبري المحض. وشكلت هذه الخلفية التكوينية، الجامعة بين التدريب الرياضي والتعرض للأشغال المدنية واسعة النطاق، سعيه طوال حياته إلى جعل التحليل الإنشائي صارماً ومفهوماً فوراً للمهندسين الممارسين معاً.

أسس كولمان (Culmann, 1866) الاستاتيكا البيانية بوصفها تخصصاً منظماً، وحول تقنيات هندسية متفرقة إلى منهجية شاملة للتحليل الإنشائي. وأرسى كتابه *Die Graphische Statik*، أي الاستاتيكا البيانية، المنشور في زيورخ عام 1866 بطبعة

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ثانية موسعة كثيراً عام 1875، طرائق بصرية لتحليل القوى في الجمالونات والإطارات والأقواس والجدران الساندة، وهي طرائق هيمنت على الممارسة الهندسية قرابة قرن.

تدرب كولمان في معهد كارلسروه متعدد التقانات، وعمل مهندس سكك حديدية في بافاريا قبل السفر إلى بريطانيا والولايات المتحدة (1849–1851) لدراسة هندسة الجسور. وعرف تقريره عن الجسور الخشبية والحديدية الأمريكية مهندسي القارة بالممارسات الأمريكية المبتكرة. وفي عام 1855 أصبح أستاذاً للعلوم الهندسية في المعهد التقني الاتحادي السويسري (ETH) المنشأ حديثاً في زيورخ، حيث بنى واحداً من أبرز برامج الهندسة الإنشائية في أوروبا.

تستغل الاستاتيكا البيانية الازدواجية بين القوة والهندسة: يمكن تمثيل القوى بمتجهات، والتعبير عن شروط الاتزان بانغلاق مضلعات. ونظم كولمان هذه العلاقات من خلال مضلع القوى، الذي يمثل مقادير القوى واتجاهاتها، والمضلع الحبلي، الذي يمثل خطوط عملها ونقاط تطبيقها. ويتيح التفاعل بين المخططين، وهما شكلان متبادلان في اصطلاح ماكسويل، الحل السريع لمسائل اتزان معقدة من دون حساب جبري.

وفي تحليل الجمالونات، أتاحت طرائق كولمان للمهندسين تحديد جميع قوى الأعضاء بيانياً بإنشاء مخطط واحد يقابل فيه كل عضو قطعة مستقيمة يمثل طولها مقدار القوة. وفي الأقواس والكبلات، يمثل المضلع الحبلي خط الدفع مباشرة، فيتيح للمصممين تصور كيفية تدفق القوى في المنشآت المنحنية. وفي الجدران الساندة، تحدد الإنشاءات البيانية ضغوط التربة ونقاط تطبيقها. وكانت هذه الطرائق، التي لا تتطلب سوى فرجار ومسطرة ومقياس، أسرع كثيراً من الحساب الجبري للمنشآت المعقدة في العصر الصناعي.

وامتد تأثير كولمان إلى ما وراء التقنيات بعينها ليشمل فلسفة في التعليم الهندسي تؤكد الحدس الهندسي والاستدلال البصري. ونشر طلابه وخلفاؤه الاستاتيكا البيانية في أوروبا والعالم، ومنهم فيلهلم ريتر الذي واصل التقليد البياني، وموريس كوشلَن الذي طبق هذه الطرائق في تصميم برج إيفل. وظلت الطرائق ممارسة معيارية إلى أن جعلت الحواسيب الإلكترونية النهج الجبري أكفأ، وحتى اليوم يوفر الاستدلال البياني بصيرة في السلوك الإنشائي لا يضاهيها الحساب المحض. وأسهم كولمان أيضاً في تصوير حقول الإجهاد؛ فقد ألهمت مخططاته لمسارات الإجهاد الرئيسي في العوارض عمل عالم التشريح يوليوس فولف على إعادة تشكيل العظام، وما زالت تظهر في الكتب الدراسية لتوضيح كيفية تدفق القوى في العناصر الإنشائية.

6.8.2 ويليام جون ماكورن رانكين (1820-1872)

ولد ويليام جون ماكورن رانكين عام 1820 في إدنبرة باسكتلندا، في أسرة ذات اهتمامات تقنية وعلمية قوية. ولم يتلق تعليماً جامعياً نظامياً في الرياضيات أو الفيزياء؛ بل كان عصامياً إلى حد كبير، يدرس الميكانيكا المتقدمة والرياضيات والديناميكا الحرارية مستقلاً أثناء عمله متدرباً في الهندسة المدنية. وعزز هذا المسار غير المألوف نهجاً عملياً وتوليفياً في الميكانيكا، ارتبطت فيه الصياغة النظرية دائماً بالتطبيق الهندسي. وشكل تعرض رانكين المبكر لمسائل إنشائية حقيقية، مقترناً بالدراسة الذاتية الصارمة، سعيه الدائم إلى تقديم الميكانيكا علماً متماسكاً صالحاً لاستخدام المهندسين الممارسين.

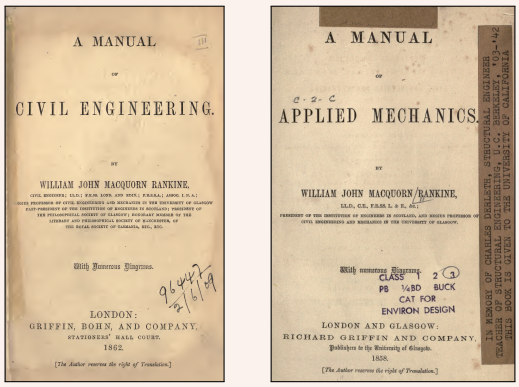
كان رانكين (Rankine, 1858) من مؤسسي علم الديناميكا الحرارية وشخصية محورية في إرساء الميكانيكا الهندسية تخصصاً صارماً في العالم الناطق بالإنجليزية. وقد وصل كتابه *دليل الميكانيكا التطبيقية*، المنشور أول مرة عام 1858 والمنقح في طبعات كثيرة، الفجوة بين الميكانيكا النظرية والهندسة العملية، وعرض طرائق رياضية متقدمة في صور يستطيع المهندسون الممارسون فهمها.

وكان رانكين عصامياً إلى حد كبير في الرياضيات والفيزياء، ومع ذلك قدم إسهامات أساسية في الديناميكا الحرارية، كدورة رانكين للمحركات البخارية ومقياس رانكين لدرجة الحرارة، وميكانيكا التربة والتحليل الإنشائي. وعين أستاذاً ملكياً للهندسة المدنية والميكانيكا في جامعة غلاسكو عام 1855، وجمع الصرامة الأكاديمية بالخبرة الهندسية العملية المكتسبة في مشروعات السكك الحديدية والمرافئ والمجاري المائية. وأصبحت كتبه، التي تناولت الميكانيكا التطبيقية والهندسة المدنية والآلات والمحرك البخاري، مراجع معيارية في العالم الناطق بالإنجليزية.

وتظل صياغة رانكين لنظرية ضغط التربة تأسيسية في التصميم الجيوتقني والإنشائي. فقد حلل الاتزان الحدي لكتل التربة، وحدد الضغوط الفعالة والمنفعلة التي تؤثر بها التربة في الجدران الساندة تحت شروط مثالية. وتوفر معاملات ضغط التربة لرانكين، المشتقة من افتراض تربة عديمة التماسك بسطوح انهيار مستوية، نقطة البدء لتصميم الجدران الساندة وتحليل استقرار المنحدرات. ومع أن نظرية الإسفين الأعم لكولوم وطرائق التحليل الحدي الحديثة صقلتها لاحقاً، يظل نهج رانكين أول أداة يلجأ إليها المهندسون في التصميم الأولي.

جمع *دليل الميكانيكا التطبيقية* مقاومة المواد والاستقرار الإنشائي والمرونة في إطار متماسك للتعليم الهندسي. وعرض رانكين ميكانيكا المواد ونظرية العوارض وانبعاج الأعمدة وتحليل الإطارات والأقواس بدقة رياضية مع الحفاظ على التركيز في التطبيق العملي. واستبقت معالجته لطرائق الطاقة تطورات لاحقة في التحليل الإنشائي، وأثر عرضه الواضح للمبادئ الأساسية في أجيال من المهندسين المتدربين في التقليد البريطاني.

ومن اللافت أنه، في زمن كان الميكانيكيون والمهندسون المدنيون الممارسون يتقاسمون فيه إلى حد كبير إطاراً فكرياً مشتركاً، ألف رانكين *دليل الميكانيكا التطبيقية* (Rankine, 1858) و*دليل الهندسة المدنية* (Rankine, 1862) معاً، الشكل 6.19. وجسد بذلك توليفاً بين النظرية الصارمة والممارسة الهندسية يناقض بشدة التجزؤ الحاضر، حيث يسير المجتمعان في كثير من الأحيان في مسارين متوازيين ضعيفي الصلة.



a) Rankine, 1858) b) Rankine, 1862)

شكل 6.19: دليلا رانكين الواصلان بين الميكانيكا التطبيقية والهندسة المدنية

وأسهم رانكين أيضاً في العمارة البحرية، فحلل استقرار السفن وحركة تدحرجها، وفي تخصص الديناميكا الحرارية الناشئ، حيث وازى عمله على خصائص البخار وكفاءة المحركات الحرارية عمل كلاوزيوس وكلفن. وجسد اتساعه اللافت، الممتد في الهندسة المدنية والميكانيكية والبحرية، المثال الفيكتوري للمهندس-العالم. وساعد توليف رانكين في رفع الهندسة من فن عملي إلى تخصص رياضي مكتمل، وأرسى الأسس النظرية التي دعمت المنجزات الهندسية العظيمة في العصر الصناعي.

6.8.3 كريستيان أوتو مور (1835–1918)

ولد كريستيان أوتو مور عام 1835 في فيسلبورن بدوقية هولشتاين. وتلقى تعليماً تقنياً صارماً في مدرسة هانوفر متعددة التقانات، حيث تكاملت الرياضيات والميكانيكا والهندسة العملية تكاملاً وثيقاً. وعمل مور في مطلع مسيرته مهندس سكك حديدية، فاكتسب خبرة مباشرة بالجسور والأعمال الترابية والأنظمة الإنشائية الخاضعة لظروف تحميل حقيقية. وشكل هذا الجمع بين التدريب التحليلي والخبرة الهندسية العملية نهجه المميز في الميكانيكا: نهجاً يطلب الوضوح والعمومية والقابلية المباشرة للتطبيق في التصميم الإنشائي.

قدم مور (Mohr, 1874) إسهامات تأسيسية في التحليل الإنشائي ما زالت مركزية في الممارسة الهندسية، وطور أدوات بيانية وتحليلية يستخدمها المهندسون يومياً بعد أكثر من قرن على تقديمها. وشمل عمله تحليل الإجهاد وحساب الإزاحة وخطوط التأثير ومعايير الانهيار، وهو اتساع في الإسهام لا يضاهيه إلا قليل من الشخصيات في تاريخ الميكانيكا الإنشائية.

درس مور في مدرسة هانوفر متعددة التقانات، وعمل مهندس سكك حديدية قبل أن يصبح أستاذاً في معهد شتوتغارت متعدد التقانات (1867)، ثم في معهد دريسدن متعدد التقانات (1873)، حيث بقي حتى تقاعده عام 1900. وأرسى تدريسه وبحثه دريسدن مركزاً رائداً لتعليم الهندسة الإنشائية في ألمانيا.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تقدم دائرة مور (1882) تمثيلاً بيانياً أنيقاً لتحويل الإجهاد. فإذا أعطيت مركبات الإجهاد على أي مستويين متعامدين، بين مور أن الإجهادات على جميع المستويات الممكنة المارة بنقطة يمكن تمثيلها بنقاط على دائرة في مستوى σ-τ. وتكشف هندسة الدائرة فوراً الإجهادات الرئيسية، أي النقطتين المتطرفتين على المحور الأفقي، وإجهاد القص الأقصى، أي نصف قطر الدائرة، واتجاهات هذه المستويات الحرجة. ويحول هذا التصوير، الذي ما زال يدرس في كل مقرر تمهيدي للميكانيكا، تحويلات الموتر المجردة إلى علاقات هندسية حدسية.

ولعل الأهم للتحليل الإنشائي أن مور طور طريقة حمل الوحدة، وتسمى أيضاً طريقة الحمل الوهمي أو طريقة ماكسويل-مور، التي تحسب الإزاحات في المنشآت بصورة منظمة بتطبيق مبدأ الشغل الافتراضي. ولإيجاد الإزاحة عند أي نقطة، يطبق حمل وحدة وهمي عندها، وتحدد القوى الداخلية الناتجة، وهي في اتزان مع حمل الوحدة لكن ليس بالضرورة متوافقة، ثم يكامل حاصل ضرب هذه القوى «الافتراضية» في التشوهات الفعلية في المنشأ كله. وأصبحت هذه الطريقة، القابلة للتطبيق على المنشآت المحددة وغير المحددة استاتيكياً معاً، أساس نهج المرونة في التحليل الإنشائي.

وقدم مور أيضاً نظرية خطوط التأثير، وهي مخططات تبين كيف تتغير القوى الداخلية أو ردود الأفعال أو الإزاحات عند نقطة حين يتحرك حمل وحدة على المنشأ. وأتاح تطويره المنظم لإنشاء خطوط التأثير، الضروري لتصميم الجسور تحت الأحمال المتحركة، التحليل العقلاني لجسور السكك الحديدية والطرق. ويوفر مخطط ويليو-مور، الذي طور بالتعاون مع المهندس الفرنسي ويليو، طريقة بيانية لتحديد انحرافات الجمالونات من استطالات الأعضاء، وهي تقنية تكشف السلوك الحركي للمنشآت بطرق لا تستطيعها الطرائق العددية المحضة.

وكانت إسهامات مور في الهندسة الجيوتقنية مهمة بالقدر نفسه. ويظل معيار انهيار مور-كولوم، الذي يجمع تمثيل مور لحالات الإجهاد بقانون كولوم للانهيار الاحتكاكي في التربة، النموذج المعياري لمقاومة التربة والصخور. ويتيح تمثيله البياني لأغلفة الانهيار تقييماً سريعاً لما إذا كانت حالة إجهاد معينة ستسبب انهياراً، وهو ضروري لتصميم الأساسات وتحليل استقرار المنحدرات وحساب الجدران الساندة.

6.8.4 هنري موزلي (1801–1872)

النشأة والتكوين الرياضي ولد هنري موزلي عام 1801 في لندن، وتعلم في كلية ترينيتي بجامعة كامبريدج، حيث تلقى تدريباً صارماً في الرياضيات في زمن هيمن فيه امتحان كامبريدج الرياضي على التعليم التحليلي البريطاني. ورُسم موزلي قساً أنغليكانياً، لكنه تابع الرياضيات التطبيقية والميكانيكا بكثافة غير مألوفة، عاكساً زمناً كثيراً ما تعايشت فيه الواجبات الكنسية والبحث العلمي. وشكل تعرضه المبكر للتحليل المجرد والاستدلال العملي معاً مسيرة كرست لترجمة الميكانيكا الرياضية إلى صور يستطيع المهندسون والمعماريون استخدامها.

كان موزلي (Moseley, 1843) من أوائل من طبقوا نظرية المرونة بصورة منظمة على المسائل الإنشائية العملية، وأنتج كتاباً درب جيلاً من المهندسين على التحليل الرياضي للمنشآت. ومثل كتابه *المبادئ الميكانيكية للهندسة والعمارة*، المنشور عام 1843، تقدماً مهماً في التعليم الهندسي باللغة الإنجليزية، إذ عرض طرائق تحليلية صارمة لانحناء العوارض وانبعاج الأعمدة وتحليل الأقواس في صورة ميسرة.

عالج *المبادئ الميكانيكية* تحليل المنشآت بصرامة رياضية غير مسبوقة في كتاب إنجليزي. وتناول موزلي انحناء العوارض باستخدام نظرية المرونة الناشئة، واشتق صيغ الانحراف وتوزيعات الإجهاد التي أتاحت تحديد نسب العناصر الإنشائية على أساس عقلاني. ووسع تحليله لاستقرار الأعمدة نظرية أويلر في الانبعاج إلى التصميم العملي، آخذاً في الاعتبار آثار العيوب والتحميل اللامركزي التي تظهر حتماً في الأعمدة الحقيقية. وفي أقواس البناء، طور موزلي «مبدأ الضغوط الدنيا»، وحلل استقرار أقواس القطع الإسفينية بدراسة خط الدفع وعلاقته بهندسة القوس.

وكان تأثير الكتاب كبيراً ودولياً. وأعيد طبعه في الأكاديمية العسكرية للولايات المتحدة في ويست بوينت، مع ملاحظات إضافية لدينيس هارت ماهان، وأصبح نصاً معيارياً للتعليم الهندسي الأمريكي. ونقلت الترجمات الألمانية طرائق موزلي إلى جمهور القارة. وأرسى عرضه الواضح للتقنيات التحليلية، مقترناً بأمثلة محلولة كثيرة، نموذجاً للكتب الهندسية ما زال قائماً اليوم.

وامتدت اهتمامات موزلي إلى ما وراء المنشآت، فشملت كفاءة الآلات واستقرار السفن وميكانيكا العجلات المائية. وأسهم عمله على الاستقرار الديناميكي، أي تحليل الشروط التي تعيد الأجسام الطافية إلى الاتزان بعد اضطرابها، في العمارة البحرية. وجسد موزلي طوال مسيرته تطبيق التحليل الرياضي على المسائل العملية، وساعد في تحويل الهندسة الإنشائية من حرفة تقودها قواعد

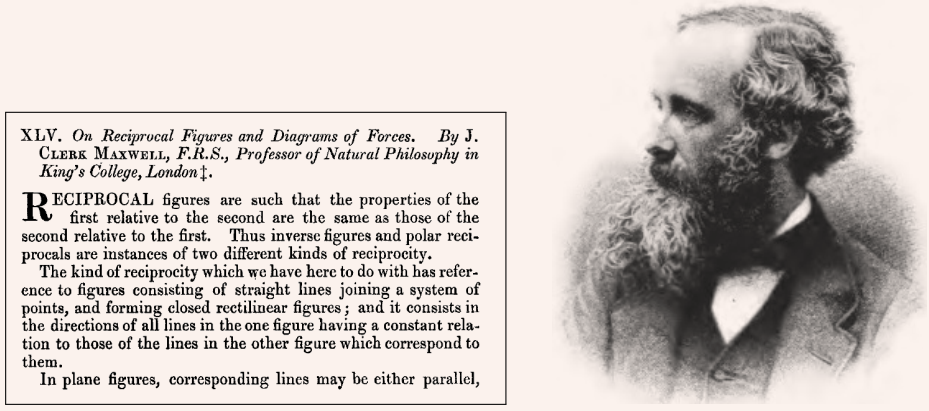
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تجريبية إلى علم تطبيقي مؤسس على الميكانيكا. ولا ينبغي الخلط بينه وبين حفيده الفيزيائي هنري موزلي (1887–1915)، الذي أرسى مفهوم العدد الذري قبل وفاته في غاليبولي.

6.8.5 جيمس كليرك ماكسويل (1831–1879)

ولد جيمس كليرك ماكسويل عام 1831 في إدنبرة باسكتلندا، ونشأ في ضيعة أسرته الريفية في غلينلير. وأظهر منذ صغره استعداداً غير مألوف للهندسة والاستدلال الفيزيائي، وأنجز بحوثاً هندسية أصلية وهو لا يزال طالب مدرسة. وتعلم في جامعة إدنبرة ثم في كلية ترينيتي بجامعة كامبريدج، حيث تلقى أقوى تدريب ممكن في الرياضيات والفلسفة الطبيعية. وشكل هذا الانغماس المبكر في الهندسة والتحليل والحدس الفيزيائي عادة ماكسويل الدائمة في البحث عن علاقات بنيوية عميقة خلف الظواهر الفيزيائية المتنوعة.

اشتهر ماكسويل (Maxwell, 1890) بوصفه أحد أعظم الفيزيائيين في التاريخ لنظريته الكهرومغناطيسية، لكنه قدم أيضاً إسهامات أساسية في الميكانيكا الإنشائية بتطويره المخططات المتبادلة لتحليل الجمالونات. وأرست ورقته في *الأشكال المتبادلة ومخططات القوى* (Maxwell, 1864c) (Maxwell, 1864a)، المنشورة عام 1864، الأساس النظري للطرائق البيانية التي هيمنت على التحليل الإنشائي عقوداً.


XLV. *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces.* By J. Clerk Maxwell, *F.R.S., Professor of Natural Philosophy in King's College, London*‡.

RECIPROCAL figures are such that the properties of the first relative to the second are the same as those of the second relative to the first. Thus inverse figures and polar reciprocals are instances of two different kinds of reciprocity.

The kind of reciprocity which we have here to do with has reference to figures consisting of straight lines joining a system of points, and forming closed rectilinear figures; and it consists in the directions of all lines in the one figure having a constant relation to those of the lines in the other figure which correspond to them.

In plane figures, corresponding lines may be either parallel,

شكل 6.20: جيمس كليرك ماكسويل

تعلم ماكسويل في إدنبرة وكامبريدج، حيث ظهرت قدراته الرياضية الاستثنائية فوراً. وشملت مسيرته مناصب في أبردين وكلية كينغز بلندن وكامبريدج، حيث أصبح أول أستاذ كافندش للفيزياء. ومع أن معادلاته الكهرومغناطيسية، التي وحدت الكهرباء والمغناطيسية والضوء، تمثل أعظم إنجازاته، فإن عمله في الميكانيكا الإنشائية ورؤية الألوان والديناميكا الحرارية والنظرية الحركية للغازات يبرهن على الاتساع الاستثنائي لعبقريته.

تستغل مخططات ماكسويل المتبادلة ازدواجية أساسية بين مخططات القوى والهندسة الإنشائية. فعند تحليل جمالون، ينشأ مخطط قوى يقابل كل مضلع فيه عقدة في المنشأ، وتمثل كل قطعة مستقيمة القوة في عضو يصل عقدتين متجاورتين. وبين ماكسويل أن مخطط القوى هذا هو «متبادل» المخطط الإنشائي: فالخطوط المتوازية في أحدهما متوازية في الآخر، وتحكم العلاقات بينهما قواعد هندسية دقيقة. وتتيح هذه التبادلية تحديد جميع قوى الأعضاء بالتزامن في إنشاء بياني واحد.

وكانت الأهمية العملية هائلة. فحيث تطلبت الطرائق الجبرية حل أنظمة معادلات متزامنة، وهو عمل شاق معرض للخطأ قبل آلات الحوسبة، أتاحت مخططات ماكسويل للمهندسين تحديد القوى في جمالونات معقدة بإنشاء هندسي. وكانت الطريقة ملائمة خصوصاً للجمالونات المحددة استاتيكياً الشائعة في جسور وأسقف القرن التاسع عشر، حيث يمكن تحديد قوة كل عضو من الاتزان وحده.

وتجاوزت معالجة ماكسويل النظرية التقنيات العملية إلى إرساء صلات عميقة بين الميكانيكا الإنشائية والهندسة الإسقاطية. وبين وجود الأشكال المتبادلة كلما كان الإطار محدداً استاتيكياً، وطور معايير لوجود هذه المخططات ووحدانيتها. وأثر عمله

في الاستاتيكا البيانية لكولمان، ووسعه كريمونا الذي تحمل طريقته المنظمة لإنشاء مخططات القوى اسمه، أي مخطط ماكسويل-كريمونا.

وأسهم ماكسويل أيضاً بنظرية الإزاحات المتبادلة، أو نظرية ماكسويل للتبادل، التي تقول إن الإزاحة عند النقطة A بسبب حمل وحدة عند النقطة B تساوي الإزاحة عند النقطة B بسبب حمل وحدة عند النقطة A في منشأ مرن خطي. ولهذه النتيجة البسيطة ظاهرياً آثار عميقة: فهي تقلل عدد معاملات التأثير المستقلة، وتتيح التحقق التجريبي من النماذج التحليلية، وتقع وراء تناظر مصفوفتَي الصلابة والمرونة في التحليل الإنشائي الحديث (Maxwell, 1864c). ويستدعى مبدأ ماكسويل للتبادل، غالباً ضمناً، كلما استخدم المهندسون خطوط التأثير أو طبقوا طريقة المرونة على المنشآت غير المحددة.

6.9 المؤلفات التاريخية الكبرى في الميكانيكا

تتوحد الشخصيات المجموعة هنا بانخراطها في *تاريخ الميكانيكا* نفسه. فبدلاً من تقديم نظريات جديدة، جمعت التطورات السابقة وفسرتها، وشكلت كيفية فهم الميكانيكا ونقلها. وتوفر أعمالها الاستمرارية والرؤية والبنية النقدية للتخصص.

6.9.1 إسحاق تودهَنتر (1820–1884)

أنتج إسحاق تودهَنتر (1820–1884) (Todhunter **and** Pearson, 1893) أشمل رواية تاريخية كتبت عن تطور نظرية المرونة وميكانيكا المواد. ويظل عمله الضخم *تاريخ نظرية المرونة ومقاومة المواد، من غاليليو إلى الزمن الحاضر*، المنشور بعد وفاته عام 1886 والموسع على يد كارل بيرسون حتى 1893، مرجعاً لا غنى عنه لكل من يسعى إلى فهم كيف أصبحت المرونة إطاراً أساسياً في الميكانيكا الإنشائية.

كان تودهَنتر رياضياً في كامبريدج بالغ الاجتهاد، وألف كتباً في حساب التفاضل والتكامل والجبر وعلم المثلثات والاستاتيكا التحليلية دربت أجيالاً من الطلاب البريطانيين. لكن إسهامه الدائم يقع في أعماله التاريخية: دراسات شاملة لحساب التغاير ونظرية الاحتمالات والنظريات الرياضية للتجاذب، أي الجاذبية ونظرية الجهد، وثق كل منها تطور الأفكار الرياضية بتفصيل استقصائي. وكان تاريخ المرونة، الذي ظل ناقصاً عند وفاته، أكثر مشروعاته طموحاً.

يوثق العمل بدقة تطور الصيغ الرياضية من تحليل غاليليو الرائد لمقاومة العوارض إلى المعالجات الصارمة عند نافييه وكوشي وبواسون وغرين وسان-فنان. وحلل تودهَنتر المصادر الأصلية، التي كانت كثيراً ما باللاتينية والفرنسية والألمانية والإيطالية، ولخص محتوى مئات المذكرات والرسائل وطرائقها واستنتاجاتها. وتحفظ رواياته للجدالات حول عدد الثوابت المرنة والصياغة الصحيحة لشروط الحدود وتفسير النتائج التجريبية تفاصيل كانت ستضيع من التاريخ لولاها.

وكان كارل بيرسون (1857–1936)، الذي أكمل العمل ووسعه بعد وفاة تودهَنتر، شخصية مهمة في ذاته، اشتهر لاحقاً مؤسساً للإحصاء الرياضي، وجلب إلى المشروع تطوراً رياضياً وحكماً نقدياً. ويمتد التاريخ المكتمل من غاليليو (1638) إلى اللورد كلفن وأواخر القرن التاسع عشر، في أكثر من 2500 صفحة موزعة على ثلاثة مجلدات. وكملت إضافات بيرسون التحريرية، ولا سيما بشأن النظريات الجزيئية للمرونة وإسهامات الفيزيائيين البريطانيين، معالجة تودهَنتر الدقيقة لرياضيات القارة.

وبالنسبة إلى مؤرخي الميكانيكا والهندسة الإنشائية، يظل تودهَنتر وبيرسون نقطة البداية لأي بحث جاد. فلا يوثق العمل النجاحات وحدها، بل الطرق المسدودة ونزاعات الأسبقية والتوضيح التدريجي لمفاهيم تبدو بديهية اليوم. ويكشف كيف نشأت نظرية الإجهاد والانفعال، التي تدرس اليوم مادة أولية، عبر عقود من جهد خيرة العقول الرياضية في أوروبا.

6.9.2 ستيفن بروكوفييفيتش تيموشينكو (1878–1972)

كان ستيفن بروكوفييفيتش تيموشينكو (شبوتيفكا، أوكرانيا، 1878–فوبرتال، ألمانيا، 1972) أبرز ميكانيكي إنشائي في القرن العشرين، ودربت كتبه في مقاومة المواد والمرونة والاهتزازات والاستقرار أجيالاً من المهندسين في العالم. ودرس في معهد سانت بطرسبرغ متعدد التقانات، ثم خدم في هيئته التدريسية إلى أن أجبرته الاضطرابات السياسية بعد الثورة الروسية على الرحيل. ودرّس تباعاً في كرواتيا (زغرب) وتشيكوسلوفاكيا (براغ)، ثم هاجر إلى الولايات المتحدة عام 1922. وبعد فترة قصيرة في شركة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وستنغهاوس الكهربائية في بيتسبرغ، انضم إلى جامعة ميشيغان (1927)، ثم جامعة ستانفورد (1936)، حيث أسس أبرز برنامج للميكانيكا التطبيقية في أمريكا الشمالية، وأرشد جيلاً من الباحثين الذين سيشغلون كليات الهندسة في أنحاء البلاد. وتحمل ميدالية تيموشينكو للجمعية الأمريكية للمهندسين الميكانيكيين، الممنوحة سنوياً منذ 1957 لإسهامات متميزة في الميكانيكا التطبيقية، اسمه تكريماً لإرثه.

الكتب والإسهامات التقنية أصبحت كتب تيموشينكو مراجع معيارية في مجالاتها، وترجمت إلى عشرات اللغات واستخدمت عقوداً: *مسائل الاهتزاز في الهندسة* (1928)، و*مقاومة المواد* (1930)، و*نظرية المرونة* مع غوديير (1934)، و*نظرية الاستقرار المرن* مع غيري (1936)، و*نظرية الصفائح والقشريات* مع وينوفسكي-كريغر (1940). وتشمل إسهاماته التقنية «نظرية عارضة تيموشينكو»، التي تراعي تشوه القص في العوارض السميكة، وتظل ضرورية للتحليل الدقيق للعوارض العميقة والمنشآت الشطيرية.

تاريخ مقاومة المواد يتتبع كتابه *تاريخ مقاومة المواد*، المنشور عام 1953 (Timoshenko, 1953)، تطور علم ميكانيكا المواد الصلبة من العصور القديمة إلى الأزمنة الحديثة بسلطة ممارس كبير قدم بنفسه المجال. وعلى خلاف توثيق تودهَنتر وبيرسون الاستقصائي، يؤكد *تاريخ* تيموشينكو تطور الفهم الفيزيائي والتطبيق الهندسي. ويتتبع كيف تآلفت البصائر التجريبية في انهيار المواد والمرونة والاستقرار الإنشائي ببطء في إطار علمي متماسك. ويعالج الكتاب العالم القديم وعصر النهضة بإيجاز قبل التركيز على القرنين الثامن عشر والتاسع عشر وأوائل القرن العشرين، وهي الفترة التي نشأت فيها مقاومة المواد علماً هندسياً. وتضفي معرفة تيموشينكو الشخصية بكثير من شخصيات القرن العشرين، مثل برانتل وفوبل وفون كارمان وغيرهم، حيوية على فصوله اللاحقة، بينما تحمل أحكامه على الأهمية النسبية للإسهامات، المستنيرة بحياة من التدريس والبحث، سلطة لا تضاهيها الروايات التاريخية المحضة. ويضم *التاريخ* أيضاً أكثر من 200 سيرة موجزة وصورة، حافظت على معلومات عن شخصيات أقل شهرة كانت ستظل لولاها بعيدة عن القراء الناطقين بالإنجليزية. ويوفر عمل تيموشينكو للمهندسين الإنشائيين تعليماً تقنياً وهوية مهنية معاً، أي شعوراً بالانتماء إلى تقليد يمتد من أول تحليل متردد لغاليليو لعارضة كابولية إلى الطرائق الحسابية المتطورة اليوم. ويظل أسهل تاريخ لميكانيكا المواد وأمتعها قراءة.

6.9.3 رينيه دوغاس (1897–1957)

كان دوغاس ميكانيكياً فرنسياً ومؤرخاً للعلوم، وأنتج واحداً من أشمل تواريخ الميكانيكا وأكثرها تطوراً فلسفياً. وتعلم في *École Polytechnique*، وأمضى مسيرته هناك أستاذاً للميكانيكا، وارثاً تقليد الميكانيكا العقلانية الفرنسية المنحدر من لاغرانج ولابلاس وبواسون. ويعكس عمله التاريخي هذه الخلفية: عناية دقيقة بالصيغ الرياضية، وتقديراً للتفاعل بين العلم البحت والتطبيقي، وحساسية للأبعاد الفلسفية للمفاهيم الميكانيكية.

Histoire de la Mécanique يتتبع كتابه *Histoire de la Mécanique* (1950)، المترجم إلى الإنجليزية بعنوان *تاريخ الميكانيكا* (1955) (Dugas, 1955) وبمقدمة للوي دو بروي، تطور الفكر الميكانيكي من اليونان القديمة إلى القرن العشرين، موضحاً كيف شكلت الحاجات العملية والتطورات النظرية معاً علم الحركة والاتزان. ويبدأ العمل بالاستاتيكا والحركيات اليونانيتين، من تحليلات أرخميدس للرافعة وتأملات أرسطو وخلفائه في الحركة، ويتتبع إسهامات العصور الوسطى التي أبقت المعرفة الميكانيكية حية وقدمتها بطرق دقيقة. وتحظى الثورة العلمية بمعالجة موسعة: حركيات غاليليو، ومبادئ الانحفاظ عند ديكارت، وديناميكا هوينغنس، وتوليف نيوتن الكبير. ثم يتابع دوغاس تطور الميكانيكا التحليلية في القرن الثامن عشر عند آل برنولي وأويلر ودالمبير ولاغرانج، وتفصيل ميكانيكا الوسط المتصل والديناميكا الحرارية والفيزياء الإحصائية في القرن التاسع عشر.

العمق الفلسفي يولي دوغاس عناية خاصة للأسس المفاهيمية للميكانيكا: تعريفات القوة والكتلة والقصور؛ ومكانة قوانين نيوتن بوصفها مسلمات أو تعميمات تجريبية؛ والمبادئ التغايرية التي تعيد صياغة الميكانيكا بشروط القيم القصوى والدنيا. ويميز هذا العمق الفلسفي عمله عن التواريخ التقنية المحضة. ويوضح كيف نشأت مفاهيم تبدو بديهية بأثر رجعي، كالطبيعة المتجهة للقوة والتمييز بين الكتلة والوزن وجمع الطاقات، عبر صراع ونقاش طويلين. ويوفر دوغاس للمهندسين الإنشائيين سياقاً ضرورياً: فطرائق التحليل الإنشائي، من معادلات الاتزان والشغل الافتراضي ومبادئ الطاقة، تطبيقات للميكانيكا العامة على فئات بعينها من الأنظمة. ويعمق فهم كيفية تطور هذه المبادئ، والبدائل التي درست ورفضت، والجدالات التي صاحبت قبولها، تقدير الأدوات المستخدمة اليوم بصورة روتينية. ويكشف توليف دوغاس الصلات العميقة بين الميكانيكا الإنشائية والمشروع الأوسع للعلم الفيزيائي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.9.4 كليفورد أمبروز تروسدل الثالث (1919–2000)

كان كليفورد أمبروز تروسدل الثالث (لوس أنجلوس، 1919–بالتيمور، 2000) شخصية فريدة في ميكانيكا القرن العشرين: رياضياً أصر على الصرامة، ومؤرخاً قرأ المصادر الأصلية بلغاتها الأصلية، ومجادلاً تلذذ بتقويض السمعة وثقب الأساطير. وتعلم في معهد كاليفورنيا للتقنية (بكالوريوس، 1941) وبرنستون (دكتوراه، 1943)، وأمضى معظم مسيرته في جامعة إنديانا (1950–61) وجامعة جونز هوبكنز (1961–89). وأسس تروسدل دوريتي *أرشيف الميكانيكا العقلانية والتحليل* (1957) و*أرشيف تاريخ العلوم الدقيقة* (1960)، وأرسى معايير صارمة للدقة في المجالين. وكانت إسهاماته التقنية في ميكانيكا الوسط المتصل، ولا سيما الصياغة العقلانية للمعادلات التكوينية والديناميكا الحرارية للمواد، مؤثرة، لكن عمله التاريخي أثبت أهمية مماثلة في إعادة تشكيل فهم الباحثين لتطور الفيزياء الكلاسيكية. وكان تروسدل غريب الأطوار على نحو مشهور: رفض السفر بالطائرة، وتنقل في كل مكان بالسفن أو القطارات، واحتفظ بمكتبة شخصية هائلة ادعى أنها تضم كل عمل مهم كتب في الميكانيكا. وتراسل باللاتينية مع باحثين أوروبيين، واستبعد مدارس فكرية كاملة بنثر لاذع، ووصف مرة عمل فيزيائي بارز بأنه «خليط من الهراء مزين بالمحاسن الأدبية المعتادة». وكانت قدرته على الخصومات العلمية أسطورية؛ فقد خاض نزاعات امتدت عقوداً مع زملائه على نقاط في الصرامة الرياضية أو التفسير التاريخي، وكثيراً ما دارت على صفحات الدوريات الأكاديمية بسم أدهش حتى الأكاديميين المخضرمين.

مقالات في تاريخ الميكانيكا يشرح كتاباه مقالات في *تاريخ الميكانيكا* (1968) (Truesdell, 1968) و*تاريخ الميكانيكا الكلاسيكية* (Truesdell, 1976) تطور ميكانيكا الوسط المتصل بحدة نقدية تكشف كيف أخرت أوجه سوء الفهم والأخطاء والغموض صياغة المرونة وديناميكا الموائع والديناميكا الحرارية. ويجمع المجلد أوراقاً عن تاريخ الميكانيكا الكلاسيكية والمرونة والديناميكا المائية والديناميكا الحرارية. ويقترب تروسدل من موضوعاته بعين عالم ممارس: لا يهتم فقط بمن قال ماذا ومتى، بل بصحة ما قالوه، وإذا أخطؤوا فلماذا استمرت أخطاؤهم. وتتتبع مقالته عن تاريخ الإجهاد والانفعال كيف نشأت هذه المفاهيم الأساسية، التي تبدو اليوم أولية، تدريجياً فقط، وسط ارتباك كبير بشأن الفرق بين القوة الكلية والقوة لكل وحدة مساحة، وبين الإزاحة والانفعال، وبين سلوك المادة والتشوه الهندسي.

الجدالات الجزيئية يلقي تروسدل ضوءاً خاصاً على الجدالات الجزيئية في مرونة القرن التاسع عشر: النقاشات حول إمكان اشتقاق الثوابت المرنة من نماذج جزيئية، وإذا أمكن فكم ثابتاً مستقلاً يمكن أن تملكه المادة، في مقابل النهج الظاهراتي الذي يأخذ العلاقات التكوينية حقائق تجريبية تحددها التجربة. ويبين كيف أدى نهج كوشي الجزيئي، مع خصوبته في إرساء مفهوم موتر الإجهاد، إلى تنبؤات غير صحيحة، مثل نظرية «الثابت النادر» التي لا تتطلب سوى ثابت مرن واحد للمواد متساوية الخواص، فأربكت الموضوع عقوداً. وكتبت المقالات بحيوية تروسدل وذكائه المعهودين. فهو لا يتردد في وصف حجة مشوشة بأنها مشوشة، أو تحديد خطأ أغفلته أجيال لاحقة. وهذا الموقف النقدي، وإن كان قاسياً أحياناً، يؤدي غرضاً نافعاً: فهو يذكر القراء بأن تاريخ العلم ليس مسيرة ظافرة من الجهل إلى المعرفة، بل عملية متعثرة معرضة للخطأ، رفضت فيها أفكار جيدة كثيراً وقبلت أفكار رديئة كثيراً. وتوفر مقالات تروسدل للمهندسين الإنشائيين المعتادين على معاملة نظرية المرونة كحقيقة مستقرة رؤية مفيدة لمدى صعوبة كسب تلك الحقيقة.

وإلى جانب هذه الأعمال الضرورية، لم يصادف المؤلف معالجات تاريخية أخرى للميكانيكا الإنشائية شاملة أو نافذة بما يكفي لتستحق الإدراج هنا. وهذا الغياب جدير بالملاحظة في ذاته: فتاريخ الهندسة الإنشائية، وهو تخصص شكل البيئة المبنية للحضارة البشرية، لا يزال مهملاً من المؤرخين. وهذا المجلد محاولة متواضعة لمعالجة هذه الثغرة، وإحضار تاريخ الهندسة الإنشائية بصورة ملموسة إلى جيل جديد من المهندسين الذين قد لا يعرفون إلا القليل عن الصراعات الفكرية والبدايات الخاطئة وومضات البصيرة والتراكم الصبور للمعرفة التي جعلت مهنتهم ممكنة. وإذا أيقظت هذه الصفحات في مهندس شاب تقديراً للعمالقة الذين نقف جميعاً على أكتافهم، عد المؤلف جهده مثمراً.

6.10 نساء بارزات

سيكون من غير الصدق الادعاء بأن النساء المناقشات في هذا القسم قدمن إسهامات في الميكانيكا بمقياس إسهامات أويلر أو لاغرانج أو كوشي. لم يفعلن. لكن سيكون من غير الصدق بالقدر نفسه تجاهلهن، لأن إنجازاتهن، إذا قيست بالعوائق المؤسسية التي واجهنها، كانت لافتة. ولو كن رجالاً، ربما لم يستحققن ذكراً خاصاً؛ لكن وجودهن أصلاً في السجل التاريخي جدير بالملاحظة،

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بوصفهن نساء في عصر أغلقت فيه الجامعات أبوابها أمامهن، ورفضت الجمعيات العلمية عضويتهن، وكثيراً ما تطلب النشر أسماء مستعارة ذكورية. وأدرجهن هنا لا لتشويه الرواية، بل للإقرار بأن تاريخ الميكانيكا، مثل كل تاريخ، تشكل بمن سمح لهم بالمشاركة.

إميلي دو شاتليه (1706–1749) كانت غابرييل إميلي لو تونيلييه دو بريتوي، مركيزة دو شاتليه، فيلسوفة طبيعية ورياضياتية وفيزيائية فرنسية. ولدت في الطبقة الأرستقراطية وأتيح لها تعليم صارم بصورة غير معتادة، فأصبحت من أبرز مفسري الفيزياء النيوتنية في القارة. وظلت ترجمتها لـ*مبادئ نيوتن الرياضية* إلى الفرنسية (Newton, 1687)، التي أتمتها قبيل وفاتها ونشرت بعدها، الطبعة الفرنسية المعيارية أكثر من قرن، وما زال يرجع إليها اليوم. لكن دو شاتليه لم تكن مترجمة فحسب: فقد أوضحت تعليقاتها الواسعة حجج نيوتن ووسعتها وصححتها في مواضع، وأدخلت تطورات من رياضيات القارة لم يستخدمها نيوتن نفسه.

وإلى جانب *المبادئ الرياضية*، أسهمت في جدل *vis viva*، أي النقاش حول ما إذا كانت الكمية المحفوظة في العمليات الميكانيكية هي كمية الحركة (mv) أم ما ندركه اليوم طاقة حركية (mv^2). وجادل كتابها *Institutions de Physique* (Châtelet, 1740) لصالح الثانية، مولفاً أفكار لايبنتس ونيوتن بطرق استبقت المفهوم الحديث للطاقة. وإن قدرة امرأة على التدخل الموضوعي في نزاع يشمل لايبنتس وآل برنولي والأكاديمية الفرنسية لتشهد على استثنائية عقلها ومكانتها.

صوفي جيرمان (1776–1831) كانت ماري-صوفي جيرمان رياضياتية فرنسية قدمت إسهامات دائمة في نظرية الأعداد ونظرية المرونة معاً. ولما حرمت دخول المدرسة متعددة التقانات المنشأة حديثاً بسبب جنسها، حصلت على مذكرات المحاضرات عن طريق معارف ذكور، وقدمت أعمالها المبكرة بالاسم المستعار «السيد لو بلان». وحين اكتشف لاغرانج الهوية الحقيقية لمراسله المجهول، أصبح مرشدها، وهو تأييد منح عملها مصداقية ربما كان سيحرمها لولاه.

نشأ أهم إسهام لجيرمان في الميكانيكا من انخراطها المثابر في مسألة الصفيحة المهتزة التي طرحتها أكاديمية باريس عام 1809، بعد عروض إرنست كلادني المدهشة لأنماط العقد على صفائح معدنية مهتزة. وعرضت الأكاديمية جائزة لنظرية رياضية تفسر هذه الأنماط، وهي مسألة هزمت عدداً من كبار الرياضيين. وقدمت جيرمان مشاركات أعوام 1811 و1813 وأخيراً 1816، حين نالت الجائزة (Germain, 1821). وأنتج نهجها، رغم خلل اشتقاق شروط الحدود، معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الرابعة تحكم انحراف الصفيحة، وبعد أن صححها لاغرانج وصقلها كيرشهوف لاحقاً أصبحت تأسيسية في نظرية الصفائح:

$$D\nabla^4 w = q$$

حيث D صلابة الانثناء، وw الانحراف المستعرض، وq الحمل الموزع. وتظل هذه المعادلة، التي تسمى أحياناً معادلة جيرمان-لاغرانج اعترافاً بأسبقيتها، مركزية في التحليل الإنشائي للصفائح الرقيقة. وإن قدرة امرأة عصامية تعمل في عزلة إلى حد كبير على تقديم إسهام دائم في مسألة شغلت لاغرانج وبواسون ونافييه لتشهد على قدرتها وتصميمها معاً.

إيمي نويثر (1882–1935) كانت أمالي إيمي نويثر رياضياتية ألمانية حول عملها الجبر المجرد والفيزياء الرياضية. ومع أن إسهاماتها تقع أساساً خارج الميكانيكا الإنشائية بالمعنى الدقيق، فإن نظريتها الشهيرة التي تربط التناظرات بقوانين الانحفاظ (Noether, 1918) توفر أعمق أساس للمبادئ التغايرية المنتشرة في الميكانيكا التحليلية، ومنها معادلات أويلر-لاغرانج التي وردت في (§9.3.2.2).

تقول نظرية نويثر، في جوهرها، إن كل تناظر مستمر لنظام فيزيائي يقابله مقدار محفوظ: فتناظر الإزاحة الزمنية ينتج انحفاظ الطاقة؛ وتناظر الإزاحة المكانية ينتج انحفاظ كمية الحركة؛ والتناظر الدوراني ينتج انحفاظ الزخم الزاوي. ووحدت هذه البصيرة، التي طلبها هيلبرت وكلاين في سياق النسبية العامة، قوانين فيزيائية بدت من قبل منفصلة في إطار رياضي واحد.

وكجيرمان قبلها، واجهت نويثر إقصاءً مؤسسياً. فلم يسمح لها بالمحاضرة في غوتنغن إلا باسم هيلبرت، وحين طرد النازيون أعضاء هيئة التدريس اليهود عام 1933 هاجرت إلى الولايات المتحدة، حيث توفيت بعد عامين. ووصفها تأبين أينشتاين في نيويورك *تايمز* بأنها «أهم عبقرية رياضية إبداعية ظهرت حتى الآن منذ بدء التعليم العالي للنساء» (Einstein, 1935). وسواء قبل المرء هذا التقييم أم لا، تظل نظريتها لا غنى عنها لكل من يسعى إلى فهم سبب نجاح الطرائق التغايرية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6.11 التحليل والسياق

6.11.1 المنافسة والسرية والتقدم العلمي

6.11.1.1 طرائق الإخفاء

لم يكن العصر الحديث المبكر عصراً ذهبياً للاكتشاف العلمي فحسب، بل للارتياب الفكري أيضاً. فقبل الدوريات المحكمة والمسوَّدات الأولية ذات الطابع الزمني بزمن طويل، لم يكن لدى العلماء آلية رسمية لإثبات الأسبقية، فكثيراً ما لجؤوا إلى استراتيجية غير مألوفة: نشر نتائجهم في شيفرة. وعكست هذه الممارسة مخاوف أعمق بشأن الملكية الفكرية والسمعة المهنية والقيمة الاقتصادية للمعرفة العلمية، في عصر كان يمكن فيه للرعاية ونزاعات الأسبقية أن تصنعا المسيرة أو تحطماها.

وسواء كان ذلك بـ*التشفير*، أي طريقة لتحويل الرسالة بصورة منظمة لإخفاء مضمونها، أو بـ*اللغز* الحرفي حيث تبعثر حروف عبارة في ترتيب جديد، أو بأحاج لاتينية غامضة، كان الهدف واحداً: غرس راية من دون كشف الأرض. وجمعت هذه الممارسة الغريبة خوفاً حقيقياً من السرقة الفكرية بذوق عصر النهضة في الألغاز، الجدول 6.5.

جدول 6.5: مقارنة طرائق التعمية التي استخدمها علماء العصر الحديث المبكر

المثال والأمان	السمات الرئيسية	التقنية	الطريقة
هوك: *ceiiinosssttuv* ⟶ *Ut tensio, sic vis*. برنولي: أخفى حل الإلاستيكا في لغز حرفي في نهاية *Specimen al-terum* لعام 1690. الأمان: منخفض	عدد حروف ثابت؛ تبديل بسيط؛ بلا مفتاح منظم	إعادة ترتيب الحروف	لغز حرفي
هوينغنس ولايبنتس: تبادلا الشيفرات في مراسلات السلسلة المعلقة. واستخدم برنولي أيضاً شيفرات استبدال في ملاحظاته الخاصة. الأمان: مرتفع	ترميز محكوم بقاعدة؛ يتطلب مفتاح فك؛ نهج خوارزمي	استبدال منظم	شيفرة
برنولي: طرح تحدي الإلاستيكا بلغز حرفي وأحجية وموعد نهائي، عيد حصاد 1690. الأمان: متغير	يجمع طرائق متعددة؛ يضم أحاج وتلاعباً لفظياً؛ وكثيراً ما يحوي قرائن	أحجية متعددة المستويات	لغز متعدد الطبقات
ديكارت: إشارات غامضة إلى الاكتشافات. غاليليو: أخر النشر وأبقى النتائج في الرسائل. الأمان: منخفض جداً	بلا ترميز صوري؛ يعتمد على الحذف؛ إجراء مؤقت	حجب أو تلميحات	إخفاء

لم يكن هؤلاء العلماء حذرين فحسب؛ بل كانوا تنافسيين وسريين وكثيراً ما انعدم بينهم الثقة. وكانت النتيجة مزيجاً غريباً من العبقرية والشك: زمن أخفت فيه أعظم عقول العالم بصائرها داخل ألغاز، تحسباً لمحاولة أحد سرقتها.[56] الجدول 6.6.

أمثلة

هوك

[56] يستخدم الباحثون اليوم مستودعات مسودات أولية ذات طابع زمني، مثل *X1* أو arXiv، لإثبات الأسبقية بلا تأخير، بما يضمن الانفتاح والنسبة معاً. ويمثل ذلك تحولاً جذرياً عن السرية المشفرة في الثقافة العلمية المبكرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.6: ألغاز حرفية وشيفرات وغيرها

المعنى المفكوك	النص المشفر	الطريقة	العالم
Ut tensio, sic vis («كما الاستطالة، كذلك القوة»)	*ceiiinosssttuv*	لغز حرفي	روبرت هوك § 6.6.6
Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum («كما يتدلى حبل مرن، كذلك تقوم، إذا قلبت، قطع القوس الصلبة المتلامسة»)	*abcccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprrsssttttttuuuuuuuux*	لغز حرفي	
Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa («إذا أعطيت معادلة تشمل أي عدد من الكميات المتدفقة، فأوجد الفلوكسونات؛ والعكس»)	*6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux*	لغز بعدد الحروف	إسحاق نيوتن §6.6.7
Altissimum planetam tergeminum observavi («رصدت أبعد كوكب في صورة ثلاثية»)	*Smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras*	لغز طويل	غاليليو غاليلي § 6.6.2
لمح إلى اكتشافات في البصريات والهندسة نشرت لاحقاً	بلا شيفرة، بل تلميحات مستترة	نتائج محجوبة	رينيه ديكارت
Portio axis applicatam inter et tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatae ad constans quoddam spatium	*Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipdandtt tcpgkbp aqdbkzs*	لغز حرفي	ياكوب برنولي § 9.3

✓ceiiinosssttuv

نحتاج إلى إعادة ترتيب هذه الحروف الأربعة عشر لتكوين نص لاتيني ذي معنى يصف مبدأ علمياً.

لنبدأ بفهرسة الحروف المتاحة:

جدول 6.7: الحروف المتاحة في لغز هوك الحرفي

الحرف	العدد	الحرف	العدد	الحرف	العدد
c	1	i	3	s	3
e	1	n	1	t	2
o	1	u	1	v	1

الأنماط الأساسية:

- مجموع الحروف: 14
- المصوتات: 6 = e(1)، i(3)، o(1)، u(1) مصوتات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- الصوامت: 8 = v(1)، t(2)، s(3)، n(1)، c(1) صوامت
- الأكثر تكراراً: t(2)، s(3)، i(3)

نهج فك التعمية المنظم:

1. تحديد الكلمات اللاتينية الشائعة: سيبحث عالم من القرن السابع عشر عن أنماط لاتينية مألوفة:

جدول 6.8: كلمات لاتينية شائعة يمكن تكوينها

الكلمة	الحروف المستخدمة	المعنى
ut	u, t	كما/عندما
est	e, s, t	يكون
et	e, t	و
si	s, i	إذا
sic	s, i, c	هكذا/كذلك
in	i, n	في
vis	v, i, s	قوة/شدة

2. البحث عن مصطلحات تقنية: بالنظر إلى سياق هوك العلمي، نبحث عن مصطلحات ميكانيكية:

جدول 6.9: مصطلحات علمية ممكنة من الحروف المتاحة

الكلمة المحتملة	الحروف المطلوبة	متاحة؟
tensio (شد)	t,e,n,s,i,o	✓
motus (حركة)	m,o,t,u,s	X (لا يوجد m)
vis (قوة)	v,i,s	✓

3. تجربة تراكيب الكلمات:

(a) المحاولة 1: البدء بـ"ut"

المستخدم: ut(u,t)
المتبقي: ceiiinosssv

هل يمكن تكوين "tensio"؟ نتحقق: o(1)، i(3)، s(3)، n(1)، e(1)، t(1)

المستخدم: tensio(t,e,n,s,i,o)
المتبقي: ciissv

(b) المحاولة 2: متابعة النمط: هل يمكن، من الحروف المتبقية ciissv، تكوين:

المستخدم: sic(s,i,c)
المتبقي: isv
المستخدم: vis(v,i,s)
المتبقي: لا شيء

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(c) ظهور الحل: بترتيب الكلمات المكتشفة:

ut tensio, sic vis

وهذا يتبع الإنشاء اللاتيني الكلاسيكي:

- "ut...sic" = «كما...كذلك» (بنية مقارنة)
- "tensio" = شد، استطالة (حالة المجرور)
- "vis" = قوة، شدة (حالة الرفع)

بعد ذلك نتحقق بعد الحروف:

جدول 6.10: التحقق من استخدام الحروف

الحرف	الأصل	الحل	التطابق
c	1	(*sic*) 1	✓
e	1	(*tensio*) 1	✓
i	3	(*tensio*, *sic*, *vis*) 3	✓
n	1	(*tensio*) 1	✓
o	1	(*tensio*) 1	✓
s	3	(*tensio*, *sic*, *vis*) 3	✓
t	2	(*ut*, *tensio*) 2	✓
u	1	(*ut*) 1	✓
v	1	(*vis*) 1	✓
المجموع	**14**	**14**	✓

وأخيراً، تترجم العبارة المفكوكة إلى:

«كما الشد، كذلك القوة»

لاحظ أن:

- **1676**: نشر اللغز الحرفي لإثبات الأسبقية
- **1678**: كشف الحل في *De Potentia Restitutiva*
- **الأهمية الحديثة**: أساس نظرية المرونة والهندسة الميكانيكية

برنولي التحدي الذي طرحه ياكوب برنولي لحل مسألة الإلاستيكا (§9.3.1)

Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipdandtt tcpgkbp aqdbkzs

Bernoulli, Jakob, 1694 "*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*"; لغز متعدد الطبقات

باستخدام الجدول 6.11، (Alassi, 2020)

تستخدم الشيفرة:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.11: فك لغز برنولي متعدد الطبقات للإلاستيكا، (Alassi, 2020)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y	z
1	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y
2	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
3	s	t	u	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

الصف	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	[2]	1	2	...
الشيفرة	Q	r	z	u	m	u	b	a	p	t	d	x	q	o	p	d	d	b	b	p	p	o	y	l	[u]	f	y	...
النص الصريح	p	o	r	t	i	o	a	x	i	s	a	p	p	l	i	c	a	t	a	m	i	n	t	e	[r]	e	7	...

- الصف 1: إزاحة واحدة إلى اليمين
- الصف 2: إزاحتان إلى اليمين
- الصف 3: ست إزاحات إلى اليمين ثم يتكرر النمط

وهذا يفسر لماذا يفك "Qrzumu bapt..." إلى "portio axis..."، فهو يستخدم جدول الاستبدال المبين سابقاً بنمط 1-2-3 متكرر.

لغز نيوتن الحرفي : نشر إسحاق نيوتن عام 1676 لغزاً حرفياً مشفراً لإثبات أسبقيته في اكتشاف حساب التفاضل والتكامل، أي طريقة الفلوكسونات، مع إبقاء الطريقة نفسها سرية، (Newton, 1960). وكانت هذه الممارسة شائعة بين رياضيي القرن السابع عشر لحماية الملكية الفكرية قبل النشر الكامل.

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux

Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa

---

«إذا أعطيت معادلة تشمل أي عدد من الكميات المتدفقة، فأوجد الفلوكسونات؛ والعكس»

"Newton, 1960 "*Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676*

هذا **لغز تكراري** حيث:

- تشير الأعداد إلى عدد مرات ظهور الحرف التالي
- تظهر الحروف التي بلا أعداد مرة واحدة
- يعاد ترتيب الحروف كلها بعد ذلك لتكوين الجملة اللاتينية

فك الترميز خطوة بخطوة:

العدد الكلي للحروف المتاحة لإعادة الترتيب:

تصف رسالة نيوتن المفكوكة النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل :

- **الفلوكسونات** = المشتقات، أي معدلات التغير
- **الكميات المتدفقة** = التكاملات، أي الكميات المتراكمة
- تثبت النظرية العلاقة العكسية بين التفاضل والتكامل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.12: تفكيك شيفرة نيوتن

الشيفرة	المعنى	الشيفرة	المعنى
6a	6 حروف a	cc	حرفا c
d	حرف d واحد	a	حرف a إضافي واحد
e	حرف e واحد	13e	13 حرف e إضافياً
ff	حرفا f	7i	7 حروف i
3l	3 حروف l	9n	9 حروف n
4o	4 حروف o	4q	4 حروف q
rr	حرفا r	4s	4 حروف s
8t	8 حروف t	12u	12 حرف u
x	حرف x واحد		

جدول 6.13: تكرار الحروف الكامل

الحرف	العدد	الحرف	العدد	الحرف	العدد	الحرف	العدد
a	7	e	14	i	7	o	4
c	2	f	2	l	3	q	4
d	1	n	9	r	2	s	4
t	8	u	12	x	1		

وفي الترميز الحديث، تقابل عبارة نيوتن:

$$\text{المعطى: } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\text{إذن: } F'(x) = f(x)$$

$$\text{والعكس: } \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

كان هذا اللغز رد نيوتن على نزاع الأسبقية الناشئ مع لايبنتس حول اختراع حساب التفاضل والتكامل. وبنشر الصيغة المشفرة عام 1676، استطاع نيوتن أن يثبت لاحقاً أنه اكتشف المبادئ الأساسية قبل منشور لايبنتس لعام 1684.

وللتحقق من فك الشيفرة، يمكن:

1. عد الحروف في النص اللاتيني المفكوك
2. تأكيد مطابقتها للتكرار المحدد في الشيفرة
3. إعادة ترتيب الحروف أبجدياً لإعادة بناء اللغز الأصلي

تكشف استمرارية هذه الممارسة مدى اعتماد التقدم العلمي على السمعة والاعتراف الفرديين، بدلاً من الهياكل المؤسسية التعاونية التي ستنشأ لاحقاً.

حتى غاليليو، وهو يحدق عبر مقرابه، لم يقاوم تحويل الفلك إلى لعبة كلمات مشفرة. وفي عالم تصنع فيه الأسبقية السمعة أو تحطمها، كان العلم يتقدم حقاً، لكن كثيراً ما تحت القفل واللغز الحرفي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حتى غاليليو، وهو يحدق عبر مقرابه، لم يقاوم تحويل الفلك إلى لعبة كلمات مشفرة. وفي عالم تصنع فيه الأسبقية السمعة أو تحطمها، كان العلم يتقدم حقاً، لكن كثيراً ما تحت القفل واللغز الحرفي.

6.11.1.2 النزاعات وآثارها

كما نوقش في §6.11.1.1، لم يتسم العصر الحديث المبكر بالتألق الفكري وحده، بل بالمنافسة الشديدة والسرية والشك أيضاً. وكثيراً ما لجأ العلماء إلى الشيفرات والألغاز الحرفية وغيرها من أساليب التعمية لضمان ادعاءاتهم مع إخفاء بصائرهم. ولم تكن ثقافة الإخفاء مجرد سمة طريفة للعصر، بل عكست حقيقة أعمق: لطالما تشابك الاكتشاف العلمي مع المنافسات والنزاعات وأسئلة الأسبقية.

ولم تدفع الثورة العلمية العبقرية الفردية وحدها، بل شبكات معقدة من التنافس والتعاون والتبادل الفكري. ويساعد فهم هذه العلاقات الشخصية في تفسير سرعة الاكتشاف والنزاعات المريرة أحياناً التي صاحبت الاختراقات الكبرى.

يوثق الجدول 6.14 أبرز الصراعات الفكرية التي شكلت تطور الميكانيكا. ومع أنها كانت خلافية في أحيان كثيرة، فقد سرعت التقدم العلمي كثيراً بإجبار المشاركين على تطوير حجج أدق وشروح أوضح.

وبدلاً من النظر إلى هذه النزاعات على أنها مشتتات مؤسفة عن التقدم العلمي، ينبغي إدراكها جزءاً أصيلاً من الديناميات التنافسية التي دفعت التقدم السريع. وأصبح إثبات الأسبقية حاسماً لا للسمعة الشخصية وحدها، بل لضمان الرعاية والمناصب الأكاديمية والدعم المؤسسي. وبهذا المعنى كانت المنافسة العلمية محركاً قوياً للابتكار، حتى حين سببت معاناة شخصية للأفراد المعنيين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.14: الصراعات الفكرية الكبرى في تطور الميكانيكا

القرن	الشخصيات	الموضوع	طبيعة النزاع	النتيجة/الأثر
16	تيخو براهي ضد كبلر	النماذج السماوية	حل وسط مركزي أرضي (تيخو) ضد قطع ناقصة مركزية شمسية (كبلر)	سادت قوانين كبلر
16	غاليليو ضد الكنيسة	مركزية الشمس	دافع غاليليو عن كوبرنيكوس؛ أدانت الكنيسة مركزية الشمس هرطقة	حاكمت محاكم التفتيش غاليليو
16	غاليليو ضد سيمبليتشيو	العلم الأرسطي	تصوير ساخر للآراء الأرسطية في *الحوار*	عمق الصراع مع الكنيسة
17	نيوتن ضد هوك	قانون الجاذبية	ادعى هوك الأسبقية؛ واستاء نيوتن	أغفل نيوتن هوك في *المبادئ الرياضية*
17	نيوتن ضد لايبنتس	اختراع حساب التفاضل والتكامل	أدت الاكتشافات المستقلة إلى نزاع قومي وأكاديمي	نسب الفضل في النهاية إليهما معاً
17	بويل ضد هوبز	المنهج العلمي	التجريبية (بويل) ضد الاستنباط العقلاني (هوبز)	شكل الممارسة العلمية الحديثة
18	نزاع أسرة برنولي	حساب التغاير	منافسة وادعاءات انتحال بين ياكوب ويوهان ودانيال	حفز تطورات رئيسية
18	أويلر ضد دالمبير	الأوتار المهتزة	خلاف على صياغة المعادلات التفاضلية الجزئية وتفسيرها	قدم أسس التحليل
19	بواسون ضد نافييه	نظرية المرونة	افتراضات الوسط المتصل ضد الافتراضات الجزيئية في نمذجة الإجهاد والانفعال	وحد كوشي لاحقاً الاثنين بميكانيكا الموتر
19	كوشي ضد بواسون	الصرامة في الميكانيكا	انتقد كوشي صيغ بواسون لافتقارها إلى الصرامة الرياضية	أصبحت نظرية كوشي القائمة على الموتر معيارية
19	المدارس البريطانية ضد القارية	الميكانيكا	*fluxions* البريطانية ضد صرامة القارة ودوالها	أنشأ انقساماً ثقافياً طويل الأمد

6.11.2 الانتقال إلى العلوم الهندسية الحديثة

دبرت الشخصيات المعروضة في هذا الفصل مجتمعة تحولاً أساسياً في كيفية فهم البشر للعالم الفيزيائي وتطويعه. ولم يقع الانتقال من تقاليد الحرفة الوسيطة إلى العلوم الهندسية الحديثة بين ليلة وضحاها، بل عبر سلسلة من التطورات المترابطة امتدت ثلاثة قرون.

تميز هذا التحول ثلاثة تغيرات رئيسية:

الصياغة الرياضية: بدءاً بقوانين غاليليو للتحجيم وانتهاء بمعادلات نافييه التفاضلية، ازداد وصف الممارسين للظواهر الميكانيكية بعلاقات رياضية بدلاً من القواعد التجريبية. وأتاحت هذه *الرياضنة* دقة أكبر وتعميماً أوسع معاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الابتكار المؤسسي: أنشأ تأسيس الأكاديميات العلمية والمدارس الهندسية والجمعيات المهنية آليات جديدة لتوليد المعرفة والتحقق منها ونشرها. وعززت هذه المؤسسات التعاون، لكنها كثفت المنافسة أيضاً، وسرع الاثنان التقدم العلمي.

تكامل النظرية والممارسة: بينت شخصيات مثل كولوم ونافييه وآل برنولي أن التحليل الرياضي المجرد يستطيع حل مسائل هندسية حقيقية. وأقنع هذا التكامل المنظرين والممارسين معاً بأن الميكانيكا الرياضية ليست مرضية فكرياً فحسب، بل نافعة عملياً.

وبحلول 1850، استقرت الأسس للتطور السريع للهندسة الإنشائية الحديثة، بمزيجها المميز من الصرامة الرياضية والتحقق التجريبي والتطبيق العملي.

6.11.3 الثورة الفرنسية في التعليم الهندسي

بدأ نشوء التعليم الهندسي المنظم في فرنسا، حيث أنشأت مطالب برنامج طموح للبنية التحتية للدولة حاجات غير مسبوقة إلى متخصصين مدربين تقنياً. وبدأ التحول مع *Corps des Ponts et Chaussées* ، المنشأة عام 1716 لإدارة شبكة فرنسا المتوسعة من الطرق والجسور والقنوات. واعتمدت هذه الهيئة أولاً على التدريب المهني والخبرة العملية، ثم تطورت إلى شيء أهم كثيراً حين أسست الحكومة *École des Ponts et Chaussées* عام 1747، وهي أول مدرسة مدنية للهندسة في العالم.

وتحت إدارة جان-رودولف بيرونيه، طورت *École des Ponts et Chaussées* منهجاً ثورياً وازن التعليم الرياضي الصارم بالتدريب العملي في المساحة والهيدروليكا والإنشاء. ودرس الطلاب الهندسة والميكانيكا وحساب التفاضل والتكامل قبل تطبيق هذه المبادئ على مسائل هندسية حقيقية، وهو نهج تعليمي ابتعد جذرياً عن التدريب الحرفي التقليدي.

وجاءت ذروة الابتكار الفرنسي مع *École Polytechnique*، المنشأة عام 1794 أثناء الحقبة الثورية. وأنشئت لتدريب المهندسين للخدمة العسكرية والمدنية معاً، واستقطبت أبرز رياضيي العصر إلى هيئة تدريسها، منهم لاغرانج ولابلاس ومونج وشخصيات عدة عرضها هذا الفصل. وأرسى منهجها الصارم رياضياً مبدأ وجوب تأسيس جميع التخصصات الهندسية على معرفة نظرية منظمة، لا تقليد تجريبي.

وانتشر هذا النموذج الفرنسي سريعاً في أوروبا وخارجها. فتحولت الأكاديمية العسكرية الأمريكية في ويست بوينت، المنشأة عام 1802، تحت قيادة المشرف سيلفانوس ثاير (1817–1833)، الذي درس *École Polytechnique* خلال مهمات دبلوماسية إلى فرنسا. وأدخلت إعادة تنظيم ثاير *نظام ثاير*، فجعلت ويست بوينت أول مدرسة هندسية حقيقية في أمريكا، وأرست النهج الرياضي الذي سيهيمن على التعليم التقني الأمريكي طوال القرن التاسع عشر.

وسرعان ما تبعت المؤسسات الأوروبية، الجدول 6.15. فتبنى معهد كارلسروه متعدد التقانات (1825) ومعهد فيينا متعدد التقانات (1815) الطرائق التعليمية الفرنسية، بينما أصلحت الأكاديميات العسكرية القائمة في بروسيا والنمسا وبريطانيا مناهجها لتؤكد الأسس الرياضية. وبحلول 1850، أنشأ الابتكار الفرنسي معياراً دولياً جديداً للتعليم التقني، يجسد تكامل النظرية والممارسة المميز للعلوم الهندسية الحديثة. ولم تدرب هذه المؤسسات المهندسين الذين سيبنون العصر الصناعي فحسب، بل أرست الهندسة أيضاً مهنة مستقلة ذات معايير معترف بها ومعرفة منظمة وسلطة اجتماعية.

6.12 الخلاصة: من الفلسفة الطبيعية إلى العلوم الهندسية

شهد القرنان السابع عشر والثامن عشر تحولاً عميقاً في تاريخ الميكانيكا، إذ تطور التخصص من مسعى فلسفي متجذر في الملاحظة والهندسة إلى علم صارم رياضياً. وأدت الشخصيات المستعرضة في هذا الفصل، من موزي وأرخميدس في العصور القديمة، مروراً بغاليليو ونيوتن وآل برنولي، وصولاً إلى كوشي ونافييه وسان-فنان، دوراً تأسيسياً في تشكيل هذا التحول. وأرست أفكارهم أساس الميكانيكا الكلاسيكية، وكذلك التحليل الإنشائي الحديث والمرونة والديناميكا المائية والمبادئ التغايرية. ولم يكن هذا التحول حتمياً ولا مباشراً؛ بل تطلب التقاء تغيرات فكرية ومؤسسية وثقافية غيرت من أساسها كيفية إنشاء المعرفة والتحقق منها.

وما يلفت بأثر رجعي ليس اتساع إسهاماتهم الفردية فحسب، بل شبكة النسب الفكري التي تصل بينهم. فقد تأثر كثير من هؤلاء العلماء مباشرة بأسلافهم أو مرشديهم، بينما شكل عملهم الجيل التالي بعمق. ووقف بعضهم، مثل أويلر، جسوراً بين العصور؛ وساعد

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

آخرون، مثل نافييه، في إدخال عصر العلوم الهندسية بصياغة المعرفة العملية داخل أطر رياضية. وكانت العلاقات الشخصية بين هذه الشخصيات، من إرشاد ومنافسة وتعاون وصراع، مهمة بقدر اكتشافاتهم الفردية في دفع التقدم السريع للعلوم الميكانيكية.

ولعل الأهم أن هذه الفترة شهدت نشوء نمط جديد من الممارسين: المهندس-العالم الذي جمع التطور الرياضي بالخبرة العملية. فبينت شخصيات مثل كولوم ونافييه أن التحليل الرياضي المجرد يستطيع حل مسائل هندسية حقيقية، بينما أظهر آل برنولي وأويلر أن التحديات العملية تستطيع إلهام بصائر نظرية عميقة. وأصبح تكامل النظرية والممارسة السمة المميزة للهندسة الحديثة، وما زال ضرورياً للميكانيكا الإنشائية اليوم.

ولم تمكّن العبقرية الفردية هذا التحول وحدها، بل تغيرات مؤسسية عميقة أيضاً. فقد أنشأ تأسيس الأكاديميات العلمية، الجمعية الملكية في لندن (1660)، و*Académie des Sciences* في باريس (1666)، وأكاديمية برلين (1700)، وأكاديمية سانت بطرسبرغ (1724)، آليات جديدة للتحقق من المعرفة ونشرها. وأرسى تأسيس المدارس الهندسية، من *École des Ponts et Chaussées* (1747) إلى *École Polytechnique* (1794)، تعليماً تقنياً منظماً يجمع الصرامة الرياضية بالتطبيق العملي. وحولت هذه المؤسسات الهندسة من حرفة تتعلم بالتدريب المهني إلى مهنة مؤسَّسة على مبادئ علمية.

وكانت النصوص البارزة المستعرضة في هذا الفصل، من *مباحث* غاليليو إلى *Leçons* نافييه، الوسائط التي تحولت بها المعرفة الضمنية إلى علم صوري. ولم تسجل هذه الكتب الاكتشافات فحسب؛ بل دربت أجيالاً من الممارسين، وأرست معايير للصرامة، وأنشأت لغة مشتركة للخطاب الهندسي. وترسم الكتب الكبرى صعوداً فكرياً من الحرفة التجريبية إلى الصرامة الرياضية والتمكن الحسابي: من نقاء الاستنباط في *عناصر* إقليدس إلى صيغ نيوتن الثورية، ومن إدخال نافييه نظرية المرونة إلى الهندسة إلى صعود طرائق المصفوفات وتحليل العناصر المحددة.

وليست هذه النصوص مجرد وثائق تاريخية؛ بل هي السقالة التي بني عليها تخصصا الهندسة الإنشائية والعمارة. فالمسائل التي نحلها اليوم، سواء تصميم جسر أو ناطحة سحاب أو نموذج حسابي، شكلتها الاختراقات المفاهيمية الموثقة في هذه الأعمال. ويعمق فهمها تقديرنا للمهنة، لا بوصفها مجموعة من التقنيات والصيغ فحسب، بل نسباً من الاستدلال والإبداع والبحث ما زال يتطور.

ومع انتقالنا إلى دراسة التطورات التقنية الناشئة من هذا الأساس التاريخي، يجدر تذكر أن وراء كل معادلة ومبدأ وطريقة قصة بشرية من الفضول والمثابرة والشجاعة الفكرية. وتحمل الميكانيكا الإنشائية التي نمارسها اليوم بصمة هؤلاء الأفراد اللافتين والعصر الاستثنائي الذي عاشوا وعملوا فيه.

6.12.1 جداول موجزة

لتوليف التطورات المناقشة في هذا الفصل وإبراز الترابط بين هؤلاء المساهمين الكبار، تقدم الجداول التالية ملخصات موجزة منظمة حسب الموضوع. وتوفر مجتمعة توجهاً تاريخياً وبصيرة في النسب الفكري الذي تقوم عليه أسس التحليل الإنشائي الحديث.

6.12.1.1 المساهمون الرئيسيون وتأثيرهم

يلخص الجدول 6.16 مدد حياة أبرز الشخصيات المعروضة في هذا الفصل ومنجزاتها الرئيسية وتأثيراتها المتبادلة. ويعمل هذا العرض الجدولي مرجعاً لتطور الميكانيكا الإنشائية حتى العصر الحديث. وما زالت الأنساب المبينة تشكل التعليم والممارسة الهندسيين المعاصرين، مبرهنة على التأثير الدائم لهذه الشخصيات التأسيسية.

جدول 6.16: ملخص المساهمين الكبار وتأثيرهم في الميكانيكا

الاسم (التواريخ)	الإسهامات الكبرى	أثر في / تأثر بـ
الأسس والفلسفة		
موزي (نحو 470–391 ق.م.)	استاتيكا مبكرة؛ مبادئ الرافعة؛ تحليل الاتزان في التقليد الصيني.	تطور مستقل؛ أعاد الباحثون الغربيون اكتشافه

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.16: ملخص المساهمين الكبار وتأثيرهم في الميكانيكا (تابع)

الاسم (التواريخ)	الإسهامات الكبرى	أثر في / تأثر بـ
أرخميدس (نحو 287–212 ق.م.)	قانون الرافعة؛ الهيدروستاتيكا؛ مركز الثقل؛ الصرامة الرياضية في الميكانيكا.	أساس جميع أعمال الاستاتيكا اللاحقة
ليوناردو دا فينشي (1452–1519)	ملاحظة تجريبية؛ تصميم ميكانيكي؛ بصائر إنشائية مبكرة؛ جسر بين النهجين الوسيط والحديث.	أثر في الطرائق التجريبية اللاحقة؛ استبق نهج غاليليو التجريبي
رينيه ديكارت (1596–1650)	هندسة إحداثية؛ رؤية ميكانيكية للعالم؛ رفض الفيزياء الأرسطية.	أثر في نيوتن وأسرة برنولي
غاليليو غاليلي (1564–1642)	الحركيات؛ قوانين التحجيم؛ مقاومة المواد؛ الطرائق التجريبية.	سلف نيوتن؛ أثر في هوك
بليز باسكال (1623–1662)	الهيدروستاتيكا؛ قانون باسكال؛ مناهج العلم التجريبي.	توريتشيلي وفيرما؛ أثر في استاتيكا الموائع
المرونة ومقاومة المواد والمنشآت		
روبرت هوك (1635–1703)	قانون هوك؛ ميكانيكا النوابض؛ العلم التجريبي.	أثر في نيوتن وآل برنولي
ياكوب برنولي (1654–1705)	نظرية *الإلاستيكا*؛ انحناء العوارض واتزانها؛ نظرية الاحتمالات.	ألهم أويلر ودانيال برنولي
يوهان برنولي (1667–1748)	إتقان حساب لايبنتس؛ الميكانيكا المتقدمة والتعليم.	علم أويلر؛ أثر في دانيال برنولي
دانيال برنولي (1700–1782)	المبادئ التغايرية في المرونة؛ الديناميكا المائية؛ النظرية الحركية.	اقترح على أويلر الصيغة التغايرية *لـالإلاستيكا*
شارل-أوغستان دو كولوم (1736–1806)	قوانين الاحتكاك؛ ميكانيكا الالتواء؛ الاستاتيكا ومقاومة المواد.	سبق نافييه؛ أثر في العلوم الهندسية
كلود-لوي نافييه (1785–1836)	نظرية انحناء العوارض؛ معادلات المرونة وميكانيكا الموائع.	تلميذ فورييه؛ أثر في سان-فنان
سيميون-دني بواسون (1781–1840)	قدم نسبة بواسون؛ وسع نظرية المرونة.	ناظر نافييه؛ أثر في سان-فنان
أديمار ج.ك.ب. دو سان-فنان (1797–1886)	التواء القضبان المنشورية؛ مبدأ سان-فنان؛ توزيع الإجهاد.	صاغ المرونة بعد نافييه وبواسون
الميكانيكا الرياضية		
إسحاق نيوتن (1642–1727)	قوانين الحركة؛ الجاذبية؛ *المبادئ الرياضية*؛ حساب التفاضل والتكامل (الفلوكسونات).	تنافس مع لايبنتس؛ أثر في الميكانيكا الكلاسيكية كلها
غوتفريد لايبنتس (1646–1716)	حساب التفاضل والتكامل؛ المعادلات التفاضلية؛ *vis viva*؛ رؤية مؤسسية للعلم.	أرشده هوينغنس؛ علم يوهان برنولي؛ أثر في رياضيات القارة
كريستيان هوينغنس (1623–1695)	نظرية النواس؛ بصريات الموجات؛ القوة المركزية؛ الدقة الرياضية في الميكانيكا.	أرشد لايبنتس؛ أثر في آل برنولي؛ بديل للنهج النيوتني

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.16: ملخص المساهمين الكبار وتأثيرهم في الميكانيكا (تابع)

الاسم (التواريخ)		الإسهامات الكبرى	أثر في / تأثر بـ
ليونهارت (1707–1783)	أويلر	الميكانيكا التحليلية؛ حساب التغاير؛ حلول *الإلاستيكا*؛ إسهامات رياضية غزيرة.	تلميذ يوهان برنولي؛ طور أفكار دانيال التغايرية؛ أثر في جميع أعمال الميكانيكا اللاحقة
جان لو رون (1717–1783)	دالمبير	مبدأ دالمبير؛ المعادلات التفاضلية الجزئية.	أثر في لاغرانج؛ عاصر أويلر
جوزيف-لوي (1736–1813)	لاغرانج	ميكانيكا لاغرانج؛ حساب التغاير؛ الميكانيكا التحليلية.	وحد الطرائق النيوتنية والتغايرية
أوغستان-لوي (1789–1857)	كوشي	موتر الإجهاد؛ المرونة الصارمة؛ أسس ميكانيكا الوسط المتصل.	تأثر بأويلر؛ سلف المرونة الحديثة
جورج غرين (1793–1841)		نظرية الجهد؛ هويات غرين ودواله؛ طرائق الطاقة.	ألهم الفيزياء الرياضية ونظرية الحقول

6.12.1.2 المنشورات البارزة

يسرد الجدول 6.17 الأعمال الرئيسية المستشهد بها في هذا الفصل، مرتبة زمنياً من العصور القديمة إلى القرن العشرين. وتمثل هذه النصوص لحظات محورية في *الرياضة* التدريجية للظواهر الفيزيائية ونشوء الهندسة تخصصاً قائماً على العلم.

جدول 6.17: المنشورات البارزة في تطور الميكانيكا الإنشائية

السنة	المؤلف	العنوان	الأهمية
الأسس القديمة والوسيطة			
القرن الخامس ق.م.	موزي	*Mo Jing* (Mozi, 2013)	مجموعة صينية في الاستاتيكا والرافعات والفائدة الميكانيكية
نحو 300 ق.م.	إقليدس	*العناصر* (Euclid **and** Heath, 1956)	عمل تأسيسي في الهندسة والاستدلال الاستنباطي
القرن الثالث ق.م.	أرسطو (؟)	*الميكانيكا* (Aristotle, 2000)	تحليل منظم مبكر للآلات البسيطة ومبادئ القوى
نحو 240 ق.م.	أبولونيوس	*المخروطيات* (Perga, 1896)	معالجة رياضية للقطوع المخروطية
القرن الثالث ق.م.	أرخميدس	*الأعمال المجموعة* (Archimedes **and** Heath, 1897)	أساس الاستاتيكا والهيدروستاتيكا والاتزان
القرن الأول ق.م.	فيتروفيوس	*De Architectura* (Vitruvius **and** Morgan, 1914)	رسالة معمارية كلاسيكية: *firmitas, utilitas, venustas*
القرن الأول م.	هيرو	*Mechanica, Pneumatica* (Alexandria, 1851)	الميكانيكا العملية والأنظمة الهيدروليكية
القرن الحادي عشر	البيروني	*Kitab fi Tahqiq* (Al-Bīrūnī, 1910)	الاستاتيكا وقياسات الكثافة والهيدروستاتيكا
القرن الحادي عشر	ابن الهيثم	*Kitab al-Manazir* (Haytham, 1989)	النمذجة الرياضية مع التحقق التجريبي

يتبع في الصفحة التالية

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.17: المنشورات البارزة في تطور الميكانيكا الإنشائية (تابع)

السنة	المؤلف	العنوان	الأهمية
1121	الخازني	*رسالة في الميكانيكا* (Khāzinī, 2001)	تحليل الاتزان والهيدروستاتيكا في العصور الوسطى
		عصر النهضة والعصر الحديث المبكر	
نحو 1452	ألبرتي	*De Re Aedificatoria* (Alberti, 1988)	أول رسالة معمارية شاملة لعصر النهضة
القرنان 15–16	ليوناردو	*الدفاتر* (Vinci, 1938)	دراسات رائدة في الميكانيكا ومقاومة المواد
1543	كوبرنيكوس	*De Revolutionibus* (Copernicus, 1995)	نموذج مركزي شمسي؛ مثال للنمذجة الرياضية
1570	بالاديو	*I Quattro Libri* (Palladio, 1570)	توليف النظرية الكلاسيكية وممارسة الإنشاء
1586	ستيفن	*De Beghinselen der Weeghconst* (Stevin, 1955–1966)	التحويل الرياضي للاستاتيكا
1620	بيكون	*Novum Organum* (Bacon, 2000)	أساس المنهج التجريبي
1632	غاليليو	*Dialogo* (Galilei, 1632)	حوار عن النظامين الكوبرنيكي والبطلمي
1637	ديكارت	*Discours de la méthode* (Descartes, 1637b)	العقلانية الديكارتية؛ أساس المنهج العلمي
1638	غاليليو	*Discorsi* (Galilei, 1638)	أساس مقاومة المواد والحركيات
		الميكانيكا الكلاسيكية وحساب التفاضل والتكامل	
1673	هوينغنس	*Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1986)	الديناميكا والحركة الدورانية والقوة الطاردة المركزية
1678	هوك	*De Potentia Restitutiva* (Hooke, 1678)	قانون هوك والمرونة الخطية
1687	نيوتن	*المبادئ الرياضية* (Newton, 1687)	قوانين الحركة وإطار الميكانيكا الكلاسيكية
1694	ي. برنولي	*Curvatura Laminae Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1694)	انحناء العوارض المرنة
أواخر القرن السابع عشر	لايبنتس	*الأعمال المجموعة* (Leibniz, 1969)	حساب التفاضل والتكامل والطرائق التغايرية
1736	أويلر	*Mechanica*	إعادة صياغة ميكانيكا نيوتن تحليلياً
1738	د. برنولي	*Hydrodynamica* (Bernoulli, Daniel, 1738)	ميكانيكا الموائع والنظرية الحركية
1743	دالمبير	*Traité de dynamique* (d'Alembert, 1743)	مبدأ دالمبير
1744	أويلر	*Methodus inveniendi* (Euler, 1744b)	حساب التغاير
1773	كولوم	*Sur une Application* (Coulomb, 1773b)	الطرائق التغايرية في الاستاتيكا الإنشائية
1788	لاغرانج	*Mécanique Analytique* (Lagrange, 1788)	الميكانيكا بالمبادئ التغايرية

يتبع في الصفحة التالية

جدول 6.17: المنشورات البارزة في تطور الميكانيكا الإنشائية (تابع)

السنة	المؤلف	العنوان	الأهمية
		العلوم الهندسية في القرن التاسع عشر	
1826	نافييه	*Leçons* (Navier, 1826)	نظرية العوارض المرنة والمحور المحايد
1840–1820	كوشي	*الأعمال المجموعة* (Cauchy, 1841)	موتر الإجهاد وميكانيكا الوسط المتصل
1843	موزلي	*المبادئ الميكانيكية* (Moseley, 1843)	نظرية المرونة مطبقة على المنشآت
1860–1850	سان-فنان	*الأعمال المجموعة* (Saint-Venant, 1855b)	الالتواء والانحناء وتركيز الإجهاد
1858	رانكين	*دليل الميكانيكا التطبيقية* (Rankine, 1858)	جسر بين النظرية والممارسة
1864	ماكسويل	*في الأشكال المتبادلة* (Maxwell, 1864a)	مخططات متبادلة لتحليل الجمالونات
1866	كولمان	*Die Graphische Statik* (Culmann, 1866)	صياغة الاستاتيكا البيانية
1874	مور	*Lehrbuch der Mechanik* (Mohr, 1874)	دائرة مور لتحويل الإجهاد
1886	تودهَنتر	*تاريخ المرونة* (Todhunter and Pearson, 1893)	رواية تاريخية لتطور المرونة
		القرن العشرون	
1953	تيموشينكو	*تاريخ مقاومة المواد* (Timoshenko, 1953)	دراسة تاريخية كلاسيكية
1955	دوغاس	*تاريخ الميكانيكا* (Dugas, 1955)	تطور الميكانيكا من الاستاتيكا إلى النظرية الحديثة
1968	تروسدل	*مقالات في تاريخ الميكانيكا* (Truesdell, 1968)	تحليل نقدي لميكانيكا الوسط المتصل

6.12.1.3 مؤسسات التعليم الهندسي

يلخص الجدول 6.18 المؤسسات الهندسية الكبرى التي أنشئت بين 1740 و1850، مبيناً انتشار النموذج الفرنسي للتعليم التقني المنظم في أوروبا وخارجها.

6.12.1.4 النزاعات الفكرية الكبرى

يوثق الجدول 6.19 الصراعات الفكرية الرئيسية التي شكلت تطور الميكانيكا. ومع أنها كانت خلافية في أحيان كثيرة، فقد سرعت التقدم العلمي كثيراً بإجبار المشاركين على تطوير حجج أدق وشروح أوضح.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.19: الصراعات الفكرية الكبرى في تطور الميكانيكا

النتيجة	طبيعة النزاع	الموضوع	الشخصيات	العصر
حاكمت محاكم التفتيش غاليليو	دافع غاليليو عن كوبرنيكوس؛ أدانت الكنيسة مركزية الشمس	مركزية الشمس	غاليليو ضد الكنيسة	القرن 16
أغفل نيوتن هوك في *المبادئ الرياضية*	ادعى هوك الأسبقية؛ استاء نيوتن	قانون الجاذبية	نيوتن ضد هوك	القرن 17
نسب الفضل في النهاية إليهما معاً	أدت الاكتشافات المستقلة إلى نزاع قومي	حساب التفاضل والتكامل	نيوتن ضد لايبنتس	القرن 17
حفز تطورات رئيسية	منافسة وادعاءات انتحال بين ياكوب ويوهان ودانيال	حساب التغاير	أسرة برنولي	القرن 18
قدم أسس التحليل	خلاف على صياغة المعادلات التفاضلية الجزئية	الأوتار المهتزة	أويلر ضد دالمبير	القرن 18
وحد كوشي النهجين	افتراضات الوسط المتصل ضد الافتراضات الجزيئية	نظرية المرونة	بواسون ضد نافييه	القرن 19
أنشأ انقساماً ثقافياً طويل الأمد	الفلوكسونات البريطانية ضد صرامة القارة	الميكانيكا	بريطانيا ضد القارة	القرن 19

6.12.1.5 الخط الزمني التاريخي

يضع الشكل 6.21 العلماء المعروضين في هذا الفصل، وغيرهم، داخل السياق الأوسع للتاريخ الثقافي والسياسي، مبيناً كيف سار تطور الميكانيكا بالتوازي مع التحولات في الفن والموسيقى والأدب والحكم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.15: المؤسسات الهندسية والتقنية الكبرى في أوروبا وخارجها (1740–1850)

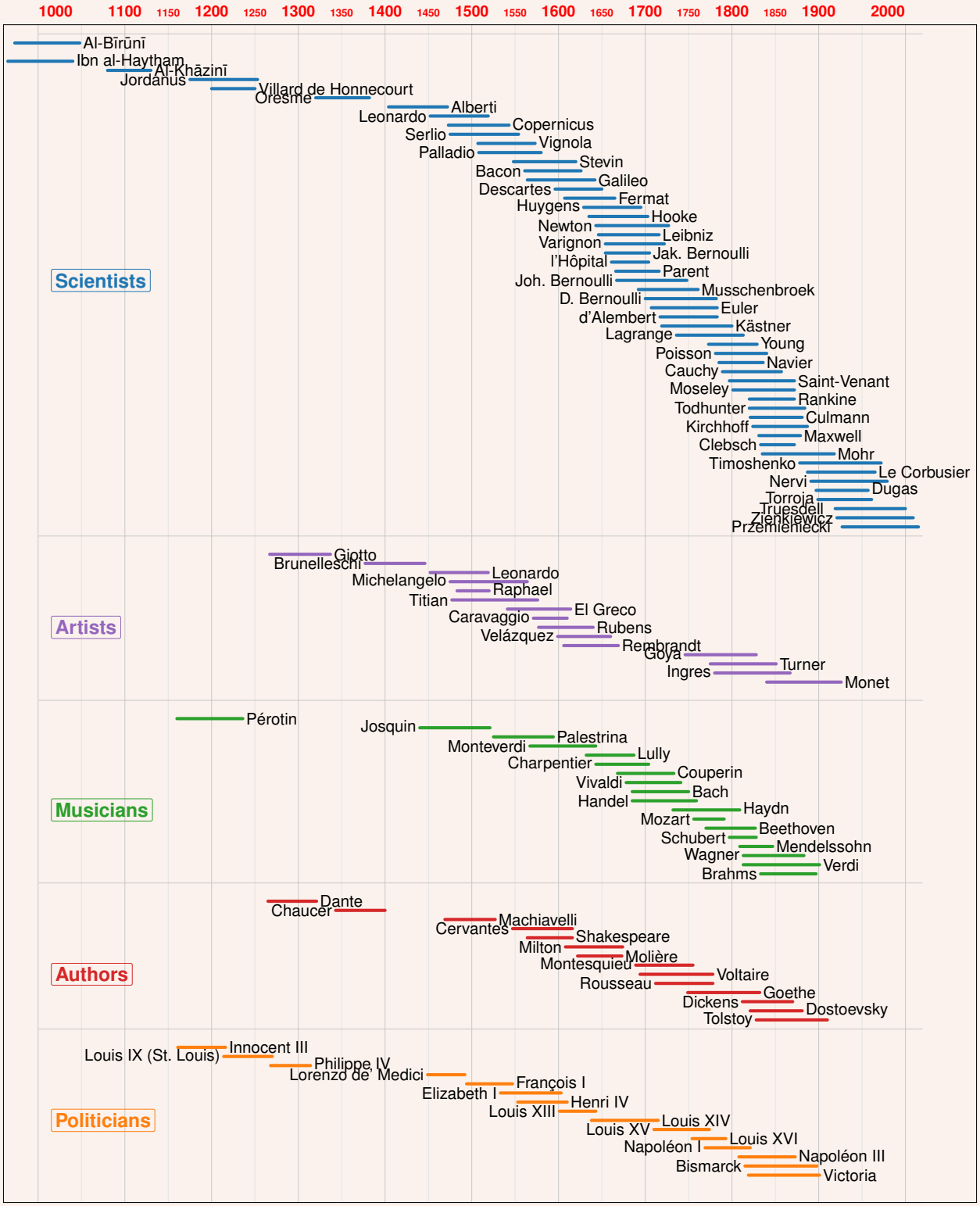
التأثير الفرنسي/ملاحظات	النوع	الموقع	المؤسسة	السنة
نموذج سابق لفرنسا؛ مدفعية وهندسة	عسكرية	وولويتش، بريطانيا	الأكاديمية العسكرية الملكية	1741
النموذج الأصلي للهندسة المدنية	مدنية	باريس، فرنسا	École des Ponts et Chaussées	1747
تدريب تقني متخصص	تعدين	ساكسونيا	Bergakademie Freiberg	1765
تعليم تقني للدولة الفرنسية	تعدين	باريس، فرنسا	École des Mines	1783
النموذج الرئيسي للإصلاحات الأوروبية	عسكرية/مدنية	باريس، فرنسا	École Polytechnique	1794
تكييف ألماني للطرائق الفرنسية	عمارة	برلين، بروسيا	Bauakademie	1799
تقليدية أولاً؛ ثم تأثير فرنسي	عسكرية	ويست بوينت، الولايات المتحدة	الأكاديمية العسكرية الأمريكية	1802
هندسة عسكرية بريطانية	عسكرية	ساندهيرست، بريطانيا	الكلية العسكرية الملكية	1802
مدرسة تقنية روسية مبكرة	نقل	سانت بطرسبرغ، روسيا	معهد مهندسي السكك الحديدية	1809
تبن مباشر للمنهج الفرنسي	متعددة التقانات	فيينا، النمسا	k.k. Polytechnisches Institut	1815
تبن إسباني للطرائق الفرنسية	عسكرية	سيغوفيا، إسبانيا	Real Academia de Artillería	1816
درس ثاير في المدرسة متعددة التقانات؛ تبن كامل للنموذج الفرنسي	عسكرية	ويست بوينت، الولايات المتحدة	ويست بوينت (إصلاح ثاير)	1817
تكييف استعماري برتغالي	عسكرية	ريو دي جانيرو، البرازيل	الأكاديمية العسكرية الإمبراطورية	1822
تأثير قوي للمدرسة متعددة التقانات	متعددة التقانات	كارلسروه، بادن	Polytechnische Schule	1825
هيئة تدريس هندسية؛ تعليم علماني	جامعة	لندن، بريطانيا	كلية لندن الجامعية	1826
النهج الرياضي الفرنسي	متعددة التقانات	ميونيخ، بافاريا	Polytechnische Schule	1827
منهج تقني منظم	متعددة التقانات	دريسدن، ساكسونيا	Polytechnische Schule	1828
مدرسة هندسة عسكرية هولندية	عسكرية	بريدا، هولندا	Koninklijke Militaire Academie	1828
تبن روسي للطرائق الغربية	تقنية	سانت بطرسبرغ، روسيا	معهد سانت بطرسبرغ	1828
إنشاء قسم للهندسة	جامعة	لندن، بريطانيا	كلية كينغز لندن	1829
هندسة صناعية فرنسية	هندسة	باريس، فرنسا	École Centrale des Arts et Manufactures	1832
مدرسة هندسة مدنية هولندية	هندسة مدنية	دلفت، هولندا	Koninklijke Academie	1842
مدرسة تقنية فرنسية إقليمية	تعدين	سانت إتيان، فرنسا	École Nationale Supérieure des Mines	1844
جامعة تقنية اتحادية سويسرية	متعددة التقانات	زيورخ، سويسرا	Eidgenössische Polytechnische Schule	1847

CC BY-NC-SA 4.0 2026 ©
مترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بواسطة OpenAI.
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 6.18: المؤسسات الهندسية والتقنية الكبرى (1740–1850)

السنة	المؤسسة	الموقع	النوع	ملاحظات
1741	الأكاديمية العسكرية الملكية	وولويتش، بريطانيا	عسكرية	نموذج سابق لفرنسا؛ مدفعية وهندسة
1747	École des Ponts et Chaussées	باريس، فرنسا	مدنية	**النموذج الأصلي** للهندسة المدنية
1765	Bergakademie Freiberg	ساكسونيا	تعدين	تدريب تقني متخصص
1783	École des Mines	باريس، فرنسا	تعدين	تعليم تقني للدولة الفرنسية
1794	École Polytechnique	باريس، فرنسا	مختلطة	**النموذج الرئيسي** للإصلاحات الأوروبية
1799	Bauakademie	برلين، بروسيا	عمارة	تكييف ألماني للطرائق الفرنسية
1802	الأكاديمية العسكرية الأمريكية	ويست بوينت، الولايات المتحدة	عسكرية	تقليدية أولاً؛ ثم النموذج الفرنسي
1815	k.k. Polytechnisches Institut	فيينا، النمسا	متعددة التقانات	تبن مباشر للمنهج الفرنسي
1817	ويست بوينت (إصلاح ثاير)	ويست بوينت، الولايات المتحدة	عسكرية	تبن كامل للنموذج الفرنسي
1825	Polytechnische Schule	كارلسروه، بادن	متعددة التقانات	تأثير قوي للمدرسة متعددة التقانات
1826	كلية لندن الجامعية	لندن، بريطانيا	جامعة	هيئة تدريس هندسية؛ تعليم علماني
1847	ETH زيورخ	زيورخ، سويسرا	متعددة التقانات	جامعة تقنية اتحادية سويسرية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 6.21: الخط الزمني التاريخي: العلماء والفنانون والموسيقيون والمؤلفون والسياسيون (1000–2020). مقتبس وموسع من Truesdell, 1968؛ لاحظ أن جميع الأسماء في صف العلماء مغطاة في هذا الفصل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



بانيني، داخل البانثيون

يلتقط داخل بانيني المضيء الهندسة السامية: الأسطوانة ونصف الكرة وعين الضوء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الفاصل الثاني: من رؤى العصور الوسطى إلى الميكانيكا الإنشائية الحديثة (1351–1879)

تكشف هذه الفصول الثلاثة عن قصة آسرة، ومعقدة أحياناً، لتطور الميكانيكا الإنشائية والتحليل الهندسي على مدى أكثر من خمسة قرون. فلم يتقدم الفهم في سلسلة خطية من الاكتشافات، بل تشكل نسيجاً مركباً أسهم في حياكته عشرات العقول اللامعة من بلدان وقرون وتقاليد رياضية مختلفة. بنى بعضهم مباشرة على أعمال سابقيه، وأعاد آخرون اكتشاف مبادئ بصورة مستقلة، بينما بحث فريق ثالث مسائل بدت بعيدة الصلة ثم اتضح لاحقاً أنها تأسيسية.

وتستمد القصة جاذبيتها الخاصة من أن الاختراقات النظرية في الرياضيات البحتة، مثل تأمل أوريم في الانحناء، ودراسة هوينغنس للدويري، وتطوير نيوتن لحساب التفاضل والتكامل، وجدت مراراً تطبيقات غير متوقعة في الهندسة الإنشائية. وفي الاتجاه المقابل، دفعت التحديات الهندسية العملية، كالسلسلة المعلقة والقضيب المنحني والعمود المنبعج، إلى تقدم جوهري في التحليل الرياضي. وهكذا نشأت رواية علمية يتعذر فيها فصل النظرية المجردة عن التطبيق العملي.

ولا تدين الميكانيكا الإنشائية في صورتها الناضجة اليوم لعبقرية فرد واحد، بل لتراكم بصائر فلاسفة الطبيعة والرياضيين والتجريبيين والمهندسين من أواخر العصور الوسطى حتى الثورة الصناعية. فقد سجل بعضهم، مثل ليوناردو وغاليليو، ملاحظات تأسيسية لم تفهم كاملة إلا بعد قرون. وأنشأ آخرون، مثل أسرة برنولي، سلالات علمية انتقلت فيها المعرفة من جيل إلى آخر. أما علماء مثل أويلر فجمعوا أعمال السابقين ووسعوها حتى أقاموا أطرًا نظرية شاملة.

يقدم الجدول 6.20 تركيباً زمنياً لأهم التطورات التي تناولتها الفصول 7 و8 و9، فيكشف ترابط هذه الاكتشافات والإبداع الاستثنائي للأفراد الذين جعلوها ممكنة.

جدول 6.20: خط زمني تاريخي شامل للميكانيكا الإنشائية والتحليل الهندسي (1351–1879)

التاريخ	المساهم	الإسهام	الفصل	الدلالة
1351	نيكول أوريم	مفهوم نوعي للانحناء بوصفه انحرافاً عن الاستقامة	الفصل 8	أول اختراق مفاهيمي نحو فهم الانحناء
نحو 1490	ليوناردو دا فينشي	تجربة السلة المعلقة لقياس مقاومة السلك	الفصل 7	أقدم تصور منهجي لاختبار المقاومة
نحو 1500	ليوناردو دا فينشي	*Codex Madrid*: توزيع خطي للانفعال ومفهوم المحور المحايد	الفصل 7	سبق نظرية برنولي للجوائز بمئتي عام
نحو 1500	ليوناردو دا فينشي	رسوم للسلسلة المعلقة ضمن دراسات مركز الثقل	الفصل 9	ملاحظة مبكرة لمسألة السلسلة المعلقة
1614	إسحاق بيكمان	ملاحظة استطالة الخيط: «الخيوط الأطول تستطيل أكثر»	الفصل 7	أول إشارة غير مباشرة إلى مفهوم الانفعال
1634	سيمون ستيفن	برهن أن السلسلة المعلقة ليست قطعاً مكافئاً	الفصل 9	دحض افتراض غاليليو
1638	غاليليو غاليلي	مباحث: تحليل جائزة كابولية؛ وافتراض أن السلسلة المعلقة قطع مكافئ	الفصل 7، الفصل 9	نظرية تأسيسية للجوائز مع افتراض خاطئ للسلسلة المعلقة
1644	رينيه ديكارت	*Principia Philosophiae*: تفسيرات ميكانيكية لتماسك المادة	الفصل 7	انتقال من النظريات الأرسطية إلى الميكانيكية

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التاريخ	المساهم	الإسهام	الفصل	الدلالة
نحو 1646	كريستيان هوينغنس	برهن أن السلسلة ليست قطعاً مكافئاً؛ واكتشف أن كبل الجسر المعلق مكافئ الشكل	الفصل 9	تمييز حاسم بين السلسلة المعلقة والكبل المكافئ
1657	كريستيان هوينغنس	اخترع ساعة النواس	الفصل 8	حفز مسألة منحنى تساوي الزمن
1658–1673	كريستيان هوينغنس	الدويري منحنى لتساوي الزمن؛ ونظرية منهجية للناشرات والالتفافيات	الفصل 8	أسس القاعدة الهندسية للانحناء
1671	إسحاق نيوتن	*Methodus Fluxionum*: صيغ تحليلية للانحناء ومركز الانحناء	الفصل 8	أول معالجة رياضية صارمة للانحناء
1684	غوتفريد لايبنتس	انتقد افتراض غاليليو للجائزة غير القابلة للاستطالة	الفصل 7	تقدم مفاهيمي مهم في نظرية الجوائز
1686	غوتفريد لايبنتس	عرّف دائرة التقبيل بتماس من أربع نقاط	الفصل 8	أساس هندسي للانحناء
1686	إدمي ماريوت	مرونة خطية في الجوائز؛ وتوزيع مثلثي للإجهاد	الفصل 7	أول نموذج واقعي لانحناء الجوائز
1690	ياكوب برنولي	طرح تحدي السلسلة المعلقة على المجتمع الرياضي	الفصل 9	حفز ثقافة رياضية تنافسية
1690	كريستيان هوينغنس	قدم حلاً مشفراً للسلسلة المعلقة	الفصل 9	برهن فعالية النهج الهندسي
1690	يوهان برنولي	قدم حل السلسلة المعلقة بشروط للنشر	الفصل 9	أظهر القوة التحليلية لحساب التفاضل والتكامل
1691	غوتفريد لايبنتس	نشر حل السلسلة المعلقة واختزله إلى لوغاريتمات	الفصل 9	أثبت تفوق حساب التفاضل والتكامل
1691	يوهان برنولي	اشتق نصف قطر الانحناء العام	الفصل 8	نهج تحليلي منهجي للانحناء
1691	ياكوب برنولي	طرح مسألة المنحني المرن في صورة تحدٍ مشفر	الفصل 9	أطلق التحدي الرياضي الكبير التالي
1692	ياكوب برنولي	حل حالة المنحني المرن ذي المقطع المستطيل	الفصل 9	أول حل لمسألة المنحني المرن
1694	ياكوب برنولي	*Curvatura Laminae Elasticae*: نشر حل المنحني المرن	الفصل 8، الفصل 9	نظرية هندسية للمنحني المرن بناء الناشر
1710	إغناس باردي	تحليل إضافي للسلسلة المعلقة؛ ومفاهيم متجهية للقوة	الفصل 9	تقدم في نظرية السلسلة المعلقة
1713	أنطوان باران	شروط التوازن الكاملة في انحناء الجوائز؛ والمحور المحايد	الفصل 7	أول تحليل استاتيكي كامل للانحناء
1724	مجهول «LBC»	تحدٍ لمسألة حبل متوسط المرونة	الفصل 9	وصل بين مسألتي السلسلة المعلقة والمنحني المرن
1728	دانيال برنولي	نظرية موحدة للخطوط المرنة؛ ومعامل الانحناء	الفصل 9	أول نظرية منهجية للجوائز
1728	ليونهارد أويلر	بحث مرافق؛ وحلول عامة للتوازن	الفصل 9	استكمل نهج دانيال الموحد

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التاريخ	المساهم	الإسهام	الفصل الدلالة
1729	بيتر فان موسخنبروك	قانون تجريبي للانبعاج: $P \propto 1/L^2$	الفصل 9 أول دراسة تجريبية منهجية للانبعاج
1739	بيتر فان موسخنبروك	*Elementa Physicae*: اختبار منهجي للشد	الفصل 7 أرسى منهجية تجريبية
1742	دانيال برنولي	اقترح نهج تصغير الطاقة للمنحني المرن	الفصل 9 أدخل مبدأ التغاير إلى الميكانيكا
1744	ليونهارد أويلر	*Methodus Inveniendi*: حل كامل للمنحني المرن بحساب التغايرات	الفصل 8، المعالجة التحليلية الحاسمة الفصل 9
نحو 1750	أويلر ودانيال برنولي	تقريب الميل الصغير: $\kappa \approx d^2y/dx^2$	الفصل 8 أساس نظرية الجوائز الهندسية
1757	ليونهارد أويلر	اشتقاق حمل الانبعاج: $P = \pi^2 EI/L^2$	الفصل 9 أول صيغة للحمل الحرج
1758	أبراهام كستنر	التعريف الحديث: الانحناء $= d\theta/ds$	الفصل 8 رسخ المفهوم الحديث للانحناء
1771	ليونهارد أويلر	نظرية عامة لإجهاد الخط؛ ومعادلات استاتيكية دقيقة	الفصل 9 إطار كامل لنظرية القضبان
1773	شارل أوغستان كولوم	تحليل كامل للانحناء؛ وصيغة $\sigma = My/I$	الفصل 7 أول نظرية صارمة لإجهاد الانحناء
1784	شارل أوغستان كولوم	نظرية الالتواء: $T = GJ/L \cdot \phi$	الفصل 7 أسس تحليل الالتواء
1807	توماس يونغ	عرّف معامل المرونة؛ وقاعدة الثلث الأوسط	الفصل 7 أدخل خاصية مادية أساسية
1855	باريه دو سان-فنان	أول اشتقاق مرن صارم للعلاقة $\sigma = My/I$	الفصل 7 أقام نظرية الجوائز على أساس نظري متين
1862	ألفرد كليبش	نظرية منهجية للمرونة	الفصل 7 وحد الإطار الرياضي
1866	سان-فنان	تعليقات على كليبش؛ المقاطع المستوية تبقى مستوية	الفصل 7 أكمل الأساس النظري
1879	ألبرتو كاستيليانو	مبرهنات الطاقة لحساب الإزاحات	الفصل 9 مكن من تحليل منهجي للترخيم

أنماط الاكتشاف

تبرز من هذا التركيب الزمني عدة أنماط لافتة:

السلالات والشبكات العلمية امتدت إسهامات أسرة برنولي عبر أجيال متعاقبة ونحو قرنين، إذ بنى كل جيل على عمل سابقيه ووسعه. وبالمثل أنشأت علاقات الأستاذ والتلميذ، من تدريب هوينغنس للايبنتس، وإرشاد ياكوب برنولي ليوهان، وتعليم يوهان لدانيال وأويلر، سلالات فكرية سرعت الاكتشاف.

الثقافة الرياضية التنافسية أوجد أسلوب التحدي العلني، الذي استهله ياكوب برنولي بمسألة السلسلة المعلقة عام 1690، بيئة تنافسية غير مسبوقة دفعت إلى تقدم نظري سريع. ويكشف استعمال الحلول المشفرة وسباقات النشر ونزاعات الأسبقية مجتمعاً رياضياً اهتم بالسمعة والأولوية بقدر اهتمامه بالمعرفة الخالصة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تآلف النظرية والممارسة دفعت التحديات الهندسية العملية مراراً إلى اختراقات نظرية، بينما وجدت التطورات الرياضية المجردة تطبيقات إنشائية غير متوقعة. فحفزت مسألة السلسلة المعلقة تطور الميكانيكا التحليلية، وقاد القضيب المنحني إلى حساب التغايرات، وأرسى العمود المنبعج نظرية الاستقرار.

التجمع الجغرافي والزمني شهدت فترات وأقاليم معينة تركيزاً استثنائياً للاكتشافات: هولندا في منتصف القرن السابع عشر (ستيفن وهوينغنس)، والعالم الأكاديمي السويسري الألماني في أوائل القرن الثامن عشر (أسرة برنولي وأويلر)، والمدارس الهندسية الفرنسية في أواخر القرن الثامن عشر وأوائل التاسع عشر (كولوم وسان-فنان).

تطور الأدوات الرياضية يكشف الانتقال من الإنشاء الهندسي (ليوناردو وغاليليو)، مروراً بالهندسة التحليلية (ديكارت)، إلى حساب التفاضل والتكامل المتناهي الصغر (نيوتن ولايبنتس)، ثم إلى الطرق التغايرية (أويلر)، كيف مكن الرقي الرياضي من حل مسائل إنشائية متزايدة التعقيد.

يوضح هذا المنظور الزمني أن التطورات التي بدت منفصلة في الهندسة وتحليل المقاومة ونظرية التشوه لم تكن إلا وجوهاً مترابطة لثورة فكرية أوسع غيرت الرياضيات والهندسة معاً. ولم تنشأ الميكانيكا الإنشائية المعروفة اليوم من اختراق منفرد، بل من تراكم بصائر عشرات الأفراد اللامعين عبر قرون متعددة، إذ بنى كل منهم على أعمال سابقيه ووسعها وصححها أحياناً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7 المقاومة والمحور المحايد وإجهادات الانحناء

ملخص

يتتبع هذا الفصل التطور التاريخي لتحليل المقاومة الإنشائية وتوزيع الإجهادات الداخلية من أواخر القرن الخامس عشر إلى منتصف القرن التاسع عشر.

وقع تحول مفاهيمي كبير في أوائل القرن السادس عشر حين أدرك للمرة الأولى أن العناصر الإنشائية قد تفشل تحت أحمال محورية أو انحنائية، متجاوزاً التركيز التقليدي على استقرار الأقواس المبنية. وأطلق هذا الإدراك أبحاثاً مكثفة في التوزيع الداخلي لإجهادات الانحناء والعلاقة الأساسية بين الأحمال المطبقة والمقاومة الإنشائية.

تطور الموضوع عبر ثلاثة مسارات متميزة لكنها مترابطة. فقد أرسى التقليد التجريبي، بدءاً بتجارب ليوناردو للسلة المعلقة واستمراراً بتحليل غاليليو للجائزة الكابولية، المفاهيم الأساسية للاختبار الإنشائي وتقييم المقاومة مقابل الطلب. وطور نهج الوسط المتصل التجريبي، على أيدي ديكارت وماريوت وباران وكولوم، نماذج أكثر تقدماً لسلوك المادة وتوزيع القوى الداخلية. وأخيراً قدم المسار التحليلي، الذي مثلته أسرة برنولي وأويلر، أطرًا رياضية صارمة تربط الهندسة بخصائص المادة والاستجابة الإنشائية.

ومن المحطات الرئيسية تشبيه غاليليو للجائزة الكابولية بالرافعة، وإدراك ماريوت للسلوك المرن الخطي وتوزيعات الإجهاد المثلثية، وتطبيق باران شروط التوازن الكاملة، ومعالجة كولوم المنهجية للانحناء والالتواء، وإدخال يونغ مفهوم معامل المرونة، واشتقاق سان-فنان الحاسم، على أساس نظرية المرونة، للعلاقة الأساسية لإجهاد الانحناء.

ومن اللافت أن هذه الأبحاث ركزت حصراً على المقاومة، أي قدرة العناصر على تحمل القوى الداخلية دون فشل، ولم تكشف شيئاً عن الأشكال المشوهة التي تتخذها المنشآت المحملة. وسيدفع هذا القصور المرحلة التالية من تطور الميكانيكا الإنشائية، حين يصبح التحليل الهندسي والتنبؤ بالتشوه مسألتين أساسيتين بالقدر نفسه.

7.1 مقدمة 193
7.2 المقاومة 194
7.2.1 ليوناردو (≃ 1490) 194
7.2.2 غاليليو (1564–1642) 194
7.2.3 بيكمان (1588–1637) 197
7.2.4 موسخنبروك (1692–1761) . . 197
7.3 إجهادات الانحناء الداخلية: دراسة في ثلاثة فصول 198
7.3.1 الفصل الأول: المسار التجريبي . . 198
7.3.2 الفصل الثاني: المسار التجريبي–مسار الوسط المتصل . 203
7.3.3 الفصل الثالث: المسار التحليلي . . 214
7.4 خلاصة 217
7.5 الانتقال 218

7.1 مقدمة

على خلاف التقاليد المعمارية السابقة، التي تعاملت تقريباً حصراً مع المباني الصلبة وكان الفشل الإنشائي فيها يقتصر أساساً على انهيار الأقواس والصنجات (انظر الفصل **??**)، وقع تحول مفاهيمي كبير في أوائل القرن السادس عشر. فقد أدرك آنذاك، وربما للمرة الأولى، أن العناصر الإنشائية قد تفشل أيضاً تحت أحمال محورية أو انحنائية. وأدى هذا الإدراك إلى أبحاث مكثفة هدفت إلى فهم التوزيع الداخلي لإجهادات الانحناء[1]. *تنبيه مسبق: أخطأ غاليليو في ذلك.*

وعليه يتناول هذا الفصل الجهود المبكرة لتحديد المقاومة المحورية والانحنائية للعناصر الإنشائية، إلى جانب المحاولات الأولى لوصف التوزيع الداخلي لإجهادات الانحناء. أما دراسة التشوه وتطور نظرية المرونة فتترك لفصول لاحقة.

[1] وهو توزيع نعرف اليوم أنه مثلثي بالنسبة إلى محور محايد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.2 المقاومة

كان مفهوم *المقاومة* من أقدم الخواص الميكانيكية التي جذبت اهتمام الفلاسفة والمعماريين والعلماء معاً. فقبل صياغة نظريات المرونة أو التشوه بزمن طويل، جعلت الحاجة إلى منع الكسر أو الانهيار من المقاومة شاغلاً بديهياً قابلاً للملاحظة. وعرف البناؤون بالتجربة أن الأعمدة قد تنبعج والجوائز قد تنكسر، لكن سبب الفشل والظروف التي يقع فيها ظلا غامضين. لذلك أصبحت المقاومة نقطة الدخول الطبيعية للميكانيكيين الأوائل؛ إذ قدمت نتيجة ظاهرة وثنائية، إما الانقطاع وإما البقاء، تدعو إلى التأمل والقياس معاً. وبخلاف المرونة أو توزيعات الإجهاد الداخلي، أمكن بحث المقاومة بأدوات واختبارات بسيطة، فكانت أرضاً خصبة لأقدم الدراسات الكمية في الميكانيكا.

7.2.1 ليوناردو (≃ 1490)

لنبذة عن سيرة ليوناردو، انظر القسم 6.4.2.

ابتكر ليوناردو ما قد يكون أبسط اختبار ميكانيكي يمكن تصوره، وهي الفكرة المجسدة في تجربة «السلة المعلقة» الشهيرة، وإن لم تنفذ قط، والمبينة في الشكل 7.1a. يسكب الرمل تدريجياً من قادوس إلى سلة معلقة حتى ينقطع السلك الحامل، ثم يحدد حمل الكسر بوزن الرمل المتجمع. وكان ليوناردو، بدافع فضوله التجريبي وقدرته الاستثنائية على طرح الأسئلة الأساسية، يعتقد أن مقاومة الكسر تتغير مع طول السلك، وهو استنتاج أثبتت الميكانيكا الحديثة خطأه. ومع ذلك يمثل الوضوح المفاهيمي للتجربة خطوة مبكرة نحو الدراسة المنهجية لمقاومة المواد.

7.2.2 غاليليو (1564–1642)

لنبذة عن سيرة غاليليو، انظر القسم 6.6.2.

يفند غاليليو (Galilei, 1638) تصور ليوناردو الخاطئ في الحوار الآتي، الشكل 7.1b:

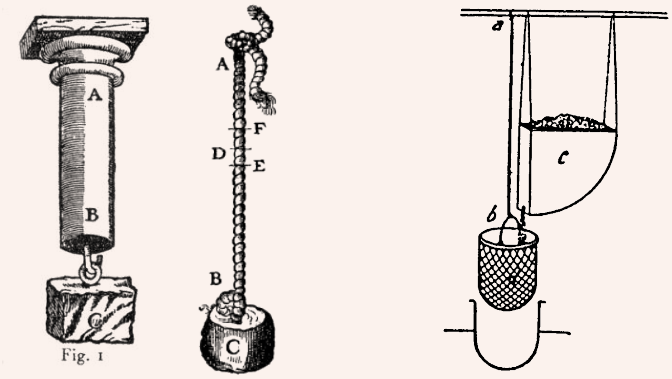
> Salviati says, “I fear, Simplicio ..., that ... you are making the same mistake as many others; that is, if you mean to say that a long rope ... cannot hold up so great a weight as a shorter length ... of the same rope.” He attaches a weight O, Fig. 7.1b, just sufficient to break the rope and asks Simplicio where the break will occur, and Simplicio replies, “Let us say at D .. ., because at this point the rope is not strong enough to support, say, 100 lbs.” Salviati then, fixing the rope at F, just above D, and attaching the weight at E, points out that at D the rope is still subject to the same pull, and thus the short segment FE will break again at D, by Simplicio’s admission.

> يقول سالفياتي: «أخشى يا سيمبليتشيو أنك تقع في الخطأ نفسه الذي يقع فيه كثيرون، إن كنت تقصد أن حبلاً طويلاً لا يستطيع حمل وزن كبير يستطيع حمله طول أقصر من الحبل نفسه». ثم يعلق وزناً عند النقطة O، الشكل المذكور، يكفي بالكاد لقطع الحبل، ويسأل سيمبليتشيو أين سيقع القطع. فيجيب: «لنقل عند D، لأن الحبل عند هذه النقطة لا يقوى على حمل مئة رطل مثلاً». عندئذ يثبت سالفياتي الحبل عند F فوق D مباشرة، ويعلق الوزن عند E، ويبين أن الشد عند D ما زال نفسه؛ ومن ثم، بإقرار سيمبليتشيو، سينقطع الجزء القصير FE مرة أخرى عند D.
>
> Galilei, 1638

يرى Truesdell, 1960 أن هذا أول مثال بدائي لمبدأ الإجهاد في ميكانيكا الأوساط المتصلة. ويوضح الحوار مفهوماً أساسياً سيصبح لاحقاً محورياً في تحليل الإجهاد: فالقوى الداخلية تعتمد على شروط التحميل، لا على الأبعاد الهندسية وحدها.

يبدأ التحليل الإنشائي، بصورته المعروفة اليوم، بمعالجة غاليليو للجائزة الكابولية في مناقشات «اليومين» الأولين من كتابه

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) ليوناردو (b) غاليليو

شكل 7.1: دراسات المقاومة المحورية عند ليوناردو وغاليليو

مباحث وبراهين رياضية حول علمين جديدين[2] الذي نشر عام 1638 حين كان غاليليو في الرابعة والسبعين.[3] وقبل المضي أبعد، لنتتبع مسار استدلاله (Heyman, 1998b).

اهتم غاليليو في البداية أساساً بمقاومة كسر العناصر الإنشائية. فتصور عموداً موضوعاً أفقياً ومرتكزاً عند طرفيه وفي مركزه. واستنتج أنه إذا أزيل أحد الركيزين الطرفيين انكسر العمود في منتصف البحر، لأن نصفه سيعمل فعلياً كجائزة كابولية، انظر الشكل 7.2a. ثم انتقل إلى ترتيب آخر: عمود رأسي معلق بحرية يحمل عند أسفله وزناً متزايداً تدريجياً حتى يقع الانقطاع، كما في الشكل 7.1b.

قاد ذلك إلى حوار مثير بين شخصياته يستحضر، بلغة حديثة، مفاهيم تشبه الكسيريات: «قد تحتوي مساحة محدودة عدداً لا نهائياً من الفراغات»، أو إن «جسماً يبدو مصمتاً قد يتكون من عدد هائل من الأجزاء الصغيرة ذات مقاومة كامنة»، على نحو يشبه سلوك حزم الكبلات الفولاذية. واستند تفسير غاليليو، كما أورده Benvenuto, 1991a، إلى افتراض أن الأجسام الصلبة تتكون من عناصر خيطية،

> Hence I think that in nature a solid may be imagined as composed of an infinite number of extremely thin plates or filaments, all joined and bound together in such a way that the whole appears to be one single continuous solid body; but in reality the resistance offered by this body to any force tending to pull it apart or break it is due not to the large mass, but to the multitude and entanglement of these tiny strands.

> ومن ثم أرى أنه يمكن تصور الجسم الصلب في الطبيعة مؤلفاً من عدد لا نهائي من الصفائح أو الخيوط الدقيقة جداً، وقد ضمت وربطت معاً بحيث يبدو الكل جسماً صلباً واحداً متصلاً. لكن مقاومة هذا الجسم لأي قوة تسعى إلى فصله أو كسره لا ترجع في الحقيقة إلى كتلته الكبيرة، بل إلى كثرة هذه الخيوط الدقيقة وتشابكها.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

ولا بد من مراعاة عددها ودرجة تشابكها معاً. وبالرجوع إلى الشكل 7.2b،

---

[2] ينبغي ألا يخلط بينه وبين كتابه الأسبق حوار حول *النظامين الرئيسيين للعالم*، المنشور عام 1632.

[3] كان قد أدين بالهرطقة قبل ذلك بخمس سنوات، وحكم عليه بالسجن مدى الحياة، ومنع من نشر أعمال أخرى. لذلك نشرت *المباحث* في هولندا، خارج متناول محاكم التفتيش، على يد أسرة إلزفير.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

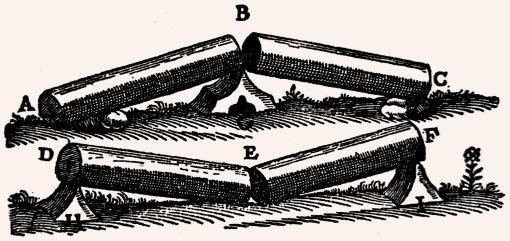


Fig. 29

(a) كسر جائزة

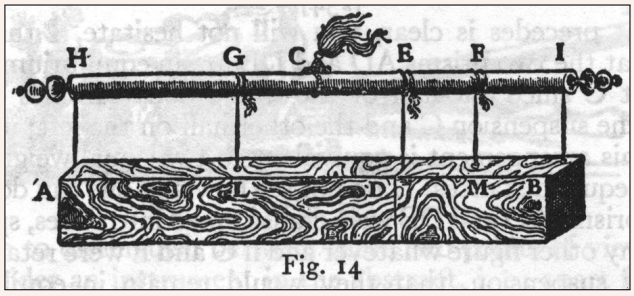
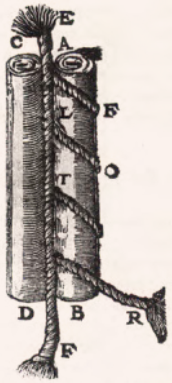


Fig. 14

(c) قانون الرافعة



(b) تفسير غاليليو

شكل 7.2: مسارات غاليليو نحو الجائزة الكابولية التأسيسية

Now if we imagine a filament EF stretched between two contiguous small cylinders AB and CD, and consider what happens when it is pressed between them, or again when it slips freely, or even when it is wound helically around one of them, we shall observe very different behaviors. For example, the more strongly one pulls the filament in an attempt to unwind it from the cylinder, the more tightly it presses against the cylinder.

From this it appears that what counts is not only the material's strength, but its arrangement. Just as we know that the resistance of a rope is derived from the multitude of hempen threads of which it is composed, so in wood we find fibers and filaments running lengthwise which render it more resistant to fracture than would a hempen cord of the same length. In a stone or metal cylinder, the coherence of parts appears still greater, though due to some other cement than that of threads or fibers. Yet even these can be broken by sufficient force.

لنتخيل خيطاً EF مشدوداً بين أسطوانتين صغيرتين متجاورتين AB وCD، ولننظر فيما يحدث حين يضغط بينهما، أو حين ينزلق بحرية، أو حين يلف حلزونياً حول إحداهما؛ سنلاحظ سلوكيات مختلفة جداً. فكلما اشتد سحب الخيط بقصد فكه عن الأسطوانة، ازداد ضغطه عليها.

ويتضح من ذلك أن المهم ليس مقاومة المادة وحدها، بل ترتيبها أيضاً. فكما نعلم أن مقاومة الحبل مستمدة من كثرة خيوط القنب التي يتألف منها، نجد في الخشب أليافاً وخيوطاً طولية تجعله أشد مقاومة للكسر من حبل قنبي بالطول نفسه. ويبدو تماسك الأجزاء في أسطوانة حجرية أو معدنية أكبر، وإن كان ناشئاً من رابط آخر غير الخيوط أو الألياف؛ ومع ذلك يمكن لقوة كافية أن تكسرها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

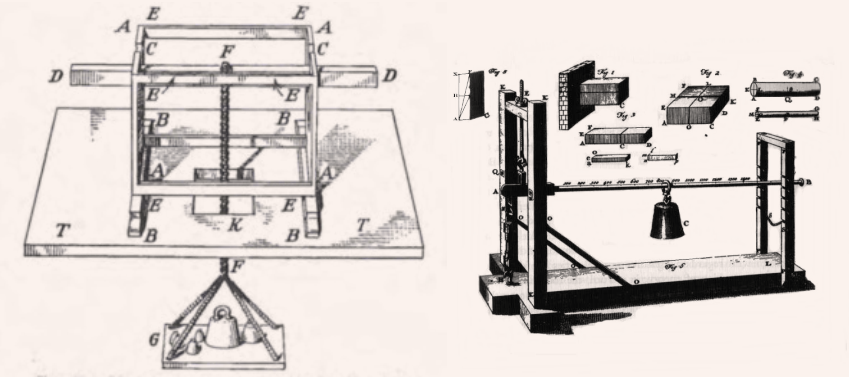
Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

7.2.3 بيكمان (1588–1637)

سجل الفيلسوف والعالم الهولندي إسحاق بيكمان عام 1630 ملاحظة دقيقة لكنها مهمة استبقت مفهوماً أساسياً في الميكانيكا. فقد لاحظ أنه حين يعلق وزن بخيط، «كلما طال الخيط ازداد هبوط الوزن...»[4] ومع أن بيكمان لم يصغ هذه الملاحظة رياضياً، فإن عبارته تمثل أول إشارة معروفة، وإن كانت غير مباشرة، إلى ما نسميه اليوم *الانفعال*. ومن خلال ربطه الحدسي بين استطالة الخيط والحمل الذي يحمله، أبرز استجابة قابلة للقياس يبديها الجسم تجاه القوة. وسبقت بصيرته قانون هوك بعدة عقود، وعكست وعياً تجريبياً ناشئاً بالتشوه بوصفه ظاهرة ميكانيكية جديرة بالدراسة. وقد أثر عمل بيكمان، الذي ظل معظمه غير منشور في حياته، في معاصرين مثل ديكارت، وينظر إليه اليوم على أنه تمهيد مهم لعلم المرونة الحديث.

7.2.4 موسخنبروك (1692–1761)

كان بيتر فان موسخنبروك من أوائل التجريبيين الذين بحثوا المقاومة المحورية للمواد باختبارات شد منهجية. ووصف في كتابه الصادر عام 1739، *Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739)، سلسلة تجارب علقت فيها أوزان من أسلاك أو قضبان طويلة لتحديد أكبر حمل يمكنها تحمله قبل الانقطاع. ولم تكتسب هذه الاختبارات، الشكل 7.3a، أهميتها لأنها أعطت قياسات قابلة للتكرار لمقاومة الشد القصوى فحسب، بل لأنها أرست أيضاً إطاراً منهجياً لدراسة فشل المادة تحت حمل أحادي المحور. وشدد موسخنبروك على أهمية انتظام مساحة المقطع وتجانس المادة في إنتاج نتائج متسقة، وهو فهم استبق المعايير الحديثة لاختبار المواد. كما وضع جداول تقارن مقاومات مواد مختلفة، منها المعادن والأخشاب والألياف الحيوانية، فأرسى الأساس التجريبي لتطور مفهوم الإجهاد–الانفعال لاحقاً. وكان موسخنبروك تجريبياً ممتازاً؛ فبحث أيضاً الانحناء، الشكل 7.3b، وانبعاج الأعمدة (المناقش في §9.5.1.2).



(a) اختبار الشد (b) اختبار الانحناء

شكل 7.3: تجارب موسخنبروك (Musschenbroek, 1739)

[4] نقلاً عن Drake, 1970, p. 201.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.3 إجهادات الانحناء الداخلية: دراسة في ثلاثة فصول

كانت الإجهادات في منشآت العصور القديمة والوسطى منخفضة لأنها صممت بأبعاد مفرطة وفق المقاييس الحديثة. فقد تعرضت الأقواس والقباب الحجرية لإجهادات أقل بكثير من مقاومتها. وفي غياب إرشادات علمية، انهارت ببساطة المنشآت التي لم تحدد أبعادها على نحو مناسب، ومن هنا أهمية قوانين فيتروفيوس للتحجيم. وبعبارة موجزة، كان حساب الإجهاد ذا أهمية ثانوية؛ فشكل المنشأ هو الذي يحكم استقراره.

يكشف التطور التاريخي لنظرية الانحناء مسارين متوازيين ومستقلين إلى حد بعيد، الشكل 7.4: أحدهما تجريبي فرنسي، والآخر رياضي سويسري ألماني؛ ومن اللافت أنهما ظلا منفصلين أكثر من قرن.

بدأ المسار الأول، المتجذر في التجربة والحدس الفيزيائي، مع **غاليليو** الذي طرح الأسئلة الأولى عن كسر الجوائز والتحجيم. وامتد عبر **ديكارت** و**ماريوت** و**بارّان**، وبلغ ذروته في عمل **كولوم** الذي قدم عام 1773 نظرية للفشل قائمة على التماسك الداخلي سبقت عصرها على نحو لافت. ووصل هذا المسار إلى صقله التحليلي الكامل مع **سان-فنان** في منتصف القرن التاسع عشر؛ إذ أدخلت مذكراته مفهوم توزيعات الإجهاد وصححت كثيراً من أوجه عدم الاتساق في النماذج السابقة. وكان هذا «المسار الفرنسي» مدفوعاً أساساً باعتبارات الانقطاع والتماسك والتحقق التجريبي، وظل قائماً على الاستدلال الهندسي والمعقولية الفيزيائية.

وفي المقابل نشأ تطور ثان مستقل من عمل ياكوب برنولي، الذي صاغ نظرية أولية للانحناء والانفعال، وبلغ تعبيره الرياضي الصريح في اشتقاق **أويلر** للمنحني المرن عام 1744 باستعمال مبادئ التغاير. وسبقت صياغة أويلر، القائمة على حساب التغايرات وافتراضات المرونة الخطية والتشوه الصغير، أعمال كولوم ويونغ معاً. ومع أنها أنتجت معادلة تفاضلية كاملة للشكل المترخم لجائزة مرنة، غاب هذا «المسار السويسري الألماني» بوضوح عن الرواية الفرنسية.

ولا تتوافر أدلة كثيرة على أن كولوم أو يونغ أو حتى سان-فنان أقروا بإسهامات أويلر في نظرية الجوائز. ويمكن رد هذا الإغفال إلى عوامل عدة. أولاً، كان عمل أويلر غارقاً في الرياضيات المجردة ومكتوباً باللاتينية، مما ربما حد من تداوله بين التجريبيين المهتمين بالسلوك الإنشائي العملي. وثانياً، انشغل المجتمع العلمي الفرنسي في القرن الثامن عشر بالمقاومة والانقطاع أكثر من المرونة والترخيم، وهي اهتمامات أقرب إلى كولوم وماريوت منها إلى افتراضات أويلر المثالية. وأخيراً ربما أعاقت الانقسامات المؤسسية واللغوية بين التقاليد العلمية القارية تبادل الأفكار. والنتيجة مسار منقسم: أحد فرعيه قائم على المقاومة التجريبية والفشل، والآخر على المرونة الرياضية، ولم يقع التركيب الكامل بينهما إلا في أواخر القرن التاسع عشر.

وهذا الانفصال لافت، ولا سيما في ضوء الرؤية الحديثة التي تقيم السلوك الانحنائي مباشرة على المعادلة التي قدمها أويلر. وكون هذه المعادلة أهملت أول الأمر على يد المنظرين أنفسهم الذين صاغوا انحناء الجوائز يبين كيف يمكن للحدود التخصصية والتقاليد الفكرية أن تؤخر التقارب حتى أمام عمل سابق مقنع.

7.3.1 الفصل الأول: المسار التجريبي

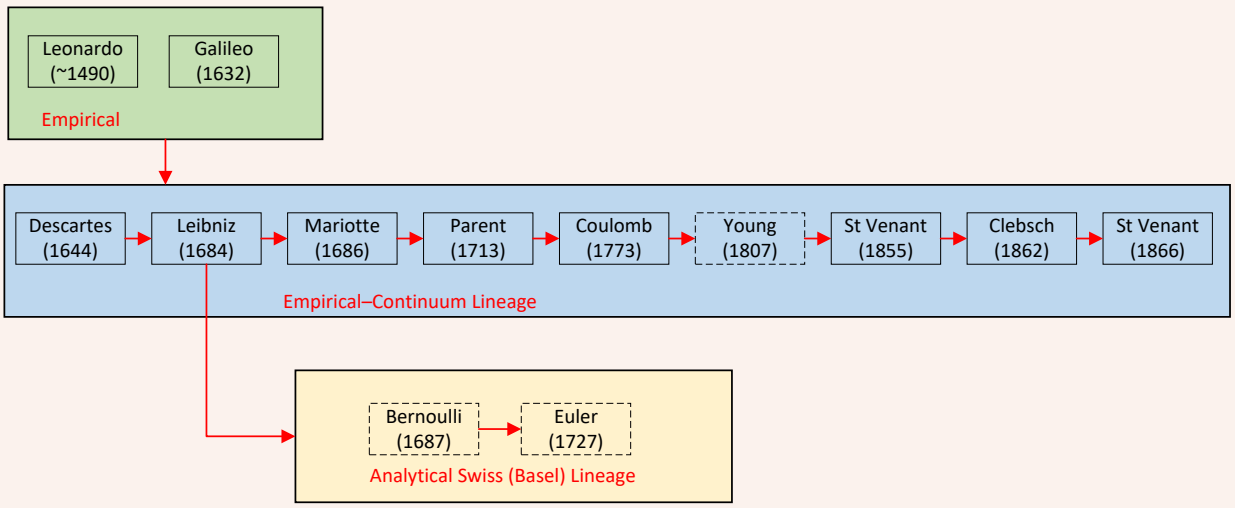
يتتبع هذا الفصل الأول تطور نظرية الجوائز من خلال الملاحظة المباشرة والتجربة والاستدلال الفيزيائي. وبدءاً برسوم ليوناردو الحدسية واستمراراً بتحليل غاليليو المنهجي، شدد هذا التقليد التجريبي على الشواغل العملية المتعلقة بالفشل الإنشائي. وكانت الفكرة المحركة لهذا المسار أن الجوائز تنكسر؛ لكن فهم سبب الكسر والتنبؤ بموعده تطلبا ملاحظة دقيقة واستدلالاً ميكانيكياً متزايد الرقي.

7.3.1.1 ليوناردو (≃ 1490)

مع أن الشائع أن غاليليو كان أول من تناول مسألة الانحناء، تشير أدلة أحدث من مخطوطة مدريد إلى أن ليوناردو دا فينشي سبقه في الواقع (Zammattio, 1980).

تظهر رسوم ليوناردو عن الانحناء في (Da Vinci, 1490 PDF) على ورقتين منفصلتين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 7.4: مساران متوازيان نحو إجهادات الانحناء

الورقة 9v

قد يظن المرء لأول وهلة أن رسوم ليوناردو، الشكل 7.5، سجلات لقياسات تجريبية أو نظرية رياضية مبكرة. لكن الأمر بعيد عن ذلك؛ فهو «ببساطة» يطرح سؤالاً بعد آخر ولا يقدم إلا قليلاً من الأجوبة. وحين تظهر الإجابات تكون غالباً تخمينية مزينة بأعداد صحيحة مريحة في تناسب هندسي، مثل 100 و20 و4، أو كسور كـ1/2 و1/4 و1/8. ولم يكن ليوناردو تجريبياً بالمعنى الحديث، كما سيصبح غاليليو لاحقاً؛ بل تجلت عبقريته في طرح الأسئلة الصحيحة والمجازفة أحياناً بأجوبة تخمينية.

أدرك مبكراً أهمية فهم المكونات الأساسية للمنشآت، أي الجوائز والأعمدة والأقواس والقبوات، بوصفه الأساس الصحيح لعلم البناء. وفي الرسوم المبينة في الشكل 7.5 يتأمل بوضوح مقاومة الجوائز[5] بالنسبة إلى طولها ومقطعها وطريقة إسنادها والأحمال المطبقة عليها. كما ينظر في ترخيم الجائزة بوصفه تابعاً لشروط الإسناد والتحميل.

ومع ذلك ظلت أبحاثه نوعية؛ إذ افتقر إلى الأدوات الرياضية ومفهوم *الإجهاد* الداخلي وإلى أي نهج منهجي للتحقق التجريبي. فلا تظهر في عمله معادلات ولا محاولة لعزل المتغيرات تحت شروط مضبوطة. ومع هذا لا تكمن قيمة إسهامات ليوناردو في الحلول، بل في صياغة المسائل. فقد مثلت الأسئلة التي طرحها، مهما كانت تخمينية، تحولاً حاسماً نحو معاملة العناصر الإنشائية كنظم ميكانيكية جديرة بالدراسة العقلانية، ومهدت لتطورات أشد صرامة في القرن التالي.

وسيبدأ ذلك التحول بجدية مع غاليليو، الذي لم يطرح أسئلة مماثلة فحسب، بل حاول الإجابة عنها أيضاً باستعمال مخططات القوى وحجج التحجيم والتجارب الفعلية.

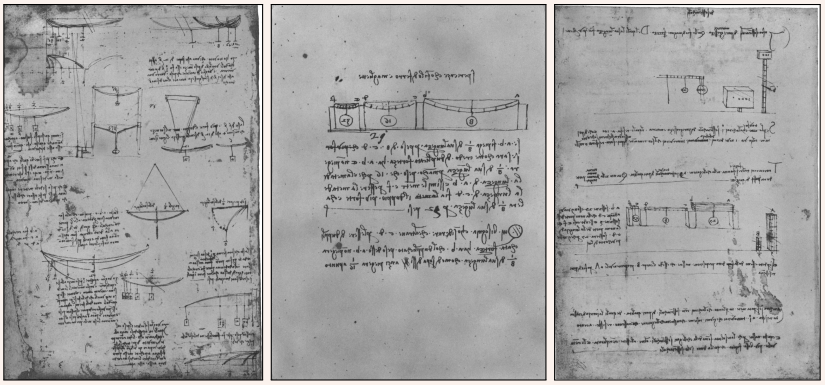
الورقة 20v

ظلت مخطوطة مدريد، المكتوبة نحو عام 1500، مجهولة قرابة 250 سنة حتى أعيد اكتشافها عام 1965.[6] وبحث ليوناردو في صفحاتها البالغ عددها 197 موضوعات مثل الميكانيكا والاستاتيكا والهندسة وبناء التحصينات. وللمخطوطات قيمة تاريخية كبيرة، لا لأنها تضم نحو 15% من جميع ملاحظات ليوناردو الباقية فحسب، بل لجودة محتواها وأهميته التقنية أيضاً، مما يضعها بين أهم الرسائل الهندسية في عصرها.

[5] يظهر انحناء الجوائز في مخطوطة مدريد المكتشفة حديثاً، الشكل 7.6، بينما تبحث مقاومة الأعمدة في الشكل 9.24a.

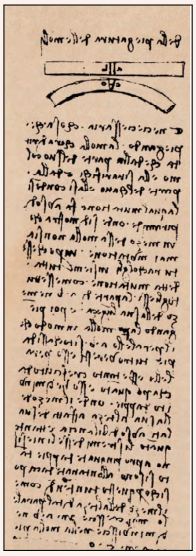
[6] عثر مؤرخ الفن جول بيكوس مصادفة على مخطوطات مدريد في المكتبة الوطنية الإسبانية. وأدركت أهميتها فوراً بسبب اتساع عمل ليوناردو في الميكانيكا والهندسة وعمقه التقني.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 7.5: رسوم ليوناردو، الورقة 9v

If a straight spring is bent, it is necessary that its convex part become thinner and its concave part, thicker. This modification is pyramidal and consequently there will never be a change in the middleof the spring. You shall discover, if you consider all of the aforementioned modifications that by taking part a b in the middle of its length and then bending the spring in a way that the two parallel lines, a and b, touch at the bottom, the distance between the parallel lines has grown as much at the top as it has diminished at the bottom. Therefore, the center of its height has become much like a balance for the sides. And the ends of those lines draw as dose at the bottom as much as they draw away at the top. From this, you will understand why the center of the height of the parallels never increases in a b nor diminishes in the bent spring at c o.



شكل 7.6: رسوم ليوناردو، الورقة 20v، (Zammattio, 1980)

حلل ليوناردو في الورقة 84 تشوه قضيب منحني، ووصف بدقة استجابة أليافه الخارجية. ولاحظ بوضوح ما يأتي:

- يقصر الجانب الداخلي للقضيب، المواجه لمركز الانحناء، أي إن الألياف الداخلية تنضغط؛
- يطول الجانب الخارجي، مما يدل على أن الألياف الخارجية في حالة شد؛
- يبقى طول المحور الأوسط للقضيب دون تغير؛
- يتناسب مقدار استطالة الألياف أو تقصيرها مع بعدها عن هذا *المحور المحايد*.

وهكذا صاغ ليوناردو في جوهر الأمر مبدأ التوزيع الخطي للانفعال في الانحناء قبل برنولي بنحو مئتي عام، وهي بصيرة لافتة استبقت الافتراض الأساسي الذي تقوم عليه نظرية الجوائز الحديثة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.3.1.2 غاليليو (1632)

ينتقل غاليليو بعد ذلك إلى مسألة الرافعة القديمة، الشكل 7.2c، (Galilei, 1632) (اليوم الثاني). فيتصور جسماً منتظماً معلقاً من عارضة ميزان بحبلين مثبتين عند طرفيه. وبحكم التناظر تتوازن العارضة عند منتصفها C. ثم يفترض أن الجسم قطع عمودياً عند نقطة وسطية D، وأن الجزأين الناتجين أسندا مؤقتاً بحبل مشترك عند DE. وهكذا يصبح كل جزء نسخة أصغر من النظام الأصلي ويتوازن حول مركز ثقله، النقطة G في اليسار وF في اليمين.

ويبين غاليليو أيضاً أنه إذا أسند الجزء AD عند منتصفه بحبل واحد عند LG، والجزء DB بحبل آخر عند MF، أمكن إزالة بقية حبال الإسناد مع بقاء التوازن. ويبرهن أن النسبة CG/CF تساوي EI/EH، وهذه بدورها تساوي DB/AD، إذ تتناسب النسبتان الأخيرتان مع وزني الجزأين.

ومن الجدير بالملاحظة أنه لا شيء يتحرك في مخطط غاليليو[7]، لا فعلياً ولا افتراضياً. فاستدلاله استاتيكي تماماً، متجذر في توازن مثالي لا في تحليل حركي أو ديناميكي.

وأصبح غاليليو أخيراً مستعداً لمعالجة المسألة التأسيسية للجائزة الكابولية، الشكل 7.7، وهو ترتيب غدا منذ ذلك الحين رمزاً لتطبيق الميكانيكا العقلانية على النظرية الإنشائية. العنصر $ABCD$ موشوري، وحين يطبق حمل عند النقطة C يتضح أن الفشل،



شكل 7.7: الجائزة الكابولية التأسيسية عند غاليليو

إن وقع، سيكون عند النقطة B حيث يثبت العنصر في الجدار. وللعنصر مقاومة *مطلقة*[8] معينة، وهي مقاومة الشد المناقشة سابقاً. وعند نقطة الكسر يجب أن يتوازن عزم هذه المقاومة المطلقة حول النقطة B مع عزم الحمل المطبق حول النقطة نفسها. ويدرس غاليليو في هذا التحليل فعلياً توازن عزوم *رافعة منكّسة*[9]. وبالترميز الحديث

$$L = \frac{Sh}{2l} \tag{7.1}$$

في الشكل 7.8a تمثل S المقاومة المطلقة، أي مقاومة الشد، لعنصر عرضه B وعمقه d. وإذا كان للجائزة مقطع أسطواني دائري، يلاحظ غاليليو أن ذراع المقاومة المطلقة هو نصف القطر R. وبلغة المفاهيم الحديثة للإجهاد، يتضح أن غاليليو افترض توزيعاً منتظماً، الشكل 7.8b.

---

[7] مع أن استدلال غاليليو صيغ بلغة التوازن وأذرع الرافعة، فإنه يستبق المفهوم الحديث *للمحور المحايد* في الانحناء. فهو لا يبحث صراحة الإجهادات الداخلية أو توزيع الانفعال، لكن تفكيكه الهندسي وحجج التناظر يعكسان حدساً مبكراً بأن مستويات معينة داخل الجسم المنحني تبقى بلا إجهاد، وهي فكرة ستصاغ لاحقاً في نظرية الجوائز.

[8] يقصد غاليليو بـ«المقاومة المطلقة» مقاومة الشد أو التماسك الكامنة في المادة، أي قدرتها على مقاومة الانقطاع عند تعرضها لإجهاد داخلي. وهي تختلف عن المفاهيم الحديثة لتوزيع الإجهاد أو السلوك المرن، إذ يعامل غاليليو المقاومة كقوة حدية ثابتة.

[9] يشير مصطلح «الرافعة المنكّسة» إلى ذراع رافعة منحن أو زاوي، وهو هنا شكل العنصر الكابولي المثبت والبارز، مما يغير اتجاهات القوى وأذرع العزوم. وتبسط معالجة غاليليو الجائزة إلى رافعة استاتيكية خاضعة لتوازن دوراني.

لا يستعمل غاليليو نفسه القيمة العددية للمقاومة المطلقة S؛ إذ ينصب اهتمامه أساساً على حساب المقاومات *النسبية*. وتعامل الكمية $S/2$ ببساطة كمعامل فيزيائي معلوم يدخل التحليل. فمثلاً يبرهن غاليليو على نحو صحيح أن نسبة الحملين T إلى X اللازمين لكسر جائزة كابولية مستطيلة المقطع، حين توضع على الحافة مقارنة بوضعها مسطحة، تساوي النسبة ca/cb، الشكل 7.8c. وبما أن معامل المقطع حدد على نحو صحيح في الصورة kbh^2، فلا يؤثر العامل الثابت $k = 1/2$ في المعادلة 7.1 في النتيجة؛ إذ يختزل من النسبة. وهذا يؤكد أن استدلال غاليليو، رغم افتقاره إلى المفهوم الحديث للإجهاد، يلتقط سلوك التحجيم الصحيح.[10]

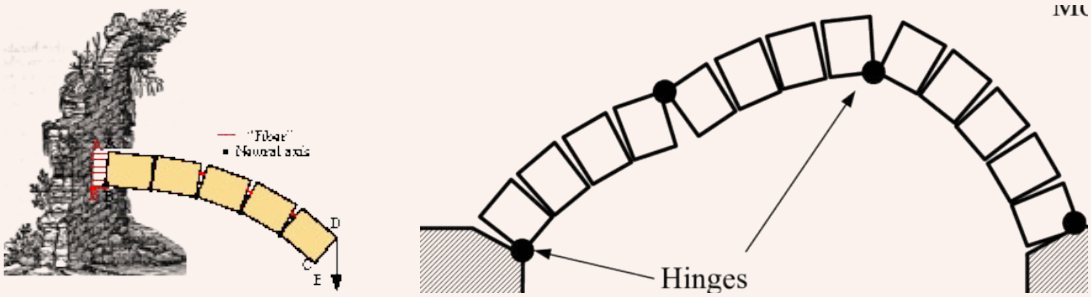


(a) الحالة عند الكسر (b) توزيع الإجهاد الضمني (c) المقاومات المقارنة

شكل 7.8: افتراضات غاليليو في تحديد مقاومة الجائزة الكابولية (الشكلان (a) و(b) مقتبسان من (Hey-man, 1998b))

من المهم ملاحظة أن غاليليو لم يكن قد عرف مفهوم الإجهاد بعد؛ فقد ظل يتصور مقاومة الجائزة ناشئة عن خيوط داخلية افتراضية تشد بعيداً بعضها عن بعض، كما في الشكل 7.12a. وسيصقل ماريوت هذه الرؤية النوعية لاحقاً، فيقدم تفسيراً أكثر ميكانيكية لشد الألياف وضغطها (§10.1.2) عبر مقطع الجائزة، في خطوة مبكرة نحو نظرية الانحناء الحديثة.

قد يبدو للقارئ الحديث مستغرباً أن عالماً بمكانة غاليليو لم يحدد موضع الإجهاد الأقصى في جائزة كابولية على نحو صحيح، لكن لا بد من مراعاة السياق التاريخي. ففي زمن غاليليو هيمنت الأقواس المبنية على الممارسة الإنشائية. ولم يكن الشاغل الأساسي في هذه المنشآت فشل الضغط، بل انفصال الكتل المتجاورة بفعل قوى الشد (الفصل ??)، مما قد يقود في النهاية إلى الانهيار. ويبين الشكل 7.9، متأثراً بما سيصاغ لاحقاً في عمل لايبنتس (الشكل 7.10)، نمط الفشل الذي يرجح أن غاليليو، ثم ماريوت، تصوراه محكوماً بانفصال الألياف السفلى أو انقطاعها تحت الشد.



(b) جائزة مبنية (a) قوس مبني

شكل 7.9: ترخيم «جائزة مبنية» صلبة

عمل غاليليو لافت من وجوه كثيرة. فلم يكن من أوائل من طبقوا منهجاً علمياً على المسائل الإنشائية فحسب، بل قدم للمرة

[10] لاعتراف غاليليو بأن المقاومة تعتمد على العرض وعلى مربع الارتفاع معاً (bh^2) أهمية تاريخية، لأنه يستبق معامل المقطع الحديث. ومع أن صيغته افتقرت إلى المفهوم الصريح للإجهاد أو التشوه المرن، تعكس بصيرته البعدية فهماً مبكراً ودقيقاً على نحو لافت لقوانين التحجيم الإنشائي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الأولى أيضاً فكرة مخطط *الجسم الحر*. وبالأهمية نفسها صاغ المفهوم التأسيسي لمقارنة *المقاومة* الإنشائية بـ*الطلب* المطبق، وهو مبدأ ما زال محورياً في الممارسة الهندسية الحديثة .[11]

وأخيراً ركز نموذج غاليليو حصراً على الشد وأهمل الضغط. ولم تكن الفكرة الثورية بوجود خط، سيعرف لاحقاً باسم *المحور المحايد*، يساوي الإجهاد عليه صفراً قد تصورت بعد. وسيدفع هذا القصور الجيل التالي من الباحثين إلى طلب فهم أكمل لتوزيع القوى الداخلية.

وسيستمر المسار التجريبي الذي أرساه غاليليو عبر باحثين صقلوا أفكاره تدريجياً، فصححوا أخطاءه وبنوا في الوقت نفسه على نهجه التأسيسي في معاملة الجوائز كنظم ميكانيكية خاضعة لتحليل التوازن.

7.3.2 الفصل الثاني: المسار التجريبي–مسار الوسط المتصل

يمثل الفصل الثاني انتقالاً حاسماً؛ فمع بقاء الباحثين مستندين إلى الملاحظة التجريبية، بدأوا يتصورون المواد أوساطاً متصلة لا تجمعات من خيوط منفصلة. وفتح هذا التحول إمكانات جديدة لفهم توزيعات الإجهاد الداخلي، ومثل بداية ميكانيكا الأوساط المتصلة في التحليل الإنشائي.

7.3.2.1 ديكارت (1644)

لنبذة عن سيرة ديكارت، انظر القسم 6.6.3.

نشر ديكارت عام 1644 كتابه *Principia Philosophiae*، وخصص فيه صفحات كثيرة لبحث الأسباب الفيزيائية والميتافيزيقية لمقاومة الأجسام الصلبة. وكتب في رسالة إلى ميرسين مؤرخة عام 1638:

> As for Signor Galileo, he posits two causes for the cohesion of the parts of bodies: one is the vacuum, which he says nature abhors; the other is a kind of glue or sticky matter which adheres to the surfaces and binds them. But both of these seem to me to be completely wrong. For the first, I do not believe that nature abhors a vacuum; and as for the second, if this glue existed, it would have to be even stickier than the parts it binds together, and the same question would arise about what holds its own parts together.

> أما السيد غاليليو فيفترض سببين لتماسك أجزاء الأجسام: أحدهما الخلاء الذي يقول إن الطبيعة تنفر منه، والآخر نوع من الغراء أو المادة اللزجة التي تلتصق بالسطوح وتربطها. لكن كليهما يبدو لي خاطئاً تماماً؛ فأنا لا أعتقد أولاً أن الطبيعة تنفر من الخلاء، وثانياً لو وجد هذا الغراء لوجب أن يكون أشد لزوجة من الأجزاء التي يربطها، ولعاد السؤال نفسه عما يمسك أجزاءه هو بعضها ببعض.
>
> Descartes, 1897b Correspondance de René Descartes

خصص ديكارت عدة أقسام من عمله لشرح مقاومة الأجسام الصلبة في إطار نظامه الفلسفي الأوسع، القائم على تفاعل الجسيمات واستبعاد الفراغات.[12] وتخرج معالجة أكمل لمفهوم ديكارت عن *الصلابة* عن نطاق هذا الفصل.

---

[11] مع أن غاليليو لم يستعمل الترميز المتجهي الحديث، تضمن استدلاله عزل أجزاء من النظام، وتحديد نقاط القوى المطبقة وردود الأفعال، وبحث التوازن الدوراني، مستبقاً مخطط الجسم الحر الحديث. وبالمثل تعكس مقارناته بين المقاومة الداخلية للعنصر والحمل الخارجي المسبب للفشل أقدم صياغة لما نسميه اليوم تقييم المقاومة مقابل الطلب. وقد أرست هذه الاختراقات المفاهيمية أساس فحوص السلامة الإنشائية الحديثة.

[12] رفض ديكارت استناد غاليليو إلى الخلاء وأي تصور لـ«غراء» داخلي، وعدهما بلا أساس ميتافيزيقي. واقترح بدلاً من ذلك أن المادة تتكون من جسيمات متشابكة في وسط متصل سماه *الملاء*، نافياً وجود حيز فارغ. ووفق هذه الرؤية تنشأ مقاومة الأجسام الصلبة من عدم قابلية هذه الجسيمات للاختراق ومن ترتيبها الهندسي، وهي دائماً متلامسة ومتحركة. ومع أن تفسيراته كانت

نشر كتاب ديكارت *La Géométrie* (Descartes, 1637b) ملحقاً بكتاب *Discours de la méthode* (Descartes, 1637a)، ودشن الهندسة التحليلية بربط مسائل الهندسة اليونانية الكلاسيكية بالرمزية الجبرية. ومن خلال إدخال محاور الإحداثيات والتمثيل الجبري للمنحنيات وطرائق الحذف المنهجية، حول ديكارت الهندسة إلى منهج عام لحل مسائل المحال الهندسية والإنشاء. وعم تأثيره ميكانيكا القرنين السابع عشر والثامن عشر، موفراً اللغة الرياضية التي استعملها لاحقاً فيرما ونيوتن وأسرة برنولي.

ومع ذلك يمثل ديكارت شخصية انتقالية مهمة؛ فعلى الرغم من افتقاره إلى أساس تجريبي، دفع إصراره على التفسيرات الميكانيكية وإنكاره الصور الأرسطية المفكرين اللاحقين نحو نماذج مادية وإنشائية أكثر لتفسير التماسك. وستؤثر رؤيته للمادة كوسط متصل في التطور اللاحق لمفهومي الإجهاد والانفعال.

7.3.2.2 لايبنتس (1684)

لنبذة عن سيرة لايبنتس، انظر القسم 6.6.8.

تأثر اهتمام لايبنتس بميكانيكا الأجسام الصلبة بالجدل المعاصر بين نظريتي غاليليو وماريوت في الانحناء. فبينما افترض غاليليو أن الجوائز صلبة تماماً وتفشل فجأة متى غلبت مقاومتها، قدم ماريوت ملاحظات تجريبية تشير إلى وقوع التشوه والانفعال قبل الانقطاع. واتبع لايبنتس استدلال ماريوت، وأقر في كتاباته ومراسلاته بأن نموذج غاليليو أهمل قابلية المواد للاستطالة (Leibniz, 1684).

وبحسب McDonough, 2016، لاحظ لايبنتس أن النتائج التجريبية، ولا سيما تجارب ماريوت الذي راسله مباشرة، تدل على أن «وزناً أقل بكثير مما أراد غاليليو يكفي لكسر الجائزة». وجادل لايبنتس (2016, page 321) بأن أصل خطأ غاليليو هو أنه «تصور جائزة صلبة تماماً تنكسر في لحظة واحدة متى أصبحت مقاومتها مفرطة». وفي المقابل أكد أن جميع الجوائز «تخضع إلى حد ما قبل أن تنقطع، كما يتضح من مثال العصا التي تلتوي قبل أن تتحطم، ومن مثال الخيوط التي تستطيل قبل أن تنكسر».

ومع أنه لم ينشر رسالة شاملة في الموضوع، أسهم لايبنتس في تطور نظرية الانحناء بابتكارات مفاهيمية. فقد رأى أن جميع الأجسام المحسوسة قابلة في الحقيقة للقسمة بلا نهاية. لكن تقسيمه الجائزة إلى خيوط وأجزاء أولية لم يقصد به تمثيل البنية الفيزيائية، بل أن يكون تجريداً رياضياً. وكان هذا التفكيك إلى ألياف مثالية (§10.1.2) وعناصر بناءً منهجياً واضحاً ومقدمة للنمذجة الحديثة للأوساط المتصلة.

تصور لايبنتس هذه الألياف نوابض تمسك عناصر الجائزة بعضها ببعض[13]. وفي هذا النموذج الذهني تتصرف الجائزة كنظام من كتل صلبة تصلها ألياف شبيهة بالنوابض على سطوحها المتجاورة. ويبين الشكل 7.10 كتلة من هذا النوع $ABKC$ تعمل رافعة ذات ذراعين ومرتكزها عند A. وتتصل بالسطح المجاور DE بعناصر مثل $1B2B$ و$1H2H$، بينما يطبق حمل عند النقطة C على طول الذراع AC. ومع أن المخطط تخميني، فإنه ينسجم مع استراتيجيات لايبنتس العامة في النمذجة واعتماده الاستدلال الهندسي.

مع أن لايبنتس لم يضف جديداً أساسياً كثيراً إلى ميكانيكا الجوائز، فقد أرسى أساساً مفاهيمياً مهماً. وكما قال هو نفسه، سيترك لغيره تطوير نظرية كاملة. ويبدو أنه لم يحافظ على اهتمام طويل بالمسألة، وربما لأنه رأى عمقها الرياضي محدوداً. ومع ذلك تؤكد عباراته الختامية إيمانه بقدرة الرياضيات على إضاءة الظواهر الفيزيائية. فقد كتب:

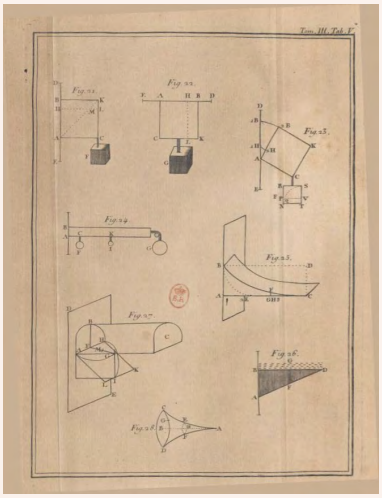
> ut proinde bis paucis consideratis tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis et mechanicis unice desideratur.

> وهكذا تختزل معالجة هذا الموضوع كلها، بهذه الاعتبارات القليلة، إلى الهندسة البحتة، وهي الغاية الرئيسية المطلوبة في الفيزياء والميكانيكا.
>
> McDonough, 2016 *"Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years"*, p. 112

تخمينية تفتقر إلى أساس تجريبي، فقد مثلت انتقالاً مهماً من الصور الأرسطية إلى تفسيرات ميكانيكية كاملة. وسيواجه نيوتن لاحقاً كثيراً من افتراضات ديكارت ويتجاوزها، ولا سيما إنكاره الفعل عن بعد، مع بقائه وارثاً للالتزام الديكارتي بريْضنة الظواهر الفيزيائية.

[13] يمكن من هذه الناحية عد لايبنتس سلفاً مفاهيمياً لطريقة العناصر المنفصلة الحديثة، التي تمثل الأوساط المتصلة أيضاً كتجمعات من كتل صلبة تصل بينها عناصر مطاوعة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 7.10: نموذج مفاهيمي لجائزة مستلهم من ميكانيكا لايبنتس الهندسية (Leibniz, 1684)

وتبرز إحالة لايبنتس إلى *الهندسة البحتة* الإدراك المبكر بأن الاستدلال الهندسي قادر على تقديم بصائر قوية في السلوك الميكانيكي المعقد.[14]

وأخيراً يذكر لايبنتس في عدد يونيو 1691 من *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1691e) أنه يعتزم أيضاً، عبر رسائل خاصة، معالجة *انحناء الجوائز أو تقوسها، والأقواس المشدودة، أو أي نوع من الانحناء الجانبي*، لكنه اختار تأخير النشر وحفظ التفاصيل للمراسلات الخاصة.

7.3.2.3 ماريوت (1686)

كان ماريوت يبحث مقاومة أنابيب المياه، فبدأ باشتقاق تعبير صحيح لسماكة الجدار اللازمة لأنبوب معلوم القطر كي يتحمل ضغطاً داخلياً. لكنه لم يستطع، رغم إجرائه اختبارات عديدة للشد والانحناء، الشكل 7.11a، التوفيق بين نتائجه وصيغة غاليليو. واستنتج أن افتراض غاليليو عدم القابلية للاستطالة خاطئ، وأن جميع المواد لا بد أن تستطيل بعض الشيء عند تحميلها. وكان هوك قد نشر حديثاً فقط قانونه الشهير *Ut tensio, sic vis*.

لذلك افترض ماريوت أن المواد تتصرف بمرونة خطية، وتبدي سلوكاً متماثلاً في الشد والضغط، ولها استطالة قصوى محدودة قبل الانقطاع. ومع احتفاظه بافتراض غاليليو أن المحور المحايد يقع عند قاعدة المقطع، استنتج ماريوت أن الإجهادات ينبغي أن تتوزع في شكل مثلثي، الشكل 7.11b (Heyman, 1998b).

حين درس ماريوت انحناء جائزة، الشكل 7.11af، لاحظ أن مجموع قوى الشد يساوي $S/2$، أي نصف مقاومة الشد المطلقة للجائزة فقط، وأن عزمها حول النقطة D هو $S/2 \times 2h/3 = Sh/3$، انظر الشكل 7.11b. ومن ثم يعطى الحمل الأقصى الموافق بالعلاقة:

$$L = \frac{Sh}{3l} \tag{7.2}$$

حيث L هو الحمل الخارجي، الذي رمز إليه بـW في صياغة غاليليو. ولا تبلغ هذه النتيجة إلا ثلثي الحمل الأقصى الذي تنبأ به غاليليو (Timoshenko, 1953).

ثم مضى ماريوت أبعد. فبالرجوع مرة أخرى إلى الشكل 7.11a-f، لاحظ أن ألياف الجزء السفلي ID من المقطع في حالة ضغط،

[14] ستثبت هذه الرؤية لاحقاً ضرورتها لمعالجة المسائل المرنة غير الخطية، مثل *المنحني المرن*، حيث تحكم الهندسة أوضاع التوازن خارج المجال الخطي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

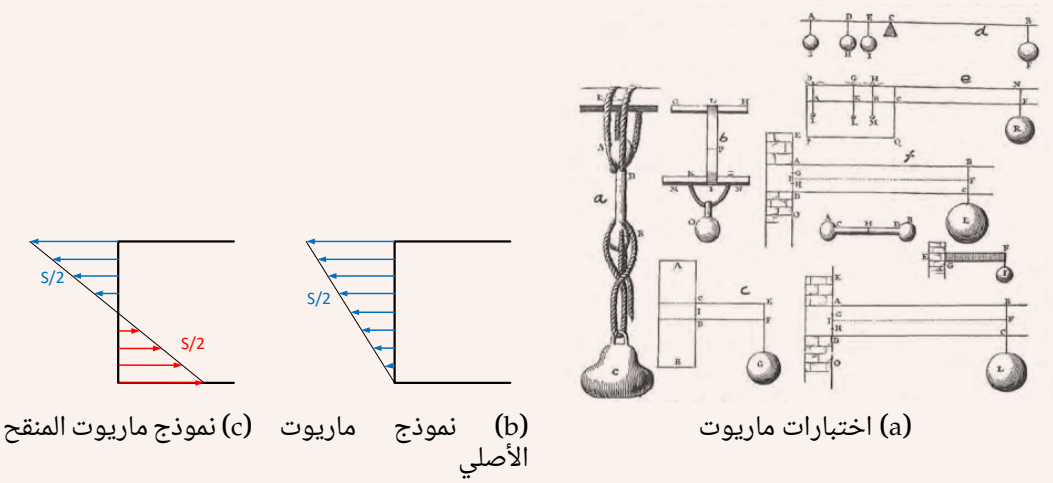
بينما ألياف الجزء العلوي IA في حالة شد، الشكل 7.11c. ولحساب الحمل L اللازم للتغلب على مقاومة ألياف الشد، أعاد استعمال المعادلة 7.2 مع إحلال $h/2$ محل h ومضاعفة النتيجة، فحصل على:

$$L_1 = 2 \cdot \frac{S}{3l} \cdot \frac{h}{2} = \frac{Sh}{3l} \tag{7.3}$$

ومع أن افتراضه عن توزيع القوى في الألياف كان صحيحاً في جوهره، أخطأ في حساب عزم قوى الشد بالنسبة إلى النقطة I. فإلى جانب إحلال $h/2$ محل h في المعادلة 7.2، كان ينبغي أن يستعمل $S/2$ بدلاً من S، مما يعطي النتيجة الصحيحة:

$$L_2 = 2 \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{Sh}{6l} \tag{7.4}$$

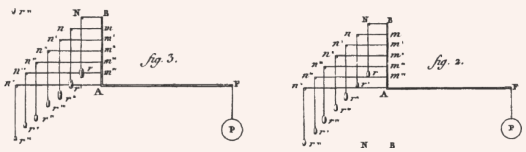
حال هذا السهو دون وصول ماريوت إلى الصيغة الصحيحة للحمل الأقصى للجوائز (Timoshenko, 1953). وصحح سان-فنان الخطأ لاحقاً.



(a) اختبارات ماريوت (b) نموذج ماريوت الأصلي (c) نموذج ماريوت المنقح

شكل 7.11: نماذج ماريوت (Heyman, 1998b)

ومرة أخرى لم يكن مفهوم الإجهاد قد صيغ بعد، وظل استدلال ماريوت وثيق الصلة بفكرة غاليليو الأسبق عن خيوط متوازية محملة تقاوم الشد داخل الجائزة. وقد صور Girard, 1798 هذا التفسير القائم على الخيوط بوضوح في أوائل القرن التاسع عشر؛ فيعيد الشكل 7.12a بناء نموذج غاليليو لرافعة منحنية مؤلفة من ألياف شد، بينما يصور الشكل 7.12b تنقيح ماريوت للمفهوم. ومع أن ألبرت جيرار عمل في زمن متأخر كثيراً، تساعد مخططاته على تصور التفكير الانتقالي الذي سبق التطور الكامل لنظرية المرونة القائمة على الإجهاد.



(a) غاليليو (b) ماريوت

شكل 7.12: تصوير جيرار لنموذجي غاليليو وماريوت

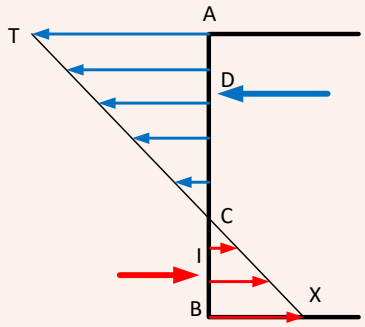
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.3.2.4 باران (1713)

بدلاً من وضع المحور المحايد اعتباطاً في موضع «مرجح»، أدرك باران ضرورة استيفاء جميع شروط التوازن (Parent, 1713). ففي ميكانيكا الأجسام الصلبة ثنائية الأبعاد يجب تحقيق ثلاث معادلات للتوازن. ولاحظ باران أن غاليليو حقق فعلياً معادلة واحدة فقط، إذ ساوى عزم الحمل المطبق حول المرتكز ، أي المحور المحايد عند قاعدة المقطع، بعزم القوى الداخلية عند الكسر. ويبدو أن غاليليو أغفل الشرطين الباقيين: مجموع القوى الأفقية ومجموع القوى الرأسية.

أما باران فكتب صراحة معادلة التوازن الأفقي. وافترض توزيعاً خطياً عاماً للانفعال، الشكل 7.13، مع السماح باختلاف معاملي المرونة في الشد والضغط. وفي صيغته يحكم الكسر إجهاد الشد في الليف AT، مع أن إجهاد الضغط في الليف BX قد يكون أكبر. وبصرف النظر عن مقداريهما، أكد باران أن المقاومة الكلية لمثلث الضغط CBX يجب أن تساوي مقاومة مثلث الشد CAT، وأن القوتين المناظرتين تؤثران عبر النقطتين I وD على الترتيب.

وكان باران أيضاً أول من أدرك إمكان وجود قوى تؤثر مماسياً للمقطع، وهي ما نسميه اليوم إجهادات القص.



شكل 7.13: نموذج باران

7.3.2.5 كولوم (1773)

حقق شارل أوغستان كولوم تقدماً مهماً في تحليل الانحناء. ففي مذكرته لعام 1773 (Coulomb, 1773b)، *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*، بحث توزيع القوى الداخلية في الجوائز الكابولية، وطبق على نحو صحيح معادلات التوازن الثلاث: توازن القوى في اتجاهين وتوازن العزوم حول نقطة. واعتبر الجائزة مؤلفة من ألياف تطيع قانون هوك، وقدر، في حالة السلوك المرن حتى الفشل، عزم المقاومة الداخلي متناسباً مع إجهاد الشد الأقصى ومربع عمق المقطع، أي $\sigma h^2/6$.

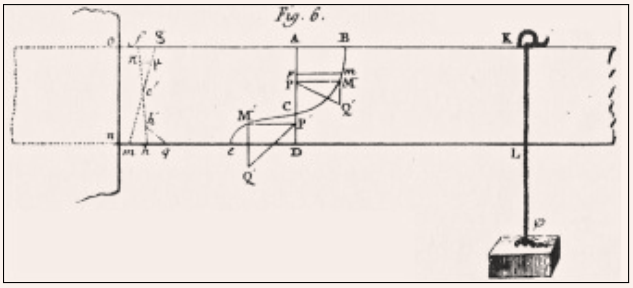
الانحناء

ومع أن كولوم لم يكتب هذه المعادلة صراحة بهذه الصورة، فإن استدلاله وحساباته يكافئانها في الجوهر. فقد حدد بوضوح دوري الشد والضغط، وناقش انتقال المحور المحايد، وميز بين سلوك المواد المرنة والصلبة. لكنه لم يشتق التوزيع الخطي الكامل للإجهاد، ولم يبرر موضع المحور المحايد من نظرية المرونة. ومن المهم أيضاً أن معالجة كولوم قامت أساساً على الحدس الميكانيكي والتشبيه بانقطاع الألياف، لا على الإطار الرياضي الناشئ للمرونة. فلم يشتق الصيغة من قانون هوك، ولم يصغ شروط توافق الانفعال أو التوازن الداخلي.

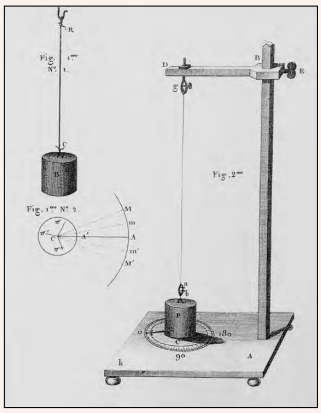
نوجز اشتقاقه الآتي، بالاستناد إلى (Timoshenko, 1953).

يبدأ Coulomb, 1773c تحليل الانحناء ببحث توزيع الإجهاد الداخلي في جائزة كابولية مستطيلة، كما يبين الشكل 7.14a ويناقش Timoshenko, 1953. ويمكن تقسيم استدلاله إلى خطوات رئيسية عدة:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) توازن جائزة كابولية محملة



(b) جهاز اختبار الاهتزاز الالتوائي

شكل 7.14: تجارب كولوم (Coulomb, 1773c)

1. **توزيع الإجهاد عبر المقطع** يدرس كولوم مقطعاً AD قرب الطرف المثبت للجائزة الكابولية. ويلاحظ أن الجزء العلوي (AC) سيكون في حالة شد، بينما الجزء السفلي في حالة ضغط. ويحلل قوى الألياف إلى مركبات أفقية ورأسية، تمثلها المتجهات PQ و$P'Q$، ويطبق معادلات الاستاتيكا الثلاث. ومن ذلك يستنتج:

   - يجب أن يساوي **مجموع القوى الأفقية**، الذي يمثله المنحنى BCe على طول المقطع، صفراً.
   - يجب أن يساوي **مجموع القوى الرأسية** الحمل المطبق ϕ.
   - يجب أن يساوي **مجموع عزوم** القوى الداخلية بالنسبة إلى النقطة C عزم الحمل المطبق ϕ حول المحور نفسه.

   ويلاحظ أن هذه المعادلات تصح بصرف النظر عن السلوك التأسيسي للمادة.

2. **حالة المرونة التامة** بافتراض أن الجائزة مصنوعة من مادة مرنة تماماً تطيع قانون هوك، يدرس كولوم عنصراً تفاضلياً $ofhn$ عند الطرف المثبت. وتحت الحمل المطبق ϕ يدور المستوى الأفقي في الأصل fh إلى الموضع الجديد gm. ويمثل توزيع الإجهاد داخل المقطع بمساحتين مثلثيتين: fge في الشد وemh في الضغط، وتمثل كل منهما الانفعال والإجهاد عبر الألياف.

   ليكن σ إجهاد الشد الأقصى عند النقطة f. عندئذ يحسب كولوم عزم المقاومة الداخلي، لجائزة بعرض وحدة، كما يأتي:

$$M_{\text{int}} = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{fe}{2} \cdot \frac{2}{3} fe = \frac{2}{3}\sigma (fe)^2 = \sigma \frac{(fh)^2}{6} \tag{7.5}$$

   وبإدخال مقاومة الشد القصوى للمادة S، والرمز إلى ذراع الحمل بـl وإلى العمق الكلي للمقطع بـh، يشتق الحمل الأقصى:

$$\phi = \frac{Sh}{6l} \tag{7.6}$$

   ويستنتج إمكان إهمال قوى القص، ولا سيما حين يكون ذراع الرافعة l أكبر بكثير من العمق h.

3. **حالة الضغط الصلب تماماً** يدرس كولوم بعد ذلك مادة مثل الحجر يفترض أنها صلبة في الضغط ولا تستطيل في الشد. ويفترض أن الكسر يقع بالدوران حول الحافة السفلى h، مع توزيع منتظم لإجهاد الشد. ويؤدي العزم الداخلي الناتج إلى تقدير أعلى للحمل الأقصى:

$$\phi = \frac{Sh}{3l} \tag{7.7}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن كولوم يجد، عند مقارنة هذا التنبؤ النظري بالبيانات التجريبية، أن الحمل مقدر بأكثر من قيمته. لذلك يقترح أن نقطة الدوران الفعلية لا بد أن تقع أعلى قليلاً من h، عند النقطة h'، بحيث يحمل جزء صغير hh' من المقطع قوة ضغط.

4. الدلالة والسياق يطبق تحليل كولوم التوازن الاستاتيكي تطبيقاً صحيحاً على القوى الداخلية، ويظهر فهماً مفاهيمياً واضحاً لتوزيع الإجهاد داخل عنصر خاضع للانحناء.[15]

ومن اللافت أن كولوم لا يشير إلى إسهامات باران الأسبق، مما يوحي بأنه لم يعرفها. وبدلاً من ذلك يستشهد بشارل بوسو ، الذي أوصى في رسالته *La Construction la plus avantageuse des digues* بمعاملة الجوائز الخشبية كمواد مرنة والحجر كمواد صلبة.

> Coulomb used equations of statics correctly in analyzing internal forces and had clear ideas regarding the distribution of these forces over the cross-section of the beam.

> استعمل كولوم معادلات الاستاتيكا استعمالاً صحيحاً في تحليل القوى الداخلية، وكانت لديه أفكار واضحة عن توزيع هذه القوى على مقطع الجائزة.
>
> Timoshenko, 1953 History of Strength of Materials

> Coulomb's theory... although giving in general correct results, was defective in point of principle, since the distribution of stress was not obtained from a knowledge of the strain, but was postulated on empirical grounds.

> كانت نظرية كولوم، مع أنها أعطت نتائج صحيحة عموماً، معيبة من حيث المبدأ، لأن توزيع الإجهاد لم يستنتج من معرفة الانفعال، بل افترض على أسس تجريبية.
>
> Todhunter **and** Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

ولم يصغ سان-فنان هذه الأفكار في إطار نظرية المرونة إلا في *منتصف القرن التاسع* عشر، فاشتق العلاقة المألوفة $\sigma = My/I$ وأثبت تطابق المحور المحايد مع مركز المساحة. وهكذا، مع أن كولوم استبق أساسيات نظرية الجوائز، بقي لسان-فنان أن يقيمها على أساس نظري صارم.

الالتواء

أنجز كولوم عام 1784 مذكرته عن الالتواء. وحدد الصلابة الالتوائية لسلك بملاحظة الاهتزازات الالتوائية لأسطوانة معدنية معلقة به[16]، الشكل 7.14b. وافترض كولوم أن عزم المقاومة في سلك ملتو يتناسب مع زاوية الالتواء ϕ، ووجد أن دور الاهتزاز مستقل

[15] تتفق مخططات كولوم للإجهاد وتقديراته للعزوم مفاهيمياً مع نظرية الجوائز الحديثة، لكنها تختلف في التنفيذ. يكتب العزم الداخلي في جائزة مرنة اليوم على الصورة $M = \int_A \sigma y \, dA$ مع $\sigma = E\kappa y$، مما يؤدي إلى $M = EI\kappa$، حيث E معامل يونغ وκ الانحناء وI عزم المساحة الثاني. ويتجاوز كولوم هذا الاشتقاق القائم على حساب التفاضل والتكامل باستدلال هندسي على كتل الإجهاد المثلثية. كما تستعمل معالجته للكسر الإجهاد الأقصى وتفترض إعادة توزيع لدنة كاملة، وهو مفهوم لم يصغ إلا بعد ذلك بزمن طويل في تحليل الحد ونظرية التصميم اللدن.

[16] تجدر الإشارة إلى أن كولوم كان قد طور آنذاك ميزان الالتواء واستعمله في كثير من دراساته الكمية للكهرباء والمغناطيسية واللزوجة.

عن زاوية الالتواء، ما دامت غير كبيرة، فاستنتج وجود تناسب بين العزم وزاوية الالتواء. ثم أجرى تجارب على أسلاك من المادة نفسها مختلفة الأطوال والأقطار، وأثبت أن العزم M يساوي

$$M = \frac{\mu d^4}{l}\phi \tag{7.8}$$

حيث l الطول وd القطر وμ ثابت للمادة. وبالترميز الحديث تصبح

$$T = \frac{GJ}{L}\phi \tag{7.9}$$

حيث تمثل T وG وJ وϕ، على الترتيب، العزم الخارجي ومعامل القص وعزم العطالة القطبي ($J = \pi d^4/32$ للمقطع الدائري) وزاوية الالتواء. والتعبير الموافق لإجهاد القص الأقصى هو $\tau = TR/J$.

وقد اشتق كولوم هذه المعادلة بالفعل. ومع أن القياس بينها وبين المعادلة المناظرة لإجهادات الانحناء مباشر، فليس واضحاً من كان أول من استعمل الأخيرة.

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \tag{7.10}$$

ومع ذلك تنسب معادلة إجهاد الانحناء عادة إلى كولوم.

7.3.2.6 يونغ (1807)

انظر §6.6.6 لمناقشة إسهامات يونغ في التقليد الذي بدأه هوك.

فاصل: المعامل

قدم يونغ عام 1807 مفهوم معامل المرونة لوصف صلابة المادة:

> We may express the elasticity of any substance by the weight of a certain column of the same substance, which may be denominated the modulus of its elasticity, and of which the weight is such, that any addition to it would increase it in the same proportion as the weight added would shorten, by its pressure, a portion of the substance of equal diameter.

> يمكن التعبير عن مرونة أي مادة بوزن عمود معين من المادة نفسها، يجوز تسميته معامل مرونتها؛ ويكون وزنه بحيث إن أي إضافة إليه تزيده بالنسبة نفسها التي يقصر بها الوزن المضاف، بفعل ضغطه، جزءاً من المادة مساوياً له في القطر.

Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

تعريفه معقد بعض الشيء ويختلف قليلاً عن التفسير الحديث. فـ«وزن المعامل» عند يونغ له وحدات القوة لا الإجهاد، ويوافق معامل المرونة الحديث (E) مضروباً في مساحة المقطع (A). وتجدر الإشارة إلى أن أويلر كان قد صاغ هذه العلاقة من قبل.

كما يسمي يونغ ما ندعوه اليوم «القص» *الدفع الجانبي*، ويقول:

> it may be inferred, however, from the properties of twisted substances, that the force varies in the simple ratio of the distance of the particles from their natural position, and it must also be simply proportional to the magnitude of the surface to which it is applied.

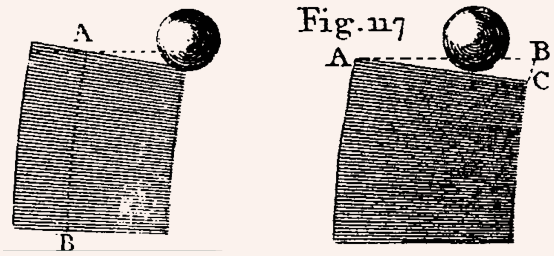
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> يمكن مع ذلك أن يستنتج من خواص المواد الملتوية أن القوة تتغير بنسبة بسيطة مع بعد الجسيمات عن موضعها الطبيعي، ولا بد أيضاً أن تتناسب تناسباً بسيطاً مع مقدار السطح الذي تطبق عليه.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

يصف يونغ هنا تشوه القص ومعامل القص وصفاً صحيحاً، ويستنتج أيضاً، على نحو دقيق، أن مقاومة القص للعنصر تتناسب مع مساحة مقطعه.

قاعدة الثلث الأوسط؛ 1807

نعود الآن إلى مسألة *المحور المحايد* بعد الفاصل القصير عن إدخال يونغ معامل المرونة. وقد درس يونغ أيضاً موضع المحور المحايد في الانحناء، ووسع عمل باران وكولوم السابق ليشمل آثار القوة المحورية، كما يبين الشكل 7.15.



شكل 7.15: قاعدة يونغ للثلث الأوسط

> **320. Theorem**. When a force is applied to an elastic column, of a rectangular prismatic form, in a direction parallel to the axis, the parts nearest to the line of direction of the force exert a resistance in an opposite direction; those particles, which are at a distance beyond the axis, equal to a third proportional to the depth and twelve times the distance of the line of direction of the force, remain in their natural state; and the parts beyond them act in the direction of the force.

> **المبرهنة 320**. حين تطبق قوة على عمود مرن موشوري مستطيل، في اتجاه موازٍ للمحور، تبدي الأجزاء الأقرب إلى خط اتجاه القوة مقاومة في الاتجاه المضاد؛ وتبقى الجسيمات الواقعة وراء المحور على مسافة تساوي المتناسب الثالث للعمق واثني عشر ضعف مسافة خط اتجاه القوة في حالتها الطبيعية؛ أما الأجزاء التي تتجاوزها فتؤثر في اتجاه القوة.
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

يمكن قراءة مبرهنة يونغ 320 كعبارة هندسية عن تناسب يحكم الاستطالة والانضغاط الطوليين لعمود مرن محمل لا مركزياً. لتؤثر قوة F موازية لمحور عمود موشوري مستطيل، لكن بإزاحة عرضية a عن محور مركز المساحة، وليكن عمق العمود في اتجاه الانحناء b. ويجادل يونغ بأن الانفعال الطولي يتغير متناسباً مع المسافة y عن خط عمل القوة، بحيث تستطيل الألياف الأقرب إلى ذلك الخط في اتجاه، بينما تستطيل الألياف البعيدة بما يكفي في الاتجاه المضاد. وتوجد طبقة وسطية على مسافة y_0 من المحور تنعدم عندها الاستطالة، أي $\varepsilon(y_0) = 0$. ولا يحدد يونغ هذا الموضع بحل معادلة جبرية للإجهاد، بل باستدلال تناسبي، فيؤكد أن y_0 هو المتناسب الثالث لـ b و $12a$، بحيث $b : y_0 = y_0 : 12a$. ويعني ذلك بالصياغة الحديثة $y_0 \propto \sqrt{ab}$، معبراً عن التوازن بين القوة المحورية والانحناء الناشئ عن اللامركزية. وهكذا تتضمن المبرهنة التناسب الخطي $\varepsilon(y) \propto y$ عبر عمق المقطع، وتستبق مفهوم المحور المحايد المزاح، وتوضح كيف صاغ يونغ السلوك المرن بنسب الأطوال والقوى بدلاً من معادلات تأسيسية صريحة.

يصف يونغ هنا كيف يتغير موضع المحور المحايد مع لامركزية الحمل، ويقدم ما سيصبح *قاعدة الثلث الأوسط* الشهيرة في التصميم الهندسي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن لا بد من ملاحظة أن عرض يونغ لم يكن واضحاً دائماً. فقد ظهرت المادة المعنية ضمن مجموعة واسعة من 58 محاضرة تناولت موضوعات علمية متنوعة.

> The whole section seems to me very obscure like most of the writings of its distinguished author, among his vast attainments in sciences and languages that of expressing himself clearly in the ordinary dialect of mathematicians was unfortunately not included. The formulae of the section were probably mainly new at the time of their appearance, but they were little likely to gain attention in consequence of the unattractive form in which they were presented.

> يبدو لي هذا القسم كله غامضاً جداً، شأن معظم كتابات مؤلفه المتميز؛ فمن بين تحصيله الواسع في العلوم واللغات لم تدخل للأسف القدرة على التعبير الواضح باللهجة المعتادة للرياضيين. وربما كانت صيغ هذا القسم جديدة في معظمها حين ظهرت، لكنها لم تكن مرشحة لجذب الانتباه بسبب الصورة غير الجذابة التي قدمت بها.
>
> Todhunter **and** Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

بحلول عصر يونغ كان المسار التجريبي–مسار الوسط المتصل قد أرسى معظم المفاهيم الأساسية لنظرية الجوائز: السلوك المرن، وتوزيعات الإجهاد، وتحليل التوازن، بل وفهماً أولياً لخواص المواد. ومع ذلك ظل الإطار النظري الصارم الكامل بعيد المنال. وكان التركيب النهائي يتطلب الدقة الرياضية التي سيقدمها سان-فنان بعد نصف قرن.

7.3.2.7 سان-فنان (1855)

عاد سان-فنان إلى تحليل انحناء الجوائز بعد أكثر من ثمانين عاماً من عمل كولوم الرائد. ومع أن كولوم كان قد اقترح صياغة صحيحة استاتيكياً تشمل إجهادات الشد والضغط، بل وتضمنت تعبيرات تشبه العلاقة الحديثة بين العزم والإجهاد، فإنه لم يشتق توزيع الإجهاد من نظرية المرونة. وبقي لسان-فنان أن يقدم *أول اشتقاق صارم* لحقل الإجهاد تحت الانحناء باستعمال الإطار الكامل للمرونة الخطية.

افترض سان-فنان في مذكرته التأسيسية (Saint-Venant, 1855c) تشوهات صغيرة، ومادة مرنة متجانسة ومتساوية الخواص تطيع قانون هوك، وترابطاً تاماً بين الألياف. وبرهن، في ظل هذه الافتراضات، أن:

- *المحور المحايد*، أي محل انعدام الإجهاد الطولي، يمر بمركز مساحة مقطع الجائزة.
- الإجهاد العمودي تحت الانحناء النقي يتغير خطياً مع المسافة y عن هذا المحور، مما يؤدي إلى التعبير الأساسي اليوم:

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

مثل ذلك نقطة تحول؛ فللمرة الأولى استنتجت صيغة إجهاد الانحناء من السلوك الداخلي للمادة والتوافق، لا من التوازن وحده. واستبدلت النتيجة بالاستدلال التجريبي أو القائم على الألياف نهجاً لوسط مرن متصل، وربطت بإحكام الهندسة وسلوك المادة وتوزيع الإجهاد الداخلي.

7.3.2.8 كليبش (1862)

أدى ألفرد كليبش (1833–1872) دوراً محورياً في التطور الرياضي الصوري لنظرية المرونة. وقدم عمله الرئيسي (Clebsch, 1862b)، *Theorie der Elasticität fester Körper*، الذي نشر بعد وفاته عام 1862 ثم ترجم إلى الفرنسية عام 1866 مع تعليقات مفصلة لسان-فنان، عرضاً منهجياً وصارماً للمعادلات الحاكمة للمرونة.

ومع أن كليبش لم يقدم مفهوم *المحور المحايد*، فقد وحدت رسالته نتائج سان-فنان ووسعتها، وقدمت اشتقاقاً أعم وأكثر صورية لتوزيعات الإجهاد والانفعال في الأجسام المرنة. وتشمل معالجته للانحناء، بوجه خاص، الشروط التي ينشأ تحتها سطح محايد،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يعرف بأنه محل النقاط في الجسم المشوه التي ينعدم عندها الانفعال الطولي. ويساعد هذا التعميم على ترسيخ الأساس الرياضي لنظرية الجوائز، جامعاً البصيرة الفيزيائية بالدقة التحليلية.

مثل عمل كليبش انتقالاً مهماً نحو الصياغات الحديثة؛ فلم يقدم تعبيرات تفاضلية واضحة للتوازن والتوافق فحسب، بل استبق أيضاً المعالجات اللاحقة للمرونة القائمة على الموترات.

> Clebsch ... expresses himself with remarkable clearness and precision ... the exposition is throughout in strict accordance with the methods of the higher analysis.

> يعبر كليبش عن نفسه بوضوح ودقة لافتين، ويلتزم العرض في جميع أجزائه التزاماً صارماً بطرائق التحليل العالي.
>
> Todhunter **and** Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

7.3.2.9 سان-فنان (1866)

زاد سان-فنان عمله السابق وضوحاً واتساعاً بتعليقاته في الترجمة الفرنسية لعام 1866 لرسالة كليبش في المرونة (Clebsch, 1866). وبناء على بصائر غاليليو وماريوت وباران السابقة، صحح افتراض ماريوت الخاطئ أن المقاطع المستوية تبقى مستوية على أساس هندسي محض، وأظهر بدلاً من ذلك أن النتيجة تنشأ طبيعياً من نظرية المرونة تحت افتراض الانفعال الصغير.

يبين الشكل 7.16 مقتطفاً من تعليقات سان-فنان، حيث يقول (*les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale*) إن الإجهادات تزداد بانتظام عبر الشرائح المتوازية للمقطع.

(*) L'auteur ajoute ceci : « Toutes les hypothèses de cette théorie se trouvent de même confirmées lorsque l'on suppose la section transversale extrêmement petite. Mais c'est seulement à cette condition qu'elles sont vérifiées; c'est seulement dans cette hypothèse que les sections transversales restent planes après la flexion et » (ajoute-t-il) « *que les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale.* Il n'y a qu'un des résultats de cette théorie qui soit impossible dans tous les cas » (même, apparemment, comme l'auteur semble le penser aussi quand la section est extrêmement petite) « c'est la production d'une flexion plane dont le plan ne passe pas par l'un des axes principaux des sections transversales. »

شكل 7.16: مقتطف من تعليقات سان-فنان في (Clebsch, 1862b)

ساعدت هذه التوضيحات على ردم الفجوة التاريخية بين الصياغات الاستاتيكية المبكرة ونظرية الجوائز التحليلية الكاملة. وكما لاحظ تودهَنتر:

> Saint-Venant shews with the simplest analysis that the cross-sections neither retain their original contour ... nor their original planeness ... the neutral line is the diameter of the ellipse of inertia conjugate to the trace of the load-plane on the cross-section.

> يبين سان-فنان بأبسط تحليل أن المقاطع لا تحتفظ بمحيطها الأصلي ولا باستوائها الأصلي، وأن الخط المحايد هو قطر إهليلج العطالة المرافق لأثر مستوى الحمل على المقطع.
>
> Todhunter **and** Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

لا يزال إسهاما سان-فنان البارزان، مذكرته لعام 1855 وتعليقاته لعام 1866، تأسيسيين. فقد أرسيا مبرهنة المحور المحايد، وأقاما أيضاً جوهر نظرية الجوائز المرنة كما تمارس اليوم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.3.3 الفصل الثالث: المسار التحليلي

يمثل الفصل الثالث نهجاً مختلفاً جذرياً لفهم سلوك الجوائز. فبدلاً من البدء بأنماط الفشل الملحوظة أو توزيعات الإجهاد التجريبية، انطلق المسار التحليلي من مبادئ رياضية، وبخاصة افتراض أن المواد تطيع قانون هوك، واستعمل حساب التفاضل والتكامل لاشتقاق المعادلات الحاكمة للتشوه المرن. وقد استبق هذا النهج، الذي استهله ياكوب برنولي وصاغه أويلر، نتائج كثيرة لم يبلغها التقليد التجريبي إلا بعد قرن آخر.

7.3.3.1 ياكوب برنولي (1687)

كان برنولي أستاذاً للرياضيات عام 1687، لكن اهتمامه بحل المسائل الفيزيائية ظل، فيما يبدو، كاملاً. وقد قيل إن برنولي أصبح في النهاية ميكانيكياً جيداً لأن حرفياً طلب مشورته في اختيار أفضل شكل لعارضة ميزان. وشكل الحوار مع هذا الحرفي أساس دراسة برنولي للمنشآت المرنة[17] (Alassi, 2020).

أبلغ برنولي لايبنتس بهذا الحوار في رسالة في ديسمبر 1687.

تضمنت الرسالة نقداً لمقالة لايبنتس عن مقاومة الأجسام الصلبة، وجاء فيها:

> A local artisan who displays astonishing dexterity in making steelyards. I easily perceived that this man's peculiar skill consisted less in establishing the divisions of the yoke than in so adjusting its thickness that it could not easily be bent by its own weight and an attached load.

> حرفي محلي يظهر براعة مدهشة في صناعة الموازين ذات الذراع. وأدركت بسهولة أن مهارته الخاصة لا تكمن بقدر كبير في تحديد تقسيمات العارضة، بل في ضبط سماكتها بحيث لا تنحني بسهولة بفعل وزنها وحمل معلق بها.

”Bernoulli, Jakob, 1855 *“Letter to G. W. Leibniz, December 1687*

ذكر هذا الحوار مع الحرفي برنولي بمقالة لايبنتس عن مقاومة الأجسام الصلبة. وقال برنولي إنه يستطيع «أن يرد إلى الحساب السماكة اللازمة لأي عارضة معلومة لضمان المقاومة المناسبة، أو بالعكس أن يحدد، لسماكة وطول معلومين، الحمل الذي يمكنها حمله، وكل ذلك استناداً إلى تجربة واحدة على قضيب من المادة نفسها».

وباعتراضه على بعض نتائج لايبنتس التجريبية، اقترح برنولي أن الاستطالة تعتمد على عاملين رئيسيين: قوة الشد المطبقة وطبيعة المادة. وتمثل الرسالة أول حالة معروفة روعيت فيها خواص المادة صراحة في دراسة المرونة. وهكذا كان برنولي أول من أدرك أن التشوه ينبغي أن يوصف بربط القوة لكل وحدة مساحة، أي ما نسميه اليوم الإجهاد، بالاستطالة النسبية لكل وحدة طول، أي انفعال ليف مادي تحت الشد. وكانت بصيرة كبرى حقاً.

ومع أن برنولي لاحظ بوضوح التشوه اللدن المعتمد على الزمن في أوتار الأمعاء، وهي مادة شديدة الحساسية للرطوبة والحرارة، فإنه لم يستطع تفسير هذا السلوك على نحو صحيح (Alassi, 2020).

لا تكمن قيمة الرسالة في محتواها التاريخي وحده، بل في طابعها الاجتماعي الفريد أيضاً. فقد أدى الحرفي دوراً محورياً في تطور نظرية المنشآت المرنة بتزويده برنولي ببصائر دقيقة قائمة على الخبرة. واعترف برنولي بهذا الإسهام بإشارته إلى رأي الحرفي في مراسلته شخصية بارزة مثل لايبنتس. وعلى خلاف أعراف العصر، لم يكن الحرفي غير مرئي عند برنولي. ففي ذلك الحين، وكثيراً ما يزال الأمر كذلك اليوم، نظر إلى الحرفيين، أو الفنيين بالمصطلح الحديث، كمنفذين محض للتعليمات، يكلفون بصنع الأدوات أو إجراء التجارب، ونادراً ما ينسب إليهم إسهام في المعرفة النظرية. لكن برنولي لم ير الحرفي صانع أدوات يحتاج إلى توجيه، بل حاملاً لخبرة ثمينة؛ فأشركه في نقاش جاد لمقالة لايبنتس، ونظر بعناية في اعتراضاته.

[17] قد يجادل بعضهم حتى اليوم بأن ميكانيكي الهندسة الإنشائية الجيد يجب أن يعتمد على دراسات تجريبية راسخة. وقد يكون ذلك صحيحاً، لكن العكس أصح.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.3.3.2 أويلر (1727)

افترض أويلر مرة أخرى توزيعاً خطياً للشدود المحورية عبر المقطع، وكاملها للحصول على عزم الانحناء الكلي. وبذلك جمع طريقة لايبنتس، التي أهملت الانحناء تماماً، بطريقة ياكوب برنولي، الذي لم يراع تغير الشد على نحو صحيح.

يوجز نهجه، المقتبس من Truesdell, 1960، فيما يأتي.

مع أن أويلر كان يدرس اهتزاز حلقة دائرية، الشكل 7.17a، يمكن تحليل انحناء جزء متناه في الصغر منها بالطريقة نفسها المتبعة لجائزة مستقيمة. في الجزء الأيسر من الشكل 7.17b نصف قطر الانحناء Ca هو R، والسماكة Aa هي c. وتظهر الحلقة في اليمين بوضع مشوه. ويختار العنصر ab، ذو طول القوس ds، ليطابق نظيره غير المشوه. ونصف قطر الانحناء الجديد ac هو r، وتعطى الزيادة الناتجة في طول الليف AB بفعل الانفعال المحوري، بحسب Euler, 1862، بالعلاقة:

$$d\tau = E\varepsilon = \frac{R-r}{Rr}\,c\,ds = \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)c\,ds \tag{7.11}$$

يربط هذا التعبير القوة المحورية لكل وحدة مساحة $E\varepsilon$ بفرق الانحناء، ويشكل أساس معالجة أويلر لانحناء الحلقات المرنة.

يصف أويلر مادة الحلقة في الشكل 7.17cc بأنها مؤلفة من خيوط مرنة. وتعد الجسيمات المتصلة $AaeE$ و$BbeE$ خيوطاً مرنة تزداد القوة التي تبذلها للانكماش كلما ازداد شدها. وتمتلئ الزاوية $Ee\varepsilon$ بهذه الخيوط المرتبة عرضياً؛ وهي تحاول تقريب الضلعين Ee وεe. ووفق أويلر يعتمد تماسك مادة الحلقة على القوة التي تولدها هذه الخيوط الداخلية.

ثم يفترض أويلر أن هذا التماسك يجعل مجموعة خيوط طولها الابتدائي $FG = f$، وقد استطالت إلى $FJ = g$، قادرة على حمل وزن كلي P، انظر الشكل 7.17cc. أي إن النسبة

$$\frac{P}{fg}$$

تعطي القوة لكل وحدة من مساحة المقطع ولكل وحدة استطالة، وهو تعبير يوافق ما يسمى اليوم معامل يونغ، ويظهر هنا للمرة الأولى.

روعيت هذه الكمية ضمنياً في النظريات السابقة:

- في أعمال غاليليو ولايبنتس وفارينيون وباران، فسر ثابت للمادة K بأنه إجهاد الانقطاع. وقد بحثت هذه النظريات الإجهاد لكنها أهملت الانفعال الموافق.
- في نظرية هوك، كما نقحها مؤلفون لاحقون، عرفت القوة المرنة بأنها القوة اللازمة لإحداث انفعال معلوم في جسم معلوم، لكن من دون ثابت صريح للمادة أيضاً.

الجديد هنا أن كمية أويلر $P/(fg)$ تقدم كثابت مرن للمادة، أي إجهاد متوسط، لا قوة، يحدث انفعالاً مرناً معيناً، لا انقطاعاً. ومع أن وجود ثابت كهذا كان متضمناً بوضوح في عمل ياكوب برنولي الأسبق، فإنه لم يقدمه صراحة. ويرجع ظهوره الواضح في معالجة أويلر إلى أن هذه أول مسألة تتطلب معاملاً كهذا للوصول إلى حل صحيح.

ولقياس توزيع هذه القوى يتابع أويلر، انظر مرة أخرى الشكل 7.17cc: ليكن $eM = x$ و$Mm = dx$؛ عندئذ تمتلئ المنطقة الصغيرة $MmnN$ بخيوط طولها $\frac{x}{c}d\tau$. والقوة F_x التي تسحب Mn نحو Nn هي:

$$F_x = \frac{P}{fg}\cdot dx\cdot\frac{x}{c}d\tau \tag{7.12}$$

ومن ثم فإن الوزن F الواجب تطبيقه عند E وε لإنتاج العزم نفسه حول النقطة e الذي تنتجه F_x المؤثرة على مسافة x هو:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$F = \frac{x}{c}F_x = \frac{P}{fgc^2}x^2 dx\, d\tau \tag{7.13}$$

ويعطي التكامل من $x = 0$ إلى $x = c$ القوة الكلية، أو «الوزن»، الواجب تطبيقها عند E:

$$\text{الوزن} = \frac{Pc}{3fg}d\tau = \frac{1}{3}\cdot\frac{Pc^2}{fg}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)ds \tag{7.14}$$

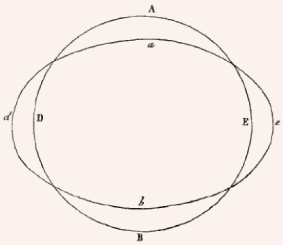
ونتعرف اليوم إلى هذه العلاقة بوصفها العلاقة الكلاسيكية بين العزم والانحناء:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \qquad \mathfrak{B} = EI \tag{7.15}$$

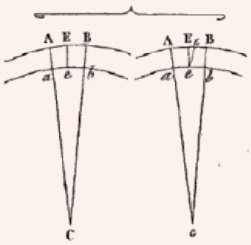
هنا E معامل يونغ وI عزم المساحة الثاني. ولمقطع مستطيل، مع افتراض وقوع المحور المحايد عند الحافة المقعرة، يكون $I = \frac{1}{3}AD^2$، موافقاً صياغة أويلر في الشكل 7.17c-c. ويمثل ذلك أول اشتقاق صارم لما نسميه اليوم علاقة العزم–الانحناء، وهي معادلة أساسية في الميكانيكا الإنشائية.

ومن ثم فإن معامل *الاستطالة* الذي قدمه أويلر، والذي يصف مادة مرنة لا عينة بعينها، يحمل اليوم اسم يونغ (Truesdell, 1968).

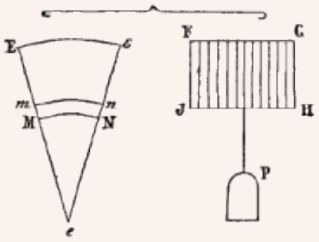
وفي بحثين لاحقين، Euler, 1760 وEuler, 1780، عرض أويلر هذه الأفكار بإيجاز أكبر وشرحها على نحو أفضل. وعرف، بوجه خاص، معامل الاستطالة صراحة بعد أن استعمله في عمله السابق مع إشارة عابرة فقط.



(a) الحلقة المهتزة التي درسها أويلر



(b) مخطط أول اشتقاق لأويلر لقانون برنولي من قانون هوك (1727)



(c) أول تعريف لأويلر لمعامل الاستطالة، «معامل يونغ» (1727)

شكل 7.17: التقاء أويلر وبرنولي وهوك (Euler, 1862)

كان إنجاز أويلر لافتاً؛ فمن مبادئ رياضية محضة وقانون هوك اشتق المعادلة الأساسية لانحناء الجوائز قبل أن يبلغ التقليد التجريبي نتائج مماثلة بعقود. ومع ذلك ظل هذا الاختراق التحليلي منفصلاً إلى حد بعيد عن التحليل الإنشائي العملي حتى التقى التقليدان أخيراً في منتصف القرن التاسع عشر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7.4 خلاصة

يكشف التطور التاريخي لنظرية الانحناء المسار المعقد وغير الخطي الذي ينشأ عبره الفهم العلمي. فقد أسهمت ثلاثة مسارات متميزة، هي ملاحظات ليوناردو التجريبية، والتقليد الفرنسي للتجريب العملي، والنهج الرياضي السويسري الألماني، ببصائر أساسية اندمجت في النهاية في نظرية الجوائز الحديثة.

ولعل الأشد لفتاً للنظر طول بقاء التقليدين التحليلي والتجريبي منفصلين رغم معالجتهما الأسئلة الأساسية نفسها. فقد سبق اشتقاق أويلر الرياضي الصارم لعلاقة العزم–الانحناء عام 1727 بعقود نتائج كثيرة كافح التقليد العملي لبلوغها. ومع ذلك كان الباحثون التجريبيون، غاليليو وماريوت وكولوم وسان-فنان، هم الذين طرحوا الأسئلة التي احتاج المهندسون الممارسون فعلاً إلى أجوبتها: متى تنكسر الجوائز؟ وكم حملاً تستطيع حمله؟ وأين تقع الإجهادات القصوى؟

يبين التقارب النهائي بين هذه المناهج في عمل سان-فنان أن التقدم العلمي يحتاج كثيراً إلى الصرامة الرياضية والبصيرة العملية معاً. ويستفيد التحليل الإنشائي الحديث من هذا التركيب؛ فنستعمل علاقة أويلر للعزم–الانحناء، المشتقة رياضياً، ضمن إطار سان-فنان لتوزيع الإجهاد، لحل المسائل العملية التي طرحها غاليليو أولاً.

يلخص الجدول 7.1 أهم تطورات مفهوم المحور المحايد.

جدول 7.1: أهم التطورات في المقاومة وتوزيع الإجهاد الداخلي

السنة	الشخصية / الحدث	العمل / العنوان	الخلاصة
نحو 1490	ليوناردو دا فينشي	تجربة السلة المعلقة	تحميل تزايدي لسلة معلقة حتى انقطاع السلك؛ بحث تجريبي مبكر للمقاومة المحورية، مع توقع خاطئ لاعتمادها على الطول.
1630	إسحاق بيكمان	ملاحظة عن استطالة الخيط (Drake, 1970)	لاحظ أن الخيوط الأطول تستطيل أكثر تحت الحمل، في إدراك مبكر وغير مباشر *للانفعال*.
1638	غاليليو غاليلي	*مباحث وبراهين رياضية* حول علمين جديدين (Galilei, 1638)	مقاومة الجائزة الكابولية بقياس الرافعة؛ قدم التفكير في المقاومة مقابل الطلب واستدلالاً أولياً بالجسم الحر؛ وافتقر إلى المفهوم الحديث للإجهاد.
نحو 1500	ليوناردو دا فينشي	مخطوطة مدريد، الورقة 9v (Da Vinci, 1490; Zammattio, 1980)	رسوم تطرح أسئلة عن مقاومة الجائزة بالنسبة إلى الطول والمقطع والإسناد والتحميل؛ صياغة للمسألة بلا معادلات.
نحو 1500	ليوناردو دا فينشي	مخطوطة مدريد، الورقة 20v (Zammattio, 1980)	استبق توزيع الانفعال الخطي والمحور المحايد في الانحناء قبل برنولي بقرون.
1644	رينيه ديكارت	*Principia Philosophiae*؛ رسائل إلى ميرسين (Descartes, 1897b)	انتقل من «الغراء» والخلاء إلى تفسيرات ميكانيكية متصلة للتماسك؛ جسر مفاهيمي نحو التفكير بالإجهاد والانفعال.
1686	إدمي ماريوت	تجارب الانحناء والانقطاع (Heyman, 1998b; Timoshenko, 1953)	تبنى المرونة الخطية وفكرة الإجهاد المثلثي، لكنه وضع المحور المحايد عند الليف الأقصى؛ واشتق $L = Sh/(3l)$، واقترب من نتيجة العزم الصحيحة.
1687	ياكوب برنولي	رسالة عن السلوك المرن (Bernoulli, Jakob, 1855; Alassi, 2020)	قدم علاقة القوة–الاستطالة كخاصية للمادة؛ وبذر التفكير بالإجهاد–الانفعال من مسائل استنارت بخبرة حرفي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السنة	الشخصية / الحدث	العمل / العنوان	الخلاصة
1691	غوتفريد ف. لايبنتس	إشعار في *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1691e; McDonough, 2016)	انتقد جائزة غاليليو غير القابلة للاستطالة؛ وفككها مفاهيمياً إلى ألياف ونوابض كنموذج رياضي.
1713	أنطوان باران	المحور المحايد والتوازن (Parent, 1713)	فرض التوازن الكامل للقوى والعزم؛ وأدرك وجوب توازن محصلتي الشد والضغط، ولاحظ الأفعال المماسية، أي القص.
1739	ب. فان موسخنبروك	*Elementa Physicae* (Musschenbroek, 1739)	اختبارات منهجية للشد والانحناء؛ ومقاومات مقارنة؛ ومنهجية مبكرة للاختبار وجدولة البيانات.
1773	ش.-أ. كولوم	مذكرة الانحناء (Coulomb, 1773b; Timoshenko, 1953)	طبق معادلات الاستاتيكا الثلاث؛ وكتل إجهاد مثلثية؛ والحمل الأقصى $\phi = Sh/(6l)$ للحالة المرنة؛ وتصور واضح للقوى الداخلية.
1784	ش.-أ. كولوم	مذكرة الالتواء، ميزان الالتواء	أثبت سلوك $T = \frac{GJ}{L}\phi$؛ واستقلال الدور عن السعة للزوايا الصغيرة؛ ووضح القياس على الانحناء.
1807	توماس يونغ	*محاضرات في الفلسفة الطبيعية* (Young, 1807)	عرّف معامل المرونة لفظياً؛ وناقش القص؛ وقدم قاعدة الثلث الأوسط تحت حمل محوري لا مركزي.
1855	باريه دو سان-فنان	مذكرة الانحناء (Saint-Venant, 1855c)	أول اشتقاق مرن صارم: المحور المحايد يمر بمركز المساحة؛ و$\sigma = My/I$ من التوافق وقانون هوك، لا التوازن وحده.
1862	ألفرد كليبش	*Theorie der Elasticität* (Clebsch, 1862b)	نظم المرونة بالتحليل العالي؛ ووحد الانحناء مع تعريف السطح المحايد كمحل لانعدام الانفعال الطولي.
1866	سان-فنان، تعليقات	الطبعة الفرنسية لكليبش (Clebsch, 1866)	أوضح أن بقاء المقاطع مستوية نتيجة للمرونة؛ والإجهادات تتغير بانتظام عبر الشرائح؛ وعزز الصلة بين الهندسة والإجهاد.
1727	ليونهارد أويلر	انحناء الحلقة والجائزة المرنتين (Euler, 1862)	اشتق علاقة العزم–الانحناء $M = EI\kappa$؛ وقدم معاملاً صريحاً كثابت للمادة داخل نظرية الانحناء.
1760؛ 1780	ليونهارد أويلر	متابعات عن الحركة والصيغ المرنة (Euler, 1760; Euler, 1780)	صقل مفهوم المعامل والصياغات المرنة؛ وأوجز الاشتقاقات السابقة وعمم التطبيقات.

7.5 الانتقال

أرست الأبحاث التي تناولها هذا الفصل المبادئ الأساسية الحاكمة لمقاومة العناصر الإنشائية والتوزيع الداخلي للإجهادات تحت الحمل. ومن ملاحظات ليوناردو التجريبية إلى نظرية سان-فنان الصارمة للمرونة، تتبعنا كيف طور المهندسون والرياضيون فهمنا لأسباب فشل الجوائز ومواضع الإجهادات القصوى.

لكن هذه التحليلات القائمة على المقاومة اشتركت في قيد واحد: ركزت على قدرة العناصر على مقاومة القوى الداخلية، من دون معالجة السؤال الموازي أهمية عن كيفية تشوهها تحت الحمل. فمعرفة أن جائزة تستطيع حمل عزم معين لا تخبرنا شيئاً عن شكلها المترخم، مع أن هذا الشكل يحكم كل شيء من الاستقرار الإنشائي إلى قابلية الخدمة.

تطلب الانتقال من تحليل المقاومة إلى تحليل التشوه ثورة رياضية. فبينما استطاع الباحثون الأوائل الاعتماد على التوازن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاستاتيكي وخواص المواد، احتاجت دراسة الأشكال المترخمة إلى مفاهيم هندسية متقدمة لم تبدأ بالظهور إلا في القرن السابع عشر. ولم يمكن حل السلسلة المعلقة والقضيب المرن المنحني، وهما «التحديان الكبيران» اللذان سنبحثهما في الفصل 9، من دون فهم عميق للانحناء والمماسات ودوائر التقبيل والعلاقات الرياضية بين المنحنيات وناشراتها.

سيتتبع الفصل التالي 8 هذه الثورة الهندسية، من بصائر نيكول أوريم النوعية عن الانحناء إلى الإطار الرياضي الصارم الذي أقامه نيوتن وأسرة برنولي وأويلر. ولم تكن هذه التطورات تجريدات رياضية محضة؛ بل قدمت الأدوات الأساسية التي أتاحت حل مسائل إنشائية جوهرية تحدت فلاسفة الطبيعة قروناً.

وفهم هذا الأساس الهندسي ضروري لتقدير الإنجاز الفكري الذي تمثله حلول السلسلة المعلقة والمنحني المرن. فعندما طرح ياكوب برنولي تحدي المنحني المرن عام 1691، أو حين صارع المجتمع الرياضي شكل السلسلة المعلقة، لم يكونوا يحلون ألغازاً شيقة فحسب؛ بل كانوا يقيمون الإطار النظري الذي ستقوم عليه جميع التطورات اللاحقة في الميكانيكا الإنشائية، من صيغة أويلر للانبعاج إلى التحليل الحديث للترخيمات الكبيرة.

وإلى هذه الثورة الهندسية، وما أنشأته من أدوات رياضية وما أتاحته من اختراقات مفاهيمية، نتجه الآن في الفصل 8. وستمهد هذه التطورات للفصل 9، حيث تلتقي الهندسة والميكانيكا في حلول أنيقة لبعض أجمل المسائل وأهمها عملياً في تاريخ الهندسة الإنشائية.



كارافاجيو، داود ورأس جالوت (1609–1610)

فيزياء المقلاع، وذراع عزم رمية داود، وعاقبة تجاوز حدود المادة؛ المقاومة تغلب الكتلة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8 الهندسة التفاضلية للمنحنيات

ملخص

يتتبع هذا الفصل الأسس الهندسية للانحناء منذ جذورها المفاهيمية الأولى حتى صيغها الناضجة في القرن الثامن عشر. وتمثل المادة المعروضة هنا تمهيداً ضرورياً للفصل التالي (§9.3)، حيث ستُعالج مسألة المنحني المرن بالتفصيل؛ فمن دون فهم الانحناء كما تطور هنا، لا يمكن استيعاب الصياغة الميكانيكية للمنحنيات المرنة على الوجه الصحيح.

قبل ظهور حساب التفاضل، كان الانحناء يُفهم بواسطة إنشاءات هندسية ملموسة، كالمماسات والناظمات ودوائر التقبيل والمنحنيات المتطورة، وكانت تُطبَّق على منحنيات فيزيائية مثل الدويريات والسلاسل المعلقة والقضبان المنحنية.

تبدأ الرواية بمفاهيم نيكول أوريم النوعية في القرن الرابع عشر، ثم تتتبع التنقيحات المتعاقبة التي قدمها هوينغنس ونيوتن ولايبنتس وأسرة برنولي، وصولاً إلى صياغة أويلر التغايرية وتقريب أويلر–برنولي للميل الصغير. وقد مثّل تنظيم كستنر للانحناء بوصفه المعدل الحدي لتغير زاوية المماس بالنسبة إلى طول القوس ترسيخاً للتعريف الحديث.

ويتناول الفصل أيضاً التطور المتداخل للمنحنيات المتطورة والمنحنيات الالتفافية، بوصفها إنشاءات هندسية وأدوات عملية معاً، ولا سيما في نواس هوينغنس الدويري. ومن خلال وضع هذه التطورات في سياقيها الميكانيكي والرياضي، يبين النقاش كيف وفر التراث الهندسي للانحناء أساساً ضرورياً للنظريات التحليلية والإنشائية والفيزيائية اللاحقة، وبخاصة صياغة ياكوب برنولي للمنحني المرن، التي تعتمد اعتماداً جوهرياً على المفاهيم الهندسية المثبتة هنا.

8.1 مقدمة: الأصول الهندسية للانحناء والمنحني المرن 220
8.2 الانحناء 221
8.2.1 أوريم (1351) 222
8.2.2 نيوتن (1671) 223
8.2.3 لايبنتس (1686) 225
8.2.4 يوهان برنولي (1691) 226
8.2.5 ياكوب برنولي؛ المبرهنة الذهبية (1694) 227
8.2.6 كستنر (1758) 231
8.2.7 خلاصة 232
8.3 المنحنى المتطور والمنحنى الالتفافي . . . 233
8.3.1 هوينغنس (1658–1673) . . . 233
8.3.2 القيود العملية والإرث 234
8.3.3 ملاحظات ختامية 235
8.4 من المنحنيات الهندسية إلى الميكانيكا الإنشائية 236
8.5 نظرة إلى الأمام: 238

8.1 مقدمة: الأصول الهندسية للانحناء والمنحني المرن

قبل أن يتيح حساب التفاضل لغة عامة للانحناء، كانت الإنشاءات الهندسية الوسيلة العملية الوحيدة للتعبير عن كيفية انحناء منحنى ما. ولم تنشأ نظرية الانحناء من التجريد، بل من الواقع الفيزيائي والميكانيكي للمنحنيات المشاهدة في الطبيعة: مسار جسم مقذوف، أو حافة عجلة متدحرجة، أو شكل سلسلة معلقة، أو القوس الذي يرسمه قضيب مرن.

بحث المفكرون الأوائل، وفي مقدمتهم نيكول أوريم، انحناء الرسوم البيانية بوصفها أشكالاً مكانية قبل أن يضفي الإطار الديكارتي الصياغة الرسمية على مثل هذه التمثيلات بزمن طويل. وفي القرن السابع عشر، طور هوينغنس ونيوتن وأسرة برنولي أدوات هندسية مثل المماسات والناظمات ودوائر التقبيل ومراكز الانحناء تطويراً دقيقاً، لا بوصفها كيانات مجردة، بل إنشاءات متجذرة في سلوك المنحنيات الفيزيائية. وربط هوينغنس، على وجه الخصوص، الانحناء بالديناميكا عندما بيّن كيف يتحكم شكل الدويري في منحنى تساوي الزمن ومنحناه المتطور. أما نيوتن فتناول الانحناء بوصفه أثراً من الرتبة الثانية للحركة. وأدخل ياكوب برنولي مصطلح *elastica* للدلالة على شكل القضيب المنحني، واستعمل الاستدلال الهندسي لصياغة معادلته الحاكمة.

ومع أن التطورات اللاحقة أعادت صياغة هذه الأفكار بلغة التحليل، يركز هذا الفصل على المرحلة التكوينية التي ظل فيها الانحناء والمنحني المرن مفهومين أساساً بمصطلحات هندسية. وهو يستعرض تطور هذه الأفكار ابتداءً من مخيلة أوريم الهندسية، وانتهاءً بالإنشاءات الدقيقة في أواخر القرن السابع عشر وأوائل القرن الثامن عشر. وفي أثناء ذلك، يبرز الشخصيات المحورية، هوينغنس

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ونيوتن ولايبنتس وأسرة برنولي، الذين طوروا فهم الانحناء بأدوات مثل المنحنيات المتطورة ودوائر التقبيل والحساب الهندسي للكميات المتناهية في الصغر.

وبرز المنحني المرن (§9)، على وجه الخصوص، بوصفه المسألة النموذجية التي التقت فيها الهندسة بالميكانيكا. وقد تطلب حله في نهاية المطاف حساب التغايرات، غير أن صياغته ومعالجته المبكرة ظلتا في صميم التراث الهندسي. ويعد فهم هذا التسلسل التاريخي ضرورياً لاستيعاب الكيفية التي تشكلت بها النظرية الحديثة للمرونة والشكل الإنشائي.

وقد ثبت لاحقاً أن الفهم الهندسي للانحناء الذي تطور في هذه الحقبة كان أساسياً لتقدم القرن التاسع عشر، ومنه تطوير غاوس للانحناء الجوهري للسطوح، ثم صياغة الهندسة الريمانية، وكذلك للتطبيقات الحديثة الممتدة من الرسومات الحاسوبية ونظم التصميم بمساعدة الحاسوب إلى الإطار الهندسي الكامن وراء النسبية العامة لأينشتاين.

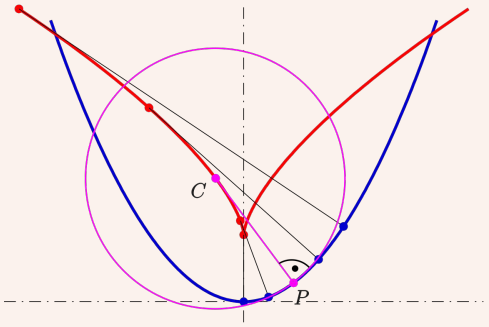
8.2 الانحناء

قبل تناول تطور *المنحني المرن* (§9.3)، لا بد من تقديم مفهوم الانحناء، وهو الكمية الهندسية الأساسية التي تحكم كيفية انثناء المنحنى. يصف الانحناء مقدار انحراف المنحنى عن الاستقامة، ويفعل ذلك بمعنى موضعي؛ أي إنه يقيس الانثناء عند نقطة بعينها، لا على امتداد الشكل كله.

يكون انحناء الدائرة ثابتاً، وهو ببساطة مقلوب نصف قطرها؛ فالدائرة الأصغر تنعطف بحدة أكبر، ولذلك يكون انحناؤها أعلى. وتوفر هذه الحالة المألوفة أساساً طبيعياً لتعريف الانحناء بوجه عام. ويعرض لاحقاً في §29.2.3 الحل الحديث لمسألة نموذجية للمنحني المرن، هي الانحراف الكبير لجائزة كابولية، وهو حل يقوم على فهم تغير الانحناء على طول الجائزة.

كان إقليدس قد عرّف المماس منذ العصور القديمة بأنه مستقيم يمس دائرة عند نقطة واحدة بالضبط من دون أن يقطعها، لكن المفاهيم الأعم للانحناء لم تكن قد تطورت بعد. وبالمثل، انتظرت مسألة التربيع الكلاسيكية، أي تعيين المساحة التي تحدها منحنيات، أدوات حساب التفاضل والتكامل كي تصاغ رسمياً بعد قرون.

أما الانحناء الحديث فيعرَّف بأنه معدل تغير زاوية ميل المماس بالنسبة إلى طول القوس. وبتعبير وصفي، يقيس مدى سرعة انعطاف المنحنى. فإذا كان المنحنى دائرة، كان معدل الانعطاف هذا ثابتاً. أما في المنحنيات الاعتباطية، فالطريقة المقبولة هي تقريب المنحنى موضعياً بدائرة تطابق كلاً من مماسه وانحنائه عند نقطة. وتسمى هذه الدائرة الأفضل مطابقة، اقتداءً بلايبنتس، *دائرة التقبيل*[1] (الشكل 8.1) (Brackenridge, 1992). ولها المشتقان الأول والثاني نفسيهما اللذان للمنحنى عند نقطة التماس.



شكل 8.1: دوائر التقبيل (بالبنفسجي) لقطع مكافئ (بالأزرق)؛ يبين الوضع الحالي دائرة مركزها C وتمس المنحنى عند P. ويظهر محل المراكز باللون الأحمر.

[1] **دائرة التقبيل** (من اللاتينية *osculari*، بمعنى «يقبّل») هي الدائرة التي تقرّب منحنى أفضل تقريب عند نقطة معينة. ولها المماس والانحناء نفسيهما اللذان للمنحنى عند تلك النقطة، ولذلك فهي الدائرة الوحيدة التي «تقبّل» المنحنى بأوثق صورة. يساوي نصف قطرها نصف قطر الانحناء، ويقع مركزها على ناظم المنحنى عند نقطة التماس. وفي عصر برنولي، وفر هذا المفهوم الطريقة الهندسية الأساسية لقياس الانحناء قبل تطوير التعريفات التحليلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

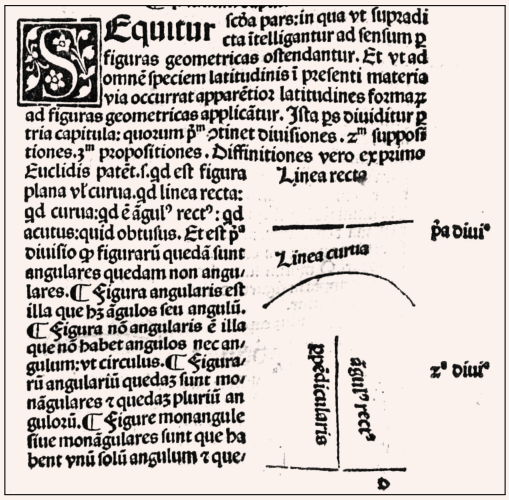
مع أن الانحناء لم يعرَّف تعريفاً دقيقاً إلا في أواخر القرن السابع عشر، فإن بصائر مبكرة في الانثناء ظهرت منذ القرن الرابع عشر. وباستثناء عمل نيكول أوريم الرائد، الذي يناقش بعد قليل، نشأت المعالجة الرياضية الدقيقة للانحناء بصورة مستقلة في أعمال نيوتن ولايبنتس. ومع ذلك، جرت العادة على ربط التطور التاريخي للانحناء بتطور المنحنيات المتطورة والالتفافية، ولا سيما عندما ينتج الوصف الميكانيكي لفك خيط عن منحنى، هو المنحنى المتطور، منحنى ثانياً، هو المنحنى الالتفافي، كما يناقش في §8.3.

8.2.1 أوريم (1351)

يغيب مفهوم الانحناء عن الهندسة الإقليدية، التي سادت فيها النقاط والمستقيمات والدوائر، ولم تصغ فيها فكرة عامة عن كيفية انثناء منحنى. ولم تطرح فكرة الانحناء بوصفه انحرافاً قابلاً للقياس عن الاستقامة إلا في القرن الرابع عشر، وعلى الأخص على يد نيكول أوريم.

في كتابه *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351)، قدم أوريم مفهوماً نوعياً للانحناء، وعامله بوصفه مقداراً متغيراً باستمرار. وأدرك أن انحناء الدائرة يتناسب عكسياً مع نصف قطرها، وحاول توسيع الفكرة إلى منحنيات أعم. ومع أن آراءه ظلت تخمينية وخالية من الصياغة الرسمية، فإنها تمثل اختراقاً مفاهيمياً. وقد كتب:

> لا نعلم بماذا، أو بالنسبة إلى ماذا، تقاس شدة الانحناء. ويبدو لي الآن أن ثمة طريقتين [ممكنتين] فقط [للحديث عن قياس الانحناء]. أولاهما أن زيادة الانحناء دالة في ابتعاده عن الاستقامة، أي في مسافته من الاستقامة. ويُقاس ذلك بمقدار الزاوية المكونة من مستقيم ومنحنى، مثل زاوية التماس، أو ربما زاوية أخرى منشأة أيضاً من مستقيم ومنحنى.
>
> "Serrano **and** Suceavă, 2017 *"A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas*



شكل 8.2: انحناء أوريم

لم يكن أوريم عالماً مبكراً عادياً؛ فقد نسبت إليه، بأثر رجعي، أفكار تشبه قانون غريشام والهندسة التحليلية وقانون السقوط الحر والنظريات التركيبية للمادة، بل حتى دوران الأرض. ومع أن أياً من هذه النسب لا يصمد بدقة أمام الفحص الحديث، فإنها جميعاً تعكس سعة تفكيره وأصالته (Clagett, 1964).

ومن الملاحظات الجانبية الطريفة أن أوريم يُعتقد أنه أدخل الرمز الرياضي + للجمع.[2]

[2] أدخل وليم أوتريد رمز الضرب "x" عام 1618، وأدخل يوهان ران علامة القسمة div عام 1659، وأدخل جون واليس رمز اللانهاية ∞ عام 1655.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يمكن النظر إلى أوريم، من وجوه كثيرة، بوصفه سابقاً للثورة العلمية (انظر §5.3). ومن اللافت أن أكثر من ثلاثة قرون فصلت بين تصوره الرائد عام 1351 وصياغة نيوتن التحليلية عام 1671، بما يشهد على ثورية أفكار أوريم، وعلى طول الزمن اللازم لتطور الأدوات الرياضية الضرورية لصياغتها الرسمية.

8.2.2 نيوتن (1671)

ظهر عمل نيوتن المبكر في الانحناء عام 1671 في رسالته التأسيسية *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736)، حيث تناول مسائل الناظمات والمماسات والانحناء. وبحلول مايو 1665 كان نيوتن قد اشتق الصيغة العامة لنصف قطر انحناء دالة $y = f(x)$، وفي شتاء 1670–71 بدأ صياغة ما عُرف لاحقاً باسم *طرائق المتسلسلات والتدفقات*.

وطرح في هذا العمل، من بين مسائل أخرى، ما يأتي:

- المسألة 5: «تعيين انحناء منحنى عند أية نقطة».
- المسألة 6: «صفة الانحناء عند نقطة».

واشتق الصيغة العامة للانحناء في الإحداثيات الديكارتية، كما عبّر عنها، على نحو لافت، بالصيغة القطبية أيضاً. وفي المسألة 5، أورد نيوتن خمسة شروط تعريفية تُستعمل لتعيين نصف قطر الانحناء أو مركزه (Bardini **and** Gianella, 2014):

- ليس للمستقيم انحناء.
- انحناء الدائرة ثابت ويتناسب عكسياً مع نصف قطرها ($k = 1/R$).
- إذا مست دائرة منحنى من جانبه المقعر، وتعذر إدراج دائرة أخرى داخل زاوية التماس، كان لها انحناء المنحنى نفسه عند تلك النقطة.
- مركز الانحناء هو مركز دائرة تمس المنحنى عند نقطة، وتقع في الجانب المقعر، ولها الانحناء نفسه. ولتحديده، ينبغي تقاطع الناظمين عند نقطتين متقاربتين تقارباً متناهي الصغر.

أوضح نيوتن هذا الإنشاء بتكوين هندسي يتقاطع فيه الناظمان DH وdh عند النقطة d، ومع اقتراب D من P تصبح النقطة الحدية مركز الانحناء C (الشكل 8.3).

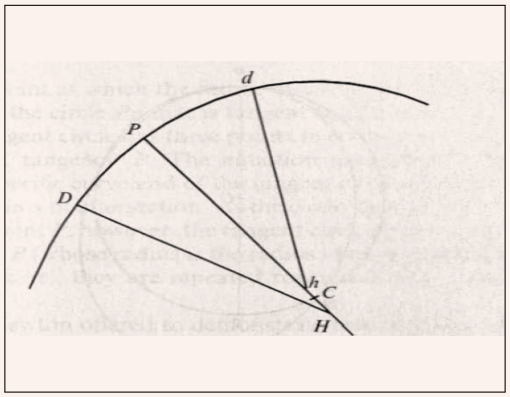
> للدائرة نفسها الانحناء نفسه في كل موضع، وفي الدوائر المختلفة يتناسب الانحناء عكسياً مع أقطارها.
>
> إذا مست دائرة منحنى ما من جانبه المقعر عند نقطة معينة، وكان مقدارها بحيث لا يمكن إدراج دائرة مماسة أخرى في زاوية التماس عند تلك النقطة، كان لتلك الدائرة انحناء المنحنى نفسه عند نقطة التماس.
>
> ومن ثم فإن مركز الانحناء عند أية نقطة من المنحنى هو مركز الدائرة المساوية له في الانحناء، ولذلك يكون نصف قطر الانحناء جزءاً من العمود على المنحنى المنتهي عند ذلك المركز.
>
> وتُعرف نسبة الانحناء عند نقاط مختلفة من نسبة انحناء الدوائر المتساوية الانحناء، أو من النسبة العكسية لأنصاف أقطار الانحناء.
>
> ويأتي بعد قليل مزيد من الإيضاح:
>
> لكن لهذه النقطة C دلائل أو خواص متعددة يمكن استعمالها في تعيينها.
>
> Coolidge, 1952 "*The unsatisfactory story of curvature*"

1. هي نقطة تقاطع العمودين على القوس على جانبي النقطة، مأخوذين عند فاصلين متناهيي الصغر.
2. إذا تُخيل أن DC يتحرك مع بقائه عمودياً على المنحنى، كانت حركة C هي الأقل، وأدت دور مركز دورانه.

3. إذا رُسمت دائرة مركزها C ونصف قطرها DC، لم يمكن لدائرة أخرى أن تقع بينها وبين المنحنى.
4. إذا اقترب مركز آخر H لدائرة مماسة تدريجياً من C، تطابقت نقطتا التماس في النهاية.
5. توفر كل واحدة من هذه الخواص طريقة لحل المسألة، لكن الأولى أبسطها ولذلك اختيرت.

افترض نيوتن، مثل هوينغنس، أنه إذا ثُبتت نقطة، ليست نقطة انقلاب، على منحنى، واقتربت منها نقطة مجاورة من أي جانب، فإن تقاطع ناظميهما يتقارب إلى مركز انحناء محدد جيداً. وهو مركز دائرة تمس المنحنى ويطابق انحناؤها انحناءه، ولا يمكن لدائرة أخرى من هذا النوع أن تقع بينها وبين المنحنى.

اتخذ x متغيراً مستقلاً، مع $\dot{x} = l$ و$z = dy/dx$، فتوصل إلى الصيغة المعروفة لنصف قطر الانحناء في الإحداثيات الديكارتية:



شكل 8.3: اشتقاق نيوتن للانحناء

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{8.1}$$

قدم نيوتن أمثلة عديدة على تطبيق هذه الصيغة على منحنيات مختلفة، وختم القسم بالعبارة الآتية:

> لما كانت جميع المنحنيات الهندسية ... قابلة للإرجاع إلى إحداثيات متعامدة، فإني أعتقد أنني قدمت ما يكفي. ومن أراد المزيد أمكنه تحصيله بجهده من دون مشقة، ولا سيما إذا أضفت، زيادة في إيضاح المقصود، طريقة للمنحنيات الحلزونية.
>
> Newton, 1736 Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam

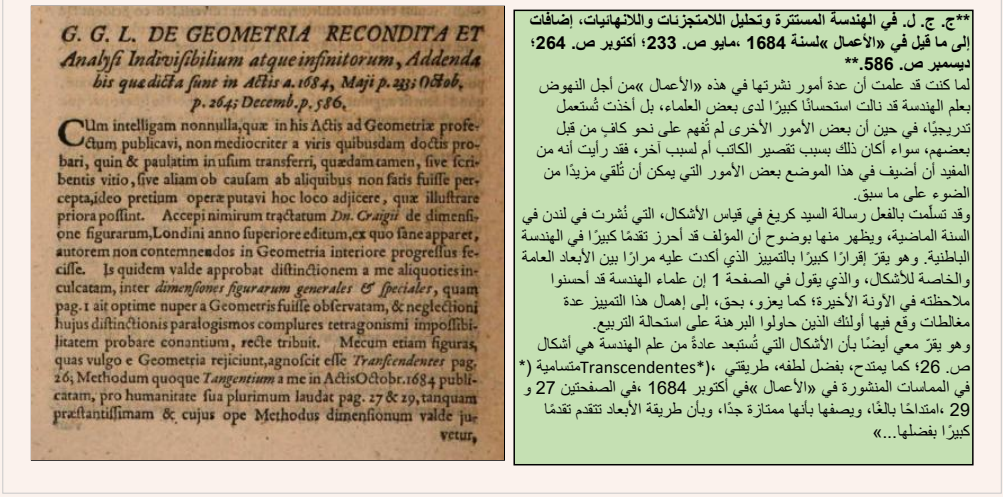
على الرغم من هذه التطورات الأساسية في نظرية الانحناء، اختلف نهج نيوتن في الاكتشاف الرياضي اختلافاً واضحاً عن تقليد التحديات العلنية الذي ظهر في القارة الأوروبية. فقد ظل عمله المنهجي في تصنيف المنحنيات، ومنه تعيين 72 نوعاً من الأنواع الـ78 للمنحنيات التكعيبية في ستينيات وسبعينيات القرن السابع عشر، غير منشور إلى حد بعيد في حياته (Whiteside, 1969). ومع أن نيوتن امتلك الأدوات الرياضية اللازمة لتحليل الأشكال المنحنية المعقدة، بما فيها تلك التي صارت لاحقاً محورية في نظرية المنحني المرن، فإنه لم يصغ قط المسألة الفيزيائية المحددة للمنحنيات المرنة التي طرحها ياكوب برنولي تحدياً علنياً بعد عقدين (§9.3). ويعكس هذا التباين بين بحوث نيوتن الرياضية الخاصة ومسابقات الأخوين برنولي المفتوحة فروقاً أوسع بين النهجين القاري والإنجليزي في البحث الرياضي ونشره.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8.2.3 لايبنتس (1686)

لنبذة عن سيرة لايبنتس، انظر القسم 6.6.8.

في حين أضفى نيوتن الصياغة الرسمية على التعبير التحليلي للانحناء، قدم غوتفريد فيلهلم لايبنتس بصائر هندسية مهمة. ففي مقالته المنشورة عام 1686 بعنوان "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum" في *Acta Eruditorum* (Leibniz, 1686b)، الشكل 8.4[3]، ناقش مفهوم التقبيل، ولاحظ أن قطعاً مخروطياً مقبِّلاً عند رأس، إذا نُظر إليه على قوس صغير بما يكفي، لا يختلف اختلافاً محسوساً عن المنحنى نفسه.


G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586.

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum Dn. Craigii de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogismos complures tetragonismi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde juvetur,

ج. ج. ل. في الهندسة المستترة وتحليل اللامتجزئات واللانهائيات، إضافات إلى ما قيل في «الأعمال» لسنة 1684 ،مايو ص. 233؛ أكتوبر ص. 264؛ ديسمبر ص. 586.

لما كنت قد علمت أن عدة أمور نشرتها في هذه «الأعمال» من أجل النهوض بعلم الهندسة قد نالت استحسانًا كبيرًا لدى بعض العلماء، بل أخذت تُستعمل تدريجيًا، في حين أن بعض الأمور الأخرى لم تُفهم على نحو كافٍ من قبل بعضهم، سواء أكان ذلك بسبب تقصير الكاتب أم لسبب آخر، فقد رأيت أنه من المفيد أن أضيف في هذا الموضع بعض الأمور التي يمكن أن تُلقي مزيدًا من الضوء على ما سبق.

وقد تسلّمت بالفعل رسالة السيد كريغ في قياس الأشكال، التي نُشرت في لندن في السنة الماضية، ويظهر منها بوضوح أن المؤلف قد أحرز تقدمًا كبيرًا في الهندسة الباطنية. وهو يقرّ إقرارًا كبيرًا بالتمييز الذي أكدت عليه مرارًا بين الأبعاد العامة والخاصة للأشكال، والذي يقول في الصفحة 1 إن علماء الهندسة قد أحسنوا ملاحظته في الآونة الأخيرة؛ كما يعزو، بحق، إلى إهمال هذا التمييز عدة مغالطات وقع فيها أولئك الذين حاولوا البرهنة على استحالة التربيع.

وهو يقرّ معي أيضًا بأن الأشكال التي تُستبعد عادةً من علم الهندسة هي أشكال متسامية (*Transcendentes*)، كما يمتدح، بفضل لطفه، طريقتي في المماسات المنشورة في «الأعمال» في أكتوبر 1684 ،في الصفحتين 27 و 29 ،امتداحًا بالغًا، ويصفها بأنها ممتازة جدًا، وبأن طريقة الأبعاد تتقدم تقدمًا كبيرًا بفضلها...»

شكل 8.4: لايبنتس، *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b)

والأهم أن هذا البحث قدم ترميز لايبنتس لحساب التفاضل، باستعمال dx وdy، وبرهن تطبيقه على مسائل هندسية، ومنها ما يتعلق بالمنحنيات المتسامية. وأوضح لايبنتس كيف تستطيع طريقته في الكميات المتناهية في الصغر معالجة مسائل المماسات والتربيعات ضمن إطار موحد، فكتب معادلات مثل $pdy = xdx$ وأدخل علامة التكامل $\int$، التي كُتبت على هيئة f في الأصل.

ومع أن هذا البحث بعينه يركز على الآلية التحليلية أكثر مما يركز على التعريفات الهندسية للانحناء في حد ذاته، فقد شدد نهج لايبنتس على إمكان فهم الخواص الهندسية بالتحليل المتناهي في الصغر. وأثبت ترميزه، ولا سيما الصيغة d/dx، مرونة خاصة في التعبير عن علاقات الانحناء، حتى أصبح في نهاية المطاف الترميز القياسي في الهندسة التفاضلية.

وأدى اختلاف نهجي نيوتن ولايبنتس في حساب التفاضل والتكامل والمسائل الهندسية معاً إلى نشوب نزاعهما الشهير حول الأسبقية. فمع أن ترميز نيوتن بالتدفقات كان أنيقاً في الديناميكا، أثبت ترميز لايبنتس التفاضلي قدرة أكبر على التكيف مع التعابير المعقدة الناشئة في صيغ الانحناء والتحليل الهندسي. وأثر هذا الفرق المنهجي في تطور الرياضيات أجيالاً، حتى ساد ترميز لايبنتس في أوروبا القارية وأصبح المعيار الحديث.

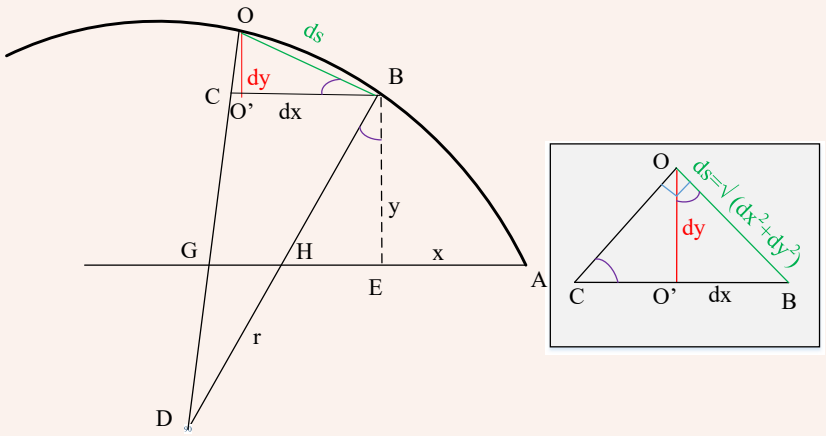
وأرسى عمل لايبنتس في هذا البحث، وبخاصة معالجته للمنحنيات المتسامية وتأكيده أن الهندسة ينبغي ألا تستبعد المنحنيات التي لا يمكن إنشاؤها إلا بعمليات حدية، أساساً للتطورات اللاحقة في الهندسة التفاضلية على يد أسرة برنولي وأويلر وغيرهما.

[3] لاحظ أن لايبنتس وقّع اختصاراً بـ G. G. L. (وبالصيغة اللاتينية: *Gottfridus Guilielmus Leibnitius*).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8.2.4 يوهان برنولي (1691)

اشتق يوهان برنولي أول صيغة عامة لنصف قطر الانحناء في مخطوطة تعود إلى عام 1691 (Bernoulli, Johann, 1691a). وقد وصف Bos, 1974 PDF, pp. 36–37 هذا الاشتقاق، ويوضحه الشكل 8.5.



شكل 8.5: اشتقاق يوهان برنولي للانحناء

الهدف هو حساب نصف قطر الانحناء r عند النقطة B، المعبّر عنه بالعلاقة:

$$r = BH + HD \tag{8.2}$$

1. بما أن $\angle O'BD = \angle HBE$، فإن المثلثين $O'BO$ وEBH متشابهان، ومن ثم:

$$BH = BE \cdot \frac{BO}{BO'} = y \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \tag{8.3}$$

$$AH = AE + EH = AE + OO' \cdot \frac{EB}{O'B} = x + y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{8.4}$$

2. وبعد ذلك، بالنسبة إلى HD:

$$HD = r \cdot \frac{BC}{HG} \tag{8.5}$$

3. يمثل HG تفاضل AH:

$$HG = d(AH) = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = dx + dy \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{ddy}{dx} = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx} \tag{8.6}$$

4. من تشابه المثلثات ($\angle BCO = \angle BOO'$)، نحصل على:

$$BC = \frac{BO^2}{BO'} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \tag{8.7}$$

5. بالتعويض من المعادلات (8.3) و(8.5) و(8.6) و(8.7) في المعادلة (8.2)، نحصل على:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \cdot ddy} \tag{8.8}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالتبسيط باستعمال $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$:

$$r = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy} \tag{8.9}$$

وهو ما يكافئ:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{8.10}$$

8.2.5 ياكوب برنولي؛ المبرهنة الذهبية (1694)

السياق قدم ياكوب برنولي في مذكرته المنشورة عام 1694 في *Acta Eruditorum* (Bernoulli, Jakob, 1694) إسهامين متميزين ومترابطين.

- أولاً، عرض فيما سماه *Theorema Aureum* («radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti») تعبيراً تحليلياً عاماً لنصف قطر دائرة التقبيل، ومن ثم للانحناء، بأبسط الحدود؛ مثلاً $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$، بحيث $\kappa = 1/R$. وهذا هو الموضوع المعالج هنا.
- ثانياً، استعمل ثابت الانحناء هذا لحل مسألة *المنحني المرن*: فمثّل شريطاً رقيقاً غير قابل للاستطالة في اتزان ساكن، وربط قانون العزم–الانحناء، وصيغته الحديثة $M \propto \kappa$، بالعلاقات الحركية $dx/ds = \cos\theta$ و $dy/ds = \sin\theta$ و $\kappa = d\theta/ds$، محولاً بذلك الاتزان الميكانيكي إلى معادلة تفاضلية قابلة للحل للمنحنى. ويعالج ذلك في §9.3.2.1.

وينبغي التأكيد أن هذا البحث كان حله لتحدٍّ سبق أن طرحه (§9.3.1)، (Bernoulli, Jakob, 1690a). ولذلك استهل البحث بقوله:

> relationem fili evolventis seu radii circuli osculatoris (non quomodocunque, ut factum... in A. Lips. Mens. Jan. 1691. p. 22, sed) in terminis simplicissimis & pure differentialibus exhibeat. Hæc nobis jam eo tempore, quo speculationi funis vacabamus, innotuerat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit Frater; interea dum immensa inventi utilitas in resolvenda Velaria, & hac quam præ manibus habemus Elaterum Curvatura, aliisque sublimioribus, quotidie magis magisque sese mihi explicuit, effecitque tandem, ut non possim publico ...aureum Theorema diutius invidere

---

أن أعرض بأبسط الحدود التفاضلية المحضة علاقة الخيط المتطور، أو نصف قطر دائرة التقبيل. وقد عرفت هذا من قبل، حين كنت أدرس السلسلة المعلقة، ثم أبلغ أخي بعض الناس به في أثناء أسفارنا؛ وفي غضون ذلك أخذت الفائدة الهائلة لهذا الاكتشاف في حل الأغشية، وفي انحناء النوابض (المنحني المرن) الذي نعالجه هنا، وفي مسائل أخرى أعمق، تتضح لي يوماً بعد يوم، حتى بلغ بي الأمر أخيراً أنني لم أعد أستطيع حجب المبرهنة الذهبية عن الجمهور.

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

اشتقاق المبرهنة الذهبية

Priusquam itaque ad institutum pergo, sunto in fig. I, portiuncula Curvae cujuspiam infinite parvae ab, bc, af, bf concurrentes quibus perpendiculariter insistant radii circuli osculatoris

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

quem producta portio ,gbc aequalem angulo afb facientesque angulum ,f in puncto Evolutae ,co ,bn ,al ductaeque intelligantur parallelae ,$bh = bc$ efficit; tum abscindatur bc cum altera ab ,ddx ,dy ,dx quarum illae abscissarum, hae applicatarum elementa (sive ;gcn ,hom ,bl nec non ,etc.) indigitent. Dico

aequalibus, radius circuli oscula- ds hoc est, ipsis ,bc ,ab Quod positis Curvae elementis .α nempe ,af toris seu longitudo fili evolventis

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{item} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

$bm : bh ::$(abf ,hcb item ,hoc ,bmh rum△ .ob similitud) $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ Nam ;$bc = ds$ et ,$ho = hm = nc = bl = nc = ddy$ Sed .$ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$ .Q.E.D .$ddx : ds :: dy : z$ Eodem modo ostendetur .$ddy : ds :: dx : z$ quare

Coroll. In omni Curva, positis ejus elementis aequalibus, differentiae secundae coordi- ,$dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$ erit ,$\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$ natarum primis reciproce proportionantur: cum enim liquet; ,hoc ,bmh rum△ quod ipsum quoque ex sola similitudine ;$ddx : ddy :: dy : dx$ adeoque .dx ad dy seu ,al ad bl vel ,bm ad hm ut ,ddy seu oh est ad ddx seu co ubi

aequalibus, erit radius osculantis dx hoc est, ipsis ,bn ,al Positis vero abscissae elementis .β seu af circuli

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

(abf ,hcb nec non ,chg ,bng rum△ .ob similit) $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ Quoniam $gc = gn = nc =$ atque ;$bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$ Q.E.D. Haud absimiliter ostendetur, quod .$ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$ erit ;$bc = ds$ et ,$bl = nc = ddy$.$z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$ aequalibus, futurum est dy positis

...His addo nova, de quibus nec Fratri adhuc constat, Theoremata

---

قبل أن أنتقل إلى الموضوع المقصود، لنأخذ في الشكل I جزءاً صغيراً متناهي الصغر من منحنى ما، ab وbc، يقوم عليهما عمودياً نصفا قطر دائرة التقبيل af وbf، ويلتقيان عند النقطة f من المنحنى المتطور، ويصنعان الزاوية afb المساوية للزاوية gbc التي يكونها امتداد الجزء ab مع الجزء الآخر bc؛ ثم ليؤخذ $bh = bc$، ولنتصور رسم المتوازيات al وbn وco، وكذلك bl وhom وgcn؛ بحيث تدل الأولى على عناصر الفواصل، والثانية على عناصر التراتيب، أي dx وdy وddx، إلخ. أقول:

α. عندما تؤخذ عنصرا المنحنى ab وbc متساويين، أي عندما تكون عناصر ds متساوية، فإن نصف قطر دائرة التقبيل، أو طول الخيط المتطور af، هو

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{وكذلك} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

لأن $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (من تشابه المثلثات bmh وhoc، وكذلك hcb وabf): $bm : bh :: ab$. لكن $bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$، و$ho = hm = nc = bl = nc = ddy$؛ ومن ثم $bc = ds$. $ddy : ds :: dx : z$. وبالطريقة نفسها يثبت أن $ddx : ds :: dy : z$. وهو المطلوب إثباته.

نتيجة. في كل منحنى، عندما تؤخذ عناصره متساوية، تتناسب الفروق الثانية للإحداثيات عكسياً مع الفروق الأولى؛ فلما كان $z = \frac{dx \cdot ds}{ddy} = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$، كان $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$، ومن ثم $ddx : ddy :: dy : dx$؛ ويُستنتج ذلك

أيضاً من تشابه المثلثين bmh وhoc، حيث تكون نسبة co أو ddx إلى oh أو ddy كنسبة hm إلى bm، أو bl إلى al، أو dy إلى dx.

β. عندما يؤخذ عنصرا الفاصلة al وbn متساويين، أي عندما تكون عناصر dx متساوية، يكون نصف قطر دائرة التقبيل af

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

لما كان $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc$ (من تشابه المثلثات bng وchg، وكذلك hcb وabf) $:: bn : bg$ وكان $ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$؛ إذن $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$ و$bc = ds$. وهو المطلوب إثباته. وبالمثل يثبت أنه عندما تكون عناصر dy متساوية، يكون $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.

وأضيف إلى هذه مبرهنات جديدة لا يعرفها حتى أخي بعد...

Bernoulli, Jakob, 1694 "*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*" pg. 264

يتبسط اشتقاق الحل بسبب عدم فرض افتراض الميل الصغير. غير أن المعادلة التفاضلية الناتجة للمنحنى المرن لا يمكن حلها بدلالة الدوال الابتدائية. وكان دانيال برنولي هو الذي أدخل هذا الافتراض لاحقاً، وتمكن به من تبسيط المعادلة تحليلياً (انظر §9.4.1.3).

بالرجوع إلى الشكل 8.6، يضع برنولي:

$$ab = bc; \qquad af \perp ab; \qquad bf \perp bc; \qquad bh = bc; \qquad \Rightarrow al = bm \tag{8.11}$$

والمثلثات الآتية متشابهة (تقريباً):

$$\triangle bmh \sim \triangle hoc \quad \text{و} \quad \triangle hcb \sim \triangle abf \tag{8.12}$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$\frac{ho}{bc} = \frac{ho}{hc} \cdot \frac{hc}{bc} = \frac{bm}{bh} \cdot \frac{ab}{bf} = \frac{al}{ab} \cdot \frac{ab}{bf} \tag{8.13}$$

وعندما يكون ds ثابتاً، تتبسط هذه العلاقة إلى $\frac{ho}{bc} = \frac{al}{bf}$. والآن:

$$bf = r; \qquad al = dx; \qquad bc = ds; \qquad ho = hm - nc = bl - nc = ddy \tag{8.14}$$

(مع إهمال اصطلاحات الإشارة). ومن ثم:

$$\frac{dx}{r} = \frac{ddy}{ds} \tag{8.15}$$

وأخيراً:

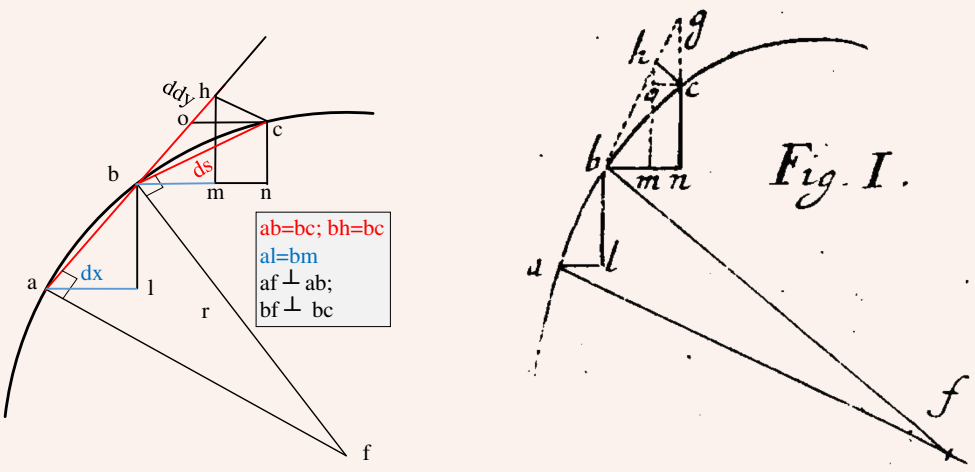
$$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy} \tag{8.16}$$

عندما يكون ds ثابتاً.

يعادل افتراض ثبات ds اتخاذ s متغيراً مستقلاً.

يتبين من الشكل 8.6 أن AED هو المنحني المرن، وأن GLM منحناه المتطور. ولذلك يبدو أن العبارة *evolutione describitur* تدل على أخذ *المنحنى الالتفافي* للمنحنى GLM لإنشاء المنحني المرن AED. وتقابل النقطة L على المنحنى المتطور النقطة E

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 8.6: اشتقاق ياكوب برنولي للانحناء

على المنحني المرن. وللنقطة L الإحداثيان الديكارتيان (p, z)، وللنقطة E الإحداثيان (x, y). ومن الواضح أن برنولي يستعمل المنحنى المتطور أداة هندسية لتعريف الانحناء، وهو أمر محوري في نظرية المنحني المرن. وبحسب التعريف، تمثل القطعة EL نصف قطر الانحناء عند النقطة E على AED.

ومع أن صياغة ياكوب برنولي كانت هندسية بعمق وغير خطية، فإنها مهدت الطريق لابن أخيه دانيال (§9.3.2.1.2.4) ولأويلر (§9.4.1.2) كي يتناولا المنحني المرن من منظور أكثر تحليلية، مما أدى إلى تبسيط حاسم.

جدول 8.1: مقارنة بين صيغتي برنولي الأصلية والحديثة للانحناء

الصياغة الحديثة	صياغة برنولي (1694)
تفترض الدالة $y(x)$ واتخاذ x وسيطاً	تفترض تساوي عناصر القوس (ثبات ds)
$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$	$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$
تستعمل مشتقات قائمة على النهايات	تستعمل فروقاً منتهية (متناهية في الصغر)
اشتقاق تحليلي	إنشاء هندسي بالمنحنى المتطور
تستعمل عادة للدالة الصريحة $y(x)$	تعمل مع أية بارمترة
تقوم على معدل تغير زاوية المماس	تقوم على تشابه المثلثات

مقارنة بين برنولي (1694) والصياغة الحديثة لربط صيغة برنولي بالصيغة الحديثة، نبدأ من $z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$، وباستعمال $ds^2 = dx^2 + dy^2$ يمكن أن نكتب: $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

ومن ثم: $R = \frac{dx \cdot ds}{d^2y} = \frac{dx^2\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y}$

وبقسمة البسط والمقام على dx^2: $R = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y/dx^2}$

لكن الصيغة الحديثة تتضمن عاملاً إضافياً. وينشأ الفرق لأن ddy عند برنولي، وهو الفرق الثاني المأخوذ مع ثبات ds، يختلف

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

اختلافاً دقيقاً عن d^2y/dx^2 الحديث، أي المشتق الثاني بالنسبة إلى x. وعند مراعاة تغيير المتغيرات والعلاقة بين التفاضلات مراعاة صحيحة، نحصل على:

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{8.17}$$

يراعي العامل الإضافي $[1 + (dy/dx)^2]$ في البسط وجوب إدخال آثار الإسقاط إدخالاً صحيحاً عندما يميل المنحنى.

الأثر التاريخي أصبحت هذه المبرهنة أداة برنولي الرئيسة لحل مسألة المنحني المرن. وقد سماها «مبرهنته الذهبية» لا لأنه اكتشف مفهوم الانحناء أو دائرة التقبيل، بل لأنها وفرت طريقة حسابية عملية، هي «المفتاح المفقود»، مكّنت الرياضيين أخيراً من معالجة المنحنيات المرنة بنجاح. وكما ذكر في الصفحة 263، تناولت محاولات سابقة، ومنها محاولة نُشرت في يناير 1691، دوائر التقبيل، لكن ليس بصيغة ملائمة لحل مسائل الميكانيكا المتسامية. وقد مثّل اعتماد الطريقة على العلاقات التفاضلية بدلاً من الإنشاءات الهندسية المحضة تحولاً محورياً نحو الطرائق التحليلية في الفيزياء الرياضية، ومهّد للتطوير المنهجي لحساب التغايرات.

8.2.6 كستنر (1758)

اشتهر أبراهام غوتلف كستنر (1719–1800)، أستاذ جامعة غوتنغن، شارحاً غزير الإنتاج للرياضيات أكثر منه باحثاً أصيلاً. ومع ذلك، أسهم كتابه المدرسي متعدد المجلدات *Anfangsgründe der Mathematik* («أسس الرياضيات») (Kästner, 1786) في تنظيم كثير من مفاهيم الهندسة التفاضلية والتحليل ونشرها.

قدم كستنر في مجلد عام 1758 ما يمثل في جوهره التعريف الحديث للانحناء، إذ وصفه بأنه نهاية النسبة بين الزاوية $\Delta\theta$ المحصورة بين مماسين متجاورين وطول القوس Δs بينهما:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{8.18}$$

يعبّر ذلك عن الانحناء بوصفه معدل دوران المماس على طول المنحنى، وهو تعريف اعتُمد لاحقاً في الهندسة التحليلية والهندسة التفاضلية الحديثة.

وجاء نص كستنر الأصلي كما يأتي:

> Man kann die Krümmung einer Linie in einem Punkte durch das Verhältnis des Winkels messen, den zwei sehr nahe Tangenten machen, zu dem zwischen ihnen liegenden Bogen, wenn dieser unendlich klein wird.
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

وترجمته:

> يمكن قياس انحناء خط عند نقطة بنسبة الزاوية التي يكونها مماسان شديدا التقارب إلى القوس الواقع بينهما، عندما يصير ذلك القوس متناهي الصغر.
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

أضفى هذا التعريف صياغة رسمية على ما تناوله رياضيون سابقون، مثل أسرة برنولي وهوينغنس، تناولاً هندسياً، وأقامه على إطار حساب التفاضل الذي كان قد نضج بحلول منتصف القرن الثامن عشر.

وفي الهندسة التحليلية الحديثة تصاغ الفكرة بمزيد من الدقة. فلمنحنى مستوٍ معطى بالعلاقة $y = f(x)$، يمكن كتابة الانحناء كما يأتي:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهو ما يربط بصيرة كستنر الهندسية بالصيغة القائمة على حساب التفاضل والمستعملة اليوم.

ثبت أن هذا التعريف الحديث للانحناء كان تأسيسياً لتطورات القرن التاسع عشر. فقد أتاح لغاوس تطوير *Theorema Egregium*[4] عام 1827، التي بينت أن الانحناء الغاوسي خاصية جوهرية للسطوح. وأدت هذه البصيرة في النهاية إلى تطوير الهندسة الريمانية، ووفرت الإطار الرياضي للنسبية العامة لأينشتاين، مبرهنة مرة أخرى كيف تتطور المفاهيم الهندسية الناشئة من مسائل عملية إلى أدوات نظرية عميقة.

8.2.7 خلاصة

جدول 8.2: محطات بارزة في تطور مفهوم الانحناء

العمل أو المصدر الرئيس	الصيغة الممثلة	الإسهام	التاريخ الاسم
Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum	لا توجد (نوعي)	ربط مفاهيمي بين الانحناء والانحراف عن الاستقامة؛ وصف نوعي	1351 نيكول أوريم
Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum	$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$	صيغة تحليلية للانحناء بالإحداثيات الديكارتية والقطبية؛ مركز هندسي للانحناء بواسطة الناظمات	1671 إسحاق نيوتن
Acta Eruditorum (مقالة 1686)	لا توجد (هندسي)	تعريف دائرة التقبيل نهايةً لدائرة تقطع منحنى عند أربع نقاط تؤول إلى التطابق	1686 غ. و. لايبنتس
مخطوطة غير منشورة (1691)	$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	اشتقاق جبري لنصف قطر الانحناء العام باستعمال التفاضلات	1691 يوهان برنولي
Curvatura Laminae Elasticae، *Acta Eruditorum* (1694)	$r = \frac{dx \cdot ds}{dy}$	إنشاء هندسي بالمنحنيين المتطور والالتفافي؛ الانحناء محوري في نظرية المنحني المرن	1694 ياكوب برنولي
Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes	$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$	إطار حساب التغايرات للمنحني المرن؛ معادلة أويلر–لاغرانج لاستمثال المنحنى	1744 ليونارد أويلر
إطار أويلر التغايري + مبدأ دانيال للطاقة	$\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}$	تقريب الميل الصغير المؤدي إلى نظرية الجوائز الخطية	نحو 1750 تعاون أويلر–برنولي
Anfangsgründe der Mathematik	$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$	التعريف الحديث للانحناء بوصفه معدل تغير زاوية المماس بالنسبة إلى طول القوس	1758 أ. غ. كستنر

[4] تعني باللاتينية «المبرهنة البديعة»، وهي نتيجة كبرى في الهندسة التفاضلية تتعلق بانحناء السطوح. تنص المبرهنة على إمكان تحديد الانحناء الغاوسي كاملاً بقياس الزوايا والمسافات ومعدلات تغيرها على السطح، من دون الرجوع إلى الكيفية الخاصة التي يُضمَّن بها السطح في الفضاء الإقليدي المحيط ثلاثي الأبعاد. وبعبارة أخرى، لا يتغير الانحناء الغاوسي لسطح إذا ثُني من دون تمديده؛ ولذلك فهو ثابت جوهري للسطح.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8.3 المنحنى المتطور والمنحنى الالتفافي

يعد مفهوما المنحنى المتطور والمنحنى الالتفافي في الهندسة التفاضلية، اللذان قدمهما كريستيان هوينغنس أول مرة، أساسيين لفهم ما يأتي من معالجة للانحناء والمنحني المرن والسلسلة المعلقة. ويمثل هذان المفهومان ذروةً للتفكير الهندسي تصل الرياضيات البحتة بالميكانيكا العملية.

ولوضع الأمور في منظورها التاريخي والثقافي، عبّر هوينغنس عام 1691 عن روح عصره بقوله:

> كثيراً ما تأملت أن المنحنيات التي تعرضها الطبيعة أمام أبصارنا مراراً، والتي ترسمها بنفسها، إن صح التعبير، تمتلك جميعاً خواص جديرة جداً بالملاحظة. من ذلك الدائرة التي نصادفها في كل مكان، والقطع المكافئ الذي ترسمه تيارات الماء، والقطع الناقص والقطع الزائد اللذان يجتازهما ظل طرف المزولة ونصادفهما في مواضع أخرى أيضاً، والدويري الذي يرسمه مسمار على محيط عجلة، وأخيراً سلسلتنا المعلقة التي لوحظت قروناً كثيرة من دون فحصها. وفي رأيي تستحق مثل هذه المنحنيات أن نختارها للدراسة، لا تلك [المنحنيات] المستحدثة لمجرد تطبيق الحساب الهندسي عليها.
>
> ([Blasjo, 2017 Transcendental curves in the Leibnizian calculus ([Chapter8

في الهندسة التفاضلية، المنحنى المتطور لمنحنى ما هو المحل الهندسي لجميع مراكز انحنائه. أما منحناه الالتفافي فهو المحل الهندسي لنقطة على خيط مشدود حين يُفك الخيط عن المنحنى أو يُلف حوله. والمنحنى المتطور لمنحنى التفافي هو المنحنى الأصلي.

رياضياً، يُعطى المنحنى المتطور لمنحنى وسيطي $\vec{c}(t)$ بالعلاقة:

$$\vec{E}(t) = \vec{c}(t) + \rho(t)\vec{n}(t) \tag{8.19}$$

حيث $\rho(t)$ نصف قطر الانحناء و$\vec{n}(t)$ متجه الناظم الوحدي. ويمكن التعبير عن المنحنى الالتفافي كما يأتي:

$$\vec{C}_a(t) = \vec{c}(t) - \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|}\int_a^t |\vec{c}'(w)|\,dw \tag{8.20}$$

حيث يمثل التكامل طول قوس الخيط المفكوك عن المنحنى.

يوضح مثال بسيط هذين المفهومين: فالمنحنى المتطور لدائرة نقطة واحدة في مركزها، حيث تلتقي جميع الناظمات، في حين يشكل منحناها الالتفافي منحنى حلزونياً. ومع أنه كثيراً ما يُظن حلزوناً أرخميدياً، فإن المنحنى الالتفافي للدائرة منحنى متميز له خواصه الفريدة، وهو تمييز ثبتت أهميته الحاسمة في تطوير تصميم أسنان التروس بعد قرون.

8.3.1 هوينغنس (1658–1673)

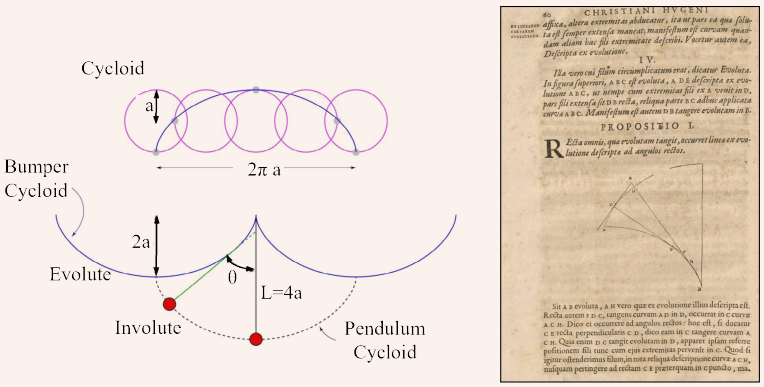
مع أن أبولونيوس ناقش المنحنيات المتطورة في الكتاب الخامس من *المخروطيات* نحو عام 200 ق.م، فإن هوينغنس كان أول من طور نظرية منهجية لها وطبقها لحل مسألة ميكانيكية عملية. وكان هوينغنس رياضياً وفيزيائياً وفلكياً هولندياً تطلب عمله قياس الزمن بدقة؛ فاخترع ساعة النواس عام 1657، ثم اكتشف كيف يجعلها متساوية الزمن حقاً. ونشر نتائجه في عمله الرئيس *Horologium Oscillatorium* عام 1673 (Huygens, 1673)، الذي يعد واحداً من أهم ثلاثة أعمال في ميكانيكا القرن السابع عشر؛ والعملان الآخران هما *مباحث وبراهين رياضية حول علمين جديدين* لغاليليو عام 1638 (Galilei, 1638)، وكتاب نيوتن *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687).[5]

دور حركة النواس البسيط، عندما تكون الزاوية أصغر من 5°، يساوي تقريباً:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{8.21}$$

[5] هذا التقييم لأهم ثلاثة أعمال في ميكانيكا القرن السابع عشر مقبول على نطاق واسع في أدبيات تاريخ العلم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 8.7: نواس هوينغنس المتساوي الزمن (Huygens, 1673)

مع أن النواس البسيط متساوي الزمن تقريباً عند السعات الصغيرة، فإنه يظل يظهر أخطاء زمنية تزداد مع السعة. وكان هوينغنس أول من اكتشف هذا القيد وابتكر حلاً له (Zixuan, Jixun **and** Zhigang, 2018). فقد اكتشف بالتحليل الهندسي أن منحنى تساوي الزمن، الذي تهبط عليه جسيمة إلى أخفض نقطة في الزمن نفسه مهما كان موضع البدء، هو دويري[6].

الخاصية الحاسمة التي تجعل الدويري منحنى تساوي الزمن هي أن مربع طول القوس من أية نقطة إلى القاع يتناسب مع فرق الارتفاع الرأسي:

$$s^2 = 8ar \cdot h \tag{8.22}$$

حيث s طول القوس، وa نصف قطر الدائرة المولدة، وh الارتفاع. وتضمن هذه العلاقة، مقترنة بحفظ الطاقة، استقلال زمن الهبوط عن موضع البدء، فتنتج دوراً ثابتاً.

ولجعل ثقل النواس يتبع مساراً دويرياً، أدخل هوينغنس مفهومي المنحنى المتطور والمنحنى الالتفافي. وكان اكتشافه اللافت أن المنحنى الالتفافي لدويري هو دويري آخر. فعند وضع لوحين متناظرين على هيئة دويري عند أعلى النواس، يلتف الخيط جزئياً حولهما في أثناء التأرجح. وعندئذ يرسم ثقل النواس مساراً دويرياً، هو المنحنى الالتفافي للوحين الدويريين، فتتحقق مساواة الزمن بدقة.

دور نواس هوينغنس الدويري هو:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{8.23}$$

حيث a نصف قطر الدائرة المولدة للدويري، مع ملاحظة أن طول قوس دويري كامل يساوي $8a$، وأن طول النواس يساوي $4a$.

كان اشتقاق هوينغنس هندسياً محضاً، قائماً على التناسب والبرهان بالخلف على طريقة أرخميدس، ومستبقاً تقنيات صيغت رسمياً لاحقاً بحساب التفاضل والتكامل. وأصبحت نظريته في المنحنيات المتطورة، التي طورها لحل هذه المسألة العملية في ضبط الوقت، أساسية في دراسة الهندسة التفاضلية.

8.3.2 القيود العملية والإرث

على الرغم من أناقته النظرية، واجه نواس هوينغنس الدويري صعوبات عملية: احتكاك الخيط عند انحنائه حول اللوحين، وبلى نقاط التماس، والدقة التصنيعية اللازمة للأشكال الدويرية. وتجاوز اختراع آلية الإفلات المرساة، نحو عام 1670، هذه المشكلات

[6] الدويري منحنى ترسمه نقطة على دائرة وهي تتدحرج على مستقيم.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحقاً؛ إذ أتاح للنواس أن يتأرجح في أقواس أصغر يصبح عندها الخطأ الدائري مهملاً، فاستغنت معظم تطبيقات ضبط الوقت عن الآلية الدويرية المعقدة.

لكن الإطار الرياضي الذي طوره هوينغنس للمنحنيات المتطورة أثبت أثراً أبعد بكثير من تصميم ساعته الخاص. وقد أرسى نهجه الهندسي للانحناء وللعلاقة بين المنحنيات ومنحنياتها المتطورة أساساً لما يأتي:

- دراسة المنحنيات الحارقة في البصريات، أي غلاف الأشعة المنعكسة أو المنكسرة
- مسألة منحنى أسرع هبوط، يوهان برنولي عام 1696، أي إيجاد المنحنى ذي زمن الهبوط الأقصر
- النظرية العامة لأغلفة عائلات المنحنيات
- التطبيقات الحديثة في تصميم التروس، حيث تحافظ التروس الالتفافية على نسب سرعة ثابتة
- تطور الهندسة التفاضلية بوصفها فرعاً رياضياً

ثبت أن المفاهيم التي قدمها هوينغنس ضرورية لفهم انحناء المنحنيات، ومنها المنحني المرن والسلسلة المعلقة، وهما من المنحنيات التي تعرضها الطبيعة أمامنا، كما لاحظ هوينغنس، وتمتلك «خواص جديرة جداً بالملاحظة».

8.3.3 ملاحظات ختامية

تجسد قصة المنحنيات المتطورة والالتفافية موضوعاً متكرراً في تاريخ الهندسة: مسائل عملية تدفع تقدماً نظرياً يتجاوز في النهاية تطبيقاته الأصلية. سعى هوينغنس إلى بناء ساعة أفضل، لكنه منح الرياضيات بدلاً من ذلك إطاراً أساسياً لفهم كيفية ارتباط المنحنيات بعضها ببعض بواسطة خواص انحنائها. ويطبع هذا التفاعل بين العملي والنظري، وبين الضرورة الميكانيكية والجمال الهندسي، جانباً كبيراً من تطور الهندسة منذ القرن السابع عشر.

وكما رأينا في هذا الفصل كله، ليست الهندسة تمريناً مجرداً فحسب، بل عدسة نفهم بها العالم الطبيعي والمصنوعات التي ننشئها معاً. فمن مسائل تربيع الدائرة القديمة إلى التطبيقات الحديثة للتروس الالتفافية، تواصل المبادئ الهندسية تشكيل فهمنا للمكان والحركة والشكل. ويذكرنا المنحنيان المتطور والالتفافي، اللذان ولدا من الحاجة العملية إلى ضبط الزمن بدقة، بأن حتى أكثر المفاهيم الرياضية تجريداً كثيراً ما تضرب جذورها في التحديات الملموسة للتجربة البشرية.

يلخص الجدول 8.3 أهم الأحداث والكتب المذكورة في هذا الفصل.

جدول 8.3: الانحناء والمنحني المرن: أهم الأحداث والكتب

السنة	المؤلف	عنوان الكتاب أو الحدث	الخلاصة
1351	نيكول أوريم	*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1351)	مفهوم نوعي مبكر يربط الانحناء بالابتعاد عن الاستقامة؛ سابق للتعريفات التحليلية اللاحقة.
1657	كريستيان هوينغنس	اختراع ساعة النواس (حدث)	مسألة عملية في ضبط الوقت حفزت البحث في تساوي الزمن ومهدت للحل الدويري.
1658–1673	كريستيان هوينغنس	النواس الدويري وإنشاء المنحنيين المتطور والالتفافي (حدث)	استعمال المنحنى الالتفافي للدويري بواسطة لوحين دويريين لفرض تساوي الزمن؛ وصياغة المفهومين هندسياً.
1671	إسحاق نيوتن	*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736)	صيغ تحليلية للانحناء ديكارتية وقطبية؛ ومركز الانحناء بتقاطع الناظمات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السنة	المؤلف	عنوان الكتاب أو الحدث	الخلاصة
1673	كريستيان هوينغنس	*Horologium Oscillatorium* (Huygens, 1673)	عمل رئيس في ديناميكا النواس؛ الدويري منحنى تساوي الزمن؛ واستعمال منهجي للمنحنيات المتطورة والالتفافية.
1686	غ. و. لايبنتس	دائرة التقبيل بتماس ذي أربع نقاط (حدث)	تعريف دائرة التقبيل نهايةً لدائرة ذات تماس من أربع نقاط تؤول إلى التطابق؛ أساس هندسي للانحناء.
1691	يوهان برنولي	نصف قطر الانحناء العام (مخطوطة غير منشورة)	اشتقاق تفاضلي لـr؛ مسار جبري إلى الصيغة الحديثة $r=\frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$.
1694	ياكوب برنولي	*Curvatura Laminae Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1744a)	منحني مرن هندسي باستعمال المتطور والالتفافي؛ نصف قطر الانحناء محوري في إنشاء المنحنى المرن.
1744	ليونارد أويلر	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes* (Euler, 1744b)	حساب التغايرات؛ معادلة أويلر–لاغرانج؛ صياغة تغايرية دقيقة وغير خطية للمنحني المرن.
نحو 1750	أويلر ودانيال برنولي	تقريب الميل الصغير لأويلر–برنولي (حدث)	خطّي الانحناء $\kappa\approx y''$، وأنتج $EI\,y''=M(x)$، أساس نظرية الجوائز الكلاسيكية.
1758	أ. غ. كستنر	*Anfangsgründe der Mathematik* (Kästner, 1786)	الانحناء الحديث بوصفه $d\theta/ds$، أي معدل تغير زاوية المماس مع طول القوس؛ وترسيخ المفهوم.

8.4 من المنحنيات الهندسية إلى الميكانيكا الإنشائية

لم تكن التطورات الهندسية التي تتبعها هذا الفصل، من بصائر أوريم النوعية إلى تعريف كستنر الدقيق للانحناء، مجرد تجريدات رياضية. بل وفرت اللغة الكمية الضرورية لصياغة فئة جديدة من المسائل الفيزيائية وحلها: **كيف تتشوه المنشآت المرنة والمطاوعة تحت الحمل؟**

البصيرة الحاسمة: إن الشكل المتشوه لأي منشأ محمل ينحني، كسلسلة معلقة أو قضيب مثني أو جائزة منحنية، يتحدد أساساً بـ**انحنائه عند كل نقطة**. ومن دون الآلية الرياضية اللازمة لوصف الانحناء وحسابه، لم يكن ممكناً للميكانيكا الإنشائية أن تتجاوز التقريبات الأولية.

لنتأمل التحديين الكبيرين اللذين يشغلان الفصل 9:

السلسلة المعلقة (§9.2): تتخذ السلسلة المعلقة شكلاً تتوازن فيه، عند كل نقطة، **قوة الشد مع وزن** الجزء الواقع أسفلها. لكن كتابة هذا الاتزان رياضياً تتطلب التعبير عن هندسة السلسلة، وبخاصة العلاقة بين طول القوس وزاوية الميل θ والموضع الرأسي. وقد جعلت بصائر هوينغنس الهندسية (§8.3.1) وحساب نيوتن (§8.2.2) ولايبنتس (§6.6.8) ذلك ممكناً. وتربط المعادلة التفاضلية الناتجة انحناء السلسلة مباشرة بتوزيع الشد على طولها.

المنحني المرن (§9.3): يجسد عمل ياكوب برنولي بين عامي 1691 و1694 الصلة بين الهندسة والميكانيكا. وتسأل مسألة التحدي التي طرحها: *أي شكل يتخذه قضيب مرن تحت الحمل؟* وتستثمر طريقة حله مباشرة المفاهيم الهندسية المطورة في هذا الفصل:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. يستعمل **مبرهنته الذهبية** (§8.2.5) للتعبير عن الانحناء هندسياً: $\kappa = d\theta/ds$، حيث يوفر إنشاء المنحنى المتطور (§8.3) الأساس الهندسي
2. يستدعي **مبدأً فيزيائياً**: عزم الانحناء M يتناسب مع الانحناء ($M \propto \kappa$)، وهو أول تصريح واضح يربط القوى الداخلية بالتشوه الهندسي
3. يطبق **الاتزان الميكانيكي**: يجب أن يوازن العزم الأحمال المطبقة عند كل نقطة على المنحنى
4. ينتهي إلى **معادلة تفاضلية** تربط الانحناء الهندسي بالتحميل الميكانيكي، ويمكن حلها بتقنيات حساب التفاضل والتكامل

لم يكن هذا التركيب، الذي يصبح فيه الانحناء الهندسي جسراً بين التشوه والقوة الداخلية، ممكناً من دون القرون الثلاثة السابقة من التطور الهندسي الموثقة في هذا الفصل.

ثبتت أهمية إنشاء هوينغنس للمنحنى المتطور، الذي طُور في البداية للنواس الدويري (§8.3.1)، عندما استعمل ياكوب برنولي المنحنيات المتطورة لاشتقاق معادلة المنحني المرن. فالمنحنى المتطور يعطي المحل الهندسي لمراكز الانحناء، أي المعلومات الهندسية اللازمة بالضبط للتعبير عن تغير شكل جائزة منحنية على طولها. وتحولت دائرة التقبيل عند نيوتن (§8.2.2) ولايبنتس (§6.6.8)، التي كانت في الأصل مفهوماً هندسياً محضاً، إلى التجسيد الفيزيائي للكيفية التي «تميل» بها الجائزة المنحنية إلى الانحناء عند كل نقطة؛ فالتقريب الدائري الموضعي يحكم عزم الانحناء الموضعي. وأصبح معدل تغير زاوية المماس $d\theta/ds$، الذي صاغه كستنر رسمياً (§8.2.6)، هو الانحناء الميكانيكي κ الظاهر في كل معادلة للجوائز.

الجسر من الهندسة إلى الميكانيكا: يلخص الجدول 8.4 كيف وجد كل مفهوم هندسي طُور في هذا الفصل تطبيقاً مباشراً في الميكانيكا الإنشائية:

جدول 8.4: من المفاهيم الهندسية إلى التطبيقات الميكانيكية

التطبيق الميكانيكي	المفهوم الهندسي
تقريب موضعي لانحراف الجائزة؛ تحدد متطلبات صلابة الانحناء الموضعية	دائرة التقبيل (نيوتن، لايبنتس)
يتناسب عكسياً مع عزم الانحناء: $M = EI\kappa$	نصف قطر الانحناء $\rho = 1/\kappa$
طريقة إنشاء هندسي لإيجاد أشكال المنحني المرن	المنحنى المتطور بوصفه محل مراكز الانحناء
علاقة حركية تصل زاوية الميل بطول القوس في نظرية الجوائز	معدل الانعطاف $d\theta/ds$ (كستنر)
أداة حسابية لحل المعادلة التفاضلية للمنحني المرن	المبرهنة الذهبية (ياكوب برنولي)

الإرث: أصبحت الصياغة القائمة على الانحناء التي أسسها ياكوب برنولي، وصقلها أويلر في حساب التغايرات (§9.4.1.2)، وبسطها تقريب الميل الصغير لأويلر–برنولي (§9.4.1.3)، أساس نظرية الجوائز الإنشائية **كلها**. وترجع كل معادلة حديثة للجوائز، من العلاقة البسيطة $EIy'' = M(x)$ إلى صيغ العناصر المحدودة المعقدة، إلى المفاهيم الهندسية المطورة في هذا الفصل. وتقريب الميل الصغير $\kappa \approx d^2y/dx^2$ الذي يتيح نظرية الجوائز الابتدائية ليس إلا خطيّة للصيغة الدقيقة للانحناء $\kappa = d\theta/ds$ التي اشتقتها أسرة برنولي هندسياً.

وهكذا توضح قصة الانحناء نمطاً عميقاً في الفيزياء الرياضية: **البصائر الهندسية المجردة، المطورة لذاتها، تثبت لاحقاً أنها لا غنى عنها لوصف الواقع الفيزيائي**. فلم تُنشأ دوائر التقبيل عند نيوتن، والمنحنيات المتطورة عند هوينغنس، والهندسة التفاضلية عند أسرة برنولي لحل مسائل إنشائية؛ ومع ذلك، لا يمكن للنظرية الحديثة للمنشآت أن توجد من دونها. فقد طور هوينغنس المنحنيات المتطورة لبناء ساعة أفضل، وأدرك ياكوب برنولي أن الآلية الهندسية نفسها تستطيع وصف انحناء الجوائز. ويجسد هذا التلاقح بين ضبط الوقت والميكانيكا الإنشائية كيفية تجاوز الأدوات الرياضية لتطبيقاتها الأصلية.

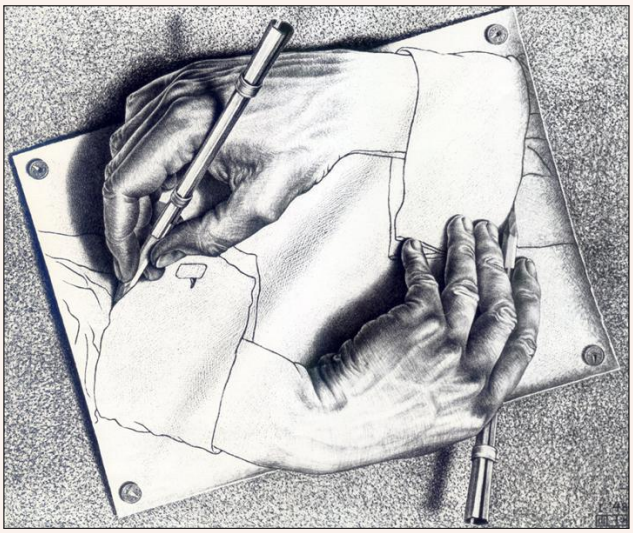
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8.5 نظرة إلى الأمام:

سنرى في الفصل 9 كيف أتاحت هذه الأدوات الهندسية حل مسألتين عرّفتا الميكانيكا الإنشائية: السلسلة المعلقة والمنحني المرن. وتمثلان انتقالاً حاسماً من الإنشاء الهندسي إلى الحل التحليلي، ومن فهم المنحنيات في المجرد إلى التنبؤ بسلوك العناصر الإنشائية المحملة. وهنا تلتقي البصائر الهندسية المثبتة في هذا الفصل بالواقع الفيزيائي للسلاسل المعلقة والقضبان المنحنية، فتؤدي إلى بعض أكثر النتائج أناقة وأهمية عملية في تاريخ الميكانيكا الإنشائية.

ستبين مسألة السلسلة المعلقة كيف يرتبط الانحناء بتوزيع الشد الداخلي في كبل مرن. وستوضح مسألة المنحني المرن كيف يحكم الانحناء العلاقة بين الأحمال المطبقة والشكل المتشوه الناتج لقضيب مرن. وتشترك المسألتان في بنية رياضية واحدة: معادلة تفاضلية تربط الخاصية الهندسية للانحناء بالكميات الميكانيكية، أي الشد والعزم والحمل. وما تزال هذه البنية، التي أدركها ياكوب برنولي أولاً وصاغها أويلر رسمياً، في صميم التحليل الإنشائي حتى اليوم.

وستكشف هذه التحديات أيضاً لماذا أصبحت دراسة الأشكال المتشوهة، بالبناء على مبادئ المقاومة في الفصول السابقة والأسس الهندسية المثبتة للتو معاً، ضرورية لفهم السلوك الإنشائي فهماً كاملاً. فمعرفة أن منشأً يستطيع مقاومة حمل معين لا تكفي؛ بل يجب أن نتنبأ كذلك بمقدار تشوهه، وما إذا كان ذلك التشوه يظل مقبولاً لوظيفته المقصودة.



م. ك. إيشر، يدان ترسمان *(1948)*

منحنيات ذاتية الإحالة وهندسات مستحيلة؛ رياضيات تتجسد بصرياً في مفارقة فنية.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9 التحديات الكبرى: السلسلة المعلقة والمنحني المرن وميلاد الميكانيكا التحليلية

ملخص

يتناول هذا الفصل تطور ما يسمى «التحديات الكبرى» في الميكانيكا، التي حفزت تقدماً حاسماً في الرياضيات والهندسة خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر. ويبدأ بمسألة السلسلة المعلقة في تسعينيات القرن السابع عشر، التي طرحها ياكوب برنولي وحلها لايبنتس ويوهان برنولي وهوينغنس، فيبرز كيف برهن تطبيق حساب التفاضل والتكامل على مسألة فيزيائية حقيقية قوة التحليل الجديد. ثم مثّل تحدي ياكوب برنولي اللاحق بشأن المنحني المرن نقطة تحول أخرى، إذ دفع الرياضيات نحو حساب التغايرات الذي صاغه أولاً دانيال برنولي، ثم صقله أويلر. ووسع التحدي المجهول لعام 1724 مجال البحث بمطالبته بحلول للخطوط المرنة والمطاوعة تحت قوى عامة، فاستقطب مرة أخرى إسهامات دانيال برنولي وأويلر. وأخيراً، حولت مذكرة أويلر لعام 1759 حول انبعاج الأعمدة مسألة هندسية طريفة إلى نتيجة محورية في الاستقرار الإنشائي.

ويبلغ الفصل ذروته برسالة أويلر لعام 1771 Genuina principia، التي وحّد فيها هذه الخيوط المتباعدة ضمن نظرية شاملة للخطوط القابلة للتشوه. فمن خلال تقديم «المسألة العامة» لاتزان الخطوط، صاغ أويلر رسمياً مفاهيم محصلتي القوة المماسية والناظمية وعزم الانحناء، وميّز قوانين الاتزان الميكانيكي عن العلاقات التأسيسية. ولم يقتصر تركيبه على احتواء المسائل الكلاسيكية للسلسلة والقضيب والعمود، بل استبق أيضاً الإطار الحاكم لميكانيكا الأوساط المتصلة. وتبين الرواية كيف أفضت تحديات طُرحت في الأصل مسابقات بين علماء الهندسة في نهاية المطاف إلى منهجية عامة ما تزال تسند التحليل الإنشائي، من الجسور والأبراج إلى المواد والنظم البيولوجية.

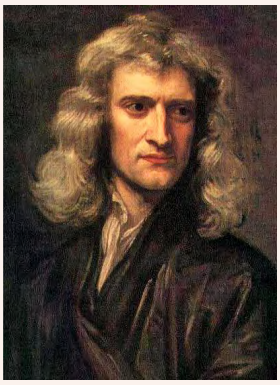
من بين فصول هذا الكتاب كلها، ثبت أن هذا الفصل هو الأصعب والأشد تشعباً في الكتابة، لكنه كان كذلك الأكثر إمتاعاً وإثراءً فكرياً.

9.1 الأسس الرياضية: من الهندسة إلى حساب التفاضل والتكامل 239
9.1.1 الإرث اليوناني: من إقليدس إلى الفصل بين الهندسي والميكانيكي 240
9.1.2 ثورة ديكارت: الإحداثيات والجبر 240
9.1.3 ثورة حساب التفاضل والتكامل . . 241
9.1.4 من المنحنيات إلى الميكانيكا: الجسر 241
9.1.5 اكتمال التحول 242
9.1.6 الترميز الرياضي 243
9.2 تحدي السلسلة المعلقة (مايو 1690–يونيو 1691) 243
9.2.1 الدراسات المبكرة 243
9.2.2 التحديات 246
9.2.3 الحلول الرئيسة الثلاثة 250
9.2.4 خاتمة 255
9.3 تحدي المنحني المرن (1690–1744) . . 256
9.3.1 تحدي ياكوب برنولي (1690) . . 256
9.3.2 الحلول 259
9.3.3 ملخص زمني للتحديين الأولين . 292
9.4 تحد مجهول: جسر بين المسائل (1724) . 295
9.4.1 تعاون برنولي–أويلر: التوحيد الأول (1728) 296
9.5 نظرية الانبعاج: من الملاحظة إلى الأحمال الحرجة 303
9.5.1 الأعمال المبكرة 303
9.5.2 أويلر (1759) 305
9.6 نظرية أويلر العامة: التوحيد الكامل (1771) 308
9.7 الخلاصة 312

9.1 الأسس الرياضية: من الهندسة إلى حساب التفاضل والتكامل

قبل الانتقال إلى المسائل الكبرى للسلاسل المعلقة والقضبان المنحنية والأعمدة المنبعجة، لا بد من تصوير مشهد القرن السابع عشر: تحول جوهري من الإنشاء الهندسي إلى الحساب التحليلي جعل هذه المنحنيات الميكانيكية قابلة للمعالجة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) إسحاق نيوتن (1643–1727)



(b) كريستيان هوينغنس (1629–1695)



(c) رينيه ديكارت (1596–1650)

شكل 9.1: الشخصيات الرئيسة في قصة المنحني المرن

9.1.1 الإرث اليوناني: من إقليدس إلى الفصل بين الهندسي والميكانيكي

يرجع التراث الرياضي الذي ورثه باحثو القرن السابع عشر إلى كتاب إقليدس *العناصر* ، نحو 300 ق.م، الذي أقام الهندسة علماً للأشكال القابلة للإنشاء بـالمسطرة غير المدرجة والفرجار. وقد وفر نهج إقليدس، الذي يجسده تعريفه لـالتماس بأنه مستقيم يمس دائرة عند نقطة واحدة بالضبط من دون أن يقطعها، طرائق قوية للمستقيمات والدوائر وتقاطعاتها، لكنه لم يقدم نهجاً عاماً للمنحنيات الأكثر تعقيداً.

ميز الرياضيون اليونانيون منذ العصور القديمة بين المنحنيات *الهندسية*، القابلة للإنشاء بـالمسطرة والفرجار والممثلة عادة بعلاقات جبرية بسيطة، والمنحنيات *الميكانيكية* التي تولدها *الحركة أو الأجهزة*، مثل الدويري والحلزون ومنحنى التربيع.[1] وكثيراً ما عُدت الفئة الأخيرة خارجة عن الهندسة «البحتة»؛ فقبلت لحل مسائل معينة، لكنها استُبعدت من المتن النظري.

السياق التاريخي يبني هذا العمل على أحجية برنولي الحرفية المنشورة عام 1691 في *Acta Eruditorum*، التي أثبتت أسبقيته مع إخفاء طريقته. وتقرر الأحجية بعد فكها العلاقة الهندسية الدقيقة التي كُشفت لاحقاً، لا قانون التناسب العكسي بين عزم الانحناء والانحناء الذي نُسب إليها خطأً في بعض الأدبيات (§6.11.1.1).

استمر هذا الحد الفاصل قرابة ألفي عام. وكانت المنحنيات التي ستغدو محورية في الميكانيكا الإنشائية، أي السلسلة المعلقة والمنحني المرن والمنحنيات المتطورة، تنتمي بوضوح إلى الفئة الميكانيكية، ولذلك استعصت على الطرائق الهندسية الكلاسيكية.

9.1.2 ثورة ديكارت: الإحداثيات والجبر

ظهر أول شرخ في هذا الأساس عندما جادل Descartes, 1637b بأنه إذا كانت الهندسة تقيس المقادير بوجه عام، فلا موجب لاستبعاد المنحنيات الأكثر تعقيداً.[2]

جعلت الهندسة التحليلية، أي الإحداثيات مضافة إلى الجبر، المعالجة الجبرية لغة العمل في المحال الهندسية. وفجأة أمكن تناول المنحنيات بوصفها حلولاً للمعادلات $F(x, y) = 0$، واشتقاق الخواص الهندسية بالحساب الجبري. وقد طمس ذلك الحد القديم بين

[1] لا يشير هذا «الفصل بين الهندسي والميكانيكي» إلى انفصال الهندسة والميكانيكا بوصفهما فرعين، بل إلى تصنيف اليونانيين للمنحنيات إما ضمن النظرية الهندسية البحتة، إذا أمكن إنشاؤها بالطرائق الإقليدية، وإما ضمن حل المسائل العملية، إذا تطلبت أجهزة ميكانيكية أو حركة.

[2] من المفارقة أن أمثلة ديكارت المحلولة ظلت تفضل المنحنيات الجبرية منخفضة الدرجة؛ قارن Palomo, 2017.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المنحنيات الهندسية والميكانيكية، لكن الطريقة العامة للمماسات والمساحات والمنحنيات المتسامية المعقدة ظلت تنتظر اختراقاً أعمق.

9.1.3 ثورة حساب التفاضل والتكامل

مهدت تطورات منتصف القرن السابع عشر السبيل: كميات كافالييري غير القابلة للتجزئة، وتربيعات توريتشيلي، وجداآت واليس اللانهائية، وثنائيات المماس–المساحة عند بارو، وطرائق فيرما للمماسات. وجاءت القفزة الحاسمة مع حساب التفاضل عند لايبنتس ونيوتن، الذي صقلته أسرة برنولي وهوينغنس وأويلر.

عبّر لايبنتس عن مدى هذا التحول في كتابه الجدلي *Historia et Origo Calculi Differentialis* (Leibniz, 1858)، الشكل 9.2. وبصرف النظر عن نزاع الأسبقية مع نيوتن، كان ادعاؤه التقني ثورياً:

> أصبح مجموع الهندسة، بحساب لايبنتس، خاضعاً للحساب التحليلي، كما رُدت تلك الخطوط المتسامية التي سماها ديكارت ميكانيكية إلى معادلات مختارة بما يلائمها، وذلك باعتبار الفروق dx وddx، إلخ، والمجاميع المعكوسة لهذه الفروق، دوالاً في قيم x؛ وكل ذلك بمجرد إدخال الحساب، في حين لم تكن قبل ذلك تقبل دوال غير x وxx وx^3 و$\sqrt{x}$، إلخ، أي القوى والجذور.
>
> Leibniz, 1858، بترجمة Child, 1920

ومع أن روايته متحيزة في نزاع الأسبقية مع نيوتن، فإنها تصف بدقة الثورة الرياضية التي جعلت المنحنيات المتسامية قابلة للمعالجة التحليلية.

حقق لايبنتس ونيوتن، بنهجين مختلفين، التفاضلات في مقابل *التدفقات*، الاختراق نفسه: فقد أصبحت المنحنيات المتسامية، التي لم يكن الوصول إليها من قبل ممكناً إلا بالإنشاء الهندسي أو التقريب العددي، موضوعاً للمعالجة التحليلية الدقيقة.

9.1.4 من المنحنيات إلى الميكانيكا: الجسر

نضج خلال القرن الثامن عشر، وبخاصة من خلال كتاب أويلر *Introductio in analysin infinitorum*، المفهوم الحديث *للدالة* بالتوازي مع البارمترة المنهجية للمنحنيات. ولمنحنى مستوٍ $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$، لدينا:

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{(سرعة طول القوس)} \tag{9.1}$$

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{(الانحناء ذو الإشارة)} \tag{9.2}$$

يمثل الانحناء κ مقلوب نصف قطر دائرة التقبيل، ويصف «انثناء» المنحنى موضعياً. وتصبح هذه الكمية الهندسية الصلة الحاسمة بالميكانيكا من خلال القوانين التأسيسية.

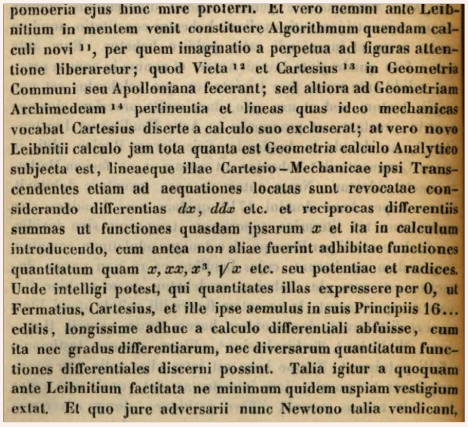
بالنسبة إلى قضيب مرن، العلاقة الأساسية التي تصل الهندسة بالقوة هي:

$$M = EI\kappa \tag{9.3}$$

حيث M عزم الانحناء، وE معامل المادة، وI عزم المساحة الثاني المحدد هندسياً، وκ الانحناء. وظهرت هذه العلاقة تاريخياً بصيغ مثل $M = \mathfrak{B}/R$ أو $M = Ek^2\kappa$، مع ترميزات مختلفة لـ«معامل الانحناء».

تحول هذه المعادلة البسيطة ظاهرياً نظرية المنحنيات الهندسية إلى ميكانيكا إنشائية. فتظهر السلسلة المعلقة عندما $EI \to 0$، أي حبل كامل المرونة؛ ويظهر المنحني المرن عندما تكون EI منتهية، أي قضيب قابل للانثناء وغير قابل للاستطالة؛ ويظهر الانبعاج عندما تتفاعل الأحمال المحورية مع صلابة الانحناء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,

Latin Transcription:
"pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam x, xx, x^3, $\sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,"

«...وهكذا يمكن توسيع حدودها على نحوٍ مدهش. والحقّ أنه لم يخطر ببال أحد قبل لايبنتز أن يضع خوارزميةً معيّنة للحساب الجديد [11]، تُعفي الذهن من ضرورة الالتفات الدائم إلى الأشكال؛ وهو ما كان فيبتا [12] وديكارت [13] قد أنجزاه في الهندسة العادية أو الأبولونية. أمّا المسائل الأرفع التي تنتمي إلى الهندسة الأرخميدية [14]، والخطوط التي سمّاها ديكارت لذلك «ميكانيكية» دقق، استبعدها صراحةً من حسابه.

ولكن بفضل حساب لايبنتز الجديد أصبحت الهندسة بأسرها، مهما اتسع نطاقها، خاضعةً الآن للحساب التحليلي؛ بل إن الخطوط التي كانت تُعدّ عند ديكارت ميكانيكية، وحتى الخطوط المتسامية منها، تُردّ إلى معادلات محددة، وذلك باعتبار الفروق dx و ddx نفسها، ثم إدخالها بهذه الصفة في الحساب. في حين أنه لم تكن x وما إلى ذلك، والمجاميع العكسية للفروق، دوالّ معيّنة في x وما إلى ذلك، أي القوى والجذور. x^3 و xx و $\sqrt{x}$ تُستعمل من قبل، بوصفها دوالّ للكميات، إلا تعابير من قبيل

ومن هذا يمكن إدراك أن أولئك الذين عبّروا عن مثل هذه الكميات بالرمز 0، مثل فيرما وديكارت، وكذلك ذلك المنافس نفسه في كتابه «المبادئ» المنشور سنة 16...، كانوا لا يزالون بعيدين جدًا عن حساب التفاضل؛ إذ لا يمكن بهذه الطريقة التمييز لا بين رتب الفروق المختلفة ولا بين الدوال التفاضلية للكميات المختلفة.

ولذلك فلا يوجد في أي موضع أدنى أثر يدل على أن أحدًا قد مارس شيئًا من هذا القبيل قبل لايبنتز. فبأي حق، إذن، يدّعي الخصوم الآن أن مثل هذه الأمور تعود إلى نيوتن...»

شكل 9.2: لايبنتس في مدى حساب التفاضل والتكامل (Leibniz, 1858, p. 2–3).

9.1.5 اكتمال التحول

كانت الثورة الرياضية عميقة:

- **المنحنيات الجبرية في مقابل المتسامية**: تحقق المنحنيات الجبرية علاقات كثيرة الحدود $F(x, y) = 0$، مثل الدوائر والقطوع الناقصة والمكافئة. أما السلسلة المعلقة والمنحني المرن ومنحنياتهما المتطورة فمتسامية؛ وهي بالضبط المنحنيات التي جعلها حساب التفاضل والتكامل قابلة للمعالجة.
- **من الإنشاء إلى التحليل**: استعمل اليونانيون ورياضيو العصور الوسطى الإنشاء الهندسي بالفرجار والمسطرة، أما التحليل الجديد فحل المسائل بواسطة المعادلات التفاضلية والتكامل.
- **توحيد البحث والتطبيقي**: الأدوات الرياضية نفسها التي كشفت خواص المنحنيات المجردة حلت أيضاً مسائل هندسية ملحة، كالسلاسل المعلقة وانحراف الجوائز واستقرار الأعمدة.

بهذا الأساس نستطيع فهم سبب تحول مسائل السلسلة المعلقة والمنحني المرن والانبعاج إلى «التحديات الكبرى» لرياضيات أواخر القرن السابع عشر وأوائل القرن الثامن عشر. فلم تكن مجرد تمارين تجريدية، بل اختبارات لمدى قدرة الحساب الجديد على إخضاع المنحنيات الميكانيكية التي استعصت على التحليل آلاف السنين.

وكما سنرى، لم تقتصر حلول ياكوب ويوهان برنولي وأويلر ومعاصريهم لهذه المسائل على الإجابة عن أسئلة هندسية محددة؛ بل أرست الأسس الرياضية للميكانيكا الإنشائية الحديثة وبرهنت القوة غير المسبوقة للطرائق التحليلية في الفيزياء الرياضية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.1.6 الترميز الرياضي

واكب تطور *الترميز الرياضي* التطورات المفاهيمية. فقد طور رواد مختلفون نظماً رمزية متنافسة، ويساعد فهم ترميزهم عند قراءة المصادر الأولية، الجدول 9.1.

جدول 9.1: رموز الاشتقاق والتكامل

	الاشتقاق	التكامل (الاشتقاق العكسي)
لايبنتس	$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}$	$\int y\,dx$
لاغرانج	$f'(x),\ f''(x),\ \ldots$	$\int \cdot\,dx$
أويلر	$D_x y,\ D_x^2 y$	$\int \cdot\,dx$
نيوتن	$\dot{x},\ \ddot{x}$ (معدلات زمنية)	؛(ينمزلا لماكتلا) $\dot{x}$ لـل «قفدتملا رادقملا» هزيمرت يف $\int$ نتوين لمعتسي مل

ملاحظات: (i) استعمل لاغرانج الشرطات و$\int$ بصورة معتادة للتربيع؛ أما مؤثر الاشتقاق العكسي الرسمي (D^{-1}) فجاء لاحقاً. (ii) استعمل أويلر كلاً من $\int$ اللايبنتسي والمؤثرات التفاضلية D_x في سياقات مختلفة. (iii) قامت تدفقات نيوتن ومقاديره المتدفقة على الزمن؛ وتقابل في الترميز الحديث $\frac{d}{dt}$ وdt عند المقارنة في مسائل الميكانيكا.

9.2 تحدي السلسلة المعلقة (مايو 1690–يونيو 1691)

يمثل تاريخ دراسات السلسلة المعلقة في أواخر القرن السابع عشر قصة آسرة للقارئ الأكاديمي الحديث. ففيها تنافس بين شخصيات شامخة، لايبنتس وهوينغنس والأخوان برنولي، واعتداد بالنفس، إذ أراد لايبنتس إثبات تفوق حسابه، واتصالات سرية استُعملت فيها الشفرات بكثرة، ومراسلات خاصة بين لايبنتس وهوينغنس، وغيرة بين ياكوب ويوهان برنولي، وضغط للنشر مارسه محرر *Acta Eruditorium*، وغير ذلك كثير.

طرحت السلسلة المعلقة تحدياً جوهرياً؛ فقد كانت أول منحنى متسامٍ يتطلب حلاً تحليلياً، ولذلك أصبحت حالة اختبار حاسمة للحساب الجديد في مواجهة الطرائق الهندسية التقليدية. وعلى خلاف المنحنيات الجبرية القابلة للإنشاء بالفرجار والمسطرة، كان التدلي غير المحدود للسلسلة المعلقة يعني أن إنشاءً هندسياً بسيطاً لا يستطيع تحديد شكلها. وتطلبت المسألة موازنة القوى على طول منحنى مجهول الشكل، وهو بالضبط نوع التحدي الذي استلزم الطرائق التفاضلية التي كان لايبنتس ونيوتن يطورانها.

أما عند أسرة برنولي، الشكل 6.16، فكانت «شأناً عائلياً»؛ إذ ارتبط جميع أبطال القصة بعضهم ببعض على نحو ما: كان هوينغنس معلّم لايبنتس، وكان لايبنتس موجّه ياكوب برنولي، أخي يوهان برنولي، الذي كان والد دانيال برنولي ومعلّم أويلر.

ومن ثم فهي قصة جديرة بأن نتعرف إليها.

9.2.1 الدراسات المبكرة

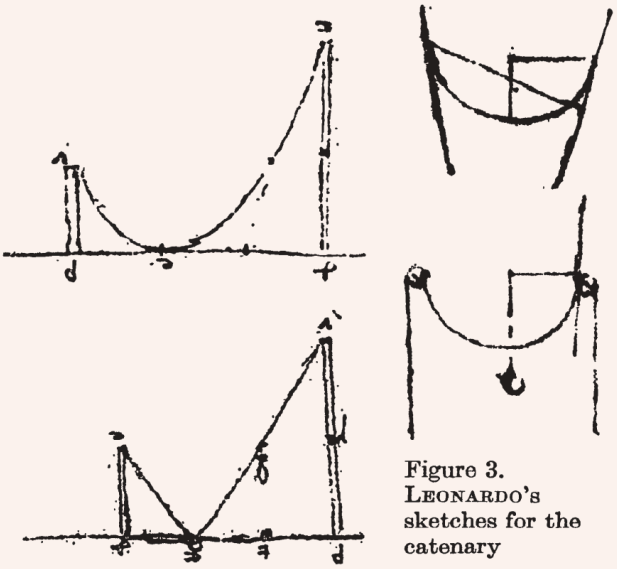
قبل أعمال برنولي وأويلر، كانت مسألة السلسلة المعلقة قد استرعت بالفعل انتباه كثيرين.

9.2.1.1 ليوناردو

يُعتقد أن المسألة ظهرت أول مرة حين رسم ليوناردو دا فينشي بضع سلاسل معلقة في دفاتره، الشكل 9.3. غير أنه كان على الأرجح يبحث عن مركز ثقلها لا عن شكلها. لكننا نميل مرة أخرى إلى نسبة اكتشافات كثيرة غير مستحقة إلى دا فينشي. وتناول غاليليو

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المسألة لاحقاً، مفترضاً أن الشكل قطع مكافئ. فنّد ستيفن وهوينغنس وغيرهما هذا الافتراض. ومع أنهم أثبتوا جميعاً أن المنحنى



شكل 9.3: رسوم ليوناردو للسلسلة المعلقة، نقلاً عن (Truesdell, 1960)

ليس قطعاً مكافئاً، فإنهم لم يستطيعوا تحديد الشكل الحقيقي للسلسلة المعلقة. وكان ذلك سينتظر تحدي ياكوب برنولي.

9.2.1.2 غاليليو

سجل الرياضي الفلمنكي إسحاق بيكمان (1588–1637) في دفتره عام 1614 حبلاً معلقاً، «ليتدلّ من جائزة حبل... مثبت عند طرفيه بحيث يتدلى برخاوة وحرية»، وأرفق به رسماً؛ كما طرح السؤال على ديكارت. وتوجد في أوراق ديكارت ملاحظة هامشية تشير إلى «Beeckman [Isaacus Middelburgensis]» وتسأل عما إذا كان حبل مثبت بمسامير يمكن أن يرسم جزءاً من قطع مخروطي. غير أنه لا توجد دلالة على أن ديكارت تابع الحل أو ناقشه أكثر مع بيكمان.[3]

وفي عام 1638 تناول Galilei, 1638 المسألة أيضاً، وقرر من دون تحليل رسمي:

> اثبت مسمارين في جدار على ارتفاع مناسب وعلى المستوى نفسه؛ واجعل المسافة بينهما ضعف عرض المستطيل المراد رسم نصف القطع المكافئ عليه. علّق فوق هذين المسمارين سلسلة خفيفة طولها بحيث يساوي عمق تدليها طول المنشور. ستتخذ هذه السلسلة شكل قطع مكافئ، فإذا عُلّم هذا الشكل بنقاط على الجدار نكون قد رسمنا قطعاً مكافئاً كاملاً يمكن تقسيمه إلى جزأين متساويين برسم خط رأسي مار بنقطة في منتصف المسافة بين المسمارين.
>
> Galilei, 1638 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

تجدر الإشارة إلى أن غاليليو، بعدما أثبت أن مسار المقذوف قطع مكافئ، اعتبر أن للسلسلة المعلقة الشكل نفسه.

[3] انظر Bukowski, 2008؛ وقارن Truesdell, 1960. وللمصادر الأولية، راجع *Journal* لبيكمان، بتحرير دي وارد، و*Oeuvres de Descartes*، بتحرير آدم–تانري، (Beeckman, 1939) و(Descartes, 1897a).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.2.1.3 ستيفن (1634)

ظهرت المسألة كذلك في أعمال ستيفن (1548–1620)، الذي نُشر كتابه *Les Oeuvres Mathématiques* بعد وفاته عام 1634، مع تعليقات للرياضي ألبرت جيرار. وفي مادة الاستاتيكا يعالج ستيفن مسائل تتعلق بالحبال؛ ويؤكد جيرار في ملاحظة هامشية:

> ... لأن *الحبال الأخرى الرخوة أو المشدودة خطوط مكافئة (كما أثبتُّ سابقاً نحو عام 1617)*، وهو ما *سأثبته بعد ذلك في نهاية النتيجة الآتية*.
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508

لا يوجد اليوم برهان أسبق من عام 1617. وبعد نتيجة ستيفن، أضاف جيرار (Girard, 1634) وعداً آخر، كثيراً ما تشير إليه الأدبيات الثانوية، بنشر الحجة الكاملة لاحقاً:

> وفاءً بوعدي السابق للنتيجة الأخيرة، ولأن وقتي لا يتسع الآن لإدراج نسخة من برهاني كاملاً هنا، فسأنشره في وقت آخر مع أعمالي الأخرى، إن شاء الله، حين تلقى دراسة العلوم قبولاً أفضل مما تلقاه الآن.
>
> (Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508 (*paraphrase of Girard's French*

لم يظهر مثل هذا البرهان، وكان جيرار نفسه قد توفي حين صدرت طبعة 1634.[54]

9.2.1.4 هوينغنس (نحو 1646)

كان قسطنطين، والد هوينغنس، من معارف جيرار، الذي علّق على عمل ستيفن، وتبادل المراسلات مع الراهب الفرنسي مارين ميرسين (1588–1648) (Bukowski, 2008). وكثيراً ما يوصف ميرسين بأنه مركز لتبادل الأفكار الرياضية والعلمية، إذ تراسل مع عدد من ألمع مفكري أوروبا. وكان قسطنطين هوينغنس، بوصفه أباً فخوراً، مسروراً بأن يخبر ميرسين عن ابنه كريستيان النابغة ذي السبعة عشر عاماً.

وفي أربعينيات القرن السابع عشر كتب هوينغنس الشاب، وكان آنذاك في سن المراهقة، إلى ميرسين (Huygens, 1888b, p. 28):

> سأرسل إليك في رسالة أخرى برهاناً على أن حبلاً أو سلسلة معلقة لا يصنعان قطعاً مكافئاً، وعلى مقدار الضغط الواجب تطبيقه على الحبل الرياضي، أو الحبل العديم الثقل، كي يصنعه؛ فقد وجدت مثل هذا البرهان منذ وقت قريب.
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1, p. 28

وقد كتب هوينغنس بالفعل إلى ميرسين:

> *Nulla ergo catena pendet secundum lineam parabolicam*. (لذلك لا تتدلى أية سلسلة وفق خط مكافئ.)
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1

لكنه لم يتمكن من تحديد الشكل الحقيقي للمنحنى.

ولما كانت السلسلة المعلقة نفسها ليست قطعاً مكافئاً، ذكر هوينغنس أنه اكتشف كيف يجعلها تتخذ شكل قطع مكافئ بمساعدة قوى خارجية. وقد أثار ادعاؤه اهتمام ميرسين، فرد عليه في 16 نوفمبر راغباً في رؤية البرهان

[4] للمناقشة، انظر (Bukowski, 2008) و(Truesdell, 1960).

[5] أما المقارنة المتكررة بهامش فيرما «الضيق جداً»، فتعود ملاحظة فيرما إلى نحو عام 1637، وطُبعت بعد وفاته في طبعة ديوفانتس لعام 1670، لا عام 1630.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

... على أن السلسلة، أو الحبل المشدود، المعلق في الوسط تحت وزنه الذاتي، لا يصنع قطعاً مكافئاً كما زعم غاليليو...

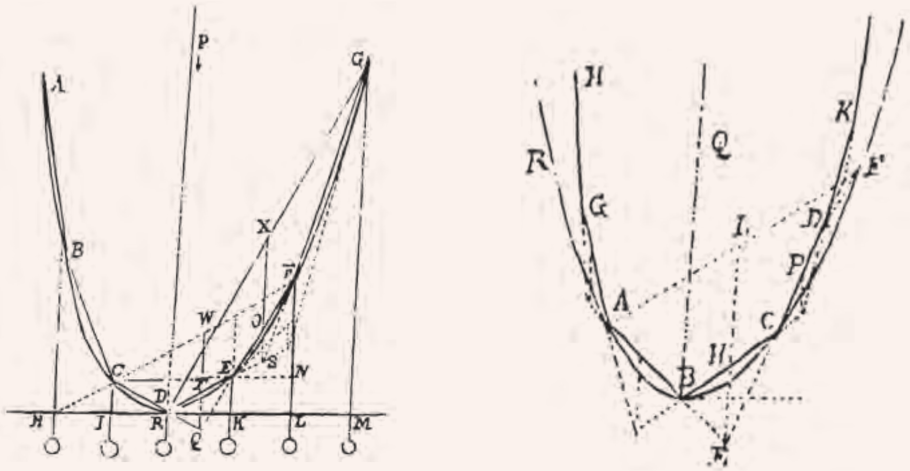
كما عبّر عن رغبته في رؤية برهان هوينغنس الإضافي، ومضى خطوة أبعد حين أخبره أنه يريد أن يعرف ما

ينبغي أن يكون عليه الضغط كي يصنع القطع المكافئ المذكور، وإذا أضفت، كما ينبغي، الضغط اللازم كي يصنع قطعاً زائداً وقطعاً ناقصاً، فستتفوق على نفسك.

وفي وقت لاحق من ذلك الشهر، رد هوينغنس على ميرسين ببرهان كامل لادعاءاته بشأن السلسلة المعلقة.

حل هوينغنس هندسي محض، الشكل 9.4a (Huygens, 1888b). ومن اللافت أنه «أجبر» السلسلة المعلقة على اتخاذ شكل قطع مكافئ بتعليق أوزان متساوية عند فواصل متساوية على طول الإسقاط الأفقي، لا عند فواصل متساوية على طول الخيط نفسه. ويمثل ذلك تمييزاً حاسماً: فالسلسلة المعلقة، أي سلسلة منتظمة تحت وزنها الذاتي، تختلف عن كبل جسر معلق مكافئ الشكل، أي تحت حمل منتظم موزع أفقياً. وقد اكتشف هوينغنس الشكلين وفهم أصليهما الفيزيائيين المختلفين. وربما كان هذا بالفعل أول اكتشاف أن كبلات حمل الجسر المعلق مكافئة الشكل!

يرد شرح مفصل لحل هوينغنس في (Bukowski, 2008).



(a) صياغة مسألة السلسلة المعلقة (القضية 8)

(b) إجبار سلسلة على التدلي في شكل قطع مكافئ (القضية 11)

شكل 9.4: السلسلة المعلقة؛ كريستيان هوينغنس (Huygens, 1888b)

توقف هوينغنس عن دراسة السلسلة المعلقة خمسة وأربعين عاماً، إلى أن جاء تحدي برنولي (§9.2.2.2).

9.2.2 التحديات

يقدم الجدول 9.2.2.1 ملخصاً زمنياً لهذه القصة، وهو، كسائر هذا القسم، قائم إلى حد بعيد على الدراسة الحديثة الممتازة لـAlassi, 2020.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.2.2.1 فاصل: المصطلحات

قبل تناول تحدي برنولي، نوضح المصطلحات الأساسية التي سنستعملها.

جدول 9.2: مصطلحات منحنيات عائلة "Funicularia"، نقلاً عن Alassi, 2020.

المصطلح	النموذج الفيزيائي	الافتراضات أو الحمل الرئيس	العلاقة النموذجية (إرشادية)
Funicularia	مصطلح جامع للأشكال التي يمكن أن يتخذها خيط أو غشاء مرن تحت أحمال معينة، ويشمل السلسلة المعلقة والمنحني المرن والشراع والقماش.	يختلف السلوك التأسيسي والتحميل بحسب الحالة. والهدف تعيين الانحناء $\kappa(s)$ من الاتزان.	المسألة الأم: اتزان القوى والعزوم $\Rightarrow$ قانون الانحناء؛ وترد الحالات الخاصة أدناه.
Catenaria (السلسلة المعلقة)	سلسلة أو كبل معلق غير قابل للاستطالة وكامل المرونة تحت وزنه الذاتي؛ ونهايتاه مثبتتان.	لا صلابة انحناء ولا قص؛ ووزن منتظم لكل وحدة طول w.	equivalently: $y = a\cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + C$; curvature: $H\,y'' = w\sqrt{1+(y')^2}$; $\kappa = \frac{w}{H}\,\frac{1}{1+(y')^2}$.
Elastica	قضيب نحيل غير قابل للاستطالة أو القص، وله صلابة انحناء B، أي «المرونة المطلقة».	القانون التأسيسي $M = B\,\kappa$؛ وتحدد قوى وعزوم النهايات الخارجية الشروط الحدية.	صيغة أويلر المستوية: $B\,\theta'' + P\sin(\theta - \theta_P) = 0$؛ وتأتي الحلول بواسطة التكاملات الإهليلجية، مثل المنحني المرن المستطيل.
Velaria	منحنى شراع مستطيل مثبت عند زواياه ومنتفخ بفعل الريح، أي غشاء مضغوط.	غشاء مرن تحت ضغط منتظم تقريباً؛ وخيوط غير قابلة للاستطالة في مثالية برنولي.	عضو في *Funicularia*؛ تحكم الانحناء محصلات الضغط في الغشاء، ويُنشأ بطريقة برنولي الهندسية.
Lintearia	منحنى قطعة قماش مستطيلة يسند ضلعان متقابلان منها أفقياً وتحمل بسائل محتوى فيها.	غشاء مرن؛ ويتغير الحمل العرضي مع العمق، أي هيدروستاتيكياً.	عضو في *Funicularia*؛ يختلف شكلها عن السلسلة المعلقة بسبب الحمل غير المنتظم.

9.2.2.2 تحدي ياكوب برنولي في *funicularia*؛ 1690

أصبحت مسألة السلسلة المعلقة، أي تعيين المنحنى الرياضي الذي تشكله سلسلة معلقة، حالة اختبار محورية لحساب التفاضل والتكامل الناشئ في تسعينيات القرن السابع عشر. وكان هذا التحدي سيبرهن تفوق الطرائق التحليلية على النهج الهندسي التقليدي.

بحلول أواخر القرن السابع عشر، كان حساب التفاضل والتكامل، بفضل نيوتن ولايبنتس، في بداياته، وكان حل مسألة السلسلة المعلقة على وشك أن يبرهن تفوقه على الطرائق «التقليدية» الهندسية.[6]

لذلك كان الوقت مهيأً في مايو 1690 كي يتحدى ياكوب برنولي المجتمع الرياضي لحل مسألة السلسلة المعلقة.[7] (Bernoulli, Jakob, 1690b).

يقدم الجدول 9.3 ملخصاً زمنياً لهذه القصة، قائماً إلى حد بعيد على الدراسة الحديثة الممتازة لـ Alassi, 2020.

[6] يمكن إثبات أن بؤرة قطع مكافئ يتدحرج على مستقيم ترسم سلسلة معلقة.

[7] كان طرح الأسئلة الرياضية في صورة مسابقات شائعاً بالفعل بين رياضيي عصر النهضة وبدايات العصر الحديث، ومنهم هوينغنس ولايبنتس. وكان المعتاد أن تُطرح مسألة للحل، ويدعو صاحب التحدي صراحةً بضعة رياضيين إلى حلها خلال مدة معينة (Alassi, 2020).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.3: التطور الزمني لحل السلسلة المعلقة، استناداً إلى (Alassi, 2020)

الموضوع	إلى	من	التاريخ
ملاحظة عارضة لسلسلة معلقة		ليوناردو	القرن الخامس عشر
يدعي أنها قطع مكافئ	—	غاليليو	1638
ليست قطعاً مكافئاً	هوينغنس، باردي		أواخر القرن السابع عشر
يطرح تحدياً على لايبنتس وتشيرنهاوس	لايبنتس	ياكوب برنولي	مايو 1690
يقبل التحدي؛ يدعي حلاً؛ ويحدد موعداً نهائياً	ياكوب برنولي	لايبنتس	يوليو 1690
يرسل حلاً مشفراً؛ ويطلب رؤية حل لايبنتس المشفر	لايبنتس	هوينغنس	9 أكتوبر 1690
يلاحظ أوجه التشابه؛ ويذكر فروقاً صغيرة	هوينغنس	لايبنتس	13 أكتوبر 1690
يطلب رؤية الحل المشفر للتحقق	لايبنتس	هوينغنس	18 نوفمبر 1690
يقدم حلاً مشروطاً	محرر AE	يوهان برنولي	ديسمبر 1690
الموعد النهائي (لا حل منشور للايبنتس)			31 ديسمبر 1690
يؤكد استلام حل يوهان برنولي	لايبنتس	محرر AE	6 يناير 1691
ملحق: يقبل حل هوينغنس لكنه يلاحظ منحنى آخر	هوينغنس	لايبنتس	27 يناير 1691
توصل يوهان إليه؛ وقد استعمل حسابي	هوينغنس	لايبنتس	20 فبراير 1691
يستطيع مهندسون آخرون حل هذه المسألة السهلة	لايبنتس	هوينغنس	23 فبراير 1691
يقر بخطأ في شفرته؛ ويطلب التحقق مع يوهان برنولي	لايبنتس	هوينغنس	26 مارس 1691
إضافة توسع حل أخيه	محرر AE	ياكوب برنولي	مارس 1691
يخبره بحل ياكوب	لايبنتس	محرر AE	21 مارس 1691
يبلغ عن ضغط AE لتقديم حله	هوينغنس	لايبنتس	20 أبريل 1691
حل في مظروف مختوم	لايبنتس	هوينغنس	5 مايو 1691
يقدم حله وحل هوينغنس	محرر AE	لايبنتس	مايو 1691
نشر الحلول الثلاثة	—	محرر AE	يونيو 1691
يرسل رأيه في التقديمات المختلفة	هوينغنس	لايبنتس	يوليو 1691
رد	لايبنتس	هوينغنس	سبتمبر 1691
يدافع عن نفسه ضد اتهامات الانتحال	هوينغنس	لايبنتس	21 سبتمبر 1691
مصالحة؛ وسيدرس الحساب الجديد للمتناهيات في الصغر بعمق	لايبنتس	هوينغنس	16 نوفمبر 1691

كانت الفكرة أن يقدم الرياضيون حلولاً تُنشر في وقت واحد، بما يضمن مقارنة عادلة بين الطرائق. وكان من المقرر أن تظهر الحلول في *Acta Eruditorum*، (Bernoulli, Jakob, 1690b)[8].

دعا لايبنتس وتشيرنهاوس على وجه التحديد إلى تجربة طرائقهما الجديدة في حل المسألة.[9] ووسع ياكوب برنولي بتحديه لعام 1690 هذه الممارسة، فطرح السؤال على المجتمع الرياضي كله، وطلب بوجه خاص من لايبنتس وتشيرنهاوس النظر في المسألة. ولم يحدد ياكوب في البداية موعداً نهائياً بعينه، بما يعكس صعوبة المسألة. ووصفها كما يأتي، الشكل 9.5:

[8] كانت *Acta Eruditorum*، وتعني باللاتينية «أعمال العلماء»، أول مجلة علمية في الأراضي الأوروبية الناطقة بالألمانية، ونُشرت من 1682 إلى 1782. ودعمها لايبنتس نفسه وأسهم فيها بثلاث عشرة مقالة. كما نشر فيها ياكوب برنولي وأويلر. وأدت دوراً رئيساً في «حرب الحساب»، حيث ادعى كل من نيوتن ولايبنتس فضل تطوير حساب التفاضل؛ فانحازت *Acta* إلى لايبنتس، في حين انحازت *Philosophical Transactions* إلى نيوتن.

[9] كان تشيرنهاوس رياضياً ألمانياً التقى به لايبنتس أيضاً في باريس. ومن اللافت أنه في عام 1696، كان يوهان برنولي، أخو ياكوب، هو الذي طرح مسألة منحنى أسرع هبوط على قراء *Acta Eruditorum*، وكان تشيرنهاوس واحداً من خمسة رياضيين فقط قدموا حلاً. ونشر برنولي هذه الإسهامات، ومنها حل تشيرنهاوس، إلى جانب حله في المجلة في مايو من العام التالي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والآن لتُطرح هذه المسألة: إيجاد المنحنى الذي يتخذه خيط رخو معلق بحرية من نقطتين ثابتتين. وأفترض أيضاً أن الخيط خط سهل الانثناء في جميع أجزائه.

Bernoulli, Jakob, 1690b "*Problema funicularium* (*challenge on the curve of a hanging thread*)"

9.2.2.3 رد لايبنتس وتعديل التحدي؛ أواخر 1690

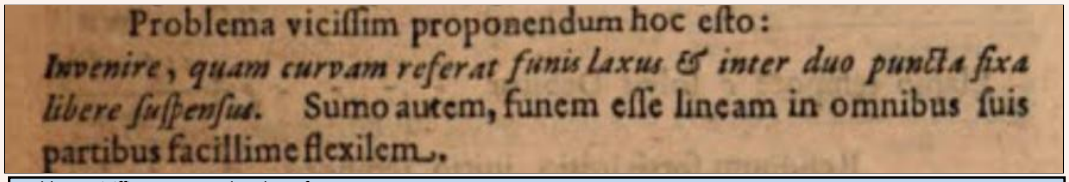
مع أن لايبنتس تدرب في القانون، فقد درس الرياضيات مع هوينغنس في باريس بين 1672 و1676. ولذلك قبل التحدي ورد في أواخر عام 1690، محولاً عملياً تحدي ياكوب المفتوح إلى مسابقة أكثر تنظيماً:

ويُفترض أيضاً أن يبقى الخيط على الطول نفسه، كالسلسلة، بدلاً من أن يتمدد أو ينكمش كالسلك. هذه المسألة، التي طرحها غاليليو واشتهرت منذ عهده، لم تستجب للحل بعد... ولذلك يحق لي أن أُعفى من العبء المفروض، ولا سيما أنني منشغل جداً بأمور أخرى. لكن إنسانية ذلك الرجل المستنير من شأنها ألا تجعلني أرغب في التخلف عن أول استدعاء له. ولذلك هاجمت [المسألة]، التي لم أحاولها من قبل، وفتحت بمفتاحي [أي حساب التفاضل] مداخلها السرية بنجاح. غير أن هذه المسألة أعقد قليلاً من مسألتي السابقة، وتظهر استعمالاً فريداً لطريقتنا؛ ومن ثم رأيت أنه يجدر، قبل نشر حلي، أن أمنح الآخرين وقتاً أيضاً لتمرين مهارتهم. وبهذا، كما بحجر المحك الليدي، سنعرف أفضل الطرائق، وهو أمر ذو شأن كبير في تحسين العلم؛ ولا سيما أن المسألة هنا ليست حساباً مطولاً، بل حيلة بارعة. وقبل الجميع ينبغي أن يُسأل النبيل د. ت. [الكونت تشيرنهاوس]، الذي يبشر بأمور رائعة من هذا النوع، عما إذا كان يريد اختبار قوة طريقته هنا أيضاً. لكن إن لم يعلن أحد قبل نهاية العام أنه وجد حلاً، فسأقدم حلي، إن شاء الله.

Leibniz, 1690 "*Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio*"

أجرى لايبنتس في جوهر الأمر تعديلين مهمين:

- بسط مسألة *Funicularia* بافتراض سلسلة غير قابلة للاستطالة، هي *Catenaria*
- حدد موعداً نهائياً، نهاية 1690، ووعد بكشف حله إن لم يظهر حل آخر
- تحدى تشيرنهاوس على وجه التحديد كي يبرهن طرائقه الرياضية الجديدة


Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

لتكن هذه هي المسألة المقترحة بدورها:
إيجاد المنحنى الذي يمثله حبلٌ مرتخٍ معلَّق بحرية بين نقطتين ثابتتين. وأفترض، علاوةً على ذلك، أن الحبل عبارة عن خطٍّ بالغ المرونة في جميع أجزائه.

شكل 9.5: تحدي ياكوب برنولي في (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219) (*funicularia*)

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومنذ ذلك الحين ركز معظم المشاركين على *Catenaria*، أي السلسلة غير القابلة للاستطالة، بدلاً من مسألة ياكوب الأعم *Funic-ularia*، أي الحبل القابل للاستطالة.

9.2.3 الحلول الرئيسة الثلاثة

عكس استعمال الشفرات، أي الحلول المعماة، في المراسلات الآتية كلاً من الطبيعة التنافسية للاكتشاف الرياضي والرغبة في إثبات الأسبقية مع إتاحة الوقت للزملاء كي يعملوا على المسائل.

9.2.3.1 يوهان برنولي (قُدم في ديسمبر 1690 ونُشر في يونيو 1691)

وفي غضون ذلك، حل Bernoulli, Johann, 1691c مسألة السلسلة المعلقة أيضاً، وأرسل حله مباشرة إلى محرر AE في ديسمبر 1690، واشترط لنشره أن يظهر في الوقت نفسه مع حل لايبنتس. وكان يوهان قد قدم حله قبيل انقضاء الموعد النهائي الذي حدده لايبنتس، لكن لايبنتس لم ينشر تحليله، بل واصل مراسلاته مع هوينغنس.

استمرت المراسلات بين لايبنتس وهوينغنس خلال شتاء وربيع 1691. وفي تذييل رسالة أرسلها إلى هوينغنس في 27 يناير 1691، من دون أن يرفق شفرة لتحليله، قبل لايبنتس أن منحنى هوينغنس المساعد يمكن استعماله أيضاً في الإنشاء الهندسي للسلسلة المعلقة. واقترح كذلك منحنى مساعداً آخر ثبت نفعه في تمثيلها. ولا بد أن تعدد خيارات المنحنى المساعد أقنع هوينغنس بأن المسألة ليست عسيرة الحل. فكتب إلى لايبنتس في 23 فبراير 1691:

> أظن أن عدداً كبيراً من علماء الهندسة الآخرين سيحل هذه المسألة، لأنها، والحق يقال، لا تبدو شديدة الصعوبة، إلا إذا كنت تطلب شيئاً أكثر مما وجدته أنا.
>
> Bernoulli, Johann, 1691b *"Letter to Leibniz"*

وفي رسالته المؤرخة في 2 مارس 1691، أخبر لايبنتس هوينغنس أن يوهان برنولي حل المسألة بنجاح، واعتز بفكرة أن حسابه ربما أعان يوهان. وإذ أقر بأن نبرته في تسمية تشيرنهاوس لم تكن ملحة فحسب بل مستفزة عمداً، عبّر كذلك عن خيبة أمله لأن تشيرنهاوس لم يقبل التحدي:

> لم يلتقط السيد تشيرنهاوس الطعم، مع أنني تعمدت الكلام بطريقة تستدرجه وتمنحه فرصة لاستعمال طريقته، بعدما وعدنا بأنها ستنجز الكثير، بل ولامني بصورة غير مباشرة لقولي إن التحليل العادي لن يكفي في هذه الحالات.
>
> Leibniz, 1691d *"Letter to Huygens"*

في 26 مارس 1691، أرسل هوينغنس، بعدما اكتشف زلة قلم في شفرته الأولى، شفرة ثانية إلى لايبنتس كانت نسخة مصححة وموسعة منها. واقترح أن يبلغ لايبنتس هذه الشفرة الثانية إلى يوهان، ويطلب شفرته في المقابل. كما عبّر هوينغنس عن دهشته من صمت تشيرنهاوس مع أن لايبنتس سماه بوجه خاص. ونسي هوينغنس أن الموعد النهائي كان قد انقضى، فأمل أن يقدم تشيرنهاوس شيئاً في الوقت المتبقي. وعبّر في هذه الرسالة أيضاً عن رأيه في ضرورة تبادل الشفرات لضمان الأسبقية ومنع النزاعات.

9.2.3.2 هوينغنس (قُدم في أكتوبر 1690 ونُشر في مايو 1691)

الحل المشفر الأول (أكتوبر 1690) جاء أول رد على صيغة لايبنتس المعدلة لتحدي ياكوب من معلّمه السابق كريستيان هوينغنس في 9 أكتوبر 1690. ومثّل هذا التبادل بداية مراسلات مطولة بين العملاقين حول السلسلة المعلقة. وأرفق هوينغنس في رسالته حله مشفراً، مشيراً إلى أنه سبق أن تراسل في شبابه مع الأب ميرسين (§9.2.1.4) بشأن المسألة، وأثبت أن منحنى السلسلة المعلقة ليس قطعاً مكافئاً، خلافاً لافتراض غاليليو. وتوقع هوينغنس بدوره أن يبادله لايبنتس بإرسال حله مشفراً، ولاحظ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أنهما يستطيعان معاً تقصير الموعد النهائي الذي اقترحه لايبنتس.[10] وكانت الشفرة المرفقة تتضمن معادلة المنحنى المولد لإنشائه الهندسي للسلسلة المعلقة:

$$xxyy \propto a^4 - a^2y^2 \tag{9.4}$$

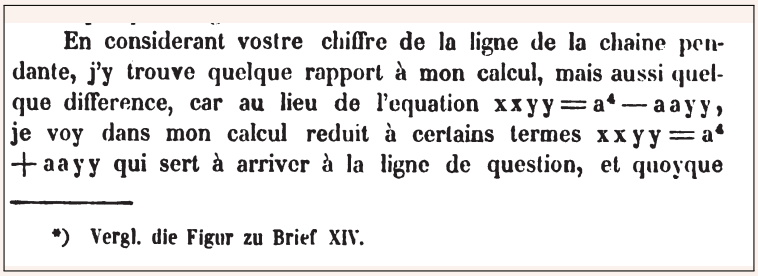
التبادل الرياضي والتنقيحات (أكتوبر 1690–مارس 1691) في 13 أكتوبر 1690، رد لايبنتس من دون إرفاق شفرة،[11] قائلاً إنه وجد بعض التشابه مع حسابه وفارقاً واحداً، الشكل 9.6:

> En considerant vostre chiffre de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, je voy dans mon ,$xxyy = a^4 - aayy$ mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation qui sert à arriver à la ligne de question, ,$xxyy = a^4 + aayy$ calcul reduit à certain termes et quoyque cette ligne soit du nombre des transcendantes, je ne laisse pas (supposita ejus constructione) d'en pouvoir donner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation et la dimension de l'espace compris de la courbe et .del'axe; et le calcul m'offre tout cela comme de soy meme

---

عند النظر في شفرتك للسلسلة المعلقة، أجد بعض الاتفاق مع حسابي، لكنني أجد فارقاً أيضاً. فبدلاً من المعادلة $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$، أصل، عندما يُرد حسابي إلى حدود معينة، إلى $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$، التي توصل إلى المنحنى المطلوب. ومع أن هذا المنحنى من المتساميات، فإنني أستطيع، بافتراض إنشائه، أن أعطي لا المماسات فحسب، بل كذلك قياس المنحنى نفسه، ومساحة سطح الجسم الناتج عن دورانه، وحجم الحيز المحصور بين المنحنى والمحور؛ ويقدم لي الحساب كل ذلك من تلقاء نفسه، إن صح التعبير.

"Leibniz, 1901 *"Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690*



En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation xxyy = a⁴ — aayy, je voy dans mon calcul reduit à certains termes xxyy = a⁴ + aayy qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

شكل 9.6: رد لايبنتس على هوينغنس، أكتوبر 1690 (Leibniz, 1923)

يقع الفرق الذي يشير إليه لايبنتس في معادلة المنحنى المساعد؛ إذ يدعي أن حسابه يعطي:

$$xxyy \propto a^4 + a^2y^2 \tag{9.5}$$

ولعدم إرسال برهان، راجع هوينغنس حسابه فلم يجد فيه خطأ، وبدأ يشك في دقة حساب لايبنتس (Alassi, 2020 PDF). وفي 18 نوفمبر 1690 زعم هوينغنس أن الفارق الوحيد بين نتيجتيهما إشارة، فلا بد أن سببه اختلاف طريقتيهما.[12] وأصر مرة أخرى على أن يرسل إليه لايبنتس حله كاملاً (Leibniz, 1901, Vol. 9). غير أن لايبنتس ظل صامتاً حتى 2 مارس 1691، حين أكد لهوينغنس أن يوهان برنولي وجد حله أيضاً، وأن حساب المتناهيات في الصغر لا بد أنه أعانه (Leibniz, 1901, Vol. 9).

[10] أساء هوينغنس في البداية فهم الجدول الزمني، فظن أن لايبنتس حدد مدة أطول من الموعد النهائي في نهاية العام.
[11] تراسل هوينغنس ولايبنتس بالفرنسية، وهي لغتهما العلمية المشتركة منذ إقامة لايبنتس في باريس.
[12] في هذه المراسلات صاغ هوينغنس اسم *catenaria* (Leibniz, 1901, Vol. 9).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تصحيح الشفرة والتقديم النهائي (مارس–مايو 1691) في 26 مارس 1691، أرسل هوينغنس، بعدما اكتشف زلة قلم في شفرته الأولى، نسخة مصححة وموسعة إلى لايبنتس. واقترح أن يبلغ لايبنتس هذه الشفرة الثانية إلى يوهان، ويطلب شفرته في المقابل. كما عبّر عن دهشته من صمت تشيرنهاوس رغم أن لايبنتس سماه بوجه خاص. ونسي أن الموعد النهائي كان قد انقضى، فأمل أن يقدم تشيرنهاوس شيئاً في الوقت المتبقي. وعبّر هوينغنس في الرسالة أيضاً عن رأيه في ضرورة تبادل الشفرات لضمان الأسبقية ومنع النزاعات.

كتب هوينغنس رسالتين أخريين إلى لايبنتس مصراً على رؤية حله، لكن لايبنتس لم يوافق (Alassi, 2020). وأخيراً، في 5 مايو 1691، أرسل هوينغنس حله النهائي إلى لايبنتس في مظروف مختوم، مع رسالة تطلب إحالة الحل المرفق إلى AE. وكان ذلك ختام قرابة ثمانية أشهر من المراسلات وتنقيح نهجه في مسألة السلسلة المعلقة.

النشر (يونيو 1691) نُشر حل هوينغنس في يونيو 1691 إلى جانب حلي يوهان برنولي ولايبنتس في *Acta Eruditorum*، فمثّل ذروة انخراطه الطويل في تحدي السلسلة المعلقة من أكتوبر 1690 حتى مايو 1691.

9.2.3.3 لايبنتس (قُدم في مايو 1691 ونُشر في يونيو 1691)

في الوقت الذي حافظ فيه لايبنتس على مراسلات واسعة مع هوينغنس طوال شتاء وربيع 1691، كان يطور في الوقت نفسه نهجه المنهجي الخاص لمسألة السلسلة المعلقة. ومثّل حله، الذي نُشر أخيراً بعنوان “De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos” (Leibniz, 1691a)، أشمل الحلول الثلاثة وأعمقها نظرياً.

النهج التحليلي باستعمال حساب التفاضل جسدت طريقة لايبنتس قوة حساب التفاضل الذي طوره حديثاً. وعلى خلاف نهج هوينغنس الهندسي، تناول لايبنتس السلسلة المعلقة بوصفها مسألة تحليلية محضة، وأقام معادلات تفاضلية على القوى الفيزيائية المؤثرة في كل عنصر من السلسلة. وبدأ نهجه من المبدأ الأساسي القائل إن السلسلة يجب أن تكون عند كل نقطة في اتزان تحت قوتي الشد والثقل.

وبالنظر في عنصر متناهي الصغر من السلسلة وتطبيق اتزان القوى، اشتق لايبنتس المعادلة التفاضلية المميزة للسلسلة المعلقة. وأتاح له استعماله المنهجي للتفاضلات التعبير عن العلاقة بين إحداثيات المنحنى مباشرة بدلالة المعلمات الفيزيائية للمسألة.

الصلة باللوغاريتمات وتربيع القطع الزائد لعل الأهم أن لايبنتس أدرك أن مسألة السلسلة المعلقة ترتبط جوهرياً بتربيع القطع الزائد، أي بالدوال اللوغاريتمية في الأساس. وكما كتب إلى هوينغنس في 24 يوليو 1691، وجد أن السلسلة المعلقة وغيرها من المسائل المتسامية «لا تتطلب لإنشائها سوى تربيع القطع الزائد»، وأنه «رد كل شيء إلى اللوغاريتمات».

كانت هذه البصيرة ثورية. فقد بيّن لايبنتس إمكان التعبير عن السلسلة المعلقة بما نعرفه اليوم بالدوال الزائدية، وأقام صلة مباشرة بين المنحنى الهندسي والتعابير التحليلية التي تتضمن الأسّيات واللوغاريتمات. ولم يوفر هذا الرد إلى اللوغاريتمات الوصف الرياضي الأكثر أناقة فحسب، بل الطريقة الأكثر عملية للحساب العددي أيضاً.

معالجة رياضية شاملة تجاوز حل لايبنتس مجرد إيجاد معادلة المنحنى. فقد برهن بحثه كيف يمكن استعمال السلسلة المعلقة لإيجاد أي عدد من المتوسطات المتناسبة “adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos”، أي واللوغاريتمات، مبيناً تطبيقات عملية للمنحنى في حل مسائل رياضية أخرى. وقدم طرائق من أجل:

- إيجاد مماسات السلسلة المعلقة عند أية نقطة
- حساب طول قوس أي جزء من المنحنى
- تعيين المساحة تحت السلسلة المعلقة
- حساب مساحة سطح جسم الدوران المتولد من تدوير السلسلة المعلقة وحجمه

منهجية منظمة تميز نهج لايبنتس بعموميته المنهجية. ففي حين وجد هوينغنس ويوهان برنولي حلين خاصين لمسألة السلسلة المعلقة، طور لايبنتس إطاراً تحليلياً شاملاً قابلاً للتطبيق على فئة كاملة من المسائل المشابهة. وقدمت طريقته ما سماه «أفضل الإنشاءات الممكنة للمتساميات»، ورسخت حساب التفاضل أداة مفضلة لحل مثل هذه المسائل.

قدم لايبنتس حله إلى *Acta Eruditorum* في مايو 1691، وظهر في عدد يونيو إلى جانب حلي هوينغنس ويوهان برنولي، مكتملاً بذلك ثالوث الحلول الذي جعل السلسلة المعلقة إنجازاً معلماً في تطبيق حساب التفاضل والتكامل على المسائل الفيزيائية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.2.3.4 النشر والحسم النهائي؛ يونيو 1691

في 21 مارس 1691، أخبر منكه لايبنتس بمقالة ياكوب برنولي وملحقها *Additamentum ad Problema Funicularium*. ولأن نشر مقالة ياكوب كان سيخالف طلب يوهان، قرروا نشرها في العدد نفسه الذي سيتضمن حلول مسألة السلسلة المعلقة. وفي 20 أبريل 1691، أبلغ لايبنتس هوينغنس أن محرري AE يضغطون عليه لتقديم جوابه. وشرح ترتيب يوهان لنشر حله، وأكد أنه لم يره بنفسه. وامتنع كذلك عن طلب شفرة من يوهان لأنه أرسل جوابه مباشرة إلى محرري AE، ولأن طلب الشفرة ربما أثار الشبهات. وذكّر بأن الموعد النهائي للمسابقة انقضى منذ زمن، وأخبر هوينغنس بأنه سيقدم تحليله للنشر قريباً، وحثه على فعل الشيء نفسه. وأكد له أن المحررين يعلمون أن هوينغنس حل المسألة من قبل، وأنهم سيعاملون حله بسرية.

في 5 مايو 1691، أرسل هوينغنس حله إلى لايبنتس في مظروف مختوم، مع رسالة تطلب إحالة الحل المرفق إلى AE. وقدم لايبنتس معه حله الخاص للنشر في مايو 1691. وفي يونيو نشرت AE جميع الحلول الرئيسة، الشكل 9.7، مع مقدمة وصفت ترتيب استلام المحرر للأجوبة وتواريخها. ووضع المحرر مقالة ياكوب برنولي مباشرة بعد الحلول الثلاثة.



(b) لايبنتس (a) يوهان برنولي

(d) ياكوب برنولي (c) هوينغنس

شكل 9.7: حلول يونيو 1691 في *Acta Eruditorum* لتحدي ياكوب برنولي بشأن السلسلة المعلقة

9.2.3.5 التحليل بعد النشر والإرث

بعد نشر جميع الحلول، عرض لايبنتس على هوينغنس رأيه في أوجه التشابه والاختلاف بين الأوصاف الرياضية. وفي رسالة إلى هوينغنس مؤرخة في 24 يوليو 1691 (Leibniz, 1691c)، أشار إلى استعمال يوهان برنولي طريقته الجديدة ورد المسألة إلى تربيع القطع الزائد من خلال تكافئهما الرياضي:

> C]omme les Equations communes pures se resolvent par la seule extraction des racines ; de] même les Equations pures Transcendentes sont reduites aux sommes ou quadratures. Et comme on n'a pas encor perfectionné l'Analyse des Equations ; de même n'ay je pas encor tellement perfectionnée ma methode que je puisse tousjours reduire tous ces problemes Transcendans

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> aux seules quadratures. Cependant j’en ay ouvert le chemin, et même je suis assez avancé. Aussi les deux problemes, que vous m’avés proposés, Monsieur, qui donnent d’abord une Equation Transcendente Affectée, se peuvent tous deux reduire aux quadratures ; at même je trouve qu’ils ne supposent que la quadrature de l’Hyperbole pour estre construits. Et quand je puis reduire ces problemes aux quadratures, je crois alors d’avoir surmonté la plus grande difficulté. .Cependant pour perfectionner cette Methode il faut aussi achever la doctrine des quadratures

---

> مثلما تُحل المعادلات العادية الخالصة باستخراج الجذور وحده، تُرد المعادلات المتسامية الخالصة إلى المجاميع أو التربيعات. وكما أن تحليل المعادلات لم يكتمل بعد، لم أُكمل طريقتي إلى حد يجعلني قادراً دائماً على رد جميع هذه المسائل المتسامية إلى التربيعات وحدها. غير أنني فتحت الطريق، بل قطعت فيه شوطاً بعيداً. والمسألتان اللتان اقترحتهما عليّ، يا سيدي، واللتان تعطيان مباشرة معادلة متسامية متأثرة، يمكن ردهما كلتاهما إلى التربيعات؛ بل أجد أنهما لا تتطلبان لإنشائهما سوى تربيع القطع الزائد. وعندما أستطيع رد هذه المسائل إلى التربيعات، أعتقد أنني تجاوزت أكبر صعوبة. لكن إكمال هذه الطريقة يتطلب أيضاً إتمام علم التربيعات.
>
> ”Leibniz, 1691c *“Letter to Christiaan Huygens*

دفعت دقة حساب لايبنتس به إلى الشك في أن الآخرين قد ينتحلون طرائقه. لكن عندما ثارت هذه الشبهات بشأن حلول السلسلة المعلقة، دافع عن نفسه في رسالة بتاريخ 21 سبتمبر 1691، مدعياً أن محرري *Acta Eruditorum* تعاملوا بسرية تامة مع إسهام يوهان برنولي. وأشار لايبنتس أيضاً إلى أخطاء مختلفة ارتكبها هوينغنس؛ فقد نشر في عدد يونيو 1688 من المجلة مقالة بعنوان “De Angulo contactus et osculi” رد فيها السلسلة المعلقة إلى مجموع قواطع القوس، في حين كان ينبغي أن يربطها بتربيع القطع الزائد. وكان رد هوينغنس في رسالة بتاريخ 16 نوفمبر 1691 مصالحة أنهت النزاع. وذكر رغبته في دراسة الحساب الجديد للمتناهيات في الصغر بعمق، كي يفهم أخيراً العلاقة بين السلسلة المعلقة وتربيع القطع الزائد.

وعلى الرغم من ذلك، وحتى بعد حسم تحدي ياكوب برنولي، واصل هوينغنس الدفاع عن كفاية طرائقه الهندسية مقارنة بنهج لايبنتس التحليلي. ويعكس ذلك انتقالاً جيلياً في المنهجية الرياضية؛ فبينما أخذ هوينغنس، ممثل التراث الهندسي الأقدم، يقدّر تدريجياً قوة الحساب اللايبنتسي، ظل أكثر ارتياحاً إلى تقنياته الراسخة. ومع أنه تعلم في النهاية تطبيق الحساب الجديد في حالات معينة، لم يتخل قط تماماً عن تفضيله للطرائق الهندسية الكلاسيكية. مثّل حل تحدي السلسلة المعلقة لحظة فاصلة في تاريخ الرياضيات. فقد كان حل لايبنتس برهاناً مقنعاً لمعاصريه، وبخاصة هوينغنس، على قوة حساب المتناهيات في الصغر وفائدته. واستطاع بهذا الحل تقديم طريقة عامة لإيجاد الوصف الرياضي للمنحنيات الميكانيكية، وهي طريقة وفرت نهجاً منهجياً لمعالجة مسائل اللانهاية الرياضية (Palomo, 2017)، ورسخت حساب التفاضل أداة تحليلية مهيمنة في القرون التالية.

تأخر رد هوينغنس (Huygens, 1888a) حتى 1 سبتمبر 1691، حين أقر بأنه لم يربط السلسلة المعلقة بتربيع القطع الزائد. ويبدو أنه اشتبه في أن لايبنتس ويوهان برنولي ربما تبادلا حليهما قبل النشر في *Acta Eruditorum*. وكان ذلك قد يفسر التشابه الهائل بين إجرائيهما، كما عبّر للايبنتس بنبرة غير ودية. ومع أن يوهان برنولي أدرك إمكان استعمال تربيع القطع الزائد لرسم السلسلة المعلقة، فقد ذهب لايبنتس أبعد، فرد كل شيء إلى اللوغاريتمات، وحدد بذلك اتجاه تطور الرياضيات اللاحق:

> بل أضفت إلى حلي مركز ثقل هذا الشكل الأخير، أي مساحته. يعطي السيد هوينغنس إنشاء المنحنى بافتراض التربيع الآتي: $xxyy = a^4 - aayy$، في حين ربط السيد يوهان برنولي وأنا السلسلة المعلقة بتربيع القطع الزائد؛ ويستعمل هو استعمالاً بالغ الصواب تربيع منحنى مكافئ، أما أنا فرددت كل شيء إلى اللوغاريتمات. وبهذه الطريقة حددت نوع التعبير وأفضل الإنشاءات الممكنة للمتساميات. والواقع أن كل ما يلزم معرفته نسبة ثابتة وحيدة، تمكنك من اكتشاف عدد لا نهائي من النقاط باستعمال الهندسة العادية وحدها، ومن دون حاجة أخرى إلى التربيع أو تقويم المنحنيات.
>
> ”Huygens, 1888a *“Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.2.4 خاتمة

9.2.4.1 توحيد منسي

كشفت الدراسات الحديثة أن ياكوب برنولي وحّد بنجاح مسألتي السلسلة المعلقة والمنحني المرن باشتقاقه معادلة تفاضلية عامة، محققاً الهدف الذي وضعه عند طرح تحديه الأصلي عام 1690 (Alassi, 2020). وظل هذا الإنجاز اللافت مدفوناً في دفاتره الخاصة، ولم يدركه معاصروه ولا المؤرخون اللاحقون. ومع أن نيقولاوس (الأول) برنولي، الشكل 6.16، أدرج هذا العمل في كتاب ياكوب *Varia Posthuma* عام 1744، (Bernoulli, 1744) فقد أُغفلت أهميته.

واتضحت الطبيعة المنسية لإسهام ياكوب عندما أحيا رياضي مجهول يستعمل الأحرف الأولى LBC تحدي السلسلة المعلقة في عدد أغسطس 1724 من *Acta Eruditorum* (Anonymous, 1724). ودعت هذه الصياغة الجديدة إلى تحليل سلاسل «متوسطة المرونة» و«حقيقية»، بدلاً من السلاسل المثالية كاملة المرونة في المسألة الأصلية. وكان تحدي LBC في جوهره إعادة صياغة لمسألة ياكوب الأعم في *funicularia*، بما يبين كيف أزاحت قراءة لايبنتس الأضيق رؤية ياكوب الأصلية إزاحة كاملة من الذاكرة الرياضية.

ورد ليونارد أويلر على هذا التحدي عام 1728 بحل يستطيع اشتقاق انحناء كل من السلسلة المعلقة والمنحني المرن من نهج موحد. ولذلك نسب مؤرخو الرياضيات تقليدياً إلى أويلر، لا ياكوب برنولي، فضل أول توحيد للمسألتين، وهي نسبة تغفل عمل ياكوب الرائد بأكثر من ثلاثة عقود (Alassi, 2020). ويمثل هذا الإغفال التاريخي واحدة من أبرز حالات ضياع اكتشاف رياضي من الذاكرة العلمية، ثم إعادة اكتشافه مستقلاً بعد سنوات.

9.2.4.2 الإرث الرياضي

مع أن لايبنتس وهوينغنس ويوهان برنولي حلوا تحدي السلسلة المعلقة لعامي 1690–1691 حلاً مظفراً، استمرت أصداؤه الفكرية بعد زمن طويل من ظهور الحلول في *Acta Eruditorum*. وفي هدوء مكتبه نحو عام 1692، شرع ياكوب برنولي، صاحب التحدي الأصلي الذي عجز عن حل مسألته، في تأمل رياضي أعمق (Bernoulli, Jakob, 1677–1705). وأخذ، وهو يعمل في دفتره الخاص *Meditationes*، يرى روابط تتجاوز السلسلة المعلقة الواحدة. فلم تكن *catenaria* منفردة، بل انتمت إلى عائلة شملت *velaria*، أي منحنيات الأشرعة، و*lintearia*، أي منحنيات القماش، و*elastica*، أي المنحنيات المرنة. وأدرك ياكوب أنها تجليات لمبدأ رياضي موحد، فطور معادلة تفاضلية عامة تحكمها جميعاً. وقد استبقت هذه البصيرة الخاصة، المختبئة في دفاتره قروناً، بأكثر من ثلاثين عاماً ما سيصوغه ليونارد أويلر لاحقاً ركناً من أركان حساب التغايرات. وهكذا تطور تحدي السلسلة المعلقة، الذي بدأ مسابقة بين خصوم رياضيين، إلى أمر أعظم بكثير: نافذة على الوحدة الكامنة في منحنيات الطبيعة، تكشف كيف تستطيع سلسلة معلقة بسيطة إضاءة البنى الرياضية التي تحكم كل شيء، من الجوائز المرنة إلى الأشرعة المنتفخة.

9.2.4.3 مفارقة ياكوب

يقدم تحدي السلسلة المعلقة واحدة من أشد مفارقات الرياضيات إيلاماً: فقد أصبح ياكوب برنولي، الأستاذ المرموق الذي طرح بثقة تحدي إيجاد منحنى سلسلة معلقة، الرياضي الكبير الوحيد في عصره الذي عجز عن حل مسألته. ولم يقدم ياكوب حلاً لمسألة السلسلة المعلقة التي طرحها، وهي نقطة كرر أخوه الأصغر يوهان ذكرها في خصومة مريرة أحياناً استمرت بعد وفاة ياكوب عام 1705 (Deakin, 2007; Alassi, 2020). وبينما نشر لايبنتس وهوينغنس، والأكثر إحراجاً أخوه الأصغر يوهان، حلولاً أنيقة في عدد يونيو 1691 من *Acta Eruditorum*، ظل ياكوب صامتاً على نحو لافت. وانتهز يوهان، الذي كان تلميذ ياكوب في الرياضيات، هذا الإخفاق بفرح غير مستتر، متباهياً:

> لم تنجح جهود أخي؛ أما أنا فكنت أوفر حظاً، إذ وجدت المقدرة، وأقول ذلك من دون تفاخر، فلماذا أخفي الحقيقة؟، على حلها حلاً كاملاً.
>
> nodate Jakob Bernoulli

تحول التحدي الذي صممه ياكوب لإظهار قوة الحساب الجديد إلى برهان علني على أن التلميذ تجاوز أستاذه. ولعل أكثر ما يكشف الدلالة أن ياكوب لم يطور بصائره العميقة في عائلة المنحنيات الموحدة إلا لاحقاً، في خصوصية دفتره (Bernoulli, *Meditationes*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(Jakob, 1677–1705) وبعيداً عن التدقيق العلني (Alassi, 2020)، كأن آلهة الرياضيات ادخرت أعمق أسرارها للرجل نفسه الذي أخفق في اختبارها الأول.

للتفاصيل التحليلية، انظر §30.3.3

9.3 تحدي المنحني المرن (1690–1744)

9.3.1 تحدي ياكوب برنولي (1690)

تمهيد: حوار مع حرفي

قبل عرض تحدي ياكوب برنولي الشهير بشأن المنحني المرن، يجدر التوقف عند نص قصير لكنه كاشف يسمى أحياناً «حواره مع حرفي» (Bernoulli, Jakob, 1691).[13] وفي فقرات موجزة يصوغ برنولي حواراً خيالياً مع ميكانيكي خبير يصف من واقع الورشة كيف تنثني الشرائح الخشبية الرقيقة، ودور الملازم، وحدود الصلابة، والارتداد الحتمي عند رفع الحمل. ويصغي برنولي، لكنه يعترض برفق على هذه الملاحظات التجريبية، مقترحاً أن «الشكل المنحني» يجب أن يخضع لقانون رياضي دقيق قابل للاشتقاق من المبادئ الأولى، لا من تجارب لا تنتهي. ويختتم بإعلان أن برهاناً كاملاً سيأتي، داعياً عملياً عالم العلماء إلى حل مسألة المنحني المرن التغايرية التي ستظهر قريباً في *Acta Eruditorum* (1691–1694).

كان هذا الأسلوب الأدبي مقصوداً. فاختيار برنولي صيغة الحوار يحاكي كتاب غاليليو الشهير *Dialogo*، الذي أصبحت مناقشاته الحية بين سالفياتي وساغريدو وسمبليتشيو نموذجاً لعرض الفلسفة الطبيعية على العلماء وعامة القراء معاً، §6.6.2 و§6.6.2. واستعمل برنولي، مثل غاليليو، الحوار لتجسيد لقاء الدراية التجريبية بالتجريد الرياضي.

لا يحتوي النص معادلات ولا يقدم حساب التغايرات؛ وإنما تكمن قيمته في تصوير الانتقال من حدس الحرفي إلى النظرية الدقيقة. وهو يخدم القارئ الحديث تمهيداً ثقافياً أكثر منه مصدراً تقنياً؛ إذ يبرز انخراط برنولي في الميكانيكا العملية، ويقر بالتراث الغاليلي في الخطاب العلمي الميسر، ويشير إلى الافتراضات المبسطة، قضبان نحيلة عديمة الوزن وغير قابلة للاستطالة، التي سيطرح تحتها تحديه الشهير.

الخلفية

حتى عام 1690، ركزت بحوث غاليليو وديكارت وماريوت وغيرهم من فلاسفة الطبيعة أساساً على مسائل المقاومة، كأحمال الكسر وتوزيعات الإجهاد وأنماط الفشل، وعاملت العناصر الإنشائية بوصفها أجساماً صلبة في جوهرها. وكان منشور برنولي لعام 1690 سيمثل تحولاً عميقاً في ميكانيكا المواد. فبدلاً من السؤال فقط متى يفشل منشأ، سعى إلى فهم كيفية انحنائه وتشوهه، وأدخل التأثير المستمر للمرونة في دراسة الميكانيكا.

[13] من منظور علمي صرف، لا يضيف هذا الحوار إلا القليل إلى رياضيات المنحني المرن. وتكمن أهميته في إظهار كيف التمس رياضي بارز في القرن السابع عشر البصيرة من حرفي ممارس. ومما يؤسف له أن مثل هذا التبادل المتبادل نادر اليوم؛ إذ قلما يلتمس الباحثون المعاصرون الإلهام من الحرفيين المهرة في صياغة المسائل أو تطبيق تقدمهم النظري. وترد تفاصيل إضافية عن السياق التاريخي لهذا التبادل في (Alassi, 2019).

البحث الرئيس

تحتل مقالة ياكوب برنولي (Bernoulli, Jakob, 1690a)، وعنوانها *Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*، مكانة فريدة في التاريخ المبكر للتحليل.[14][15]

كان حساب لايبنتس التفاضلي آنذاك لا يزال في طفولته، وكان ينبغي البرهنة على قدرته على حل مسائل ملموسة أمام مجتمع رياضي متشكك. وقدم إسهام برنولي في هذا المنشور هذا البرهان بالضبط، إذ طبق الطرائق الجديدة على ثلاث مسائل مترابطة:

الحلزون اللوغاريتمي: يفحص ياكوب خواص الحلزونات اللوغاريتمية، فيحسب أطوال أقواسها ومماساتها ومساحاتها، ويبرز خاصيتها اللافتة في التشابه الذاتي. ويبين على وجه التحديد أن أنصاف الأقطار المرسومة من المركز تقطع الحلزون بزوايا ثابتة، وأنها تشكل متتالية هندسية عندما تكون أطوال الأقواس المقابلة في متتالية حسابية.

خطوط الاتجاه الثابت: في معرض تناوله الملاحة على كرة، يحلل برنولي منحنيات تقطع جميع خطوط الطول بزوايا ثابتة، وهي المسارات التي تتبعها السفن عند الحفاظ على اتجاه ثابت للبوصلة. وقد ربطت هذه الخطوط، التي يرسمها اتجاه بوصلة ثابت على الكرة، حساب التفاضل والتكامل بالحاجات العملية للملاحة ورسم الخرائط. وطور طرائق لحساب المسافات وفروق خطوط الطول على هذه المسارات.

مساحات المثلثات الكروية: يقدم إنشاءات هندسية وصيغاً تحليلية لتعيين مساحات المثلثات الكروية، مع تطبيقات في الفلك ورسم الخرائط. وكشف هذا العمل كيف تستطيع طرائق المتناهيات في الصغر التفاعل مع حساب المثلثات الكروي الكلاسيكي.

الصلات بين هذه الموضوعات منهجية لا موضوعية. فكل مسألة تتطلب تطبيقات متقدمة لحساب التفاضل المطور حديثاً: يوضح الحلزون اللوغاريتمي تقنيات تحليل المنحنيات المعرفة بعلاقات تفاضلية؛ ويتضمن تحليل خطوط الاتجاه الثابت تكاملات معقدة على سطوح منحنية؛ ويمزج عمل المثلثات الكروية الاستدلال الهندسي بالحساب التحليلي. وقادت هذه الأدوات الرياضية برنولي بصورة طبيعية نحو مسألة المنحني المرن، وهي تحد آخر بالمعادلات التفاضلية يتناول أشكالاً منحنية تحت قيود فيزيائية، لكنه كان سيتطلب تطوير طرائق تغايرية لم تكن قد صيغت كاملة بعد.

وفي جوهره، يعرض البحث قوة الحساب الجديد ومرونته في مجالات رياضية متنوعة، وصولاً إلى مسألة المنحني المرن الصعبة المعلنة في ملحقه.

التحدي في الملحق

في عام 1690، وبينما كان ياكوب يتعاون مع لايبنتس في مسألة *funicularia*، صادف ما سيصبح إحدى أهم مسائل الفيزياء الرياضية.

Occasione Problematis funicularii moz in aliud non minus illustre delapsi sumus

---

بمناسبة مسألة الخيط المرن، سرعان ما صادفنا [مسألة] أخرى لا تقل عنها شأناً.

Bernoulli, Jakob, 1690a "*Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*"

[14] أثبتت الدراسات الحديثة (Alassi, 2020) أن الملحق والأحجية الحرفية ينتميان إلى مقالة 1690 المنشورة في يونيو من ذلك العام. والإشارات إلى 1691 في الفهارس الأقدم خاطئة.

[15] يُنصح القراء غير الملمين بالأسس الهندسية للانحناء، ومنها دوائر التقبيل والمنحنيات المتطورة ومعدل تغير زاوية المماس، بالرجوع أولاً إلى الفصل 8، الذي يطور هذه المفاهيم الأساسية من أصولها التاريخية إلى صيغها الناضجة. والمادة المعروضة هناك شرط سابق لفهم الصياغة الميكانيكية لمسألة المنحني المرن الآتية.

> Occasione Problematis funicularii moz in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tensorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum Leibnitium in privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentissimi & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus.

> في أثناء العمل على مسألة *Funicularia*، صادفنا [ياكوب برنولي ولايبنتس] مسألة مدهشة أخرى. وهي تتعلق بانثناء الجوائز أو الأقواس المشدودة أو الشرائط المرنة الاعتباطية وانحنائها، بفعل وزنها الذاتي أو وزن معلق أو أية قوة انحناء أخرى. وقد وجّه السيد لايبنتس الشهير انتباهي إلى هذه المسألة في رسالة. وسواء بسبب عدم يقين الفرضية أو تنوع الحالات الكثير، فإن حلها يبدو أصعب من المسألة السابقة. وهنا يلزم حساب مجتهد لا حساب مطول. لكن لحسن الحظ، ومن خلال حل أبسط الحالات، على الأقل تحت الافتراض المذكور أن الاستطالات تتناسب مع قوى الشد، انفتحت لي أبواب حل هذه المسألة. وكما فعل الرجل الشهير جداً [لايبنتس] من قبل، سأمنح الآخرين أيضاً بعض الوقت لمحاولة تحليل هذه القضية. ولذلك سأحجب الحل الآن وأخفيه في أحجية حرفية. وسأنشر الحل والبراهين عند مهرجان الحصاد.

> Bernoulli, Jakob, 1690a "*Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*"

أعلن التحدي المنشور في *Acta Eruditorum* عملياً الانتقال من استاتيكا الأجسام الصلبة إلى النظرية الرياضية للمنحنيات المرنة. ومع أن نيوتن بحث سراً أشكالاً ذات صلة في سبعينيات القرن السابع عشر (§8.2.2)، فإن صياغة برنولي العلنية هي التي أرست أساس التطور المنهجي للمجال.

اتبع برنولي استراتيجية متقنة؛ إذ أعلن أنه يمتلك حلاً سيخفيه في أحجية حرفية (§6.11.1.1، الجدول 6.6):

> Qrzumu bapt dxqopddbbp poylfy bbqnfqbfp ltyge murds udıbb tubstmixyyxdksdbxpgqs-rkfgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs

> Bernoulli, Jakob, 1690a "*Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum*"; Logogriph

ووعد بكشف الشفرة وحلها معاً بحلول مهرجان الحصاد في بازل في أكتوبر 1690.[16] وخدم هذا النهج الاستراتيجي أغراضاً عدة: أثبت أسبقيته في الاكتشاف، ومنح معاصريه وقتاً لمحاولة المسألة بصورة مستقلة، وأتاح له وقتاً إضافياً لصقل معالجته الرياضية.

عندما حل الموعد النهائي في أكتوبر 1690، لم يقدم رياضي آخر حلاً. وبدلاً من كشف جوابه فوراً كما وعد، اختار برنولي مواصلة تطويره سراً. وبحلول عام 1692 كان قد أتم تحليل الحالة المستطيلة في يومياته العلمية الخاصة *Meditatione CLXX*، وعنوانها *Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*، أي «تربيع منحنى يُرسم من تطوره منحنى صفيحة منحنية» (Bernoulli, Jakob, 1692).

يقدم الجدول 9.4 نظرة عامة على الاستجابات للتحدي.

---

[16] يبدأ معرض بازل *Herbstmesse*، أو معرض الحصاد، الذي أُسس عام 1471 بامتياز إمبراطوري، تقليدياً في السبت الأخير من أكتوبر ويستمر أسبوعين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam fecent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis istiusmodi jam Wallisio & Barrovio considerari cœpta est; nec

3. Occasione Problematis funicularii mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum Leibnitium in privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis felsciter reseravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentissimi & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gravitatis expers AB, uniformis ubique crassitiei & latitudinis, inferiore Fig. extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B sit perpendicularis, erit curvatura laminæ sequentis naturæ:

Qrzumu bape dxqopdddbbp poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdzt seggkbp aqdlbkzs.

Oo 4. Istis

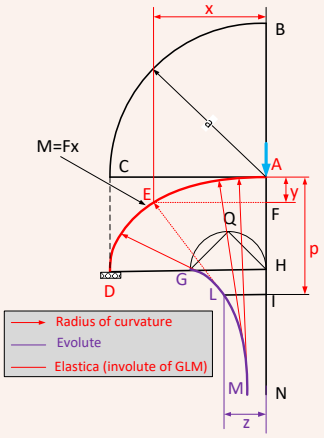
Occasio Problematis funicularii mihi non in aliud non minus illustre delapsa sinum, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuum aut elasticorum quorundam, a propria gravitate vel a quovis pondere aut altera aliqua quacumque vi competentia extatis; quorundam scilicet celebriorum Virorum in privatis quibus sub idem tempus commercii litteris disquisitiones occupavit. Quibus etsi me adjungere cupiam, tamen ob alias occupationes nondum licuit, explicare omnia; interim tamen quaedam per me ipsum nonnihil etiam hujus quaestionis detexi, quae, quia nondum licuit explicare omnia, nec fas est praepropere eruere, logogripho occultabo, quem cum demonstratione explicatam opportuniori loco publicabo.

Qrzému bape dxqopdddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs.

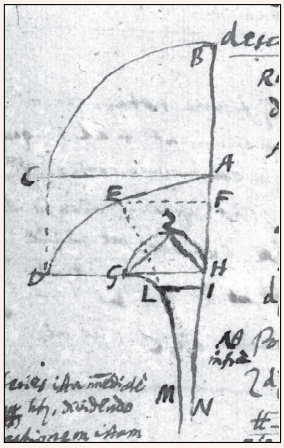
لقد قادتني مناسبةُ مسألة **الخطّ الحبلي** إلى موضوع آخر، لا يقلّ عنها شهرةً، يتعلّق **بانحناءات أو تقوّسات العوارض، أو الأقواس النحيلة، أو بعض الأجسام المرنة** نهاكا ءاوسد ، ذلك بفعل أوزانها الذاتية، أم بفعل حملٍ ما، أم بفعل أيّ قوة أخرى يمكن أن تُطبَّق عليها؛ وهو، في الواقع، موضوعٌ كان في ذلك الوقت نفسه قد شغل أبحاث بعضٍ من أشهر الرجال، في رسائل خاصة متبادلة بينهم. ومع أنني كنت أودّ بكل سرور أن أنضمّ إليهم، فإن مشاغل أخرى لم تسمح لي حتى الآن بأن أعرض كلّ ما لديّ. ومع ذلك، فقد كشفتُ أنا أيضًا، بجهدي الخاص، عن أمور ليست بالقليلة تتعلّق بهذه المسألة. ولكن، لما لم يُتح لي بعد أن أشرح كلّ شيء، ولما كان من غير الملائم كشفه قبل أوانه، فسأخفيه في **لغز (logogriphum)**، وسوف أنشره، مع برهانه، في وقتٍ أنسب.

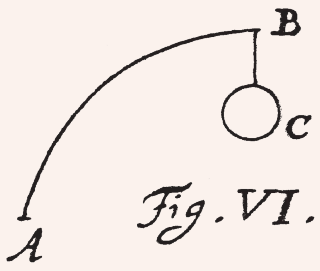
Qrzému bape dxqopdddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs”

شكل 9.8: تحدي برنولي، (Bernoulli, Jakob, 1690a)



(b) إعادة إنشاء حديثة، استناداً إلى (Levien, 2008)





(a) رسم لياكوب برنولي (Bernoulli, Jakob, 1692)

شكل 9.9: المنحني المرن عند ياكوب برنولي

9.3.2 الحلول

قدّم برنولي نفسه الحل الذي كان قد ألمح إليه في تحدّيه من خلال أحجية تبديل حروف (وُجدت منها صيغتان). وسارع هوينغنس إلى الاعتراض على حل برنولي. ثم قدّم أويلر حلاً هندسياً عام 1732، وتلاه دانيال ابن أخي ياكوب، الذي غرس عام 1742 بذرة حساب التغايرات الذي صاغه أويلر لاحقاً في صورة منهجية عام 1744، الشكل 9.10c.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.4: الخط الزمني لتحدي المنحني المرن

الحدث	التاريخ
يطرح ياكوب برنولي مسألة المنحني المرن في *Specimen alterum* (Bernoulli, Jakob, 1690a).	يونيو 1690
يشفر برنولي الحل في أحجية حرفية (Bernoulli, Jakob, 1690a).	1690
ينقضي الموعد النهائي، مهرجان حصاد بازل؛ ولم يُقدم حل.	أكتوبر 1690
يتم ياكوب حله سراً في *Meditationes* CLXX (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).	1692
ينشر ياكوب *Curvatura laminae elasticae* مع الحل المفكوك (Bernoulli, 1694).	يونيو 1694
ينشر هوينغنس نقداً يحدد تكوينات متعددة للمنحني المرن (Bernoulli, 1694).	1694
يرد ياكوب على هوينغنس مدافعاً عن عمومية طريقته (Bernoulli, 1694).	1694
يطرح يوهان برنولي تحدي منحنى أسرع هبوط (Bernoulli, Johann, 1696).	1696
ينشر يوهان حل منحنى أسرع هبوط باستعمال قياس بصري (Bernoulli, Johann, 1697a).	مايو 1697
يوسع تحد مجهول، LBC، المسألة إلى خطوط متوسطة المرونة (Anonymous, 1724).	1724
ينشر دانيال برنولي وأويلر نظرية موحدة للخطوط المرنة والمطاوعة (Euler, 1728; Bernoulli, Daniel, 1744).	1728
ينشر أويلر *Solutio problematis* بإطار هندسي عام يوحد المنحنيات المرنة والمطاوعة (Euler, 1732).	1732
يكتب دانيال إلى أويلر مقترحاً مبدأ تصغير الطاقة (**DanielBernoulli1742toEuler**).	أكتوبر 1742
ينشر أويلر *Methodus inveniendi* بحل تغايري منهجي (Euler, 1744b).	1744
تُجمع أعمال ياكوب الكاملة في المنحني المرن في *Opera Omnia* بعد وفاته (Bernoulli, Johann, 1713).	1744



(a) ياكوب برنولي (1705–1655)



(b) دانيال برنولي (1782–1700)



(c) ليونارد أويلر (1783–1707)

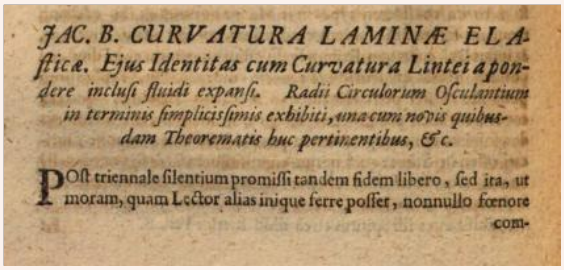
شكل 9.10: معماريّو نظرية المنحني المرن: أعلام الرياضيات من بازل (ويكيبيديا)

9.3.2.1 حل ياكوب برنولي (1694)

السياق التاريخي يبني حل برنولي (Bernoulli, Jakob, 1694)، الشكل 9.11، على أحجية تبديل الحروف التي نشرها عام 1691 في *Acta Eruditorum*؛ فقد أثبتت أسبقيته مع إبقاء طريقته طي الكتمان. وتبيّن الأحجية بعد فكّها العلاقة الهندسية الدقيقة التي كشفها لاحقاً، لا قانون التناسب العكسي بين عزم الانحناء والانحناء الذي تنسبه إليه بعض المراجع خطأً (§6.11.1.1).

> Post triennale silentium promissi tandem fidem libero, sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo foenore compensem, dum Elaterum curvaturam non in una sola, (ut initio fueram pollicitus,) sed generaliter in quacunque Extensionum hypothesi constructam

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


JAC. B. CURVATURA LAMINÆ ELA-
ſticæ. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei apon-
dere incluſi fluidi expanſi. Radii Circulorum Oſculantium
in terminis ſimpliciſſimis exhibiti, una cum novis quibus-
dam Theorematis huc pertinentibus, &c.

POſt triennale ſilentium promiſſi tandem fidem libero, ſed ita, ut
moram, quam Lector alias inique ferre poſſet, nonnullo fœnore com-

JAC. B. CURVATURA LAMINAE ELASTICAE. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

ياكوب برنولي. انحناء الصفيحة المرنة. تطابقه مع انحناء قطعة من الكتّان الممدودة بفعل وزن السائل الموجود فيها. أنصاف أقطار دوائر التماس معروضة بأبسط العبارات، مع بعض المبرهنات الجديدة المتعلقة بهذا الموضوع، إلخ.

شكل 9.11: بحث ياكوب برنولي *Curvatura Laminae Elasticae*... (Bernoulli, Jakob, 1694)

exhibeo... Extitit enim jam inde a Galilei quoque temporibus celebre, qui Curvam hanc, per .inde ut Funiculariam, Parabolam esse suspicatus erat

---

بعد ثلاث سنوات من الصمت، أفي أخيراً بوعدي، على أن أعوّض التأخير بفائدة معتبرة، إذ أعرض انحناء الأجسام المرنة لا في حالة واحدة فحسب (كما وعدت أول الأمر)، بل بوجه عام وفق أي فرضية للامتدادات...

فقد كانت هذه المسألة قد اشتهرت منذ زمن غاليليو، الذي ظن أن هذا المنحنى، شأنه شأن السلسلة المعلقة، قطع مكافئ.

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

يضع برنولي عمله في مقابل محاولات غاليليو وغيره غير الموفقة، ويؤكد إنجازه في حل المسألة «وفق أي فرضية للامتدادات»؛ أي ضمن إطار عام لا في حالات خاصة فحسب. ويُحال القارئ أولاً إلى §8.2.5 للاطلاع على اشتقاق برنولي للانحناء.

توصيف المنحني المرن

[النص اللاتيني وترجمته الإنجليزية المشار إليهما هنا غير موجودين في المصدر الإنجليزي الحالي.]

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 272

RECTCOR

يمثل هذا حل برنولي **للمنحني المرن المستطيل**—وهو حالة مخصوصة تثبّت فيها عارضة مرنة عند أحد طرفيها ويثنيها ثقل حتى يصبح المماس عند الطرف المحمّل عمودياً على اتجاه القوة. ومع أن هذا العمل لا يقدم حلاً كاملاً لجميع مسائل المنحني المرن، فإنه يسبق التطوير المنهجي لحساب التغايرات ويكشف بوضوح لافت عن طرائق القرن السابع عشر الرياضية في معالجة المسائل المتسامية.

تتمحور مقاربة برنولي حول إنشاء هندسي متقدم يحول مسألة المنحني المرن الفيزيائية إلى مسألة توليد منحنى. ويمكن تلخيص طريقته كما يأتي:

1. البدء بمنحنى معطى AFC يمثل «قانون الشد»—أي العلاقة بين القوى المطبقة AE وقوى الشد الناتجة EF.
2. إنشاء ربع دائرة GKL مساحته تساوي المساحة تحت المنحنى AFC.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. تعيين الشد الموافق EF لكل نقطة E على القاعدة AB، ثم إنشاء المنحنى المساعد AN بإجراء هندسي محدد.
4. يتولد بعد ذلك المنحنى المرن AQR من تقاطع الخطوط الناتجة من هذا الإنشاء.

وتكمن البصيرة الحاسمة في إدراك برنولي أن المنحني المرن مرتبط جوهرياً بما نسميه اليوم التكاملات الإهليلجية، إلا أنه حل المسألة بتقويم هندسي للمنحنى بدلاً من التكامل التحليلي.

ويصوغ برنولي علاقته الهندسية الأساسية كما يأتي:

> Portio axis applicatam inter & tangentem eft ad ipfam tangentem, ficut quadratum applicatæ ad conftans quoddam fpatium.

نسبة الجزء من المحور الواقع بين الترتيبة والمماس إلى المماس نفسه كنسبة مربع الترتيبة إلى مساحة ثابتة ما.

Bernoulli, Jakob, 1694 “*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*” pg. 272

غير أن هذه العبارة يجب أن تُفهم ضمن إطار برنولي الهندسي الخاص؛ فعبارة *portio axis* تشير إلى قطعة محددة في إنشائه، لا إلى قطعة ما تحت المماس بالمعنى الاصطلاحي الحديث فحسب. وعلى وجه التحديد، إذا رمزنا إلى:

- Q بوصفها نقطة على المنحنى المرن؛
- P بوصفها مسقط الترتيبة من Q على المحور AB؛
- p بوصفها نقطة تقاطع المماس عند Q مع المحور.

فإن خاصية برنولي تنص على:

$$\frac{Pp}{Qp} = \frac{QP^2}{C}$$

حيث C مساحة ثابتة تتصل بصلابة الانحناء والحمل المطبق.

منظور حديث من المنظور الحديث (الذي طوّره أويلر بعد ذلك بزمن طويل في أربعينيات القرن الثامن عشر)، تبحث مسألة المنحني المرن عن منحنى $y(x)$ يصغّر طاقة الانحناء:

$$I = \int_0^L \frac{\kappa^2}{2EI}\, ds$$

مع الخضوع لشروط حدية، حيث $\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ هو الانحناء.

وتعطي معادلة أويلر–لاغرانج لهذه المسألة التغايرية:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{(1+(y')^2)^{1/2}}\right) = \frac{P}{EI}$$

حيث P هو الحمل المطبق. ويؤدي ذلك إلى المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية التي يصنعها المماس مع الأفقي. وهذه تكافئ معادلة النواس وتفضي في حلها إلى تكاملات إهليلجية—وهي التكاملات نفسها التي واجهها برنولي بطريقته الهندسية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إدراك الطبيعة المتسامية أدرك برنولي صراحة أن حله يتضمن منحنيات متسامية. ويذكر أن المنحنى المرن «لا يمكن إنشاؤه بتربيع أي قطاع مخروطي»، وأنه يتطلب ما نفهمه اليوم بوصفه تكاملات إهليلجية من الصورة:

$$s = \int_0^{\theta} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \phi}}$$

وتنجز طريقته الهندسية هذا التكامل فعلياً من خلال تقويم المنحنى—وهو إنجاز لافت بالنظر إلى الأدوات الرياضية المتاحة عام 1694.

الأهمية التاريخية يمثل هذا العمل سوابق عدة في الرياضيات:

- أول حل لحالة مخصوصة من مسألة ميكانيكية متسامية؛
- معالجة منهجية مبكرة لما سيصبح نظرية الدوال الإهليلجية؛
- عمل ريادي فيما سيُصاغ لاحقاً في صورة حساب التغايرات؛
- جسر بين الطرائق الهندسية الكلاسيكية والتقنيات التحليلية الناشئة.

ظل حل برنولي الهندسي للمنحني المرن المستطيل مهماً حتى معالجة أويلر التحليلية الشاملة بحساب التغايرات عام 1744، التي حلّت مسألة المنحني المرن العامة لشروط حدية اعتباطية. ومع ذلك، ما زالت الرؤى الهندسية تمدنا بحدس قيّم لفهم البنية الرياضية العميقة الكامنة وراء مسائل التشوه المرن.

وتُعد أناقة حل برنولي الهندسي المحض لهذه المسألة المتسامية بطبيعتها من أروع أمثلة الإبداع الرياضي في القرن السابع عشر؛ إذ تبيّن كيف استطاع الاستدلال الهندسي فتح مسائل ظلت عصية على الهجوم التحليلي المباشر عقوداً أخرى.

الصلة بمسألة القماش

[النص اللاتيني وترجمته الإنجليزية المشار إليهما هنا غير موجودين في المصدر الإنجليزي الحالي.]

Bernoulli, Jakob, 1694 PDF *“Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus”* pg. 275-276

الثنائية الفيزيائية إلى جانب مسألة المنحني المرن الأصلية، كشف برنولي ثنائية فيزيائية لافتة تُظهر البنية الرياضية العميقة الكامنة وراء حله الهندسي. فقد لاحظ أن المنحنى المرن نفسه يصف أيضاً شكل اتزان غشاء مرن، أو كيس من القماش مملوء بسائل ومثبت عند نقطتين.

وهذه الصلة أكثر من مجرد طرافة رياضية؛ فهي تكشف أن نظامين مختلفين فيزيائياً (عارضة صلبة تنحني تحت حمل، وغشاء مرن يحتوي سائلاً) قد تحكمهما علاقات هندسية متطابقة. وكانت هذه لمحة مبكرة عما سيصبح مبدأ أساسياً في الفيزياء الرياضية: يمكن لآليات فيزيائية مختلفة أن تفضي إلى أوصاف رياضية متطابقة عندما تتكافأ القيود الهندسية الكامنة.

التكافؤ الفيزيائي يمكن فهم بصيرة برنولي من خلال شروط الاتزان التي تحكم كل نظام:

المنحني المرن: تتعرض عارضة صلبة لتشوه انحنائي تحت الأحمال المطبقة، ويكون الانحناء κ متناسباً مع عزم الانحناء M وفق العلاقة $\kappa = M/(EI)$، حيث تمثل EI صلابة الانحناء.

الغشاء المملوء بسائل: يحتوي قماش مرن غير قابل للتمدد سائلاً تحت ضغط هيدروستاتيكي، ويتحدد انحناؤه الموضعي من اتزان شد الغشاء T مع فرق الضغط Δp عبر السطح البيني المنحني.

ينشأ التكافؤ الرياضي لأن كلا النظامين يحقق العلاقة الأساسية نفسها بين الانحناء وتوزيع القوة (عزم الانحناء في المنحني المرن، والضغط الهيدروستاتيكي في الغشاء). ويلتقط إنشاء برنولي الهندسي هذه البنية المشتركة.

تحليل القوى والعلاقات الأساسية يكشف تحليل برنولي المفصل للقوى عدة علاقات كمية تميز التحققين الفيزيائيين، على الرغم من تكافئهما الهندسي:

مبدأ الشد المنتظم: يحافظ الغشاء على شد **ثابت** T على طوله كله، يساوي الوزن الكلي للسائل المحصور. ويختلف ذلك بوضوح عن العارضة المرنة، حيث يتغير إجهاد الانحناء على طولها ويكون أضعف قرب الطرف الحر (أي عند النقاط الأقرب إلى R في ترميز برنولي).

اتجاه محصلة القوة: عندما يتحرر الغشاء فجأة من قيوده، تؤثر محصلة القوة الهيدروستاتيكية بزاوية θ إلى الأفقي، حيث $\tan\theta = EF/Ei$ في ترميز برنولي الهندسي. وفي الحالة المستطيلة المخصوصة يُدفع القماش كله بزاوية قائمة.

مقدار القوة: ترتبط القوة الهيدروستاتيكية الكلية التي تدفع الغشاء بالوزن المطلق للسائل المحصور بنسبة $1:2$. وينتج ذلك من تكامل توزيع الضغط الهيدروستاتيكي على سطح الغشاء المنحني.

موضع محور الاتزان: يمر محور الاتزان بنقطة تُعيّن باقتطاع Ao من AB بحيث $Ao : AB = 1 : \sqrt{2}$. ومن اللافت أن هذا المحور **لا** يمر بنقطة تقاطع المماسين عند الطرفين—وهي دقة هندسية ينبه إليها برنولي صراحة.

المثالية الهندسية يلاحظ برنولي خاصية تطرف لافتة: فمن بين جميع المنحنيات المتساوية المحيط (المنحنيات متساوية القياس) الواصلة بين الطرفين نفسيهما، يعظّم المنحنى المرن بُعد مركز المساحة عن خط الأساس. وهذا مثال مبكر للتحسين متساوي القياس—وهي مسائل عالجها حساب التغايرات معالجة منهجية بعد ذلك بعقود.

ويقيم قياساً صريحاً على السلسلة المعلقة، مشيراً إلى «التآلف العجيب» (*affinitatem miram*) بين زوجين من المسائل المترابطة فيزيائياً:

- السلسلة المعلقة ومنحنى الشراع؛
- المنحني المرن (العارضة المنحنية) ومنحنى الغشاء المملوء بسائل.

وفي كل زوج تتضمن إحدى المسألتين الوزن الذاتي (السلسلة المعلقة، الشراع)، بينما تتضمن الأخرى حملاً خارجياً (المنحني المرن، الضغط الهيدروستاتيكي)، ومع ذلك تُظهر البنى الرياضية تشابهاً عميقاً.

الأهمية التاريخية تُظهر هذه الثنائية عمق حدس برنولي الفيزيائي. فقد أدرك أن إنشاءه الهندسي التقط أمراً أساسياً في حالات الاتزان في ميكانيكا الأوساط المتصلة، يتجاوز السياق الخاص للعارضات المرنة. وقد تحقق ذلك كله بالاستدلال الهندسي، من دون الأدوات التحليلية التي جعلت هذه الصلات أكثر منهجية فيما بعد.

وتستبق ثنائية القماش والمنحني المرن عدة تطورات مهمة في الميكانيكا والفيزياء الرياضية:

- **نظرية الأغشية:** الإطار الرياضي لتحليل المنشآت الرقيقة المرنة تحت أحمال الضغط، الذي تطور منهجياً في القرن التاسع عشر؛
- **المبادئ التغايرية:** إدراك أن الأنظمة الفيزيائية المختلفة قد تشترك في بنى رياضية واحدة عندما تصغّر أو تعظّم دالية واحدة (كالطاقة أو الفعل، وغيرهما)؛
- **القياسات الفيزيائية:** استخدام التكافؤات الرياضية لنقل طرائق الحل بين مجالات فيزيائية مختلفة، وهي تقنية غدت محورية في الفيزياء الرياضية في القرن التاسع عشر.

يساعد إدراك برنولي لهذه الثنائية، الذي توصل إليه باستدلال هندسي محض عام 1694، على تفسير بقاء حله للمنحني المرن المعالجة المرجعية للمسألة أكثر من نصف قرن. فقد التقطت طريقته الهندسية ضمناً البنية التغايرية التي سيجعلها أويلر صريحة بحساب التغايرات عام 1744. وكانت الثنائية الفيزيائية دليلاً تجريبياً على أن مقاربته الرياضية عيّنت أمراً أساسياً حقاً في ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه.

9.3.2.1.1 رد فعل هوينغنس (1694)

كان كريستيان هوينغنس قد عبّر عن شكه حتى قبل ظهور حل برنولي. ففي رسالة إلى لايبنتس مؤرخة في 16 نوفمبر 1691، كتب:

> لا أكاد أطيق انتظار ما سيقدمه السيد برنولي الأكبر بشأن انحناء النابض. لم أجرؤ على الأمل في أن يخرج المرء هنا بشيء واضح أو أنيق، ولذلك لم أحاول قط.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

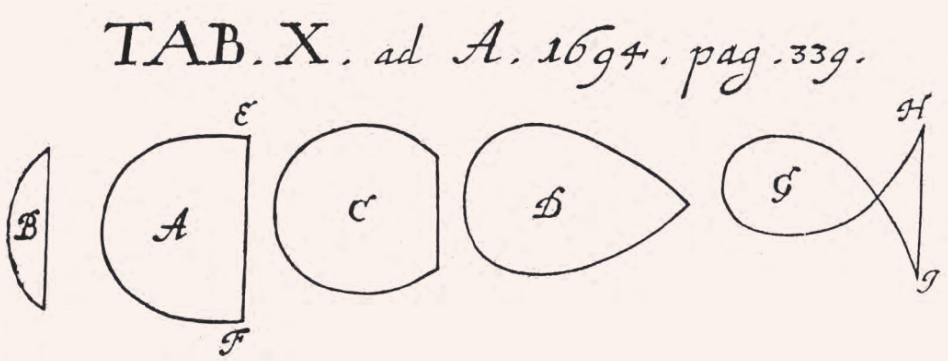
Huygens, 1691 Lettre à G.W. Leibniz

عندما ظهر بحث برنولي *Curvatura Laminae Elasticae* في يونيو 1694، سارع هوينغنس إلى نشر نقد رسمي في المجلة نفسها (Fraser, 1991). وكان في مراسلاته الخاصة مع لايبنتس أشد صراحة:

> إن عمل السيد برنولي طوال ثلاث سنوات عمل معتبر جداً، شريطة أن يكون كل ما يدّعيه صحيحاً؛ وهو يتباهى به كثيراً أيضاً. أما مبدأ النابض فأرى أنه أحسن استعماله، وأن من الصحيح أن أنصاف الأقطار التي تقيس الانحناء تتناسب عكسياً مع القوى التي تثني النابض، وإن كنت أرى أن السطح الخارجي لا يتمدد وحده، بل يقصر السطح الداخلي في الوقت نفسه. ولو لم يكن هذا المبدأ هو المبدأ الوحيد الصحيح، بل كان الخط AFC منحنى يعتمد على عدد لا نهائي من التجارب، لوجدت بحثه كله مبهماً جداً وقليل الاستحقاق للوقت المبذول فيه. وحتى الآن لا يبدو لي في كل ما وجده نفع، وإنما هو من تلك الملاهي الجميلة الدقيقة التي يلجأ إليها المرء حين لا يجد ما يوظف فيه الرياضيات على نحو أثمر.
>
> إن افتراض تربيعات جميع المنحنيات معطاة افتراض غريب، وإذا انتهى إنشاء مسألة إلى ذلك (باستثناء تربيع الدائرة والقطع الزائد)، فلن أعد شيئاً قد أُنجز، إذ لا يعرف المرء حتى ميكانيكياً كيف ينفذ شيئاً. لم يحدد السيد برنولي انحناء القوس A إلا في الحالة التي يكون فيها المماسان عند الطرفين E وF متوازيين، وأتصورهما موصولين بالخيط EF. ويبقى إعطاء شكل القوس الحقيقي B؛ وكذلك C الذي يتجه طرفاه أحدهما نحو الآخر؛ وD حيث يلتقيان؛ وG حيث يتجاوز أحدهما الآخر ويمسكهما القضيب HI.

Huygens, 1694 Lettre à G.W. Leibniz

وهكذا جاء رد هوينغنس بتدقيقه المعهود، معترضاً على اكتمال حل برنولي. ومع إقراره برقي عمل برنولي الرياضي، رأى أنه لا يحل إلا حالة مخصوصة واحدة—ما سماه «المنحني المرن المستطيل» (المنحنى A في الشكل 9.12)—حيث تكوّن الشريحة المرنة زاوية قائمة تقريباً. وبيّن هوينغنس بدقة منهجية إمكان وجود تشكيلات متعددة للمنحنى المرن تبعاً للقوى المطبقة والشروط الحدية، كما يظهر في مخططه لعام 1694 الذي يصور أشكالاً مختلفة للمنحني المرن (المنحنيات من A إلى G). وذهب إلى أن طريقة برنولي الهندسية ناقصة لأنها لا تشمل الحالات التي قد تكوّن فيها الشريحة حلقات (المنحنيان C وD)، أو تتعرض لتشوهات أعقد (المنحنى G)، أو تتخذ اتجاهات مختلفة عند الطرفين. وقد أثبت هذا النقد المتشدد بُعد نظره: عالج حل أويلر الهندسي عام 1732 بعض هذه القيود، ثم جاء دانيال ابن أخي ياكوب، فغرس عام 1742 بذرة حساب التغايرات الذي صاغه أويلر لاحقاً عام 1744، وقدم أخيراً التصنيف الكامل لجميع تشكيلات المنحني المرن الممكنة الذي طالبت به معايير هوينغنس الصارمة.



شكل 9.12: اعتراض هوينغنس عام 1694 على حل برنولي.

تقبّل برنولي هذه الانتقادات بسعة صدر. ففي مذكرة لاحقة نشرها في العام نفسه (Bernoulli, 1694)، أوضح أن طريقته

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الهندسية لا تقتصر على الحالة «المستطيلة»، إذ يمكن توليد أشكال مختلفة للمنحني المرن باختيار ثوابت تكامل مختلفة. وتمسك بأن حله عام وكامل، مع إقراره بأدب بفضل هوينغنس ولايبنتس في حفزه على مزيد من الإيضاح.

> لما تفضل المهندسان الشهيران السيد هوينغنس والسيد لايبنتس بإخضاع ما نشرته في السنوات الأخيرة... لفحص خاص، فأقرا بعض أجزائه، وأضافا إلى أجزاء أخرى، كانت عبارتها أخفى، تخميناتهما، وأثارا هنا شكوكاً وأبديا هناك خلافهما الصريح، قررت أن أضيف إلى أفكاري السابقة بعض الأفكار اللاحقة، وأن أشرح المسائل المختلفة بترتيب وصراحة كما تبدو لي، إرضاءً لرغبات هذين الرجلين العظيمين، وإخراجاً لشرر الحقيقة الأنقى من خفايا الطبيعة إلى وضح النهار شيئاً فشيئاً...
>
> أما كون أنصاف أقطار الانحناء تتناسب عكسياً مع قوى الشد (والأصح مع الاستطالات)، وهو ما يرى هذان الرجلان الشهيران أنني اتخذته مبدأً، فإنه يُستخلص من المعادلة المكتشفة أولاً، فهو نتيجة لا بداية...
>
> وعليه، إذا خامر السيد هوينغنس شك بشأن ذلك، إذ يرى أن السطح الخارجي لا يتمدد وحده بل ينكمش الداخلي أيضاً، فقد كان عليه أن يوجه هذا الاعتراض إلى السيد لايبنتس لا إليّ، فأنا لم آخذ هذا المبدأ عن صاحبه إلا بعد عشر سنوات. غير أنني أقر بأن الاعتراض نفسه خطر لي عندما فكرت في الأمر أول مرة، لأن كل ما يقبل التمدد ينبغي أن يقبل الانضغاط أيضاً.
>
> Bernoulli, 1694 *"Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae"*

9.3.2.1.2 فواصل تاريخية

9.3.2.1.2.1 قوة لايبنتس الحية *Vis Viva* وتطور مفاهيم الطاقة

لا يمكن فهم تطور حساب التغايرات من دون استيعاب التطور المفاهيمي للتفكير في الطاقة خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر. وكان من صميم هذا التطور إدخال غوتفريد فيلهلم لايبنتس مفهوم *vis viva* (أي «القوة الحية» حرفياً)، وهو مفهوم أعاد تشكيل الفلسفة الميكانيكية من أساسها، ووفر الأساس التصوري للمقاربات اللاحقة لمسائل التحسين القائمة على الطاقة.

يمهد هذا القسم للتطورات اللاحقة عند دانيال برنولي (§9.3.2.1.2.4) وأويلر (§9.3.2.2) التي ستناقش أدناه.

1686: قوة لايبنتس الحية *Vis Viva* (تحدي الميكانيكا الديكارتية) في عام 1686، نشر لايبنتس في *Acta Eruditorum* بحثه "Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii" («برهان موجز على خطأ ملحوظ لديكارت») (Leibniz, 1686a)[17]، متحدياً الميكانيكا الديكارتية في أسسها.

كان رينيه ديكارت قد صاغ مبدأ الحفظ في كتابه *Principia Philosophiae* (Descartes, 1644)، مقترحاً أن مقدار الحركة في الكون—مقيساً بالمجموع القياسي $\sum mv$—يبقى ثابتاً بحفظ إلهي. وعلى خلاف حفظ كمية الحركة الحديث، أغفلت صياغة ديكارت الخصائص الاتجاهية، واستندت إلى حجة لاهوتية مفادها أن الله، لكماله وثباته، يحفظ المقدار الكلي نفسه من الحركة الذي أودعه الكون ابتداءً.

استهدف لايبنتس، بتجارب فكرية محكمة، كلاً من القصور الرياضي في قواعد ديكارت للتصادم وأسسها الفلسفية. فتناول جسمين متساويين يتصادمان تصادماً مرناً، أحدهما متحرك والآخر ساكن. وفي حين تنبأت قواعد ديكارت بحفظ المقدار القياسي الكلي mv، بيّن لايبنتس أن ذلك يخالف المشاهدات التجريبية ويؤدي إلى محالات فيزيائية. وعلى مستوى أعمق، أوضح أن قانون ديكارت للحفظ يعجز عن احتساب قدرة الأجسام على أداء الشغل. فالجسم الساقط من ارتفاع h يكتسب سرعة $v = \sqrt{2gh}$ وقدرة على رفع جسم آخر إلى الارتفاع نفسه. وكانت هذه القدرة—التي سماها لايبنتس *vis viva*—تتناسب مع mv^2 لا مع mv.

أثبت لايبنتس بهذه الأمثلة أن ديكارت، وإن أدرك مبدأ حفظ مهماً، أخطأ في تعيين الكمية المحفوظة. واقترح بدلاً من ذلك أن الكمية المحفوظة حقاً هي *vis viva*، المعرّفة بأنها $\sum mv^2$. ورأى أن هذه «القوة الحية» هي المقياس الحقيقي لقدرة الجسم على

[17] العنوان الكامل: *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturae, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua et in re mechanica abutuntur*، أي: برهان موجز على الخطأ الملحوظ لديكارت وغيره بشأن قانون الطبيعة الذي يريدون بموجبه أن يحفظ الله دوماً مقدار الحركة نفسه، والذي يسيئون استعماله أيضاً في المسائل الميكانيكية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إحداث الآثار—أي قدرته على التغلب على مقاومة أو رفع أثقال أو ضغط نوابض. وعلى خلاف كمية ديكارت mv، التي قد تبقى محفوظة حتى إذا فقدت الأجسام المفردة حركتها كلياً، التقطت *vis viva* القدرة الفاعلة الكامنة في الأجسام المتحركة.

وعكست مصطلحات لايبنتس برنامجه الفلسفي الأوسع. فقد ميّز بين *vis mortua* (القوة الميتة)، التي تمثل الضغط أو الشد الساكن، و*vis viva* (القوة الحية)، التي تمثل قدرة الحركة الديناميكية. وجسّد هذا التمييز التزامه الميتافيزيقي بفهم الطبيعة بلغة القوى والفاعليات، لا بمجرد العلاقات الهندسية بين الجسيمات.

الجدل حول القوة الحية وحلّه أشعل اقتراح لايبنتس ما عُرف باسم «جدل القوة الحية»، وهو نقاش محتدم هيمن على الفلسفة الطبيعية الأوروبية عقوداً. دافع الديكارتيون عن حفظ كمية الحركة ($\sum mv$)، بينما ناصر أتباع لايبنتس حفظ القوة الحية ($\sum mv^2$). وشارك في الجدل عدد من كبار المفكرين، منهم أسرة برنولي التي أيدت الموقف اللايبنتسي بوجه عام.

العلاقة الرياضية بين قوة لايبنتس الحية والطاقة الحركية الحديثة مباشرة: لا تختلف كمية لايبنتس mv^2 عن كميتنا $\frac{1}{2}mv^2$ إلا بالمعامل الثابت نصف. ولم يكن لهذا المعامل أثر في حجج الحفظ، لأن ضرب كمية محفوظة في ثابت ينتج كمية محفوظة أخرى. والمهم هو بصيرة لايبنتس بأن v^2، لا v، يلتقط العلاقة الجوهرية بين الحركة والأثر الميكانيكي.

لم يُحسم الجدل تماماً حتى القرن التاسع عشر، حين اتضح أن كمية الحركة والطاقة تمثلان مبدأي حفظ متميزين. تُحفظ كمية الحركة (mv) في جميع التفاعلات، بينما لا تُحفظ الطاقة الحركية ($\frac{1}{2}mv^2$) إلا في التصادمات المرنة. وقد ثبت أن الكميتين ضروريتان لفهم الأنظمة الميكانيكية، لكن لكل منهما غرضاً مختلفاً في التحليل.

من الحركي إلى الكامن: توسيع مفاهيم القوة أثبت الإطار المفاهيمي الذي أسسته قوة لايبنتس الحية خصوبة لافتة للتطورات اللاحقة. فإذا كانت الأجسام المتحركة تمتلك «قوة حية» تتناسب مع mv^2، فقد بدأ فلاسفة الطبيعة يتساءلون عما إذا كانت الأجسام الساكنة المجهدة تمتلك «قوة كامنة» مناظرة، أو قدرة مخزنة على توليد الحركة.

وكان لهذا الامتداد المفاهيمي شأن حاسم في فهم الأنظمة المرنة. فالنابض المضغوط أو العارضة المنحنية يمتلكان بوضوح قدرة على توليد الحركة عند تحريرهما، غير أن هذه القدرة لا توصف بقوة لايبنتس الحية الأصلية التي لا تنطبق إلا على أجسام متحركة بالفعل. وهكذا طوّر المجتمع الرياضي تدريجياً فكرة أن التشوه المرن يخزن نوعاً من القوة الحية الكامنة يمكن أن تعود قوة حية حركية عند التحرير.

وبحلول أربعينيات القرن الثامن عشر، كان مفكرون بارعون مثل دانيال برنولي يستخدمون عبارات مثل "vis viva potentialis" لوصف هذه القدرة المخزنة. ومثّل ذلك جسراً مفاهيمياً بين تركيز لايبنتس الحركي الأصلي وما نسميه اليوم الطاقة الكامنة. وكانت الصيغة الرياضية $\int \frac{ds}{R^2}$ التي سيقترحها دانيال من أجل الطاقة المرنة امتداداً طبيعياً للتفكير اللايبنتسي إلى مسائل التشوه والقيود.

القوة الحية ومفاهيم الطاقة الحديثة يمكن تلخيص العلاقة بين مفاهيم القوة الحية في القرن الثامن عشر ومصطلحات الطاقة الحديثة كما يأتي:

- **قوة لايبنتس الحية** (mv^2) = الطاقة الحركية الحديثة ($\frac{1}{2}mv^2$)، ولا تختلف عنها إلا بمعامل ثابت؛
- **القوة الحية الكامنة** = الطاقة الكامنة الحديثة، وتمثل القدرة المخزنة على توليد الحركة؛
- **القوة الحية الكلية** = الطاقة الميكانيكية الكلية الحديثة (حركية + كامنة)؛
- **القوة الميتة** = القوى والضغوط الساكنة، وهي مناظرة لمفاهيم القوة في علم السكون الحديث.

تطلب التطور المفاهيمي من القوة الحية إلى التفكير الحديث في الطاقة عدة بصائر حاسمة ظهرت تدريجياً خلال القرن الثامن عشر. أولها إدراك أن القوة الحية يمكن أن تُخزن في الأنظمة المرنة المشوهة والتشكيلات الثقالية. وثانيها فهم بقاء القوة الحية الكلية (الحركية + الكامنة) ثابتة في أنظمة ميكانيكية كثيرة. وثالثها تطوير تقنيات رياضية لحساب القوة الحية في الأنظمة المعقدة التي تتضمن قيوداً وقوى متغيرة.

الآثار في حساب التغايرات كان إطار القوة الحية ضرورياً لتطور حساب التغايرات من جوانب عدة. أولاً، قدم كمية ذات معنى فيزيائي يمكن تحسينها؛ إذ تتطور الأنظمة طبيعياً بما يصغّر القوة الحية الكامنة أو يحفظ القوة الحية الكلية. ثانياً، أتاح منظوراً موحداً لمعالجة مسائل ميكانيكية متنوعة باعتبارات الطاقة بدلاً من تحليل القوى. ثالثاً، أرسى السابقة الرياضية للعمل بالصيغ التربيعية (v^2 وκ^2) التي ستصبح محورية في الداليات التغايرية.

وعندما سيصوغ دانيال برنولي لاحقاً مبدأ الطاقة المرنة باستعمال "vis viva potentialis" (§9.3.2.1.2.4)، فإنه سيمد إطاراً مفاهيمياً راسخاً إلى مجالات جديدة. وكانت بصيرته بأن الاتزان المرن يقابل أدنى قوة حية كامنة تطبيقاً طبيعياً للتفكير اللايبنتسي على مسائل التحسين. وسيثبت هذا الأساس المفاهيمي ضرورته لتنظيم أويلر الرياضي اللاحق للطرائق التغايرية (§9.3.2.2).

تتجاوز الأهمية التاريخية للقوة الحية دورها بوصفها سلفاً لمفاهيم الطاقة الحديثة. فقد مثّلت تحولاً أساسياً من التفكير الهندسي إلى التفكير الديناميكي في الميكانيكا—من تصور الطبيعة مجموعة جسيمات تتحرك وفق قوانين هندسية إلى فهمها شبكة من القوى وتحولات الطاقة. وسيثبت أن هذا التحول في المنظور ضروري للثورة الرياضية التي أتاحت حساب التغايرات المنهجي.

9.3.2.1.2.2 تحدي منحنى أسرع هبوط (1696)

اتسم المجتمع الرياضي في أواخر القرن السابع عشر بمنافسة فكرية محتدمة؛ إذ اعتاد كبار الرياضيين طرح مسائل صعبة لاختبار طرائق بعضهم بعضاً وترسيخ سمعتهم. وكان من أبرز المتنافسين الأخوان برنولي، ياكوب ويوهان (§6.6.9)، وقد جمعت علاقتهما المهنية بين التعاون والتنافس وهما يدفعان حدود حساب التفاضل الناشئ.

وكان كلا الأخوين قد قدم إسهامات مهمة في الرياضيات: ياكوب بعمله في المتسلسلات اللانهائية ونظرية الاحتمالات، ويوهان بتطويره تقنيات في حساب التفاضل والميكانيكا. وكانت علاقتهما معقدة، يطبعها احترام متبادل لقدرات كل منهما إلى جانب تنافس مهني على الاعتراف بهما من كبار رياضيي جيلهما. وقد ثبت أن هذه الديناميكية التنافسية حاسمة في دفع الابتكار الرياضي خلال تلك المرحلة المفصلية، ولا سيما حين سعى رياضيو أوروبا القارية إلى إثبات تفوق طرائقهم في حساب التفاضل والتكامل أثناء نشوء نزاع الأسبقية بين لايبنتس ونيوتن.

يفتتح يوهان بحثه في أبرز مجلة رياضية في ذلك العصر، *Acta Eruditorum*، بإعلان جريء عن القوة التحويلية لحساب التفاضل (Bernoulli, Johann, 1696):

> Quantum Geometriae incrementum accesserit, ex quo variae infinitorum Methodi, inter quas Differentialis Calculus nemine invidente primas tenebit, inclaruerunt, mille inventorum exempla comprobant, quae, si verum dicere fas est, nostro hoc aevo, ut superiora taceam, etiamnum pro desperatis habebantur...”
>
> ---
>
> تشهد ألفُ مثال من الاكتشافات على مقدار ما تقدمت الهندسة منذ اتضحت طرائق متعددة للامتناهيات—وفي مقدمتها، من دون منازع، حساب التفاضل. وهذه الاكتشافات، إن جاز قول الحق، كانت لا تزال تُعد مستحيلة في عصرنا هذا (فضلاً عن العصور السابقة)...»
>
> Bernoulli, Johann, 1696 “*Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur*”

وبالكتابة باللاتينية، لغة العلم المشتركة في ذلك الزمن، يعالج يوهان معالجة منهجية موضوعات رياضية عدة تُظهر قوة هذه الطرائق التحليلية الجديدة:

1. نقد قيود الهندسة الديكارتية؛
2. خصائص الدائرة وتعميماتها؛
3. خصائص القطع الزائد؛
4. مسائل الإنشاء الهندسي؛
5. تعليق على لايبنتس وتشيرنهاوس؛
6. مسائل مساحة السطوح.

بعد أن يثبت برنولي منهجياً تفوق حساب التفاضل على المقاربات الهندسية التقليدية، يختتم بحثه بما سيصبح أشهر إسهاماته وأبعدها أثراً. تظهر مسألة منحنى أسرع هبوط كما لو كانت تحدياً أخيراً—لكنها تحدٍّ سيعيد تشكيل المشهد الرياضي من أساسه، الشكل 9.13:

Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid Fig. 5) assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua deficendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

Ut harum rerum amatores instigentur & propensiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consistere in nuda speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum; habet enim maximum etiam in aliis scientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam praecipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB sit brevissima inter terminos A & B, non tamen illa brevissimo tempore percurritur; sed est curva AMB Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo alius eam nominaverit.

مسألة جديدة يُدعى الرياضيون إلى حلها.

لتكن نقطتان A وB معطاتين في مستوى رأسي (انظر الشكل 5)، والمطلوب تعيين المسار AMB لجسيم متحرك M بحيث يصل، هابطاً بفعل ثقله وحده ومبتدئاً الحركة من النقطة A، إلى النقطة الأخرى B في أقصر زمن.

ولكي يتحفز محبو هذه الأمور ويُقبلوا على محاولة هذه المسألة بروح أطيب، فليعلموا أنها ليست مجرد تأمل، كما قد يبدو، وكأن لا نفع لها؛ بل إن لها أعظم التطبيقات حتى في علوم غير الميكانيكا، وهو ما لا يصدقه المرء بسهولة. وفي الوقت نفسه (لأستبق لعلّي حكم بعضهم المتعجل)، فرغم أن الخط المستقيم AB هو الأقصر بين الطرفين A وB، فإنه لا يُقطع في أقصر زمن؛ بل يوجد منحنى AMB معروف جداً لدى المهندسين، سأذكر اسمه إن لم يسمّه أحد غيري قبل انقضاء هذا العام.

Bernoulli, Johann, 1696 "*Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur*"

التحدي وأهميته الرياضية تسأل مسألة منحنى أسرع هبوط[18]، التي طرحها يوهان برنولي عام 1696 تحدياً علنياً للمجتمع الرياضي: إذا أُعطيت نقطتان على ارتفاعين مختلفين، فما المنحنى الواصل بينهما الذي يقطع عليه جسيم منزلق تحت تأثير الثقالة، بدءاً من السكون، المسافة في أقصر زمن؟ يخفي هذا السؤال البسيط ظاهراً تعقيداً رياضياً عميقاً، لأنه لا يبحث عن عدد أو دالة تحسّن كمية ما، بل عن منحنى كامل—أي كائن هندسي تحدده نقاط لا نهائية العدد.

تكمن ثورية المسألة في اشتراطها التحسين على فضاء جميع المنحنيات الممكنة، لا على فضاء الأعداد الحقيقية أو المعاملات محدودة الأبعاد فحسب. وهذا نوع من التحدي الرياضي يختلف جذرياً عن مسائل التحسين الجبري التي هيمنت على رياضيات القرن السابع عشر. ففي حين كان التحسين التقليدي يبحث عن قيم المتغيرات التي تعظّم الدوال أو تصغّرها، تطلبت مسألة أسرع هبوط إيجاد الدوال نفسها التي تحسّن التكاملات—وهو ما نسميه اليوم تحسين الداليات.

وحجبت بساطة المسألة الظاهرية بصائر فيزيائية عميقة. فمع أن الحدس قد يوحي بأن أقصر مسار (الخط المستقيم) هو الأسرع أيضاً، أدرك يوهان، مستنداً إلى أبحاث غاليليو السابقة في الأجسام الساقطة، أن الجسيم يستطيع اكتساب السرعة بوتيرة أعلى إذا بدأ بهبوط أشد انحداراً، حتى لو اقتضى ذلك قطع مسافة أطول. وستتصل هذه الفكرة لاحقاً اتصالاً عميقاً بـمبدأ فيرما للزمن الأدنى في البصريات، مؤسِسةً مبادئ تحسين ستغدو أساسية في الفيزياء.

اجتذبت المسألة حلولاً من ألمع رياضيي العصر، منهم إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتس وغيوم دو لوبيتال وياكوب برنولي وعالج كل رياضي التحدي بتقنيات مختلفة، كاشفاً في آن معاً عن تنوع الطرائق الرياضية المتاحة وعن الحاجة إلى مقاربات أكثر منهجية لمسائل التحسين هذه. ومن المشهور أن نيوتن حلها في أمسية واحدة بعد عودته من عمله في دار السك الملكية، ثم أرسل حله من دون اسم. ومع أن الرواية الشائعة تزعم أن برنولي عرف صاحبه فوراً قائلاً إنه يستطيع معرفة *الأسد من مخلبه*، فإن هذه العبارة

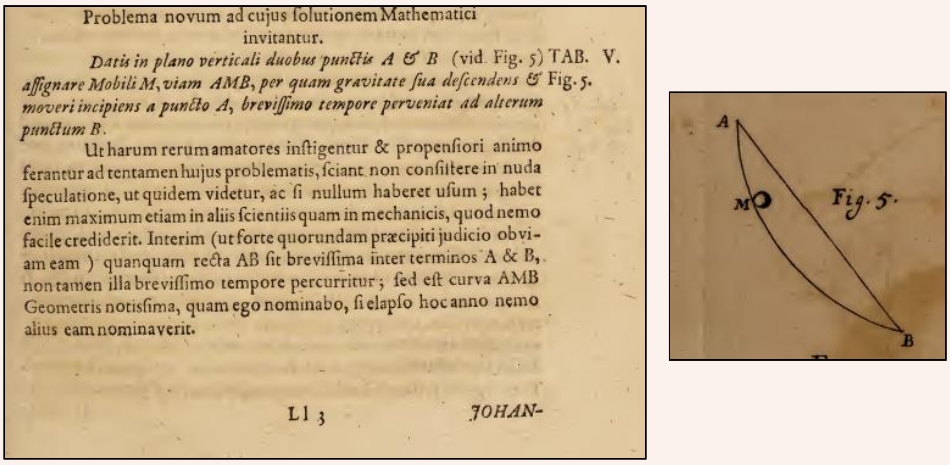
[18] صاغ يوهان برنولي نفسه مصطلح "brachistochrone" (من اليونانية *brachistos*، الأقصر، و*chronos*، الزمن) عندما طرح المسألة تحدياً للمجتمع الرياضي عام 1696. وتطلب المسألة تعيين المنحنى الذي ينزلق عليه جسيم من نقطة إلى أخرى في أقصر زمن تحت تأثير الثقالة وحدها.

الملونة تبدو إضافة تاريخية متأخرة لا واقعة موثقة. وكشفت المنافسة أن المسائل المفردة قد تُحل بطرائق بارعة، لكن المجتمع الرياضي كان يفتقر إلى إطار عام لمعالجة تحسين الداليات.

وباقتراح من لايبنتس، مدّد برنولي التحدي استراتيجياً حتى عيد الفصح عام 1697 من خلال منشور مطبوع عريض سُمي *Programma* وصدر في خرونينغن. وحملت هذه الصيغة الأشد فخامة تاريخ 1 يناير 1697 وفق التقويم الغريغوري، وبدأت بتحد مباشر لنخبة الرياضيين (Bernoulli, Johann, 1697b):

> أنا، يوهان برنولي، أخاطب ألمع رياضيي العالم. ليس أحب إلى الأذكياء من مسألة نزيهة صعبة، يمنح حلها الممكن المجد ويبقى أثراً خالداً.
>
> [Bernoulli, Johann, 1697b Programma [extending the brachistochrone challenge

مثّلت مسألة منحنى أسرع هبوط نقطة تحول في الرياضيات، إذ أسست لما سيُعرف بحساب التغايرات. وأظهر الحل—أن المنحنى الأمثل منحنى دويري—قوة الطرائق التحليلية في أوروبا القارية في لحظة حاسمة من نزاع الأسبقية بين لايبنتس ونيوتن. وعلى نحو أعمق، أرسى حل المسألة مبادئ تحسين ستزدهر لاحقاً في ميكانيكا لاغرانج، وصار منحنى أسرع هبوط مثالاً نموذجياً على أن الطبيعة تبدو وكأنها تسلك مسارات تحسّن كميات معينة. وسيسهم هذا المبدأ في النهاية في بعض أعمق بصائر الفيزياء النظرية، من مبدأ الفعل الأدنى إلى نظرية الحقول الحديثة.



Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V. *aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens &* Fig. 5. *moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Ut harum rerum amatores inſtigentur & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, ſciant non conſiſtere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum etiam in aliis ſcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notiſſima, quam ego nominabo, ſi elapſo hoc anno nemo aliis eam nominaverit.

L l 3 JOHAN-

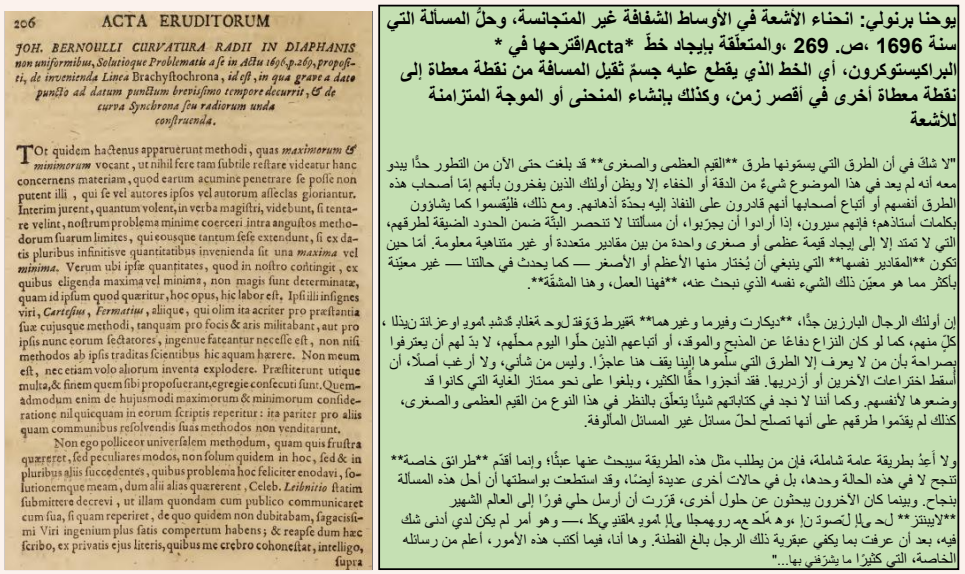
شكل 9.13: تحدي يوهان برنولي لمنحنى أسرع هبوط (Bernoulli, Johann, 1696)

9.3.2.1.2.3 حل يوهان برنولي (1697)

انبثق بحث يوهان برنولي لعام 1697، *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona* (Bernoulli, Johann, 1697a) [19] من هذه البيئة التنافسية، ومثّل لحظة فاصلة في تاريخ الرياضيات. وقد نُشر في *Acta Eruditorum* في مايو 1697، وقدم حلاً بارعاً لما سيُعترف به بوصفه المسألة المؤسسة لحساب التغايرات. وأرسى البحث سابقة رياضية لمسائل التحسين التي تتناول الداليات بدلاً من الدوال—وهي قفزة مفاهيمية لم تُنظم تنظيماً كاملاً حتى بحث أويلر الضخم عام 1744.

[19] العنوان الكامل: *CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p.269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda*، أي: انحناء الأشعة في أوساط شفافة غير منتظمة، وحل المسألة التي اقترحها في أعمال عام 1696، ص. 269، بشأن إيجاد خط أسرع هبوط، أي الخط الذي يقطع عليه جسم ثقيل المسافة من نقطة معطاة إلى نقطة معطاة في أقصر زمن، وبشأن إنشاء المنحنى المتزامن أو موجة الأشعة.

لكن لنبدأ بالصفحة الأولى، الشكل 9.14. تكشف هذه الافتتاحية اللافتة وعي يوهان برنولي الحاد بأنه يواجه نوعاً جديداً



206 ACTA ERUDITORUM

JOH. BERNOULLI CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696. p. 269. propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua gravis a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda.

TOt quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *maximorum & minimorum* vocant, ut nihil fere tam subtile restare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare se posse non putent illi, qui se vel autores ipsos vel autorum assecias gloriantur. Interim jurent, quantum volent, in verba magistri, videbunt, si tentare velint, nostrum problema minime coerceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eousque tantum sese extendunt, ut ex datis pluribus infinitisve quantitatibus invenienda sit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipsæ quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatæ, quam id ipsum quod quæritur, hoc opus, hic labor est. Ipsi illi insignes viri, *Cartesius*, *Fermatius*, aliique, qui olim ita acriter pro præstantia suæ cujusque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipsis nunc eorum sectatores, ingenue fateantur necesse est, non nisi methodos ab ipsis traditas scientibus hic aquam hærere. Non meum est, nec etiam volo aliorum inventa explodere. Præstiterunt utique multa, & finem quem sibi propofuerant, egregie confecuti sunt. Quemadmodum enim de hujusmodi maximorum & minimorum confideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur: ita pariter pro aliis quam communibus resolvendis suas methodos non venditarunt.

Non ego polliceor universalem methodum, quam quis frustra quæreret, sed peculiares modos, non solum quidem in hoc, sed & in pluribus aliis succedentes, quibus problema hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. *Leibnitio* statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicaret cum sua, si quam reperiret, de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens; & reapse dum hæc scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohonestat, intelligo, supra

يوحنا برنولي: انحناء الأشعة في الأوساط الشفافة غير المتجانسة، وحلّ المسألة التي اقترحها في * Acta* سنة 1696، ص. 269، والمتعلّقة بإيجاد خطّ البراكيستوكرون، أي الخط الذي يقطع عليه جسمٌ ثقيل المسافة من نقطة معطاة إلى نقطة معطاة أخرى في أقصر زمن، وكذلك بإنشاء المنحنى أو الموجة المتزامنة للأشعة

"لا شكّ في أن الطرق التي يسمّونها طرق **القيم العظمى والصغرى** قد بلغت حتى الآن من التطور حدًّا يبدو معه أنه لم يعد في هذا الموضوع شيءٌ من الدقة أو الخفاء إلا ويظن أولئك الذين يفخرون بأنهم إمّا أصحاب هذه الطرق أنفسهم أو أتباع أصحابها أنهم قادرون على النفاذ إليه بحدّة أذهانهم. ومع ذلك، فليُقسموا كما يشاؤون بكلمات أستاذهم؛ فإنهم سيرون، إذا أرادوا أن يجرّبوا، أن مسألتنا لا تنحصر البتّة ضمن الحدود الضيقة لطرقهم، التي لا تمتد إلا إلى إيجاد قيمة عظمى أو صغرى واحدة من بين مقادير متعددة أو غير متناهية معلومة. أمّا حين تكون **المقادير نفسها** التي ينبغي أن يُختار منها الأعظم أو الأصغر — كما يحدث في حالتنا — غير معيّنة بأكثر مما هو معيّن ذلك الشيء نفسه الذي نبحث عنه، **فهنا العمل، وهنا المشقّة**.

إن أولئك الرجال البارزين جدًّا، **ديكارت وفيرما وغيرهما** المتمرّسين تمامًا بالدفاع عن حداثة طرقهم الخاصة، كلٌّ منهم، كما لو كان النزاع دفاعًا عن المذبح والموقد، أو أتباعهم الذين حلّوا اليوم محلّهم، لا بدّ لهم أن يعترفوا بصراحة بأن من لا يعرف إلا الطرق التي سلّموها إلينا يقف هنا عاجزًا. وليس من شأني، ولا أرغب أصلًا، أن أسقط اختراعات الآخرين أو أزدريها. فقد أنجزوا حقًّا الكثير، وبلغوا على نحو ممتاز الغاية التي كانوا قد وضعوها لأنفسهم. وكما أننا لا نجد في كتاباتهم شيئًا يتعلّق بالنظر في هذا النوع من القيم العظمى والصغرى، كذلك لم يقدّموا طرقهم على أنها تصلح لحلّ مسائل غير المسائل المألوفة.

ولا أعِدُ بطريقة عامة شاملة، فإن من يطلب مثل هذه الطريقة سيبحث عنها عبثًا؛ وإنما أقدّم **طرائق خاصة** تنجح لا في هذه الحالة وحدها، بل في حالات أخرى عديدة أيضًا، وقد استطعت بواسطتها أن أحل هذه المسألة بنجاح. وبينما كان الآخرون يبحثون عن حلول أخرى، قرّرت أن أرسل حلي فورًا إلى العالم الشهير **لايبنتز** حتى إذا وجد هو نفسه طريقة أخرى، أو كان يملك بالفعل طريقته الخاصة، يرسلها إليّ بدوره لأقارنها بطريقتي. وهو، بعد أن عرفت بما يكفي عبقرية ذلك الرجل بالغ الفطنة. وها أنا، فيما أكتب هذه الأمور، أعلم من رسائله الخاصة، التي كثيرًا ما يشرّفني بها..."

شكل 9.14: حل يوهان برنولي لعام 1697 لتحدي منحنى أسرع هبوط (Bernoulli, Johann, 1697a)

جوهرياً من المسائل الرياضية. فتمييزه بين التحسين التقليدي—إيجاد «قيمة عظمى أو صغرى واحدة من كميات متعددة أو لا نهائية معطاة»—وتحدي أسرع هبوط، حيث «لا تكون الكميات نفسها... محددة أكثر من الشيء المطلوب ذاته»، يلتقط بدقة القفزة المفاهيمية من التحسين محدود الأبعاد إلى التحسين لا نهائي الأبعاد. أدرك يوهان أن طرائق ديكارت وفيرما وأتباعهما تستطيع معالجة المسائل ذات فضاء البحث المحدد، لكنها تعجز عندما يتعين على التحسين ذاته تعيين الدوال المثلى، لا القيم المثلى وحدها. وتكشف هذه البصيرة رقياً رياضياً لافتاً لعام 1697، إذ استبقت بعقود التمييز الصوري بين تحسين المعاملات وتحسين الداليات الذي سيغدو محورياً في حساب التغايرات.

ويلقي المقطع الضوء أيضاً على الثقافة الفكرية وديناميكيات التنافس في رياضيات أواخر القرن السابع عشر. فنقد يوهان اللاذع لسابقيه—أولئك الذين «يقسمون بكلمات معلمهم» ثم يجدون أنفسهم «عالقين» أمام تحديات جديدة—يعكس ثقته بمقاربته المبتكرة وشدة المنافسات الرياضية في عصره معاً. غير أن إقراره في الوقت نفسه بأن أولئك الرياضيين السابقين «أنجزوا الكثير قطعاً»، ونبرته المتوقرة تجاه لايبنتس، يكشفان فهماً دقيقاً للتقدم الرياضي بوصفه تعاوناً وتنافساً في آن. وقد ثبت صدق تحفظه المتواضع بأنه لا يقدم سوى «طرائق خاصة» لا «منهجاً عاماً»، لأن قياسه البصري، على عبقريته في مسألة أسرع هبوط، كان يحتاج بالفعل إلى التعميم المنهجي الذي ظهر في العقود التالية[20].

[20] يتردد صدى نقد يوهان للباحثين الذين «يقسمون بكلمات معلمهم» ويتحاشون مسائل تتجاوز حدود الطرائق الراسخة في الديناميكيات الأكاديمية المعاصرة بصورة لافتة. وقد فرض هذا الموقف تاريخياً الالتزام بالنماذج السائدة، من مقاومة الفلسفة الطبيعية الأرسطية للأوصاف الرياضية للحركة، قبل أن تفسح المجال في النهاية لميكانيكا غاليليو ونيوتن، إلى أمثلة أحدث. ووجد مهندسو الإنشاء أحياناً أنفسهم مقيدين بتقاليد منهجية عند مواجهة مسائل مثل تحليل الانهيار المتتابع أو السلوك الديناميكي اللاخطي للمنشآت تحت الأحمال القصوى. وعلى الرغم من الكفاءة الحسابية والرسوخ، ثبت أن الاعتماد الواسع على التحليل المرن الخطي ونماذج العارضة–العمود المبسطة غير كاف لفهم آليات الانهيار المعقدة المشاهدة في أحداث مثل انهيار مركز التجارة العالمي (National Institute of Standards and Technology (NIST), 2005)، مما استلزم تطوير مقاربات جديدة للعناصر المحدودة وتقنيات نمذجة متعددة المقاييس تحدت فلسفات التصميم التقليدية. ويمكن لعملية مراجعة الأقران، على ضرورتها لحفظ المعايير، أن تديم أحياناً النزعة المحافظة الفكرية نفسها التي انتقدها يوهان، فتفضل التحسينات التدريجية داخل النماذج المقبولة على المقاربات الثورية التي قد تجعل الطرائق القائمة متقادمة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كان تحدي أسرع هبوط قد اجتذب حلولاً من ألمع رياضيي العصر، منهم إسحاق نيوتن وغوتفريد لايبنتس وغيوم دو لوبيتال وياكوب برنولي. وقد عالج كل منهم المسألة بتقنيات مختلفة، لكن حل يوهان ثبت أنه الأشد تأثيراً بفضل منهجيته الجديدة وبصائره الفيزيائية العميقة.

قياس يوهان برنولي البصري وطريقة الحل يجمع حل يوهان برنولي بين بصيرة فيزيائية لافتة وبراعة رياضية. ولما لم يكن بوسعه الاعتماد على طرائق تغايرية منهجية (إذ لم تكن قد وُجدت بعد)، استخدم قياساً بصرياً أنيقاً يقوم على مبدأ فيرما للزمن الأدنى. وكانت فكرته الأساسية معاملة مجال الثقالة على أنه وسط طبقي يتغير فيه «معامل الانكسار» مع الارتفاع، محولاً بذلك مسألة ميكانيكية إلى مسألة بصرية.

تعامل الصياغة الرياضية زمن الانتقال بوصفه $\int \frac{ds}{v(y)}$، حيث تمثل $v(y) = \sqrt{2gy}$ سرعة الجسيم عند الارتفاع y. وبتطبيق قانون سنيل للانكسار ومراعاة تزايد سرعة الجسيم أثناء هبوطه، أثبت يوهان أن المسار الأمثل يجب أن يكون منحنى دويرياً—وهو المنحنى الذي ترسمه نقطة على محيط دائرة تتدحرج على خط مستقيم. وأدرك يوهان فوراً روعة النتيجة، فقال إن "hanc ipsissimam Cycloidem seu tautochronam Hugenianan, esse nostram Brachystochronam quaesitam" (هذا المنحنى الدويري نفسه، أو منحنى هوينغنس المتساوي الزمن، هو منحنى أسرع هبوط الذي نبحث عنه). ويكشف الحل النتيجة العميقة المخالفة للحدس: مسار أسرع هبوط ليس أقصر مسافة (خطاً مستقيماً)، ولا أشد هبوط ابتدائي، بل منحنى يوازن على النحو الأمثل بين التسارع الابتدائي السريع وطول المسار الكلي.

تكمن الأناقة الرياضية لمقاربة يوهان في إدراكه أن مبادئ التحسين في البصريات يمكن نقلها إلى الميكانيكا، مستبقاً مبادئ الفعل الأدنى التي ستصبح لاحقاً أساساً للفيزياء النظرية. ومع ذلك، ظلت طريقته، على براعتها، خاصة بالمسألة وتفتقر إلى العمومية اللازمة لمعالجة مسائل تغايرية أخرى منهجياً. كان الحل عبقرياً لكنه عسير التعميم—وهو قيد حفز تطوير مقاربات أكثر منهجية.

القيود الرياضية والحاجة إلى طرائق عامة على الرغم من اختراقه المفاهيمي، يكشف حل يوهان لعام 1697 القيود الرياضية التي واجهت رياضيي أوائل القرن الثامن عشر عند معالجة مسائل تحسين تتضمن منحنيات. فقياسه البصري، وإن نجح في مسألة أسرع هبوط، لم يقدم إطاراً منهجياً للتصدي لمسائل تغايرية أخرى. وكانت كل مسألة تحسين جديدة تتناول الداليات تتطلب مقاربتها البارعة الخاصة، فبدا المجال أقرب إلى الفن منه إلى العلم المنهجي.

وازدادت هذه الفجوة المنهجية وضوحاً كلما واجه الرياضيون تحديات تحسين إضافية. فقد أبرز حل أسرع هبوط حاجة حاسمة في المنهج الرياضي: لم توجد تقنية عامة لاشتقاق المعادلات التفاضلية التي يجب أن تحققها المنحنيات المثلى. وكان نجاح يوهان مع المنحنى الدويري لافتاً، لكنه لم يفتح طريقاً واضحاً لحل مسائل تغايرية أخرى مثل المنحني المرن أو المسألة متساوية القياس أو المسألة العامة للمنحنيات التي تصغّر تكاملات اعتباطية.

وامتد هذا القيد المنهجي إلى مسألتي وجود الحلول ووحدانيتها. فمع أن يوهان أثبت أن المنحنى الدويري يحل مسألة أسرع هبوط، ظل الإطار الرياضي اللازم لإثبات أنه يحقق الحد الأدنى الشامل الوحيد، أو لتحديد متى تقبل المسائل التغايرية حلولاً أصلاً، غائباً. وكانت هذه الأسئلة التأسيسية تنتظر المقاربة المنهجية التي ستظهر بعد عقود.

الأثر في تطوير الإطار التغايري اللاحق أثرت مسألة أسرع هبوط بعمق في التفكير اللاحق في التحسين، وحفزت مباشرة تطوير طرائق تغايرية منهجية. وازداد وضوح إدراك المجتمع الرياضي أن قياس يوهان البصري، وإن حل مسألة مخصوصة ببراعة، لا يغني الرياضيات عن مبادئ عامة قادرة على معالجة أي مسألة تحسين تتضمن داليات.

وكانت البصيرة الثورية التي ظهرت في النهاية هي تطوير طريقة منهجية لاشتقاق المعادلات التفاضلية التي يجب أن تحققها المنحنيات المثلى، بصرف النظر عن الدالية المحددة المطلوب تحسينها. وستوفر «طريقة القيم التفاضلية» هذه الإطار العام الذي افتقدته مقاربة يوهان—أي وسيلة لتحويل أي مسألة تغايرية إلى معادلة تفاضلية يعطي حلها المنحنى الأمثل.

والصلة بين مسألة أسرع هبوط لعام 1697 وحلول المنحني المرن اللاحقة أعمق من مجرد التسلسل التاريخي. فكلتا المسألتين تبحث عن منحنيات تحسّن كميات تكاملية: تصغّر الأولى زمن الانتقال $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$، بينما تصغّر الثانية طاقة الانفعال $\int \kappa^2 ds$. وتجلت عبقرية التطورات اللاحقة في إدراك أن المسألتين—بل جميع المسائل التغايرية—يمكن حلهما بالمقاربة المنهجية نفسها.

وستصبح مسألة المنحني المرن في النهاية تطبيقاً مباشراً لـالمبادئ التغايرية العامة التي أوحت بها مسألة أسرع هبوط من دون أن تستطيع استغلالها منهجياً. فحيث احتاج يوهان إلى بصيرة فيزيائية خاصة بالمسألة (القياس البصري)، ستوفر الطريقة المنهجية إجراءً شاملاً يصلح لأي مسألة لتحسين الداليات. وهكذا لم يعد المنحني المرن مجرد مسألة أخرى حُلّت، بل صار برهاناً على قوة حساب التغايرات المنهجي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولادة فرع رياضي جديد وهكذا يمثل حل يوهان برنولي لعام 1697 اللحظة المؤسسة التي واجه فيها الرياضيون أول مرة التحدي المفاهيمي للتحسين على فضاءات دوال لا نهائية الأبعاد. ومع أن التقنيات الخاصة المستخدمة—القياس البصري وقانون سنيل—لم تكن قابلة للتعميم، فقد ثبت أن الفكرة الأساسية، وهي إمكان إيجاد المنحنيات بمبادئ التحسين، فكرة ثورية.

أثبتت مسألة أسرع هبوط أن أسئلة أساسية كثيرة في الميكانيكا والهندسة يمكن إعادة صياغتها مسائل تغايرية. وكانت هذه البصيرة حاسمة لا للعمل اللاحق في المنحني المرن فحسب، بل لتطور الفيزياء الرياضية كله. فمن مبدأ هاملتون في الميكانيكا إلى نظريات القياس الحديثة في الفيزياء، يعود إدراك أن الظواهر الطبيعية كثيراً ما تقابل مبادئ تحسين إلى اختراق يوهان عام 1697.

فتح بحث يوهان برنولي، على قصره، فرعاً جديداً تماماً من الرياضيات من غير أن يدري. وكان التطوير المنهجي لهذا الفرع ينتظر الإسهامات المفاهيمية الحاسمة في أربعينيات القرن الثامن عشر، لكن الأساس التصوري—إدراك أن التحسين يستطيع تعيين دوال كاملة، لا أعداداً فحسب—كان قد ترسخ ترسيخاً حاسماً. وتحولت مسألة أسرع هبوط من تحد منفرد إلى المثال المؤسس لما سيصبح أحد أقوى الأطر النظرية في الرياضيات.

الفجوة الرياضية: من 1697 إلى أربعينيات القرن الثامن عشر اتسمت الفترة التالية لاختراق يوهان بمحاولات متفرقة لحل مسائل تغايرية منفردة بطرائق موضعية. وواجه الرياضيون المسألة متساوية القياس، ومسائل السلاسل المعلقة، وتحديات متنوعة لتحسين المنحنيات، لكن كل واحدة منها تطلبت مقاربتها البارعة الخاصة. وأدرك المجتمع الرياضي تدريجياً شدة الحاجة إلى إطار منهجي.

وخلال هذه العقود، مهدت تطورات حاسمة عدة للتقدم المقبل. فتعمق فهم المعادلات التفاضلية، وتحسنت طرائق معالجة الشروط الحدية، واتضحت العلاقة المفاهيمية بين التحسين والمعادلات التفاضلية. غير أن البصيرة الأساسية التي ستوحد جميع المسائل التغايرية في مقاربة منهجية واحدة ظلت بعيدة المنال.

وفي ظل هذه الخلفية الرياضية قدم دانيال برنولي إسهامه المفصلي عام 1742، إذ أدرك أن المبادئ الفيزيائية لتصغير الطاقة تستطيع توفير الجسر المفاهيمي بين قياس يوهان البصري الخاص بالمسألة وإطار تغايري عام حقاً. وستثبت ضرورة هذه البصيرة للتطوير المنهجي لحساب التغايرات الذي أعقبها سريعاً.

9.3.2.1.2.4 حل دانيال برنولي (1742)

يتناول هذا القسم رسالة لافتة بعث بها دانيال برنولي إلى ليونارد أويلر في 20 أكتوبر 1742 (**DanielBernoulli1742toEuler**)، وتمثل انتقالاً حاسماً في تطور الطرائق التغايرية، الشكل 9.15. والمسألة التقنية التي يشير إليها دانيال—حركة كرة داخل أنبوب متحرك—تطور مباشر من تحدي أسرع هبوط الأصلي، لكن مع طبقات إضافية من التعقيد كشفت قيود الطرائق القائمة. ففي حين سألت مسألة يوهان لعام 1696 (Bernoulli, Johann, 1696 📄) عن منحنى أسرع هبوط تحت تأثير الثقالة وحدها، تُدخل مسألة الأنبوب عند دانيال قيوداً ديناميكية وأطراً مرجعية متحركة: يجب أن تتبع الكرة المسار الذي يفرضه الأنبوب، بينما يتحرك الأنبوب نفسه وفق حركة محددة. وينشأ من ذلك مسألة تحسين مقيد لا تعتمد فيها الحركة المثلى على الثقالة وحدها، بل على التفاعل بين عطالة الكرة وحركة الأنبوب وقوى القيد.

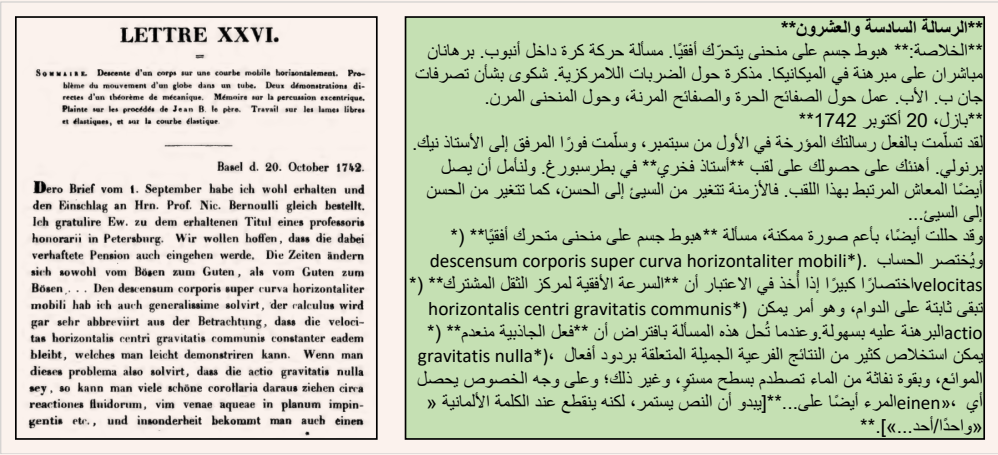
أصبحت المقاربات الهندسية التقليدية، التي احتاجت حتى في مسألة أسرع هبوط الأبسط إلى قياس يوهان البصري البارع، عسيرة الاستعمال أمام مسائل القيود المتحركة هذه. أما مبادئ دانيال القائمة على الطاقة فاستطاعت معالجة هذا التعقيد بأناقة، إذ عاملت طاقة النظام كله على أنها كمية موحدة بدلاً من محاولة تتبع مركبات القوى المفردة عبر أنظمة إحداثيات متغيرة. ويعكس المزج اللغوي في رسالة دانيال لحظة الانتقال الأوسع هذه في الرياضيات نفسها. فكما كانت اللغة الرياضية تتطور من أوصاف هندسية محضة إلى تعبيرات أكثر تحليلية، كانت لغة الرياضيات الحرفية تنتقل من اللاتينية العالمية إلى تواصل أيسر باللغات الدارجة. ويحاكي انتقال دانيال السلس بين الشروح الألمانية والمصطلحات التقنية اللاتينية اختراقه المنهجي: فقد كان يطور مبادئ تغايرية قائمة على الطاقة تستطيع أن تعالج منهجياً فئة مسائل التحسين المقيد كلها، بما فيها مسألة أسرع هبوط الأصلية ليوهان وديناميكيات الأنبوب الأعقد هذه بوصفها حالات خاصة.

تظهر بصيرة دانيال المنهجية الأساسية في قوله:

> da ich aber ganz andere principia gebrauche, muss ich auch ganz andere denominationes annehmen

---

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



LETTRE XXVI.

Sommaire. Descente d'un corps sur une courbe mobile horizontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen. . . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

الرسالة السادسة والعشرون

الخلاصة: هبوط جسم على منحنى يتحرّك أفقيًا. مسألة حركة كرة داخل أنبوب. برهانان مباشران على مبرهنة في الميكانيكا. مذكرة حول الضربات اللامركزية. شكوى بشأن تصرفات جان ب. الأب. عمل حول الصفائح الحرة والصفائح المرنة، وحول المنحنى المرن.

بازل، 20 أكتوبر 1742

لقد تسلّمت بالفعل رسالتك المؤرخة في الأول من سبتمبر، وسلّمت فورًا المرفق إلى الأستاذ نيك. برنولي. أهنئك على حصولك على لقب **أستاذ فخري** في بطرسبورغ. ولنأمل أن يصل أيضًا المعاش المرتبط بهذا اللقب. فالأزمنة تتغير من السيئ إلى الحسن، كما تتغير من الحسن إلى السيئ...

وقد حللت أيضًا، بأعم صورة ممكنة، مسألة **هبوط جسم على منحنى متحرك أفقيًا** (*descensum corporis super curva horizontaliter mobili*). ويُختصر الحساب اختصارًا كبيرًا إذا أُخذ في الاعتبار أن **السرعة الأفقية لمركز الثقل المشترك** (*velocitas horizontalis centri gravitatis communis*) تبقى ثابتة على الدوام، وهو أمر يمكن البرهنة عليه بسهولة. وعندما تُحل هذه المسألة بافتراض أن **فعل الجاذبية منعدم** (*actio gravitatis nulla*)، يمكن استخلاص كثير من النتائج الفرعية الجميلة المتعلقة بردود أفعال الموائع، وبقوة نفاثة من الماء تصطدم بسطح مستوٍ، وغير ذلك؛ وعلى وجه الخصوص يحصل المرء أيضًا على...**[يبدو أن النص يستمر، لكنه ينقطع عند الكلمة الألمانية «einen» أي «واحدًا/أحد...»].**

شكل 9.15: رسالة دانيال برنولي إلى أويلر، (DanielBernoulli1742toEuler)

بما أنني أستخدم مبادئ مختلفة تماماً، فلا بد أن أعتمد تسميات مختلفة تماماً.

DanielBernoulli1742toEuler

يكشف ذلك تحولاً أساسياً في النموذج من الطرائق الهندسية والحركية إلى مقاربات قائمة على الطاقة، وهو تحول سيُثبت التاريخ أثره الجذري.

شبكة المراسلات تمثل مراسلات أويلر–برنولي إحدى أهم المبادلات العلمية في القرن الثامن عشر. فقد حافظ ليونارد أويلر (1707–1783) ودانيال برنولي (1700–1782) على تواصل واسع طوال مسيرتيهما، وناقشا مسائل في الميكانيكا والرياضيات والفيزياء[21].

صيغة الطاقة المرنة والحدس الفيزيائي يقدم دانيال برنولي في رسالة أكتوبر 1742 إحدى أقدم الصياغات الصريحة للطاقة المرنة:

$$\int \frac{ds}{R^2} \tag{9.6}$$

حيث ds عنصر طول القوس، وR نصف قطر الانحناء، وتمثل $\frac{1}{R^2}$ مربع الانحناء.

تمثل هذه الصيغة طاقة انحناء قضيب أو عارضة مرنة، غير أن صياغة برنولي قامت على الحدس الفيزيائي لا على اشتقاق صارم. واتبع استدلاله خطوات حدسية عدة: إدراك أن الطاقة المرنة ينبغي أن تتركز حيث يكون انحناء العارضة أشد (مما يوحي باعتمادها على الانحناء $\kappa = 1/R$)، واستشعار أن هذه الطاقة ينبغي أن تتناسب تربيعياً مع التشوه قياساً على أنظمة فيزيائية أخرى، وفهم أن الطاقة الكلية تُحصل بتكامل كثافة الطاقة الموضعية على طول العارضة.

يذكر دانيال أنه يفترض ("ich annehme") أن

"die *vis viva* potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn

---

القوة الحية الكامنة في الصفيحة المرنة يجب أن تكون في حدها الأدنى.

DanielBernoulli1742toEuler

[21] للاطلاع على طبعة رقمية شاملة لمراسلات أويلر–برنولي، انظر مشروع برنولي–أويلر على الإنترنت (BEOL)، وأرشيف أويلر، وقاعدة بيانات رسائل العصر الحديث المبكر على الإنترنت (EMLO)، وكلها تتيح نصوصاً قابلة للبحث وبيانات وصفية وصوراً عالية الدقة للرسائل الأصلية

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهذا مثال لافت على سبق الحدس الفيزيائي الاشتقاق الرياضي الصارم بأكثر من قرن؛ إذ ظهر الأساس النظري الصحيح مع ميكانيكا الأوساط المتصلة عند كوشي (Cauchy, 1823)، ونظرية المرونة عند بواسون (Poisson, 1829)، ونظرية الصفائح عند كيرشهوف عام 1859 (Kirchhoff, 1859).

الطرائق التغايرية والإطار الرياضي يذكر برنولي صراحة استعماله "methodum isoperimetricorum" (طريقة المسائل متساوية القياس) لحل مسألة المنحنى المرن، بما يتضمنه ذلك من تحسين مقيد للداليات وإيجاد منحنيات تصغّر الطاقة مع الخضوع لقيود هندسية. ويذكر أنه حصل من مقاربته التغايرية على "eine aequationem differentialem 4ti ordinis" (معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة)؛ ولهذا أهمية خاصة لأن معادلة عارضة أويلر–برنولي من الرتبة الرابعة بالفعل، مما يبين الصلة بين المبادئ التغايرية والمعادلات التفاضلية قبل تطوير أويلر المنهجي لمعادلة أويلر–لاغرانج بعامين.

تناقش الرسالة المسألة العامة لصفيحة مرنة ذات طول معلوم، مثبتة عند نقطتين مع اتجاهين معلومين للمماس عند الطرفين، وهي من أقدم صياغات مسائل القيم الحدية في نظرية المرونة.

الابتكارات المفاهيمية تُظهر الرسالة تطورات حاسمة عدة: صياغة الطاقة المرنة تكاملاً للانحناء، وتطبيق تقنيات تساوي القياس على مسائل فيزيائية، وفكرة أن التشكيلات الطبيعية تصغّر الطاقة، والصلة بين الفيزياء وحساب التفاضل والتكامل المتقدم. وتسبق مراسلات عام 1742 كتاب أويلر *Methodus inveniendi* (Euler, 1744b)، وعمل دالمبير على الأوتار المهتزة (D'Alembert, 1747)، وكتاب لاغرانج *Mécanique Analytique* (Lagrange, 1788).

التمهيد للتطوير المنهجي أتاحت صياغة دانيال الطاقة المرنة عام 1742 وتطبيقه طرائق تساوي القياس فرصة وطرحت تحدياً للمجتمع الرياضي في آن. وكانت بصائره الفيزيائية عميقة؛ إذ سيصبح إدراك أن التشكيلات الطبيعية تصغّر الطاقة أساسياً في الفيزياء النظرية كلها. غير أن مقاربته ظلت مرتبطة بمسائل مخصوصة وافتقرت إلى الإطار المنهجي اللازم لمعالجة النطاق الكامل للمسائل التغايرية.

كانت الفجوة الرياضية واضحة: فمع أن دانيال استطاع صياغة تعبيرات للطاقة مثل $\int ds/R^2$ وتطبيق تقنيات تساوي القياس لاشتقاق معادلات تفاضلية من الرتبة الرابعة، لم توجد طريقة عامة لتحويل المسائل التغايرية الاعتباطية إلى معادلاتها التفاضلية المقابلة. وكانت كل دالية طاقة جديدة تتطلب مقاربتها البارعة الخاصة، مثلما احتاج منحنى أسرع هبوط عند يوهان إلى القياس البصري قبل ذلك بنحو خمسين عاماً.

دفع هذا القيد المنهجي أويلر إلى بحثه المنظم. فبعد استيعابه بصائر دانيال في تصغير الطاقة، ومعاينته قوة المقاربات التغايرية من خلال مراسلاتهما، أدرك أويلر الحاجة إلى إطار شامل—طريقة منهجية تستطيع معالجة أي مسألة لتحسين الداليات، سواء تعلقت بالطاقة المرنة أم بالخطوط الجيوديسية أم بمبادئ فيزيائية جديدة لم تُكتشف بعد. ويمثل الانتقال من الحدس الفيزيائي بشأن مبادئ الطاقة إلى صياغتها الرياضية الصارمة أحد أهم تطورات علم القرن الثامن عشر، وتتيح رسالة دانيال نافذة فريدة على ذلك الانتقال الحاسم الذي مهد للتركيب الثوري الآتي عام 1744.

9.3.2.1.2.5 المسائل متساوية القياس وحساب التغايرات

قبل دراسة مقاربة أويلر التغايرية، يلزم وضع بعض المصطلحات في سياقها.

تمثل المسائل متساوية القياس فئة مخصوصة من تحديات التحسين نشأت من أسئلة هندسية قديمة، وأشهرها مسألة ديدو: أي منحنى من جميع المنحنيات المغلقة ذات المحيط الثابت يحصر أكبر مساحة؟ وتتميز هذه المسائل بالحاجة إلى تحسين كمية هندسية أو فيزيائية مع الإبقاء على قيد في كمية أخرى.

أما حساب التغايرات فهو الإطار الرياضي الشامل الذي تطور لمعالجة المسائل متساوية القياس منهجياً، إلى جانب أنواع كثيرة أخرى من تحسين الداليات. ومع أن المسائل متساوية القياس وفرت حافزاً حاسماً لتطوير الطرائق التغايرية—ولا سيما من خلال خلافات الأخوين برنولي في أوائل القرن الثامن عشر—فإن النظرية الرياضية الناتجة تتجاوز التحسين المقيد بكثير لتشمل كل مسألة تتضمن تحسين الداليات.

في الرياضيات المعاصرة، تشكل المسائل متساوية القياس الفرع المقيد من حساب التغايرات. ومع أنها دفعت تاريخياً إلى تطوير الطرائق التغايرية المنهجية، فإنها تمثل اليوم فئة مهمة واحدة داخل مجال تحسين الداليات الأوسع، الذي يشمل المسائل المقيدة وغير المقيدة معاً.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.5: المسائل متساوية القياس وحساب التغايرات

الجانب	المسائل متساوية القياس	حساب التغايرات
التعريف	مسائل تحسين ذات قيود هندسية (مثل محيط ثابت)	إطار رياضي عام لتحسين الداليات
النطاق	نوع مخصوص من التحسين المقيد	مجال واسع يشمل جميع صور تحسين الداليات
الفترة التاريخية	أصول قديمة (مسألة ديدو)، وحلول حالة بحالة حتى القرن الثامن عشر	تطور منهجي من 1696 (أسرع هبوط) إلى 1744 (أويلر)
البنية الرياضية	تحسين $I[y]$ بشرط $J[y] =$ ثابت	تحسين $I[y] = \int F(x, y, y')dx$ (مقيد أو غير مقيد)
طريقة الحل	مضاعفات لاغرانج: $\delta(I - \lambda J) = 0$	معادلة أويلر–لاغرانج: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
الأمثلة الكلاسيكية	الدائرة (أكبر مساحة ومحيط ثابت)، مسألة ديدو، أسرع هبوط المقيد	أسرع هبوط، والمنحني المرن، والخطوط الجيوديسية، والسطوح الدنيا، ومبدأ فيرما
كبار المساهمين	ياكوب ويوهان برنولي (خلافات 1697–1701)، ولاغرانج (طريقة المضاعفات)	يوهان برنولي (1696)، وأويلر (1744)، ولاغرانج (1788)
العلاقة الحديثة	فرع من حساب التغايرات (المسائل المقيدة)	نظرية عامة تشمل المسائل متساوية القياس بوصفها حالات خاصة

9.3.2.2 حل أويلر (حساب التغايرات) (1744)

يمثل كتاب أويلر لعام 1744 *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Euler, 1744b)، الشكل 9.16a، إنجازاً فارقاً في التحليل الرياضي، سواء بتطويره المنهجي لحساب التغايرات أم بتطبيقاته المبتكرة. ويتكون العمل من:

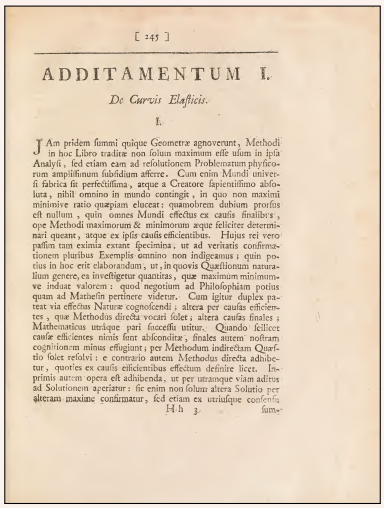
- ستة فصول رئيسية سُلّمت إلى الناشر في يوليو 1743؛
- ملحقين سُلّما في ديسمبر 1743، يتناول الأول المنحنيات المرنة والثاني مبدأ الفعل الأدنى.

تعكس هذه البنية مقاربة أويلر المنهجية: فالمتن الرئيسي يؤسس القواعد النظرية لما سيُعرف بحساب التغايرات الكلاسيكي، بما فيه معادلة أويلر التفاضلية (معادلة أويلر–لاغرانج اليوم)، بينما يبين الملحقان قوة الطرائق الجديدة بتطبيقات صعبة، ويعرض *Additamentum I* حله لمسألة المنحني المرن. وقد نُشر البحث في سبتمبر 1744، فجعل أويلر المنشئ الرئيس للمرحلة الأولى من حساب التغايرات، ورسخ مكانته أعظم رياضي حي في عصره. ويؤكد وضع حل المنحني المرن استراتيجياً في ملحق لا في المتن أن أويلر رآه تطبيقاً متقدماً لمبادئه التغايرية الجديدة، لا إسهاماً نظرياً أساسياً مستقلاً.

المتن الرئيسي: تأسيس حساب التغايرات تؤسس الفصول الستة للعمل الرئيسي القواعد المنهجية لحساب التغايرات. وكان إسهام أويلر الثوري[22] طريقته المنظمة لإيجاد المنحنيات التي تحسّن الداليات التكاملية. ومثّل ذلك نوعاً جديداً جذرياً من المسائل الرياضية: فبدلاً من إيجاد قيم تحسّن دوالاً، أصبح الهدف إيجاد دوال تحسّن داليات.

[22] يعتمد هذا القسم أساساً على الترجمة الإنجليزية الموثوقة وتعليق Oldfather, Ellis **and** Brown, 1933.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


[245]

ADDITAMENTUM I.

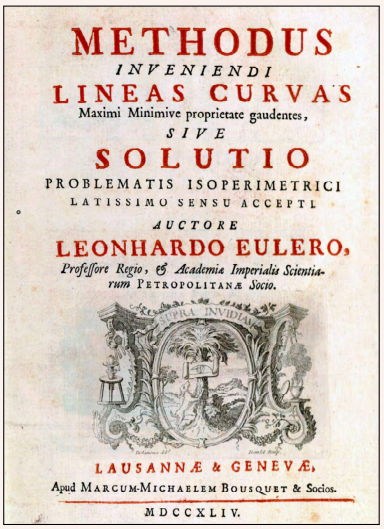
De Curvis Elafticis.

I.

JAm pridem fummi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non folum maximum effe ufum in ipfa Analyfi, fed etiam eam ad refolutionem Problematum phyficorum amplifimum fubfidium afferre. Cum enim Mundi univerfi fabrica fit perfectiffima, atque a Creatore fapientiffimo abfoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat: quamobrem dubium prorfus eft nullum, quin omnes Mundi effectus ex caufis finalibus, ope Methodi maximorum & minimorum æque feliciter determinari queant, atque ex ipfis caufis efficientibus. Hujus rei verò paffim tam eximia extant fpecimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quæftionum naturalium genere, ea inveftigetur quantitas, quæ maximum minimumve induat valorem; quod negotium ad Philofophiam potius quam ad Mathefin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturæ cognofcendi; altera per caufas efficientes, quæ Methodus directa vocari folet; altera caufas finales; Mathematicus utráque pari fucceffu utitur. Quando fcilicet caufæ efficientes nimis funt abfconditæ, finales autem noftram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quæftio folet refolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex caufis efficientibus effectum definire licet. Inprimis autem opera eft adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: fic enim non folum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, fed etiam ex utriufque confenfu fum-

H h 3

Additamentum I: De curvis elasticis (b) (Euler, 1744a)


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Profeffore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

Methodus iveniendi lineas... (a) (Euler, 1744b)

شكل 9.16: بحث أويلر لعام 1744 في حساب التغايرات (Euler, 1744b)

لدالية عامة من الصورة:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} Z(x, y, p, q, r, \dots)\, dx \tag{9.7}$$

حيث $p = dy/dx$ و$q = dp/dx = d^2y/dx^2$ و$r = dq/dx = d^3y/dx^3$، وهكذا، يُدخل أويلر المفهوم الثوري «للقيمة التفاضلية».

ويكتب التفاضل الكلي لـZ على الصورة:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots \tag{9.8}$$

حيث:

$$M = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p} \tag{9.9}$$

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad R = \frac{\partial Z}{\partial r} \tag{9.10}$$

البصيرة الحاسمة هي أنه لكي تكون للدالية I قيمة متطرفة، يجب أن تنعدم «قيمتها التفاضلية»:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots \right) \delta y\, dx = 0 \tag{9.11}$$

ولما كان هذا يجب أن يتحقق لتغايرات اعتباطية δy، فلا بد أن تنعدم الدالة تحت التكامل، فنحصل على ما نسميه اليوم معادلة أويلر–لاغرانج:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots = 0 \tag{9.12}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كانت هذه الطريقة المنهجية لاشتقاق المعادلات التفاضلية من مبادئ التحسين جديدة تماماً، وستحدث ثورة لا في الميكانيكا وحدها بل في الفيزياء الرياضية كلها. وطبق أويلر هذا الإطار عبر الفصول الستة على مسائل كلاسيكية شملت منحنى أسرع هبوط، والمسائل متساوية القياس، وتحديات متنوعة في التحسين الهندسي، مبيناً عمومية مقاربته وقوتها.

ويؤكد أويلر أهمية التحقق المزدوج في مقاربته المنهجية:

> Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque consensu summam percipimus voluptatem.

> لكن ينبغي بذل جهد خاص لفتح طريقي الوصول إلى حل المسألة كليهما؛ فبذلك لا يعزز أحد الحلين الآخر تعزيزاً كبيراً فحسب، بل نحصل فوق ذلك من توافق الحلين على أسمى درجات الرضا.
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes، القسم 1

وسيكون مبدأ التحقق المزدوج هذا محورياً في معالجته مسألة المنحني المرن في الملحق.

الملحق الأول: التطبيق على المنحني المرن بعد أن أسس أويلر الإطار العام لحساب التغايرات في الفصول الرئيسية، انتقل في الملحق الأول إلى أصعب تطبيقاته، *Additamentum I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a)، الشكل 9.16b. ولم يكن هذا التطبيق مجرد توضيح؛ فقد حفزته بصيرة فيزيائية حاسمة من دانيال برنولي، ومثّل أحد أبدع العروض لقوة إطار أويلر الرياضي الجديد.

بصيرة دانيال برنولي ومراسلاته كان دانيال برنولي قد اقترح في رسالة إلى أويلر عام 1742 إمكان الحصول على معادلة المنحني المرن بافتراض أن تعبيراً معيناً—ما نسميه اليوم طاقة الانفعال—يبلغ حده الأدنى عند الاتزان:

> Ich möchte wissen, ob Ew. die curvaturam laminae elasticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixirt sey, also dass die Tangentes in istis punctis auch positione datae seyen… Dieses ist die idea generalissima elasticarum; hab aber sub hac facie noch keine Solution gefunden, als per methodum isoperimetricorum, da ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn, wie ich Ew. schon einmal gemeldet. Auf diese Weise bekomme ich eine aequationem differentialem 4ti ordinis, welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequatio ordinaria elastica general sey.

> أود أن أعرف ما إذا كان بوسعكم حل انحناء الصفيحة المرنة بشرط أن تكون صفيحة ذات طول معلوم مثبتة عند نقطتين معلومتَي الموضع، وأن تكون مماساتها عند هاتين النقطتين معلومة الاتجاه أيضاً... هذه أعم فكرة للمنحنيات المرنة؛ غير أنني لم أجد حتى الآن حلاً في هذه الحالة إلا بطريقة تساوي القياس، على افتراضي أن القوة الحية الكامنة في الصفيحة المرنة يجب أن تكون في حدها الأدنى، كما ذكرت لكم من قبل. وبهذه الطريقة أحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة، لم أتمكن من اختزالها بما يكفي لإظهار انطباق المعادلة العادية على المنحني المرن العام.
>
> **DanielBernoulli1742toEuler**

لاحظ أن *lamina* تعني شريحة أو عارضة رقيقة مسطحة مرنة—أي ما يسميه المهندسون اليوم عارضة مرنة أو كابولاً. يفترض أويلر أن الصفيحة نحيلة (الطول ≫ العرض ≫ السماكة)، مهملة الوزن قياساً إلى الأحمال المطبقة، غير قابلة للتمدد طولياً، ومرنة (تعود إلى شكلها المستقيم الأصلي عند إزالة الحمل). ويمكن تصور مسطرة ممسوكة من أحد طرفيها وتثنيها قوة عند الطرف الآخر،

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو لوح قفز. وكانت الكلمة اللاتينية "lamina" (أي «صفيحة رقيقة») مصطلحاً معيارياً في القرن الثامن عشر لكل عنصر إنشائي نحيل ينثني أساساً بتغير الانحناء لا بالتمدد.

> ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn
>
> ---
>
> أفترض أن القوة الحية الكامنة في الصفيحة المرنة يجب أن تكون في حدها الأدنى.
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes
>
> Sonsten exprimire ich die vim vivam potentialem laminae elasticae naturaliter rectae et" "$\int (ds/R^2)$ incurvatae durch
>
> ---
>
> أعبّر عن القوة الحية الكامنة لصفيحة مرنة مستقيمة بطبيعتها لكنها منحنية بواسطة $\int (ds/R^2)$.
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

تكشف المراسلات أيضاً حال أكاديمية سانت بطرسبرغ الهشة وسط التحولات السياسية عام 1742، مما اضطر الباحثين إلى التخطيط لمكان النشر وتوقيته، وتعكس واقع الحياة الأكاديمية القاسي في القرن الثامن عشر، حين كان كبار الباحثين كثيراً ما ينسبون أعمال الأصغر إليهم.

الصياغة التغايرية للمنحني المرن يبني أويلر مباشرة على بصيرة دانيال برنولي الحاسمة عام 1742 بشأن الطاقة الدنيا، فيصوغ مسألة المنحني المرن على هيئة مبدأ تغايري. ويعرض المسألة بدقته المعهودة:

> transeant, B & A ut, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quae non solum per puncta sed etiam in his punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus minimus $\int \frac{ds}{R^2}$ expressionis.
>
> ---
>
> أن يُعيّن، من بين جميع المنحنيات المتساوية الطول التي لا تمر بالنقطتين A وB فحسب، بل تمس أيضاً خطين مستقيمين معلومين عندهما، المنحنى الذي تكون فيه قيمة $\int \frac{ds}{R^2}$ في حدها الأدنى.
>
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes، القسم 2

يتمثل الاختراق المفاهيمي الأساسي في إدراك أن المنحنيات المرنة تقابل تشكيلات تصغّر دالية الطاقة الكلية:

$$I = \int \left[\frac{1}{2} EI\kappa^2 + V(x, y) \right] ds \tag{9.13}$$

حيث يمثل الحد الأول طاقة الانفعال المرن (المتناسبة مع مربع الانحناء)، وتمثل $V(x, y)$ الطاقة الكامنة للقوى الخارجية.

وفي حالة المنحني المرن الصرف (من دون قوى خارجية)، تختزل إلى:

$$I = \int \kappa^2 \, ds = \int \frac{1}{R^2} \, ds \tag{9.14}$$

توفر صياغة الطاقة هذه بصيرة فيزيائية مباشرة افتقدتها المقاربات السابقة. فهي تفسر:

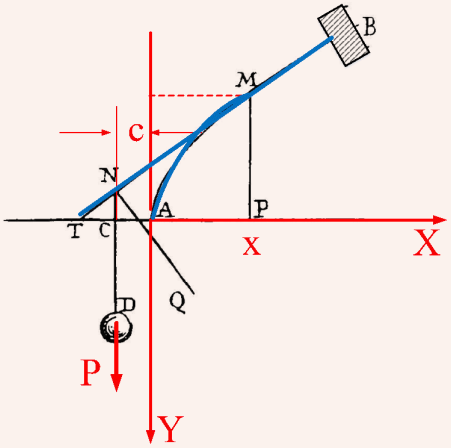
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **سبب اختيار حلول بعينها**: تختار الطبيعة التشكيلات التي تصغّر الطاقة الكلية؛
- **تعدد فروع الحل**: تؤدي الشروط الحدية المختلفة إلى قيم دنيا مختلفة لدالية الطاقة؛
- **الاستقرار**: تشكيلات الطاقة الدنيا مستقرة بطبيعتها؛
- **قابلية التعميم**: ينطبق المبدأ نفسه على جميع مسائل المرونة.

يفسر مبدأ الطاقة فوراً ملاحظة هوينغنس عام 1694 بشأن تعدد أشكال المنحنى المرن الممكنة: تؤدي الشروط الحدية ومعاملات التحميل المختلفة إلى قيم دنيا مختلفة لدالية الطاقة، يمثل كل منها تشكيلاً قابلاً للتحقق فيزيائياً.

الاشتقاق المباشر والتحقق وفاءً بمبدأ التحقق المزدوج، يمضي أويلر إلى اشتقاق المعادلة نفسها بالمبادئ الميكانيكية المعروفة، مثبتاً بذلك صحة الإجراء التغايري. ففي أقسام الملحق الافتتاحية تحقق من حدس دانيال بطرائق حساب التغايرات، ثم خصص معظم الملحق لدراسة ميكانيكا الصفائح المرنة بطرائق مباشرة مستقلة عن الرياضيات التغايرية.

في اشتقاقه المباشر، يتناول أويلر صفيحة AB مثبتة تثبيتاً تاماً في مسند عند B، الشكل 9.17. وتُعد النقطة B والمماس للصفيحة عندها ثابتين. وعند الطرف الآخر A يُثبت قضيب عديم الوزن، وتؤثر قوة P من طرف القضيب C[23]. ويُفترض أن وزن الصفيحة مهمل بالمقارنة مع P.



شكل 9.17: «مخطط الجسم الحر» لطريقة أويلر المباشرة

قارن بالشكل 9.28 للاطلاع على تعميم أويلر اللاحق (1771) لمخطط المنحني المرن هذا لعام 1744.

يستخدم أويلر جهاز إحداثيات ديكارتي أصله عند A، وموجّه بحيث يتطابق محور y مع اتجاه القوة P. ولتكن M نقطة على الصفيحة إحداثياها x وy. يكون العزم الذي تحدثه القوة الخارجية حول M هو $\mathfrak{M} = P(x+c)$، حيث c المسافة من A إلى النقطة C. ويعبّر أويلر عن «القوة المرنة» المقاومة للصفيحة عند M (ما نسميه اليوم عزم الانحناء) بالصيغة Ek^2/R، حيث Ek^2 كمية تقيس «صلابة» الصفيحة، وR هو نصف قطر انحنائها عند M. وفي الاتزان يجب أن يتساوى التعبيران:

$$\mathfrak{M} = P(c + x) = \frac{\mathfrak{B}}{R} \tag{9.15}$$

حيث تسمى $\mathfrak{B} = Ek^2$ «معامل الانحناء».

[23] تجدر الإشارة إلى أن المنحنى المرن يوفر في مقاربة أويلر نموذجاً موحداً، وأن جهاز الإحداثيات يوجّه مرة واحدة بالنسبة إلى اتجاه القوة الخارجية P. ولعل هذا سبب استعمالنا مصطلح جهاز الإحداثيات الأويلري (في مقابل اللاغرانجي)، المستخدم في الإزاحات الكبيرة أو ميكانيكا الموائع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وكان ياكوب برنولي قد اشتق من قبل تعبير نصف قطر الانحناء (المعادلة 8.17):

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

بالتعويض بهذا التعبير عن R في المعادلة 9.15 والتكامل، يحصل أويلر على:

$$dy = \frac{-P\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)^2\right)}}dx \tag{9.16}$$

حيث f ثابت تكامل. ويفضل أويلر إعادة التعبير عنها بدلالة الصورة العامة التي حصل عليها من قبل بالإجراء التغايري:

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{\sqrt{\left(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2\right)}}dx \tag{9.17}$$

حيث ترتبط الكميات a وα وβ وγ بكميات المعادلة 9.16 بالعلاقات:

$$P = \frac{-2Ek^2\gamma}{a^2}; \qquad c = \frac{\beta}{2\gamma}; \qquad f = \frac{\alpha}{2\gamma} \tag{9.18}$$

تحدد إشارة الثابت γ اتجاه القوة P؛ فعندما تكون γ موجبة تتجه القوة في اتجاه محور y الموجب، وعندما تكون سالبة تتجه في اتجاه محور y السالب.

أدرك أويلر المكونات الأساسية للسلوك المرن حتى من دون نظرية تحليل الإجهاد الحديثة. وكما يذكر في مناقشته معامل الانحناء:

> natura materiae, ex qua lamina est ab primum pendet Ekk Haec autem elasticitas absoluta fabrefacta; unde alia materia magis, alia minus elatere prodita dici solet. Secundo quoque ita ubique latitudini laminae debeat esse propor- Ekk pendet a laminae latitudine, ut expressio tionalis, si cetera sint paria. Tertio vero crassities laminae plurimum confert ad valorem ipsius sit ut crassitiei Ekk ,Ekk determinandum, quae ita comparata esse videtur, ut, ceteris paribus rationem compositam ex ratione elateris Ekk quadratum. Conjunctim ergo tenebit expressio .materiae, latitudinis laminae simplici, ac duplicata crassitiei laminae

---

تعتمد هذه المرونة المطلقة Ek^2، في المقام الأول، على طبيعة المادة التي صُنع منها الشريط... وتعتمد، في المقام الثاني، على عرض الشريط بحيث ينبغي أن يتناسب التعبير Ek^2 في كل موضع مع العرض، مع ثبات سائر العوامل. أما في المقام الثالث، فتسهم سماكة الشريط إسهاماً كبيراً في تعيين قيمة Ek^2، ويبدو تركيبها بحيث يتناسب Ek^2، مع ثبات سائر العوامل، مع مربع السماكة.

Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes، القسم 40

استبقت هذه البصيرة اللافتة ما نفهمه اليوم بوصفه عزم قصور المقطع العرضي للعارضة، وأظهرت عمق حدس أويلر الفيزيائي. وقد وفر التطابق التام بين مقاربتيه التغايرية والمباشرة نوع التحقق المزدوج الذي كان يقدره بشدة، مؤكداً صحة طرائقه الرياضية الجديدة والصحة الفيزيائية لمبدأ دانيال برنولي للطاقة معاً.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.3.2.2.1 تصنيف أنواع المنحنيات المرنة

مال الرياضيون تاريخياً إلى تصنيف الكائنات الرياضية.[24] وفي قسم *enu-meratio curvarum elasticarum*، سعى أويلر إلى تعيين «التنوع اللانهائي لهذه المنحنيات المرنة». يبدأ بالمعادلة 9.17، وينقل أصل المحاور مسافة $\beta/2\gamma$، ويضع $\gamma = 1$، ثم يختزل المعادلة إلى:

$$dy = \frac{\alpha + x^2}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}} dx$$

وبملاحظة أن $a^4 - (\alpha + x^2)^2 = (a^2 - \alpha - x^2)(a^2 + \alpha + x^2)$ ووضع $\alpha = a^2 - c^2$، يحصل على:

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.19}$$

تشكل هذه المعادلة أساس دراسة أويلر البيانية للمنحنى المرن أو الصفيحة[25] (ويستعمل المصطلحان بالتبادل). في الرسم 6 من الشكل 9.18، تكون A أصل جهاز الإحداثيات، ويمثل AE وAB اتجاهي محوري x وy الموجبين على التوالي. والنقطة M نقطة نموذجية على المنحنى AMC. تؤثر القوة الخارجية P عند A في اتجاه y الموجب. ويتصور أويلر إمكان عد النقطتين A وB موصولتين بخيط شدّه P، بحيث تؤثر عند B قوة مساوية لـP ومعاكسة لها.

والكميتان الأساسيتان اللتان يربطهما بالمنحنى هما القوة P وجيب الزاوية $\angle PAM$ التي يصنعها المماس عند A مع محور x:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2Ek^2}{a^2} \\ \sin(\angle PAM) &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \end{aligned}$$

حيث يُستمد هذا التعبير عن P من المعادلة 9.18، وتُشتق $\sin(\angle PAM)$ من $\tan(\angle PAM) = (a^2 - c^2)/c\sqrt{2a^2 - c^2}$ الناتجة من وضع $x = 0$ في المعادلة 9.19.

ويلاحظ أويلر قيمة التصنيف المنهجي:

> Cum igitur videamus non solum Circulum in curvarum Elasticarum classe contineri, sed etiam in ipsis infinitam varietatem locum habere; operae pretium erit hic enumerationem omnium variarum specierum in hoc curvarum genere contentarum instituere. Hoc enim modo non solum indoles harum curvarum penitius perspicietur; sed etiam, casu quocunque oblato, ex sola figura dijudicare licebit, ad quamnam speciem curva formata referri debeat.

لما كنا نلاحظ، إذن، أن الدائرة لا تندرج في فئة المنحنيات المرنة فحسب، بل إن لهذه المنحنيات المرنة تنوعاً لا نهائياً، فمن المفيد تعداد جميع الأنواع المختلفة التي تشملها هذه الفئة. فبهذه الطريقة لا تُفهم طبيعة هذه المنحنيات فهماً أعمق وحسب، بل يصبح من الممكن أيضاً، في أي حالة معروضة، تحديد النوع الذي ينبغي أن يُنسب إليه المنحنى المتشكل بمجرد النظر إلى صورته.

Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes، القسم 14

[24] انظر §3.2.3 بشأن اليونانيين، وتجميع ديكارت للمنحنيات المستوية، وتعداد نيوتن للأشكال التكعيبية، وغير ذلك.

[25] في هذا السياق، تعني *lamina* شريحة أو عارضة رقيقة مسطحة مرنة—أي ما يسميه المهندسون اليوم عارضة مرنة أو كابولاً. يفترض أويلر أن الصفيحة نحيلة (الطول ≫ العرض ≫ السماكة)، مهملة الوزن قياساً إلى الأحمال المطبقة، غير قابلة للتمدد طولياً، ومرنة (تعود إلى شكلها المستقيم الأصلي عند إزالة الحمل). ويمكن تصور مسطرة ممسوكة من أحد طرفيها وتثنيها قوة عند الطرف الآخر، أو لوح قفز. وكانت الكلمة اللاتينية "lamina" (أي «صفيحة رقيقة») مصطلحاً معيارياً في القرن الثامن عشر لكل عنصر إنشائي نحيل ينثني أساساً بتغير الانحناء لا بالتمدد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يقدم أويلر تصنيفاً منهجياً للمنحنيات المرنة بمقاربتين متكاملتين:

1. **الأنواع الرياضية**: تسع فئات أساسية (الأنواع I–IX) يحددها المعامل c^2/a^2 وتُشتق بتحليل رياضي صارم (الأقسام 25–33 من البحث)؛
2. **الرسوم التوضيحية**: ثمانية وعشرون رسماً موزعة على اللوحات III وIV وV، تبين تجليات هذه الأنواع وتطبيقاتها المختلفة.

تُحصل الأنواع المختلفة بتتبع الزاوية PAM أثناء تغير قيمتها من $90°$ إلى $-90°$، كما يبين الجدول 9.6 والشكل 9.18.

جدول 9.6: أنواع أويلر التسعة للمنحني المرن ومعاملاتها المعرّفة

الوصف الفيزيائي	مجال المعامل	القسم	النوع
خط مستقيم (الحالة الطبيعية)	$c \to 0$	§25	I
منحنيات بسيطة من دون نقطة انقلاب	$0 < c^2/a^2 < 1$	§26	II
منحني مرن مستطيل	$c^2/a^2 = 1$	§27	III
منحنيات ذات نقاط انقلاب	$1 < c^2/a^2 < 1.652$	§28	IV
تشكيل متلامس ذاتياً	$c^2/a^2 = 1.652$	§29	V
حلقات متقاطعة ذاتياً	$1.652 < c^2/a^2 < 2$	§30	VI
منحنيات مقاربية	$c^2/a^2 = 2$	§31	VII
حلقات دورية متعددة	$c^2/a^2 > 2$	§32	VIII
دائرة	حد خاص	§33	IX

يتميز كل نوع بما يأتي:

1. معامل القوة: $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$؛
2. الزاوية الابتدائية: $\sin(\angle PAM) = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$؛
3. توزيع الانحناء على طول المنحنى.

لا تتوزع الرسوم الثمانية والعشرون بالتساوي على الأنواع التسعة؛ بل تعكس الأهمية العملية لبعض التشكيلات، والتعقيد الرياضي لحالات معينة، والحاجة إلى توضيح الشروط الحدية والسلوكيات الحدية.

يخدم هذا التعدد (المربك) للرسوم أغراضاً عدة:

تغير المعامل داخل النوع يشمل كل نوع مجالاً متصلاً للمعامل c^2/a^2. وتبين رسوم متعددة كيف يتطور شكل المنحنى داخل النوع الواحد مع تغير هذا المعامل.

آثار الشروط الحدية يمكن أن يتجلى النوع الرياضي نفسه بصور مختلفة تحت شروط حدية متنوعة:

- طرفان مثبتان؛
- تشكيلات مثبتة–حرة (كابولية)؛
- وصلات مفصلية؛
- عزوم مطبقة في مقابل قوى نقطية.

التطبيقات الهندسية يبين الرسمان 13 و14 تطبيقات عملية:

- الرسم 13: ثقل معلق (سلوك شبيه بالسلسلة المعلقة)؛

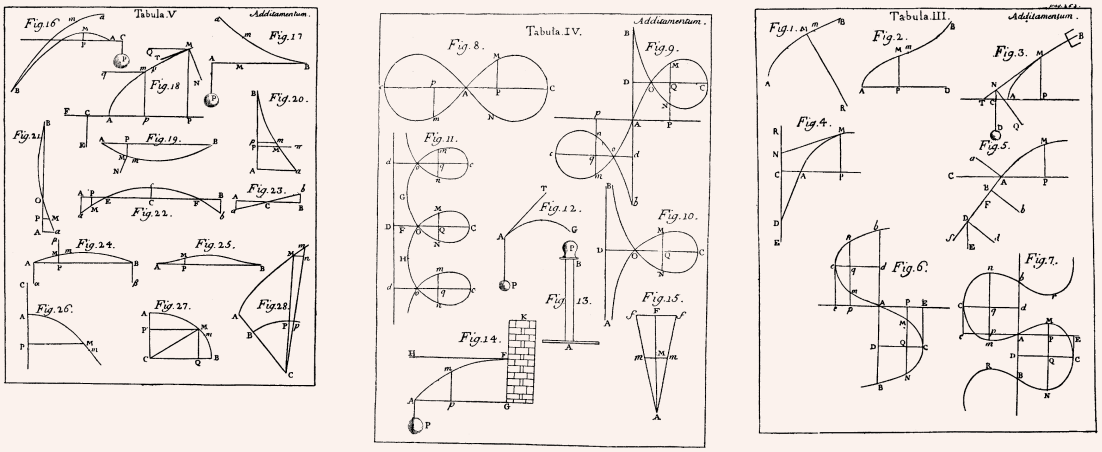
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.7: توزيع الرسوم الثمانية والعشرين على الأنواع التسعة

عدد الرسوم	الوصف	النوع
1 (الرسم 1)	خط مستقيم	I
6 (الرسوم 2، 3، 4، 6، 23، 26)	منحنيات بسيطة	II
3 (الرسوم 5، 24، 25)	منحني مرن مستطيل	III
4 (الرسوم 7، 8، 16، 19)	منحنيات ذات نقاط انقلاب	IV
1 (الرسم 9)	تلامس ذاتي	V
4 (الرسوم 10، 11، 12، 20)	تقاطع ذاتي	VI
2 (الرسمان 12، 15)	سلوك مقاربي	VII
6 (الرسوم 17، 18، 22، 27، 28)	حلقات متعددة	VIII
1 (الرسم 21)	دائرة	IX
2 (الرسمان 13، 14)	حالات خاصة/تطبيقية	

- الرسم 14: كابول مثبت إلى جدار (تطبيق إنشائي).

الحالات الانتقالية والحدية تلتقط رسوم عدة الانتقالات الحرجة بين الأنواع، وتبين كيف يتشوه شكل باستمرار إلى آخر مع تغير معامل التحميل.



شكل 9.18: «أنواع» أويلر للمنحني المرن بدلالة معامل الحمل c^2/a^2

* الأهمية الرياضية

يمثل تصنيف أويلر اختراقات رياضية عدة:

1. **أول تصنيف منهجي**: تقدم الأنواع التسعة تصنيفاً كاملاً لجميع التشوهات المرنة الممكنة في ظل الفروض المعطاة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.8: ربط رسوم أويلر الثمانية والعشرين بأنواعه التسعة للمنحني المرن

القسم	السمات الأساسية	الوصف	النوع	اللوحة	الرسم
25	حالة طبيعية، بلا انحناء	خط مستقيم	I	III	1
26	مماس أفقي عند القاعدة	قضيب بسيط منحنٍ	II	III	2
26	ثقل عند الطرف الحر	كابول محمل بقوة	II	III	3
26	انحناء منتظم	كابول منحني	II	III	4
27	مماس بزاوية 90° عند الطرف	منحني مرن مستطيل	III	III	5
26	تشوه أساسي	قوس منحني بسيط	II	III	6
28	اقتراب ذاتي ابتدائي	منحنى على شكل S بنقطة انقلاب	IV	III	7
28	حلقات متناظرة متقاربة	تشكل على هيئة الرقم ثمانية	IV	IV	8
29	تماس عند $\angle PAM = 40°41'$	حلقة متلامسة ذاتياً	V	IV	9
30	تقاطع واحد	حلقة متقاطعة ذاتياً	VI	IV	10
30	فصان غير متساويين	تقاطع غير متناظر	VI	IV	11
31	مماس شبه رأسي	اقتراب من خط مقارب	VII	IV	12
-	تطبيق عملي	ثقل معلق	حالة خاصة	IV	13
-	تطبيق هندسي	تثبيت إلى جدار	حالة خاصة	IV	14
31	امتداد لا نهائي	سلوك مقاربي	VII	IV	15
28	نمط دوري	نقاط انقلاب متعددة	IV	V	16
32	محصور بين متوازيين	تذبذب محصور	VIII	V	17
32	تقاطعات متعددة	حلقات متعددة معقدة	VIII	V	18
28	سعة كبيرة	منحنى S ممتد	IV	V	19
30	زاوية حادة عند العقدة	حلقة مثلثة	VI	V	20
33	نصف قطر منتظم	حالة حدية دائرية	IX	V	21
32	أدوار متعددة	موجة دورية	VIII	V	22
26	تشوه صغير	قوس قليل الارتفاع	II	V	23
27	انحناء كبير	قوس عميق	III	V	24
27	تحميل متناظر	شكل مكافئ	III	V	25
26	شرط حدي مختلف	صورة أخرى لمنحنى بسيط	II	V	26
32	قيود متعددة	دورية معقدة	VIII	V	27
32	تشوه أعظمي	تشكيل متطرف	VIII	V	28

2. **الصلة بـالتكاملات الإهليلجية**: تتطلب الحلول الدقيقة تكاملات إهليلجية، مما يجعل هذا من أقدم التطبيقات الفيزيائية لهذه الدوال الخاصة. ويمكن التعبير عن طول القوس للأنواع II إلى IV كما يأتي:

$$s = \int_0^{x} \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \tag{9.20}$$

لا يمكن حساب هذا التكامل بدلالة الدوال الابتدائية.

3. **المبدأ التغايري**: ينشأ التصنيف من تصغير دالية الطاقة الكامنة:

$$\int \frac{ds}{R^2} = \text{قيمة صغرى} \tag{9.21}$$

حيث R نصف قطر الانحناء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يعرض الجدول الآتي المعادلات الرياضية والخصائص الهندسية لكل نوع من أنواع أويلر التسعة:

* خصائص أساسية وإيضاحات

فيما يأتي نقاط مهمة بشأن البنية الرياضية:

- **النوع I**: الخط المستقيم هو الحالة الحدية عندما $c \to 0$، ويمثل الحالة الطبيعية (غير المشوهة) للمنحني المرن.
- **النوع III**: للمنحني المرن المستطيل خاصية مميزة، هي أن المحور مماس للمنحنى عند النقطة A. واكتشف أويلر علاقة المساحة اللافتة: حاصل ضرب المسقطين الأفقي والرأسي يساوي $\pi a^2/4$.
- **النوع V**: تقابل القيمة الحرجة للمعامل $c^2/a^2 = 1.651868$ العلاقة $\sin(\angle PAM) = 0.651868$، وتنتج أول تشكيل متلامس ذاتياً.
- **النوع VII**: عندما $c^2/a^2 = 2$، يصبح المنحنى مقارباً لخط الأساس. وتقع العقدة (نقطة التقاطع الذاتي) عند $x = 0.2884c$، بزاوية عقدية مقدارها $112°57'$.
- **النوع VIII**: عندما $c^2/a^2 > 2$، يُظهر المنحنى حلقات متعددة محصورة بين حدود متوازية عند $x = \pm c$ و$x = \pm g$.

* العلاقة بين الأنواع والرسوم

توضح الرسوم الثمانية والعشرون في لوحات أويلر تجليات متنوعة لهذه الأنواع الرياضية التسعة. والتوزيع غير منتظم للأسباب الآتية:

- تظهر بعض الأنواع (مثل II وVIII) تنوعاً أكبر في تحققها الفيزيائي؛
- تفضّل التطبيقات الهندسية العملية تشكيلات معينة؛
- تتطلب الحالات الانتقالية بين الأنواع رسوماً متعددة.

يوفر التصنيف الرياضي (الجدول 9.9) الأساس النظري، بينما تبين الرسوم الثمانية والعشرون الواقع الفيزيائي لهذه التجريدات الرياضية.

الحلول الرياضية والتصنيف الكامل يعطي منهج أويلر للمنحني المرن الصرف ذي الانحناء κ المعادلة التفاضلية من الرتبة الرابعة:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$$

حيث λ معامل تحدده الشروط الحدية. ويمكن كتابة هذه المعادلة بصورة أكثر أناقة بدلالة الانحناء وطول القوس:

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} = \lambda \kappa$$

تعتمد الحلول على إشارة λ ومقدارها:

عندما $\lambda > 0$:

$$\kappa(s) = A\cosh(\sqrt{\lambda}s) + B\sinh(\sqrt{\lambda}s)$$

عندما $\lambda < 0$:

$$\kappa(s) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}s) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}s)$$

عندما $\lambda = 0$:

$$\kappa(s) = A + Bs$$

حدد أويلر بتحليل منهجي للمعاملات الأنواع التسعة المتميزة للمنحنيات المرنة الموصوفة أعلاه؛ ويقابل كل نوع مجالات مختلفة للمعامل λ وتشكيلات فيزيائية مختلفة، من الخطوط المستقيمة مروراً بصور منحنية متنوعة إلى الدوائر الكاملة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حلول التكاملات الإهليلجية يكشف تحليل أويلر أن الحلول الدقيقة تتضمن تكاملات إهليلجية، مما يجعل المنحني المرن من أقدم أمثلة المسائل الفيزيائية التي تتطلب هذه الدوال الخاصة المتقدمة. ويأخذ التمثيل الوسيطي للمنحنيات المرنة الصورة:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \operatorname{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \operatorname{sn}(u, k)\, du$$

حيث cn وsn دالتان إهليلجيتان لياكوبي، وتحدد الشروط الحدية المعامل k.

وفي حالة المنحني المرن المستطيل (تحدي ياكوب برنولي الأصلي)، يبين أويلر إمكان التعبير عن طول المنحنى كما يأتي:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

حيث $K(k)$ هو التكامل الإهليلجي الكامل من النوع الأول. وتتضمن العلاقة بين القوة المطبقة والتشوه الناتج:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

كانت هذه الصلة بين نظرية المنحني المرن والتكاملات الإهليلجية ثورية، إذ قدمت حلولاً دقيقة لمسائل كانت عصية من قبل، ودفعت في الوقت نفسه تطوراً رياضياً مهماً.

من التصنيف إلى الحلول الدقيقة مع أن تصنيف أويلر ذي الأنواع التسعة يوفر فهماً نوعياً كاملاً للسلوك المرن، فإن الحصول على حلول كمية يتطلب أدوات رياضية متقدمة. ولا يمكن حل المعادلات التفاضلية الحاكمة لكل نوع، ولا سيما العلاقة الأساسية في المعادلة 9.19، باستعمال الدوال الابتدائية. بل تتطلب حلولها الدقيقة التكاملات الإهليلجية—وهي دوال خاصة كانت لا تزال قيد التطوير في زمن أويلر. وقد جعل هذا التحدي الرياضي مسألة المنحني المرن قوة دافعة في تحليل القرن الثامن عشر، ووسّع حدود الممكن رياضياً.

حلول التكاملات الإهليلجية يكشف تحليل أويلر أن الحلول الدقيقة تتضمن تكاملات إهليلجية، مما يجعل المنحني المرن من أقدم أمثلة المسائل الفيزيائية التي تتطلب هذه الدوال الخاصة المتقدمة. ويأخذ التمثيل الوسيطي للمنحنيات المرنة الصورة:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \operatorname{cn}(u, k)\, du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\phi} \operatorname{sn}(u, k)\, du$$

حيث cn وsn دالتان إهليلجيتان لياكوبي، وتحدد الشروط الحدية المعامل k.

وفي حالة المنحني المرن المستطيل (تحدي ياكوب برنولي الأصلي)، يبين أويلر إمكان التعبير عن طول المنحنى كما يأتي:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

حيث $K(k)$ هو التكامل الإهليلجي الكامل من النوع الأول. وتتضمن العلاقة بين القوة المطبقة والتشوه الناتج:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

كانت هذه الصلة بين نظرية المنحني المرن والتكاملات الإهليلجية ثورية؛ فقد قدمت حلولاً دقيقة لمسائل كانت عصية من قبل، ودفعت في الوقت نفسه تطوراً رياضياً مهماً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

انبعاج الأعمدة: صيغة أويلر الأولى لم يقتصر كتاب أويلر لعام 1744 *Methodus inveniendi* (Euler, 1744b) على نظرية المنحنيات المرنة الشهيرة؛ فقد اختبأت في القسم 37 بذرة أشهر إسهاماته في الاستقرار الإنشائي. وهناك كتب، *كما لو كان ذلك عرضاً*، العلاقة التي عُرفت لاحقاً بصيغة أويلر للانبعاج. نعود في هذا القسم إلى ظهورها المبكر، ونعيد بناء اشتقاق حديث انطلاقاً من المنحني المرن من النوع I. ثم ننتقل في §9.5.2 إلى مذكرته لعام 1759 (Euler, 1759)، حيث أدرك أويلر أخيراً الدلالة الحقيقية للصيغة ووضعها في صميم نظرية عامة لاستقرار الأعمدة.

> nulla prorsus incurvatio erit ,$\pi^2 Ekk/a^2$ majus fit quam P Nisi ergo onus geftandum fuerit majus, columna incurvationi resistere non poterit. P metuenda; contra vero si pondus quod sine ,P Manente autem elasticitate columnae, atque adeo ejus crassitie eadem, pondus periculo gestare valet, erit reciproce ut quadratum altitudinis columnae: columnaque duplo altior quartam tantum oneris partem gestare poterit.

لذلك، ما لم يكن الحمل P المراد حمله أكبر من $\frac{E\pi^2 k^2}{a^2}$، فلا يُخشى الانحناء مطلقاً؛ أما إذا كان الوزن P أكبر، فلن يستطيع العمود مقاومة الانحناء. وعندما تظل مرونة العمود وسماكته ثابتتين، يكون الوزن P الذي يستطيع حمله بلا خطر متناسباً عكسياً مع مربع ارتفاع العمود؛ فالعمود الذي يبلغ ارتفاعه الضعف لا يستطيع حمل أكثر من ربع الحمل.

Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes، القسم 37

تمثل هذه الصيغة، $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ بالترميز الحديث (حيث تقابل كمية أويلر Ekk صلابة الانحناء EI، ويقابل a طول العمود L)، إحدى أهم النتائج في الميكانيكا الإنشائية، وما زالت أساسية في التصميم الهندسي اليوم. ويؤذن هذا العمل بولادة نظرية الاستقرار الإنشائي، محولاً الهندسة من ممارسة تجريبية إلى تخصص علمي.

وفيما يأتي تفسير حديث لهذه العبارة:

الصيغة الخفية في النوع I (1744)

تضمن كتاب أويلر لعام 1744 *Methodus inveniendi* تصنيفاً كاملاً للمنحنيات المرنة في تسعة أنواع متميزة (§9.3.2.2.1)، غير أن النوع I—الذي يمثل تشكيلات شبه مستقيمة—أخفى بصيرة عميقة لم يدرك أويلر أهميتها أول الأمر. ونتبع Fraser, 1991 في فحص هذا الاكتشاف الذي أُغفل.

في النوع I تكون نسبة المعاملين c^2/a^2 متناهية الصغر، أي إن الزاوية $\angle PAM \simeq 90°$ والقطعة ACB منحنية انحناءً طفيفاً فقط. ولما كانت c صغيرة بالنسبة إلى a، فإن معادلة أويلر العامة للمنحني المرن (9.19)، المعادة هنا،

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}dx \tag{9.22}$$

حيث a وc معاملان تحددهما الشروط الحدية والأحمال المطبقة، وتُميز النسبة c^2/a^2 الأنواع المختلفة للمنحنيات المرنة.

الخطوة 1: تطبيق شرط النوع I: الخاصية المعرّفة للنوع I هي أن نسبة المعاملين c^2/a^2 متناهية الصغر. وهذا يعني رياضياً $c^2 \ll a^2$، مما يتيح التقريبات الآتية:

$$a^2 - c^2 \approx a^2$$
$$2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2$$

بالتعويض بهذه التقريبات في المعادلة 9.22:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 + x^2)}}dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخطوة 2: تبسيط المقام: لما كنا نتناول تشوهات صغيرة في عمود شبه مستقيم، تظل x^2 صغيرة بالمقارنة مع a^2. ومن ثم:

$$\sqrt{2a^2 + x^2} \approx \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

فنحصل على:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\,dx$$

الخطوة 3: تقريب إضافي للتشوهات الصغيرة في التشكيل شبه المستقيم المميز لبدء الانبعاج، يظل الإحداثي x صغيراً بالمقارنة مع المعامل a. وفي هذا الحد:

$$a^2 + x^2 \approx a^2$$

وبالتعويض بهذا التقريب:

$$dy = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\,dx = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\,dx$$

الخطوة 4: الصورة النهائية بإخراج الثابت من تحت الجذر التربيعي:

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \tag{9.23}$$

تصف هذه المعادلة المبسطة شكل عمود على وشك الانبعاج. وتقابل التقريبات الرياضية فروضاً فيزيائية:

- $c^2/a^2 \ll 1$: يظل العمود شبه مستقيم؛
- x صغيرة: التشوهات متناهية الصغر؛
- $\angle PAM \simeq 90^\circ$: المماس عند القاعدة شبه رأسي.

يعطي تكامل هذا التعبير $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c}$. ولعمود نصف طوله f، تفضي الشروط الحدية إلى $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$. ويعطي التعويض بمعامل القوة $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$:

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \tag{9.24}$$

انطوت هذه النتيجة على دلالة لافتة لم يذكرها أويلر إلا عرضاً: تلزم قوة محدودة لإحداث انحناء متناهٍ في الصغر في العمود. وظلت الدلالة الفيزيائية—أن ذلك يمثل عتبة حرجة للاستقرار الإنشائي—غير مدركة ثلاثة عشر عاماً.

الخلاصة يعمل تصنيف أويلر للمنحنيات المرنة على مستويين: إطار نظري من تسعة أنواع رياضية، وتوضيح عملي بثمانية وعشرين رسماً. وقد أرست هذه المقاربة المزدوجة—التي تجمع التحليل الرياضي الصارم بالتوثيق البصري الشامل—نمطاً منهجياً أثر في التصنيف العلمي عبر تخصصات تمتد من علم البلورات إلى التصنيف الأحيائي. ولا يعكس الاختلاف الظاهري بين تسعة أنواع وثمانية وعشرين رسماً تناقضاً، بل ثراء السلوك المرن داخل إطار أويلر الرياضي.

وعلى مستوى أعمق، يمثل هذا العمل أحد أول التصنيفات الكاملة في الفيزياء الرياضية، إذ يبين كيف يمكن للتغيير المنهجي للمعاملات أن يولد الطيف الكامل للسلوكيات الممكنة في نظام فيزيائي. وقد رسخ تركيب أويلر بين المبادئ التغايرية والمعادلات التفاضلية والتكاملات الإهليلجية مسألة المنحني المرن حجر زاوية لا يزال يغذي الميكانيكا الحسابية الحديثة والديناميكيات اللاخطية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.3.2.3 الإطار التغايري الحديث

الصيغة القوية: أويلر–لاغرانج الكلاسيكية أرسى التطور التاريخي لحساب التغايرات، من أبحاث ياكوب برنولي في المنحني المرن إلى معالجة أويلر المنهجية في *Methodus Inveniendi*، المبادئ الأساسية وبرهن قوة الطرائق التغايرية. ويبني الإطار الرياضي الذي نستعمله اليوم على هذه الأسس الكلاسيكية، مع إدخال مفاهيم حديثة تزيد الصرامة وتوسع قابلية التطبيق. ولتقدير أناقة الطرائق التغايرية وفائدتها العملية معاً، من المفيد فحص معادلة أويلر–لاغرانج من منظور رياضي معاصر. يستخدم التحليل التغايري الحديث تعريفات دقيقة لفضاءات الدوال المقبولة، وصيغاً ضعيفة منهجية توسع نطاق الطرائق الكلاسيكية، وتصنيفات صارمة للشروط الحدية الطبيعية والأساسية توضح المعالجة الصحيحة للقيود. ولا تكشف هذه الأدوات المعاصرة البنية الرياضية الكامنة بوضوح أكبر مما كان متاحاً للرواد الأوائل فحسب، بل تتيح أيضاً التطبيق المنهجي للمبادئ التغايرية على مسائل هندسية وعلمية معقدة بطرائق حسابية مثل طريقة العناصر المحدودة. ويقدم الفصل 46 عرضاً صارماً للطريقة.

يمكن تناول مسائل الهندسة الإنشائية (والميكانيكا) من منظورين مختلفين:

المنظور النيوتني اتزان كمية الحركة (الاتزان).

المنظور اللاغرانجي اتزان الطاقة (الديناميكا الحرارية).

أما المسألة الأساسية في حساب التغايرات فهي إيجاد دالة $u(x)$ بحيث

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{9.25}$$

تكون مستقرة:

$$\delta\Pi = 0$$

حيث تشير δ إلى مؤثر *التغاير* (ولا ينبغي الخلط بينه وبين المشتقة).

نعرّف $u(x)$ دالة في x على المجال (a, b)، وF دالة حقيقية معلومة (مثل كثافة الطاقة)، ونعرّف مجال الدالية بأنه مجموعة الدوال المقبولة المنتمية إلى فئة من الدوال في فضاء دالي، لا منطقة في فضاء إحداثي (كما هي الحال للدالة).

نبحث عن الدالة $u(x)$ التي تجعل Π متطرفة. ولتكن $\tilde{u}(x)$ عائلة من المسارات المجاورة للدالة المتطرفة $u(x)$، مع افتراض تطابقها عند الطرفين $x = a, b$. ونعرّف $u(\tilde{x})$ بأنه مجموع المسار المتطرف وتغاير اعتباطي، الشكل 9.19.

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x)$$

حيث ε معامل صغير، و$\delta u(x)$ هو تغاير $u(x)$. ويؤدي ذلك إلى

$$\underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I}\,(x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II}\,(x=a,b)} = 0 \tag{9.26}$$

يجب أن ينعدم كل حد.

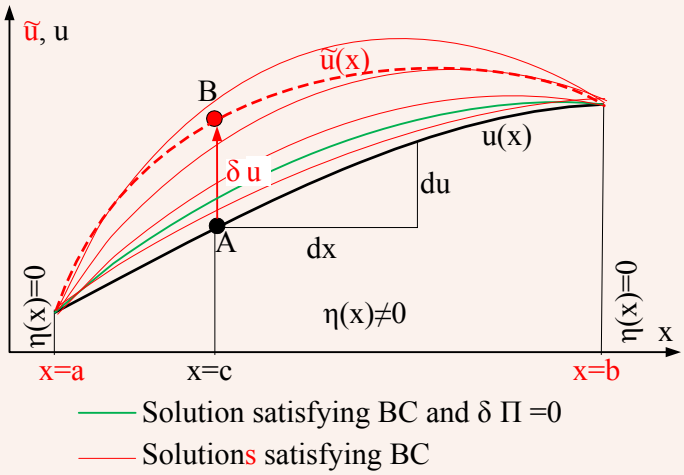
1. يعطينا الجزء الأول معادلة *أويلر*.
2. يتيح لنا الجزء الثاني تعريف *الشروط الحدية*.

يعطي الجزء I من المعادلة 9.26 الصيغة القوية:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{في} a < x < b \tag{9.27}$$

تسمى هذه المعادلة التفاضلية معادلة *أويلر–لاغرانج* المرتبطة بـΠ، وهي شرط لازم لكي تجعل $u(x)$ الدالية Π متطرفة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 9.19: مؤثرا التغاير والتفاضل

وتتيح العودة إلى الجزء الثاني من المعادلة 9.26 تعريف الشروط الحدية، الشكل 9.19:

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{أساسي}}\ \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_a^b}_{\text{طبيعي}}}_{\text{الشروط الحدية}} = 0 \tag{9.28}$$

يمكن تحقيق ذلك بالتوليفات الآتية:

$\eta(a)=0$	و	$\eta(b)$	$=0$	أساسي	Γ_u
$\eta(a)=0$	و	$\frac{\partial F}{\partial u'}(b)$	$=0$	مختلط	$\Gamma_u \cup \Gamma_t$
$\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0$	و	$\eta(b)$	$=0$	مختلط	$\Gamma_u \cup \Gamma_t$
$\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0$	و	$\frac{\partial F}{\partial u'}(b)$	$=0$	طبيعي	Γ_t

مثلاً، تُعطى الطاقة الكامنة الكلية لعارضة تحمل حملاً منتظماً p بالعلاقة:

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right) dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F} dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نريد اشتقاق التغاير الأول لـΠ. بالتكامل بالأجزاء مرتين:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F\,dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w\right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w)\,dx \\
&= (EIw''\delta w')\big|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w\right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{طبيعي}}\underbrace{\delta w'}_{\text{أساسي}}\big|_0^L - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{طبيعي}}\underbrace{\delta w]}_{\text{أساسي}}\big|_0^L}_{\text{ش.ح.}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p\right]}_{\text{معادلة أويلر}} \delta w\,dx = 0
\end{aligned}$$

أو:

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{لكل} x$$

وهي المعادلة التفاضلية الحاكمة للعارضات، وتُعطى الشروط الحدية كما يأتي:

طبيعية		أساسية
$EIw'' = -M = 0$	أو	$\delta w' = 0$
$(EIw'')' = -V = 0$	أو	$\delta w = 0$

الصيغة الضعيفة: طرائق غالركين/البواقي الموزونة يمكن تطبيق العملية عكسياً بطريقة غالركين (الفصل 51)، التي تحول معادلة تفاضلية في الصيغة القوية إلى صيغة ضعيفة بضرب المعادلة الحاكمة في دالة اختبار $v(x)$ ثم التكامل على المجال. ويُطبق بعد ذلك التكامل بالأجزاء لتخفيض رتبة المشتقات وتوزيعها بين دالتي التقريب والاختبار، مع إدخال الشروط الحدية بصورة طبيعية. وتنتج من هذه العملية عبارة تغايرية يُبحث فيها عن الحل في فضاء جزئي محدود الأبعاد تولده دوال الأساس.

في انحناء عارضة، نتناول الصيغة القوية التي تعطيها المعادلة التفاضلية من الرتبة الرابعة:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q(x), \quad x \in [0, L] \tag{9.29}$$

حيث $w(x)$ الانحراف، وEI صلابة الانحناء، و$q(x)$ الحمل الموزع. بالضرب في دالة اختبار $v(x)$ والتكامل:

$$\int_0^L v(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) dx = \int_0^L v(x)q(x)\,dx \tag{9.30}$$

يعطي تطبيق التكامل بالأجزاء مرتين لنقل المشتقات من w إلى v، مع إدخال الشروط الحدية المناسبة، الصيغة الضعيفة:

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}\,dx = \int_0^L v(x)q(x)\,dx + \text{حدود طرفية} \tag{9.31}$$

لا تتطلب هذه الصيغة الضعيفة إلا استمرارية C^1 بدلاً من استمرارية C^3 التي تفرضها الصيغة القوية، مما يجعلها ملائمة للتقطيع بطريقة العناصر المحدودة.

9.3.3 ملخص زمني للتحديين الأولين

امتد تطور مسألة المنحني المرن أكثر من خمسة عقود، ويلخص الجدول 9.10 هذا التطور الزمني.

يبين هذا التسلسل الزمني تطور المنحني المرن من تحد هندسي إلى مسألة تأسيسية في الفيزياء الرياضية، ويوضح أن الاختراقات الرياضية كثيراً ما تتطلب عقوداً من التنقيح عبر أجيال متعددة من الباحثين. وقد أرسى حل المسألة الأسس الرياضية للميكانيكا الإنشائية والمبادئ التغايرية التي ستغدو محورية في الفيزياء النظرية معاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.9: أنواع أويلر للمنحني المرن: الخصائص الهندسية ومعادلات المنحنيات

النوع	الاسم	معادلة المنحنى أو طول القوس	الخصائص الهندسية
I	Linea recta	$y = 0$ (خط مستقيم)	الحالة الطبيعية؛ $R = \infty$؛ $c \to 0$
II	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	منحنى بسيط؛ بلا نقطة انقلاب؛ $0 < c^2/a^2 < 1$؛ محدب؛ شبيه بالمنحنى الدحروجي عندما تكون c صغيرة
III	Elastica rectangula	$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{128} + \cdots\right)$	المحور مماس عند A؛ $c^2/a^2 = 1$؛ علاقة المساحة: $4AD \cdot AC = \pi a^2$
IV	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	نقطة انقلاب؛ $1 < c^2/a^2 < 1.652$؛ قد تتقاطع الفصوص ذاتياً
V	–	$c^2/a^2 = 1.651868$	تلامس ذاتي؛ يلتقي الطرفان؛ $AD = 0$؛ زاوية عقدية $81°22'$؛ $\sin(\angle PAM) = 0.651868$
VI	–	مشابه للنوع IV	تقاطع ذاتي؛ امتداد بعد التماس؛ $1.652 < c^2/a^2 < 2$؛ مجال الزاوية العقدية: $81°22' - 112°57'$
VII	–	$y = c\sqrt{c^2 - x^2} - \dfrac{c}{2}\ln\dfrac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x}$	مقارب لخط الأساس AB؛ $c^2/a^2 = 2$؛ الزاوية العقدية $112°57'$؛ العقدة عند $x = 0.2884c$ من المركز
VIII	–	$dy = \dfrac{(x^2 - c^2 + g^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(x^2 - g^2)}}$	حلقات متعددة؛ $c^2/a^2 > 2$؛ محصور بين الحدود المتوازية عند $x = \pm c$ و$x = \pm g$؛ بلا نقاط انقلاب
IX	Circulus	$R = \text{ثابت} = a^2/(hq)$	دائرة؛ حالة حدية؛ انحناء منتظم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.10: التطور الزمني لعمل ياكوب برنولي في حساب التفاضل ومسألة المرونة، من المنشورات الأولى إلى الاستكمال بعد وفاته.

المحتوى والأهمية	المنشور/المصدر	السنة/الفترة
درس سراً منحنيات شبيهة بالمنحني المرن، لكنه لم ينشر نتائجه (§8.2.2).	نيوتن (غير منشور)	سبعينيات القرن السابع عشر
أول عرض لبرنولي لحساب لايبنتس؛ تطبيقات على مسائل أولية؛ وإظهار منهجي للطريقة.	*Specimen primum calculi differentialis* (برنولي، *Acta Eruditorum*) (1689)	1689
يعالج المتن اللولب اللوغاريتمي وخط تساوي السمت والمثلثات الكروية. ويطرح الملحق المحوري *Addita-mentum de Problema Funiculario* مسألة المرونة مشفرة في أحجية تبديل حروف شهيرة (Bernoulli, Jakob, 1690a).	*Specimen alterum calculi differentialis* (برنولي، *Acta Eruditorum*) (1690)	يونيو 1690
	انقضى الموعد النهائي من دون أن يقدم رياضيون آخرون حلولاً.	أكتوبر 1690
أتم برنولي حله المرن سراً في دفتره العلمي (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).	*Meditationes CLXX* (برنولي، 1677–1705) (يوميات خاصة)	1692
نشر الحل المرن الكامل مع فك الشفرة والبرهان الرياضي و«النظرية الذهبية للانحناء»—وهي أداة تحليلية أساسية لمسائل المنحنيات المرنة (Bernoulli, 1694).	*Curvatura laminae elasti-cae* (*Acta Eruditorum*)	يونيو 1694
تبادل منشور في *Acta Eruditorum* أوضح تعدد تشكيلات المنحني المرن (Bernoulli, 1694).	نقد هوينغنس ورد برنولي	1694
تطورات مترابطة عند آل برنولي ولايبنتس وسعت طرائق الانحناء والتصغير.	أبحاث تغايرية ومتساوية القياس	أواخر تسعينيات القرن السابع عشر–أوائل القرن الثامن عشر
جمع عمل برنولي الكامل في المرونة من *Medita-tiones* والمخطوطات (Bernoulli, Johann, 1713).	*Opera Omnia* (ياكوب برنولي، بعد وفاته، تحرير غ. كرامر)	1744
المعالجة المنهجية النهائية بحساب التغايرات، بناءً على أساس برنولي (Euler, 1744b).	أويلر، *Methodus inve-niendi*	1744

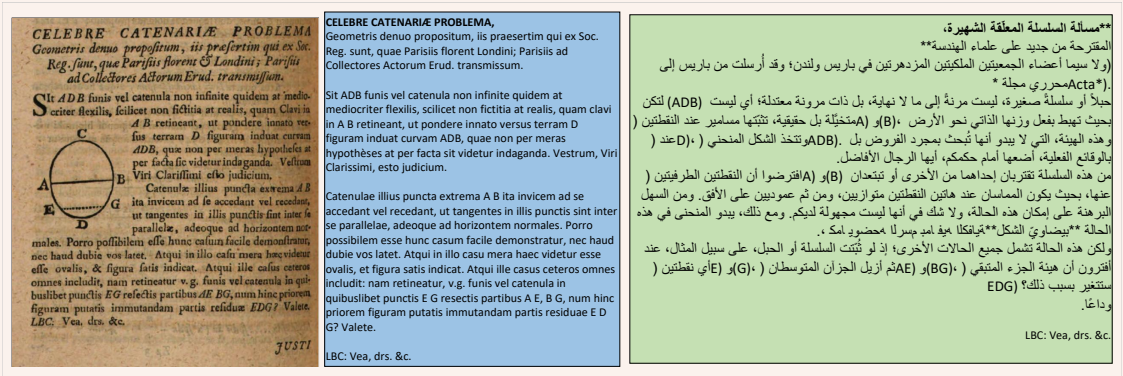
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.4 تحد مجهول: جسر بين المسائل (1724)

مقتبس من (Truesdell, 1960)

في أغسطس 1724، ظهرت في *Acta Eruditorum* مذكرة استفزازية الصياغة، الشكل 9.20، بعنوان «مسألة السلسلة المعلقة الشهيرة، مطروحة من جديد على المهندسين، ولا سيما أعضاء الجمعيتين الملكيتين في لندن وباريس» (Anonymous, 1724). وطرح التحدي، الموقع على نحو غامض باسم «LBC[26]»، المسألة الآتية:

> لتكن ADB حبلاً أو سلسلة صغيرة ليست لا نهائية المرونة بل معتدلتها، أي حقيقية لا متخيلة، تثبتها مسامير عند A وB، بحيث تهبط بفعل وزنها الذاتي نحو الأرض عند D وتتخذ الشكل المنحني ADB. وهذا الشكل، الذي لا يبدو أنه يُبحث بفروض مجردة بل بوقائع فعلية، معروض لحكمكم أيها الرجال الأجلاء.
>
> افترضوا أن طرفي هذه السلسلة A وB يقتربان أحدهما من الآخر أو يبتعدان، بحيث يكون المماسان عندهما متوازيين، ومن ثم عموديين على الأفق (أي رأسيين). ويسهل إثبات إمكان هذه الحالة، ولا شك أنها معلومة لديكم. غير أن المنحنى يبدو فيها بيضوياً، كما يبين الشكل بما يكفي. لكن هذه الحالة تشمل سائر الحالات: فإذا ثُبتت السلسلة أو الحبل، مثلاً، عند أي نقطتين E وG، وأزيل الجزآن المتوسطان AE وBG، فهل ترون أن شكل الجزء الباقي EDG يتغير بذلك؟ وداعاً.
>
> Anonymous, 1724 “*Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum*”, pg. 366



شكل 9.20: التحدي المجهول لعام 1724 في *Acta Eruditorum* (Anonymous, 1724)، والموقع على نحو غامض باسم «LBC»

اختلف هذا التحدي جذرياً عن مسألة السلسلة المعلقة الكلاسيكية بإدخال الصلابة المحدودة—وهي خاصية تجسر الفجوة بين السلاسل كاملة المرونة والقضبان المرنة. وتكمن صعوبة التوحيد في التوفيق بين صياغتين ميكانيكيتين متميزتين: مسألة السلسلة المعلقة، المعبر عنها بقوى الشد، ومسألة المنحني المرن، المعبر عنها بعزوم الانحناء (Truesdell, 1960). وكان ياكوب برنولي قد طرح هذا السؤال بعينه في أبحاثه الأصلية في المنحني المرن، طالباً بحث «نوع المنحنيات المتولدة عندما ينحني الشريط المرن بوزنه الذاتي بالإضافة إلى الوزن المعلق»، لكن المسألة ظلت من دون معالجة أكثر من ثلاثة عقود. ومع أن تحدي عام 1724 بدا أول الأمر كأنه مر بلا انتباه، فقد أصبح حله موضوع أول منشورات دانيال برنولي وأويلر في نظرية العوارض الموحدة عام 1728.

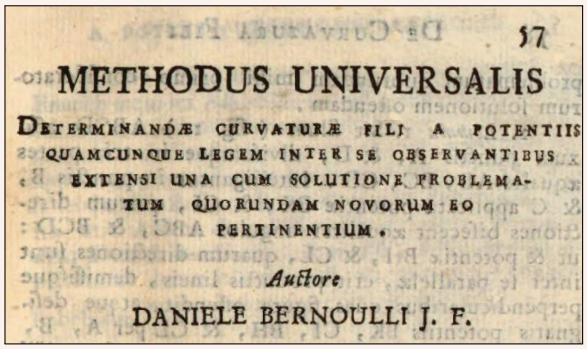
[26] رغم البحث العلمي الدقيق، لم تُعرف قط هوية صاحب هذا التوقيع. وكما يلاحظ تروسدل، «كان على LBC، أياً كان، أن ينتظر عدة سنوات جواباً» (Truesdell, 1960). وما زال المؤلف مجهولاً إلى اليوم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.4.1 تعاون برنولي–أويلر: التوحيد الأول (1728)

بحلول عام 1728 في سانت بطرسبرغ، تصدر دانيال برنولي وليونارد أويلر النظرية الناشئة للميكانيكا الإنشائية. فقد تأثر كلاهما بعمل ياكوب برنولي الرائد، ودخلا، بوصفهما عضوين شابين في الأكاديمية الإمبراطورية للعلوم، في منافسة ودية لحل المسائل نفسها. كان دانيال برنولي، في الثامنة والعشرين، عالماً مشهوراً بالفعل، بينما لم يكن أويلر، في الحادية والعشرين، قد نشر سوى ثلاثة أبحاث.

وكما روى أويلر نفسه لاحقاً: «وقعتُ مؤخراً أنا والسيد برنولي الموقر على هذه المسألة، ولما رأيناها غير خالية من الأناقة، تصدينا لها، وحصلنا في الوقت نفسه على حلين يتوافقان توافقاً ممتازاً» (Euler, 1728 PDF, pg. 70). وفي فبراير 1728، عرض كل منهما نظرية موحدة للخطوط المرنة والمطاوعة، وظهر بحثاهما متتاليين في المجلد نفسه من *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*، الشكل 9.21 (Euler, 1728 PDF,) Bernoulli, Daniel, 1744 PDF, pg. 57-63) (64-77 pg.). ومثّل هذا النشر المتزامن أول توحيد ناجح لنظريتي السلسلة المعلقة والمنحني المرن—أي المسألة ذاتها التي طرحها LBC قبل أربع سنوات.


57

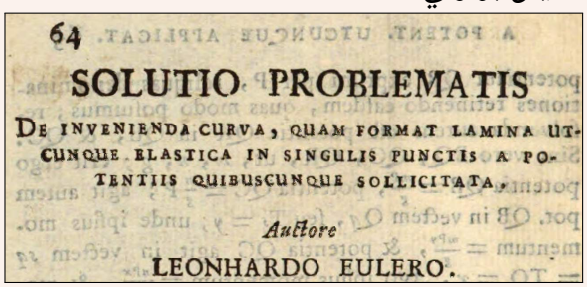
METHODUS UNIVERSALIS

DETERMINANDÆ CURVATURÆ FILI A POTENTIIS QUAMCUNQUE LEGEM INTER SE OBSERVANTIBUS EXTENSI UNA CUM SOLUTIONE PROBLEMATUM QUORUNDAM NOVORUM EO PERTINENTIUM.

Auctore

DANIELE BERNOULLI J. F.

دانيال برنولي (Bernoulli, Daniel, 1744 PDF)


64

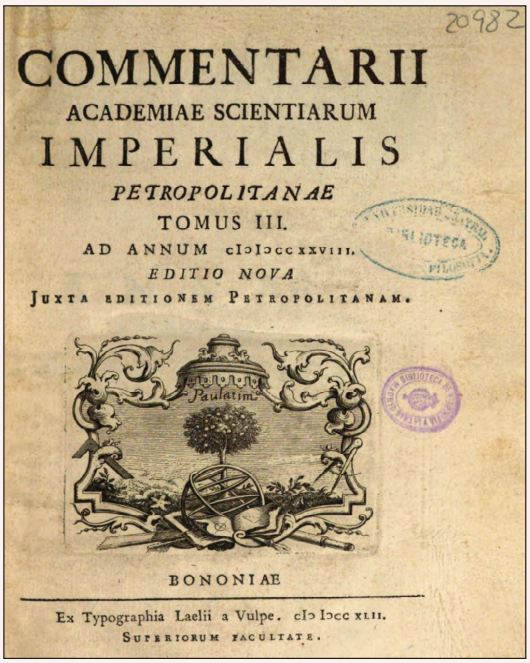
SOLUTIO PROBLEMATIS

DE INVENIENDA CURVA, QUAM FORMAT LAMINA UTCUNQUE ELASTICA IN SINGULIS PUNCTIS A POTENTIIS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATA.

Auctore

LEONHARDO EULERO.

ليونارد أويلر (Euler, 1728 PDF)


20982

COMMENTARII

ACADEMIAE SCIENTIARUM

IMPERIALIS

PETROPOLITANAE

TOMUS III.

AD ANNUM CIↃIↃCCXXVIII.

EDITIO NOVA

JUXTA EDITIONEM PETROPOLITANAM.

BONONIAE

Ex Typographia Laelii a Vulpe. CIↃ IↃCC XLII.

SUPERIORUM FACULTATE.

عدد خاص

شكل 9.21: منشورا دانيال برنولي وليونارد أويلر الرائدان لعام 1728 (Euler, 1728 PDF).

9.4.1.1 دانيال برنولي (إرساء مبدأ العزم–الانحناء) 1728

نشر دانيال برنولي في سانت بطرسبرغ عام 1728 عملاً رائداً أسس القاعدة النظرية لجميع نظريات العوارض اللاحقة. وأدخل بحثه (Bernoulli, Daniel, 1744 PDF)، المعنون *Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observantibus extensi* (طريقة شاملة لتعيين انحناء خيط تمده قوى تتبع أي قانون فيما بينها)، العلاقة الأساسية بين العزم والانحناء التي تحمل اسم أسرته، الشكل 9.22.

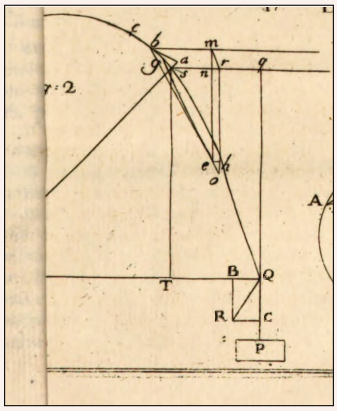
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تمثل إسهام برنولي الثوري في إدراك أن المقاومة المرنة يجب أن تتناسب مع الانحناء. ومن خلال عارضة تخضع لوزنها الذاتي ولأحمال مطبقة معاً، أثبت أن عزم الانحناء الكلي عند أي نقطة يجب أن يساوي مقاومة المادة المرنة.

ولعنصر عارضة خاضع للوزن الذاتي، بيّن برنولي أن إسهام وزن قطعة طولها s في العزم هو:

$$g\sigma s(x - x_e) = g\sigma s\left(x - \frac{1}{s}\int_0^s x\,ds\right) = g\sigma \int_0^s s\,dx$$

حيث g تسارع الثقالة، وσ وزن العارضة لكل وحدة طول، وx_e موضع مركز ثقل القطعة.



شكل 9.22: تحليل برنولي للعارضة مبيناً أثري الوزن الذاتي والحمل المطبق

بعد إضافة عزم وزن مطبق P، تمثلت بصيرة برنولي الحاسمة في أن هذا العزم الكلي يجب أن تتزنه مقاومة المادة المرنة:

$$\mathcal{M} = \frac{B}{r} \tag{9.32}$$

حيث يمثل B ما سماه برنولي «معامل الانحناء»، وr نصف قطر الانحناء. وهذه أول صياغة صريحة لعلاقة العزم–الانحناء—أساس نظرية العوارض كلها.

وهكذا تصبح معادلة اتزان برنولي:

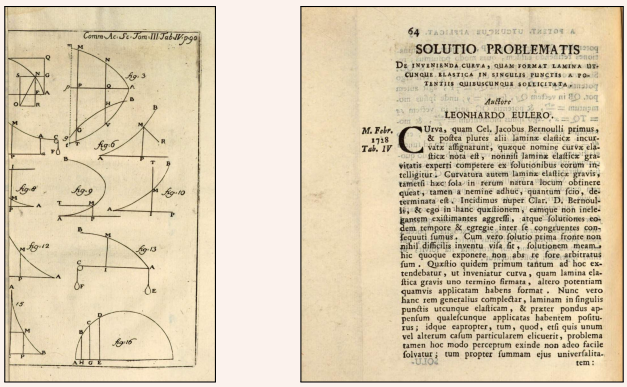
$$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r} \tag{9.33}$$

أرسى عمل برنولي لعام 1728 الأساس المفاهيمي للميكانيكا الإنشائية بإدخال مبدأ العزم–الانحناء. غير أن مقاربته ظلت هندسية إلى حد كبير وخاصة بحالات معينة، وافتقرت إلى الإطار الرياضي المنهجي اللازم لمعالجة شروط التحميل العامة والقيود الحدية.

حصرت التقنيات الرياضية المتاحة لبرنولي عام 1728 عمله في حالات تحميل بسيطة نسبياً. وظلت المسائل المعقدة التي تتضمن أحمالاً موزعة اعتباطية أو خواص مواد متغيرة أو شروطاً حدية عامة خارج نطاق طرائقه. وكان لهذا القيد دور حاسم في تحفيز التطورات الرياضية اللاحقة.

قدم إسهام برنولي لعام 1728 البصيرة الفيزيائية الأساسية—أن المقاومة المرنة تتناسب مع الانحناء—لكنه افتقر إلى الآلة الرياضية اللازمة لاستغلالها استغلالاً كاملاً. كانت المعادلة الأساسية $\mathcal{M} = B/r$ صحيحة، غير أن تطبيقها منهجياً على مسائل معقدة تطلب طرائق رياضية لم تكن قد وُجدت بعد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



SOLUTIO PROBLEMATIS

LEONHARDO EULERO.

شكل 9.23: Euler, 1732، *Solutio problematis de invenienda curva*

وكانت الفجوة بين الفهم الفيزيائي والقدرة الرياضية حاسمة في دفع التطورات التالية. فقد أصبح التحدي أمام الرياضيين بعد عام 1728 واضحاً: كيف يبنون على بصيرة برنولي الأساسية طرائق تحليلية منهجية تعالج شروط تحميل اعتباطية وهندسات معقدة وقيوداً حدية عامة؟

ما زالت علاقة برنولي للعزم–الانحناء لعام 1728 من دون تغيير في التحليل الإنشائي الحديث. فكل حساب للعارضات اليوم يستخدم المبدأ الذي صاغه أول مرة: $M = EI\kappa$، حيث يقابل EI «معامل الانحناء» B عنده. ويبين هذا الاستمرار عبر نحو ثلاثة قرون الطبيعة الأساسية لبصيرته وأهميتها الدائمة للميكانيكا الإنشائية.

9.4.1.2 أويلر (من البصيرة الهندسية إلى الثورة الرياضية) (1732)

بعد أربع سنوات من إرساء برنولي مبدأ العزم–الانحناء، نهض أويلر لمواجهة التحدي الرياضي في عمله لعام 1732 *Solutio problematis de invenienda curva*، (Euler, 1732)، الشكل 9.23. ويمثل هذا العمل لحظة فاصلة في الميكانيكا، إذ أرسى ثلاثة إسهامات تأسيسية: (1) أول نظرية عامة توحد المنحنيات المرنة والمطاوعة في إطار رياضي واحد، و(2) الفرضية المرنة الأساسية $M = v\kappa$ التي تقوم عليها نظرية العوارض الحديثة كلها، و(3) طرائق هندسية منهجية كشفت قوة تقنيات القرن الثامن عشر الرياضية وقيودها معاً، فحفزت في النهاية تطوير حساب التغايرات.

السياق التاريخي وبصيرة أويلر الثورية عندما تناول أويلر مسألة المنحني المرن عام 1732 (Euler, 1732)، كان يجيب عن تحدي ياكوب برنولي لعام 1691 بنطاق أوسع بكثير. وتكشف كلماته الافتتاحية عمق بصيرته:

> Curva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus et postea plures alii laminae elasticae incurvatae assignarunt... nonnisi laminae elasticae gravitatis experti competere ex solutionibus eorum intelligitur.

> إن المنحنى الذي عيّنه ياكوب برنولي الشهير أولاً للصفائح المرنة المنحنية لا ينطبق إلا على صفائح مرنة عديمة الوزن، بينما لجميع الأجسام المرنة في الطبيعة وزن.
>
> Euler, 1732 "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*"

حددت هذه الملاحظة قيداً أساسياً: انطبقت جميع الحلول السابقة على شرائح مرنة عديمة الوزن فقط، بينما للأجسام المرنة الحقيقية وزن دائماً. وكان هدف أويلر حل المسألة العامة *لـالصفائح المرنة الثقيلة* تحت شروط تحميل اعتباطية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الفرضية المرنة الأساسية كان أكثر إسهامات أويلر ثورية إدراكه أن *المقاومة المرنة تتناسب* مع *الانحناء*. واقترح أنه عندما تدير قوة عناصر مرنة، يتناسب العزم المرن مع كل من القوة المرنة وزاوية الدوران:

$$M = \frac{v}{r} = v\kappa$$

حيث v القوة المرنة و$\kappa = 1/r$ الانحناء. وهذه بالضبط العلاقة الأساسية في نظرية العوارض الحديثة، وتُكتب اليوم $M = EI\kappa$، حيث يقابل EI معامل أويلر v. وكانت هذه البصيرة، مع بداهتها عند النظر إلى الماضي، ثورية في أوائل القرن الثامن عشر، وتشكل أساس الميكانيكا الإنشائية اللاحقة كلها.

المعادلة الرئيسة والتحليل الهندسي اشتق أويلر بمعالجة هندسية منهجية، تضمنت لمتين أساسيتين عن تحليل القوى وحساب العزوم، معادلته الرئيسة:

$$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$$

لاحظ في الشكل 9.23:

- الرسم 3: يبين الإنشاء الهندسي الأساسي لتحليل القوى؛
- الرسم 6: يبدو أنه يوضح حساب العزوم حول نقاط مختلفة؛
- الرسوم 8–10: تبين تشكيلات متنوعة للمنحنيات (يرجح أنها سلاسل معلقة ومنحنيات مرنة)؛
- الرسمان 12–13: يبينان حالات تحميل وشروطاً حدية مختلفة؛
- الرسم 15: يبين ما يبدو شراعاً أو غشاءً محملاً بالرياح؛
- الرسم 16: يعرض تشكيلاً نصف دائري.

حيث:

- v = القوة المرنة (صلابة الانحناء)؛
- r = نصف قطر الانحناء؛
- E, F = حملا الطرف المطبقان في الاتجاهين الرأسي والأفقي؛
- P, Q = حملان موزعان لكل وحدة طول؛
- x, y = الإحداثيان الديكارتيان.

تفسير حديث لمعادلة أويلر الرئيسة معادلة أويلر الرئيسة هي في جوهرها معادلة *اتزان* العزوم لعارضة، معبراً عنها بدلالة الانحناء. وتمثل صياغته لعام 1732 أول عبارة عامة لاتزان العزوم في المنحنيات المرنة.

علاقة العزم–الانحناء الحديثة:

$$M = EI\kappa = \frac{EI}{R} \tag{9.34}$$

حيث:

- M = عزم الانحناء الداخلي؛
- EI = صلابة الانحناء (معامل المرونة × عزم القصور)؛
- $\kappa = 1/R$ = الانحناء؛
- R = نصف قطر الانحناء.

والمكافئ المعاصر هو **المعادلة التفاضلية للمنحنى المرن**:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.35}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لعارضة ذات حملين موزعين $q(x)$ (رأسي) و$p(x)$ (أفقي)، وقوتي طرف V وH:

$$M(x) = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.36}$$

بجمع المعادلتين (9.35) و(9.36) نحصل على المعادلة الحديثة المقابلة:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.37}$$

$$\text{الصيغة الحديثة } \frac{EI}{R} = EI\kappa \quad\leftrightarrow\quad \text{صيغة أويلر } \frac{v}{r} \tag{9.38}$$

$$\text{الصيغة الحديثة } EI \quad\leftrightarrow\quad \text{صيغة أويلر } v \tag{9.39}$$

$$\text{الصيغة الحديثة } Vx + Hh \quad\leftrightarrow\quad \text{صيغة أويلر } Ex + Fy \tag{9.40}$$

$$\text{الصيغة الحديثة } \int q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int p(\xi)h(\xi)\,d\xi \quad\leftrightarrow\quad \text{صيغة أويلر } \int P\,dx + \int Q\,dy \tag{9.41}$$

والبصيرة اللافتة أن مقاربة أويلر الهندسية لعام 1732 التقطت بالضبط الفيزياء نفسها التي نعبر عنها اليوم بمعادلة العارضة الأساسية، مما يبرهن استمرار صلاحية إطاره الرياضي رغم نحو ثلاثة قرون من التطور اللاحق.

مبدأ التوحيد الثوري إلى جانب إرساء معادلة الاتزان الأساسية، كانت أعمق بصائر أويلر إدراكه إمكان وصف الأجسام كاملة المرونة بالإطار نفسه بوضع $v = 0$:

$$0 = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy \tag{9.42}$$

كشفت هذه المعالجة الموحدة بصيرة أساسية: لم تكن السلاسل المعلقة والمنحنيات المرنة وسائر المنحنيات الميكانيكية كيانات رياضية منفصلة، بل أفراداً في أسرة واحدة لا تختلف إلا في قيمة المعامل المرن. وأظهر ذلك قدرة أويلر الاستثنائية على إدراك الوحدة الرياضية الكامنة في ظواهر فيزيائية متباينة.

إظهار قوة الإطار: حل السلسلة المعلقة لإظهار مرونة إطاره، بيّن أويلر كيف يستعيد النتائج المعروفة منهجياً. ففي السلسلة المعلقة العادية (خيط كامل المرونة تحت حمل رأسي منتظم مع $dP = a\,ds$ و$Q = 0$ و$E = 0$)، يعطي وضع $v = 0$ في معادلته الموحدة:

$$0 = Fy + \int_A^M P\,dx \tag{9.43}$$

وبتحليل هندسي منهجي يستخدم العلاقة $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$ وتقنيات تكامل مناسبة، تختزل هذه إلى معادلة السلسلة المعلقة المألوفة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Fy}{\sqrt{a^2y^2 - F^2}} \tag{9.44}$$

بيّن هذا الاشتقاق كيف يستعيد الإطار العام النتائج المعروفة منهجياً، مع تقديم بصيرة هندسية أعمق في الميكانيكا الكامنة. وتباينت الطبيعة المنهجية لمقاربة أويلر بوضوح مع الطرائق الموضعية التي استُعملت من قبل لكل نوع من المنحنيات على حدة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التحدي العصّي: الصفائح المرنة الثقيلة عندما حاول أويلر تحقيق هدفه الرئيس—حل الصفائح المرنة الثقيلة تحت وزنها الذاتي—واجه تحدياً رياضياً مختلفاً جذرياً. ففي عارضة كثافة وزنها a لكل وحدة طول، يولد الحمل الموزع توزيع عزوم يتناسب مع طول القوس، مما يؤدي إلى:

$$\frac{v}{r} = \int as\, dx \tag{9.45}$$

حيث يمثل s طول القوس من نقطة مرجعية إلى الموضع المدروس.

تطرح هذه المعادلة اعتماداً رياضياً دائرياً ثبت استعصاؤه على طرائق القرن الثامن عشر. وتكمن الصعوبة الأساسية في أن طول القوس s ونصف قطر الانحناء r كلاهما دالتان في شكل المنحنى المجهول $y(x)$. وعلى وجه التحديد:

طول القوس: $s = \int_0^x \sqrt{1 + (dy/d\xi)^2}\, d\xi$

الانحناء: $\frac{1}{r} = \frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}$

يحول التعويض بهذه العلاقات معادلة أويلر إلى معادلة تكاملية–تفاضلية تتضمن الدالة المجهولة $y(x)$ ومشتقاتها بصورة شديدة اللاخطية. وكما لاحظ أويلر نفسه، لا يمكن «معالجة» هذه المعادلات بسهولة بالتقنيات الرياضية المتاحة عام 1732، إذ تنشأ اعتمادات رياضية تقاوم جميع طرائق الحل الابتدائية.

القيود الرياضية وبذور الثورة كشفت قيود أويلر عام 1732 الحاجة إلى أدوات رياضية أقوى:

1. **صعوبات التكامل**: أدت حالات مهمة فيزيائياً إلى تكاملات يستحيل حسابها بالتقنيات المتاحة؛
2. **الطرائق الموضعية**: تطلبت كل مسألة إنشاءات هندسية خاصة، من دون طابع منهجي؛
3. **غياب مبدأ التحسين**: لم يوجد مبدأ فيزيائي كامن يحكم اختيار الحل من الإمكانات الرياضية.

أشارت هذه القيود، ولا سيما حالة الصفيحة المرنة الثقيلة، بوضوح إلى أن المسائل الميكانيكية الأساسية تحتاج أدوات رياضية لم تكن قد وُجدت بعد—فحفزت في النهاية تطوير أويلر لحساب التغايرات بحلول عام 1744.

الصلة بالنظرية الحديثة والأثر التاريخي أرست فرضية أويلر المرنة الأساس المفاهيمي للتحليل الإنشائي الحديث. وتنحدر نظرية عارضة أويلر–برنولي الحالية مباشرة من هذا العمل، مع بقاء العلاقة الأساسية $M = EI\kappa$ من دون تغير في صورتها. ويقابل معامل المرونة E وعزم القصور I في الترميز الحديث تماماً معامل «القوة المرنة» v عند أويلر. ويبين هذا الاستمرار أن بصائر أويلر الهندسية لعام 1732 حددت بصورة صحيحة الفيزياء الأساسية التي ما زالت محورية في الهندسة الإنشائية.

أرست المقاربة الهندسية المنهجية، وإن حلت محلها لاحقاً الطرائق التغايرية، قالب الميكانيكا التحليلية: تعيين المبادئ الفيزيائية الأساسية، وتطوير أطر رياضية تعبر عنها، ثم تطبيق تقنيات حل منهجية. وأصبحت هذه المنهجية معياراً في الفيزياء الرياضية.

الإرث والجسر إلى الثورة التحليلية يمثل عمل أويلر لعام 1732 لحظة مفصلية كشفت فيها البصيرة الهندسية قوة الطرائق الرياضية القائمة وقيودها معاً. فبإظهاره الواضح أن مسائل فيزيائية مهمة تتجاوز قدرة التقنيات المعاصرة، وفر هذا العمل حافزاً حاسماً لتطوير حساب التغايرات—الثورة الرياضية التي أتاحت الحل المنهجي لمسائل التحسين في الميكانيكا.

جسّد توحيد المنحنيات المرنة والمطاوعة في إطار واحد عبقرية أويلر في إدراك الوحدة الرياضية الكامنة. وأصبحت هذه المقاربة سمة للفيزياء الرياضية في القرن الثامن عشر: البحث عن مبادئ عامة تفسر ظواهر متنوعة ببنى رياضية مشتركة.

والأهم أن تحديد أويلر للفرضية المرنة $M = v\kappa$ وفر الأساس المفاهيمي الذي بُنيت عليه نظريات العوارض اللاحقة كلها. ويعود كل تحليل إنشائي حديث في النهاية إلى هذه البصيرة الأساسية في العلاقة بين الانحناء والمقاومة المرنة.

وهكذا يقف عمل عام 1732 ذروةً للميكانيكا الهندسية وبرهاناً واضحاً على الحاجة إلى طرائق رياضية أقوى في آن، فيحتل موقع الجسر المثالي بين التقليد الهندسي للقرن السابع عشر والثورة التحليلية في أواخر القرن الثامن عشر.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9.4.1.3 نظرية أويلر–برنولي

يعكس المصطلح الحديث «نظرية عارضة أويلر–برنولي» نسبة تاريخية دقيقة تقر بالإسهامين المتكاملين لبصيرة دانيال برنولي الفيزيائية عام 1728 وإطار أويلر الرياضي عام 1732. ومع أن هذه التسمية المزدوجة معيارية في الأدبيات الهندسية المعاصرة، فإن دقتها التاريخية وتطور المصطلح نفسه يستحقان الفحص.

برنولي: يكرم مكوّن «برنولي» في التسمية أساساً إرساء دانيال برنولي عام 1728 للعلاقة الأساسية بين العزم والانحناء $M = B/r$. ويمثل ذلك أول إدراك صريح أن المقاومة المرنة تتناسب مع الانحناء—وهي البصيرة الركيزة التي تقوم عليها نظريات العوارض اللاحقة كلها. غير أن النسبة تقر ضمناً أيضاً بإرث أسرة برنولي الأوسع، ولا سيما صياغة ياكوب برنولي لمسألة المنحني المرن الأصلية عام 1691، التي حفزت مجال البحث كله.

كان إسهام دانيال برنولي مفاهيمياً في جوهره: إدراك أن العزم الداخلي في عارضة منحنية يجب أن يساوي مقاومة المادة المرنة، معبراً عنها بـصلابة الانحناء مقسومة على نصف قطر الانحناء. وقدمت هذه البصيرة المبدأ الفيزيائي الحاكم للتشوه المرن، لكنها افتقرت إلى الآلة الرياضية اللازمة لتطبيق منهجي على حالات تحميل معقدة.

أويلر: رفع عمل أويلر لعام 1732 بصيرة برنولي الفيزيائية إلى نظرية رياضية شاملة. ومع أن أويلر بنى على مبدأ العزم–الانحناء الذي أرساه دانيال برنولي، فإن إسهاماته كانت تحويلية لا مجرد تحسينات تراكمية:

1. **منهجية منظمة**: طور أويلر طرائق هندسية يمكن تطبيقها منهجياً عبر شروط تحميل متنوعة؛
2. **معادلة اتزان عامة**: شملت معادلته الرئيسة خواص مرنة اعتباطية وأحمالاً موزعة وشروطاً حدية في إطار موحد؛
3. **توحيد نظري**: أثبت أويلر أن المنحنيات المرنة والمنحنيات كاملة المطاوعة تنتمي إلى الأسرة الرياضية نفسها.

أتاح رقي أويلر الرياضي التطبيق العملي لمبدأ برنولي الفيزيائي، محولاً بصيرة منفردة إلى نظرية فاعلة في الميكانيكا الإنشائية.

لم تظهر التسمية المركبة «نظرية عارضة أويلر–برنولي» فور نشر هذين البحثين التأسيسيين. ويعكس تطور المصطلح الاعتراف التدريجي في المجتمع الهندسي بالدور الأساسي لكلا الإسهامين:

الفترة المبكرة (1732–1800): كانت المراجع المعاصرة تنسب عادةً الإسهامات كلّاً على حدة، واكتسب عمل أويلر الصدارة لشمول رياضياته وقابليته العملية للتطبيق.

تطور القرن التاسع عشر: مع انتظام نظرية العوارض في التعليم والممارسة الهندسيين، ازداد الاعتراف بالطبيعة الأساسية لمبدأ برنولي للعزم–الانحناء إلى جانب طرائق أويلر الرياضية.

التوحيد الحديث للمصطلح: أصبحت تسمية «أويلر–برنولي» الموصولة بشرطة معيارية في الأدبيات الهندسية في القرن العشرين، معبرة عن إجماع علمي على أن الإسهامين ضروريان للنظرية الكاملة.

تعكس النسبة المزدوجة بدقة التطور التاريخي لنظرية العوارض، إذ تقر بأن بصيرة برنولي الفيزيائية ولا إطار أويلر الرياضي شكّلا، منفردين، نظرية كاملة للعارضات المرنة:

- **قيد برنولي**: مع إرسائه المبدأ الأساسي، افتقر عمله لعام 1728 إلى طرائق منهجية لمعالجة المسائل المعقدة؛
- **اعتماد أويلر**: رغم تطويره تقنيات رياضية متقدمة، اعتمدت مقاربة أويلر جوهرياً على علاقة برنولي للعزم–الانحناء؛
- **ضرورة التكامل**: تطلبت النظرية الكاملة الفهم الفيزيائي والآلة الرياضية معاً.

تجسد معادلة العارضة الحديثة $M = EI\kappa$، مقترنة بعلاقة الاتزان $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$، الإسهامين التاريخيين مباشرة:

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\mathcal{M} = \frac{B}{r} \rightarrow M = EI\kappa \quad \text{بصيرة برنولي:} \tag{9.46}$$

$$\frac{v}{r} = f(\text{التحميل}) \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \quad \text{إطار أويلر:} \tag{9.47}$$

يبين هذا الاستمرار أن تسمية «أويلر–برنولي» أكثر من اصطلاح تاريخي؛ فهي تحدد بدقة الأصول المفاهيمية للعلاقات الرياضية التي ما زالت تحكم التحليل الإنشائي الحديث.

تشدد بعض الروايات التاريخية على جوانب مختلفة من التطور النظري:

- **التشديد على ياكوب برنولي**: عد تحدي المنحني المرن لعام 1691 الصياغة التأسيسية للمسألة؛
- **أولوية أويلر**: التركيز على معالجة أويلر الرياضية الشاملة بوصفها التقدم النظري الحاسم؛
- **التطور الجماعي**: النظر إلى نظرية العوارض بوصفها ثمرة مجتمع الفيزيائيين الرياضيين الأوسع في القرن الثامن عشر.

ومع ذلك، تظل تسمية «أويلر–برنولي» المعيارية قابلة للدفاع تاريخياً وذات قيمة تعليمية، إذ تحدد بوضوح المكونين الأساسيين: المبدأ الفيزيائي والإطار الرياضي.

وخلاصة القول إن مصطلح «نظرية عارضة أويلر–برنولي» نسبة تاريخية دقيقة تقر بالبصيرة الفيزيائية الأساسية التي قدمتها علاقة دانيال برنولي للعزم–الانحناء عام 1728، وبالإطار الرياضي المنهجي الذي طوره تحليل أويلر الهندسي عام 1732. وتعكس هذه التسمية المزدوجة تكامل إسهاميهما والحقيقة التاريخية أن نظرية العوارض الكاملة احتاجت الفهم الفيزيائي والرقي الرياضي معاً.

يشهد بقاء هذا المصطلح عبر نحو ثلاثة قرون من التطور الهندسي على استمرار أهمية الإسهامين التأسيسيين ودقة النسبة التاريخية التي يمثلانها.

9.5 نظرية الانبعاج: من الملاحظة إلى الأحمال الحرجة

على خلاف السلسلة المعلقة والمنحني المرن، لم تنشأ مسألة انبعاج الأعمدة من مسابقة، بل من توسع أويلر الإبداعي في أعمال سابقة.

9.5.1 الأعمال المبكرة

9.5.1.1 ليوناردو (نحو تسعينيات القرن الخامس عشر)

كتب ليوناردو ما يكاد يكون رسالة قصيرة في الأعمدة والعارضات والحبال والعقود، وقدم قواعد محددة لا مجرد اتجاهات مبهمة (Truesdell, 1960, p. 20). ويناقش تروسدل فهم ليوناردو دا فينشي النوعي المتقدم على نحو لافت للسلوك الإنشائي. ويذكر أن ليوناردو فحص الأعمدة تجريبياً ومفاهيمياً (الشكل 9.24a)، محاولاً فهم سبب فشل بعضها بالانحناء وفشل بعضها الآخر بالسحق. ووفقاً لتروسدل، أدرك ليوناردو الدور الحاسم لهندسة التحميل: فعندما يمر خط عمل الحمل الرأسي عبر محور مركز مساحة العمود، يعمل العنصر في الضغط المحض. وفي هذه الظروف اعتقد ليوناردو—اعتقاداً صحيحاً من الناحية النوعية—أن العنصر يقصر من دون انحراف جانبي. ثم يقارن تروسدل هذه البصيرة المبكرة بالمعالجات التحليلية اللاحقة عند غاليليو وماريوت وأويلر، مبيناً كيف أفسح حدس عصر النهضة تدريجياً المجال لنظرية رياضية كاملة للانحناء والاستقرار. وخلاصة الأمر أن تروسدل يستخدم ملاحظة ليوناردو لإبراز الإدراك المبكر، السابق للرياضيات، لما نفهمه اليوم بوصفه التحميل اللامركزي والانحناء الناجم عن الانبعاج.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 9.11: تحليل مقارن: إسهامات برنولي 1728 وأويلر 1732 في نظرية العوارض

الجانب	برنولي 1728	أويلر 1732
الابتكار الرئيس	أول علاقة صريحة بين العزم والانحناء: $\mathcal{M} = B/r$	الفرضية المرنة الأساسية: $M = v\kappa$ ضمن إطار هندسي منهجي
المقاربة الرياضية	تحليل هندسي لحالات تحميل مخصوصة مع حساب العزوم	طريقة هندسية منهجية تستعمل لمتين أساسيتين ومبادئ اتزان عامة
نطاق التطبيق	عارضات ذات وزن ذاتي وأحمال نقطية مطبقة	خواص مرنة اعتباطية، وأحمال موزعة $(P، Q)$، وشروط حدية عامة
المعادلة الحاكمة الأساسية	$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r}$	$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$
إنجاز التوحيد	محدود بمسائل العوارض ذات التحميل المركب	وحّد المنحنيات المرنة والأجسام كاملة المطاوعة (السلاسل المعلقة) وجميع الحالات الوسيطة
البصيرة الفيزيائية	المقاومة المرنة تتناسب مع الانحناء	تظهر الأجسام المطاوعة حالة حدية عندما $v = 0$؛ فهم فيزيائي كامل
المسائل التي حُلّت بنجاح	• عارضة تحت وزنها الذاتي؛ • تطبيقات الأحمال النقطية؛ • قوى بزوايا اعتباطية.	• اشتقاق السلسلة المعلقة العادية؛ • حالات تحميل مكافئة؛ • تطبيقات القوى العمودية؛ • قوى عمودية ومماسية مركبة؛ • جميع مسائل المطاوعة الكاملة.
القيود الرئيسة	• طرائق موضعية لكل حالة؛ • مقيد بتحميل بسيط؛ • لا إطار منهجياً؛ • يعجز عن معالجة حدود معقدة.	• الصفائح المرنة الثقيلة عصية؛ • صعوبات تكامل معقدة؛ • لا مبدأ للتحسين؛ • الطرائق الهندسية تفتقر إلى العمومية.
الأدوات الرياضية	تحليل هندسي أساسي، واتزان العزوم، وحسابات مركز الثقل	لمم هندسية متقدمة، ونظرية منهجية للعزوم، ومعادلات تفاضلية عامة، وطرائق وسيطية
الطابع المنهجي	إنشاءات هندسية خاصة بكل مسألة	مقاربة منهجية: تحديد المبادئ ← اشتقاق معادلة عامة ← تطبيقها على حالات مخصوصة
معالجة التحميل	الوزن الذاتي مع قوى مطبقة منفصلة	تحميل موزع عام: رأسي (P)، وأفقي (Q)، مع أحمال طرفية $(F، E)$
السياق التاريخي	البناء على عمل العم ياكوب في المنحني المرن	الإجابة عن تحدي ياكوب برنولي لعام 1691 بنطاق موسع
ما أثبته	علاقة العزم–الانحناء أساسية للسلوك المرن	يمكن تطبيق هذه العلاقة منهجياً لحل مسائل ميكانيكية متنوعة
ما بقي من دون حل	هندسات معقدة، وأحمال موزعة، ومسائل تحسين	صفائح مرنة ثقيلة، ومسائل تغايرية تتطلب مبادئ تطرف
الإرث الحديث	علاقة العزم–الانحناء بلا تغيير: $M = EI\kappa$ (أكثر من 300 عام)	أساس نظرية عارضة أويلر–برنولي، وحافز لتطوير حساب التغايرات
العلاقة	قدم المبدأ الفيزيائي الأساسي	بنى طرائق رياضية منهجية على أساس برنولي

CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

اقترح ليوناردو، في ملاحظات متناثرة، قواعد تناسب للحمل الأقصى P لعمود مساحته A وقطره d وطوله L، مثل:

$$P \propto \frac{\sqrt{A}}{L}, \qquad P \propto d^2. \tag{9.48}$$

إذا أُخذت هذه القواعد الباقية حرفياً، فهي متعارضة فيما بينها (إذ إن $A \sim d^2$ تجعل العلاقة الأولى تتنبأ بـ$P \sim d/L$). ونظراً إلى الشكوك المتعلقة بقراءة المخطوطات، فإن التفسير الحذر هو أن ليوناردو لم يؤكد سوى الاتجاهات النوعية: تنخفض المقاومة مع الطول وتزداد مع حجم المقطع العرضي، لكنه لم يمتلك قانوناً متماسكاً للاستقرار المرن (Timoshenko, 1953). وبالمصطلح الحديث، أدرك *نزعة الانبعاج* في الدعامات الطويلة النحيلة تحت الضغط المحوري.

9.5.1.2 بيتر فان موسخنبروك (1729)

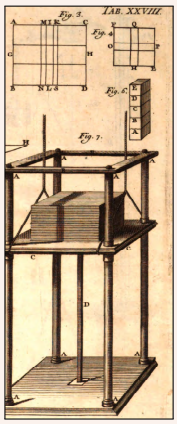
هاجم فان موسخنبروك، وهو من كبار التجريبيين، مسائل التماسك والاستقرار صراحةً بـ*التجربة*. وباستعمال الجهاز في الشكل 9.24b، أثبت أن حمل الحد في ضغط العينات المنشورية النحيلة يتغير عكسياً مع مربع الطول، واقترح قاعدة تجريبية للمقاطع المستطيلة:

$$P \propto \frac{h^2\, B}{L^2}, \tag{9.49}$$

حيث h سماكة الجانب الذي يصبح منحنياً (الجانب «المنحني»)، وB الجانب الآخر (Van Musschenbroek, 1729). ويُعد التناسب مع L^{-2} النقطة الحاسمة تاريخياً (إذ يستبق الاعتماد الدالي الذي سيظهر لاحقاً في نظرية أويلر). وتشير أسس أبعاد المقطع (h^2 بدلاً من $EI \sim Bh^3$ المرن) إلى أن الحد المشاهد يعكس آثار الانحناء/الكسر في طريق الفشل، لا عدم استقرار مرن نقي. ومع ذلك، فهذه *أول دراسة منهجية* لعناصر مضغوطة تُظهر انحرافاً جانبياً، وتسبق تحليل أويلر بنحو خمسة عشر عاماً.



(a) رسوم ليوناردو المتعلقة بالانبعاج



(b) جهاز فان موسخنبروك (1729)

شكل 9.24: ركزت دراسات الضغط المبكرة على ظواهر عدم الاستقرار المحوري.

9.5.2 أويلر (1759)

في حين أرست تجارب فان موسخنبروك قانون التناسب التجريبي L^{-2} لفشل الأعمدة، ظهر الأساس النظري لفهم عدم استقرار الانبعاج من مصدر غير متوقع: عمل أويلر في المنحنيات المرنة. فما بدأ تمريناً رياضياً في حساب التغايرات قدم في النهاية أول نظرية صارمة للاستقرار الإنشائي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

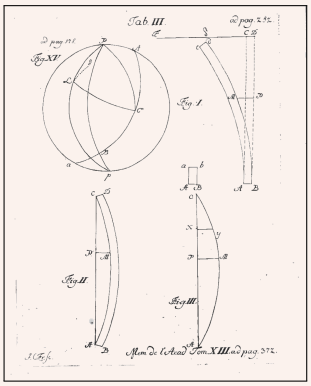
قدم أويلر عام 1759 إلى أكاديمية برلين بحثاً (Euler, 1759) مثّل إعادة فحص حاسمة لعمله في المنحني المرن لعام 1744، الشكل 9.25. وتكشف الفقرة الافتتاحية، بترجمة Euler, 1759، إدراكه المتأخر:

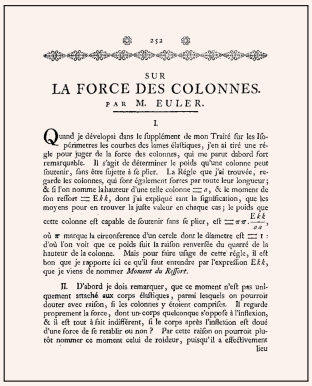
> Lorsque j'ai traité des courbes élastiques dans le supplément de mon traité des isopérimètres, j'en ai tiré une conséquence, touchant la force des colonnes, qui m'a paru fort remarquable. Elle consiste dans la charge qu'une colonne peut porter sans se courber. J'ai trouvé une règle qui a la a lieu pour les colonnes d'une épaisseur égale dans toute leur hauteur; et si l'on désigne par le moment de roideur, la charge qu'une telle colonne peut Ekk hauteur de la colonne, et par $= 1$ signifiant le périmètre d'un cercle de diamètre π ,$= \dfrac{\pi\pi \cdot Ekk}{aa}$ porter sans se courber sera .On en conclut que cette charge est en raison inverse du carré de la hauteur de la colonne

---

عندما طورت المنحنيات المرنة في ملحق رسالتي في متساويات القياس، استخلصت منها نتيجة بشأن مقاومة الأعمدة بدت لي لافتة جداً. وهي تتعلق بالأحمال التي يستطيع العمود حملها من دون انبعاج. وتنطبق القاعدة التي وجدتها على أعمدة ثابتة المساحة المقطعية؛ فإذا رمزنا إلى ارتفاع العمود بـa، وإلى العزم المقاوم بـEkk، كان الحمل الذي يستطيع هذا العمود حمله من دون انبعاج مساوياً $\pi\pi.Ekk/aa$، حيث تدل π على محيط دائرة قطرها 1. ومن ذلك نستنتج أن الحمل يتناسب عكسياً مع مربع ارتفاع العمود.

"Euler, 1759 "*Sur la force des colonnes*




SUR
LA FORCE DES COLONNES.
PAR M. EULER.

I.

Quand je développai dans le supplément de mon Traité sur les Isopérimètres les courbes des lames élastiques, j'en ai tiré une règle pour juger de la force des colonnes, qui me parut d'abord fort remarquable. Il s'agit de déterminer le poids qu'une colonne peut soutenir, sans être sujette à se plier. La Règle que j'ai trouvée, regarde les colonnes, qui sont également fortes par toute leur longueur; & si l'on nomme la hauteur d'une telle colonne $= a$, & le moment de son ressort $= Ekk$, dont j'ai expliqué tant la signification, que les moyens pour en trouver la juste valeur en chaque cas; le poids que cette colonne est capable de soutenir sans se plier, est $= \pi\pi \frac{Ekk}{aa}$, où π marque la circonférence d'un cercle dont le diamètre est $= 1$: d'où l'on voit que ce poids suit la raison renversée du quarré de la hauteur de la colonne. Mais pour faire usage de cette règle, il est bon que je rapporte ici ce qu'il faut entendre par l'expression Ekk, que je viens de nommer *Moment de Resort*.

II. D'abord je dois remarquer, que ce moment n'est pas uniquement attaché aux corps élastiques, parmi lesquels on pourroit douter avec raison, si les colonnes y étoient comptées. Il regarde proprement la force, dont un corps quelconque s'oppose à l'inflexion, & il est tout à fait indifférent, si le corps après l'inflexion est doué d'une force de se rentablir ou non? Par cette raison on pourroit plutôt nommer ce moment celui de roideur, puisqu'il a effectivement lieu

شكل 9.25: بحث أويلر التأسيسي في الانبعاج (Euler, 1759)

وهذه أول صياغة واضحة لما نعرفه اليوم بصيغة أويلر للانبعاج: $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ بالترميز الحديث.

عمّم عمل أويلر لعام 1757 المفهوم ليتجاوز الأجسام المرنة الصرفة، مؤكداً أن «العزم المقاوم» Ek^2 ينطبق على نطاق أوسع:

> يتعلق الأمر في جوهره بقوة يقاوم بها أي جسم تغير الانحناء، ولا أهمية إطلاقاً لما إذا كان هذا الجسم بعد الانثناء يمتلك قوة تعيده إلى شكله الأصلي أم لا. ولهذا السبب قد يكون من الأفضل أن نسمي هذا العزم عزم الصلابة *moment de roideur*، لأنه يوجد في جميع الأجسام التي تقاوم الانثناء، سواء أكانت مرنة أم لا.

"Euler, 1759 "*Sur la force des colonnes*

تنطلق كل من مقاربة أويلر (1759) والمقاربة الحديثة «للنوع I» (§9.3.2.2.1) من تربيع المنحني المرن نفسه، الذي يعبر عن منحنى خط مرن مضغوط:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}\, dx. \tag{9.50}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تنشأ هذه العلاقة من اتزان صلابة الانحناء EI (أي Ekk عند أويلر) والحمل المحوري P والانحناء، وتشكل نقطة الانطلاق المشتركة.

مستنتج من النوع I (Euler, 1744a)

1. البدء مباشرة من المعادلة (9.50).
2. افتراض $c^2 \ll a^2$ (شرط النوع I). بالتقريب:

$$a^2 - c^2 \approx a^2, \quad 2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2.$$

3. عندما تكون x صغيرة، مزيد من التبسيط:

$$dy \approx \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\,dx.$$

4. التكامل:

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{x}{c}.$$

5. تطبيق الشرط الحدي عند القمة: $f = \dfrac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ لنصف الطول f.
6. مع $P = \dfrac{2Ek^2}{a^2}$ نحصل على:

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$

7. للطول الكامل $L = 2f$ ومع $Ek^2 = EI$:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}.$$

(الاشتقاق الأصلي) (Euler, 1759)

1. يقدم المعادلة (9.50) من نظريته السابقة للمنحني المرن.
2. يختزلها، للحالة شبه المستقيمة، إلى المعادلة التفاضلية العادية الخطية:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + P\,y = 0.$$

3. الحل:

$$y(x) = C_1 \sin\!\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\!\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right).$$

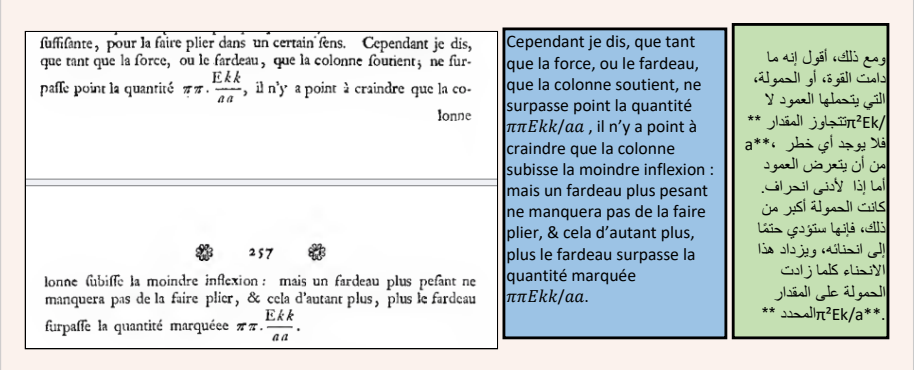
4. لطرفين مفصليين: $y(0) = 0$ و$y(a) = 0$.
5. حل غير تافه $\Rightarrow$ شرط القيمة الذاتية:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,a = \pi.$$

6. ومن ثم الحمل الحرج:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2}}$$

يمر مسار أويلر بمعادلة الاتزان التفاضلية، ويفسر التشعب بوصفه عتبة للاستقرار. وتستخدم مقاربة النوع I تقريبات مقاربية صريحة لتربيع المنحني المرن للوصول إلى الشرط نفسه. وتكشف المقاربتان القانون الفيزيائي ذاته: يتغير حمل الانبعاج الحرج عكسياً مع مربع الطول. الشكل 9.26.


suffisante, pour la faire plier dans un certain sens. Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient; ne surpasse point la quantité $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$, il n'y a point à craindre que la colonne

257

subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi . \frac{Ekk}{aa}$.

Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi Ekk/aa$, il n'y a point à craindre que la colonne subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi Ekk/aa$.

ومع ذلك، أقول إنه ما دامت القوة، أو الحمولة، التي يتحملها العمود لا تتجاوز المقدار ** $\pi^2 Ek/a$**، فلا يوجد أي خطر من أن يتعرض العمود أما إذا لأدنى انحراف. كانت الحمولة أكبر من ذلك، فإنها ستؤدي حتمًا إلى انحنائه، ويزداد هذا الانحناء كلما زادت الحمولة على المقدار المحدد ** $\pi^2 Ek/a$**.

شكل 9.26: صياغة Euler, 1759 لحمل الانبعاج الحرج

على الرغم من هذا الاختراق، تضمن تحليل أويلر قيوداً مهمة لم تُحل إلا بتطورات لاحقة:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

غياب مفهوم عدم الاستقرار: لم يدرك أويلر أن المعادلة 9.24 تمثل نقطة تشعب تؤدي عندها زيادات صغيرة في الحمل فوق القيمة الحرجة إلى تشوهات كبيرة وفشل محتمل. ولم يتطور مفهوم الأحمال «الحرجة» وعدم الاستقرار الإنشائي تطويراً كاملاً إلا في أعمال متأخرة كثيراً في نظرية الاستقرار.

خواص مقطع عرضي غير صحيحة: مع أن أويلر أدرك على نحو صحيح أن Ek^2 يقيس الصلابة، فقد افترض خطأً أن معامل الانحناء لعارضة مستطيلة عرضها b وسماكتها h يتناسب مع Ebh^2. وتتضمن العلاقة الصحيحة $Ebh^3/12$، غير أن مفهوم عزم القصور والتحليل الصحيح لتوزيع الإجهاد لم يظهرا حتى عمل كولوم (1773) والتطورات اللاحقة في نظرية العوارض.

الأثر والإرث

يقف اشتقاق أويلر لحمل الانبعاج الحرج أحد أهم الإنجازات في الميكانيكا الإنشائية. فقد أكدت الصيغة $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ تناسب فان موسخنبروك التجريبي مع L^{-2}، وقدمت في الوقت نفسه الإطار النظري لفهم سبب حدوث هذا السلوك.

وعلى مستوى أعمق، أدخل هذا العمل مفهوم الأحمال الحرجة في التحليل الإنشائي—أي إمكان فشل المنشآت لا بانهيار المادة، بل بعدم استقرار هندسي. وقد ثبت أن هذه البصيرة ثورية، إذ أرست أساس جميع الأعمال اللاحقة في الاستقرار الإنشائي، وحولت الهندسة من حرفة تجريبية إلى علم قائم على مبادئ رياضية.

يبين المسار من اشتقاق أويلر الرياضي إلى التطبيق الهندسي أيضاً أن الاختراقات النظرية كثيراً ما تسبق تفسيرها العملي. فمع أن الطرائق التغايرية لعام 1744 قدمت العلاقة الرياضية الصحيحة، تطلب فهم آثارها الفيزيائية بحثاً مستمراً وتطوير نظريات مكملة في سلوك المواد والتحليل الإنشائي.

الخلاصة

يمثل اشتقاق حمل الانبعاج الحرج ذروة تقليد رياضي بدأ بتحدي ياكوب برنولي للمنحني المرن. وكما لاحظ Fraser, 1991، وقف أويلر حقاً على أكتاف عمالقة: اشتق ياكوب برنولي معادلة المنحني المرن، وصاغ هوينغنس مسألة تعيين الأشكال المنحنية، وابتكر نيوتن فكرة التصنيف المنهجي، واقترح دانيال برنولي المقاربة التغايرية. وتميز إنجاز أويلر بالعزم والبصيرة التحليلية اللذين تابع بهما هذه الأفكار وطورها إلى نظرية موحدة.

استبقت مقاربة أويلر—معاملة معادلات المرونة الأساسية مسلمات فيزيائية تخضع للتعيين التجريبي والتطوير الرياضي—تطورات لاحقة في الفيزياء الرياضية. غير أن أويلر، بخلاف المقاربات الوضعية اللاحقة التي شددت على الرياضيات بوصفها أداة إجرائية فحسب، حقق تكاملاً أساسياً بين التصورين الرياضي والفيزيائي. ويتجلى هذا التركيب لا في تصوره لمسألة المنحني المرن وحده، بل في إدراكه أن التصنيف الرياضي يستطيع كشف الطيف الكامل للسلوك الفيزيائي.

وهكذا تمثل صيغة الانبعاج $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ أكثر من نتيجة هندسية عملية. فقد أرست مفهوم الأحمال الحرجة وعدم الاستقرار الإنشائي، وحولت الهندسة من ممارسة تجريبية إلى علم قائم على مبادئ رياضية—وهو تحول يمتد أثره إلى الميكانيكا الحسابية الحديثة وتحليل الاستقرار.

9.6 نظرية أويلر العامة: التوحيد الكامل (1771)

بحلول أوائل سبعينيات القرن الثامن عشر، كانت التحديات الرئيسة للخطوط القابلة للتشوه قد طُرحت وحُلّت كلها.

تكشف تسلسل التحديات الكبرى كأنه مسرحية ذات فصول. فالسلسلة المعلقة، التي طرحها ياكوب برنولي أولاً، عيّنها في النهاية لايبنتس ويوهان برنولي وهوينغنس—لكن المفارقة أن ياكوب نفسه لم يفعل (§9.2). وبعد ذلك بقليل طرح ياكوب من جديد مسألة المنحني المرن، وحل جزءاً منها بنفسه، ثم أتمها أويلر عام 1744 (§9.3)، بمساعدة فاصل مهم تصور فيه دانيال برنولي حساب التغايرات أولاً ثم صقله أويلر بصرامة. وأضاف تحدي عام 1724 المجهول (§9.4) زخماً آخر، إذ تناوله دانيال برنولي وأويلر وحلاه. وبلغت القصة ذروتها أخيراً بمذكرة أويلر الشهيرة لعام 1759 في انبعاج الأعمدة، التي حولت طرافة رياضية إلى نتيجة مركزية في الميكانيكا الإنشائية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بحلول عام 1771، كان أويلر مستعداً لجمع هذه الخيوط. فبعد أن شهد حل السلسلة المعلقة والمنحني المرن والتحدي المجهول ومسألة انبعاج الأعمدة تباعاً، سعى إلى نسجها في نسيج تحليلي واحد. وفي كتابه *Genuina principia* (Euler, 1771)، قدم ما يصح أن يسمى *نظرية توحيد كبرى* للخطوط القابلة للتشوه،[27] واضعاً الاتزان والحركة معاً تحت مجموعة واحدة من المعادلات الحاكمة، الشكل 9.27.

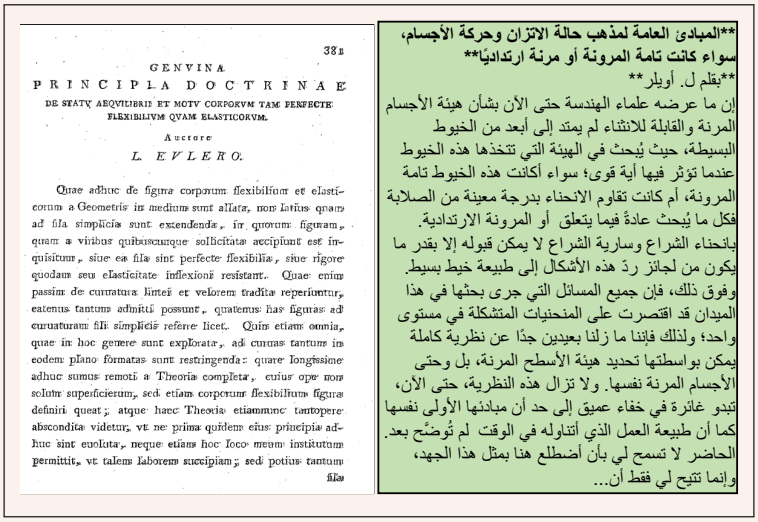
Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum."

«المبادئ الصحيحة لنظرية اتزان الأجسام وحركتها، سواء أكانت كاملة المطاوعة أم مرنة.»

Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 1

بهذه العبارة الافتتاحية الجريئة، أعلن أويلر عزمه على تأسيس ميكانيكا شاملة للخطوط القابلة للتشوه، تضم التحديات الكبرى في نظام نظري واحد.

ويجعل هذا الإعلان قصد أويلر صريحاً: تأسيس أول ميكانيكا شاملة حقاً للخطوط المطاوعة والمرنة.



شكل 9.27: بحث أويلر في «التوحيد الكبير» (Euler, 1771)

المسألة العامة ومبدأ الإجهاد

صاغ أويلر في بحث عام 1771 ما سماه «المسألة العامة» لاتزان الخط: منحنى مستوٍ BMA يخضع لقوى موزعة اعتباطية، الشكل 9.28. وبقطعه المتخيل للمنحنى عند نقطة M وعزله القطعة، استبدل بالجزء المقطوع محصلات إجهاد مكافئة—قوة مماسية T، وقوة عمودية V، وعزم انحناء داخلي $\mathfrak{M}$. وهذا الإنشاء هو البذرة المفاهيمية للتحليل الحديث بمحصلات الإجهاد.

[27] في الفيزياء الحديثة، يردد البحث عن «نظرية توحيد كبرى» تجمع القوى الشديدة والضعيفة والكهرومغناطيسية صدى طموح أويلر إلى ضم مسائل السلسلة المعلقة والمنحني المرن والانبعاج في نظام تحليلي واحد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

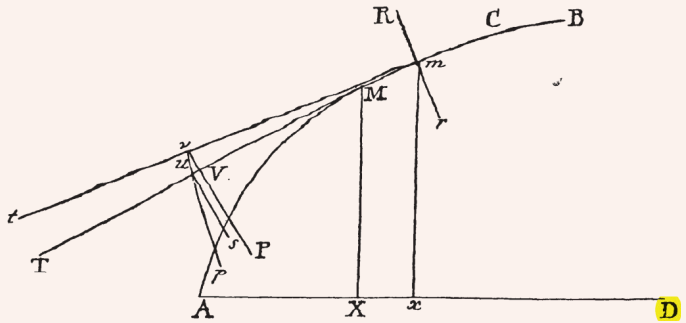
وبالترميز الجوهري الحديث المستخدم هنا (يستعمل اشتقاق أويلر اللاتيني رموزاً مختلفة واصطلاح إشارة مختلفاً قليلاً)، تُكتب معادلات الاتزان:

$$\frac{dT}{ds} + V\frac{d\phi}{ds} = -F_t, \tag{9.51}$$

$$\frac{dV}{ds} - T\frac{d\phi}{ds} = -F_n, \tag{9.52}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} - V = 0, \tag{9.53}$$

حيث $r^{-1} = d\phi/ds$ هو الانحناء، وϕ زاوية المماس (وغالباً ما تكون في اصطلاح أويلر متممة زاوية الميل).



شكل 9.28: مخطط أويلر للاتزان العام لخط (Euler, 1771).

توحيد التحديات الكبرى وتعميمها

تشمل معادلات أويلر العامة، بوصفها حالات خاصة، المسائل الكلاسيكية للخطوط القابلة للتشوه:

السلسلة المعلقة (سلسلة مطاوعة): إذا كان $\mathfrak{M} = 0$ (لا صلابة انحناء)، و$F_t = 0$ و$F_n = g\sigma$ (الوزن الذاتي لكل وحدة طول)، تختزل المعادلات إلى مسألة السلسلة المعلقة التي حلها لايبنتس ويوهان برنولي وهوينغنس.

المنحني المرن (قضيب مرن): مع $F_t = F_n = 0$ (لا تحميل موزع) والقانون التكويني $\mathfrak{M} = EI/r$، نستعيد معادلة المنحني المرن التي طرحها ياكوب برنولي أولاً وطورها أويلر تطويراً كاملاً عام 1744.

انبعاج الأعمدة (1759): عند تطبيق الإطار نفسه على عمود منشوري محمل محورياً، يعطي شرط الاستقرار الخطي. وكان أويلر قد استنتج من قبل (1759) الحمل الحرج $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ لطرفين مفصليين؛ وفي إطار عام 1771 الأوسع، يظهر هذا بوصفه مسألة قيمة ذاتية (تشعب) خاصة داخل النظرية العامة.

> *"...ad differentialia quarti gradus assurget $d^3\phi$ terminus."*

«...يرتقي حد المشتقة الثالثة إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة.»

Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 12

يبرز هذا المقطع كيف تنتج طريقة أويلر طبيعياً معادلة المنحني المرن عالية الرتبة، وهي علامة فارقة في التحليل الإنشائي.

الاتزان العام للخط (1771): والأهم أن بحث عام 1771 يبين أن المعادلات نفسها تحكم أي خط تحت توزيعات اعتباطية للأحمال المماسية والعمودية، بصلابة انحناء أو من دونها. وقد شدد أويلر نفسه على قابلية حله للتكييف:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

"...non difficile erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare"

«لن يكون من الصعب تكييف حلنا مع حالات أخرى أيضاً...»

Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 13

رفع هذا المستوى الجديد من العمومية التحليل من حالات خاصة إلى مبدأ شامل لاتزان الخط، وإلى مسائل الحركة (الأوتار المهتزة والقضبان المرنة) في أقسام مرافقة من المذكرة، رابطاً بذلك علم السكون والديناميكا في طريقة واحدة.

منظور ختامي

تشكل هذه الأعمال مجتمعة اكتمال برنامج أويلر للخطوط القابلة للتشوه. فقد وفر المنحني المرن لعام 1744 الأساس الرياضي؛ وبرهنت مذكرة الأعمدة لعام 1759 قوته في حل مسألة هندسية مركزية؛ ورفع بحث عام 1771 الموضوع إلى نظرية شاملة لاتزان الخطوط المطاوعة والمرنة وحركتها. وفي هذا التطور، حوّل أويلر التحديات المنفصلة للسلاسل والقضبان والأعمدة إلى وجوه لإطار تحليلي واحد—وهو إنجاز لم يوحد ميكانيكا عصره فحسب، بل استبق أيضاً المبادئ الحاكمة للصياغات الحديثة لمحصلات الإجهاد والأوساط المتصلة.

التركيب: من التحديات إلى العلم

يمثل التطور من تحديات منفردة إلى نظرية موحدة تحولاً أساسياً في علم الميكانيكا. فقد أظهرت مسألة السلسلة المعلقة في تسعينيات القرن السابع عشر القوة الجديدة لحساب التفاضل والتكامل في التحسين. ودفع تحدي ياكوب برنولي للمنحني المرن الرياضيات نحو الطرائق التغايرية. وكشفت مسألة الانبعاج كيف تستطيع النظرية المجردة استباق ظواهر حرجة في المنشآت الهندسية.

ركبت نظرية أويلر العامة لعام 1771 هذه الإنجازات في إطار شامل:

- **وحّد الهندسة والميكانيكا**: ربط الانحناء والتشوه مباشرة بمحصلات القوى الداخلية؛
- **أرسى مبدأ الإجهاد**: قدم T (مماسية) وV (عمودية) و$\mathfrak{M}$ (عزم) بوصفها كميات أساسية؛
- **وفر منهجية عامة**: صاغ معادلات اتزان مستقلة عن قوانين المواد، مع توفير العلاقات التكوينية للإغلاق؛
- **ميّز الحركيات من سلوك المادة**: فصل بوضوح الوصف الهندسي عن الفروض التكوينية؛
- **أتاح التصنيف المنهجي**: بيّن كيف تظهر الخطوط كاملة المطاوعة والمرنة معاً بوصفها حالات خاصة من الإطار العام.

امتدت الرحلة من ملاحظات غاليليو النوعية على مقاومة العوارض إلى معادلات أويلر التفاضلية نحو قرنين من التطور الرياضي والميكانيكي. وعملت التحديات الكبرى محفزات، فدفعت التقدم في حساب التفاضل والتكامل والتحليل التغايري والاستدلال الفيزيائي. وأظهر توحيدها النهائي تحت نظرية أويلر العامة كيف تستطيع مسائل مخصوصة حسنة الصياغة كشف مبادئ شاملة.

يمتد الإرث إلى ما وراء المسائل الأصلية بكثير. فالتحليل الإنشائي الحديث—من ناطحات السحاب إلى الجسور المعلقة، ومن المواد المجهرية إلى جزيئات الحمض النووي—يقوم على أسس أرسيت أول مرة بحل هذه الأسئلة «البسيطة» عن السلاسل المعلقة والقضبان المنحنية والأعمدة المضغوطة. وبهذا المعنى حققت التحديات الكبرى أسمى غاياتها: تحويل الهندسة من حرفة تجريبية إلى علم رياضي.

"...non difficile erit solutionem nostram etiam ad alios casus accommodare"

«لن يكون من الصعب تكييف حلنا مع حالات أخرى أيضاً...»

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> Euler, 1771 “*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*”, p. 13
>
> تلتقط ملاحظة أويلر الختامية روح مذكرته لعام 1771: إطار لا تحصره مسائل خاصة، بل مفتوح وقابل للتكييف ودائم.

9.7 الخلاصة

امتد الطريق من تأملات غاليليو النوعية في مقاومة العوارض (§7.2.2) إلى معادلات أويلر الشاملة للخطوط القابلة للتشوه نحو قرنين، وحوّل الميكانيكا من حرفة يهديها القياس والتجربة إلى علم رياضي. وأدى كل تحد دوراً حاسماً: كشفت السلسلة المعلقة قوة حساب التفاضل والتكامل في حل مسائل التحسين؛ ودفع المنحني المرن الرياضيات نحو الطرائق التغايرية والمعادلات التفاضلية عالية الرتبة؛ ووسعت مسألة عام 1724 المجهولة هذه البصائر إلى قوانين قوى أعم؛ وأرست صيغة أويلر للانبعاج القدرة التنبؤية للنظرية في الاستقرار الإنشائي.

مثّل تركيب أويلر لعام 1771 ذروة هذا التطور. فبصياغته «المسألة العامة» لاتزان الخط، أدخل الآلة المفاهيمية لمحصلات الإجهاد—القوة المماسية والقوة العمودية وعزم الانحناء—وفصل الاتزان الحركي عن استجابة المادة. وبذلك استبق مبادئ ميكانيكا الأوساط المتصلة، وقدم منهجية منظمة تظهر فيها الحالات الخاصة، مثل السلسلة والقضيب والعمود، تخصيصات لإطار واحد.

إن إرث هذه التحديات الكبرى عميق. فما بدأ مسابقات فكرية بين كبار مهندسي أوروبا أعاد تشكيل ميكانيكا المنشآت وأرسى قواعد التحليل الهندسي الحديث. واليوم، من تصميم الجسور وناطحات السحاب إلى نمذجة البنى المجهرية والجزيئات الحيوية، تظل المعادلات التي صيغت أول مرة في دراسة السلاسل والقضبان والأعمدة تأسيسية. ويبين تاريخ هذه المسائل كيف يمكن للسعي وراء تحديات مخصوصة، مرحة أحياناً، أن يكشف مبادئ شاملة تحكم الظواهر الطبيعية، وكيف تستطيع الرياضيات، إذا اقترنت بالبصيرة الفيزيائية، أن ترفع الهندسة من ممارسة تجريبية إلى علم تنبؤي.

جدول 9.12: تسلسل زمني موحد للتحديات الكبرى الثلاثة: السلسلة المعلقة، والمنحني المرن، والتحدي المجهول

التاريخ	التحدي	الحدث
نحو تسعينيات القرن الخامس عشر	دراسات مبكرة	يرسم ليوناردو دا فينشي سلاسل معلقة في دفاتره.
1614	دراسات مبكرة	يسجل إسحاق بيكمان مسألة الحبل المعلق ويناقشها مع ديكارت.
1634	دراسات مبكرة	تُنشر *Oeuvres Mathématiques* لستيفن بعد وفاته، مع تعليقات جيرار التي تزعم أن السلسلة المعلقة مكافئة.
1638	دراسات مبكرة	يبحث غاليليو السلسلة المعلقة، لكنه يفترض خطأً أنها مكافئة (Galilei, 1638).
نحو 1646	دراسات مبكرة	يثبت هوينغنس الشاب (17 عاماً) لميرسين أن السلسلة المعلقة ليست مكافئة.
سبعينيات القرن السابع عشر	دراسات مبكرة	يدرس نيوتن سراً منحنيات شبيهة بالمنحني المرن، لكنه لا ينشر نتائجه.
مايو 1690	السلسلة المعلقة	يطرح ياكوب برنولي تحدي *Funicularia* في *Acta Eruditorum*(Bernoulli, Jakob, 1690b).
يونيو 1690	المنحني المرن	يطرح ياكوب برنولي مسألة المنحني المرن في *Specimen alterum* مشفرةً بأحجية تبديل حروف (Bernoulli, Jakob, 1690a).
أواخر 1690	السلسلة المعلقة	يقبل لايبنتس التحدي ويعيد صياغته مركزاً على *catenaria*.
9 أكتوبر 1690	السلسلة المعلقة	يرد هوينغنس بحل مشفر.

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجدول 9.12 (تابع)

التاريخ	التحدي	الحدث
13 أكتوبر 1690	السلسلة المعلقة	يجيب لايبنتس هوينغنس من دون استعمال الشفرة.
أكتوبر 1690	المنحني المرن	ينقضي موعد مهرجان حصاد بازل من دون تقديم حلول.
ديسمبر 1690	السلسلة المعلقة	يقدم يوهان برنولي حله إلى محرري *Acta Eruditorum* (Bernoulli, Johann, 1691c).
27 يناير 1691	السلسلة المعلقة	يقر لايبنتس بطريقة هوينغنس ذات المنحنى المساعد.
23 فبراير 1691	السلسلة المعلقة	يعرب هوينغنس عن ثقته بصعوبة المسألة.
2 مارس 1691	السلسلة المعلقة	يبلغ لايبنتس هوينغنس بنجاح حل يوهان.
21 مارس 1691	السلسلة المعلقة	يقدم ياكوب *Additamentum ad Problema Funicularium*.
26 مارس 1691	السلسلة المعلقة	يرسل هوينغنس شفرة مصححة.
5 مايو 1691	السلسلة المعلقة	يقدم هوينغنس ولايبنتس حلّيهما النهائيين (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a).
يونيو 1691	السلسلة المعلقة	تُنشر الحلول الثلاثة (هوينغنس، لايبنتس، يوهان برنولي) معاً في *Acta Eruditorum* (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a; Bernoulli, Johann, 1691c).
1692	المنحني المرن	يتم ياكوب برنولي سراً حل المنحني المرن في *Meditationes CLXX* ((Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
يونيو 1694	المنحني المرن	ينشر ياكوب *Curvatura laminae elasticae*، ويفك الأحجية ويكشف «النظرية الذهبية» (Bernoulli, Jakob, 1694).
1694	المنحني المرن	ينشر هوينغنس نقداً يحدد تشكيلات متعددة للمنحني المرن (المنحنيات A–G).
1694	المنحني المرن	يرد ياكوب بأدب على هوينغنس، مدافعاً عن عمومية طريقته الهندسية (Bernoulli, 1694).
1696	ذو صلة	يطرح يوهان برنولي تحدي أسرع هبوط في *Acta Eruditorum* (Bernoulli, Johann, 1696).
يناير 1697	ذو صلة	يمدد يوهان موعد تحدي أسرع هبوط بمنشور مطبوع *Programma*.
مايو 1697	ذو صلة	ينشر يوهان حل أسرع هبوط بقياس بصري؛ ويحله أيضاً نيوتن ولايبنتس ولوبيتال وياكوب (Bernoulli, Johann, 1697a).
أغسطس 1724	مجهول	يظهر تحد مجهول (موقع «LBC») في *Acta Eruditorum* بشأن سلاسل «معتدلة المطاوعة» (Anonymous, 1724).
1727–1724	مجهول	يمر التحدي من دون انتباه إلى حد كبير؛ لا ردود فورية.
فبراير 1728	مجهول	يقدم دانيال برنولي وأويلر كل على حدة حلولاً موحدة للخطوط المطاوعة والمرنة (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	مجهول	يُنشر الحلان متتاليين في *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*، المجلد 3 (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	مجهول	يرسي دانيال العلاقة الأساسية بين العزم والانحناء $M = B/r$ (Bernoulli, Daniel, 1744).
1729	ذو صلة	ينشر بيتر فان موسخنبروك دراسات تجريبية للانبعاج تبين التناسب $P \propto L^{-2}$ (Van Musschenbroek, 1729).
1732	المنحني المرن/المجهول	ينشر أويلر *Solutio problematis*—إطاراً هندسياً عاماً يوحد المنحنيات المرنة والمطاوعة: $M = v\kappa$ (Euler, 1732).
20 أكتوبر 1742	المنحني المرن	يكتب دانيال برنولي إلى أويلر مقترحاً مبدأ تصغير الطاقة: يجب أن تكون *vis viva potentialis* في حدها الأدنى (**DanielBernoulli1742toEuler**).
1742	المنحني المرن	يعبر دانيال عن الطاقة المرنة بـ $\int ds/R^2$ ويشتق معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة (**DanielBernoulli1742toEuler**).

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجدول 9.12 (تابع)

التاريخ	التحدي	الحدث
يوليو 1744	المنحني المرن	يسلم أويلر الفصول الرئيسة من *Methodus inveniendi* إلى الناشر (Euler, 1744b).
ديسمبر 1744	المنحني المرن	يسلم أويلر ملحقين: Additamentum I (المنحني المرن) وII (الفعل الأدنى) (Euler, 1744b).
1744	المنحني المرن	يُنشر *Methodus inveniendi lineas curvas*، مقدماً أول معالجة منهجية لحساب التغايرات (Euler, 1744b).
1744	المنحني المرن	يصنف أويلر تسعة أنواع من المنحنيات المرنة (I–IX) بتوصيف رياضي كامل (Euler, 1744a).
1744	المنحني المرن	يظهر عمل ياكوب الكامل في المنحني المرن بعد وفاته في *Opera Omnia*، بتحرير غابرييل كرامر (Bernoulli, Jakob, 1744b).
1759	الانبعاج	ينشر أويلر صيغة انبعاج الأعمدة $P_{\mathrm{cr}} = \pi^2 EI/L^2$، مدركاً أهمية حالة النوع I لعام 1744 (Euler, 1759).
1771	التوحيد	ينشر أويلر *Genuina principia*، موحداً التحديات الثلاثة في نظرية عامة للخطوط القابلة للتشوه (Euler, 1771).
1771	التوحيد	يقدم أويلر «المسألة العامة» بمحصلات الإجهاد: القوة المماسية T، والقوة العمودية V، وعزم الانحناء $\mathfrak{M}$ (Euler, 1771).

جدول 9.13: المنشورات المشار إليها في التسلسل الزمني الموحد

المؤلف (المؤلفون)	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
غاليليو غاليلي	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e dimostrazioni matematiche*	يقترح خطأً أن منحنى السلسلة المعلقة مكافئ؛ ويقدم عملاً تأسيسياً في مقاومة العوارض والميكانيكا الإنشائية
ياكوب برنولي	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690b)	*Problema funicularium*	يطرح تحدي السلسلة المعلقة على المجتمع الرياضي في *Acta Eruditorum*، طالباً تعيين المنحنى الذي تشكله سلسلة معلقة
ياكوب برنولي	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690a)	*Specimen alterum calculi differentialis*	يطرح مسألة المنحني المرن وحلها مشفر بأحجية تبديل حروف؛ ويعد بكشف الحل بحلول مهرجان حصاد بازل في أكتوبر
يوهان برنولي	1691	(Bernoulli, Johann, 1691c)	*Solutio problematis funicularii*	حل يوهان للسلسلة المعلقة، قُدم إلى المحررين في ديسمبر 1690 ونُشر في يونيو 1691 إلى جانب حلّي لايبنتس وهوينغنس
كريستيان هوينغنس	1691	(Huygens, 1888a)	*Solutio problematis catenarii*	حل هوينغنس الهندسي للسلسلة المعلقة باستعمال منحنيات مساعدة؛ طُور بمراسلات مشفرة مع لايبنتس

يتبع في الصفحة التالية

CC BY-NC-SA 4.0 2026 ©
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجدول 9.13 (تابع)

المؤلف (المؤلفون)	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
غوتفريد ف. لايبنتس	1691	(Leibniz, 1691a)	*De linea in quam flexile se pondere proprio curvat*	حل لايبنتس للسلسلة المعلقة، الذي أقام صلات باللوغاريتمات والدوال الزائدية؛ وهو أشمل معالجة
ياكوب برنولي	1692	(Bernoulli, Jakob, 1677–1705)	*Meditationes CLXX*	دفتر ياكوب العلمي الخاص الذي يحوي حله الكامل للمنحني المرن؛ ظل غير منشور في حياته
ياكوب برنولي	1694	(Bernoulli, Jakob, 1694)	*Curvatura Laminae Elasticae*	أول حل منشور للمنحني المرن مع «النظرية الذهبية» التي تربط الانحناء بعزم الانحناء؛ ويفك أحجية عام 1690
ياكوب برنولي	1694	(Bernoulli, 1694)	*Responsio ad Dn. Hugenium*	رد مهذب على نقد هوينغنس، يدافع عن عمومية طريقته الهندسية لمسألة المنحني المرن
يوهان برنولي	1696	(Bernoulli, Johann, 1696)	*Problema novum*	يطرح تحدي أسرع هبوط في *Acta Eruditorum*؛ ويصبح المسألة المؤسسة لحساب التغايرات
يوهان برنولي	1697	(Bernoulli, Johann, 1697a)	*Curvatura radii in diaphanis non uniformibus*	حل أسرع هبوط بقياس بصري ومبدأ فيرما؛ يثبت أن المنحنى الدويري هو منحنى أسرع هبوط
مجهول (LBC)	1724	(Anonymous, 1724)	*Celebre catenariae problema*	تحد مجهول لسلاسل «معتدلة المطاوعة»، يجسر الفجوة بين السلاسل المعلقة كاملة المطاوعة والمنحنيات المرنة الصلبة
دانيال برنولي	1728	(Bernoulli, Daniel, 1744)	*Methodus universalis determinandae curvaturae fili*	يرسي العلاقة الأساسية بين العزم والانحناء $M = B/r$، التي تصبح أساس نظرية العوارض كلها
ليونارد أويلر	1728	(Euler, 1728)	*Solutio problematis de invenienda curva*	أول نظرية موحدة للخطوط المطاوعة والمرنة؛ نُشرت متتالية مع بحث دانيال برنولي رداً على تحدي عام 1724
بيتر فان موسخنبروك	1729	(Van Musschenbroek, 1729)	*Physicae experimentales*	دراسات تجريبية للانبعاج ترسي تجريبياً قانون التناسب $P \propto L^{-2}$، قبل نظرية أويلر بثلاثين عاماً

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجدول 9.13 (تابع)

المؤلف (المؤلفون)	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
ليونارد أويلر	1732	Euler, 1732 (PDF)	*Solutio problematis de invenienda curva*	إطار هندسي عام بفرضية المرونة $M = v\kappa$ يوحد مسائل المنحنيات المرنة والمطاوعة في نظرية واحدة
دانيال برنولي	1742	(Daniel Bernoulli to Euler, 1742)	رسالة إلى أويلر (20 أكتوبر)	يقترح مبدأ تصغير الطاقة للمنحني المرن؛ ويعبر عن الطاقة المرنة بـ $\int ds/R^2$ ويشتق معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة
ليونارد أويلر	1744	Euler, 1744b (PDF)	*Methodus inveniendi lineas curvas*	تطوير منهجي لحساب التغايرات يشمل معادلة أويلر–لاغرانج؛ بحث فارق يؤسس المجال
ليونارد أويلر	1744	Euler, 1744a (PDF)	*Additamentum I: De curvis elasticis*	حل كامل للمنحني المرن مع تصنيف تسعة أنواع متميزة (I–IX) بطرائق تغايرية منهجية
ياكوب برنولي	1744	Bernoulli, (Jakob, 1744b)	*Opera Omnia* (بعد وفاته)	الأعمال الكاملة، بما فيها مخطوطات المنحني المرن غير المنشورة سابقاً من *Meditationes*؛ تحرير غابرييل كرامر
ليونارد أويلر	1759	Euler, 1759 (PDF)	*Sur la force des colonnes*	يشتق صيغة انبعاج الأعمدة $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$؛ ويدرك متأخراً أهمية النوع I من عمل عام 1744
ليونارد أويلر	1771	Euler, 1771 (PDF)	*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii*	توحيد كبير يقدم نظرية عامة للخطوط القابلة للتشوه بمحصلات الإجهاد (قوة مماسية، وقوة عمودية، وعزم انحناء)

السياق الثقافي (1670–1790)

تصل هذه الحقبة بين أواخر عصر الباروك والروكوكو وبدايات العصر الكلاسيكي—وهي حقبة أخذ فيها الحكم المطلق يفسح المجال تدريجياً لعقلانية التنوير. وقد اشترك العلم والفن والفلسفة جميعاً في افتتان بالتناغم والنظام والتناسب، ثم أثراها لاحقاً تعبير عاطفي استبق الرومانسية.

إيطاليا

المؤلفون الموسيقيون: جسّد أنطونيو فيفالدي (1678–1741) حيوية الباروك؛ وطوّر دومينيكو سكارلاتي (1685–1757) البراعة في العزف على آلات المفاتيح؛ وأسهم جيوفاني باتيستا بيرغوليزي (1710–1736) وجيوفاني بايزييلو (1740–1816) في تشكيل الأوبرا الهزلية المبكرة.
ملاحظة: حافظت بلاطات إيطاليا المتفرقة ورعاية الكنيسة على الفنون، حتى مع انتقال الريادة العلمية نحو الشمال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فرنسا

المؤلفون الموسيقيون: أسهم جان باتيست لولي (1632–1687) وفرانسوا كوبران (1668–1733) وجان فيليب رامو (1683–1764) في تشكيل الباروك الفرنسي؛ وأصلح كريستوف فيليبالد غلوك (1714–1787)، الذي نشط في باريس، فن الأوبرا.
الكتّاب والفلاسفة: جسّد فولتير ومونتسكيو وديدرو وروسو—وكان الأخير مؤلفاً موسيقياً أيضاً—فلاسفة عصر التنوير. ووصل راسين وموليير بين العظمة الكلاسيكية والدراما الحديثة.
الرسامون: صقل أنطوان واتو (1684–1721) أناقة الروكوكو؛ وجسّد فرانسوا بوشيه (1703–1770) وجان أونوريه فراغونار (1732–1806) حسّيته؛ فيما بشّر جاك لوي دافيد (1748–1825) بالكلاسيكية الجديدة والثورة المقبلة.
ملاحظة: برزت باريس عاصمةً فكرية لأوروبا؛ وعكست *الموسوعة* الروح العلمية الساعية إلى تنظيم المعرفة كلها.

ألمانيا

المؤلفون الموسيقيون: هيمن يوهان سيباستيان باخ (1685–1750) وجورج فريدريك هاندل (1685–1759) وجورج فيليب تيليمان (1681–1767) على أوائل القرن؛ وقاد يوزف هايدن (1732–1809) وفولفغانغ أماديوس موزارت (1756–1791، وهو نمساوي لكنه محوري في الثقافة الألمانية) الانتقال إلى العصر الكلاسيكي.
الكتّاب والفلاسفة: وصل غوتفريد فيلهلم لايبنتس (1646–1716) بين العلم والميتافيزيقا؛ وكان غوتولد إفرايم ليسينغ (1729–1781) رائداً للدراما الألمانية الحديثة؛ واستبق كلوبشتوك وهيردر الرومانسية؛ واختتم غوته (1749–1832) وشيلر (1759–1805) هذه الحقبة.
الفنانون: عزز أنطون رافائيل منغس (1728–1779) ويوهان زوفاني (1733–1810) أسلوباً كلاسيكياً جديداً مصقولاً.
ملاحظة: أتاح نسيج بلاطات الإمبراطورية الرومانية المقدسة المتعدد رعايةً متنوعة، بالتوازي مع الأكاديميات العلمية الجديدة في برلين وغوتينغن.

سويسرا

الكتّاب والمفكرون: أحدث جان جاك روسو (1712–1778)، ابن جنيف، تحولاً في الفكر الأوروبي والجماليات الموسيقية؛
ملاحظة: جسدت الحياة الفكرية السويسرية النزعة العالمية للتنوير، وأنجبت موسوعيين عند تخوم العلم والفن.

خلاصة

في أنحاء أوروبا، اشتركت الفنون والعلوم في سعي واحد إلى النظام والتناسب، ووازنته لاحقاً الفردية والعاطفة. ووجدت العقلانية نفسها التي أرشدت نيوتن وآل برنولي وأويلر تعبيرها البصري في الكلاسيكية الجديدة وتجسدها الفكري في فلسفة التنوير—وحدة بين الفكر والفن طبعت أوروبا قبل التحول الرومانسي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



كارافاجيو، يهوديت تقطع رأس هولوفرنيس (1599–1602)

اللحظة الحرجة للفعل الحاسم—تتطلب التحديات الكبرى حلاً عند نقطة التوتر الأقصى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 ميكانيكا الأوساط المتصلة: أساس التحليل الإنشائي

ملخص

يتناول هذا الفصل التحول النموذجي من النظريات الجزيئية إلى نظريات الأوساط المتصلة في المرونة الذي وقع خلال القرن التاسع عشر، وأرسى الأسس الرياضية التي يقوم عليها التحليل الإنشائي الحديث. بدأت هذه الثورة الفكرية بإدراك أن السلوك المرن لا يمكن تفسيره تفسيراً كافياً بنماذج جزيئية بسيطة تقوم على قوى مركزية بين النقاط المادية. وقد أدى إخفاق هذه النماذج—ولا سيما تنبؤها بأن نسبة بواسون يجب أن تساوي 1/4 في جميع المواد—إلى إعادة تصور جوهرية للمادة بوصفها وسطاً متصلاً تحكمه معادلات الحقول.

يتتبع الفصل إسهامات المدرسة الرياضية الفرنسية، ولا سيما إدخال كوشي لموتر الإجهاد، وجمع نافييه بين النظرية والتطبيق، وصياغة غرين الثورية القائمة على الجهد. وقد حولت هذه التطورات، التي تركزت في الفترة اللافتة بين 1820 و1860، المرونة من مجموعة قواعد تجريبية إلى علم رياضي صارم.

وإلى جانب السرد التاريخي، يعرض الفصل قوانين الاتزان الأساسية—حفظ الكتلة وكمية الحركة والطاقة—التي تشكل الأساس العام لميكانيكا الأوساط المتصلة. وتبين معالجة النظرية التكوينية كيف يوصف السلوك الخاص بكل مادة من خلال مبادئ الموضوعية، والتناظر المادي، والاتساق الديناميكي الحراري. وقد وفر إطار الوسط المتصل الذي نشأ—وخاصة صورته القائمة على الطاقة—البنية النظرية للطرائق العملية في التحليل الإنشائي التي سيطورها المهندسون في العقود التالية.

ويحتل التوتر المنهجي بين المقاربات الميكانيكية الاختزالية والصياغات الظاهراتية للوسط المتصل موقعاً محورياً في هذا السرد؛ إذ يعكس التزامات فلسفية أعمق بشأن العلاقة بين البنية المجهرية والسلوك العياني. ويجسد حسم هذا الجدل لمصلحة ميكانيكا الأوساط المتصلة، مع الإقرار بقيود المقاربتين، الكيفية التي يستطيع بها الدليل التجريبي والأناقة الرياضية أن يوجها التقدم العلمي معاً.

10.1 النظريات الجزيئية ونظريات الأوساط المتصلة في المرونة 320
10.1.1 نظرة عامة 320
10.1.2 من غاليليو إلى المدرسة الجزيئية الفرنسية 320
10.1.3 صعود مقاربة الوسط المتصل . . 321
10.1.4 جدول المقارنة 322
10.1.5 أي النظريتين سادت؟ 322
10.1.6 المراجع التاريخية 322
10.2 ميكانيكا الأوساط المتصلة 325
10.3 مقدمة 325
10.3.1 الثورات الفرنسية وميلاد المرونة الحديثة 325
10.3.2 أسس ميكانيكا الأوساط المتصلة ونظرية المرونة 326
10.4 الإطار الرياضي الكامل 336
10.4.1 أويلر وحفظ الكتلة 336
10.4.2 كوشي (1789–1857) واتزان كمية الحركة الخطية 337
10.4.3 اتزان كمية الحركة الزاوية 338
10.4.4 قوانين الديناميكا الحرارية: كلاوزيوس (1822–1888) وتومسون (1824–1907) وديوم (1861–1916) 338
10.4.5 القانون الثاني (متباينة الإنتروبيا): 339
10.4.6 التطور التاريخي والتركيب الحديث 339
10.5 النظرية التكوينية: سلوك المواد 340
10.5.1 الإطار العام 340
10.5.2 نول (1925–2017) والموضوعية: مبدأ عدم الاكتراث بالإطار المادي 341
10.5.3 غرين (1793–1841) وفرط المرونة 342
10.5.4 فويغت (1850–1919) والتناظر المادي 343
10.5.5 كولمان (1930–1992) ونول: القيود الديناميكية الحرارية . . . 343
10.5.6 منظور تاريخي: من التجريبية إلى النظرية 344
10.5.7 الصلة بالتحليل الإنشائي 345
10.5.8 ماذا في الاسم؟ تطور الميكانيكا وممارسيها 345
10.6 الخلاصة 352

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10.1 النظريات الجزيئية ونظريات الأوساط المتصلة في المرونة

بحلول أوائل القرن التاسع عشر، كانت المبادئ التغايرية والميكانيكا التحليلية التي طورها أويلر ولاغرانج وآل برنولي قد وفرت أدوات رياضية قوية لفهم الأنظمة الميكانيكية. ومع ذلك بقي سؤال جوهري بلا جواب: *ما طبيعة التشوه المرن في الأجسام الصلبة؟* برز جوابان متنافسان، يعكس كل منهما التزامات فلسفية مختلفة بعمق بشأن العلاقة بين البنية المجهرية والسلوك العياني.

لم يكن الجدل بين المقاربتين الجزيئية والمتصلة للمرونة تقنياً فحسب، بل مثل انقساماً منهجياً أعمق في الفيزياء الرياضية. فهل ينبغي اشتقاق المرونة من المبادئ الأولى، انطلاقاً من افتراضات عن التكوين المجهري للمادة؟ أم ينبغي صياغتها ظاهراتياً، بوصف الأجسام المتصلة بمعادلات حقول من دون الرجوع إلى بنيتها الذرية الكامنة؟ حرّك هذا السؤال جانباً كبيراً من ميكانيكا أوائل القرن التاسع عشر، وشكل تطور ما نعرفه اليوم بميكانيكا الأوساط المتصلة.

وكان لحسم هذا الجدل آثار عميقة في التحليل الإنشائي. فقد وفرت صياغة الوسط المتصل التي سادت في النهاية—وخاصة صورتها القائمة على الجهد والمرتكزة على مبادئ الطاقة—الأساس النظري الذي بنى عليه نافييه وكلابيرون والمهندسون اللاحقون طرائق عملية لتحليل العوارض والبلاطات والإطارات. لذلك يعد فهم هذا التحول النموذجي ضرورياً لتقدير سبب اتخاذ الإسهامات الفرنسية في ميكانيكا الأوساط المتصلة، التي نبحثها في الأقسام اللاحقة، الشكل الخاص الذي اتخذته.

نبدأ بعرض الإطارين النظريين المتنافسين والأزمة التجريبية التي فرضت إعادة تقييم المقاربة الجزيئية.

10.1.1 نظرة عامة

تطورت نظرية المرونة تاريخياً عبر نموذجين رئيسين:

1. **النظرية الجزيئية (أو الميكانيكية)**: تسعى إلى تفسير المرونة بنمذجة المادة على أنها مؤلفة من جسيمات منفصلة (ذرات أو جزيئات) تتفاعل بقوى ميكانيكية (غالباً مركزية).
2. **نظرية الوسط المتصل**: تعامل المادة على أنها وسط متصل وتصف الاستجابة المرنة بمتغيرات حقلية مثل الإجهاد والانفعال.

وفي نظرية الوسط المتصل نشأت صياغتان متميزتان:

- **الصياغة العامة للوسط المتصل**: يعبر عن الإجهاد بوصفه دالة في الانفعال، من دون افتراض اشتقاقه من جهد.
- **الصياغة القائمة على الجهد**: يشتق الإجهاد من دالة قياسية لكثافة طاقة الانفعال W، أي $\sigma = \partial W / \partial \varepsilon$. وتعرف هذه الفئة الفرعية أيضاً بفرط المرونة.

تعكس هذه الأطر فلسفات مختلفة: فالنظرية الجزيئية متجذرة في ميكانيكا نيوتن والاختزالية؛ أما نظرية الوسط المتصل (وخاصة صورتها القائمة على الجهد) فترتكز على المبادئ التغايرية والاتساق الديناميكي الحراري.

10.1.2 من غاليليو إلى المدرسة الجزيئية الفرنسية

قدم غاليليو فكرة تألف المواد من خيوط ليفية (§7.3.1.2)، وهو افتراض هيمن على النماذج المبكرة للمقاومة والتشوه. وقد مهد هذا التصور للتفسيرات الجسيمية للمرونة.

في أوائل القرن التاسع عشر، صاغ الميكانيكيون الفرنسيون—ولا سيما نافييه (1821) وكوشي (1822–1823) وبواسون (1829)—المرونة بافتراض أن المادة مؤلفة من نقاط مادية تتفاعل بقوى مركزية. وكان نافييه أول من اشتق معادلات الوسط المتصل من افتراضات جزيئية عام 1821، سابقاً تطوير كوشي الأكثر منهجية، وإن كان كوشي قد قدم لاحقاً إطاراً أعم وأشد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

صرامة لنظرية الإجهاد والانفعال. وقد حظيت هذه المقاربة، الراسخة في الميكانيكا الجزيئية ومبادئ نيوتن الأولى، بجاذبية قوية لدى المدرسة الفرنسية ذات النزعة التحليلية.

لكن ظهرت مشكلة جوهرية: تنبأت النظرية الجزيئية بأن نسبة بواسون—أي نسبة الانفعال العرضي إلى المحوري تحت تحميل أحادي المحور—يجب أن تساوي $1/4$ بالضبط في جميع المواد. وكان ذلك نتيجة رياضية مباشرة لافتراض القوى المركزية بين النقاط المادية. وقد ناقضت التجارب هذا التنبؤ بصورة حاسمة، إذ بينت أن نسبة بواسون تتغير كثيراً بين المواد (فالفلين يعطي قيماً قريبة من الصفر، في حين يقترب المطاط من 0.5). وألقى هذا التباين، إلى جانب تنبؤ النموذج بثابت مرن مستقل واحد فقط حيث يلزم ثابتان، شكاً عميقاً في صلاحية النماذج الجزيئية ذات القوى المركزية (Capecchi, Ruta **and** Trovalusci, 2010؛ Todhunter **and** Pearson, 1893).

وهكذا كان الإخفاق المركزي للنظرية الجزيئية تنبؤها بأن نسبة بواسون يجب أن تساوي $1/4$ في جميع المواد متساوية الخواص—وهو أثر لافتراض القوى المركزية بين النقاط المادية. وأظهرت التجارب تغير هذه النسبة تغيراً كبيراً (الفلين $\nu \approx 0$، والمطاط $\nu \approx 0.5$)، فدحضت الإطار الجزيئي بصورة قاطعة وكشفت أن الطبيعة تتطلب ثابتين مرنين مستقلين بدلاً من الثابت الوحيد الذي تنبأت به النظرية الجزيئية.

10.1.3 صعود مقاربة الوسط المتصل

للتغلب على قيود النماذج الجزيئية، اكتسبت صياغات المرونة القائمة على الوسط المتصل مكانة متزايدة خلال ثلاثينيات القرن التاسع عشر إلى خمسينياته.

أرسى **كوشي** أسس موتري الإجهاد والانفعال داخل جسم متصل، وصاغ ما سيصبح النموذج العام للوسط المتصل. لكنه، حتى وهو يطور الإطار الرياضي لميكانيكا الأوساط المتصلة، احتفظ في البداية بتشبيهات ميكانيكية قائمة على التفاعلات الجزيئية، محاولاً التوفيق بين المقاربتين.

قدم **جورج غرين**، في سلسلته اللافتة من الأبحاث عن الضوء والمرونة بين 1837 و1839، مقاربة رائدة قائمة على الجهد. وإذ أدرك أن القوانين الجزيئية الحقيقية التي تحكم المادة ظلت مجهولة—وربما تعذر معرفتها آنذاك—افترض بجرأة إمكان وصف السلوك المرن بدالة جهد قياسية من دون الرجوع إلى الآليات الجزيئية الكامنة. وأعطى نموذجه، القائم مباشرة على حساب التغايرات ومبادئ الطاقة، ثابتين مرنين مستقلين—متفقاً مع النتائج التجريبية ومقدماً أول صياغة كاملة لما يسمى اليوم فرط المرونة (Green, 1839a; Green, 1839b).

ورغم نجاح مقاربة غرين تجريبياً، فقد واجهت مقاومة أولية، ولا سيما في فرنسا حيث فُضلت فلسفياً التفسيرات الميكانيكية المتجذرة في مبادئ نيوتن. وحتى منظّرون بارعون مثل لامي وكلابيرون وسان-فنان الشاب عانوا طوال أربعينيات القرن التاسع عشر في تحديد سبب إخفاق النظرية الجزيئية التقليدية بدقة، إذ ترددوا في التخلي عن المثل الاختزالي.[1]

جاءت نقطة التحول تدريجياً. فقد أصبح **سان-فنان**، الذي دافع أولاً عن المقاربات الجزيئية، بحلول خمسينيات القرن التاسع عشر من أشد أنصار نظرية الوسط المتصل فاعلية. وأسهم تطويره الطريقة شبه العكسية لحل مسائل المرونة، وتحقيقه التجريبي المنهجي لتنبؤات الوسط المتصل، في ترسيخ مصداقية النظرية. كما أضاءت دراسات Bravais, 1866 البلورية المسألة أكثر، إذ بينت أن البنية الجزيئية تشمل ترتيبات هندسية أعقد بكثير من تفاعلات النقاط البسيطة، وساعدت على جسر الفجوة المفاهيمية بين الوصفين الذري والمتصل.

[1] يكشف هذا تبايناً منهجياً أعمق بين السعي الفرنسي إلى أناقة تحليلية مؤسسة على المبادئ الأولى، والنزعة التجريبية البريطانية الأكثر عملية التي شددت على الكفاية الظاهراتية والتوافق التجريبي. فقد قدّر التقليد الفرنسي، الذي مثلته المدرسة متعددة التقنيات، الصرامة الرياضية والاشتقاق من القوانين الميكانيكية الأساسية. أما المقاربة البريطانية، المتأثرة بتقليد امتحانات ترايبوس الرياضية في كامبريدج (نظام الامتحان التقليدي الصارم جداً في جامعة كامبريدج، الذي كان يدل أصلاً على كل من برنامج الدراسة وامتحاناته النهائية، واشتهر خصوصاً بترتيب طلاب الرياضيات تحت لقب «رانغلرز»)، فكانت أكثر استعداداً لافتراض علاقات ظاهراتية—مثل دالة طاقة الانفعال لغرين—إذا وافقت الرصد، حتى من دون تبرير ميكانيكي. واستمر هذا الانقسام الفلسفي مؤثراً في تطور الميكانيكا طوال القرن التاسع عشر، مع تقدير الفرنسيين تدريجياً لقوة المقاربات الظاهراتية حين تظل الآليات الأساسية غامضة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10.1.4 جدول المقارنة

نظرية الوسط المتصل	النظرية الجزيئية	الجانب
وسط متصل	جسيمات منفصلة	الوجود المادي
من القانون التكويني	من القوى بين الذرية	اشتقاق الإجهاد
(أ) عامة: $\sigma = f(\varepsilon)$	قائمة على قوى مركزية	الصيغة التكوينية
(ب) قائمة على الجهد: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$		
ظاهراتية، تغايرية	اختزالية، ميكانيكية	الفلسفة
كوشي (العامة)، غرين (الجهد)، لامي، سان-فنان، بيولا، كيرشوف	هوك، نافييه، بواسون، كوشي (في البداية)، كلفن، ماكسويل	أبرز المناصرين
تسمح بثابتين مستقلين	تتنبأ بواحد (نسبة بواسون = $1/4$)	الثوابت المرنة
يفرض بتناظر W أو f	من بنية الشبكة البلورية	معالجة تباين الخواص
منذ خمسينيات القرن التاسع عشر	من عشرينيات القرن التاسع عشر إلى أربعينياته	السيادة التاريخية
جوهر طريقة العناصر المحدودة وميكانيكا المواد الصلبة؛ ونماذج الجهد أساسية في فرط المرونة والتشوه المحدود	أساس الديناميكا الجزيئية والنمذجة متعددة المقاييس	الدور الحديث

جدول 10.1: مقارنة بين النظريتين الجزيئية والمتصلة للمرونة، مع صيغتين لنظرية الوسط المتصل.

10.1.5 أي النظريتين سادت؟

بحلول أواخر القرن التاسع عشر، كانت **نظرية الوسط المتصل** في المرونة قد سادت بصورة حاسمة في الهندسة والميكانيكا التطبيقية. فقد أدى إخفاق النماذج الجزيئية في التنبؤ بالنتائج التجريبية الأساسية—ولا سيما قيد نسبة بواسون والحاجة إلى ثابتين مرنين—مقترناً بصعود طرائق تحليلية وحسابية قوية قائمة على صياغات الوسط المتصل، إلى تحول جوهري في الإجماع النظري.

ومن بين صياغات الوسط المتصل، اكتسب *النموذج القائم على الجهد* أهمية خاصة لنمذجة المواد المرنة (العكوسة)، ولا سيما بعد تطوير النظريات التكوينية المتسقة ديناميكياً حرارياً في القرن العشرين (مثل تروسديل ونول، وكولمان ونول). كما ثبتت أهمية الإطار للتشوهات الكبيرة والمرونة اللاخطية من خلال أعمال ريفلين وموني وغيرهما. أما النماذج العامة للوسط المتصل، التي لا تتطلب جهداً، فقد وفرت المرونة اللازمة لنمذجة السلوك غير المرن والتبديدي والمعتمد على الزمن.

ومع ذلك شهدت النظريات الجزيئية نهضة لافتة في القرن العشرين من خلال الميكانيكا الإحصائية، ثم الديناميكا الجزيئية الحاسوبية. وهي تكمل اليوم نماذج الأوساط المتصلة في المقاربات متعددة المقاييس، إذ تغذي المحاكاة الذرية العلاقات التكوينية للوسط المتصل—وهو تركيب كان سيرضي المدرستين الجزيئية والمتصلة في القرن التاسع عشر معاً.

10.1.6 المراجع التاريخية

المصادر الأولية مرتبة حسب المساهم

المؤلف	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
نافييه				
نافييه	1821	(Navier, 1821)	*Sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	أول اشتقاق لمعادلات الوسط المتصل من افتراضات جزيئية
نافييه	1827	(Navier, 1827a)	*Mémoire sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*	نسخة موسعة ذات تطوير رياضي كامل
كوشي				
كوشي	1822	(Cauchy, 1822)	*Recherches sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps*	الصياغة الأولية لمفهوم الإجهاد
كوشي	1823	(Cauchy, 1823)	*Recherches sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps*	تطوير منهجي لموتر الإجهاد
كوشي	1828	(Cauchy, 1828)	*Sur les équations qui expriment les conditions d’équilibre ou les lois du mouvement intérieur*	معادلات الاتزان العامة للأجسام المرنة
كوشي	1829	(Cauchy, 1829)	*Sur l’équilibre et le mouvement d’un système de points matériels*	النظرية الجزيئية للمرونة بقوى مركزية
بواسون				
بواسون	1829	(Poisson, 1829)	*Mémoire sur l’équilibre et le mouvement des corps élastiques*	نظرية جزيئية شاملة؛ تقدم نسبة بواسون
بواسون	1831	(Poisson, 1831)	*Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques*	انتشار الموجات في الأوساط المرنة
غرين				
غرين	1828	(Green, 1828)	An Essay on the Application of Mathematical Analysis to Electricity and Magnetism	يقدم مقاربة دالة الجهد
غرين	1837	(Green, 1837)	On the Reflection and Refraction of Light	تطبيق مبكر على المرونة الضوئية
غرين	1839	(Green, 1839a)	On the Laws of Reflection and Refraction of Light	تطوير دالة طاقة الانفعال
غرين	1842	(Green, 1842)	On the Propagation of Light in Crystallized Media	امتداد إلى المواد متباينة الخواص
فيررز (المحرر)	1871	(Ferrers, 1871)	Mathematical Papers of George Green	الأعمال المجموعة مع تعليقات
لامي وكلابيرون				
لامي وكلابيرون	1831	(Lamé and Clapeyron, 1831)	*Mémoire sur l’équilibre intérieur des corps solides homogènes*	عمل مشترك عن الاتزان الداخلي للأجسام الصلبة
لامي وكلابيرون	1833	(Lamé and Clapeyron, 1833)	*Mémoire sur la solidification par refroidissement d’un globe liquide*	تطبيق المرونة على مسائل التبريد
لامي	1852	(Lamé, 1852)	*Leçons sur la théorie mathématique de l’élasticité*	مؤلف شامل؛ ثابتا لامي

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المؤلف	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
كلابيرون	1857	Clapeyron, (1857)	*Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis*	مبرهنة العزوم الثلاثة للعوارض المستمرة
سان-فنان				
سان-فنان	1855	Saint-Venant, (1855b)	*Mémoire sur la torsion des prismes*	الطريقة شبه العكسية؛ نظرية الالتواء
سان-فنان	1856	Saint-Venant, (1855c)	*Mémoire sur la flexion des prismes*	امتداد إلى انحناء القضبان المنشورية
سان-فنان	1864	Saint-Venant, (1864)	*Mémoire sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs*	اللدونة بعد حد المرونة
برافيه				
برافيه	1850	Bravais, (1850)	*Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement*	توزيعات نقطية منتظمة؛ نظرية الشبكات البلورية
برافيه	1866	Bravais, (1866)	*Études cristallographiques*	البنية البلورية والترتيبات الجزيئية
الأسس الأقدم				
غاليلي	1638	Galilei, 1638) (	*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*	مقاومة المواد؛ نظرية العارضة الكابولية
هوك	1678	Hooke, 1678) (	*De Potentia Restitutiva, or of Spring*	أول صياغة لقانون المرونة (قانون هوك)
أويلر	1744	Euler, 1744b) (	*Methodus Inveniendi Lineas Curvas* (الملحق: *De curvis elasticis*)	حساب التغايرات؛ المنحنيات المرنة
مساهمون مهمون آخرون				
بيولا	1833	(Piola, 1833)	*La meccanica de' corpi naturalmente estesi*	موتر إجهاد بيولا؛ الصياغة التغايرية
كيرشوف	1850	Kirchhoff, (1859)	*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*	نظرية البلاطات مع الانحناء والتمدد

المصادر الثانوية والتاريخية

المؤلف	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
تودهَنتر وبيرسون	1886–1893	Todhunter and Pearson, (1893)	A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials	تاريخ مرجعي موثوق من العصر الفيكتوري
تيموشينكو	1953	Timoshenko, (1953)	History of Strength of Materials	منظور هندسي للتطور
تروسديل	1960	Truesdell, (1960)	The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638–1788	تحليل شامل للقرنين السابع عشر والثامن عشر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المؤلف	السنة	المرجع	العنوان	الوصف
تروسديل ونول	1965	(Truesdell and Noll, 1965)	The Non-Linear Field Theories of Mechanics	إطار ميكانيكا الأوساط المتصلة الحديث
سابو	1977	(Szabó, 1977)	*Geschichte der mechanischen Principien*	تاريخ شامل (بالألمانية)
غراتان-غينيس	1990	(Grattan-Guinness, 1990)	Convolutions in French Mathematics, 1800–1840	تحليل مفصل للمدرسة الفرنسية
بنفينوتو	1991	(Benvenuto, 1991a)	An Introduction to the History of Structural Mechanics	تاريخ للميكانيكا الإنشائية في مجلدين
لوف	1927	(Love, 1927)	A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity	مؤلف كلاسيكي ذو ملاحظات تاريخية
كابيتشي	2010	(Capecchi, Ruta and Trovalusci, 2010)	History of Virtual Work Laws	منظور حديث لتاريخ الميكانيكا

10.2 ميكانيكا الأوساط المتصلة

يمثل هذا الفصل انتقالاً إلى الإطار التحليلي لميكانيكا الأوساط المتصلة، حيث تُنمذج الأجسام المادية بوصفها أوساطاً متصلة تحكمها متغيرات حقلية مثل الإزاحة والانفعال والإجهاد. وينصب التركيز على التطورات المفاهيمية والرياضية التي نضجت في القرن التاسع عشر، حين انتقلت الميكانيكا من استدلال منفصل وهندسي إلى حد كبير إلى نظرية منهجية مؤسسة على التحليل. ويتجه الاهتمام إلى صياغة المعادلات الحاكمة والعلاقات التكوينية ومعايير الاستقرار، التي حولت الحدس الفيزيائي إلى بنية رياضية متماسكة وقادرة على التنبؤ.

وتركز المادة المعروضة هنا على هذا التوحيد المتأخر للأفكار، مبرزةً كيف عُرّفت المفاهيم الأساسية—القوى الداخلية والتشوه والاتزان والاستقرار—تعريفاً صارماً، وكيف ترابطت داخل إطار الوسط المتصل. وقد صيغت المعالجة بإيجاز مقصود مع اكتمالها الرياضي، لتبين كيف وفرت ميكانيكا الأوساط المتصلة الأساس الذي شُيد عليه في النهاية التحليل الإنشائي الحديث والنظرية الهندسية.

10.3 مقدمة

10.3.1 الثورات الفرنسية وميلاد المرونة الحديثة

«هيمن» الفلاسفة الطبيعيون أو العلماء البريطانيون والهولنديون والألمان والإيطاليون والسويسريون على القرون السادس عشر إلى الثامن عشر. وكانت هناك بالطبع إسهامات متفرقة لماريوت وكولوم وغيرهما، لكن الإسهامات الفرنسية ظلت محدودة (مع أن باريس أتاحت ملتقى للايبنتس وهوينغنس).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما في القرن التاسع عشر فقد تصدرت فرنسا العالم في تطبيق المبادئ العلمية على المسائل العملية، بعد أن أنشأت *École des Ponts et Chaussées* الشهيرة و*École Polytechnique* عامي 1747 و1794 على التوالي. وقد أسس غاسبار مونج الثانية خلال الثورة، ثم جعلها نابليون الأول مؤسسة عسكرية عام 1804. وأتاحت المدرستان بوتقة درّس أو تعلم فيها كثير من المهندسين البارزين. وتضم قائمة المدرسة الأولى كوشي وكلابيرون وفوريه ولاغرانج ولامي (1795–1870) ومونج وبواسون؛ وتضم قائمة الثانية كوشي (1789–1857) ودارسي ونافييه وفريسينيه وسان-فنان (1797–1886). وفي بعض الحالات ادعت المؤسستان الخريجين أنفسهم، ومنهم نافييه وسان-فنان.

وفر عمل نافييه النظري في انحناء العوارض والعوارض المستمرة، الذي نشر أول مرة في *Leçons* عام 1826، الأساس النظري الذي أثر في الهندسة الإنشائية اللاحقة. وأسندت نظرية العوارض العامة، بما فيها ما عرف بفرضية برنولي–نافييه (أن المقاطع المستوية تبقى مستوية وعمودية على المحور المحايد)، جانباً كبيراً من التصميم الإنشائي في القرن التاسع عشر. غير أن المشروعات الكبرى، مثل جسر بريتانيا لروبرت ستيفنسون (1850)، اعتمدت اعتماداً كبيراً على الاختبارات التجريبية المكثفة التي أجراها وليام فيربيرن، والصيغ التجريبية لإيتون هودجكنسون، لا على الطرائق التحليلية البحتة. وقد تحقق من التصميم الأنبوبي للجسر باختبارات دقيقة لنماذج مصغرة في مصنع فيربيرن للحديد في ميلوول—ممّا مثل اقتران النظرية الناشئة بالتحقق التجريبي العملي (Clark **and** Stephenson, 1850; Charlton, 1982).

10.3.2 أسس ميكانيكا الأوساط المتصلة ونظرية المرونة

10.3.2.1 كولوم (1736–1806) والأساس الهندسي

جسر شارل أوغستان دي كولوم (1736–1806) الفجوة بين الميكانيكا النظرية والهندسة العملية. وكان مهندساً عسكرياً خدم مدة طويلة في المستعمرات الفرنسية، وجمع بين التحليل الرياضي الصارم والتجريب الدقيق. وتمثل مذكرته *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* (1773) (Coulomb, 1773b) نقطة تحول في المقاربة العلمية للتصميم الإنشائي. وخلافاً لمعاصريه الذين ركزوا على المبادئ الميكانيكية المجردة، تناول كولوم مسائل متصلة مباشرة بالبناء:

1. **نظرية ضغط التربة**: طور كولوم أول نظرية عقلانية لحساب ضغط التربة الجانبي على الجدران الاستنادية. وباستعمال مبدأ العمل الافتراضي مقروناً بافتراض سطح انهيار مستوٍ، اشتق:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 K_a$$

حيث K_a معامل ضغط التربة الفعال. وقد أرسى هذا العمل أساس الهندسة الجيوتقنية الحديثة، ولا يزال صحيحاً من الناحية المفاهيمية.

2. **نظرية الاحتكاك**: أثبت كولوم بتجارب واسعة أن قوة الاحتكاك تتناسب مع القوة العمودية ولا تعتمد على مساحة التلامس—وهو القانون $F = \mu N$ الذي يحمل اسمه. وميز بين الاحتكاك الساكن والحركي، وأدرك دور التماسك في التربة، فصاغ:

$$\tau = c + \sigma \tan\phi$$

وأصبح قانون الاحتكاك هذا أساسياً لتحليل المنشآت ذات سطوح التلامس وتفاعل التربة والمنشأ.

3. **نظرية العوارض والأعمدة**: بحث كولوم مقاومة العوارض تحت الانحناء، وافترض أن الانهيار يحدث عندما يبلغ إجهاد الشد قيمة حرجة. وتناول تحليله لانبعاج الأعمدة، وإن كان أقل تطوراً من تحليل أويلر، جوانب عملية مثل التحميل اللامركزي وعيوب المادة التي أهملتها نظرية أويلر المثالية.

لا يكمن إرث كولوم في صيغ بعينها فحسب، بل في منهجيته: الجمع بين الميكانيكا التحليلية والتحقق التجريبي والاستدلال الهندسي. فقد برهن عمله إمكان تطبيق الميكانيكا العقلانية على مسائل هندسية واقعية، وأثر في التوجه العملي للمدرسة متعددة التقنيات، وأسهم في ترسيخ الميكانيكا الهندسية تخصصاً متميزاً عن الرياضيات البحتة.

شهد القرن التاسع عشر تحولاً لافتاً في المعالجة الرياضية للميكانيكا، إذ انتقل من التحليل المنفصل للجسيمات والأجسام الصلبة إلى المعالجة المتصلة للأجسام القابلة للتشوه. وكانت هذه الثورة إنجازاً فرنسياً يكاد يكون كاملاً، نشأ من البيئة الفكرية الخصبة للمدرسة متعددة التقنيات ومدرسة الجسور والطرق اللتين أنشئتا حديثاً. وفي بضعة عقود، أرست كوكبة من الرياضيين والمهندسين النابهين الأسس النظرية التي يقوم عليها التحليل الإنشائي الحديث كله.

10.3.2.2 لاغرانج (1736–1813) والأساس التحليلي

تلقى جوزيف لوي لاغرانج (1736–1813)، (§6.7.5) تدريبه في تورينو، لكنه أمضى أكثر سنواته إنتاجاً في باريس وأصبح أستاذاً في المدرسة متعددة التقنيات عند تأسيسها. وقد أحدث كتابه *Mécanique Analytique* (1788) (Lagrange, 1788) ثورة في الميكانيكا باستبدال الطرائق التحليلية البحتة بالاستدلال الهندسي. وكان لما يأتي أهمية خاصة في الميكانيكا الإنشائية:

> *للتفاصيل التحليلية، انظر* §24.2.3

1. **مبدأ العمل الافتراضي**: وفرت صياغة لاغرانج الأنيقة للعمل الافتراضي أساس طرائق الطاقة في التحليل الإنشائي. وأثبت أنه في نظام متزن، يساوي العمل الافتراضي الذي تبذله جميع القوى خلال أي إزاحة افتراضية متوافقة صفراً:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

وسيصبح هذا المبدأ لاحقاً أساسياً لطريقة الإزاحة وتحليل العناصر المحدودة.

2. **الإحداثيات المعممة**: حرر إدخال لاغرانج للإحداثيات المعممة الميكانيكا من القيود الهندسية، ومكّن من تحليل الأنظمة المعقدة بأقل عدد من الإحداثيات.
3. **حساب التغايرات**: مع أن أويلر طوره من قبل، فقد نظم لاغرانج الطرائق التغايرية التي ستثبت ضرورتها لصياغة مسائل القيم الحدية في المرونة.

أثرت مقاربة لاغرانج التحليلية بعمق في الجيل التالي من الرياضيين الفرنسيين، وأرست المنهجية التي ستتطور بها ميكانيكا الأوساط المتصلة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10.3.2.3 طرائق فوريه (1768–1830) الرياضية

قدم جان باتيست جوزيف فوريه (1768–1830)، وهو من أعلام المدرسة متعددة التقنيات أيضاً، إسهامه الرئيس في كتابه *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822) (Fourier, 1822). ومع أن العمل ركز على توصيل الحرارة، فقد كانت له آثار عميقة في الميكانيكا:

1. **المعادلات التفاضلية الجزئية**: بين فوريه كيف يمكن وصف الظواهر الفيزيائية بمعادلات تفاضلية جزئية ذات شروط حدية ملائمة—وهي منهجية ستنقل مباشرة إلى مسائل المرونة.
2. **متسلسلات فوريه**: وفرت طريقته في تمثيل الدوال بمتسلسلات لا نهائية من الدوال المثلثية أدوات قوية لحل مسائل القيم الحدية في المرونة.
3. **تحليل الأبعاد**: أثرت مقاربة فوريه المنهجية للأبعاد الفيزيائية في كيفية صياغة الثوابت المرنة وخواص المواد.

ومع أن فوريه لم يعمل مباشرة في المرونة، فقد ثبت أن إطاره الرياضي لا غنى عنه للتطورات اللاحقة في ميكانيكا الأوساط المتصلة.

10.3.2.4 كوشي (1789–1857) ومفهوم الإجهاد

يقف أوغستان لوي كوشي (1789–1857) (§6.7.6) بوصفه المعماري الرئيس للنظرية الرياضية للمرونة. وخلال عمله في المدرسة متعددة التقنيات (1816–1830)، أنتج سلسلة من المذكرات أرست المرونة علماً رياضياً صارماً (Cauchy, 1827; Cauchy, 1828). وكان أعمق إسهاماته إدخال موتر الإجهاد—وهي قفزة مفاهيمية حسمت قرنين من الالتباس بشأن طبيعة القوى الداخلية في الأجسام الصلبة.

ما قبل التاريخ: القوة من دون إجهاد

قبل كوشي، تعامل الفلاسفة الطبيعيون والمهندسون مع *القوى على المقاطع* من دون مفهوم واضح للإجهاد بوصفه كمية مكثفة عند نقطة. فقد تحدث غاليليو، في تحليله للعارضة الكابولية (1638)، عن «المقاومة المطلقة» لمقطع عرضي—أي قوة كلية لا شدة موزعة. وحسّن ماريوت (1686) وباران (1713) نظرية غاليليو للعوارض بإدراك أن «الألياف» على أحد جانبي المحور المحايد تتعرض للشد، فيما تتعرض الألياف على الجانب الآخر للضغط؛ لكنهما ظلا يتصوران المقاومة خاصية للمقطع كله.

خطا كولوم (1773)، في تحليله للعوارض والجدران الاستنادية، الخطوة الحاسمة المتمثلة في بحث توزيع القوى عبر المقطع، وقدم فكرة حدوث الانهيار عند بلوغ شدة حرجة. ومع ذلك لم يمتلك حتى كولوم إطاراً عاماً لوصف حالة القوة الداخلية عند نقطة اعتباطية على مستوى اعتباطي يمر بجسم صلب.

كانت الصعوبة الجوهرية كما يأتي: بخلاف القوى الخارجية التي تؤثر عند نقاط محددة أو على سطوح محددة، تعتمد القوى الداخلية على *القطع التخيلي* الذي يُجرى في الجسم. فالقوة المنقولة عبر مستوى أفقي يمر بنقطة تختلف عموماً عن القوة المنقولة عبر مستوى رأسي يمر بالنقطة نفسها. فكيف يمكن توصيف «حالة القوة الداخلية» عند نقطة حين يعتمد الجواب على المستوى المختار؟

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حل كوشي: موتر الإجهاد

> *للتفاصيل التحليلية، انظر §O.2.2*

تمثلت عبقرية كوشي في إدراك أن هذه الصعوبة الظاهرة تخفي بساطة كامنة. ففي مذكراته بين 1822 و1827 (Cauchy, 1822; Cauchy, 1823)، قدم مفهوم متجه *الشد السطحي* $\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})}$: القوة لكل وحدة مساحة المنقولة عبر سطح تخيلي ذي متجه عمودي وحدي $\mathbf{n}$. ويعتمد متجه الشد السطحي على كل من النقطة المدروسة واتجاه السطح.

ثم برهن كوشي، بحجة بديعة تتناول اتزان رباعي سطوح متناهي الصغر، أن متجه الشد السطحي على *أي* مستوى يمكن حسابه من متجهات الشد على ثلاثة مستويات متعامدة فقط. فإذا عرفنا الشدود السطحية على المستويات العمودية على المحاور x وy وz، أمكننا إيجاد الشد على أي مستوى بعملية خطية بسيطة.

شكل 10.1: حجة رباعي السطوح لكوشي. يُقتطع رباعي سطوح متناهي الصغر من الجسم، وله ثلاثة أوجه عمودية على محاور الإحداثيات ووجه مائل متجهه العمودي الوحدي $\mathbf{n}$. ويعطي اتزان رباعي السطوح، حين يتقلص حجمه إلى الصفر، العلاقة $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

حجة رباعي السطوح لكوشي

لنتصور رباعي سطوح متناهي الصغر مقتطعاً من داخل جسم (الشكل 10.2). ثلاثة أوجه منه عمودية على محاور الإحداثيات، ومساحاتها dA_x وdA_y وdA_z؛ أما الوجه الرابع فمستوى مائل متجهه العمودي الوحدي إلى الخارج $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ومساحته dA. ومن الهندسة:

$$dA_x = n_x \, dA, \quad dA_y = n_y \, dA, \quad dA_z = n_z \, dA$$

متجهات الشد السطحي على الأوجه الإحداثية الثلاثة هي $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)}$ و$-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)}$ و$-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$ (والإشارة سالبة لأن المتجهات العمودية الخارجية لهذه الأوجه تتجه في اتجاهات الإحداثيات السالبة). أما الشد السطحي على الوجه المائل فهو $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$.

يتطلب اتزان القوى (مع إهمال قوى الجسم التي تتناسب مع الحجم $\sim dA^{3/2}$ وتصبح مهملة قياساً إلى قوى السطح $\sim dA$ عند تقلص رباعي السطوح):

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} dA_x - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} dA_y - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)} dA_z = \mathbf{0}$$

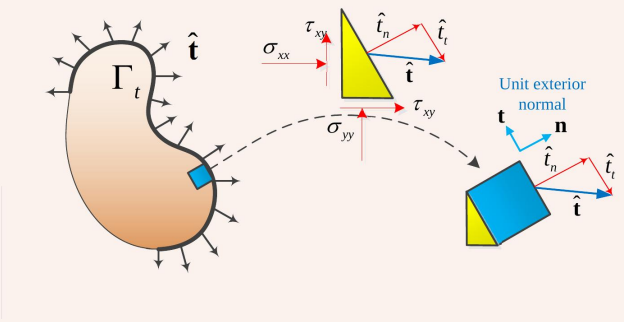
بالتعويض بالعلاقات الهندسية والقسمة على dA:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = n_x \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} + n_y \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} + n_z \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$$

هذه هي **مبرهنة كوشي**: الشد السطحي على أي مستوى *دالة* خطية في المتجه العمودي الوحدي. وبتعريف موتر *الإجهاد* $\boldsymbol{\sigma}$ على أنه المصفوفة التي تمثل أعمدتها متجهات الشد السطحي على المستويات الإحداثية:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

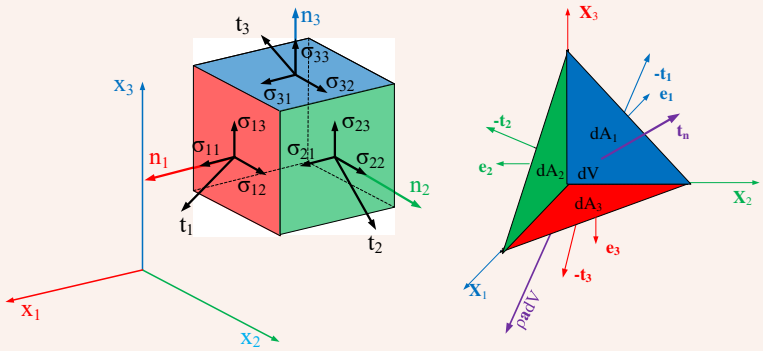


شكل 10.2: قوى السطح

تصبح المعادلة (10.3.2.4):

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

تختزل هذه المعادلة الواحدة حل كوشي للغز دام قرنين. ويقوم البرهان على حجة رباعي *السطوح* (الشكل 10.3): نتخيل رباعي سطوح متناهي الصغر له ثلاثة أوجه مصطفة مع المستويات الإحداثية—يحمل كل منها مركبات الإجهاد المناظرة σ_{ij}—ووجه مائل ABC متجهه العمودي الوحدي إلى الخارج $\boldsymbol{n}$ ومساحته dA. ومع تقلص رباعي السطوح إلى نقطة، يقتضي اتزان القوى في كل اتجاه إحداثي إمكان التعبير عن الشد السطحي $\boldsymbol{t}$ على الوجه المائل بدلالة الشدود على الأوجه الإحداثية الثلاثة وحدها—فتنشأ العلاقة الخطية (10.3.2.4) بالضبط. ويصف موتر الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$ حالة القوة الداخلية عند نقطة وصفاً كاملاً؛ ويُستخرج الشد السطحي على أي مستوى يمر بتلك النقطة بالعملية الخطية (10.3.2.4). فالإجهاد ليس كمية قياسية ولا متجهاً، بل موتر—أي تطبيق خطي من المتجهات العمودية الوحدية $\boldsymbol{n}$ إلى متجهات الشد السطحي $\boldsymbol{t}$.



(a) رباعي السطوح (b) الإجهادات

شكل 10.3: كوشي: من رباعي السطوح إلى الإجهاد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تناظر موتر الإجهاد

برهن كوشي، ببحث اتزان العزوم لرباعي السطوح المتناهي الصغر (أو لمكعب متناهي الصغر على نحو مكافئ)، أن موتر الإجهاد متناظر:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

ويخفض ذلك عدد مركبات الإجهاد المستقلة من تسع إلى ست. وللتناظر نتائج عميقة: فهو يضمن وجود ثلاثة *اتجاهات رئيسة* متعامدة يكون الشد السطحي على امتدادها عمودياً تماماً (من دون قص)، وتقابلها *الإجهادات الرئيسة* σ_1 وσ_2 وσ_3.

المعادلات الأساسية

بعد تعريف موتر الإجهاد، اشتق كوشي المعادلات الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة:

1. **معادلات الاتزان** (في غياب قوى الجسم):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

مع معادلتين مماثلتين للاتجاهين y وz. وبترميز مختصر: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.

2. **علاقات الانفعال–الإزاحة** (للتشوهات الصغيرة):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3. **العلاقات التكوينية**: اقترح كوشي في البداية نظرية جزيئية تربط الإجهاد بالانفعال، وإن كان باحثون لاحقون سيصقلون صياغته.

تمثيل موهر البياني (1882)

ظل موتر الإجهاد، رغم أناقته، مجرداً إلى حد ما للمهندسين الممارسين. وفي عام 1882 قدم كريستيان أوتو موهر تفسيراً بيانياً بارعاً جعل مفهوم الموتر في المتناول (Mohr, 1882b). وتمثل **دائرة موهر** جميع توليفات الإجهادين العمودي والقصي الممكنة على المستويات المارة بنقطة، بوصفها نقاطاً على دائرة (أو على ثلاث دوائر في ثلاثة أبعاد).

إذا كانت الإجهادات الرئيسة $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$، فإن الإجهاد العمودي σ وإجهاد القص τ على أي مستوى يحققان:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

يحدث إجهاد القص الأقصى على مستويات تميل بزاوية 45° إلى الاتجاهات الرئيسة، ويساوي $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. وأصبحت دائرة موهر أداة لا غنى عنها للمهندسين، إذ تتيح التعيين البياني السريع للإجهادات على مستويات اعتباطية، وتشكل أساس معايير الانهيار في اللدونة وميكانيكا الكسر.

الأهمية التاريخية

مثل إدخال كوشي لموتر الإجهاد قطيعة كاملة مع مقاربة القرن الثامن عشر. فبدلاً من دراسة عناصر إنشائية بعينها (كالعوارض والأعمدة)، صاغ معادلات حقلية عامة تنطبق على أي وسط مرن متصل. وربما كانت القفزة المفاهيمية—إدراك أن الإجهاد موتر لا متجه—أهم تقدم منفرد في تاريخ ميكانيكا الأوساط المتصلة.

وكما لاحظ تروسديل، حول عمل كوشي الميكانيكا من علم *القوى* إلى علم *الحقول*. فلا توصف حالة الجسم المتصل بقوى منفصلة عند نقاط منفصلة، بل بحقول موترية تتغير باستمرار في الفضاء. وقد امتد هذا المنظور الحقلي، الذي تحقق أولاً للإجهاد، لاحقاً إلى الانفعال ودرجة الحرارة والسرعة وسائر كميات فيزياء الأوساط المتصلة.

يبقى موتر الإجهاد أساس التحليل الإنشائي الحديث كله. وسواء استُعملت الطرائق التحليلية أو العناصر المحدودة أو الديناميكا الجزيئية، فإن موتر إجهاد كوشي يوفر لغة وصف القوى الداخلية. وبعد قرنين من إدخاله، ما زال واحداً من أكثر الإنجازات الفكرية أثراً في تاريخ الميكانيكا.

10.3.2.5 نسبة بواسون (1781–1840) وتبسيط كوشي

قدم سيميون دني بواسون (1781–1840) (§6.7.2)، زميل كوشي في المدرسة متعددة التقنيات، عدة إسهامات حاسمة في نظرية المرونة (Poisson, 1829):

نسبة بواسون:

اكتشف بواسون أنه عندما يُشد قضيب مرن طولياً، فإنه ينكمش عرضياً، وأن نسبة الانفعال العرضي إلى الطولي ثابت مادي:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{عرضي}}}{\varepsilon_{\text{طولي}}}$$

وتنبأ في البداية، خطأً استناداً إلى نماذج جزيئية، بأن $\nu = 1/4$ لجميع المواد. ومع أن هذه القيمة المحددة كانت خاطئة، أصبح مفهوم نسبة بواسون أساسياً في نظرية المرونة.

معادلات المواد متساوية الخواص:

بسط بواسون معادلات كوشي للمواد متساوية الخواص، فخفض عدد الثوابت المرنة المستقلة إلى اثنين. وتأخذ علاقات الإجهاد–الانفعال لمادة متساوية الخواص الصورة:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

حيث λ وμ ثابتا لامي (مع أن هذا الترميز ظهر لاحقاً).

نظرية البلاطات:

طور بواسون أيضاً نظرية البلاطات المرنة، موسعاً نظرية العوارض إلى بعدين ومشتقاً المعادلة التفاضلية الحاكمة لانحراف البلاطة.

للتفاصيل التحليلية، انظر الفصل 32

10.3.2.6 تركيب نافييه (1785–1836) وتطبيقه

يحتل كلود لوي ماري هنري نافييه (1785–1836) (§6.7.3) موقعاً فريداً بوصفه منظّراً صارماً ومهندساً عملياً معاً. وبعد تخرجه من المدرسة متعددة التقنيات، أصبح أستاذاً في مدرسة الجسور والطرق، حيث درّس من عام 1819 حتى وفاته.

معادلات نافييه:

اشتق نافييه، مستقلاً عن كوشي وبطرائق مختلفة، المعادلات الأساسية للمرونة. وقد أدت مقاربته، القائمة على القوى الجزيئية بين النقاط المادية، إلى معادلات الاتزان بدلالة الإزاحات (معادلات نافييه):

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

حيث $\mathbf{u}$ متجه الإزاحة و$\mathbf{f}$ تمثل قوى الجسم.

جسر بين النظرية والتطبيق:

كان إنجاز نافييه العظيم ترجمة رياضيات كوشي وبواسون المجردة إلى تطبيقات هندسية عملية. وأصبح كتابه *Résumé des Leçons* (Navier, 1826) النص المعياري لطلاب الهندسة، وعرض:

- نظرية العوارض المشتقة من معادلات المرونة العامة؛
- طرائق حساب الإجهادات والانحرافات في المنشآت العملية؛
- تحليل العوارض المستمرة والمثبتة (يُناقش تفصيلاً في القسم 11.3.1)؛
- تطبيقات على الجسور والمباني والآلات.

برهن نافييه أن الرياضيات المتقدمة لميكانيكا الأوساط المتصلة يمكن أن تعطي صيغاً عملية للتصميم. وأصبحت معادلته الشهيرة للعارضة:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

أداة معيارية للمهندسين الإنشائيين—وهي سليل مباشر لمعادلات كوشي الحقلية، لكنها بسيطة بما يكفي للحساب العملي.

10.3.2.7 ثابتا لامي (1795–1870) للمرونة

أضفى غابرييل لامي (1795–1870)، الأستاذ في المدرسة متعددة التقنيات ثم في مدرسة الجسور والطرق، صرامة رياضية وبصيرة فيزيائية على نظرية المرونة (Lamé, 1852).

ثابتا لامي:

أعاد لامي صياغة المعادلات التكوينية للمواد متساوية الخواص بدلالة ثابتين مرنين يحملان اسمه الآن، هما λ وμ. ويصبح قانون هوك المعمم:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث δ_{ij} دلتا كرونيكر، ويُطبق اصطلاح جمع آينشتاين.

ويرتبط هذان الثابتان بالمعلمات الهندسية الأكثر شيوعاً:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

طرائق الحل:

طور لامي طرائق منهجية لحل مسائل المرونة، ولا سيما للأجسام ذات التناظر الهندسي (الكرات والأسطوانات). ولا يزال عمله على الأسطوانات سميكة الجدران تحت الضغط حلاً كلاسيكياً واسع الاستعمال في تصميم أوعية الضغط.

10.3.2.8 سان-فنان (1797–1886) والطريقة شبه العكسية

يمثل أديمار جان كلود باريه دي سان-فنان (1797–1886) (§6.7.8) ذروة نظرية المرونة الفرنسية في القرن التاسع عشر. وبعد تخرجه من المدرسة متعددة التقنيات، أمضى معظم مسيرته في مدرسة الجسور والطرق، حيث حرر الطبعة الثالثة من *Résumé* لنافييه وأضاف إليها تعليقات موسعة (Navier, 1864).

الطريقة شبه العكسية:

كان ابتكار سان-فنان العظيم الطريقة شبه العكسية لحل مسائل المرونة. فبدلاً من حل المنظومة الكاملة للمعادلات التفاضلية مع الشروط الحدية (وهو أمر يتعذر غالباً)، كان:

1. يفترض شكلاً لحقل الإجهاد أو الإزاحة استناداً إلى الحدس الفيزيائي؛
2. يتحقق من أن هذا الافتراض يحقق الاتزان والتوافق؛
3. يعين المجاهيل الباقية من الشروط الحدية.

وأعطت هذه المقاربة العملية حلولاً لمسائل كان حلها متعذراً من قبل.

مبدأ سان-فنان:

لعل أكثر إسهاماته تأثيراً المبدأ الذي يحمل اسمه:

saint-venant1855memoire

> إذا استُبدلت بالقوى المؤثرة على جزء صغير من سطح جسم مرن منظومة قوى أخرى مكافئة لها استاتيكياً وتؤثر على الجزء نفسه من السطح، فإن إعادة توزيع الحمل هذه تحدث تغيرات كبيرة في الإجهادات موضعياً، لكنها لا تكاد تؤثر في الإجهادات عند مسافات كبيرة قياساً إلى الأبعاد الخطية للسطح الذي غُيّرت عليه القوى.

برر هذا المبدأ استعمال شروط حدية مبسطة في المسائل العملية، وأصبح أساسياً في التحليل الهندسي.

الحلول الكلاسيكية:

قدمت مذكرات سان-فنان حلولاً نهائية لما يأتي:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **التواء المحاور غير الدائرية** (Saint-Venant, 1855a): بين أن المقاطع العرضية لا تبقى مستوية أثناء الالتواء (الالتواء الحربي)، واشتق المعادلات الحاكمة والحلول لأشكال مختلفة من المقاطع العرضية.
- **انحناء العوارض**: صقل نظرية العوارض، آخذاً تشوه القص في الحسبان ومقدماً تصحيحات للنظرية الابتدائية.
- **انحناء القضبان المنشورية وشدها وضغطها**: وحدت معالجته الشاملة حالات تحميل متعددة ضمن إطار رياضي مشترك.

> *للتفاصيل التحليلية، انظر §23.2*

10.3.2.9 طرائق كلابيرون (1799–1864) القائمة على الطاقة

قدم بنوا بول إميل كلابيرون (1799–1864)، وإن كان أشهر لدى علماء الديناميكا الحرارية، إسهامات أساسية في الميكانيكا الإنشائية من خلال عمله على طرائق الطاقة (Clapeyron, 1834).

مبرهنة كلابيرون:

تنص مبرهنته في الطاقة المرنة (المناقشة تفصيلاً في القسم 47.1.6.1) على أن طاقة الانفعال في جسم مرن تساوي نصف الشغل المبذول بالقوى الخارجية:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV$$

وأصبحت هذه النتيجة أساسية لطرائق الطاقة في التحليل الإنشائي.

معادلة العزوم الثلاثة:

وفر عمل كلابيرون اللاحق (Clapeyron, 1857 PDF) على العوارض المستمرة (القسم 11.3.2) أدوات عملية جسرت الفجوة بين نظرية المرونة المجردة وممارسة الهندسة الإنشائية.

10.3.2.10 الإنجاز الفرنسي في منظوره العام

أرست إسهامات هؤلاء الرياضيين والمهندسين الفرنسيين، المركزة في فترة قصيرة على نحو لافت (نحو 1820–1860)، ميكانيكا الأوساط المتصلة ونظرية المرونة بوصفهما علمين رياضيين صارمين. وقد أتاحت عدة عوامل هذا الإنجاز الاستثنائي:

1. **الدعم المؤسسي**: وفرت المدرسة متعددة التقنيات بيئة فريدة عمل فيها الرياضيون والمهندسون جنباً إلى جنب، وحظي البحث فيها بتقدير صريح إلى جانب التدريس.
2. **التطور الرياضي**: وفر التقليد الفرنسي في التحليل الرياضي، المنحدر من لاغرانج، الأدوات اللازمة لصياغة المعادلات التفاضلية الجزئية للمرونة وحلها.

3. **الدافع الهندسي**: وفرت المتطلبات العملية للهندسة المدنية—ولا سيما إنشاء السكك الحديدية والجسور—الدافع للتطورات النظرية والتحقق منها معاً.
4. **الاستمرارية الفكرية**: بنى كل جيل منهجياً على عمل سابقيه، إذ أصبح الطلاب أساتذة ووسعوا أعمال معلميهم.

بحلول عام 1860، كانت الأسس النظرية لميكانيكا الأوساط المتصلة قد اكتملت في جوهرها. وأصبح تحدي ما بقي من القرن ترجمة هذا الإطار الرياضي إلى طرائق عملية للتحليل الإنشائي—طرائق متاحة للمهندسين الممارسين من دون اشتراط إتقان الفيزياء الرياضية المتقدمة.

10.4 الإطار الرياضي الكامل

بعد بحث التطور التاريخي وأبرز المساهمين في ميكانيكا الأوساط المتصلة، نعرض الآن الأسس الرياضية التي تقوم عليها النظرية كلها. وتتجاوز قوانين الاتزان الأساسية—حفظ الكتلة وكمية الحركة والطاقة—أي مادة بعينها، وتمثل مبادئ فيزيائية عامة. وتوفر هذه القوانين، مقترنة بالعلاقات التكوينية الخاصة بالمواد (المناقشة في القسم التالي)، إطاراً رياضياً كاملاً لوصف سلوك الأوساط المتصلة.

تدرجت صياغة قوانين الاتزان هذه بصورتها الحديثة طوال القرن التاسع عشر، مع أن محتواها الفيزيائي كان مفهوماً من قبل. وقد أرسى عمل كوشي في عشرينيات القرن التاسع عشر اتزان كمية الحركة الخطية بالصورة التي نعرفها اليوم. أما قوانين الديناميكا الحرارية، فرغم أن كلاوزيوس وتومسون (اللورد كلفن) وغيرهما صاغوها في أربعينيات القرن التاسع عشر وخمسينياته، فإنها لم تدمج منهجياً في ميكانيكا الأوساط المتصلة إلا في أعمال ديوم وتروسديل وكولمان في القرن العشرين.

10.4.1 أويلر وحفظ الكتلة

ينص مبدأ حفظ الكتلة على أن الكتلة لا تُخلق ولا تفنى داخل وسط متصل، (Euler, 1757a) (Euler, 1757b). ويُعبر عن هذا المبدأ لحجم مادي $V(t)$ يحده سطح $S(t)$ ويتحرك مع المادة بالعلاقة:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

حيث $\rho(\mathbf{x}, t)$ كثافة الكتلة عند الموضع $\mathbf{x}$ والزمن t.

يعطي تطبيق مبرهنة رينولدز للنقل، مع ملاحظة أن التكامل يجب أن ينعدم لأي حجم مادي اعتباطي، الصيغة المحلية:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

حيث $\mathbf{v}$ حقل السرعة. وهذه هي *معادلة الاستمرارية*.

ولمادة غير قابلة للانضغاط (ثابت ρ)، تُبسط إلى:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

وفي الوصف اللاغرانجي، الذي يتتبع جسيمات المادة، يأخذ حفظ الكتلة الصورة الأنيقة:

$$\rho_0 \, dV_0 = \rho \, dV$$

حيث يدل الرمز السفلي 0 على كميات التشكيل المرجعي، أو بصورة مكافئة:

$$\rho_0 = \rho J$$

حيث $J = \det(\mathbf{F})$ محدد جاكوبي لموتر تدرج التشوه $\mathbf{F}$.

10.4.2 كوشي (1789–1857) واتزان كمية الحركة الخطية

يمثل اتزان كمية الحركة الخطية قانون نيوتن الثاني مطبقاً على وسط متصل. فبالنسبة إلى حجم مادي، يساوي معدل تغير كمية الحركة مجموع القوى المطبقة:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{S(t)} \mathbf{t} \, dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \, dV$$

حيث $\mathbf{t}$ متجه الشد السطحي (القوة لكل وحدة مساحة) على السطح، و$\mathbf{b}$ تمثل قوى الجسم لكل وحدة كتلة (مثل الجاذبية).

تمثلت بصيرة كوشي الأساسية في إدراك أن متجه الشد السطحي عند نقطة يعتمد خطياً على المتجه العمودي الوحدي إلى الخارج $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

حيث $\boldsymbol{\sigma}$ موتر إجهاد كوشي. وتعد هذه العلاقة، المعروفة باسم *مبدأ كوشي للإجهاد*، إحدى دعائم ميكانيكا الأوساط المتصلة.

يعطي تطبيق مبرهنة التباعد وموضعة الصيغة التكاملية معادلات كوشي للحركة:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

حيث يدل D/Dt على المشتقة الزمنية المادية. وبالصيغة المركبية (باستعمال اصطلاح جمع آينشتاين):

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i$$

ولمسائل المرونة الساكنة (من دون تسارع)، تُختزل إلى:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

وهي معادلات الاتزان التي اشتقها كوشي ونافييه ومعاصروهما في عشرينيات القرن التاسع عشر.

10.4.3 اتزان كمية الحركة الزاوية

ينص اتزان كمية الحركة الزاوية على أن معدل تغير كمية الحركة الزاوية لحجم مادي يساوي العزوم المطبقة:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \mathbf{x}\times\rho\mathbf{v}\,dV = \int_{S(t)} \mathbf{x}\times\mathbf{t}\,dS + \int_{V(t)} \mathbf{x}\times\rho\mathbf{b}\,dV$$

وفي غياب إجهادات العزوم الموزعة (عزوم الجسم)، يؤدي هذا المبدأ إلى نتيجة بسيطة لافتة لكنها عميقة: يجب أن يكون موتر إجهاد كوشي متناظراً:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{أو} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

وقد أدرك كوشي شرط التناظر هذا، الذي يخفض المركبات المستقلة لموتر الإجهاد من تسع إلى ست، وهو أساسي في جميع التطورات اللاحقة لنظرية المرونة. ويعني إمكان وصف حالة الإجهاد عند نقطة وصفاً كاملاً بثلاثة إجهادات عمودية وثلاثة إجهادات قصية.

ولتناظر موتر الإجهاد آثار عميقة. فهو يضمن وجود ثلاثة اتجاهات رئيسة للإجهاد متعامدة عند كل نقطة، ومصطفة مع المتجهات الذاتية لـ$\boldsymbol{\sigma}$، لا تؤثر على امتدادها إلا إجهادات عمودية.

10.4.4 قوانين الديناميكا الحرارية: كلاوزيوس (1822–1888) وتومسون (1824–1907) وديوم (1861–1916)

10.4.4.1 القانون الأول (اتزان الطاقة):

رودولف كلاوزيوس (Clausius, 1850; Clausius, 1854; Clausius, 1879) ووليام تومسون (Thomson, 1848; Thomson, 1851; Thomson, 1855) وديوم (Duhem, 1891; Duhem, 1911; Duhem, 1893).

يوسع القانون الأول للديناميكا الحرارية اتزان الطاقة الميكانيكية ليشمل الآثار الحرارية. فبالنسبة إلى حجم مادي، يساوي معدل تغير الطاقة الكلية (الحركية والداخلية) معدل الشغل المبذول مضافاً إليه معدل الإمداد الحراري:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + e\right) dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS + \int_{V(t)} \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV - \int_{S(t)} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int_{V(t)} \rho r\,dV$$

حيث e الطاقة الداخلية النوعية لكل وحدة كتلة، و$\mathbf{q}$ متجه تدفق الحرارة، وr الإمداد الحراري لكل وحدة كتلة.

باستعمال مبدأ كوشي للإجهاد وتطبيق مبرهنة التباعد نحصل على الصيغة المحلية:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r$$

حيث $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$ موتر معدل التشوه (الجزء المتناظر من تدرج السرعة).

يمثل الحد $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ قدرة الإجهاد—أي المعدل الذي تبذل به الإجهادات شغلاً لكل وحدة حجم. وفي المواد المرنة التي تخضع لتشوهات عكوسة، يُخزن هذا الشغل على هيئة طاقة انفعال مرنة ويمكن استعادته بالكامل.

وللمسائل الميكانيكية البحتة التي تُهمل فيها الآثار الحرارية، يُختزل القانون الأول إلى عبارة عن الطاقة الميكانيكية. وفي المرونة الساكنة، حيث الطاقة الحركية منعدمة والعمليات شبه ساكنة، يُخزن الشغل الذي تبذله القوى الخارجية على هيئة طاقة انفعال:

$$W_{\text{خارجي}} = U$$

ويقوم على اتزان الطاقة هذا كل من مبرهنة كلابيرون والمبادئ التغايرية التي أصبحت محورية في التحليل الإنشائي.

10.4.5 القانون الثاني (متباينة الإنتروبيا):

صاغ كلاوزيوس القانون الثاني للديناميكا الحرارية (متباينة الإنتروبيا)

يفرض القانون الثاني للديناميكا الحرارية قيوداً أساسية على سلوك المواد من خلال متباينة كلاوزيوس–ديوم. وتنص هذه المتباينة في صيغتها المحلية على أن معدل إنتاج الإنتروبيا يجب ألا يكون سالباً:

$$\rho \frac{D\eta}{Dt} - \frac{\rho r}{\theta} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \geq 0$$

حيث η الإنتروبيا النوعية لكل وحدة كتلة، وθ درجة الحرارة المطلقة.

يعطي استعمال القانون الأول لحذف r وتوسيع الحدود متباينة التبديد:

$$\rho \left(\frac{D\psi}{Dt} + \eta \frac{D\theta}{Dt} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$$

حيث $\psi = e - \theta\eta$ طاقة هلمهولتز الحرة.

وللمواد المرنة الخاضعة لعمليات متساوية الحرارة (ثابت θ)، يقتضي القانون الثاني أن تساوي قدرة الإجهاد معدل تغير الطاقة الحرة:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \rho \frac{D\psi}{Dt}$$

يوفر هذا القيد الديناميكي الحراري الأساس النظري لفرضية غرين القائلة إن للمواد المرنة دالة كثافة لطاقة الانفعال—وهي علاقة عانى المنظّرون الجزيئيون في اشتقاقها من المبادئ الأولى. وتتجاوز المقاربة الديناميكية الحرارية تفاصيل المستوى الجزيئي بأناقة، إذ تؤكد أن تخزين الطاقة والعكوسية يكفيان لضمان وجود جهد.

10.4.6 التطور التاريخي والتركيب الحديث

تطورت صياغة قوانين الاتزان هذه على مدى أكثر من قرن:

- **عشرينيات القرن التاسع عشر (كوشي، نافييه)**: أرسيا اتزان كمية الحركة الخطية للأجسام الصلبة المرنة، واشتقا معادلات اتزان الإجهاد، وأدركا تناظر موتر الإجهاد.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **أربعينيات وخمسينيات القرن التاسع عشر (كلاوزيوس، تومسون، رانكين)**: صاغوا القانونين الأول والثاني للديناميكا الحرارية للأنظمة العيانية، بدايةً في سياق المحركات الحرارية والدورات الديناميكية الحرارية.
- **خمسينيات وستينيات القرن التاسع عشر (سان-فنان، تومسون)**: بدأوا إدماج مفاهيم الديناميكا الحرارية في ميكانيكا الأوساط المتصلة، وإن كان ذلك أساساً للموائع والتوصيل الحراري.
- **العقدان الأول والثاني من القرن العشرين (ديوم)**: صاغ ديناميكا الأوساط المتصلة الحرارية منهجياً، وقدم مفهوم المتغيرات الداخلية للعمليات التبديدية.
- **ستينيات القرن العشرين (تروسديل، كولمان، نول)**: أرسوا الإطار الحراري الميكانيكي الحديث، وبينوا كيف يقيد القانون الثاني العلاقات التكوينية من خلال متباينة كلاوزيوس–ديوم وإجراء كولمان–نول.

برهن التركيب الحديث، الذي طُور في القرن العشرين، أن قوانين الاتزان هذه، مقترنة بعلاقات تكوينية مصوغة على الوجه الصحيح (القسم 10.5)، توفر إطاراً كاملاً ومتسقاً لميكانيكا الأوساط المتصلة. فقوانين الاتزان عامة—تنطبق على جميع الأوساط المتصلة—بينما تلتقط العلاقات التكوينية السلوك الخاص بكل مادة.

والبصيرة الأساسية في نظرية المرونة أن قوانين الاتزان وحدها لا تكفي لتعيين استجابة جسم. فمعادلات اتزان كمية الحركة الثلاث لا تقدم سوى ثلاث معادلات للمركبات الست المستقلة للإجهاد (بسبب التناظر). وتسد العلاقات التكوينية التي تربط الإجهاد بالتشوه هذه الفجوة، وهي موضوع القسم التالي.

10.5 النظرية التكوينية: سلوك المواد

تنطبق قوانين الاتزان المعروضة في القسم السابق على جميع الأوساط المتصلة—فهي تعبر عن مبادئ فيزيائية أساسية تتجاوز نوع المادة. غير أن هذه القوانين وحدها لا تستطيع التنبؤ بكيفية استجابة مادة بعينها للقوى المطبقة. فالصلب والمطاط يحققان معادلات اتزان كمية الحركة نفسها، لكنهما يتصرفان تصرفاً مختلفاً جذرياً تحت شروط تحميل متطابقة. وتلتقط *العلاقات التكوينية* هذا السلوك الخاص بالمادة—وهي تعبيرات رياضية تربط الكميات الحركية الهندسية (التشوه ومعدل الانفعال) بالكميات الديناميكية (الإجهاد وتدفق الحرارة).

يمثل تطور النظرية التكوينية أحد الإنجازات الفكرية الكبرى لميكانيكا الأوساط المتصلة. فقد أفضى الجدل في القرن التاسع عشر بين المقاربتين الجزيئية والظاهراتية في النهاية إلى مبادئ عامة توجه النمذجة التكوينية لجميع المواد. ونشأت هذه المبادئ—الموضوعية، والتناظر المادي، والاتساق الديناميكي الحراري—تدريجياً من الاستدلال النظري والرصد التجريبي معاً (Truesdell **and** Noll, 1965).

10.5.1 الإطار العام

تعبر العلاقة التكوينية لمادة مرنة عن الإجهاد بوصفه دالة في التشوه. وفي أعم صورها:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

حيث $\mathbf{F}$ موتر تدرج التشوه، و$\mathbf{X}$ تدل على النقطة المادية، و$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ الدالة التكوينية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تخفي هذه العبارة التي تبدو بسيطة أسئلة عميقة:

- ما الصورة التي ينبغي أن تتخذها الدالة $\hat{\sigma}$؟
- ما القيود التي تفرضها الفيزياء على هذه الدالة؟
- كيف يقيد التناظر المادي الاستجابة؟
- متى يمكن اشتقاق الإجهاد من جهد (دالة طاقة الانفعال)؟

نشأت إجابات هذه الأسئلة من مزيج من التحليل النظري والرصد التجريبي والاستدلال الديناميكي الحراري. ونبحث الآن المبادئ الرئيسة التي تحكم العلاقات التكوينية.

10.5.2 نول (1925–2017) والموضوعية: مبدأ عدم الاكتراث بالإطار المادي

من المتطلبات الأساسية لأي علاقة تكوينية *الموضوعية* أو عدم *الاكتراث بالإطار المادي*: يجب ألا تعتمد استجابة المادة على الراصد. فإذا أدرنا المختبر أو أضفنا حركة جسم صلب، فلا ينبغي أن تتغير القوى الداخلية في المادة. ويوفر هذا المبدأ، الذي صاغه فالتر نول منهجياً عام 1958 (Noll, 1958)، قيوداً أساسية على صورة العلاقات التكوينية.

رياضياً، لنتصور راصدين يرتبطان بدوران معتمد على الزمن $\mathbf{Q}(t)$ وانتقال $\mathbf{c}(t)$:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$$

يقتضي مبدأ الموضوعية تحول إجهاد كوشي كما يأتي:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$$

لهذا الشرط الذي يبدو بريئاً آثار عميقة. فهو يعني أن الإجهاد لا يمكن أن يعتمد مباشرة على تدرج التشوه $\mathbf{F}$ (الذي ليس موضوعياً)، بل على مقاييس موضوعية للتشوه فقط. والمقياس الملائم هو موتر تشوه كوشي–غرين الأيمن:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

أو معكوسه $\mathbf{C}^{-1}$، أو موتر انفعال غرين–لاغرانج:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

وللتشوهات الصغيرة، حيث $\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$، يُختزل ذلك إلى موتر الانفعال المتناهي الصغر المألوف:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

وهكذا يوفر مبدأ الموضوعية دليلاً أساسياً لصياغة العلاقات التكوينية: لا تستعمل إلا المقاييس الحركية الهندسية الموضوعية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10.5.3 غرين (1793–1841) وفرط المرونة

المادة المرنة هي التي يعتمد إجهادها الحالي على تشوهها الحالي وحده، مستقلاً عن تاريخ التشوه أو معدله:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}) \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{C})$$

وهناك فئة أشد تقييداً هي المواد مفرطة *المرونة* أو مواد *غرين المرنة*، التي يُشتق إجهادها من دالة قياسية لكثافة طاقة الانفعال W:

$$W = W(\mathbf{C})$$

ويُعين الإجهاد عندئذ بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{J}} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^{T}$$

حيث $J = \det(\mathbf{F})$.

وتُبسط هذه العلاقة كثيراً للتشوهات الصغيرة. فإذا كانت $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$، فإن:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

وهذه هي فرضية غرين لعام 1839 بالضبط (Green, 1839a)—أي إمكان اشتقاق الإجهاد المرن من دالة جهد. وقد بُرر ما قدمه غرين ظاهراتياً لاحقاً بالديناميكا الحرارية: ففي التشوهات المرنة متساوية الحرارة، تؤدي طاقة هلمهولتز الحرة دور دالة طاقة الانفعال، ويضمن القانون الثاني وجودها.

والتمييز بين المواد المرنة العامة ومفرطة المرونة حاسم:

- **مرنة عامة**: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon})$ مع دالة اعتباطية $\mathbf{f}$؛
- **مفرطة المرونة**: $\boldsymbol{\sigma} = \partial W / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ مع دالة قياسية W.

للمواد مفرطة المرونة خاصية مميزة: علاقات الإجهاد–الانفعال متناظرة. فإذا كتبنا:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

فإن فرط المرونة يقتضي:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

يخفض هذا التناظر—المعروف باسم علاقات *التقابل*—عدد الثوابت المرنة المستقلة. ويمكن أن توجد $6 \times 6 = 36$ مركبة مستقلة لـC_{ijkl} في مادة مرنة عامة متباينة الخواص؛ أما فرط المرونة (وجود W) فيفرض التناظر الرئيس ويخفض العدد إلى 21 ثابتاً مستقلاً في أعم حالة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10.5.4 فويغت (1850–1919) والتناظر المادي

كثيراً ما تمتلك المواد الحقيقية بنية داخلية—شبكات بلورية، أو اتجاه ألياف، أو تطبق—تجعل استجابتها معتمدة على الاتجاه. ويصف *التناظر المادي* هذا الاعتماد الاتجاهي. وقد أرسى فولديمار فويغت التصنيف المنهجي للأنظمة البلورية وتناظراتها المرنة في مؤلفه الشامل عن فيزياء البلورات (Voigt, 1910).

التناظر المادي دوران $\mathbf{G}$ للتشكيل المرجعي يبقي استجابة المادة من دون تغيير:

$$W(\mathbf{G}^T\mathbf{C}\mathbf{G}) = W(\mathbf{C})$$

تشكل مجموعة جميع هذه الدورانات زمرة *التناظر المادي*. وتميز زمر التناظر المختلفة فئات المواد المختلفة:

- **ثلاثي الميل** (من دون تناظر): 21 ثابتاً مستقلاً؛
- **أحادي الميل** (مستوى تناظر واحد): 13 ثابتاً مستقلاً؛
- **متعامد الخواص** (ثلاثة مستويات تناظر متعامدة): 9 ثوابت مستقلة؛
- **متساوي الخواص عرضياً** (محور تناظر دوراني واحد): 5 ثوابت مستقلة؛
- **متساوي الخواص** (جميع الدورانات تناظرات): ثابتان مستقلان.

في المواد متساوية الخواص—أي التي لا اتجاهات مفضلة فيها—لا يمكن أن تعتمد W إلا على ثوابت $\mathbf{C}$ (أو ثوابت $\boldsymbol{\varepsilon}$ على نحو مكافئ). وللتشوهات الصغيرة، تكون أعم صورة:

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

حيث $I_1 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ و$I_2 = \tfrac{1}{2}[(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)]$ و$I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$.

وللمرونة الخطية ذات الانفعالات الصغيرة، مع الاحتفاظ بالحدود التربيعية في الانفعال فقط:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

ممّا يعطي:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

وهذا هو قانون هوك المعمم بالضبط، بثابتي لامي λ وμ—أي العلاقة التكوينية التي صاغها لامي عام 1852 والتي تهيمن على نظرية المرونة الخطية. والثابتان المستقلان (λ وμ)، أو (E وν) على نحو مكافئ، هما الحد الأدنى اللازم للاستجابة المرنة متساوية الخواص؛ وهي بالضبط النتيجة التي فرضتها التناقضات التجريبية للنظرية الجزيئية على مدرسة الوسط المتصل.

10.5.5 كولمان (1930–1992) ونول: القيود الديناميكية الحرارية

يفرض القانون الثاني للديناميكا الحرارية على العلاقات التكوينية قيوداً أساسية تتجاوز ما تفرضه الموضوعية والتناظر المادي. وتعطي متباينة كلاوزيوس–ديوم، عند تطبيقها على مواد مرنة تخضع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لتشوهات متساوية الحرارة، عدة متطلبات حاسمة. وقد طور كولمان ونول الاستغلال المنهجي للقيود الديناميكية الحرارية لتقييد العلاقات التكوينية في بحثهما المؤسس لعام 1963 (Coleman and Noll, 1963).

1. **وجود طاقة الانفعال:** يقتضي القانون الثاني للعمليات متساوية الحرارة أن يكون شغل الإجهاد تفاضلاً تاماً. وهذا مكافئ لاشتراط اشتقاق الإجهاد من جهد—مما يبرر فرضية غرين انطلاقاً من مبادئ الديناميكا الحرارية.

2. **تحدب طاقة الانفعال:** يجب أن تكون دالة طاقة الانفعال $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ محدبة لضمان استقرار المادة. ورياضياً:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \xi_{ij} \xi_{kl} > 0 \quad \text{لكل } \boldsymbol{\xi} \text{ غير صفري}$$

ويضمن ذلك أن مصفوفة الصلابة المماسية موجبة التعيين، وهو شرط لازم لتشكيلات الاتزان المستقرة.

3. **القيود على الثوابت المرنة:** يتطلب الاستقرار الديناميكي الحراري للمرونة الخطية متساوية الخواص:

$$\mu > 0 \tag{10.1}$$
$$3\lambda + 2\mu > 0 \tag{10.2}$$

وتتحول إلى المتطلبات الهندسية المألوفة:

$$E > 0 \quad \text{(معامل يونغ موجب)} \tag{10.3}$$
$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad \text{(حدود نسبة بواسون)} \tag{10.4}$$

يقابل الحد الأعلى $\nu < 1/2$ حد عدم الانضغاط، بينما يضمن $\nu > -1$ طاقة انفعال موجبة. وتحقق المواد الحقيقية هذه الحدود، إذ تقع معظم المواد الهندسية في المجال $0 < \nu < 0.5$.

ويستبعد الحد الأدنى عالمية تنبؤ النظرية الجزيئية بأن $\nu = 1/4$—فالتجارب تبين أن الفلين قريب من الصفر، بينما يقترب المطاط من 0.5. ويستوعب الإطار الديناميكي الحراري هذا التغير بصورة طبيعية، وهو ما عجزت عنه النظرية الجزيئية.

10.5.6 منظور تاريخي: من التجريبية إلى النظرية

يوضح تطور النظرية التكوينية التفاعل بين التجربة والنظرية والتجريد الرياضي:

القرنان السابع عشر والثامن عشر (هوك، أويلر): رصد تجريبي للتناسب بين القوة والتشوه. قانون هوك للنوابض، الذي عممه أويلر على العوارض والأعمدة.

عشرينيات إلى أربعينيات القرن التاسع عشر (نافييه، كوشي، بواسون): محاولات اشتقاق العلاقات التكوينية من النماذج الجزيئية. أدت إلى تنبؤات خاطئة (ثابت مرن واحد و$\nu = 1/4$)، لكنها أرست الإطار الرياضي.

1837–1839 (غرين): فرضية ظاهراتية لدالة طاقة الانفعال. تنبأت بثابتين مرنين، متفقةً مع التجربة. وقد قاومها الميكانيكيون الفرنسيون الذين أرادوا اشتقاقاً من المبادئ الأولى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

خمسينيات وستينيات القرن التاسع عشر (سان-فنان، تومسون، برافيه): إدراك أن البنية الجزيئية أعقد مما افتُرض. وتزايد قبول مقاربة الوسط المتصل.

ستينيات وسبعينيات القرن العشرين (تروسديل، نول، كولمان): الميكانيكا الحرارية العقلانية الحديثة. صياغة منهجية للموضوعية والتناظر المادي والقيود الديناميكية الحرارية.

يجمع الفهم الحديث هذه الخيوط التاريخية: يجب أن تحقق العلاقات التكوينية الموضوعية (عدم الاكتراث بالإطار)، وأن تحترم التناظر المادي، وأن تكون مقبولة ديناميكياً حرارياً؛ ويُفضل للمواد المرنة أن تُشتق من دالة جهد. وهذه المبادئ، لا التفاصيل الجزيئية، هي التي تحكم النمذجة التكوينية.

10.5.7 الصلة بالتحليل الإنشائي

وفرت النظرية التكوينية للمهندسين الإنشائيين في القرن التاسع عشر الصلة الحاسمة بين معادلات كوشي الحقلية المجردة والحسابات العملية. وحالما تُرسى علاقة الإجهاد–الانفعال لمادة—سواء بدالة طاقة غرين أم بثابتي لامي—يستطيع المهندسون:

1. جمع العلاقات الحركية الهندسية ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$)؛
2. مع العلاقات التكوينية ($\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$)؛
3. ومعادلات الاتزان ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$).

لاشتقاق المعادلات التفاضلية الحاكمة بدلالة الإزاحة. وتمثل معادلات نافييه هذا الجمع بالضبط في الديناميكا المرنة. أما للعوارض، فقد أعطت المقاربة نفسها المعادلة المألوفة $EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$.

وهكذا تجسر العلاقات التكوينية الفجوة بين نظرية الوسط المتصل المجردة والطرائق العملية للتحليل الإنشائي—وهي الطرائق التي سيطورها نافييه وكلابيرون وخلفاؤهما لتحليل المنشآت غير محددة استاتيكياً، موضوع الفصول اللاحقة.

10.5.8 ماذا في الاسم؟ تطور الميكانيكا وممارسيها

ماذا في الاسم؟ إن التي نسميها وردةً / *ستفوح بالعطر نفسه لو كان لها اسم آخر*—لكن الأسماء في العلوم الميكانيكية ذات أهمية عميقة. فكثيراً ما تستعمل الأدبيات الحديثة مصطلحات *ميكانيكا الأوساط المتصلة* و*المرونة* و*ميكانيكا المواد الصلبة* و*ميكانيكا المواد* على نحو متبادل، مما يسبب التباساً كبيراً. ولا يعكس هذا الغموض الاصطلاحي التاريخ الفكري فحسب، بل تحول الهوية المهنية نفسها أيضاً: من *الفلاسفة الطبيعيين* و*المعماريين–المهندسين* في القرن السابع عشر، مروراً بظهور *المهندس* و*الميكانيكي* المحترفين في القرن التاسع عشر، وصولاً إلى التخصصات الأكاديمية المتخصصة في القرن العشرين.

10.5.8.1 تغير هوية المحلل الإنشائي

قبل أن نفهم تطور أسماء التخصصات، يجب أن ندرك مدى التحول الجذري الذي طرأ على الممارسين أنفسهم.

عصر المعرفة الموسوعية (1600–1790) في القرن السابع عشر وأوائل الثامن عشر، لم تكن لمن يدرسون مقاومة المنشآت هوية مهنية موحدة. فقد كان غاليليو غاليلي (1564–1642) *فيلسوفاً طبيعياً*—وهو

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مصطلح شمل ما نفصله اليوم إلى الفيزياء والفلك والرياضيات والميكانيكا. وظهرت أبحاثه في مقاومة العوارض (انظر §7.2.2) إلى جانب أرصاده الفلكية وتجاربه على الأجسام الساقطة، وجمعتها جميعاً مظلة فهم قوانين الطبيعة.

وجسد روبرت هوك (1635–1703) هذه الموسوعية بوضوح أشد: فقد كان في الوقت نفسه أمين التجارب في الجمعية الملكية، ومعمارياً (صمم مباني بعد حريق لندن الكبير)، وباحثاً مجهرياً، ومنظّراً ميكانيكياً. ولم ترد عبارته الشهيرة *ut tensio sic vis* (انظر §6.6.6) في مؤلف عن الميكانيكا الإنشائية، بل في عمل عن النوابض والأجسام المرنة بجميع أنواعها.

وفي فرنسا، حمل المهتمون بالبناء لقب *architecte* أو *ingénieur*، لكنهما لم يكونا بعد المهنتين المتخصصتين اللتين نعرفهما اليوم. فقد أجرى إدم ماريوت (1620–1684، انظر §7.3.2.3) تجارب في ضغط الماء وفيزيولوجيا النبات وانهيار العوارض بالكفاءة نفسها. وتنقل فيليب دي لا هير (1640–1718) بسلاسة بين منصب أستاذ الرياضيات في الكوليج رويال، والعمل المعماري، والاستشارة في إنشاء الجسور. ولم يكن التمييز الحديث بين الرياضيات البحتة والعلم التطبيقي والممارسة الهندسية موجوداً بعد.

وحتى شارل أوغستان دي كولوم (1736–1806، انظر §10.3.2.1)، الذي كتب في أواخر القرن الثامن عشر، حمل لقب *ingénieur militaire*—أي مهندس عسكري شملت مهامه تصميم التحصينات والمساحة والأعمال الإدارية إلى جانب أبحاثه النظرية. ولم يقدم مذكرته عن ضغط التربة ومقاومة العوارض إلى أكاديمية العلوم بوصفها تمريناً أكاديمياً، بل إرشاداً عملياً للبناء العسكري.

لم يكن هناك مجال يسمى *ميكانيكا المواد* أو *المرونة*—بل كانت هناك *الميكانيكا* وحدها (بمفهوم واسع) وتطبيقها على مسائل البناء العملية. وحملت الكتب عناوين مثل *La Science des Ingénieurs* (بيليدور، 1729) أو *Architecture Hydraulique* (بيليدور، 1737–1739)، مما عكس اندماج المعرفة النظرية بالفن العملي.

ميلاد المهندس المحترف (1790–1850) عجلت الثورة الفرنسية والعصر النابليوني بتحول حاسم. فقد أنشأ تأسيس المدرسة متعددة التقنيات (1794) ومدرسة الجسور والطرق (التي أعيد تنظيمها عام 1795)، لأول مرة، تعليماً مهنياً منهجياً للمهندسين—لا يُكتسب بالتلمذة أو الدراسة الذاتية، بل بالتدريب الرياضي الصارم. وكان خريجو المؤسستين *ingénieurs des ponts et chaussées* (مهندسي الجسور والطرق) أو *ingénieurs militaires*، أي مهنيين ذوي مسارات وظيفية محددة ومعرفة معيارية وهوية مؤسسية.

والأهم أن هذا الجيل أتى إلى المسائل الإنشائية بتطور رياضي غير مسبوق. فقد امتلك كلود لوي نافييه (1785–1836، انظر §6.7.3)، مع تدريبه مهندساً، قدرات رياضية تضاهي قدرات الرياضيين البحتين. ومثل كتابه *Résumé des Leçons* لعام 1826 تركيباً جديداً: اشتقاقاً رياضياً صارماً في خدمة التطبيق الهندسي. وسمى نافييه ومعاصروه مجالهم *mécanique appliquée* (الميكانيكا التطبيقية)، تمييزاً له من *mécanique rationnelle* (الميكانيكا العقلانية)—أي النظرية الرياضية المجردة التي طورها لاغرانج وغيره.

برز مصطلح *élasticité* (المرونة) في هذه الفترة لوصف النظرية الرياضية للتشوه العكوس في الأجسام الصلبة. وقد عنون أوغستان لوي كوشي (1789–1857، انظر §6.7.6 و§10.3.2.4)، مع كونه رياضياً في المقام الأول، مذكراته المؤسسة عن *اتزان الأجسام المرنة الصلبة أو المائعة* وحركتها. وبحلول ثلاثينيات القرن التاسع عشر اكتسب *الجسم المرن* معنى تقنياً: جسم صلب متصل يعتمد إجهاده على الانفعال بعلاقات رياضية محددة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومع ذلك ظلت الهوية المهنية مرنة. فقد حمل أديمار جان كلود باريه دي سان-فنان (1797–1886، انظر §6.7.8) لقب *ingénieur des ponts et chaussées*، لكنه أمضى مسيرته إلى حد كبير في البحث النظري لا في مشروعات البناء. أفكان مهندساً؟ أم ميكانيكياً؟ أم فيزيائياً رياضياً؟ استعمل معاصروه هذه المصطلحات كلها، مما عكس بقاء الحدود بين التخصصات قابلة للنفاذ.

تبلور التخصصات (1850–1900) شهد منتصف القرن التاسع عشر تبلور هويات مهنية وتخصصية متميزة. ففي بريطانيا أصبح *المهندس المدني* مهنة معترفاً بها، أضفت عليها مؤسسة المهندسين المدنيين الطابع المؤسسي (حصلت على ميثاق عام 1828). وبرز *المهندس الميكانيكي* هوية مستقلة مع مؤسسة المهندسين الميكانيكيين (1847). وأُنشئت كراسٍ جامعية في *الميكانيكا التطبيقية* (كامبريدج، 1875) و*الهندسة* (في مؤسسات متعددة).

وأصبح مصطلح *نظرية المرونة* معيارياً في الإنجليزية من خلال عمل **جورج غابرييل ستوكس** (1819–1903) ووليام تومسون، اللورد كلفن (1824–1907)، وكلاهما أستاذ للفلسفة الطبيعية أسهم كثيراً في نظرية المرونة. ورسخ **أوغسطس إدوارد هوغ لوف** (1863–1940) هذا التقليد بمؤلفه الضخم *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (1892–1893) (Love, 1927 PDF)، فأرسى *المرونة* تخصصاً رياضياً معترفاً به ومتميزاً عن الميكانيكا البحتة والممارسة الهندسية معاً.

وفي ألمانيا، طورت الجامعات التقنية (*Technische Hochschulen*) نظاماً موازياً أخرج *Diplom-Ingenieure*—مهندسين جامعيين ذوي تدريب نظري عميق. وجسد كريستيان أوتو موهر (1835–1918، انظر §11.4.2)، الأستاذ في معهد دريسدن التقني، هذا التقليد: فقد وحد كتابه *Technische Mechanik* (1860) الميكانيكا النظرية بالتطبيق الهندسي.

وبنهاية القرن ظهر توافق تقريبي: تشير *الميكانيكا* إلى العلم العام للقوى والحركة؛ وتشير *نظرية المرونة* أو *المرونة* ببساطة إلى النظرية الرياضية للأجسام الصلبة المرنة؛ وتشير *مقاومة المواد* (*résistance des matériaux*، و*Festigkeitslehre*) إلى التطبيقات الهندسية؛ وتشير *الميكانيكا التطبيقية* إلى التطبيق الأوسع للمبادئ الميكانيكية على المسائل الهندسية.

التخصص في القرن العشرين (1900–1970) أتى القرن العشرون بتخصص متزايد وتكاثر أسماء المجالات الفرعية. وقد كتب **ستيفن ب. تيموشينكو** (1878–1972)، الذي تدرب في روسيا وعمل في الولايات المتحدة، حرفياً الكتب الدراسية التي عرّفت المصطلحات الحديثة. فرسخ كتابه *Strength of Materials* (1930) (Timoshenko **and** Gere, 1976) هذا المصطلح للتدريس الجامعي الأولي، فيما قنن كتابه *Theory of Elasticity* (1934، مع ج. ن. غوديير) (Timoshenko **and** Goodier, 1970 PDF) *المرونة* للدراسات العليا. ثم أفرد كتابه *Theory of Elastic Stability* (1936) الاستقرار مجالاً شبه مستقل.

نشأ مصطلح *ميكانيكا المواد الصلبة* تدريجياً، ويبدو أنه ظهر أولاً في كليات الهندسة الأمريكية خلال أربعينيات القرن العشرين وخمسينياته، ليجمع المرونة واللدونة واللزوجة المرنة وغيرها من الظواهر غير المرنة تحت مظلة واحدة. وأنشأت الجمعية الأمريكية للمهندسين الميكانيكيين قسماً للميكانيكا التطبيقية (1927)، تطور لاحقاً إلى أقسام منفصلة لتخصصات مختلفة. وبحلول منتصف القرن، أمكن للمرء أن يعرّف نفسه مهنياً بأنه ميكانيكي *مواد صلبة* أو متخصص في *المرونة*، مع مجلات ومؤتمرات ومجتمعات بحثية متميزة.

كان التطور الأبرز في القرن العشرين نشوء *ميكانيكا الأوساط المتصلة* بوصفها تخصصاً رياضياً مجرداً. فقد روّج كليفورد تروسديل (1919–2000)، الذي عمل في جامعة جونز هوبكنز ثم جامعة إنديانا، لميكانيكا الأوساط المتصلة بوصفها نظرية حقول موحدة تشمل جميع سلوكيات المواد. وأرست مجلته *Archive for*

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

The Rational Mechanics and Analysis (تأسست عام 1957)، ومؤلفه مع فالتر نول (1925–2017)، *Non-Linear Field Theories of Mechanics* (1965) (Truesdell **and** Noll, 1965)، ميكانيكا الأوساط المتصلة نظرية بديهية صارمة جذبت أساساً الرياضيين التطبيقيين والفيزيائيين النظريين.

بحلول عام 1970، كان مشهد التخصصات الحديث قد اكتمل في جوهره. فقد قدمت الأقسام الجامعية مقررات في *ميكانيكا المواد* (المرحلة الجامعية)، و*مقاومة المواد المتقدمة* أو *نظرية المرونة* (السنة الأولى للدراسات العليا)، و*ميكانيكا الأوساط المتصلة* (الدراسات العليا المتقدمة)، وموضوعات متخصصة متعددة في *ميكانيكا المواد الصلبة*. وازدادت صلة الهوية المهنية بهذه المجالات المحددة: فأصبح المرء ميكانيكي أوساط متصلة، أو متخصصاً في المرونة، أو محللاً إنشائياً، أو ميكانيكياً حاسوبياً.

10.5.8.2 من الهوية المهنية إلى المحتوى التخصصي

في ضوء هذه الخلفية من تطور الهوية المهنية، يمكننا الآن فهم كيف تبلور المحتوى الفكري ومنهجيات الميكانيكا الإنشائية في أربعة مجالات متميزة لكنها متداخلة، وهي التي تسبب الالتباس الاصطلاحي اليوم.

ميكانيكا المواد: التجريبيون الهندسيون (1600–1790) نشأ ما نسميه اليوم *ميكانيكا المواد* من الأبحاث العملية لغاليليو (مقاومة العوارض، انظر §7.2.2)، وماريوت (تصحيح أخطاء غاليليو، انظر §7.3.2.3)، وكولوم (ضغط التربة والاحتكاك ونظرية العوارض، انظر §10.3.2.1). وقد أرسى هؤلاء الرواد تخصصاً هندسياً تميز بما يأتي:

- نماذج مبسطة أحادية البعد (العوارض والأعمدة والمحاور)؛
- ملاحظات ظاهراتية مستمدة من الاختبارات؛
- استدلال هندسي باستعمال مضلعات القوى واتزان العزوم؛
- قابلية التطبيق المباشر على مسائل التصميم؛
- أدوات رياضية أولية (لا تتجاوز حساب التفاضل والتكامل الأساسي).

كانت هذه المقاربة عملية في جوهرها: احتاج كل عنصر إنشائي إلى معالجة متخصصة به، من دون ادعاء نظرية حقلية عامة. وما زالت المنهجية قائمة اليوم في التعليم الهندسي الجامعي الأولي، عادة تحت عناوين مثل *Mechanics of Materials* أو *Strength of Materials* أو *Engineering Mechanics of Solids*. وتتبع الكتب الحديثة لبيير وجونستون، أو هيبلر، أو غيري وتيموشينكو في جوهرها المقاربة التعليمية نفسها التي أُرسيت قبل 300 عام، مع تحديثها بأمثلة حديثة ومعاملات أمان.

المرونة: المدرسة الرياضية الفرنسية (1820–1850) تبلور مصطلح *المرونة* (*théorie de l'élasticité*) خلال الازدهار اللافت للفيزياء الرياضية الفرنسية في العقود التالية للثورة. وقد عرّف المجال ثلاثة أعلام:

قارب نافييه (انظر §6.7.3) المرونة من أسس جزيئية، فاشتق معادلات تفاضلية جزئية للأجسام الصلبة المرنة من تفاعلات القوى المركزية بين الجسيمات. وأرست مذكرته لعام 1821 ومحاضراته لعام 1826 المرونة فرعاً من الفيزياء الرياضية.

وسلك كوشي (انظر §6.7.6) الطريق المكمل، فطور المرونة نظرية حقلية للوسط المتصل من دون الرجوع إلى البنية الجزيئية. وأنشأ إدخاله لموتر الإجهاد وعلاقات الانفعال–الإزاحة ومعادلات الاتزان التفاضلية (1822–1828) الإطار الرياضي الذي ما زال مستعملاً اليوم.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وجمع سان-فنان (انظر §10.3.2.8) بين المقاربتين، وبرهن كيف يمكن حل مسائل القيم الحدية لأجسام ذات أهمية هندسية عملية—فأرست مذكرته في الالتواء (1855) ودراساته للانحناء المسائل المعيارية للمرونة.

أنشأت المدرسة الفرنسية *élasticité* تخصصاً رياضياً تميز بما يأتي:

- صياغة ثلاثية الأبعاد للوسط المتصل باستعمال كميات موترية؛
- قوانين تكوينية خطية (قانون هوك معمماً إلى ثلاثة أبعاد)؛
- معادلات تفاضلية جزئية ذات شروط حدية؛
- الالتزام بالحلول التحليلية الدقيقة حيثما أمكن؛
- تطبيق الرياضيات المتقدمة (المتغيرات العقدية ونظرية الجهد والمتسلسلات اللانهائية).

بلغ هذا التقليد ذروته في كتاب لوف *Mathematical Theory of Elasticity* (1892–1893)، الذي ظل المرجع النهائي باللغة الإنجليزية لأكثر من نصف قرن. وتواصل الكتب الحديثة في المرونة—لتيموشينكو وغوديير، وسوكولنيكوف، وباربر—هذا التشديد على طرائق الحل التحليلية، وإن كانت تُستكمل الآن بالمقاربات العددية.

ميكانيكا المواد الصلبة: التركيب الألماني–الروسي–الأمريكي (1850–1960) طورت الجامعات التقنية الألمانية، ومعاهد البوليتكنيك الروسية، وكليات الهندسة الأمريكية تقليداً موازياً شدد على:

- التحقق التجريبي إلى جانب التطوير النظري؛
- إدراج السلوك غير المرن (اللدونة والزحف والتعب)؛
- الطرائق البيانية والتقريبية للتطبيق العملي؛
- نظرية الاستقرار والتحليل الديناميكي؛
- طرائق الطاقة والمبادئ التغايرية.

وكان من أبرز أعلامه موهر (الطرائق البيانية ودائرة الإجهاد، انظر §11.4.2)، وأوغست فوبل (1854–1924) وابنه لودفيغ برانتل (1875–1953)، رائدا نظرية اللدونة، وعلى نحو حاسم تيموشينكو الذي عرّفت كتبه المجال لأجيال.

نشأ مصطلح *ميكانيكا المواد الصلبة* (أو *solid mechanics*) تدريجياً في منتصف القرن العشرين ليشمل هذا النطاق الأوسع—أي المرونة موسعةً لتضم أي سلوك ميكانيكي للمواد الإنشائية. وتشمل ميكانيكا المواد الصلبة الحديثة:

- المرونة الخطية واللاخطية؛
- اللدونة وتحليل الحد؛
- اللزوجة المرنة والزحف؛
- ميكانيكا الكسر والضرر؛
- الاستقرار والانبعاج؛
- الديناميكا الإنشائية؛
- الطرائق الحاسوبية (طريقة العناصر المحدودة).

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهذا هو محتوى برامج الدراسات العليا الحديثة في الهندسة المدنية والميكانيكية، كما تعكسه كتب مثل *Foundations of Solid Mechanics* لفونغ، أو *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* لمالفرن، أو *Advanced Mechanics of Materials* لبوريسي وشميت.

وأخيراً، يُناقش اشتقاق مصطلح *الهندسة الإنشائية* في §11.2.

ميكانيكا الأوساط المتصلة: التجريد البديهي (1945–1970) بعد الحرب العالمية الثانية، سعى الرياضيون إلى إطار موحد يتجاوز التمييز بين الصلب والمائع. وصاغ **تروسديل** ونول، في مؤلفهما *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* (1965)، *ميكانيكا الأوساط المتصلة* بوصفها نظرية حقول بديهية تميزت بما يأتي:

- الحركة الهندسية العامة للأجسام المتصلة (التشوه والحركة)؛
- قوانين الاتزان (الكتلة وكمية الحركة والطاقة) المستقلة عن التكوين؛
- النظرية التكوينية من خلال داليات تحقق مبادئ عامة؛
- عدم الاكتراث بالإطار والتناظر المادي بوصفهما بديهيتين؛
- القيود الديناميكية الحرارية على الاستجابة التكوينية؛
- عمومية وتجريد رياضيان بالغان.

ضمن هذا الإطار، تصبح المرونة واللزوجة واللدونة كلها حالات خاصة من النظرية التكوينية. وتوفر ميكانيكا الأوساط المتصلة الحديثة، كما تعرضها كتب مثل *An Introduction to Continuum Mechanics* لغورتن أو *Nonlinear Solid Mechanics* لهولتسابفل، الأساس النظري للميكانيكا الحاسوبية ودراسة المواد المعقدة (الأنسجة الحيوية والبوليمرات والأوساط الحبيبية).

غير أن هذه العمومية جاءت على حساب سهولة الوصول. فميكانيكا الأوساط المتصلة في تقليد تروسديل–نول تجذب أساساً الرياضيين التطبيقيين والفيزيائيين النظريين. وتواصل معظم المناهج الهندسية تدريس الصياغات الأقدم والأكثر واقعية للمرونة وميكانيكا المواد الصلبة، وتحتفظ بميكانيكا الأوساط المتصلة للدراسات العليا المتقدمة أو البحث المتخصص.

10.5.8.3 مشهد التخصصات اليوم

تبلورت هذه المسارات التاريخية في مجالات متميزة لكنها متداخلة، يلخصها الجدول 10.4.

10.5.8.4 الاصطلاحات والعلاقات بينها

يمكن فهم العلاقات بين هذه المجالات من خلال التسلسل التاريخي والاحتواء المنطقي معاً:

التسلسل التاريخي:

ميكانيكا المواد ← المرونة ← ميكانيكا المواد الصلبة ← ميكانيكا الأوساط المتصلة

نشأ كل مجال بتعميم سابقه أو إضفاء الصياغة الرياضية أو التجريد عليه. فقد صاغت المرونة تحليل الإجهاد في ميكانيكا المواد رياضياً وعممته. ووسعت ميكانيكا المواد الصلبة المرونة لتضم الظواهر غير المرنة التي اكتشفتها أبحاث القرن العشرين (اللدونة والزحف والكسر). وجردت ميكانيكا الأوساط المتصلة البنية الرياضية المشتركة بين جميع النظريات الحقلية للمادة القابلة للتشوه.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاحتواء المنطقي:

ميكانيكا الأوساط المتصلة ⊃ ميكانيكا المواد الصلبة ⊃ المرونة ⊃ ميكانيكا المواد

من حيث النطاق، كل مجال تخصص من المجال الذي يليه. فميكانيكا الأوساط المتصلة تنطبق على جميع المواد المتصلة؛ وميكانيكا المواد الصلبة تقتصر على المواد الصلبة؛ وتقتصر المرونة أكثر على التشوه العكوس؛ فيما تضع ميكانيكا المواد افتراضات تبسيطية إضافية بشأن توزيع الإجهاد وهندسة المسألة.

ينشأ الالتباس الاصطلاحي من اشتراك هذه المجالات في مسائل وطرائق متداخلة. ويمكن معالجة مسألة انحناء عارضة على أربعة مستويات:

- **ميكانيكا المواد**: باستعمال $\sigma = My/I$ ونظرية العوارض الابتدائية؛
- **المرونة**: بحل المعادلة ثنائية التوافق $\nabla^4 \phi = 0$ مع الشروط الحدية الملائمة؛
- **ميكانيكا المواد الصلبة**: بإدراج اللدونة عند المساند، أو الإجهادات المتبقية، أو الآثار المعتمدة على الزمن؛
- **ميكانيكا الأوساط المتصلة**: بوصفها مثالاً لصياغة مسألة قيم حدية مقيدة تبين المبادئ العامة.

إنها الحالة الفيزيائية نفسها، لكن بمستويات مختلفة من التطور الرياضي، وافتراضات مختلفة، وبصائر مختلفة.

10.5.8.5 الاصطلاحات المعتمدة في هذا الكتاب

نعتمد المصطلحات الآتية في هذا العمل كله توخياً للوضوح والاتساق:

- **ميكانيكا الأوساط المتصلة**: الإطار الرياضي العام للمادة المتصلة، ويشمل المفاهيم الأساسية (الإجهاد والانفعال وقوانين الاتزان) المستقلة عن السلوك التكويني. ويستعمل عند مناقشة المفاهيم التأسيسية أو الصياغات المجردة الحديثة.
- **المرونة** (أو *نظرية المرونة*): النظرية الرياضية للأجسام الصلبة المرنة خطياً، مع التشديد على الحلول الدقيقة أو شبه التحليلية لمسائل القيم الحدية. وتستعمل عند مناقشة التقليد الفرنسي في القرن التاسع عشر وطرائق الحل الكلاسيكية.
- **ميكانيكا المواد الصلبة** (أو *ميكانيكا الصلب*): العلم الهندسي الأوسع لسلوك المواد الصلبة، ويشمل اللدونة واللزوجة المرنة والضرر والكسر. ويستعمل عند مناقشة تطورات القرن العشرين والبحث الحديث.
- **التحليل الإنشائي** (أو *نظرية المنشآت*): تطبيق ميكانيكا المواد الصلبة على الأنظمة الإنشائية الفعلية (الإطارات والجمالونات والقشريات)، ويشمل الطرائق التحليلية والعددية معاً. ويستعمل عند مناقشة الممارسة الهندسية والتصميم.
- **ميكانيكا المواد** (أو *مقاومة المواد*): المقاربة الهندسية المبسطة أحادية البعد المستعملة في المقررات التمهيدية والتصميم الأولي. وتستعمل عند مناقشة المعالجات الابتدائية أو الأعمال التاريخية السابقة للصياغات الصارمة للوسط المتصل.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عند مناقشة التطورات التاريخية، نستعمل مصطلحات الحقبة والمؤلف المعني، مدركين أن كتاب القرن التاسع عشر استعملوا *المرونة* لما قد نميزه اليوم بميكانيكا الأوساط المتصلة، وأن *مقاومة المواد* كانت شائعة على نحو شبه عام قبل عام 1900، وأن *ميكانيكا المواد الصلبة* تسمية من القرن العشرين إلى حد كبير. ويجب على القارئ دائماً تفسير المصطلحات التاريخية في سياقها، مدركاً أن الحدود بين التخصصات في فترة التكوين كانت أقل صلابة بكثير مما تبدو عليه في المناهج الأكاديمية المتخصصة اليوم.

ولا يمثل التطور من الفيلسوف الطبيعي إلى ميكانيكي المواد الصلبة المتخصص—من براهين غاليليو الهندسية إلى صرامة تروسديل البديهية—تقدماً فكرياً فحسب، بل تحولاً جوهرياً في كيفية تنظيمنا للمعرفة والهوية المهنية. ماذا في الاسم؟ في هذه الحالة، تاريخ كامل لكيف توصلنا إلى فهم السلوك الميكانيكي للمادة وكيف نظمنا مقاربتنا لتحليله.

10.6 الخلاصة

تتبع هذا الفصل الرحلة الفكرية اللافتة من النظريات الجزيئية للمرونة إلى إطار الوسط المتصل الشامل الذي يهيمن على الميكانيكا الإنشائية الحديثة. ويمثل التحول النموذجي المدروس هنا—من المحاولات الاختزالية لاشتقاق سلوك المواد من القوى بين الجزيئات إلى الصياغات الظاهراتية القائمة على معادلات الحقول ومبادئ الطاقة—إحدى اللحظات المحورية في تاريخ الميكانيكا.

فرض إخفاق النظريات الجزيئية، الذي جسده تنبؤها الخاطئ بنسبة بواسون وعدم كفاية ثوابتها المرنة، إعادة تصور جوهرية لكيفية نمذجة الأجسام الصلبة القابلة للتشوه. وقد أرست المدرسة الرياضية الفرنسية—ولا سيما كوشي ونافييه ولامي وسان-فنان—الجهاز الرياضي لموترات الإجهاد ومقاييس الانفعال والعلاقات التكوينية التي تشكل أساس ميكانيكا الأوساط المتصلة. وبرهنت فرضية غرين الجريئة لدالة طاقة الانفعال، رغم مقاومتها في البداية، على بُعد نظرها حين بُررت ديناميكياً حرارياً في القرن العشرين.

توفر قوانين الاتزان العامة—حفظ الكتلة وكمية الحركة والطاقة، إلى جانب متباينة الإنتروبيا—الإطار الذي يجب أن تعمل داخله جميع نظريات الأوساط المتصلة. وتتجاوز هذه القوانين نوع المادة، فتنطبق على الموائع والأجسام الصلبة والمواد الأكثر تعقيداً على حد سواء. لكن قوانين الاتزان وحدها لا تستطيع التنبؤ باستجابة المادة؛ إذ يجب استكمالها بعلاقات تكوينية تلتقط السلوك الخاص بالمادة.

نشأت المبادئ التي تحكم الصياغة التكوينية—الموضوعية والتناظر المادي والمقبولية الديناميكية الحرارية—تدريجياً من التفاعل بين الاستدلال النظري والرصد التجريبي. وبالنسبة إلى المواد المرنة، ثبتت قوة الصياغة القائمة على الجهد (فرط المرونة) على نحو خاص، إذ تضمن حفظ الطاقة وتوفر إطاراً منهجياً لنمذجة المواد. ويمثل الثابتان المرنان المستقلان اللازمان للمواد متساوية الخواص (ثابتا لامي λ وμ، أو معامل يونغ ونسبة بواسون على نحو مكافئ) الحد الأدنى من التعقيد الذي يفرضه الواقع التجريبي—وهي نتيجة لم يستطع المنظّرون الجزيئيون بلوغها من المبادئ الأولى.

كان التركيب الذي تحقق بحلول عام 1860 لافتاً: إطار رياضي كامل قادر على وصف السلوك الميكانيكي للأوساط المرنة المتصلة تحت شروط تحميل وحدود اعتباطية. وقد أعطى موتر إجهاد كوشي، مقترناً بالتوافق الحركي الهندسي والعلاقات التكوينية ومعادلات الاتزان، منظومات من المعادلات التفاضلية الجزئية تستطيع—من حيث المبدأ—التنبؤ باستجابة أي جسم مرن.

CC BY-NC-SA 4.0 © 2026
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن تحدياً حاسماً بقي قائماً. فنظرية المرونة العامة، رغم أناقتها الرياضية، تنطبق على نحو طبيعي أكثر على الأجسام المتصلة البسيطة الهندسة. أما المنشآت الواقعية—الجمالونات والإطارات والأقواس والجسور المعلقة—فتتألف من أعضاء منفصلة متصلة عند عقد، ولها شروط تحميل أعقد بكثير من أن تلائم الحل التحليلي. فكيف يستطيع المهندسون تسخير قوة ميكانيكا الأوساط المتصلة للتحليل الإنشائي العملي من دون حل معادلات تفاضلية جزئية معقدة عند كل نقطة؟

كمن الجواب في طرائق متخصصة تستثمر هندسة العناصر الإنشائية وتحميلها: نظرية العوارض، وطريقة الإزاحة، وطريقة القوى، ومبادئ الطاقة للمنشآت غير محددة استاتيكياً. وكان نافييه رائد هذه الترجمة بتحليله للعوارض المستمرة، إذ اشتق المعادلة الحاكمة $EId^4y/dx^4 = q(x)$ من النظرية العامة ثلاثية الأبعاد. وتمثل طرائق كلابيرون القائمة على الطاقة، ومبرهنة العزوم الثلاثة، والتطورات اللاحقة لماكسويل وكاستيليانو، تحسينات متتالية لهذا البرنامج: استخراج الأدوات المحددة التي يحتاج إليها المهندسون في التحليل الإنشائي من نظرية الوسط المتصل العامة.

وننتقل الآن إلى هذه الطرائق العملية—عمل نافييه على المنشآت غير محددة استاتيكياً، ومبرهنات كلابيرون، والتطور اللاحق لإجراءات التحليل المنهجية. وتمثل هذه الطرائق أول تطبيقات ناجحة لميكانيكا الأوساط المتصلة على مسائل ذات أهمية محورية للمهندسين الإنشائيين، إذ تجسر الفجوة بين نظرية الحقول المجردة والحساب العملي. ويوفر إطار الوسط المتصل المؤسس في هذا الفصل الأساس الصارم؛ فيما تبين

الطرائق الإنشائية في الفصل التالي ثماره الهندسية.



كارافاجيو، دفن المسيح (1603–1604)

أجسام تحمل حملاً موزعاً، ووزن ينتقل عبر تلامس مستمر—تأمل في حقول الإ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 10.4: مقارنة النظريات الميكانيكية: منظوران تاريخي وتقني

الجانب	ميكانيكا المواد	المرونة	ميكانيكا المواد الصلبة	ميكانيكا الأوساط المتصلة
الأعلام المؤسسون	غاليليو، ماريوت، كولوم، باران	نافييه، كوشي، سان-فنان، لوف	تيموشينكو، براغر، هيل، دراكر	تروسديل، نول، إريكسن
الفترة التاريخية	1850–1638 (قبل الرياضيات المنهجية)	1900–1820 (الصياغة الرياضية)	1960–1900 (التركيب الهندسي)	1970–1945 (التجريد البديهي)
المدارس الوطنية	تجريبية إيطالية وفرنسية	مدرسة البوليتكنيك الفرنسية	تقنية ألمانية وروسية وأمريكية	أمريكية وإيطالية
الهوية المهنية	معماري، مهندس عسكري	مهندس، فيلسوف طبيعي	أستاذ هندسة	رياضي تطبيقي
النطاق	عناصر إنشائية مبسطة (أحادية البعد)	أجسام صلبة مرنة (وسط متصل ثلاثي الأبعاد)	جميع سلوكيات المواد الصلبة	جميع المواد المتصلة
المستوى الرياضي	حساب تفاضل وتكامل أولي، هندسة	معادلات تفاضلية جزئية، حساب متجهي، متغيرات عقدية	معادلات تفاضلية جزئية، موترات، حساب التغايرات	تحليل موتر مجرد، تحليل دالي
القوانين التكوينية	مرونة خطية (ضمنية)	مرونة خطية (قانون هوك الصريح)	مرونة، لدونة، لزوجة مرنة، ضرر	أي دالية تكوينية
التشوه	انفعال صغير فقط	غالباً انفعال صغير؛ وبعض التشوهات الكبيرة	صغير أو كبير؛ لاخطي	اعتباطي؛ لاخطية هندسية كاملة
الفلسفة	تجريبية عملية	دقة رياضية	واقعية هندسية	صرامة بديهية
المسائل النموذجية	انحراف العوارض، انبعاج الأعمدة، التواء المحاور	تركيز الإجهاد، التلامس، الأسطوانات السميكة	الانهيار الإنشائي، الانهيار اللدن، الكسر	الأسس النظرية، مبرهنات الوجود
طرائق الحل	صيغ وأدلة وجداول	تحليلية (دالة إجهاد إيري، متغيرات عقدية)	العناصر المحدودة، تحليل الحد، طرائق تقريبية	مبادئ تغايرية عامة
الكتب الرئيسة	غيري وتيموشينكو؛ بيير وجونستون؛ هيبلر	لوف؛ سوكولنيكوف؛ تيموشينكو وغوديير	مؤلفات تيموشينكو؛ فونغ؛ مالفرن	تروسديل ونول؛ غورتن؛ هولتسابفل
السياق التعليمي	السنتان الثانية والثالثة جامعياً	السنة الأخيرة جامعياً/الأولى في الدراسات العليا	الدراسات العليا (ماجستير/دكتوراه)	دراسات عليا متقدمة (دكتوراه)
الاستعمال الحالي	عام في المناهج الهندسية	يتراجع في الولايات المتحدة؛ قوي في أوروبا	مهيمن في البحث	متخصص (رياضيات تطبيقية، ميكانيكا حيوية)

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11 التحليل الإنشائي أخيراً: التركيب والتطبيق

ملخص

يتتبع هذا الفصل الأخير تركيب ميكانيكا الأوساط المتصلة في تحليل إنشائي عملي—أي تحول نظرية المرونة المجردة إلى طرائق منهجية لتحليل المنشآت الهندسية الحقيقية. وانطلاقاً من معالجة نافييه للعوارض غير محددة استاتيكياً في عشرينيات القرن التاسع عشر، نتابع التطور عبر مبرهنة ماكسويل للتقابل، وطرائق موهر الهندسية، ومبادئ كاستيليانو للطاقة، وطريقة القوى لمولر–بريسلاو، وطريقتي الإزاحة لماني وبنديكسن، وتوزيع العزوم لهاردي كروس—وهي طرائق هيمنت على الهندسة الإنشائية أكثر من قرن.

ثم يبحث الفصل كيف حولت الثورة الحاسوبية في خمسينيات وستينيات القرن العشرين هذه الطرائق الكلاسيكية إلى صيغ مصفوفية. ولم تنشأ طريقة الصلابة المباشرة لتيرنر وزملائه، ولا طريقة العناصر المحدودة لكلوف، قطيعةً مع النظرية الكلاسيكية، بل تطبيقاً منهجياً للمبادئ الراسخة أتاحه الحساب الرقمي.

ويتم هذا الفصل القوس التاريخي الذي بدأ بتجارب غاليليو في المقاومة والحركة، مبيناً كيف وجد قرنان من التطور النظري تعبيرهما العملي في طرائق حققت الصلة المتكاملة بين النظرية الرياضية والقدرة الحاسوبية والتصميم الهندسي.

11.1 مقدمة 357
11.2 اشتقاق مصطلح الهندسة الإنشائية 358
11.3 التطورات المبكرة: العوارض غير محددة استاتيكياً 359
11.3.1 نافييه (1785–1836): أول معالجة منهجية 359
11.3.2 كلابيرون (1799–1864): معادلة العزوم الثلاثة 360
11.4 الانتقال إلى الطرائق العامة 360
11.4.1 ماكسويل (1831–1879): مبرهنة التقابل 360
11.4.2 موهر (1835–1918): الطرائق الهندسية والتناظرات 361
11.4.3 كاستيليانو (1847–1884): طرائق الطاقة 362
11.4.4 مولر–بريسلاو (1851–1925): التنظيم وخطوط التأثير 363
11.4.5 طريقة القوى: التوافق والمطاوعة 363
11.4.6 المفاهيم الأساسية والإجراء . . . 364
11.4.7 طريقة القوى: الملخص والإرث . . 365
11.5 طريقة الإزاحة: من النظرية إلى التطبيق . . 366
11.5.1 الأسس النظرية: صيغ الصلابة المبكرة 366
11.5.2 طريقة الميل–الانحراف: الصياغة المنهجية 367
11.5.3 هاردي كروس (1885–1959): طريقة توزيع العزوم 368
11.5.4 الامتدادات والصيغ البديلة 370
11.5.5 طريقة الإزاحة: الملخص والإرث . 372
11.6 خطوط التأثير والأحمال المتحركة 372
11.6.1 فينكلر (1835–1888): التطورات المبكرة 373
11.6.2 مبدأ مولر–بريسلاو 373
11.6.3 التطبيقات والإرث 373
11.7 نحو الصياغة المصفوفية: الجسر المفاهيمي إلى الحساب 374
11.7.1 البنية المصفوفية للطرائق الكلاسيكية 374
11.7.2 من التكرار إلى الحل المصفوفي . 375
11.7.3 حدود الحساب اليدوي: تمهيد المسرح للحساب 375
11.7.4 الخلاصة: الاستمرارية والتحول . 375
11.8 المتطلبات الأساسية للتحليل الإنشائي . . . 376
11.9 ملخص زمني للمساهمين 379
11.9.1 الخلاصة 381

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11.1 مقدمة

بعد سبعة آلاف عام من تسجيل الألواح المسمارية الأولى للمعرفة الهندسية، وقرنين من إرساء أسس ميكانيكا الأوساط المتصلة، نبلغ ذروة رحلتنا التاريخية: تركيب النظرية الرياضية والممارسة الإنشائية في التحليل الحاسوبي الحديث.

تتبعت المجلدات السابقة النشوء التدريجي للميكانيكا الإنشائية بوصفها علماً رياضياً. وشهدنا تجارب غاليليو التي أثبتت قابلية مقاومة المواد للقياس وخضوعها لقوانين عقلانية. وتابعنا تحويل نيوتن للميكانيكا إلى تخصص رياضي. ورأينا كيف غير تطور ميكانيكا الأوساط المتصلة—نظرية كوشي للإجهاد ومعادلات نافييه الحقلية—فهمنا لاستجابة المواد للأحمال. وقد وسع كل تقدم نطاق ما يمكن حسابه، لكن تحدياً حاسماً بقي قائماً: كيف نطبق هذه النظريات المجردة على منشآت حقيقية يتجاوز تعقيدها متناول الحل التحليلي؟

يبحث هذا الفصل كيف وُوجه ذلك التحدي من خلال تطور التحليل الإنشائي تخصصاً هندسياً متميزاً. وبناءً على الأسس الرياضية لنظرية المرونة التي أُرست في الفصل السابق، دخلت الميكانيكا مرحلة جديدة وحاسمة—دفعتها على نحو متزايد حاجات الهندسة الإنشائية. وقد وجدت الصياغات المجردة للإجهاد والانفعال والمرونة (الفصل 10)، التي نضجت بأعمال رياضيي أوائل القرن التاسع عشر، تعبيراً ملموساً في تحليل المنشآت الحقيقية: الجسور والإطارات والأقواس التي تحدى تعقيدها بساطة الأنظمة المحددة استاتيكياً. ولم يعد التحدي تعريف قوانين المادة، بل تطبيقها منهجياً على مجموعات من الأعضاء لا يمكن استنتاج قواها الداخلية من الاتزان وحده.

وفي هذا الانتقال—من المتصل إلى المنفصل، ومن نظرية المرونة العامة إلى علم المنشآت المحدد—نشأ جيل جديد من المفكرين. فقد حول المهندسون الفرنسيون (نافييه وكلابيرون)، والبريطاني ماكسويل، والإيطالي كاستيليانو، والأستاذان الألمانيان (موهر ومولر–بريسلاو) الميكانيكا إلى تحليل إنشائي، وقدموا مبرهنات قوية للطاقة والتوافق جعلت غير *المحدد* لا مستعصياً على الحل، بل *قابلاً للقياس بأناقة*.

وقع التحول في مرحلتين فصل بينهما الحساب الرقمي. شهدت المرحلة الأولى، الممتدة تقريباً من 1820 إلى 1950، تطور طرائق الحساب اليدوي: إجراءات منهجية لتحليل المنشآت غير محددة استاتيكياً. ويتتبع هذا الفصل تطور هذه الطرائق التحليلية التي جسرت بين نظرية المرونة والتصميم الإنشائي—وهي طرائق ستشكل لاحقاً أساس مقاربتي الإزاحة والصلابة المحوريتين في التحليل الإنشائي في القرن العشرين. ومن عمل نافييه الرائد على العوارض المستمرة إلى معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة، ومن مبرهنة ماكسويل للتقابل إلى مبادئ كاستيليانو للطاقة، ومن مبرهنات موهر لمساحة العزوم إلى توزيع العزوم لهاردي كروس—يتتبع السرد كيف تبلورت البصيرة المفاهيمية تدريجياً في طرائق عامة، وبلغت إطاراً موحداً لتحليل المنشآت المعقدة.

وشهدت المرحلة الثانية، التي بدأت في خمسينيات القرن العشرين، تطور هذه الطرائق الكلاسيكية إلى صيغ مصفوفية قابلة للتنفيذ بالحاسوب، وصولاً إلى طريقة العناصر المحدودة. وما يجعل هذا السرد جذاباً هو كشف الاستمرارية تحت ما يبدو ثورة. فلم تنشأ طريقة العناصر المحدودة قطيعةً مع النظرية الكلاسيكية، بل امتداداً منهجياً لها. وترجع مصفوفات صلابة العناصر وإجراءات التجميع ومبادئ الطاقة مباشرة إلى مفاهيم طورها ماكسويل وكاستيليانو ومعاصروهما. لقد غيّر الحاسوب ما يمكن حسابه، لا ما كان يُحسب.

وهكذا يتقدم الفصل في قسمين رئيسين. يبحث الأول طرائق الحساب اليدوي، من عوارض نافييه المستمرة مروراً بمبادئ الطاقة وشروط التوافق، وصولاً إلى توزيع العزوم لهاردي كروس—ذروة الحساب اليدوي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويبحث الثاني كيف مكنت الحواسيب الرقمية من إعادة الصياغة بطرائق مصفوفية: طريقة الصلابة المباشرة في بوينغ، وتوسيع كلوف لها إلى الأوساط المتصلة بوصفها طريقة العناصر المحدودة، والنضج السريع للتحليل الإنشائي الحاسوبي حتى أصبح النموذج السائد في الممارسة المعاصرة.

وبذلك يتم هذا الفصل القوس التاريخي الذي بدأ بتجارب غاليليو في المقاومة والحركة، ومر بالصيغ الكبرى لميكانيكا الأوساط المتصلة، وبلغ ميلاد التحليل الإنشائي الحاسوبي الحديث—وهو تخصص حقق أخيراً الصلة المتكاملة بين النظرية والحساب والتصميم.

لنبحث الآن كيف تحقق هذا التركيب. لكن لنبدأ أولاً بأصل مصطلح «الهندسة الإنشائية».

11.2 اشتقاق مصطلح الهندسة الإنشائية

يسبق المحتوى التقني الحديث للهندسة الإنشائية اسمها الحديث بزمن طويل. ففي معظم القرن الثامن عشر وأوائل التاسع عشر، كان ما نجمعه اليوم تحت «التحليل الإنشائي» و«الهندسة الإنشائية» موزعاً بين الهندسة المدنية والعمارة والاستاتيكا ومقاومة المواد، ثم المرونة لاحقاً. وخلال القرن التاسع عشر، شجعت زيادة أحجام المنشآت والمواد الجديدة (الحديد ثم الصلب) واتساع مجموعة الأدوات التحليلية (الاستقرار ونظرية المرونة وطرائق الطاقة والاستاتيكا البيانية، وأخيراً الطرائق المصفوفية) تخصصاً أوضح داخل الهندسة المدنية. ولا يعكس هذا التخصص في الإنجليزية فعل «صوغ» واحداً، بل استقراراً تدريجياً للمصطلحات في الاستعمال المهني والمنشور.

بالنسبة إلى الاستعمال الإنجليزي، تأتي أكثر التواريخ المرجعية قابلية للدفاع من قاموس أكسفورد الإنجليزي. فهو يسجل العبارة الاسمية *structural engineering* بأقدم شاهد عام 1859 (*structural engineering, n.* n.d.)، والاسم المهني *structural engineer* بأقدم شاهد عام 1867 (*structural engineer, n.* n.d.). وهذا الترتيب معقول تاريخياً: يشيع اسم النشاط قبل اللقب المهني. وبحلول أوائل القرن العشرين، توطد اللقب مؤسسياً؛ ففي المملكة المتحدة ترجع الهيئة المعروفة اليوم باسم مؤسسة المهندسين الإنشائيين أصلها إلى عام 1908، وتذكر اعتماد اسمها الحالي عام 1922 (*Our history* 2026). ولا يمثل الاعتماد المؤسسي أول ظهور للكلمات، لكنه علامة مهمة على الاستقرار المهني.

وتبين الممارستان الفرنسية والألمانية التخصص الكامن نفسه، لكن بمسارين لغويين مختلفين. ففي الفرنسية، صيغ العمل الذي ستسميه الإنجليزية لاحقاً «الهندسة الإنشائية» تاريخياً بعبارات مثل *calcul des constructions* و*résistance des matériaux*، و*théorie des constructions*، لا بلقب مهني واحد يوازي "structural engineer" تماماً. كما شكل السياق المؤسسي الهوية المهنية بقوة (ولا سيما المدارس العليا والهيئات)، فعُبّر عن الأدوار الهندسية بألقاب موجهة إلى الهندسة المدنية والبناء. وفي السياقات الناطقة بالألمانية، توجد تسمية مميزة واسعة الاستعمال هي *Baustatik* (حرفياً «استاتيكا البناء»)، تؤدي دور مصطلح شامل يضم النظرية وطرائق الحساب وتطبيقهما على المنشآت الحاملة الفعلية (Kurrer, 2008). ويشدد كورر على اتساع المجال وعلى المشكلة اللغوية معاً: إذ تعاني اللغات المختلفة في تسمية مجال يجمع النظرية والحساب والممارسة تسمية دقيقة وموجزة؛ وفي الألمانية أصبح *Baustatik* المصطلح المقبول على نطاق واسع (Kurrer, 2008).

ويُفهم مصطلح *التحليل الإنشائي* على أفضل وجه بوصفه تسمية منهجية لا لقباً مهنياً. فقد ظهر النشاط

نفسه تاريخياً تحت عناوين أقدم (مثل «الاستاتيكا» أو «نظرية المنشآت»)، ثم أصبح لاحقاً عبارة معيارية تسمي الفعل التحليلي صراحةً: تعيين القوى الداخلية والتشوهات واستقرار الأنظمة الحاملة. ولذلك ينبغي عد «المهندس الإنشائي» و«التحليل الإنشائي» نتاجين للتمايز المهني في القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين: يسمي الأول هوية الممارس في الإنجليزية، ويسمي الثاني مجموعة متزايدة التنظيم من الإجراءات التحليلية ذات جذور فكرية أقدم بكثير من المصطلحات الحديثة.

11.3 التطورات المبكرة: العوارض غير محددة استاتيكياً

في حين هيمنت نظريات الانحناء على المشهد العلمي في القرن الثامن عشر (الفصل 7)، هيمن تحليل العوارض غير محددة استاتيكياً على القرن التاسع عشر. وقد حفز نشوء عصر السكك الحديدية والبناء المعدني هذا التطور مباشرةً، إذ قاد بطبيعته إلى انتشار العوارض المستمرة والمساند المثبتة (encastré).

يتمثل التحدي الأساسي للمنشآت غير محددة استاتيكياً في أن معادلات الاتزان وحدها لا تكفي لتعيين جميع القوى وردود الأفعال المجهولة. ويجب اشتقاق معادلات إضافية من شروط التوافق—أي اشتراط بقاء المنشأ المشوه متصلاً ومستنداً على نحو صحيح. ويمثل إدراك هذا التمييز والتطوير المنهجي لطرائق استثماره أحد الإنجازات الفكرية الكبرى للميكانيكا الإنشائية في القرن التاسع عشر.

11.3.1 نافييه (1785–1836): أول معالجة منهجية

أوجد نشوء البناء الحديدي واتساع شبكات السكك الحديدية في عشرينيات القرن التاسع عشر مسائل عملية ملحة لم تعالجها الميكانيكا الكلاسيكية. فكثيراً ما استعملت الجسور الحديدية وجسور السكك الحديدية عوارض مستمرة تمتد فوق عدة مساند—وهي تشكيلات لا يمكن تحليلها بمعادلات الاتزان وحدها. وفي هذا السياق وسع كلود لوي نافييه، الأستاذ في مدرسة الجسور والطرق، عمله السابق على العوارض المرنة ليتناول ما ربما كان أول معالجة صريحة لعدم التحديد الإنشائي.

في طبعة عام 1826 من *Leçons* (Navier, 1826, p. 33)، يمكن القول إن نافييه أصبح أول من حلل عارضة غير محددة استاتيكياً تحليلاً منهجياً—وبالتحديد عارضة على ثلاثة مساند. ووسعت طبعته الثانية لعام 1833 (Navier, 1833) هذه المعالجة إلى التشكيلات *encastré* (المثبتة) وتشكيلات العوارض المستمرة الأكثر تعقيداً.

يتضح إدراك نافييه للمسألة الأساسية في قوله:

> عندما يحمل حملاً أكثر من قضيبين مائلين في المستوى الرأسي نفسه، أو أكثر من ثلاثة قضبان مائلة لا تقع في المستوى نفسه، تترك شروط الاتزان القوى المفروضة في اتجاه كل قضيب غير معينة ضمن حدود معينة.
>
> Navier, 1826 Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines

جمعت مقاربة نافييه معادلات الاتزان بشروط التوافق الهندسي المشتقة من المعادلة التفاضلية للمنحنى المرن. وأدرك أن انحراف العارضة المستمرة فوق مساند متعددة يجب أن ينعدم عند كل مسند وسيط، مما يوفر المعادلات الإضافية اللازمة لتعيين ردود الأفعال الزائدة. ومع أن طريقته اختصت بالعوارض المستمرة،

فقد أرست المبدأ الأساسي الذي سيقود جميع التطورات اللاحقة في القرن التاسع عشر: يُحل عدم *التحديد الاستاتيكي باستدعاء توافق التشوهات*.

11.3.2 كلابيرون (1799–1864): معادلة العزوم الثلاثة

> *للتفاصيل التحليلية، انظر* §25.3

.

جاء تقدم كبير عام 1857 حين نشر بنوا كلابيرون «مبرهنة العزوم الثلاثة» الشهيرة (Clapeyron, 1857). وقدمت هذه النتيجة الأنيقة علاقة مباشرة بين عزوم الانحناء عند ثلاثة مساند متتالية لعارضة مستمرة، وألغت الحاجة إلى العمل مباشرة بالمعادلة التفاضلية للمنحنى المرن.

لعارضة مستمرة ذات بحرين طولهما ℓ_1 وℓ_2 بين ثلاثة مساند متتالية بعزوم M_1 وM_2 وM_3، تأخذ معادلة كلابيرون الصورة:

$$M_1\ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3\ell_2 = -6\left(\frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2}\right)$$

حيث يمثل A_1 وA_2 مساحتي مخططي M/EI للبحرين بسيطي الاستناد تحت الحمل المطبق.

مثلت معادلة العزوم الثلاثة اختراقاً مفاهيمياً. فبدلاً من حل معادلات تفاضلية ذات شروط حدية متعددة، استطاع المهندسون كتابة معادلات جبرية مباشرة لعزوم المساند المجهولة. ولعارضة مستمرة فوق n مساند، أعطى ذلك $n-2$ معادلة خطية آنية—وهي مسألة قابلة للحل بسهولة بطرائق الحساب المتاحة في منتصف القرن التاسع عشر (Timoshenko, 1953).

أصبحت مبرهنة كلابيرون الطريقة المعيارية لتحليل العوارض المستمرة، ودُرست على نطاق واسع في كليات الهندسة قرابة قرن. وامتد تأثيرها إلى أبعد كثيراً من تطبيقها المباشر: فقد برهنت أن الطرائق الجبرية المنهجية تستطيع أن تحل محل تحليل كل حالة على حدة، ومهدت الطريق نحو الطرائق المصفوفية العامة في القرن العشرين.

11.4 الانتقال إلى الطرائق العامة

مع أن مبرهنة كلابيرون حلت مسألة العارضة المستمرة بأناقة، فقد ظلت خاصة بذلك النوع الإنشائي. وبقي السؤال الأوسع: هل يمكن ابتكار طريقة عامة تنطبق على أي منشأ غير محدد استاتيكياً—إطاراً كان أم قوساً أم جمالوناً—بصرف النظر عن تشكيله؟ ستنشأ الإجابة من خلال تطوير طرائق الطاقة ومبدأ العمل الافتراضي، وهما مفهومان سيوحدان معالجة المنشآت غير محددة استاتيكياً ضمن إطار نظري مشترك.

11.4.1 ماكسويل (1831–1879): مبرهنة التقابل

> *للتفاصيل التحليلية، انظر* §24.2.2

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.

أرسى جيمس كليرك ماكسويل الأساس النظري لطريقة القوى في بحثه اللافت لعام 1864 *On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames* (Maxwell, 1864c). ومع أن ماكسويل يُذكر أساساً بإسهاماته الثورية في نظرية الكهرومغناطيسية، كان عمله في الميكانيكا الإنشائية عميقاً بالقدر نفسه. ونشأ اهتمامه بالمسائل الإنشائية من مقاربته المميزة: البحث عن الوحدة الرياضية بين ظواهر فيزيائية تبدو متباعدة.

تنص مبرهنة ماكسويل للتقابل على أنه في منشأ مرن خطياً، تساوي الإزاحة عند النقطة i الناتجة من حمل وحدي عند النقطة j الإزاحة عند النقطة j الناتجة من حمل وحدي عند النقطة i:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

لهذه النتيجة التي تبدو بسيطة آثار عميقة. فهي تعني أن مصفوفة المطاوعة (التي تربط القوى بالإزاحات) يجب أن تكون متناظرة، وهي خاصية أصبحت أساسية في التحليل الإنشائي. واستعمل ماكسويل هذا المبدأ لاشتقاق إجراءات منهجية لحساب الانحرافات في الجمالونات والإطارات. وأتاحت مبرهنته الحساب المنهجي لمعاملات المطاوعة، فحولت تحليل المنشآت غير محددة استاتيكياً من فن يعتمد على الحدس إلى علم قائم على المنهج.

وقدم بحث ماكسويل لعام 1864 أيضاً ما يسمى اليوم مبرهنة ماكسويل لحساب الانحرافات باستعمال الأحمال الوهمية—وهي تقنية سيعيد آخرون اكتشافها وتعميمها بصورة مستقلة. واستبق ترميزه ومقاربته المنهجية الطرائق المصفوفية التي ستنشأ بعد قرابة قرن (Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

11.4.2 موهر (1835–1918): الطرائق الهندسية والتناظرات

قدم كريستيان أوتو موهر، الأستاذ في معهد دريسدن التقني ثم معهد شتوتغارت التقني، إسهامات أساسية كثيرة في الميكانيكا الإنشائية بين 1868 و1906. وقد وفر عمله في الطرائق البيانية والتفسير الهندسي للسلوك الإنشائي أدوات عملية قوية للتحليل.

دائرة موهر للإجهاد مع أنها لا ترتبط مباشرة بالمنشآت غير محددة استاتيكياً، أصبحت دائرة موهر (1882) لتمثيل حالات الإجهاد واحدة من أكثر الأدوات استعمالاً في الميكانيكا (Mohr, 1882a). ويتيح الإنشاء الهندسي الأنيق تصور الإجهادات الرئيسة وإجهاد القص الأقصى مباشرةً—وهما مفهومان أساسيان لفهم الانهيار الإنشائي.

مبرهنتا مساحة العزوم

> *للتفاصيل التحليلية، انظر* §22.3.4

قدمت مبرهنتا موهر لمساحة العزوم (1868) طريقة هندسية لحساب الميول والانحرافات في العوارض (Mohr, 1868):

المبرهنة الأولى: يساوي تغير الميل بين نقطتين على منحنى مرن المساحة تحت مخطط M/EI بين النقطتين.

المبرهنة الثانية: يساوي الانحراف الرأسي لنقطة عن المماس عند نقطة أخرى العزم الأول لمساحة مخطط M/EI حول النقطة الأولى.

أتاحت هاتان المبرهنتان، المشتقتان من معادلة العارضة الأساسية $d^2y/dx^2 = M/EI$، للمهندسين تجاوز التكامل والعمل مباشرة بالمساحات ومراكزها—وهي حسابات يمكن إجراؤها بسهولة بيانياً أو بحساب بسيط.

طريقة التناظر

للتفاصيل التحليلية، انظر §22.3.4.7

طور موهر أيضاً تناظر *الحمل المرن* أو *العارضة المترافقة*، الذي يحول مسائل الانحراف إلى مسائل عزوم مكافئة. فبمعاملة مخطط M/EI حملاً على عارضة مترافقة، يمكن إيجاد انحرافات العارضة الحقيقية وميولها من قوى القص والعزوم في العارضة المترافقة—وهو تحويل أنيق بسط الحسابات كثيراً (Timoshenko, 1953).

11.4.3 كاستيليانو (1847–1884): طرائق الطاقة

للتفاصيل التحليلية، انظر §47.5

قدم ألبرتو كاستيليانو، وهو مهندس سكك حديدية إيطالي، إسهاماته الأساسية وهو ما زال طالباً في معهد البوليتكنيك في تورينو. وقد أرست أطروحته للدكتوراه، المنشورة عام 1873 والموسعة لاحقاً في مؤلفه لعام 1879 (Castigliano, 1879)، طرائق الطاقة أداة قوية للتحليل الإنشائي. وكان الدافع المباشر لعمل كاستيليانو حاجات تصميم جسور السكك الحديدية العملية، حيث كان التحليل السريع للتشكيلات الإنشائية المعقدة ضرورياً.

مبرهنة كاستيليانو الأولى تساوي المشتقة الجزئية لطاقة الانفعال الكلية بالنسبة إلى إزاحة القوة المطبقة المناظرة:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

ومع أهمية هذه المبرهنة النظرية، كان تطبيقها العملي أقل من مبرهنته الثانية.

مبرهنة كاستيليانو الثانية تساوي المشتقة الجزئية لطاقة الانفعال الكلية بالنسبة إلى قوة الإزاحة المناظرة:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

أصبحت هذه النتيجة، التي تسمى أحياناً مبرهنة الحمل الوحدي، أداة العمل الرئيسة في حساب الانحرافات. ولمنشأ طاقة انفعاله:

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{N^2}{2EA}\,dx + \int \frac{V^2}{2GA}\,dx$$

يمكن إيجاد الانحراف عند أي نقطة وفي أي اتجاه بالاشتقاق بالنسبة إلى حمل مطبق (أو وهمي) في ذلك الاتجاه.

قدمت مبرهنة كاستيليانو طريقة مباشرة للمنشآت غير محددة استاتيكياً: يمكن معاملة القوى الزائدة على أنها مجاهيل، وتوفر شروط التوافق (وجوب انعدام الانحرافات عند نقاط معينة) المعادلات اللازمة. ونصت

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

هذه المقاربة، المعروفة بطريقة الشغل الأصغر، على أن القوى الزائدة تتوزع بحيث تصغر طاقة الانفعال الكلية. وقد قدر مهندسو السكك الحديدية هذه الطريقة خصوصاً لقابليتها المنهجية للتطبيق على تشكيلات الجسور المعقدة (Charlton, 1982).

11.4.4 مولر–بريسلاو (1851–1925): التنظيم وخطوط التأثير

> *للتفاصيل التحليلية، انظر §28.3*

جمع هاينريش مولر–بريسلاو، الأستاذ في الجامعة التقنية في برلين شارلوتنبورغ، المقاربات المختلفة للمنشآت غير محددة استاتيكياً ونظمها في مؤلفه الضخم *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre* (Müller-Breslau, 1886).

الصياغة العامة لطريقة القوى عرض مولر–بريسلاو طريقة القوى في أعم صورها. ولمنشأ ذي n درجات من عدم التحديد الاستاتيكي، يكون الإجراء كما يأتي:

الخطوة 1: اختيار n من القوى الزائدة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ وإزالة القيود المناظرة، مما ينشئ «منشأً أولياً» محدداً استاتيكياً.

الخطوة 2: حساب الإزاحات δ_{ij} عند موضع القوة الزائدة i الناتجة من قيمة وحدية للقوة الزائدة j، إضافة إلى الإزاحات δ_{i0} الناتجة من الأحمال المطبقة.

الخطوة 3: فرض التوافق—يجب أن تطابق الإزاحات عند مواضع القوى الزائدة شروط الاستناد الفعلية:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

حيث Δ_i إزاحات المساند المعلومة (وغالباً ما تكون صفراً).

تعين هذه المنظومة المكونة من n معادلة في n مجهول جميع القوى الزائدة. والطريقة منهجية وعامة وتنطبق على أي منشأ.

خطوط التأثير طور مولر–بريسلاو أيضاً نظرية خطوط التأثير—وهي مخططات تبين كيف تتغير قوة أو عزم معين مع عبور حمل وحدي للمنشأ (Müller-Breslau, 1887). وينص مبدؤه لإنشاء خطوط التأثير على أن خط التأثير لقوة أو عزم معين له الشكل نفسه لمنحنى الانحراف الناتج عندما تُعطى تلك القوة أو ذلك العزم قيمة وحدية ويُسمح للمنشأ بالتشوه.

وفر هذا التفسير الهندسي للمهندسين طرائق بيانية قوية لتحليل المنشآت تحت الأحمال المتحركة—وهو أمر حاسم لتصميم جسور السكك الحديدية، التحدي الهندسي المهيمن في أواخر القرن التاسع عشر (Timoshenko, 1953 PDF; Charlton, 1982).

11.4.5 طريقة القوى: التوافق والمطاوعة

> *للتفاصيل التحليلية، انظر الفصل 25*

شكلت إسهامات ماكسويل وموهر وكاستيليانو ومولر–بريسلاو، رغم تطويرها بصورة مستقلة إلى حد ما، المكونات الأساسية لما سيصبح إطاراً تحليلياً موحداً. فقد أرسى ماكسويل مبرهنة التقابل ومفهوم معاملات المطاوعة؛ وقدم موهر طرائق هندسية لحساب الانحرافات؛ وبرهن كاستيليانو قوة مبادئ الطاقة في تعيين الإزاحات وشروط التوافق؛ وبدأ مولر–بريسلاو عمل التنظيم المنهجي. وما نشأ من هذه البصائر المتباعدة كان طريقة عامة تنطبق على أي منشأ غير محدد استاتيكياً—وهي الطريقة التي ستعرف باسم طريقة القوى، أو طريقة المطاوعة بديلاً.

يعرض هذا القسم طريقة القوى لا بوصفها اختراع فرد واحد، بل تركيباً للتطورات النظرية المبينة أعلاه. وبحلول مطلع القرن العشرين، كانت هذه الطريقة قد تبلورت في إجراء منهجي يُدرّس في كل كلية هندسة. وقبل بحث إرثها وقيودها، من الضروري فهم المفاهيم الأساسية والبنية المنطقية التي وحدت بصائر هؤلاء الرواد في إطار تحليلي متماسك.

11.4.6 المفاهيم الأساسية والإجراء

قبل بحث التطور التاريخي، من الضروري فهم المنطق الأساسي لطريقة القوى، التي تعكس التسلسل المعتاد للتحليل الإنشائي.

درجات عدم التحديد الاستاتيكي

للتفاصيل التحليلية، انظر §19.1.4

يكون المنشأ غير محدد استاتيكياً عندما لا تكفي معادلات الاتزان وحدها لتعيين جميع القوى المجهولة. وتمثل درجة عدم التحديد الاستاتيكي n عدد المعادلات الإضافية اللازمة بعد معادلات الاتزان. مثلاً:

- عارضة بسيطة الاستناد: محددة ($n = 0$)؛
- عارضة مثبتة الطرفين: غير محددة و$n = 3$ (ردا فعل عزميان ورد فعل رأسي واحد زائدة)؛
- عارضة مستمرة فوق m مساند: غير محددة و$n = m - 2$؛
- إطار أو جمالون مغلق: يعتمد عدم التحديد على عدد الأعضاء والعقد وشروط الاستناد.

إجراء طريقة القوى تعامل طريقة القوى قوى أو ردود أفعال معينة بوصفها المجاهيل الرئيسة—وبالتحديد القوى الزائدة وعددها n. ويكون الإجراء المنهجي كما يأتي:

الخطوة 1: اختيار القوى الزائدة. اختر n من القوى (ردود أفعال أو قوى داخلية) بوصفها زوائد. والاختيار اعتباطي لكنه يؤثر في الكفاءة الحسابية. نرمز إليها بـ$X_1, X_2, \ldots, X_n$.

الخطوة 2: إنشاء المنشأ الأولي. أزل القيود المناظرة للقوى الزائدة، منشئاً منشأً أولياً محدداً استاتيكياً يمكن تحليله بالاتزان وحده. ويعني ذلك غالباً إزالة مساند أو قطع أعضاء أو إدخال مفاصل.

الخطوة 3: تحليل المنشأ الأولي. احسب الإزاحات عند مواضع القوى الزائدة الناتجة من:

- الأحمال المطبقة: الإزاحات δ_{i0} عند موضع القوة الزائدة i؛
- القيم الوحدية لكل قوة زائدة: معاملات المطاوعة δ_{ij} = الإزاحة عند الموضع i الناتجة من قوة وحدية عند الموضع j.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخطوة 4: فرض التوافق. يجب أن يكون المنشأ الفعلي متصلاً ومستنداً على نحو صحيح. ولذلك يجب أن تساوي الإزاحات عند مواضع القوى الزائدة (المحسوبة بتراكب آثار الأحمال وآثار القوى الزائدة) شروط القيود الفعلية:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

حيث Δ_i إزاحات المساند المعلومة (وتكون صفراً عادة للمساند الصلبة).

الخطوة 5: حل القوى الزائدة. تعين هذه المنظومة المكونة من n معادلة في n مجهول جميع القوى الزائدة X_j.

الخطوة 6: التراكب. بعد معرفة القوى الزائدة، تنتج سائر القوى والعزوم من تراكب حل المنشأ الأولي وآثار القوى الزائدة.

لماذا «طريقة المطاوعة»؟ تسمى الطريقة طريقة المطاوعة لأنها تعمل بمعاملات المطاوعة δ_{ij} التي تربط القوى بالإزاحات. وتشكل مصفوفة المطاوعة $\mathbf{F} = [\delta_{ij}]$ محور الصياغة. وهذه المصفوفة متناظرة (كما برهن ماكسويل) وموجبة التعيين للمنشآت المرنة خطياً.

التفسير الفيزيائي تجسد طريقة القوى مبدأ أساسياً: *توزع الطبيعة القوى بحيث تحقق الاتزان والتوافق* معاً. يتحقق الاتزان في كل مرحلة (من خلال اختيار المنشأ الأولي)، بينما يوفر التوافق القيود الإضافية التي تعين كيفية توزع القوى بين المسارات الزائدة. وهكذا تفصل الطريقة المتطلبين الأساسيين للتحليل الإنشائي—الاتزان والتوافق—وتعالجهما تباعاً بدلاً من معالجتهما آنياً.

أُرست الأسس النظرية لهذه المقاربة أساساً بأعمال ماكسويل وموهر وكاستيليانو ومولر–بريسلاو، الذين نبحث إسهاماتهم الآن.

11.4.7 طريقة القوى: الملخص والإرث

بحلول عام 1900، كانت طريقة القوى قد اكتملت وتوسع تدريسها. وكانت مزاياها واضحة: منهجية وعامة (تنطبق على أي منشأ غير محدد استاتيكياً)، قائمة على مبادئ فيزيائية سليمة (توافق التشوهات)، تعطي حلولاً دقيقة للمنشآت المرنة خطياً، وقابلة للتنفيذ بأدوات الحساب المتاحة قبل عصر الحاسوب.

وكان قيدها الرئيس حسابياً: فقد تطلبت معاملات المطاوعة δ_{ij} حسابات واسعة، وكان حل منظومات بأكثر من بضع معادلات مضنياً. وأصبحت الطريقة غير عملية للمنشآت ذات العدد الكبير من الزوائد (الإطارات الكبيرة والعوارض المستمرة ذات البحور الكثيرة). فعارضة مستمرة فوق عشرة مساند تتطلب حل ثماني معادلات آنية؛ ويمكن لإطار متعدد الطوابق أن يولد بسهولة عشرين مجهولاً أو أكثر.

وسيدفع هذا القيد العملي إلى تطوير مقاربات بديلة—طريقة الإزاحة وطريقة الصلابة المنحدرة منها—ستهيمن على التحليل الإنشائي في القرن العشرين بإعادة تصور جوهرية للكميات التي ينبغي معاملتها بوصفها مجاهيل.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11.5 طريقة الإزاحة: من النظرية إلى التطبيق

تمثل طريقة الإزاحة تحولاً جوهرياً في المنظور قياساً إلى طريقة القوى. فبدلاً من معاملة القوى مجاهيل وفرض التوافق، تعامل طريقة الإزاحة الإزاحات (وبالتحديد دورانات العقد وانتقالاتها) بوصفها مجاهيل وتفرض الاتزان. وقد ثبت أن هذا العكس، رغم دقته المفاهيمية، ثوري حسابياً.

وكانت البصيرة الرئيسة أن اختيار المجاهيل يؤثر جوهرياً في الكفاءة الحسابية. لنتصور إطاراً بوابياً بسيطاً: تتطلب طريقة القوى حل ردود الأفعال الزائدة عند المساند (قوى خارجية)، بينما تحل طريقة الإزاحة مباشرة دورانات العقد (إزاحات داخلية). ولإطار ذي عقد صلبة، تنطوي هذه المقاربة القائمة على الإزاحة عادة على عدد أقل من المجاهيل—وأحياناً أقل بكثير.

تكشف تطور طريقة الإزاحة عبر مراحل متعددة امتدت من ستينيات القرن التاسع عشر إلى ثلاثينيات القرن العشرين، وبلغت ذروتها في طريقة توزيع العزوم لهاردي كروس التي ستهيمن على التحليل الإنشائي ثلاثة عقود.

11.5.1 الأسس النظرية: صيغ الصلابة المبكرة

ظهرت البذور المفاهيمية لطريقة الإزاحة في عدة أعمال من منتصف القرن التاسع عشر، لكنها لم تزدهر بالكامل حتى أوائل القرن العشرين.

كليبش (1862): تحليل الجمالونات بالصلابة عرض ألفريد كليبش، أستاذ الفيزياء النظرية في غوتينغن، عام 1862 في مؤلفه المؤثر *Theorie der Elasticität fester Körper* (Clebsch, 1862a) خوارزمية أنيقة لتحليل الجمالونات المفصلية ثلاثية الأبعاد. وقدم كليبش لكل عقدة ثلاث مركبات إزاحة ديكارتية مجهولة. ويربط القضيب النموذجي الواصل بين عقدتين ست مركبات إزاحة، وفي منشأ مستقر تنتج منظومة المعادلات الكاملة من الاتزان والهندسة وقانون هوك.

كانت صياغة كليبش، في جوهرها، صورة مبكرة لطريقة الصلابة المباشرة—فقد عمل بصلابات الأعضاء لا بمطاوعاتها، وجمعها من خلال التوافق الهندسي والاتزان. وعندما نشر باريه دي سان-فنان ترجمة فرنسية ذات تعليقات موسعة عام 1883 (Saint-Venant, 1855c)، لاحظ أن هذه المقاربة ترجع إلى مذكرات محاضرات نافييه لعام 1826، حيث حلل نافييه تحليل قوة على امتداد ثلاثة قضبان واقعة في مستوى واحد ببحث التشوهات (Navier, 1826, p. 33).

وادعى سان-فنان أنه عرض في مذكرات محاضراته لعام 1838 *المبدأ العام لتلك الطريقة لتعيين شدات ردود الأفعال وعزومها*، وأنه برهن عام 1843 أن *لهذه الأنواع من المسائل دائماً عدد المعادلات نفسه لعدد المجاهيل عندما تنحني أعضاء المنشأ أو تتمدد أو تنضغط أو تلتوي*. ومع أن الأسبقية التاريخية ما زالت غير واضحة إلى حد ما، كان الإطار المفاهيمي يتشكل بوضوح بحلول منتصف القرن.

ماندرلا (1880): الحلول التكرارية قدم هاينريش ماندرلا، وهو مساعد شاب في ميونخ، عام 1880 طريقة لتحليل الإطارات ذات العقد الصلبة تعمل مباشرة بدورانات العقد بوصفها مجاهيل (Kurrer, 2003). ولم يصغ ماندرلا معادلات الاتزان بدلالة الدورانات فحسب، بل اقترح أيضاً إجراء حل تكرارياً—استباقاً بعيد النظر للطرائق التي ستهيمن على التحليل الإنشائي بعد خمسين عاماً. ولم يحظ عمله باعتراف فوري واسع، لكنه شكل صلة مفاهيمية مهمة في التطور. ومنح ماندرلا جائزة خاصة من معهد ميونخ التقني تقديراً لإسهاماته المبتكرة.

موهر (1892): النشر والتطوير عرض أوتو موهر، في بحثه لعام 1892 عن الإجهادات الثانوية في الجمالونات (Mohr, 1892)، نسخة معدلة من مقاربة ماندرلا عرّفت المهندسين الألمان بالطريقة على نطاق أوسع. وأوضحت معالجة موهر التفسير الفيزيائي: دورانات العقد هي درجات الحرية الطبيعية للمنشآت ذات الوصلات الصلبة، ويوفر الاتزان عند العقد المعادلات الحاكمة. وبرهن حساب العزوم الثانوية في الجمالونات، رغم كونه تقريباً (يفترض أن آثار الانحناء لا تؤثر كثيراً في إزاحات العقد في الاتجاهات الإحداثية)، الفائدة العملية للصياغة القائمة على الإزاحة.

11.5.2 طريقة الميل–الانحراف: الصياغة المنهجية

للتفاصيل التحليلية، انظر §27.2

نشأت طريقة الميل–الانحراف في أوائل القرن العشرين بوصفها أول مقاربة كاملة ومنهجية قائمة على الإزاحة للتحليل الإنشائي. وقد عبرت الطريقة عن عزوم أطراف الأعضاء مباشرة بدلالة دورانات العقد، وفرضت الاتزان عند كل عقدة، فأعطت منظومة معادلات للدورانات المجهولة.

بنديكسن (1914): التطور الأوروبي نشر أكسل بنديكسن، وهو مهندس ألماني، عام 1914 أحد أقدم العروض المنهجية لما سيصبح طريقة الميل–الانحراف (Bendixen, 1914). ولعارضة منشورية طولها L ودورانا طرفيها θ_A وθ_B وإزاحتها النسبية بين الطرفين Δ، اشتق بنديكسن تعبيري عزمي الطرفين:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^{FEM} \tag{11.1}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^{FEM} \tag{11.2}$$

حيث $\psi = \Delta/L$ دوران الوتر، وM_{AB}^{FEM} وM_{BA}^{FEM} عزما الطرفين المثبتين الناتجان من تحميل العضو.

وفرت معادلات الميل–الانحراف هذه علاقة مباشرة بين عزوم أطراف الأعضاء (التي يجب أن تحقق الاتزان) وإزاحات العقد (المجاهيل). وبكتابة معادلات الاتزان عند كل عقدة—أي وجوب مساواة مجموع عزوم أطراف الأعضاء الملتقية عند عقدة لأي عزوم عقدية مطبقة—تنتج منظومة معادلات لدورانات العقد المجهولة.

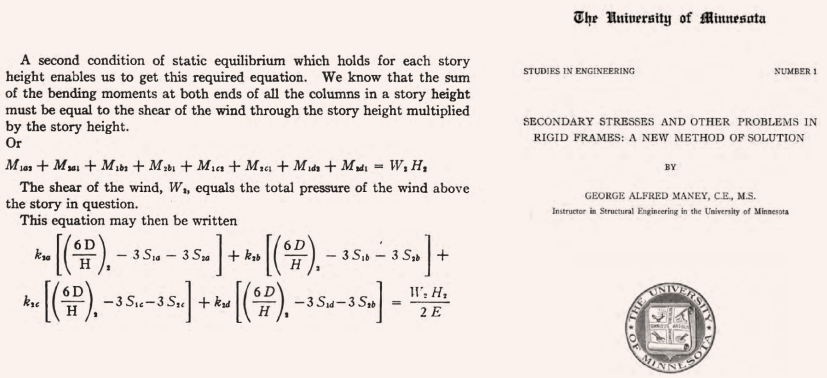
ماني (1915): التنظيم الأمريكي طور جورج أ. ماني، الأستاذ في جامعة مينيسوتا، طريقة الميل–الانحراف ونظمها بصورة مستقلة في بحثه الفارق لعام 1915 (Maney, 1915). وافتتح عمله ببيان واضح للحاجة العملية (الشكل 11.1):

> مع ازدياد حجم المنشآت الحديثة من الصلب والخرسانة وتعقيدها، ازدادت الأهمية العملية النسبية لنظرية الإجهادات غير المحددة كثيراً، وأصبح من المهم خصوصاً تطوير طرائق عملية تستميل مصمم المكتب. ومن وجهة نظر نظرية بحتة، ظل مجال الإجهادات غير المحددة لسنوات كثيرة مجالاً مدروساً جيداً إلى حد بعيد، لكن كثيراً من طرائق التحليل المعيارية تترك الكثير مما يُرجى بوصفها طرائق عمل للتصميم المكتبي؛ ويُعتقد أن المهنة سترحب بأي نظام معالجة يختصر العمل التفصيلي ويخفف الصعوبات الرياضية البحتة.
>
> Maney, 1915 *"Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution"*

تعبر الطريقة عن العزوم على جانبي كل مسند بدلالة صلابة العنصر المجاور وزوايا الدوران (المجهولة). ثم تُكتب معادلات الاتزان (بما فيها «تأثيرات الطرفين المثبتين») لكل عقدة، فتنتج منظومة معادلات خطية

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بدلالة دورانات العقد المجهولة θ. وبعد تعيين دوران كل عضو، يمكن التعويض بسهولة والحصول على العزوم. ومن الواضح أنها طريقة إزاحة تستبق الصيغ المصفوفية التي ستنشأ بعد عقود.



A second condition of static equilibrium which holds for each story height enables us to get this required equation. We know that the sum of the bending moments at both ends of all the columns in a story height must be equal to the shear of the wind through the story height multiplied by the story height.
Or

$$M_{1a2} + M_{2a1} + M_{1b2} + M_{2b1} + M_{1c2} + M_{2c1} + M_{1d2} + M_{2d1} = W_2 H_2$$

The shear of the wind, W_2, equals the total pressure of the wind above the story in question.
This equation may then be written

$$k_{2a}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1a} - 3S_{2a}\right] + k_{2b}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1b} - 3S_{2b}\right] +$$
$$k_{2c}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1c} - 3S_{2c}\right] + k_{2d}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1d} - 3S_{2d}\right] = \frac{W_2 H_2}{2E}$$

The University of Minnesota

STUDIES IN ENGINEERING — NUMBER 1

SECONDARY STRESSES AND OTHER PROBLEMS IN RIGID FRAMES: A NEW METHOD OF SOLUTION

BY

GEORGE ALFRED MANEY, C.E., M.S.
Instructor in Structural Engineering in the University of Minnesota

شكل 11.1: صياغة ماني لعام 1915 لطريقة الميل–الانحراف (Maney, 1915)

جعل عرض ماني الواضح وأمثلته المحلولة الطريقة متاحة للمهندسين الممارسين. وأدرك أنه يمكن في منشآت كثيرة إهمال انتقالات العقد أو معالجتها منفصلة، مما يبسط التحليل إلى حل دورانات العقد وحدها. وثبتت كفاءة نسخة *الميل–الانحراف* من دون *انزياح جانبي* خصوصاً للعوارض المستمرة والإطارات أحادية الطابق (Maney, 1915).

المزايا والقيود قدمت طريقة الميل–الانحراف مزايا كبيرة قياساً إلى طريقة القوى: مجاهيل أقل للإطارات النموذجية (دورانات العقد فقط بدلاً من جميع القوى الزائدة)، وصياغة منهجية تُجمع فيها خواص الأعضاء بالاتزان بدلاً من التوافق، وامتداد طبيعي إلى المنشآت ذات العقد الصلبة، وتعيين مباشر للعزوم عند جميع المواضع الحرجة.

ومع ذلك ظلت تتطلب حل منظومة معادلات آنية—وهو عبء حسابي كبير للمنشآت الكبيرة. فقد يتطلب إطار من عشرة طوابق تحت حمل الرياح 40–50 دوران عقدة بوصفها مجاهيل، مع زمن حل يتراوح بين يومين وثلاثة أيام لمهندس ماهر. وحفز ذلك البحث عن طرائق حل تكرارية تتجنب الحل الصريح للمعادلات.

11.5.3 هاردي كروس (1885–1959): طريقة توزيع العزوم

للتفاصيل التحليلية، انظر §27.3

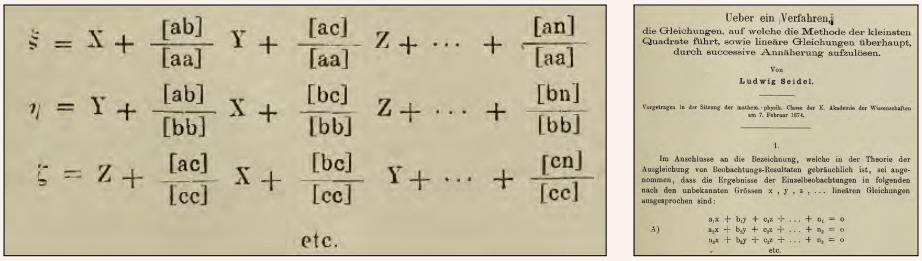
أحدثت طريقة توزيع العزوم، التي قدمها هاردي كروس عام 1930 (Cross, 1932)، ثورة في التحليل الإنشائي. فقد حولت حل المعادلات الآنية إلى عملية تكرارية يمكن إجراؤها بأقل قدر من الحساب—وغالباً يدوياً على ورقة واحدة. ومن يراجع المحاضر الأصلية سيلحظ العدد الكبير جداً من التعليقات التي قدمها القراء[1].

[1] على خلاف العصر الحديث، كان قراء الهندسة الأوائل يدرسون المقالات التقنية تفصيلاً ويرسلون إلى مؤلفيها التعليقات والانتقادات بانتظام.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السياق التاريخي: البحث عن التكرار بحلول عام 1930، أصبح تحليل الإطارات متعددة الطوابق تحت الأحمال الجانبية (الرياح أو الزلازل) مسألة عملية ملحة، ولا سيما في الولايات المتحدة حيث كانت الإطارات الفولاذية ذات الوصلات الصلبة نمطاً معيارياً للبناء. وكانت طريقة الميل–الانحراف منهجية، لكنها تتطلب حل منظومات كبيرة من المعادلات. وقد ينطوي إطار من عشرة طوابق ذي عقد صلبة على ثلاثين معادلة آنية أو أكثر—وهي مهمة حسابية شاقة في عصر ما قبل الحواسيب الإلكترونية.

ومن اللافت أن الرياضيين امتلكوا منذ زمن طرائق تكرارية لحل المنظومات الخطية. فقد وصف كارل فريدريش غاوس مقاربة تكرارية لتلميذه غيرلينغ عام 1823، ونظم فيليب لودفيغ فون زايدل الطريقة عام 1873 (Seidel, 1873) (الشكل 11.2). وتحل طريقة غاوس–زايدل المنظومة $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ بالتكرار المتتابع، مستعملة القيم المحدثة فور توافرها. غير أن هذه الطرائق تطلبت عناية دقيقة بمعايير التقارب، ولم تمنح المهندسين بصيرة فيزيائية كافية في السلوك الإنشائي الجاري تحليله.


$$\xi = X + \frac{[ab]}{[aa]} Y + \frac{[ac]}{[aa]} Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$
$$\eta = Y + \frac{[ab]}{[bb]} X + \frac{[bc]}{[bb]} Z + \cdots + \frac{[bn]}{[bb]}$$
$$\zeta = Z + \frac{[ac]}{[cc]} X + \frac{[bc]}{[cc]} Y + \cdots + \frac{[cn]}{[cc]}$$
etc.

Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Vorgetragen in der Sitzung der mathem.-phys. Classe der K. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

1.

Im Anschlusse an die Bezeichnung, welche in der Theorie der Ausgleichung von Beobachtungs-Resultaten gebräuchlich ist, sei angenommen, dass die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen in folgender Weise nach den unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots$ linearen Gleichungen ausgesprochen sind:

A)
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + u_1 &= v_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + u_2 &= v_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + u_3 &= v_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

شكل 11.2: طريقة زايدل لعام 1873 للتقريبات المتتابعة في حل المنظومات الخطية (Seidel, 1873). كانت سليمة رياضياً، لكنها افتقرت إلى التفسير الفيزيائي الذي ابتغاه المهندسون.

قارب هاردي كروس، أستاذ الهندسة الإنشائية في جامعة إلينوي، المسألة من منظور المهندس. وكانت بصيرته الرئيسة إعادة تفسير التكرار الرياضي بوصفه عملية فيزيائية: فبدلاً من تحقيق جميع معادلات الاتزان آنياً، لم لا تُفرض تباعاً، عقدة بعد أخرى؟ وستُصحح الاختلالات المؤقتة الناتجة من تحرير عقدة حين تُحرر العقد المجاورة—وتتقارب العملية إلى الحل الصحيح.

عملية توزيع العزوم تبدأ طريقة كروس بتثبيت جميع العقد اصطناعياً ومنعها من الدوران. وتُحسب عزوم الطرفين المثبتين الناتجة من التحميل لكل عضو. ثم تُحرر القيود، عقدة بعد أخرى، ويوزع العزم غير المتزن عند كل عقدة على الأعضاء الملتقية بنسبة صلاباتها. ويولد هذا التوزيع اختلالات عند العقد المجاورة، فتُحرر وتُوازن تباعاً. وتتكرر العملية، مع تناقص الاختلالات سريعاً إلى قيم مهملة.

المفاهيم الرئيسة هي:

معامل الصلابة: لعضو عزم عطالته I وطوله L وطرفه البعيد مثبت:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

معامل التوزيع: لعقدة تلتقي عندها عدة أعضاء، يكون الجزء من العزم غير المتزن المخصص للعضو i:

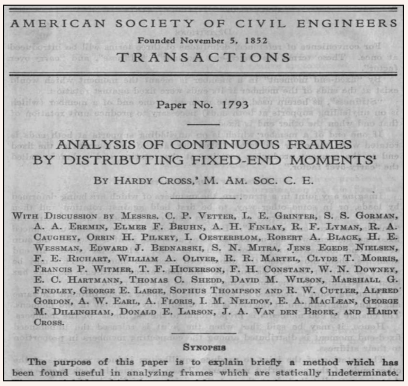
$$DF_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

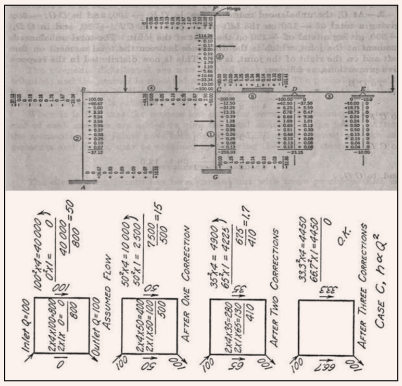
معامل النقل: عندما يُطبق عزم M عند أحد طرفي عارضة مثبتة الطرفين، يتولد عزم $M/2$ عند الطرف البعيد. ومعامل النقل البالغ $1/2$ أساسي في العملية التكرارية.

الأثر والاعتماد أُدرك فوراً أن طريقة توزيع العزوم تحولية. وأصبح بحثا كروس في محاضر الجمعية الأمريكية للمهندسين المدنيين (Cross **and** Morgan, 1932) (Cross, 1932 PDF) من أكثر الأبحاث استشهاداً في تاريخ الهندسة الإنشائية. وفي بضع سنوات، دُرست الطريقة في كل كلية هندسة تقريباً حول العالم. واستطاع المهندسون الممارسون تحليل منشآت كان يلزم سابقاً استشارة متخصصين بشأنها.

وامتد نجاح الطريقة إلى ما وراء التحليل الإنشائي. فقد برهن كروس نفسه اتساع تطبيقها باستعمال الفلسفة التكرارية نفسها لتحليل توزيع الجريان في شبكات الأنابيب والدوائر الكهربائية (Cross, 1936 PDF)، مدركاً أن هذه الأنظمة تشترك في البنية الرياضية نفسها لاتزان الشبكات، الشكل 11.3.


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS
Paper No. 1793
ANALYSIS OF CONTINUOUS FRAMES BY DISTRIBUTING FIXED-END MOMENTS
By Hardy Cross, M. Am. Soc. C. E.
Synopsis
The purpose of this paper is to explain briefly a method which has been found useful in analyzing frames which are statically indeterminate.

(a) بحث كروس الفارق لعام 1930 (Cross, 1932 PDF)



(b) تطبيقات على الإطارات وشبكات الأنابيب (Cross, 1936 PDF)

شكل 11.3: بحثا هاردي كروس التحوليان

نشأ نجاح الطريقة من وضوحها الفيزيائي—فقد فهم المهندسون غرض كل خطوة. ولم تتطلب إلا عمليات حسابية من دون حل معادلات، وكانت ذاتية التصحيح (تُصحح أخطاء دورة في التكرارات اللاحقة)، ومرنة (يمكن للمحلل التوقف عند أي دقة مطلوبة)، وثبت أنها تنطبق بالتساوي على المنشآت الصغيرة والكبيرة.

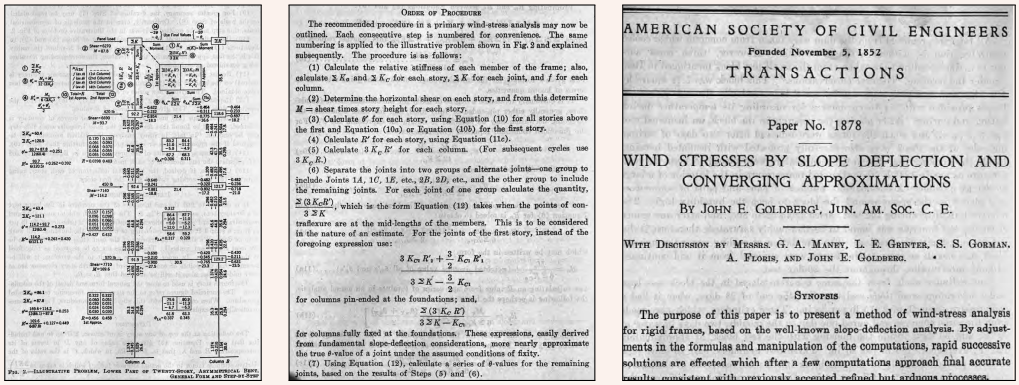
هيمن توزيع العزوم على التحليل الإنشائي من عام 1930 إلى 1960، حين بدأت الحواسيب الرقمية تتيح الطرائق المصفوفية التي ستحل محله.

11.5.4 الامتدادات والصيغ البديلة

غولدبرغ (1934): تحليل الأحمال الجانبية في حين أحدث توزيع العزوم لكروس ثورة في تحليل الإطارات من دون انزياح جانبي، قدم التحميل الجانبي تحدياً أعقد. فقد تطلب تعيين إزاحات الانزياح الجانبي في صياغة كروس الأصلية إجراء تكرارياً معقداً أحبط كثيراً من المهندسين، ولا سيما في كاليفورنيا حيث أصبح التحليل الزلزالي حاسماً بعد زلزال سان فرانسيسكو المدمر عام 1906 وتوابعه الكثيرة.

عالج جوزيف إ. غولدبرغ هذا التحدي عام 1934 (Goldberg, 1934 PDF) بطريقة توزع ميول العقد (الدورانات) بدلاً من العزوم. وكانت مقاربة غولدبرغ مماثلة لطريقة كروس، لكنها أجرت تقريبات متتابعة

للميول المجهولة لا للعزوم المجهولة (الشكل 11.4). ووفرت طريقة غولدبرغ للإطارات ذات الانزياح الجانبي مساراً أكثر مباشرة إلى الحل، إذ توزع الميول في أنحاء الإطار حتى يصبح الاختلال صغيراً على نحو مقبول. وبعد التوزيع، يمكن إيجاد الانحرافات الجانبية لكل طابق سريعاً، ثم حساب العزوم النهائية في كل عارضة وعمود.


ORDER OF PROCEDURE

The recommended procedure in a primary wind-stress analysis may now be outlined. Each consecutive step is numbered for convenience. The same numbering is applied to the illustrative problem shown in Fig. 3 and explained subsequently. The procedure is as follows:

(1) Calculate the relative stiffness of each member of the frame; also, calculate ΣK_b and ΣK_c for each story, ΣK for each joint, and f for each column.

(2) Determine the horizontal shear on each story, and from this determine M = shear times story height for each story.

(3) Calculate R' for each story, using Equation (10) for all stories above the first and Equation (10a) or Equation (10b) for the first story.

(4) Calculate R' for each story, using Equation (11c).

(5) Calculate $3\,K_c\,R'$ for each column. (For subsequent cycles use $3\,K_c\,R$.)

(6) Separate the joints into two groups of alternate joints—one group to include Joints 1A, 1C, 1E, etc., 2B, 2D, etc., and the other group to include the remaining joints. For each joint of one group calculate the quantity, $\frac{\Sigma\,(3\,K_c\,R')}{3\,\Sigma K}$, which is the form Equation (12) takes when the points of contraflexure are at the mid-lengths of the members. This is to be considered in the nature of an estimate. For the joints of the first story, instead of the foregoing expression use:

$$\frac{3\,K_{cn}\,R' + \frac{3}{2}\,K_{c1}\,R'_1}{3\,\Sigma K - \frac{3}{2}\,K_{c1}}$$

for columns pin-ended at the foundations; and,

$$\frac{\Sigma\,(3\,K_c\,R')}{3\,\Sigma K - K_{c1}}$$

for columns fully fixed at the foundations. These expressions, easily derived from fundamental slope-deflection considerations, more nearly approximate the true θ-value of a joint under the assumed conditions of fixity.

(7) Using Equation (12), calculate a series of θ-values for the remaining joints, based on the results of Steps (5) and (6).

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1878

WIND STRESSES BY SLOPE DEFLECTION AND CONVERGING APPROXIMATIONS

By John E. Goldberg[1], Jun. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. G. A. Maney, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. Floris, and John E. Goldberg.

Synopsis

The purpose of this paper is to present a method of wind-stress analysis for rigid frames, based on the well-known slope-deflection analysis. By adjustments in the formulas and manipulation of the computations, rapid successive solutions are effected which after a few computations approach final accurate results consistent with previously accepted refined but arduous processes.

شكل 11.4: تكييف غولدبرغ عام 1934 لطريقة الميل–الانحراف لتحليل أحمال الرياح (Goldberg, 1934)

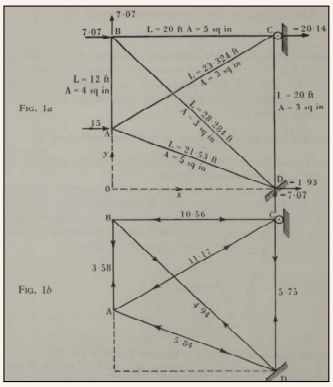
أثار بحث غولدبرغ نقاشاً واسعاً بين أساتذة الهندسة الإنشائية، تمحور حول الكفاءة الحسابية والتفسير الفيزيائي. وضم قسم النقاش، الممتد على عشر صفحات، تعليقات من أكاديميين بارزين في ذلك العصر. وتمحور بعض الجدل حول زمن الحساب—نحو 500 دقيقة مقابل 1800 دقيقة من الحساب اليدوي لإطار متعدد الطوابق. ومن الغريب أن بعض المعلقين تساءلوا هل كانت *طريقة توزيع العزوم المزعومة* مجرد وسيلة *لتخفيف العبء على الخيال اللازم لتصور التشوهات الفيزيائية للمنشأ*. وفي المقابل، امتدح معلق طريقة ماني–غولدبرغ قائلاً: *إن البساطة والسرعة والدقة التي يمكن بلوغها في تحليل إطار مدهشة حقاً*.

وكانت الميزة الرئيسة سرعة حساب التقريبات الأولى لدورانات أطراف العوارض والأعمدة، ومن ثم تقديرات أولية دقيقة لعزوم الأطراف. وقد شكل هذا التقريب الفيزيائي للدورانات جوهر طريقة ماني–غولدبرغ، وثبتت قيمته في تصميم المباني تحت أحمال الرياح. ورغم ما وعدت به الطريقة، سرعان ما حجبتها تحسينات مقاربة كروس ثم الطرائق الحاسوبية. ويقدم Saliklis **and** Parker, 2014 تنفيذاً حديثاً لها في MATLAB.

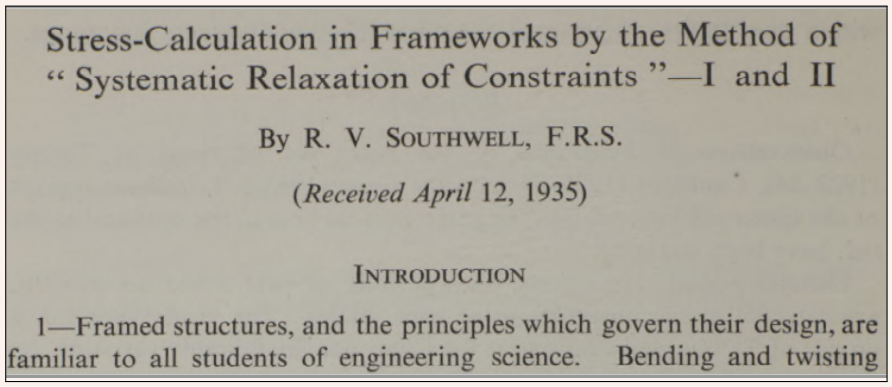
ساوثويل (1935): طريقة الاسترخاء طور ريتشارد ساوثويل، مستقلاً في أكسفورد، طريقة الاسترخاء عام 1935 (Southwell, 1935). وكان تفسير ساوثويل الفيزيائي أنيقاً: تخيل إطاراً غير محمل في البداية، تمنع قيود عقده أي إزاحة. وعندما تُطبق الأحمال الخارجية، يبقى الإطار بلا إجهاد—فتحمل القيود الحمل كله. وينقل *إرخاء* هذه القيود تدريجياً الحمل إلى الإطار. وإذا أُرخي في كل مرحلة القيد الحامل لأكبر حمل، تتضاءل قوى القيود المتبقية نحو الصفر. ومن الواضح فيزيائياً أن جزءاً أكبر من الحمل الخارجي سينتقل إلى الإطار، حتى تصبح القوى المتبقية التي تحملها القيود في النهاية أصغر من حد التسامح في الأحمال المطبقة (الشكل 11.5).

لم يكن ساوثويل على علم ببحث كروس لعام 1930 حين طور طريقته، لكنه أقر لاحقاً بأن المقاربتين *متكافئتان تماماً في الجوهر*. غير أن ساوثويل لاحظ ميزة مهمة: ففي حين يلائم توزيع العزوم الإطارات

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) التطبيق على الجمالونات المفصلية



Stress-Calculation in Frameworks by the Method of
" Systematic Relaxation of Constraints "—I and II

By R. V. SOUTHWELL, F.R.S.

(*Received April* 12, 1935)

INTRODUCTION

1—Framed structures, and the principles which govern their design, are familiar to all students of engineering science. Bending and twisting

(a) بحث ساوثويل لعام 1935

شكل 11.5: طريقة ساوثويل للاسترخاء (Southwell, 1935)

الصلبة بوجه خاص (الشائعة في الممارسة الأمريكية)، تنطبق طريقة الاسترخاء بالقدر نفسه على الجمالونات المفصلية (الأكثر شيوعاً في الممارسة البريطانية). وستؤثر صياغة ساوثويل الأعم لاحقاً في تطوير الطرائق العددية لحل منظومات المعادلات الكبيرة.

هيمنت طريقة توزيع العزوم على ممارسة التحليل الإنشائي حتى ظهور طرائق العناصر المحدودة في ستينيات القرن العشرين. أما طريقة الاسترخاء، فرغم قلة بروزها في التحليل الإنشائي، وجدت تطبيقاً واسعاً في الميكانيكا الحاسوبية، حيث ما زالت المحللات التكرارية القائمة على الاسترخاء تستعمل على نطاق واسع لحل المنظومات المتناثرة الكبيرة.

11.5.5 طريقة الإزاحة: الملخص والإرث

مثلت طريقة الإزاحة، في صورتي الميل–الانحراف وتوزيع العزوم، تقدماً مفاهيمياً على طريقة القوى. فبمعاملة الإزاحات مجاهيل رئيسة وفرض الاتزان، خفضت عدد المجاهيل في المنشآت النموذجية، وقدمت صياغة أكثر طبيعية للمنشآت ذات العقد الصلبة، وقادت إلى إجراءات حل تكرارية فعالة (ولا سيما توزيع العزوم)، وأرست الإطار الفكري لطريقة الصلابة.

والأهم أن فلسفة طريقة الإزاحة—تجميع علاقات صلابة الأعضاء وفرض الاتزان—ستصبح أساس التحليل الإنشائي المصفوفي، وفي النهاية طريقة العناصر المحدودة. وستتطور المقاربات التكرارية لكروس وغولدبرغ وساوثويل إلى طرائق الاسترخاء والمحللات التكرارية الحديثة للتحليل الحاسوبي واسع النطاق.

11.6 خطوط التأثير والأحمال المتحركة

في حين حولت طريقة الإزاحة تحليل المنشآت الثابتة تحت التحميل الاستاتيكي، واجه المهندسون المدنيون تحدياً إضافياً: المنشآت الخاضعة لأحمال متحركة. فقد تطلبت جسور السكك الحديدية خصوصاً ألا يعين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المهندسون القوى عند موضع واحد للحمل فحسب، بل أكبر قوة ممكنة مع عبور القطار للمنشأ. وكان السؤال الحاسم للتصميم: أين ينبغي وضع حمل متحرك ليولد أكبر عزم أو قص أو رد فعل عند موضع معين؟

تطلبت هذه المسألة إطاراً تحليلياً مختلفاً—إطاراً يلتقط كيف تتغير كمية إنشائية مع تحرك حمل وحدي عبر المنشأ. وجاء الجواب بتطور نظرية خطوط التأثير، التي ستصبح ضرورية لتصميم جسور السكك الحديدية، التحدي المهيمن في الهندسة الإنشائية في أواخر القرن التاسع عشر.

11.6.1 فينكلر (1835–1888): التطورات المبكرة

قدم إميل فينكلر، الأستاذ في المعهد التقني الألماني في براغ، إسهامات مبكرة في نظرية المنشآت تحت الأحمال المتحركة. وعرض مؤلفه لعام 1868 (Winkler, 1875) مفهوم تمثيل تغير كمية إنشائية (رد فعل أو عزم أو قص) مع عبور حمل وحدي للمنشأ.

أدرك فينكلر أن خط التأثير لأي قوة أو عزم في منشأ محدد استاتيكياً يمكن إنشاؤه من الاستاتيكا وحدها، مع معاملة موضع الحمل الوحدي معلماً مجهولاً. أما في المنشآت غير محددة استاتيكياً، فيتضمن خط التأثير تشوهات المنشأ—مما يتطلب إما طرائق الطاقة أو معاملات المطاوعة التي طورها ماكسويل وغيره (Timo-shenko, 1953).

11.6.2 مبدأ مولر–بريسلاو

كما ذُكر سابقاً (§11.4.4)، كان إسهام مولر–بريسلاو الأساسي إدراك أن لخطوط التأثير تفسيراً هندسياً مباشراً: *يأخذ خط التأثير لقوة أو عزم معين الشكل نفسه لمنحنى الانحراف الناتج عندما تُعطى تلك القوة أو ذلك العزم إزاحة أو دوراناً وحدياً، ويُسمح للمنشأ بالتشوه تبعاً لذلك* (Müller-Breslau, 1887).

حول هذا المبدأ إنشاء خطوط التأثير من حساب مضنٍ إلى إنشاء بياني أنيق. فاستطاع المهندس رسم الشكل المشوه نوعياً، ومن ثم تعيين الموضع الذي يولد فيه الحمل المتحرك الأثر الأقصى—وهو أمر لا يقدر بثمن في التصميم الأولي وفهم السلوك الإنشائي.

11.6.3 التطبيقات والإرث

أصبحت نظرية خطوط التأثير أساسية لتعيين القوى القصوى تحت أحمال القطارات المتحركة، وتحليل سلاسل الأحمال المركزة (أحمال العجلات)، وتحسين الأشكال الإنشائية لتقليل الآثار القصوى، وفهم السلوك الإنشائي تحت مواضع الأحمال المختلفة.

ومع أنها أقل بروزاً في الممارسة الحديثة (حيث يستطيع التحليل الحاسوبي تقييم حالات تحميل كثيرة بكفاءة)، ما زالت خطوط التأثير مهمة مفاهيمياً لفهم السلوك الإنشائي، ولا تزال تستعمل في تحليل المغلفات ودراسات مواضع الأحمال.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11.7 نحو الصياغة المصفوفية: الجسر المفاهيمي إلى الحساب

مثلت طرائق الحساب اليدوي المطورة بين 1826 و1930—من معادلة كلابيرون للعزوم الثلاثة إلى توزيع العزوم لكروس—أكثر من اختصارات حسابية مبتكرة. فقد احتوت، ضمنياً في كثير من الأحيان، الإطار المفاهيمي الذي سيُصاغ لاحقاً في صورة التحليل الإنشائي المصفوفي وطرائق العناصر المحدودة. ويوضح فهم هذه الصلة كيف لم تكن ثورة الحاسوب في التحليل الإنشائي قطيعةً مع الطرائق الكلاسيكية، بل امتداداً طبيعياً لها.

11.7.1 البنية المصفوفية للطرائق الكلاسيكية

لنتصور معادلات الميل–الانحراف لعارضة مستمرة أو إطار. لكل عضو يصل بين العقدتين i وj، يمكن التعبير عن عزمي الطرفين كما يأتي:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^{FEM} \\ M_j^{FEM} \end{Bmatrix}$$

وهذه بالضبط علاقة صلابة عضو على الصورة $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e\mathbf{d}^e + \mathbf{f}_0^e$، حيث $\mathbf{k}^e$ مصفوفة صلابة العضو، و$\mathbf{d}^e$ متجه إزاحاته، و$\mathbf{f}_0^e$ قوى طرفيه المثبتين.

وعندما جمع ماني معادلات الميل–الانحراف لمنشأ كامل بفرض الاتزان عند كل عقدة:

$$\sum M_i = 0 \quad \text{عند كل عقدة}$$

كان يبني ضمنياً مصفوفة صلابة كلية $\mathbf{K}$ بتجميع صلابات الأعضاء، مما يعطي المنظومة:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$$

حيث تمثل $\boldsymbol{\theta}$ جميع دورانات العقد و$\mathbf{M}$ جميع العزوم المطبقة. وهذه هي بالضبط معادلة صلابة المنشأ التي ستُصاغ صراحة في خمسينيات القرن العشرين (Turner **andothers,** 1956).

وبالمثل، تشكل معاملات مطاوعة موهر—الإزاحة عند الموضع i الناتجة من حمل وحدي عند الموضع j—مصفوفة مطاوعة $\mathbf{F}$. وجمعت طريقة القوى لمولر–بريسلاو مصفوفة المطاوعة هذه منهجياً وعكستها (مفاهيمياً، بحل معادلات التوافق) لإيجاد القوى الزائدة. وهكذا كانت طريقة القوى تعمل ضمنياً بالعلاقة:

$$\mathbf{F}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Delta}$$

التي تربط القوى الزائدة $\mathbf{X}$ بإزاحات التوافق $\boldsymbol{\Delta}$.

كان التقابل بين طريقتي القوى والإزاحة—وبين صيغتي المطاوعة والصلابة—كامناً في الطرائق الكلاسيكية، لكنه لن يُدرك ويُستثمر بالكامل إلا مع الصيغ المصفوفية في عصر الحاسوب.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11.7.2 من التكرار إلى الحل المصفوفي

لعل طريقة توزيع العزوم لهاردي كروس توفر أوضح جسر من الطرائق الكلاسيكية إلى الحاسوبية. فقد أدرك كروس أن معادلات الميل–الانحراف، عند كتابتها بالصورة:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \sum_j C_{ij} M_j$$

يمكن حلها تكرارياً بدلاً من حلها آنياً. وكانت عمليتا التوزيع والنقل لديه، بلغة المصفوفات، تكرار غاوس–زايدل مطبقاً على المنظومة $\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$.

لم يكن ما جعل طريقة كروس ثورية المبدأ الرياضي (فقد كان تكرار غاوس–زايدل معروفاً)، بل التفسير الفيزيائي: استطاع المهندسون تصور كل تكرار بوصفه عملية فيزيائية لتحرير العقد وتقييدها. وجعلت هذه البصيرة الفيزيائية الطريقة متاحة وجديرة بالثقة.

وفي عصر الحاسوب، ستوجه البصيرة نفسها المحللات التكرارية لمنظومات العناصر المحدودة الكبيرة. وسيتوقف الاختيار بين الحل المباشر (المماثل لحل معادلات الميل–الانحراف) والحل التكراري (المماثل لتوزيع العزوم) على حجم المسألة وبنية التناثر والدقة المطلوبة—وهي اعتبارات استبقتها الطرائق الكلاسيكية.

11.7.3 حدود الحساب اليدوي: تمهيد المسرح للحساب

بحلول عام 1950، بلغت طرائق الحساب اليدوي حدودها العملية. فقد يتطلب إطار من عشرة طوابق تحت حمل الرياح 40–50 دوران عقدة بوصفها مجاهيل (طريقة الميل–الانحراف)، و5–10 دورات من توزيع العزوم مع ضبط دقيق للسجلات، ويومين إلى ثلاثة أيام من الحساب لمهندس ماهر، والتحقق بإعادة حساب مستقلة لاكتشاف الأخطاء الحسابية.

أما المنشآت الأعقد—الإطارات ثلاثية الأبعاد، والقشريات، والمنشآت ذات مئات الأعضاء—فقد جعلت الطرائق اليدوية غير عملية مهما بلغت براعة الصياغة.

ولم يكن العامل المقيد مفاهيمياً بل حسابياً: فقد تجاوز تشكيل منظومات كبيرة من المعادلات وحلها، حتى مع جميع بصائر طرائق الطاقة ومبرهنات التقابل والإجراءات التكرارية، القدرة البشرية ضمن الأزمنة العملية للهندسة.

وسيُزيل الحاسوب الرقمي، الذي ظهر في خمسينيات القرن العشرين، هذا القيد. لكن الإطار المفاهيمي كان جاهزاً على نحو حاسم: علاقات الصلابة لكل عضو، والتجميع بالتوافق والاتزان، والحل بالطرائق المباشرة أو التكرارية. وسيكون التحول من الحساب اليدوي إلى التحليل الحاسوبي تحولاً في الحجم والسرعة، لا في المنهجية الأساسية.

11.7.4 الخلاصة: الاستمرارية والتحول

يكشف تاريخ طرائق الحساب اليدوي حقيقة قوية عن العلم الهندسي: كثيراً ما تمثل أوجه التقدم الكبرى صقل الأفكار القائمة وتنظيمها لا قطيعة ثورية. وعندما نشأت طريقة العناصر المحدودة في خمسينيات القرن العشرين، قدمها بعضهم ابتكاراً جذرياً. غير أن أسسها المفاهيمية—تجميع خواص الأعضاء بالاتزان والتوافق،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومبادئ الطاقة، وتقابل صيغتي القوى والإزاحة—كانت كلها حاضرة في أعمال نافييه وماكسويل وموهر وكاستيليانو ومولر–بريسلاو وماني وكروس.

الذي تغير هو القدرة على العمل واسع النطاق: تجميع مصفوفات صلابة لآلاف العناصر، وحل منظومات من آلاف المعادلات، وعرض نتائج منشآت معقدة ثلاثية الأبعاد ومعالجتها لاحقاً. ومكّن الحاسوب المهندسين من تطبيق المبادئ الراسخة على مسائل ذات تعقيد غير مسبوق.

وهكذا لم يكن الجسر من الحساب اليدوي إلى تحليل العناصر المحدودة هوةً تتطلب قفزة، بل مسار تطور مستمراً. ويبحث القسم التالي كيف تكشف هذا المسار—كيف تحولت الطرائق التي أتقنت في عصر المساطر الحاسبة وصفائح الحساب إلى الطرائق الحاسوبية التي تعرف التحليل الإنشائي الحديث.

11.8 المتطلبات الأساسية للتحليل الإنشائي

للتفاصيل التحليلية، انظر §17.1.2.2

من الفيزياء إلى معادلات الحقول

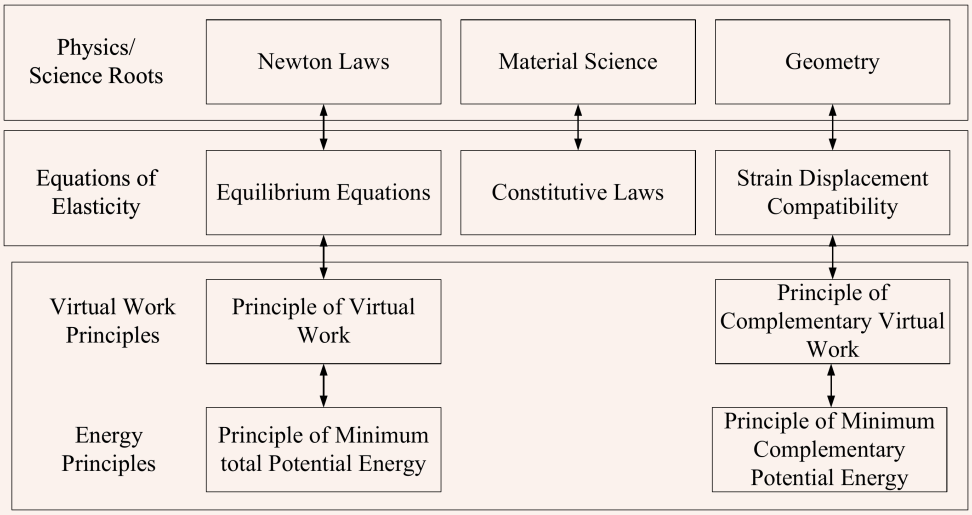
بعد أن تتبعنا التطور التاريخي للتحليل الإنشائي من أول معالجة منهجية لنافييه حتى الصيغ المصفوفية في منتصف القرن العشرين، نتوقف لاستخلاص المبدأ الجوهري الذي يوحد كل طريقة واجهناها حتى الآن—وكل طريقة ستأتي لاحقاً.[2] (§10.5.7):

1. **الاتزان**: يجب أن توازن القوى الداخلية الأحمال الخارجية. ولا يجوز أن يتعرض أي عنصر من المنشأ لقوى غير متزنة؛ وعند كل نقطة، يجب أن يحقق حقل الإجهاد معادلات الاتزان الاستاتيكي (أو الديناميكي).
2. **القوانين التكوينية**: يجب أن ترتبط الإجهادات بالانفعالات وفق الخواص الميكانيكية للمادة. فالمادة تخبرنا كيف ترتبط القوة بالتشوه—سواء أكان السلوك مرناً خطياً أم لدناً أم غير ذلك.
3. **توافق الإزاحات**: يجب أن تكون التشوهات متسقة هندسياً. ويبقى المنشأ متصلاً؛ فلا يتمزق ولا تتراكب أجزاؤه. ويجب أن تُشتق الانفعالات من حقل إزاحة مستمر أحادي القيمة يحترم شروط الاستناد ويحافظ على الاتصال بين الأعضاء.

الحل الذي ينتهك أياً من هذه المتطلبات ليس تقريبياً فحسب—بل خاطئ. فحقل الإجهاد المتزن تماماً لا معنى له إذا كان يتضمن مادة غير موجودة. وحقل الإزاحة المستمر تماماً لا يخبرنا بشيء إذا كانت الإجهادات الناتجة تنتهك الاتزان. والمتطلبات الثلاثة ليست خيارات مستقلة ننتقي منها؛ بل مطالب آنية يجب أن يحققها أي حل قابل للتحقق فيزيائياً. وهذا المبدأ، على بساطته، هو المحك الذي يجب أن تُقاس به كل طريقة للتحليل الإنشائي.

[2] في المنشآت المحددة استاتيكياً، تعطي معادلات الاتزان وحدها توزيع القوى الكامل. ولا تصبح القوانين التكوينية وشروط التوافق ضرورية إلا لحساب الإزاحات أو عندما يكون المنشأ غير محدد استاتيكياً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 11.6: من فيزياء نيوتن (أعلى)، مروراً بمعادلات الحقول (الوسط)، إلى مبادئ لاغرانج التغايرية (أسفل).

ثلاثة مستويات للصياغة

يعرض الشكل 11.6 البنية المنطقية للميكانيكا الإنشائية في ثلاثة مستويات تنازلية، يمثل كل منها نمطاً متميزاً للتعبير عن الواقع الفيزيائي الكامن نفسه.

تقف في الأعلى *الأسس الفيزيائية*—العلم الخام الذي يُشتق منه كل ما سواه. فتحكم قوانين نيوتن اتزان القوى؛ ويصف علم المواد كيفية استجابة المواد للتحميل؛ وتقيد الهندسة كيفية تشوه الأجسام المتصلة. وهذه ليست إنشاءات رياضية، بل حقائق تجريبية عن العالم الفيزيائي أُرست بالرصد والتجربة على مدى قرون.

يمثل الصف الأوسط *الصياغة النيوتنية أو المتجهية*. تُصاغ الأسس الفيزيائية هنا بلغة المعادلات التفاضلية والحقول المتجهية. وتعبر معادلات الاتزان عن قوانين نيوتن بانعدام تباعد موتر الإجهاد—أي اتزان نقطي للقوى عند كل موضع في الوسط المتصل. وتترجم القوانين التكوينية سلوك المادة إلى علاقات جبرية بين موتري الإجهاد والانفعال. وترمز معادلات الانفعال–الإزاحة إلى الاتساق الهندسي بعلاقات تفاضلية بين حقل متجه الإزاحة وموتر الانفعال. وتعامل هذه الصياغة، التي طورها أساساً كوشي ونافييه وسان-فنان في القرن التاسع عشر، القوى بوصفها الكميات الرئيسة، وتتقدم بالعمليات المتجهية والمعادلات التفاضلية الجزئية. وهي «الصيغة القوية» للمرونة—مباشرة وحدسية ومرتبطة صراحة بفيزياء اتزان القوى.

تمثل الصفوف السفلية *الصياغة اللاغرانجية أو صياغة الطاقة*. ويُعاد فيها التعبير عن المحتوى الفيزيائي نفسه بلغة دوال الطاقة القياسية والمبادئ التغايرية. فبدلاً من فرض الاتزان نقطياً بالمعادلات التفاضلية، نصف الحل بأنه التشكيل الذي يصغر الطاقة الكامنة الكلية—أو بصورة مكافئة، التشكيل الذي ينعدم فيه العمل الافتراضي. وهذه الإعادة العميقة للصياغة، التي نشأت مع لاغرانج وصقلها غرين وكاستيليانو وغيرهما، تستبدل الكميات القياسية بالمتجهات، والعبارات التكاملية بالمعادلات التفاضلية، وثبات الطاقة باتزان القوى. وتكشف المقاربة اللاغرانجية التقابل العميق للميكانيكا الإنشائية، وتوفر الإطار الطبيعي للطرائق التقريبية والحاسوبية.

الصياغتان—النيوتنية واللاغرانجية—متكافئتان رياضياً. فكل حل يُستخرج بحل المعادلات التفاضلية في

الصف الأوسط يمكن استخراجه بالقدر نفسه بإيجاد القيم القصوى لداليات الطاقة في الصف السفلي. غير أنهما تختلفان جذرياً في الطابع: تتحدث الصياغة النيوتنية عن القوى واتزانها؛ وتتحدث الصياغة اللاغرانجية عن الطاقة وتصغيرها. ويمكن قراءة التطور التاريخي للتحليل الإنشائي بوصفه الإدراك التدريجي لهذا التكافؤ واستثمار الصياغة الأكثر ملاءمة للمسألة المطروحة.

تقابل الصياغة اللاغرانجية

يكمن داخل الإطار اللاغرانجي نفسه تقابل آخر، يظهر في العمودين أسفل الشكل 11.6. ويعكس هذا التقابل التمييز بين الإزاحة والقوة، وبين الكميات الحركية الهندسية والاستاتيكية.

في الجانب الأيسر، يقدم مبدأ العمل الافتراضي—الذي أرجعه Lagrange, 1788 في كتابه *Mécanique Analytique* إلى استاتيكا Bernoulli, Johann, 1725—ونظيره الطاقي، مبدأ الطاقة الكامنة الكلية الصغرى، عبارات تغايرية مرتكزة على الإزاحة. وتقرر هذه المبادئ أن الحل الحقيقي، من بين جميع حقول الإزاحة المقبولة حركياً، يصغر الطاقة الكامنة الكلية؛ أو بصورة مكافئة، أن العمل الافتراضي ينعدم لأي إزاحة افتراضية متوافقة. وبالبدء بافتراضات إزاحة تحقق التوافق تلقائياً، واستدعاء القوانين التكوينية للحصول على الإجهادات، ثم فرض الاتزان بتصغير الطاقة، تضمن هذه المقاربة تحقيق المتطلبات الثلاثة كلها. وأصبحت هذه الصياغة الأساس النظري لطريقة الإزاحة، ثم لتحليل العناصر المحدودة الحديث.

ويقف في الجانب الأيمن الصياغة المتممة. فيقدم مبدأ العمل الافتراضي المتمم ومبدأ الطاقة الكامنة المتممة الصغرى عبارات تغايرية مرتكزة على القوة. وتقرر هذه المبادئ، التي تطورت بأعمال Crotti, 1888 و Engesser, 1889، أن الحل الحقيقي يصغر الطاقة المتممة من بين جميع حقول الإجهاد المقبولة استاتيكياً. وبالبدء بافتراضات إجهاد تحقق الاتزان تلقائياً، واستدعاء القوانين التكوينية للحصول على الانفعالات، ثم فرض التوافق بتصغير الطاقة، تضمن هذه المقاربة المقابلة أيضاً تحقيق المتطلبات الثلاثة كلها—لكنها تعبرها بالترتيب المعاكس. وتقوم هذه الصياغة وراء طريقة القوى ومقاربات المطاوعة التي هيمنت على التحليل الإنشائي قبل عصر الحاسوب. وقدمت مبرهنات Castigliano, 1879، التي تربط مشتقات الطاقة بالإزاحات والقوى على التوالي، الأدوات العملية التي استثمر بها المهندسون هذه المبادئ.

الدور المركزي للقوانين التكوينية

تحتل القوانين التكوينية الموضع المركزي في كل مستوى من هذه البنية. ففي الصياغة النيوتنية، توفر الصلة الجبرية بين موتري الإجهاد والانفعال. وفي الصياغة اللاغرانجية، تعرف كثافة طاقة الانفعال التي تُشتق منها جميع الكميات الطاقية. ومن دون سلوك مادي يربط القوة بالتشوه، يبقى جانبا أي صياغة منفصلين—فلا يقول الاتزان شيئاً عن الإزاحة، ولا يقول التوافق شيئاً عن الإجهاد.

تفسر البنية المتناظرة للشكل 11.6، بمساريها المتقابلين على المستوى اللاغرانجي، لماذا يجب أن تعطي طريقتا الصلابة والمطاوعة نتائج متطابقة عند تطبيقهما تطبيقاً صحيحاً. إنهما مساران مختلفان عبر الفيزياء الكامنة نفسها—يبدأ أحدهما بالإزاحات (فيحقق التوافق أولاً) ويتجه نحو الاتزان، ويبدأ الآخر بالقوى (فيحقق الاتزان أولاً) ويتجه نحو التوافق. ويستدعي كلاهما القوانين التكوينية لجسر الفجوة. ولا تستطيع أي من الطريقتين الإفلات من المتطلبات الأساسية الثلاثة؛ فهما تختلفان فقط في ترتيب فرضها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11.9 ملخص زمني للمساهمين

جدول 11.1: المساهمون في التحليل الإنشائي: ملخص زمني

المؤلف	التاريخ	المرجع	الإسهام الرئيس
الأسس التغايرية			
ليونارد أويلر (1707–1783)	1744		حساب التغايرات؛ المبادئ التغايرية الكامنة وراء طريقة العناصر المحدودة
جوزيف لوي لاغرانج (1736–1813)	1788		الميكانيكا التحليلية؛ الصياغة التغايرية للميكانيكا
اللورد رايلي (1842–1919)	سبعينيات القرن التاسع عشر		طرائق الطاقة للاهتزاز؛ تمهيد لطريقة رايلي–ريتز
فالتر ريتز (1878–1909)	1909	(Ritz, 1909)	طريقة التقريب التغايري؛ قالب مفاهيمي للعناصر المحدودة القائمة على الإزاحة
بوريس غالركين (1871–1945)	1915	(Galerkin, 1915)	طريقة البواقي الموزونة؛ تحرير العناصر المحدودة من المبادئ التغايرية
ريتشارد كورانت (1888–1972)	1943	(Courant, 1943)	دوال تجريبية قطعية على مجالات فرعية مثلثية؛ مصفوفات متناثرة بالدعم الموضعي
طرائق الحساب اليدوي: طريقة القوى			
كلود لوي نافييه (1785–1836)	1826	(Navier, 1826)	أول معالجة منهجية للعوارض غير محددة استاتيكياً
بنوا كلابيرون (1799–1864)	1857	(Clapeyron, 1857)	معادلة العزوم الثلاثة للعوارض المستمرة
ألفريد كليبش (1833–1872)	1862	(Clebsch, 1862a)	طريقة إزاحة مبكرة للجمالونات المفصلية ثلاثية الأبعاد
جيمس كليرك ماكسويل (1831–1879)	1864	(Maxwell, 1864c)	مبرهنة التقابل؛ معاملات المطاوعة
كريستيان أوتو موهر (1835–1918)	1868	(Mohr, 1868)	مبرهنتا مساحة العزوم؛ تناظر العارضة المترافقة؛ دائرة موهر
إميل فينكلر (1835–1888)	1868	(Winkler, 1875)	نظرية مبكرة لخطوط تأثير الأحمال المتحركة
فيليب فون زايدل (1821–1896)	1873	(Seidel, 1873)	طريقة تكرارية للمنظومات الخطية (غاوس–زايدل)

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجدول 11.1 تابع من الصفحة السابقة

المؤلف	التاريخ	المرجع	الإسهام الرئيس
ألبرتو كاستيليانو (1884–1847)	1879	(Castigliano, 1879)	طرائق الطاقة؛ مبرهنات تربط طاقة الانفعال بالقوى والإزاحات
هاينريش ماندرلا	1880		تحليل تكراري للإطارات باستعمال دورانات العقد مجاهيل
باريه دي سان-فنان (1886–1797)	1883	(Saint-Venant, 1855c)	تعليقات تصل عمل كليبش بعمل نافييه الأسبق
هاينريش مولر–بريسلاو (1925–1851)	1886	(Müller-Breslau, 1886)	تنظيم طريقة القوى؛ مبدأ خط التأثير
طرائق الحساب اليدوي: طريقة الإزاحة			
أكسل بنديكسن (1946–1881)	1914	(Bendixen, 1914)	معادلات الميل–الانحراف (التطور الأوروبي)
جورج أ. ماني	1915	(Maney, 1915)	طريقة الميل–الانحراف (التنظيم الأمريكي)
هاردي كروس (1959–1885)	1930	(Cross, 1932)	طريقة توزيع العزوم
جوزيف إ. غولدبرغ	1934	(Goldberg, 1934)	توزيع الميل لتحليل الأحمال الجانبية
ريتشارد ساوثويل (1970–1888)	1935	(Southwell, 1935)	طريقة الاسترخاء
الفروق المحدودة			
كارل بيرسون (1936–1857)	1905	(Pearson, 1905)	أبحاث تجريبية على السدود
لويس فراي ريتشاردسون (1953–1881)	1911	(Richardson, 1911)	طريقة الفروق المحدودة لتحليل الإجهاد
الطرائق المصفوفية والعناصر المحدودة			
جون أرجيريس (2004–1913)	1954	(Argyris and Kelsey, 1960)	التحليل الإنشائي المصفوفي؛ مبادئ الطاقة؛ أسس التحليل اللاخطي
م. ج. تيرنر، ر. و. كلوف، هـ. س. مارتن، ل. ج. توب	1956	(Turner) andothers, 1956	طريقة الصلابة المباشرة؛ عناصر مثلثية للإجهاد المستوي

يتبع في الصفحة التالية

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجدول 11.1 *تابع من الصفحة السابقة*

المؤلف	التاريخ	المرجع	الإسهام الرئيس
مايكل ج. تيرنر (1909–1985)	1959	(Turner, 1959)	عرض رسمي لطريقة الصلابة المباشرة
راي و. كلوف (1920–2016)	1960	(Clough, 1960)	صاغ مصطلح «طريقة العناصر المحدودة»؛ التوسيع إلى الأوساط المتصلة
إدوارد ل. ويلسون (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	أول تحليل لاخطي بالعناصر المحدودة
ناثان م. نيومارك (1910–1981)	1959		طريقة تكامل زمني للتحليل الديناميكي
إ. ل. ويلسون ور. و. كلوف	1962	(Wilson and Clough, 1962)	أول تحليل ديناميكي بالعناصر المحدودة (صياغة مصفوفية لطريقة نيومارك)
أو. س. زينكيفيتش (1921–2009) وي. ك. تشيونغ	1965	(Zienkiewicz, 1967)	أول كتاب في العناصر المحدودة
ج. س. برزيمينيكي (1924–2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	كتاب منهجي في التحليل الإنشائي المصفوفي
غيلبرت سترانغ وجورج فيكس	1973	(Strang and Fix, 1973)	نظرية التقارب الرياضية لطريقة العناصر المحدودة

11.9.1 الخلاصة

تتبع هذا الفصل تطور التحليل الإنشائي من عمل نافييه الرائد على العوارض المستمرة، مروراً بتطوير الطرائق العامة للمنشآت غير محددة استاتيكياً، وصولاً إلى الطرائق المصفوفية وتحليل العناصر المحدودة اللذين يهيمنان على الممارسة المعاصرة.

تبرز عدة موضوعات من هذا القوس التاريخي:

من الخاص إلى العام: تناولت الطرائق المبكرة (عوارض نافييه المستمرة وعزوم كلابيرون الثلاثة) أشكالاً إنشائية محددة. ونشأت تدريجياً طرائق أعم: مبرهنة ماكسويل للتقابل، وطرائق كاستيليانو للطاقة، وطريقة القوى المنهجية لمولر–بريسلاو. وبلغ هذا التقدم نحو العمومية ذروته في الطرائق المصفوفية، التي تعامل جميع المنشآت (ثم جميع الأوساط المتصلة) ضمن إطار موحد.

تكامل طريقتي القوى والإزاحة: طور القرن التاسع عشر المقاربتين معاً—طريقة القوى (ماكسويل وموهر وكاستيليانو) وطريقة الإزاحة (الميل–الانحراف وتوزيع العزوم). وقدمت كل منهما مزايا بحسب المنشأ وتفضيلات المحلل. ووحدت الطرائق المصفوفية المقاربتين مع الاحتفاظ بالمزايا الحسابية لطريقة الإزاحة.

النظرية والحساب: أتاح كل تقدم كبير تقنية الحساب المتاحة. أمكن حل معادلات كلابيرون يدوياً. وجعل

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

توزيع العزوم تحليل الإطارات متعددة الطوابق عملياً. وتطلبت الطرائق المصفوفية حواسيب رقمية. وقاد التفاعل بين البصيرة النظرية والقدرة الحسابية التقدم في كل مرحلة.

البصيرة الفيزيائية والصرامة الرياضية: جمعت أفضل الطرائق الفهم الفيزيائي (تفسيرات موهر الهندسية وموازنة كروس التكرارية) بالصرامة الرياضية (مبرهنة ماكسويل للتقابل ومبادئ الطاقة). وجعل هذا الجمع الطرائق موثوقة وقابلة للتدريس معاً.

الاستمرارية مع ميكانيكا الأوساط المتصلة: ظل التحليل الإنشائي طوال هذا التطور راسخاً في ميكانيكا الأوساط المتصلة التي أرساها كوشي ونافييه ومعاصروهما. وترجع مبادئ الطاقة وشروط التوافق والعلاقات التكوينية كلها إلى النظرية الأساسية المطورة في أوائل القرن التاسع عشر.

يقف المحلل الإنشائي الحديث، الذي يعمل ببرمجيات عناصر محدودة متقدمة، عند نهاية سلسلة طويلة من التطور الفكري. وتجسد مصفوفات صلابة العناصر التي تحسبها البرمجيات تلقائياً مبادئ المرونة نفسها التي اشتقها نافييه من المبادئ الأولى. وتردد عملية التجميع مبرهنة ماكسويل للتقابل. وتنفذ خوارزميات الحل فلسفة طريقة الإزاحة التي طورها بنديكسن وماني وكروس.

لا يوفر فهم هذا التطور التاريخي منظوراً تاريخياً فحسب، بل بصيرة في أسباب عمل الطرائق كما تعمل، والمواضع التي تلائمها، وكيف يمكن توسيعها. وما زالت الطرائق الكلاسيكية ذات قيمة في التدريس (إذ توفر الحدس الفيزيائي)، والتحليل الأولي (إذ تعطي تقديرات سريعة)، والتحقق (بمقارنة نتائج الحاسوب بالحسابات اليدوية).

ومع استمرار تطور التحليل الإنشائي—نحو التحليل اللاخطي والاستجابة الديناميكية والتحسين وتكميم عدم اليقين—فإنه يبني على أسس أُرست على مدى قرنين. وقد أنشأ التركيب الذي حققه رواد القرن التاسع عشر، بتحويل الرياضيات المجردة لميكانيكا الأوساط المتصلة إلى طرائق عملية للتحليل الإنشائي، تخصصاً يواصل النمو مع بقائه وفياً لجذوره.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



فيرمير، عالم الفلك (1668)

تمتد يد العالم نحو الكرة السماوية: النظرية تمسك أخيراً ببنية الواقع.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12 الطرائق الحاسوبية

ملخص

يتتبع هذا الفصل تطور الطرائق الحاسوبية في التحليل الإنشائي، أي الطرائق التي تتطلب أساساً حل منظومات معادلات متقطعة، ولذلك لم تصبح عملية إلا مع ظهور الحوسبة الرقمية. وانطلاقاً من طريقة الفروق المحدودة التي استخدمها ريتشاردسون لتحليل الإجهادات (1911)، نتابع نشوء التحليل الإنشائي بالمصفوفات من خلال صيغ الطاقة التي وضعها أرجيريس والتعاون بين بوينغ وبيركلي الذي أفضى إلى طريقة الصلابة المباشرة. ويبلغ الفصل ذروته مع إطلاق كلوف اسم طريقة العناصر المحدودة (1960)، وأولى تطبيقاتها في تحليل السدود، والتطور السريع لإمكانات التحليل اللاخطي والديناميكي. ويمثل قرار ناستران (1969) بالتخلي عن طريقة القوى انتصار الصيغ القائمة على الإزاحة، وهي الصيغ التي تحدد ملامح الميكانيكا الحاسوبية الحديثة.

12.1 طرائق الفروق المحدودة للأوساط المتصلة 384
12.1.1 بيرسون وريتشاردسون: تحليل إجهادات السدود (1905–1911) 385
12.1.2 طرائق الحل التكرارية 386
12.2 التحليل الإنشائي بالمصفوفات 387
12.2.1 كرون: تحليل الشبكات والتماثلات الإنشائية 387
12.2.2 يوهان هـ. أرجيريس (1913–2004) 388
12.2.3 سياق الطيران (الأجنحة الدلتا): خمسينيات القرن العشرين 388
12.2.4 المكتب الوطني للمعايير/البحرية؛ صموئيل ليفي 389
12.2.5 بوينغ؛ تيرنر وطريقة الصلابة المباشرة 391
12.3 طريقة العناصر المحدودة 394
12.3.1 الأسس الرياضية 394
12.3.2 الأسبقية والمصطلحات: ما طريقة العناصر المحدودة وما ليست إياه 398
12.3.3 راي كلوف (1920–2016) . . . 398
12.3.4 الحواسيب المبكرة وبرنامج بيركلي 399
12.3.5 سد نورفورك: أول تطبيق رئيس . 400
12.3.6 التحليل اللاخطي والديناميكي (1960–1962) 400
12.4 التوحيد والنشر 402
12.4.1 أوليغ زينكيفيتش (1921–2009) 402
12.4.2 مؤتمر رايت–باترسون (1965) . 402
12.4.3 ريتشارد غالاغر (1927–1997) . 403
12.4.4 الجدل بين طريقة القوى وطريقة الصلابة 404
12.4.5 قرار ناستران (1969) 404
12.4.6 التعميم 404
12.4.7 الكتب الدراسية والاعتماد العالمي 405
12.4.8 الأثر والتطبيقات الراهنة 406
12.5 الخلاصة والإسهامات الرئيسة 406
12.6 الخاتمة 408

12.1 طرائق الفروق المحدودة للأوساط المتصلة

عالجت طرائق الحساب اليدوي الواردة في الفصل 11 منظومات إنشائية متقطعة، مثل الإطارات والجمالونات والجوائز المستمرة، لكنها واجهت قيوداً جوهرية ناجمة عن حجم الحسابات. فحتى الإطار المتوسط المتعدد الطوابق قد يتضمن 40–50 مجهولاً من الإزاحات؛ وكان تكوين المعادلات وإجراء الحذف والتعويض العكسي يدوياً قد يستهلك عدة أيام من العمل المركز. وقد خففت الإجراءات التكرارية هذا العبء، لكنها ظلت كثيفة العمل ولم توفر مساراً منهجياً لمسائل ذات تعقيد اعتباطي.

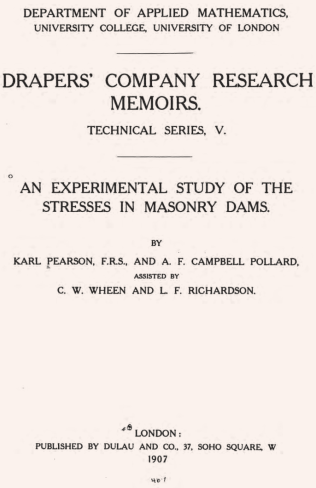
وبالتوازي مع هذه التطورات في التحليل الإنشائي، سعى مسار بحثي مستقل إلى حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحكم الأوساط المتصلة. وقد أتاحت طريقة الفروق المحدودة، التي تستبدل بالمشتقات فروقاً

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جبرية على شبكة، مساراً عددياً لمسائل المرونة التي يتعذر حلها تحليلياً، ففتحت بذلك إمكانات لم يكن بوسع الطرائق اليدوية تناولها قط.

12.1.1 بيرسون وريتشاردسون: تحليل إجهادات السدود (1905–1911)

كان كارل بيرسون (1857–1936)، الأستاذ في كلية لندن الجامعية وأحد مؤسسي الإحصاء الرياضي، قد كُلّف بإتمام العمل الضخم الذي بدأه Todhunter **and** Pearson, 1893 قبل أن يبلغ الأربعين من عمره. ومن اللافت بالنسبة إلى عالم رياضيات أنه انجذب بعد ذلك إلى مسائل المرونة التطبيقية في أوائل القرن العشرين. وكان من بينها توزيع الإجهادات والقص في سدود البناء، وقد بحثها بالتجارب على النماذج وبعمل نظري مرافق (Pearson, 1905; Pearson **andothers,** 1907)، كما يبين الشكل 12.1.


DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,
UNIVERSITY COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON

DRAPERS' COMPANY RESEARCH MEMOIRS.

TECHNICAL SERIES, V.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRESSES IN MASONRY DAMS.

BY

KARL PEARSON, F.R.S., AND A. F. CAMPBELL POLLARD,

ASSISTED BY

C. W. WHEEN AND L. F. RICHARDSON.

LONDON:
PUBLISHED BY DULAU AND CO., 37, SOHO SQUARE, W
1907

شكل 12.1: عمل بيرسون التجريبي على السدود (Pearson **andothers,** 1907)

كان بيرسون ومعاونوه صريحين بشأن حدود ما حققوه. إذ تؤكد مقدمة مذكرتهم المنشورة سنة 1907 أن وقتاً طويلاً صُرف في البحث عن حلول تقريبية لأشكال واقعية من مقاطع السدود:

> يحتوي هذا التقرير عن العمل على نماذج السدود، المنفذ خلال السنوات الثلاث الأخيرة في قسم الرياضيات التطبيقية بكلية لندن الجامعية، كما يحدث كثيراً في بحوث مماثلة، على وصف لجزء يسير لا يكاد يبلغ العُشر من الدراسات التجريبية والنظرية التي نُفذت أو جرت محاولة تنفيذها. وقد أُمضيت أسابيع كثيرة، بل لن يكون من المبالغة القول أشهر كثيرة، سعياً إلى إيجاد حلول لا دقيقة بل تقريبية للمعادلة (iii)، تلائم (أ) الأنماط الشائعة لمقاطع السدود، و(ب) ما تبين لنا تجريبياً أنه الشكل العام لتوزيع القص على القاعدة. وإذا لم ننجح حتى الآن في هذه المحاولات، فلا يعني ذلك أن النجاح لن يكلل لاحقاً جهودنا أو، على الأرجح، جهود غيرنا.
>
> Pearson **andothers,** 1907 An experimental study of the stress in Masonry Dams

كان لويس فراي ريتشاردسون (1881–1953) أحد المساعدين الذين ورد شكرهم في هذا العمل. ومع أن بيرسون أقر بعدم نجاح جهوده التحليلية، فقد أدرك أن غيره قد ينجح لاحقاً؛ وبالفعل كان ريتشاردسون نفسه هو الذي قدم، في غضون بضع سنوات، أحد أقدم التطبيقات الهندسية المنهجية لاستبدال المعادلات التفاضلية الجزئية الحاكمة للمرونة بـمعادلات فروق محدودة *على شبكة*. وقد أولى اهتماماً عملياً *لـ*الحدود غير

المنتظمة (“نقاط الحدود” في مقابل “نقاط الجسم”) وللواقع الحسابي المتمثل في حل المنظومة الجبرية الناتجة (Richardson, 1911)، كما يبين الشكل 12.2.[1]

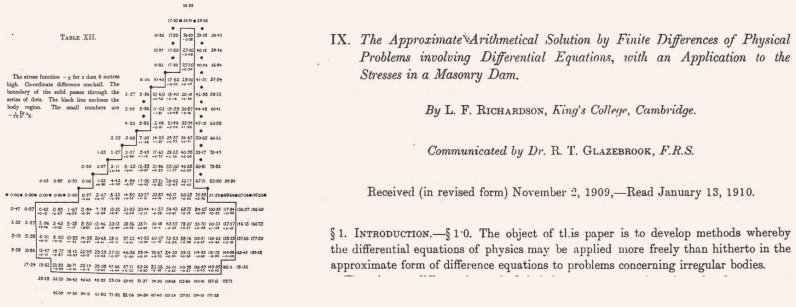


TABLE XII.

IX. *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam.*

By L. F. RICHARDSON, *King's College, Cambridge.*

Communicated by Dr. R. T. GLAZEBROOK, *F.R.S.*

Received (in revised form) November 2, 1909,—Read January 13, 1910.

§ 1. INTRODUCTION.—§ 1·0. The object of this paper is to develop methods whereby the differential equations of physics may be applied more freely than hitherto in the approximate form of difference equations to problems concerning irregular bodies.

شكل 12.2: تحليل ريتشاردسون بالفروق المحدودة لمسألة إجهادات سد (Richardson, 1911)

يمكن تلخيص إسهام ريتشاردسون في هذا السياق فيما يأتي:

1. تحويل مسألة الوسط المتصل إلى مجموعة محدودة من معادلات نقاط الشبكة باستعمال الفروق المركزية
2. معالجة التعقيد الهندسي بمعاملة خاصة لنقاط الحدود
3. حل المنظومة الخطية الناتجة بالتقريب المتعاقب، وهي طريقة حل شبه تكرارية تُعرف اليوم على نطاق واسع باسم طريقة *ريتشاردسون*، مع استكمالها بأفكار تنقيح الشبكة والاستقراء التي ارتبطت لاحقاً باسمه ارتباطاً وثيقاً

أما تقنية الاستقراء، أي استعمال الحلول على شبكات تُنقح تباعاً لتقدير الحل الدقيق، فتُعرف الآن في جميع أنحاء العالم باسم *استقراء ريتشاردسون*، وما زالت إحدى الركائز الأساسية للتحليل العددي.

مكانتها في الحوسبة الإنشائية. حلت طريقة العناصر المحدودة لاحقاً، إلى حد كبير، محل الفروق المحدودة في التقسيم المكاني للهندسات المعقدة. ومع ذلك، يظل *التقدم* الزمني بالفروق المحدودة (مثل مخططات الفروق المركزية وطريقة نيومارك) أساسياً في الديناميكا الإنشائية، كما تجمع تطبيقات عديدة للعناصر المحدودة بين التقسيم المكاني بهذه العناصر والتكامل الزمني بالفروق المحدودة.

12.1.2 طرائق الحل التكرارية

ينتج من تقسيم المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية بالفروق المحدودة منظومات كبيرة من المعادلات الخطية ذات مصفوفات معاملات متناثرة ومنظمة البنية. وأدرك ريتشاردسون أن الحل المباشر (الحذف الغاوسي) غير عملي للمنظومات الكبيرة، فطور طرائق تكرارية.

[1] كثيراً ما تُنسب ورقة ريتشاردسون إلى سنة مجلد المجلة (1911)، لكن العمل نفسه استُلم سنة 1909 وقُرئ في مطلع سنة 1910.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الصلة بطريقة غاوس–سايدل. كانت الطريقة التكرارية التي استخدمها ريتشاردسون وثيقة الصلة بما وصفه فيليب لودفيغ فون سايدل سنة 1874 (Seidel, 1873 PDF) لحل المنظومات الناشئة من مسائل المربعات الصغرى (§L.2.3.1). وتعتمد الطريقة على تحديث كل مجهول بالتتابع باستعمال أحدث قيم جميع المجهولات الأخرى. ويبدو أن غاوس كان قد أبلغها في وقت أسبق إلى تلميذه غيرلينغ (1823)، وإن كان سايدل ربما لم يعلم بذلك. وقد أصبحت التقنية تُعرف باسم طريقة غاوس–سايدل. ويقدم القسم §27.4 مثالاً لافتاً على التطابق الوثيق بين طريقة توزيع العزوم وإجراء غاوس–سايدل للتحليل التكراري.

الإرخاء المتعاقب الزائد (SOR). تحقق تسريع مهم بإدخال معامل إرخاء زائد $\omega > 1$:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

حيث $r_i^{(k)}$ هو باقي المعادلة رقم i. ويتوقف الاختيار الأمثل لـω على الخصائص الطيفية للمسألة؛ ففي الحالات الملائمة، يمكن لطريقة الإرخاء المتعاقب الزائد أن تسرع التقارب بدرجة كبيرة مقارنة بتكرار غاوس–سايدل الأساسي.

أثبتت هذه التقنيات التكرارية ضرورتها لا لمسائل الفروق المحدودة وحدها، بل أيضاً للمنظومات الكبيرة المتناثرة التي نشأت لاحقاً عن تقسيمات العناصر المحدودة.

12.2 التحليل الإنشائي بالمصفوفات

كانت طرائق الحساب اليدوي الواردة في الفصل 11، مثل الميل–الانحراف وتوزيع العزوم، تتضمن ضمنياً جميع مقومات التحليل الإنشائي بالمصفوفات. وكان المطلوب أمرين: (1) ترميز مصفوفي منهجي لتنظيم الحسابات، و(2) آلات حاسبة قادرة على معالجة المنظومات الناتجة. وقد ظهر كلاهما في العقد الذي أعقب الحرب العالمية الثانية.

لم يغير الحاسوب ما يحسبه التحليل الإنشائي؛ بل غير ما يستطيع التحليل الإنشائي حسابه.

12.2.1 كرون: تحليل الشبكات والتماثلات الإنشائية

طور غابرييل كرون (1901–1968)، أثناء عمله في شركة جنرال إلكتريك، طرائق موترية لتحليل الشبكات الكهربائية كان لها تأثير عميق في التحليل الإنشائي. وقد بينت ورقته المنشورة سنة 1944 بعنوان "التحليل الموتري والدوائر المكافئة للمنشآت المرنة" (Kron, 1944) وجود تماثلات عميقة بين الشبكات الكهربائية والمنظومات الإنشائية.

استبقت "طريقة التمزيق" التي وضعها كرون، أي تفكيك منظومة كبيرة إلى منظومات فرعية وتحليل كل منها على حدة ثم إعادة وصلها بشروط التوافق، تقنيات البنى الفرعية الحديثة في تحليل العناصر المحدودة. كما وفر ترميزه الموتري، وإن بدا غير مألوف للمهندسين الإنشائيين في البداية، إطاراً رياضياً صارماً للتحويل بين منظومات الإحداثيات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12.2.2 يوهان هـ. أرجيريس (1913–2004)

نشر جون أرجيريس (1913–2004)، الشكل 12.14a، سلسلة مقالات في أربعة أعداد من مجلة *Aircraft Engineering* خلال عامي 1954–1955، تمثل معلماً رئيسياً في إضفاء الصيغة المنهجية على التحليل الإنشائي بالمصفوفات. ثم جُمعت هذه المقالات ووُسعت لاحقاً في Argyris **and** Kelsey, 1960.

استند أرجيريس صراحة إلى مبرهنات كاستيليانو في الطاقة ومبادئ ماكسويل في التقابل، وصاغها بترميز مصفوفي ملائم للحساب المنهجي. كما أكد الازدواجية بين صيغ القوى (المطاوعة) وصيغ الإزاحات (الصلابة):

> إن التماثل بين التطورات الخاصة بالمطاوعات والصلابات ... يبين بوضوح أنه، بموازاة تحليل المنشآت الذي تُتخذ فيه القوى مجهولات، لا بد من وجود نظرية مقابلة تُتخذ فيها التشوهات مجهولات.
>
> Argyris **and** Kelsey, 1960 Energy theorems and structural analysis

أوضح العرض المتوازي في جدوله الثاني (الشكل 12.7a) أن طريقة القوى التقليدية وطريقة الإزاحة تسيران في خطوات متماثلة تماماً. وقد ساعد هذا التوضيح المفاهيمي المهندسين على فهم الوحدة الرياضية الكامنة وراء النهجين المختلفين.

شملت إسهامات أرجيريس ما يأتي:

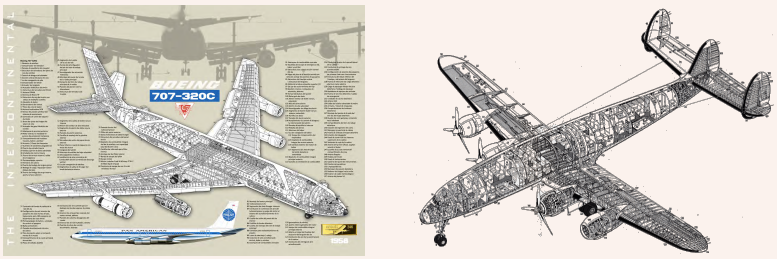
- ترميز مصفوفي منهجي للتحليل الإنشائي
- عرض واضح لمبادئ الطاقة في صورة مصفوفية
- إطار يصل الطرائق التقليدية بالتنفيذ الحاسوبي
- أساس للتحليل اللاخطي من خلال الصيغ التزايدية

12.2.3 سياق الطيران (الأجنحة الدلتا): خمسينيات القرن العشرين

السياق التاريخي أدى الانتقال السريع في أواخر أربعينيات القرن العشرين وأوائل خمسينياته، من الأجنحة المستقيمة التقليدية إلى أشكال الأجنحة المكسوحة والدلتا، إلى مسائل في التحليل الإنشائي لم تعد الطرائق التقليدية القائمة على الجوائز كافية لها. فقد جمعت أجنحة الدلتا بين نسب باعية صغيرة، وصفائح تغطية رقيقة، وعوارض طولية غير متوازية، ومسارات أحمال زائدة التقييد بدرجة كبيرة، مما ولد اقتراناً قوياً بين الانحناء في اتجاه البحر والانحناء في اتجاه الوتر واللي. ولم يكن من الممكن تمثيل أنماط الإجهاد والتشوه الناتجة تمثيلاً موثوقاً باستعمال نماذج مثالية مبسطة أحادية البعد، ولا سيما في منطقة جذر الجناح وفي الترتيبات متعددة العوارض. ولم تكن هذه النقائص نظرية فحسب، بل حدت مباشرة من دقة تصميم الطائرات وكفاءته في وقت كانت فيه هوامش الأداء تتقلص وكانت دورات التجريب مكلفة.

جاء الدافع إلى التحليل الإنشائي الحاسوبي إلى حد كبير من صناعة الطيران. فبحلول أوائل خمسينيات القرن العشرين، أصبحت الطائرات التجارية والعسكرية المضغوطة (الشكل 12.3) تجميعات معقدة من الأضلاع والعوارض الطولية والألواح الرقيقة، تكوّن أشكالاً شبيهة بالجوائز والقشريات ذات زيادة كبيرة في التقييد.

كانت طريقة القوى التقليدية، المبنية على أعمال ماكسويل وموهر وكاستيليانو، مناسبة لهذه المنشآت حين أمكن نمذجة الألواح، على نحو محافظ، بوصفها عناصر حاملة لقوى القص داخل مستواها. ومع الاختيار المدروس لمنظومات القوى الزائدة والتحقق التجريبي، أمكن حتى استيعاب الأجنحة المكسوحة ذات نسبة

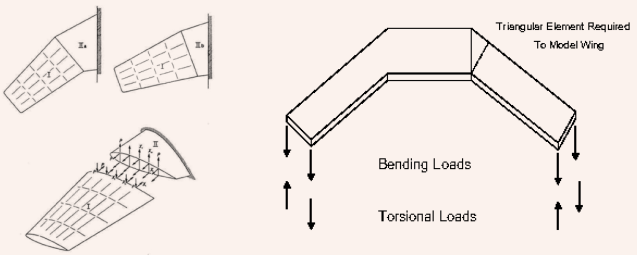


(a) لوكهيد كونستيليشن (1943–1958)　　(b) بوينغ 707 (1958–1979)

شكل 12.3: طائرات تجارية من خمسينيات القرن العشرين

الباع الكبيرة (Felippa, 2001). وبالمثل، وجدت طريقة الإزاحة التقليدية (الميل–الانحراف) تطبيقاً في تحليل الاهتزازات والمرونة الهوائية، حيث كانت حسابات الإزاحة الدقيقة ضرورية.

غير أن متطلبات الطائرات العسكرية كانت تتغير. فقد تطلبت الأجنحة الدلتا المصممة للطيران فوق الصوتي عناصر لوحية ثنائية البعد ذات أشكال هندسية اعتباطية، مثل المثلثات والأشكال الرباعية، لم يعد ممكناً تمثيلها مثالياً بعناصر أحادية البعد (الشكل 12.4a). وقد دفعت "مسألة جناح الدلتا" هذه إلى تطوير مناهج تحليلية وحاسوبية جديدة.



(a) منشأ تجريبي لجناح دلتا مكسوح (Clough **and** Wilson, 1999)

(b) محاولات الحل القائمة على المطاوعة (Argyris **and** Kelsey, 1960)

شكل 12.4: مسألة جناح الدلتا ومحاولات الحل المبكرة

12.2.4 المكتب الوطني للمعايير/البحرية؛ صموئيل ليفي

خلال المرحلة المبكرة من الحرب الباردة، حافظ المكتب الوطني للمعايير (NBS، سلف المعهد الوطني للمعايير والتقنية NIST) على تعاون بحثي وثيق ومستمر مع مكتب الملاحة الجوية التابع للبحرية الأمريكية. وقد فرضت متطلبات البحرية لتشكيلات الأجنحة السريعة والمكسوحة والدلتا مطالب غير مسبوقة على طرائق التحليل الإنشائي، ولا سيما لهياكل الطائرات رقيقة الجدران وشديدة الزيادة في التقييد التي تنهار فيها الفرضيات التبسيطية التقليدية. ومن خلال برامج بحثية ممولة من البحرية ونُفذت في المكتب الوطني

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

للمعايير، طورت مجموعات متخصصة، مثل مجموعة منشآت الطائرات التي قادها صموئيل ليفي، صيغاً تحليلية متقدمة صُممت صراحة لأجهزة الحوسبة الرقمية الناشئة.

تُعد ورقة Levy, 1953 عملاً بارزاً، لكن من المؤسف أنها نادراً ما تُستشهد خارج أدبيات الطيران. فهي تمثل إحدى أقدم المحاولات المنهجية لصياغة مسألة جناح الدلتا على نحو قابل للمعالجة الحاسوبية وموجه بالمصفوفات، كما أنها سبقت عمل بوينغ الذي سيُناقش أدناه.

> طريقة التحليل هي إحدى طرائق التشوهات المتوافقة. ويُعد الحمل الذي يحمله الجناح مجموع: (1) ما تحمله العوارض الطولية وصفائح التغطية في الانحناء باتجاه البحر، و(2) ما تحمله الأضلاع وصفائح التغطية في الانحناء باتجاه الوتر، و(3) ما تحمله صفائح التغطية في اللي. ويُحدد الحمل الذي تحمله كل واحدة من هذه الآليات الثلاث بدلالة الانحرافات عند وصلات الأضلاع والعوارض الطولية. ثم يُساوى مجموع هذه الأحمال، معبراً عنه بدلالة الانحرافات، بالقوى الخارجية المطبقة عند الوصلات. وتُحل المعادلات الناتجة لإيجاد الانحرافات عند الوصلات. ومن الانحرافات تُحدد بدورها إجهادات الانحناء واللي، وبذلك يُستكمل تحليل تشوهات الجناح وإجهاداته.
>
> Levy, 1953 "*Structural analysis and influence coefficients for delta wings*"

تقوم الطريقة على مبدأ *التشوهات المتوافقة*، حيث تُعبر استجابة الجناح الإنشائية بكاملها بدلالة مجموعة محدودة من متغيرات الإزاحة، هي انحرافات وصلات الأضلاع والعوارض الطولية. ويُفكك الجناح مفاهيمياً إلى آليات متفاعلة لحمل الأحمال: انحناء العوارض الطولية وصفائح التغطية باتجاه البحر، وانحناء الأضلاع وصفائح التغطية باتجاه الوتر، واللي الذي تحمله صفائح التغطية أساساً (الشكل 12.5). وتُسهم كل آلية بقوى داخلية معبراً عنها بدلالة انحرافات الوصلات نفسها، وبذلك تفرض التوافق الحركي.

يُفرض الاتزان بمساواة مجموع القوى الداخلية عند كل وصلة بالأحمال الخارجية المطبقة،

$$P_r = L_r^S + L_r^R + L_r^T,$$

الأمر الذي يؤدي، بعد التجميع على جميع الوصلات، إلى العلاقة العامة

$$\{P\} = [A]\{y\},$$

حيث $[A]$ مصفوفة صلابة مركبة تُستخرج بتراكب الآليات الثلاث. ثم تُحسب الانحرافات من

$$\{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

وبعد ذلك تُستعاد القوى الداخلية والإجهادات بالتعويض العكسي.

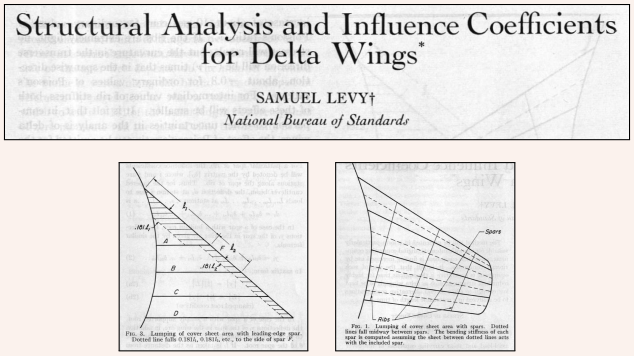
كتب ليفي أيضاً، على مستوى العناصر المنفردة، علاقات المطاوعة المحلية $\{y\} = [\delta]\{L\}$ وصيغة الصلابة المكافئة $\{L\} = [\delta]^{-1}\{y\}$. ومن المنظور التاريخي، كانت صياغته متمركزة حول الإزاحة وقائمة على المصفوفات، لكنها ظلت خاصة بالمسألة: فتفكيك المنشأ إلى آليات إنشائية صُمم خصيصاً لأجنحة الدلتا، ولم يكن تجريد العنصر قد أصبح عاماً بعد. ولذلك يُفهم عمله على أفضل وجه بوصفه خطوة انتقالية حاسمة نحو التحليل القائم على الصلابة، لا بوصفه طريقة عناصر محدودة بالمعنى الحديث.

ليفي (1953): طريقة التشوهات المتوافقة

$$\{P\} = [A]\{y\}, \qquad \{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

حيث يُكتب اتزان العقد مباشرة بدلالة انحرافات الوصلات، وتُستخرج مصفوفة الصلابة المركبة $[A]$ بتراكب إسهامات الصلابة القائمة على الآليات (انحناء العوارض الطولية، وانحناء الأضلاع، واللي).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*

SAMUEL LEVY†

National Bureau of Standards

شكل 12.5: تفاصيل من Levy, 1953

12.2.5 بوينغ؛ تيرنر وطريقة الصلابة المباشرة

في يونيو 1952، التحق راي و. كلوف (1920–2016)، وكان آنذاك أستاذاً مساعداً شاباً في جامعة كاليفورنيا في بيركلي، بشركة بوينغ زميلاً صيفياً من أعضاء هيئة التدريس تحت إشراف م. جوناثان تيرنر (Clough, 2004). وكُلّف كلوف، ضمن وحدة الديناميكا الإنشائية، بتحليل خصائص الاهتزاز والانحراف لنموذج إنشائي كبير لجناح دلتا. وقد ثبت قصور المحاولات الأولية لتمثيل الجناح كتجميع من عناصر جوائز أحادية البعد، مؤكدة بذلك حدود النماذج المثالية التقليدية التي كانت بحوث أجنحة الدلتا المعاصرة قد كشفتها.

تمثلت الخطوة المفاهيمية الأساسية لتيرنر، التي صاغها صراحة في Turner **andothers,** 1956، في بناء التحليل الإنشائي بكامله بدلالة إزاحات العقد بدلاً من القوى الداخلية. وفُرض شرطان أساسيان: اتزان القوى وتوافق التشوهات. فعندما تُتخذ إزاحات العقد مجهولات، لا يعود للتحديد الاستاتيكي شأن؛ إذ إن حقل الإزاحة الصحيح هو الحقل الذي يحقق الاتزان.

تُعرض الطريقة أولاً باستذكار العلاقة الأولية لنابض مرن خطي،

$$F = k\,\delta,$$

ثم تعميمها على منظومات متعددة درجات الحرية باستعمال الترميز المصفوفي،

$$\{F\} = [K]\{\delta\}.$$

وتُستخرج مصفوفة الصلابة العامة $[K]$ بالجمع المباشر لمصفوفات صلابة الوحدات الإنشائية المنفردة، من جوائز وعوارض طولية وأضلاع ومقويات وصفائح، بعد إحالة كل منها إلى منظومة إحداثيات عقدية مشتركة.

ومن الناحية الإجرائية، عرّف تيرنر بناء $[K]$ عموداً بعد عمود: فمع تثبيت جميع درجات الحرية العقدية، تُفرض مركبة إزاحة واحدة عند عقدة واحدة؛ وتملأ القوى اللازمة لفرض تلك الإزاحة العمود المقابل. وقبل فرض الشروط الحدية، تكون المصفوفة منفردة، وهو ما يعكس أنماط حركة الجسم الصلب. وتُفرض شروط المساند بحذف مركبات الإزاحة المعلومة، فتنتج منظومة مختزلة غير منفردة.

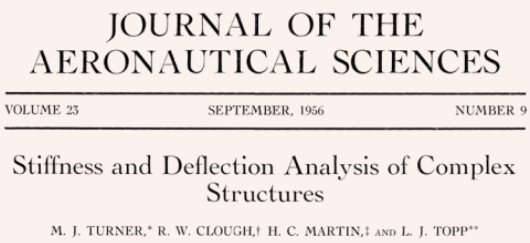
تيرنر (1956–1959): طريقة الصلابة المباشرة

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \qquad [K] = \sum_{e} K^{e},$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث تسهم كل مصفوفة صلابة عنصر K^e في الصلابة العامة عن طريق التراكب. وتُحل الإزاحات أولاً، ثم تُستخرج القوى الداخلية والإجهادات بالتعويض العكسي.

قدم تيرنر أول عرض رسمي لهذا الإجراء في اجتماع لجنة المنشآت والمواد التابعة لـAGARD في آخن (Turner, 1959)، مؤكداً الطبيعة الخوارزمية للتجميع وملاءمته للحوسبة الرقمية. وأشار كذلك إلى إمكان معالجة المسائل اللاخطية، الناشئة من الانحرافات الكبيرة أو التأثيرات الحرارية، بالخطْيَنة التزايدية مع تحديث الصلابة، مستبقاً بذلك تطورات التحليل اللاخطي اللاحقة.


JOURNAL OF THE
AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23 SEPTEMBER, 1956 NUMBER 9

Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP**

شكل 12.6: التحليل الإنشائي بالمصفوفات (Turner **andothers,** 1956)

لم يتحقق التوحيد النهائي لطريقة الصلابة المباشرة بابتكار مفهومي جديد، بل بتدوينها المنهجي. وقد اضطلع بريزيمينيكي بهذا الدور في كتابه المرجعي *Theory of Matrix Structural Analysis* (Przemieniecki, 1968). وانطلاقاً مباشرة من تطورات بوينغ وصياغة تيرنر لدى AGARD، عرض بريزيمينيكي طريقة الصلابة إطاراً موحداً قائماً على العناصر وقابلاً للتطبيق على الجمالونات والجوائز والإطارات والشبكات والصفيحات. ومن خلال توحيد الترميز، وتوضيح تجزئة المصفوفات وحذف القيود، والتأكيد على التنفيذ الخوارزمي، حوّل الكتاب منهجية بحثية متقدمة إلى أداة هندسية قابلة للتدريس والاعتماد على نطاق واسع. وبهذا العمل أصبحت طريقة الصلابة المباشرة أساس التحليل الإنشائي الحديث بالمصفوفات والسلف المباشر لصيغ العناصر المحدودة.

للتفاصيل التحليلية، انظر §41.2.2

كانت الابتكارات الأساسية للطريقة هي:

- **مصفوفات صلابة العناصر:** يوصف كل عضو إنشائي بمصفوفة صلابة $[k]$ تربط قوى نهايتي العنصر بإزاحتيهما: $\{f\} = [k]\{d\}$
- **التحويل إلى الإحداثيات العامة:** تُحوّل مصفوفات العناصر، المعبر عنها بطبيعتها في إحداثيات محلية، إلى منظومة إحداثيات عامة مشتركة
- **التجميع بالتراكب:** تُجمع مصفوفة صلابة المنشأ العامة $[K]$ بجمع إسهامات جميع العناصر مع مراعاة اتصالها
- **التجزئة والحل:** تُجزأ معادلة الصلابة الرئيسة $\{F\} = [K]\{D\}$ لفصل الإزاحات المعلومة عن المجهولة، ثم تُحل لإيجاد المجهولات
- **التعويض العكسي:** تُستعاد قوى نهايات العناصر من مصفوفات صلابة العناصر والإزاحات المحسوبة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تميز كلمة "المباشرة" هذه الطريقة من طرائق المطاوعة (القوى) الأقدم، التي كانت تتطلب تعيين القوى الزائدة. أما طريقة الصلابة فتتعامل مباشرة مع الإزاحات بوصفها مجهولات، من دون حاجة إلى تحديد الزوائد. وتُعامل كل المنشآت، المحددة وغير المحددة استاتيكياً، معاملة موحدة (Przemieniecki, 1968).

تكمن قوة طريقة الصلابة المباشرة في طابعها المنهجي والخوارزمي:

1. تعريف العناصر والعقد
2. توليد مصفوفات صلابة العناصر (من الصيغ القياسية)
3. التحويل إلى الإحداثيات العامة
4. تجميع مصفوفة الصلابة العامة
5. تطبيق الشروط الحدية
6. حل $[K]\{D\} = \{F\}$ لإيجاد الإزاحات
7. استعادة قوى العناصر

تتبع كل خطوة قواعد محددة، مما يجعل الطريقة مثالية للتنفيذ الحاسوبي. وبحلول سنة 1960، كان هذا النهج قد بدأ يُبرمج في برامج التحليل الإنشائي.

12.2.5.1 المطاوعة في مقابل الصلابة: جدل مستمر

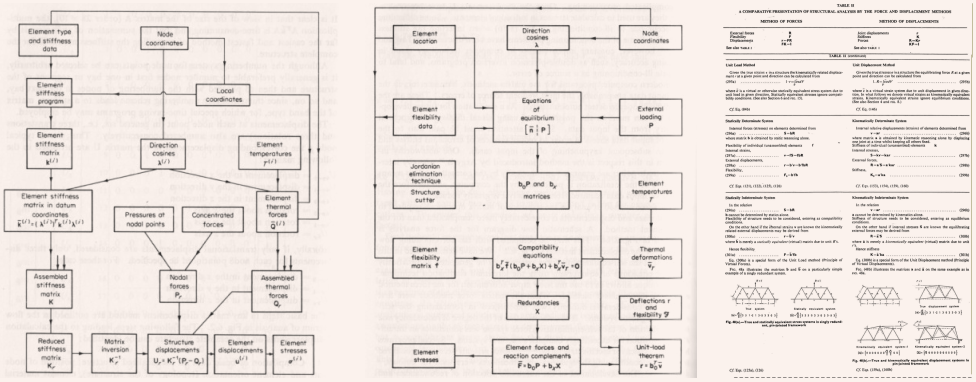
منذ منتصف خمسينيات القرن العشرين، استمر الجدل حول تفوق طريقة المطاوعة أو طريقة الصلابة.

حاول العرض المتوازي في الجدول الثاني من Argyris **and** Kelsey, 1960، الشكل 12.7، أن يبين أن طريقة القوى التقليدية وطريقة الإزاحة تمران بالتتابع نفسه من الخطوات تماماً. ثم نشر Przemieniecki, 1968[2] كتابه الرائد الذي قارن فيه بين الطريقتين بأمثلة عديدة.

خلص بعض المهندسين، حين أصبحوا قادرين أخيراً على كتابة برامج فورتران، إلى أن الطريقتين متقاربتان في قدراتهما وأن اختيار إحداهما مسألة ذوق. واختارت معظم مجموعات المنشآت، وفاءً للتقاليد، طريقة القوى التقليدية. لكن قلة من المهندسين الذين جربوا تنفيذ الطريقتين لاحظوا فرقاً مهماً. وكان ذلك قبل ظهور طريقة الصلابة المباشرة التي لا نظير مزدوجاً لها ضمن التفكيك (Felippa, 2001).

استمر استعمال البرامج القديمة القائمة على طريقة القوى التقليدية في شركات طيران كثيرة. ويذكّر هذا الانقسام بجواب أينشتاين عندما سُئل عن رد فعل الحرس القديم تجاه الفيزياء الجديدة: "لم نقنعهم؛ بل عشنا بعدهم." فكثيراً ما كان المهندسون الإنشائيون الذين عُينوا في أربعينيات القرن العشرين وخمسينياته يشغلون مناصب إدارية في الستينيات، ويفضلون طريقة القوى التقليدية. ففي النهاية، لم يكن المطلوب، في رأيهم، سوى خوارزميات تجعل الحاسوب ينتقي الزوائد الجيدة تلقائياً. وقد بُذل جهد كبير في ستينيات القرن العشرين على أدوات "تقطيع المنشآت" تلك.

[2] قدم الكتاب كثيراً من المفاهيم والرموز المستخدمة اليوم، وما يزال من أفضل الكتب في هذا الموضوع.



(a) مقارنة أرجيريس الجدولية (b) طريقة القوى (c) طريقة الإزاحة

شكل 12.7: مقارنة بين نهجي القوى والإزاحة (Argyris **and** Kelsey, 1960; Przemieniecki, 1968)

12.3 طريقة العناصر المحدودة

الانتقال: من الصلابة المباشرة إلى العناصر المحدودة. بحلول نهاية خمسينيات القرن العشرين، كانت طريقة الصلابة المباشرة قد بلغت صيغة خوارزمية ناضجة وعامة تماماً. فكانت المنشآت تُمثل كتجميعات من مكونات متقطعة، وتُجمع مصفوفات صلابة العناصر في منظومة عامة، وتُفرض الشروط الحدية بحذف القيود، وتُحل الإزاحات أولاً ثم تُستعاد القوى بالتعويض العكسي. ولم يكن ما بقي بلا حل هو الإجراء الحاسوبي، بل تفسيره ومجال انطباقه. فقد طُورت طريقة الصلابة المباشرة أساساً في سياق المنشآت الهيكلية والقشريات المقواة، حيث كانت العناصر تقابل بطبيعتها أعضاء فيزيائية قابلة للتعيين.

تمثلت الخطوة المفاهيمية الحاسمة نحو طريقة العناصر المحدودة في إدراك إمكان تطبيق الإطار نفسه القائم على الصلابة تطبيقاً منهجياً على *الأوساط المتصلة*، وذلك بإدخال تقسيم اصطناعي إلى عناصر مزودة بحقول إزاحة مفترضة. وقد وحّدت هذه الخطوة التحليل الإنشائي بالمصفوفات مع نظريات التغاير والتقريب التي تطورت بصورة مستقلة في الرياضيات والميكانيكا. وهكذا لم تظهر طريقة العناصر المحدودة بديلاً لطريقة الصلابة المباشرة، بل امتداداً طبيعياً لها من التجميعات الإنشائية المتقطعة إلى أوساط متصلة ذات أشكال هندسية اعتباطية.

12.3.1 الأسس الرياضية

احتوت الطرائق المصفوفية التي طُورت في بوينغ على جميع مكونات ما سيصبح طريقة العناصر المحدودة. وكان ما ينقصها هو الإطار المفاهيمي الموحد الذي يصل الممارسة الهندسية بالنظرية الرياضية. وقد كان هذا الإطار يتطور بالتوازي من خلال أعمال علماء الرياضيات.

ريتز (1878–1909). طور فالتر ريتز (1878–1909) تقنية تقريب للمسائل التغايرية: يُعبر عن الدالة المجهولة بتركيب خطي من دوال مقبولة، وتُحدد المعاملات بتصغير الطاقة (Ritz, 1909).[3]

[3] ادعى اللورد رايلي أسبقية هذا العمل، فنشأ اسم "طريقة رايلي–ريتز".

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

غاليركين (1871–1945). وسع بوريس غاليركين (1871–1945) طرائق التقريب إلى ما وراء المسائل التغايرية باستعمال طريقة البواقي الموزونة (Galerkin, 1915): إذ يُشترط أن يكون باقي المعادلة الحاكمة متعامداً مع دوال وزن مختارة.

لا تمثل طريقة غاليركين في الميكانيكا الإنشائية الحاسوبية مجرد تعميم تاريخي للتقنيات التغايرية؛ بل هي المبدأ الموحد الذي يصل الفروق المحدودة وطرائق الطاقة والعناصر المحدودة. فمن خلال فرض الاتزان بمعنى تكاملي، بجعل الباقي متعامداً مع فضاء التغيرات المقبولة، توفر طريقة غاليركين الصيغة الضعيفة المستخدمة عملياً. وعندما تُختار دوال التجربة والوزن متطابقة (اختيار بوبنوف–غاليركين)، تكون الصيغة الناتجة هي بالضبط الصيغة المستعملة في التحليل القياسي للعناصر المحدودة القائم على الإزاحة. وبهذا المعنى، من الأفضل النظر إلى طريقة العناصر المحدودة لا بوصفها اختراعاً مستقلاً، بل بوصفها تقسيماً خاصاً بطريقة غاليركين مطبقاً على فضاءات تقريب كثيرة الحدود المعرفة على أجزاء.

للتفاصيل التحليلية، انظر §51.3.4

ألكسندر هرينيكوف (1941). قدم ألكسندر هرينيكوف (1896–1984)، وهو مهندس إنشائي روسي–كندي، *تماثل الشبكة القضيبية* لحل مسائل المرونة (Hrennikoff, 1941). فقد استبدلت "طريقته الإطارية" بصفيحة أو غشاء متصل شبكة مكافئة من عناصر قضيبية أحادية البعد، يقارب سلوكها الجمعي سلوك الوسط المتصل. وعلى الرغم من اقتصار النهج على المجالات المستطيلة وعدم قدرته على معالجة الأشكال الهندسية الاعتباطية، فقد أرسى المفهوم الأساسي لتقسيم مجال متصل إلى تجميع من عناصر أبسط، وهو الجوهر المفاهيمي لتحليل العناصر المحدودة.

ريتشارد كورانت (1888–1972). قدم ريتشارد كورانت (1888–1972)، مستقلاً عن هرينيكوف ومتعاملاً مع المسألة من منظور رياضي بحت، دوال تجربة معرفة على أجزاء ضمن مناطق فرعية مثلثية، وذلك في محاضرته أمام الجمعية الرياضية الأمريكية سنة 1943 (Courant, 1943).

بدأ كورانت بمراجعة طريقة رايلي–ريتز التقليدية، التي يُسعى فيها إلى تصغير الدالي $I(\phi)$ بتقريب الحل بواسطة تراكيب خطية من دوال الإحداثيات $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$، الشكل 12.8:

$$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n \tag{12.1}$$

وتُحدد المعاملات c_i بالتعويض عن هذا التعبير في المسألة التغايرية وحل منظومة المعادلات الخطية الناتجة عن شرط التصغير:

$$I(\phi_n) = F(c_1, \ldots, c_n) = \min . \tag{12.2}$$

ومع سلامة هذا النهج نظرياً، أشار كورانت إلى قيوده العملية:

> تكمن الصعوبة التي تتحدى المهارة الابتكارية لعالم الرياضيات التطبيقية في إيجاد دوال إحداثيات مناسبة وتقدير دقة النتيجة. ومن وجهة النظر العملية، يعتمد أي نجاح تقريباً على اختيار دوال الإحداثيات. فإذا اختيرت هذه الدوال من دون مراعاة صحيحة لخصوصية المسألة، أصبحت مهمة الحساب ميؤوساً منها.
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

للتفاصيل التحليلية، انظر §47.6

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

If we begin with such a system of coordinate functions, it is clear that for n sufficiently large and for a suitable choice of the coefficients $c_1, c_2, \cdots, c_n$ of (14) we can find admissible functions ϕ_n for which $I(\phi_n)$ differs arbitrarily little from d. In other words, it is possible to find a minimizing sequence $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$ as a sequence of linear combinations of the coordinate functions. In order to obtain such a minimizing sequence we choose the c_i in the following manner. We consider any function ϕ_n defined by (14) and substitute it in our variational problem. $I(\phi_n)$ then becomes a function $F(c_1, \cdots, c_n)$ of the n parameters c_i which we may now determine from the ordinary minimum problem of the calculus

(15) $$I(\phi_n) = F(c_1, \cdots, c_n) = \min.$$

Ritz's construction proceeds as follows: We start with an arbitrarily chosen system of "*coordinate functions*"

(13) $$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots,$$

which should satisfy the two conditions:

(a) Any linear combination

(14) $$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$$

of them is admissible in the variational problem.

(b) They should form a complete system of functions in the sense that *any* admissible function ϕ and its relevant derivatives may be approximated with any degree of accuracy by a linear combination of coordinate functions and of their corresponding derivatives, respectively.

شكل 12.8: كورانت يقدم دوال *التجربة* (Courant, 1943)

انتقل كورانت بعد ذلك إلى طرائق الفروق المحدودة، مشيراً إلى تفوقها في حالات كثيرة لأن "الفروق المحدودة ترتبط مباشرة بقيم الدالة نفسها من دون وسيط مثل دوال الإحداثيات الاعتباطية إلى حد ما." وقادته هذه الملاحظة إلى اقتراح إعادة تفسير حاسمة ستصبح الأساس المفاهيمي لطريقة العناصر المحدودة:

> إذا لم تتضمن المسائل التغايرية مشتقات أعلى من الرتبة الأولى، أمكن إخضاع طريقة الفروق المحدودة لطريقة رايلي–ريتز بقصر المنافسة على الدوال ϕ الخطية ضمن شبكات تقسيم شبكتنا إلى مثلثات تكوّنها أقطار مربعات الشبكة. فبالنسبة إلى هذه الدوال متعددة السطوح، تتحول التكاملات إلى مجاميع معبر عنها بعدد محدود من قيم ϕ عند نقاط الشبكة، وتصبح شروط النهاية الصغرى معادلات الفروق لدينا.
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

البصيرة الأساسية هنا عميقة: فبدلاً من اختيار دوال إحداثيات عامة تمتد على المجال كله، يمكن استعمال دوال بسيطة خطية على *أجزاء* ومعرفة محلياً فوق مناطق فرعية مثلثية. وتتغير الدالة ϕ خطياً فوق كل مثلث، ويُفرض الاستمرار على الحواف المشتركة بين المثلثات المتجاورة. وتصبح الكميات المجهولة ببساطة قيم الدالة ϕ_i عند رؤوس شبكة التثليث. وعند التعويض بهذه الدوال الخطية على أجزاء (متعددة السطوح) في تكامل تغايري، مثل تكامل ديريشليه

$$D(v) = \iint_B \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy, \tag{12.3}$$

يُختزل التكامل إلى مجموع محدود لا يتضمن إلا القيم العقدية، وتنتج الشروط التغايرية منظومة معادلات جبرية خطية لهذه المجهولات.

أدرك كورانت فوراً ما يتيحه هذا التفسير من تعميم:

> يوحي هذا التفسير بتعميم واسع يوفر مرونة كبيرة ويبدو ذا قيمة عملية معتبرة. فبدلاً من البدء بشبكة مربعة أو مستطيلة، يمكننا منذ البداية النظر في أي سطوح متعددة الوجوه ذات حواف فوق شبكة مختارة اعتباطياً (ويفضل أن تكون مثلثية). وتصبح تكاملاتنا مرة أخرى مجاميع محدودة، ويكون شرط النهاية الصغرى معادلات لقيم ϕ عند نقاط الشبكة. ومع أن هذه المعادلات تبدو أقل بساطة من معادلات الفروق الأصلية، فإننا نكسب ميزة هائلة هي قابلية التكيف الأفضل مع معطيات المسألة، ومن ثم يمكننا غالباً الحصول على نتائج جيدة بقدر ضئيل جداً من الحساب العددي.
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في ملحق محاضرته، برهن كورانت الطريقة على مسألة لي سان-فنان لمقطع متعدد الاتصال، هو إطار مربع ذو فتحة مربعة. واستغل التناظر لاختزال المجال الحسابي إلى ثُمن المقطع، ثم طبق كلاً من طريقة رايلي–ريتز التقليدية بدوال تجربة كثيرة الحدود ونهجه الجديد القائم على الشبكة المثلثية. وذكر بالنسبة إلى النهج الأخير:

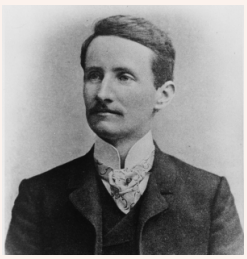
> اختيرت دوالنا خطية في مثلثات الشبكة، ولذلك أفضت المسألة التغايرية إلى معادلات خطية في u_i.
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

أظهرت النتائج تقارباً سريعاً للصلابة الليية S: أعطت الحالة (أ) ذات المجهولين $S = 0.344$؛ وأعطت الحالة (ب) ذات المجهولات الثلاثة $S = 0.352$؛ وأنتجت الحالة (ج) ذات المجهولات الخمسة $S = 0.353$؛ كما أعطت الحالة (د) ذات المجهولات التسعة، المقابلة لطريقة الفروق المحدودة العادية، $S = 0.353$. ومن اللافت أن أخشن شبكة تثليث، وبها قيمتان عقديتان مجهولتان فقط، التقطت الصلابة ضمن 3% من النتيجة المتقاربة.

اختتم كورانت بتقييم لانطباق الطريقة الواسع وعبارة تستشرف المستقبل:

> تبين هذه النتائج، في ذاتها وبالمقارنة، أن الطريقة المعممة للشبكات المثلثية تبدو ذات مزايا... ومن الواضح أنها قابلة للتكيف مع أي نوع من المجالات، وبدرجة تفوق كثيراً إجراء رايلي–ريتز الذي يضع فيه إنشاء الدوال المقبولة عادة عقبات حاسمة. وسيُبين في منشور مستقل كيف يمكن توسيع الطريقة أيضاً إلى مسائل الصفيحات وغيرها من المسائل التي تتضمن مشتقات أعلى.
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

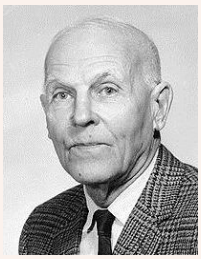
اتضح أن هذا التوسيع الموعود إلى مسائل الصفيحات، التي تتطلب استمراراً من الفئة C^1 للمعادلات من الرتبة الرابعة، أصعب بكثير مما توقعه كورانت ربما، وشغل باحثي العناصر المحدودة عقوداً لاحقة. ومع ذلك، كان الإطار المفاهيمي الأساسي قد اكتمل: إذ أمكن بناء حلول تقريبية لمسائل القيم الحدية بتقسيم المجال إلى عناصر هندسية بسيطة، وتعريف دوال تجربة كثيرة الحدود على أجزاء فوق هذه العناصر، وتحديد المعلمات العقدية المجهولة بالمبدأ التغايري.



(a) فالتر ريتز (1878–1909)



(b) بوريس غاليركين (1871–1945)



(c) هرينيكوف (1896–1984)



(d) ريتشارد كورانت (1888–1972)

شكل 12.9: الأسس الرياضية لطريقة العناصر المحدودة

كثيراً ما استُشهد بصياغة كورانت، إذا أُخذت منفردة وبأثر رجعي، بوصفها الظهور الأول لفكرة العناصر المحدودة. كما طُرحت ادعاءات مشابهة، من منظورات تخصصية مختلفة، بشأن عدد من التطورات التي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

استُعرضت للتو. ولتجنب الالتباس الناشئ من هذه التسميات بأثر رجعي، من المفيد توضيح كيفية استعمال المصطلحات والأسبقية في هذا السرد التاريخي.

12.3.2 الأسبقية والمصطلحات: ما طريقة العناصر المحدودة وما ليست إياه

تنشأ نزاعات الأسبقية المحيطة بطريقة العناصر المحدودة في الأدبيات التاريخية غالباً من اختلاف استعمال المصطلحات، لا من خلاف جوهري بشأن الرياضيات أو الخوارزميات الكامنة. فقبل إدخال مصطلح "العنصر المحدود" بزمن طويل، طور علماء الرياضيات تقنيات تقريب قوية تقوم على المبادئ التغايرية (ريتز)، والبواقي الموزونة (غاليركين)، ودوال التجربة المعرفة على أجزاء فوق مجالات فرعية (كورانت). وتشكل هذه الإسهامات أسساً رياضية جوهرية، لكنها لم تكن في ذاتها طريقة حاسوبية عامة للتحليل الهندسي.

وفي المقابل، وفرت صيغ الصلابة المصفوفية التي طورتها هندسة الطيران خلال خمسينيات القرن العشرين إجراء خوارزمياً كاملاً لتجميع منظومات كبيرة من معادلات الاتزان وحلها، لكنها صيغت في البداية بدلالة المكونات الإنشائية لا الأوساط المتصلة المقسمة. وقد ظهرت طريقة العناصر المحدودة عندما توحد مسارا التطور هذان: فقُسمت الأوساط المتصلة إلى مناطق فرعية محدودة مزودة بحقول إزاحة مفترضة، وحُكم سلوكها بمبادئ التجميع نفسها القائمة على الصلابة التي استُعملت من قبل للمنشآت المتقطعة.

ولذلك تُفهم طريقة العناصر المحدودة في هذا السرد لا بوصفها اختراعاً منفرداً يُنسب إلى شخص واحد، بل بوصفها التقاء نظرية التقريب الرياضية والتحليل الإنشائي بالمصفوفات والحوسبة الرقمية. وتتوقف ادعاءات الأسبقية على الجانب الذي يجري التشديد عليه، أهو رياضي أم خوارزمي أم اصطلاحي؛ ويخدم الوضوحَ أفضلَ ما يخدمه التمييز الصريح بين هذه الأدوار.

12.3.3 راي كلوف (1920–2016)

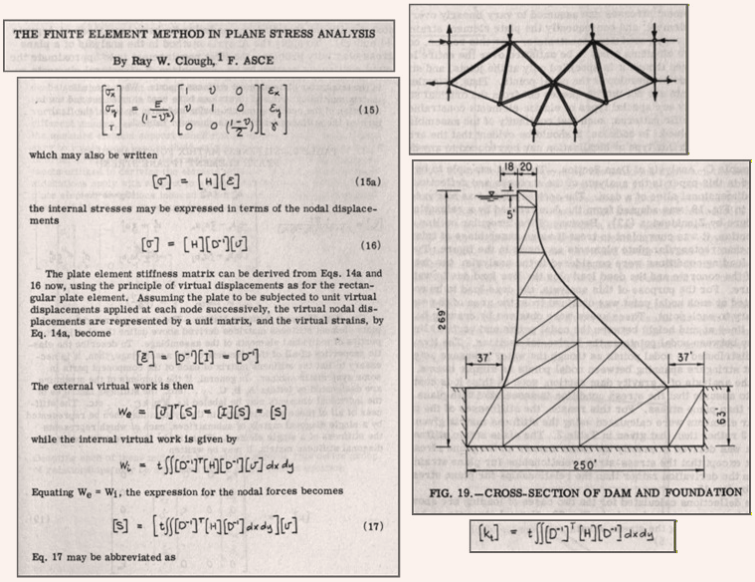
أتاح المؤتمر الثاني للجمعية الأمريكية للمهندسين المدنيين بشأن الحوسبة الإلكترونية، المنعقد في بيتسبرغ في سبتمبر 1960، لكلوف فرصة عرض الطريقة على مجتمع الهندسة المدنية. وكان التحدي الرئيس اختيار اسم مناسب. ففي بوينغ، كان تعبير "طريقة الصلابة المباشرة" يصف إجراء التجميع، لكنه لا يصف الابتكار الجوهري المتمثل في تقسيم الأوساط المتصلة إلى عناصر ذات حقول إزاحة مفترضة.

لاحظ كلوف التماثل مع الفروق المحدودة، مع إدراكه أن معادلات المرونة كانت تُطبق بصورة مستقلة في مناطق متقطعة، فقرر أن تُسمى وحدات البناء هذه "عناصر محدودة". وحملت ورقته عنوان "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis" (Clough, 1960)، الشكل 12.10.

اختتمت الورقة بملاحظات ما تزال ذات صلة:

> أثبتت الأمثلة السابقة قابلية تطبيق نهج العناصر المحدودة على تحليل مسائل الإجهاد المستوي بوجه عام. ويبدو أن النتائج تشير إلى أن الطريقة فعالة جداً ما دام التغير الخطي في الإجهاد المفترض داخل العناصر يمثّل التغير الفعلي في الإجهاد تمثيلاً معقولاً. ولذلك، عندما تتغير الإجهادات فعلياً على نحو لاخطي، يلزم أن تكون العناصر صغيرة بما يكفي لتمثيل اللاخطية بتغيرات خطية في العناصر المتجاورة. وباستثناء هذا القيد، يبدو أن تقريباً بشبكة خشنة جداً يمكن أن يعطي نتائج جيدة في مسائل كثيرة.
>
> ومن المزايا المهمة لطريقة التحليل هذه أنها متوافقة تماماً مع تحليل أنواع أخرى من المنظومات الإنشائية، مثل الإطارات والجمالونات وغيرها. ولذلك لا توجد مشكلة في تحليل منظومة مؤلفة من تراكيب لهذه العناصر، ولا يلزم إلا إنشاء مصفوفات الصلابة للأنواع المختلفة من العناصر...

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



THE FINITE ELEMENT METHOD IN PLANE STRESS ANALYSIS

By Ray W. Clough,[1] F. ASCE

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1-\nu}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma\end{bmatrix} \quad (15)$$

which may also be written

$$[\sigma] = [H][\epsilon] \quad (15a)$$

the internal stresses may be expressed in terms of the nodal displacements

$$[\sigma] = [H][D'][v] \quad (16)$$

The plate element stiffness matrix can be derived from Eqs. 14a and 16 now, using the principle of virtual displacements as for the rectangular plate element. Assuming the plate to be subjected to unit virtual displacements applied at each node successively, the virtual nodal displacements are represented by a unit matrix, and the virtual strains, by Eq. 14a, become

$$[\bar{\epsilon}] = [D'][I] = [D']$$

The external virtual work is then

$$W_e = [\bar{v}]^T[S] = [I][S] = [S]$$

while the internal virtual work is given by

$$W_i = t\iint [D']^T[H][D'][v]\,dx\,dy$$

Equating $W_e = W_i$, the expression for the nodal forces becomes

$$[S] = \left[t\iint [D']^T[H][D']\,dx\,dy\right][v] \quad (17)$$

Eq. 17 may be abbreviated as

FIG. 19.—CROSS-SECTION OF DAM AND FOUNDATION

$$[k_i] = t\iint [D']^T[H][D']\,dx\,dy$$

شكل 12.10: ورقة كلوف المنشورة سنة 1960 التي أطلقت اسم طريقة العناصر المحدودة (Clough, 1960 PDF)

”Clough, 1960 PDF “*The finite element method in plane stress analysis*

لم يكن للورقة، عند عرضها، أثر فوري كبير؛ إذ كانت الطريقة تتطلب “حواسيب رقمية آلية” لم تكن متاحة بعد للمهندسين الإنشائيين المعتادين.

12.3.4 الحواسيب المبكرة وبرنامج بيركلي

بدأ كلوف في بيركلي سنة 1957 مقرراً بعنوان “التحليل المصفوفي للمنشآت”. وكان حاسوب IBM 701، المزود بذاكرة سعتها 4K من كلمات ذات 16 بتاً، قد نُصب في كلية الهندسة. ولم يكن يستطيع حل أكثر من 40 معادلة؛ ولذلك لم تكن ممكنة إلا الشبكات الخشنة.

لم يرض طالب الدراسات العليا إدوارد ل. ويلسون (1931–2024) عن مقدار الجهد اللازم لحل مسائل العناصر المحدودة باستعمال برامج جبر المصفوفات المتاحة. وفي سنة 1958، بدأ تطوير برنامج آلي للعناصر المحدودة قائم على عناصر مستطيلة للإجهاد المستوي. وبعد أشهر من تعلم برمجة IBM 701، أنتج ويلسون برنامجاً شبه آلي محدود السعة.

وفي سنة 1959، نُصب حاسوب IBM 704، بذاكرة سعتها 32K من كلمات ذات 32 بتاً وبحساب الفاصلة العائمة، وكان أسرع بنحو مئة مرة من IBM 701. وقد أتاح ذلك تحليل منشآت عملية بشبكات دقيقة، محولاً العناصر المحدودة من موضوع بحثي طريف إلى أداة هندسية عملية.

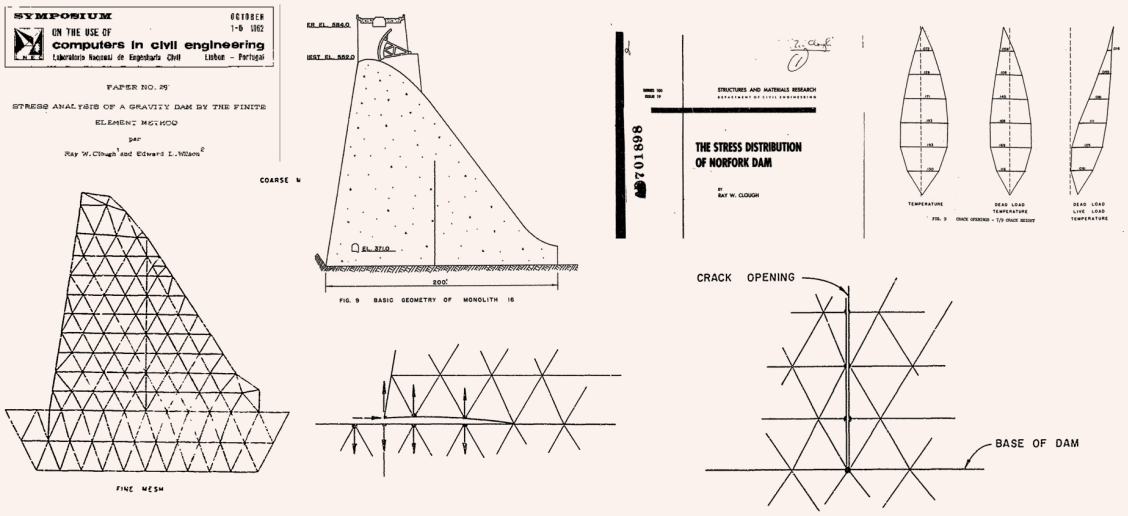
بلغت جهود ويلسون البرمجية ذروتها في برنامج SAP (برنامج التحليل الإنشائي)، الذي وزعه مجاناً على الجامعات والشركات الهندسية في أنحاء العالم. وقد سرعت استراتيجية النشر المفتوح هذه اعتماد طريقة العناصر المحدودة، وأرست في بيركلي تقليداً لتطوير البرمجيات المشتركة أثر في أجيال من برامج التحليل الإنشائي.

12.3.5 سد نورفورك: أول تطبيق رئيس

كان لجامعة كاليفورنيا في بيركلي تقليد عريق في بحوث السدود. ففي عشرينيات القرن العشرين، أجرى الأستاذ ر. إ. ديفيس دراسات لسد هوفر. وفي أواخر الخمسينيات، أجرى الأساتذة رافائيل وإبرهارت وبيرتز دراسات على النماذج والمواد لسد أوروفيل. ولذلك كان من الطبيعي أن يكون أول تطبيق رئيس لبرنامج العناصر المحدودة المطور حديثاً على سد.

بناءً على توصية الدكتور روي كارلسون، مستشار مقاطعة ليتل روك التابعة لفيلق المهندسين، قدم كلوف مقترحاً لتحليل سد نورفورك، وهو سد ثقلي به شق رأسي ناشئ من الحرارة قرب منتصفه. وأوضح المقترح قدرة الطريقة على نمذجة منشآت ذات أشكال هندسية اعتباطية وخواص مواد مختلفة في السد والأساس.

قُبل مقترح كلوف بدلاً من مقترح يستعمل حاسوباً تماثلياً قدمه ريتشارد ماكنيل من معهد كاليفورنيا للتقنية، وكان يُعد آنذاك أحدث ما توصلت إليه التقنية. وأتاح مشروع نورفورك توسيع الطريقة إلى التحليل اللاخطي لانغلاق الشق تحت الحمل الهيدروستاتيكي. وأجرى ويلسون وطالب الدراسات العليا إيان كينغ التحليلات التفصيلية. وكانت الخلاصة الهندسية المهمة أن السد المتشقق آمن.



شكل 12.11: تحليل سد نورفورك بالعناصر المحدودة (Clough, 1962; Clough **and** Wilson, 1962)

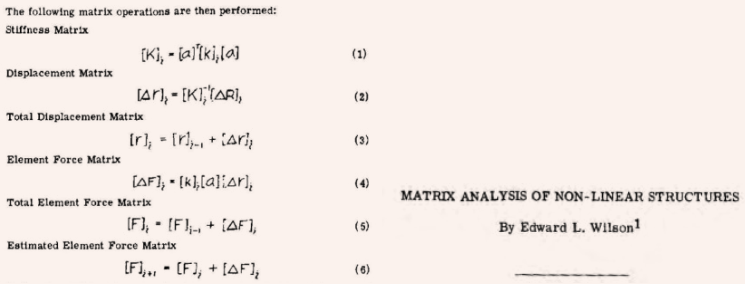
قُدم تقرير فيلق المهندسين (Clough, 1962) سنة 1962، وعُرضت ورقة ذات صلة في ندوة استعمال الحواسيب في الهندسة المدنية في لشبونة (Clough **and** Wilson, 1962). وكانت هذه المرة الثانية فقط التي ظهر فيها تعبير "العنصر المحدود" في عنوان ورقة خارج بيركلي.

12.3.6 التحليل اللاخطي والديناميكي (1960–1962)

شهد العام نفسه (1960) نشر أول تحليل لاخطي بالعناصر المحدودة. فقد كتب ويلسون، ضمن مشروع للمؤسسة الوطنية للعلوم تحت إشراف كلوف، برنامجاً لتحليل إطار ثنائي البعد بعلاقة لاخطية بين العزم

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والانحناء تعرفها معادلة رامبرغ–أوسغود. وطُبقت الأحمال تزايدياً، فأنتج ذلك تحليلاً من نمط الدفع المتزايد (Wilson, 1960)، الشكل 12.12.



The following matrix operations are then performed:

Stiffness Matrix

$$[K]_i = [a]^T[k]_i[a] \quad (1)$$

Displacement Matrix

$$[\Delta r]_i = [K]_i^{-1}[\Delta R]_i \quad (2)$$

Total Displacement Matrix

$$[r]_i = [r]_{i-1} + [\Delta r]_i \quad (3)$$

Element Force Matrix

$$[\Delta F]_i = [k]_i[a][\Delta r]_i \quad (4)$$

Total Element Force Matrix

$$[F]_i = [F]_{i-1} + [\Delta F]_i \quad (5)$$

Estimated Element Force Matrix

$$[F]_{i+1} = [F]_i + [\Delta F]_i \quad (6)$$

MATRIX ANALYSIS OF NON-LINEAR STRUCTURES

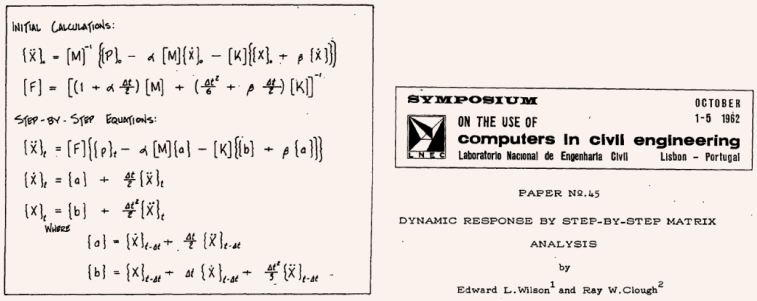
By Edward L. Wilson[1]

شكل 12.12: أول تحليل لاخطي بالعناصر المحدودة (Wilson, 1960)

يوفر نهج الحمل التزايدي المعروض في هذه الورقة طريقة عامة لتحليل المنشآت ذات خواص المواد اللاخطية. وتقرب هذه الطريقة تحليل المنشأ بمجموع تحليلات سلسلة من المنشآت، يتصرف كل منها خطياً تحت زيادة صغيرة في الحمل الخارجي. ويمكن جعل الأخطاء التي ينطوي عليها هذا التقريب صغيرة بالقدر المرغوب بمجرد تقليل مقدار زيادة الحمل.

”Wilson, 1960 *“Matrix Analysis of Nonlinear Structures*

قدم ويلسون وكلوف ورقة بارزة أخرى في ندوة لشبونة سنة 1962 عن تحليل الاستجابة الديناميكية خطوة بخطوة[4] (Wilson **and** Clough, 1962). وصاغت هذه الورقة، في صورة مصفوفية، خوارزمية التقدم الزمني التي طورها ناثان م. نيومارك (1910–1981). وكان نيومارك، وهو أحد أعلام الهندسة الإنشائية في جامعة إلينوي، قد قدم مخطط تكامله المستقر من دون شروط سنة 1959 (Newmark, 1959). وقد ألغى تنفيذ ويلسون–كلوف الحاجة إلى التكرار عند كل خطوة زمنية بواسطة قلب أولي للمصفوفة، مما جعل طريقة نيومارك عملية لمنظومات العناصر المحدودة الكبيرة، الشكل 12.13.



INITIAL CALCULATIONS:

$$\{\ddot{X}\}_0 = [M]^{-1}\left(\{P\}_0 - a_1[M]\{\dot{X}\}_0 - [K]\left(\{X\}_0 + a_2\{\dot{X}\}_0\right)\right)$$

$$[F] = \left[(1 + a_3\frac{\Delta t}{2})[M] + (\frac{\Delta t^2}{6} + a_4\frac{\Delta t}{2})[K]\right]^{-1}$$

STEP-BY-STEP EQUATIONS:

$$\{\ddot{X}\}_t = [F]\left\{\{P\}_t - a_1[M]\{a\} - [K]\left(\{b\} + a_4\{a\}\right)\right\}$$

$$\{\dot{X}\}_t = \{a\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_t$$

$$\{X\}_t = \{b\} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{X}\}_t$$

WHERE

$$\{a\} = \{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t}$$

$$\{b\} = \{X\}_{t-\Delta t} + \Delta t\{\dot{X}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{X}\}_{t-\Delta t}$$

SYMPOSIUM ON THE USE OF computers in civil engineering

Laboratorio Nacional de Engenharia Civil — Lisbon – Portugal

OCTOBER 1-6 1962

PAPER Nº.45

DYNAMIC RESPONSE BY STEP-BY-STEP MATRIX ANALYSIS

by

Edward L. Wilson[1] and Ray W. Clough[2]

شكل 12.13: أول تحليل ديناميكي بالعناصر المحدودة (Wilson **and** Clough, 1962)

توفر طريقة الخطوة بخطوة، كما عُرضت في هذه الورقة، إجراءً منهجياً لتحديد الاستجابة الديناميكية لمنظومات الكتل المتقطعة الخاضعة لأحمال اعتباطية. وتتيح صياغة معادلات الخطوة بخطوة في صورة

[4] عندما يقل تردد الحمل المطبق (الإثارة) على منشأ عن نحو ثلث أدنى تردد طبيعي لاهتزازه، يمكن إهمال آثار العطالة ومعاملة المسألة على أنها شبه استاتيكية؛ وإلا وجب إجراء تحليل ديناميكي. وقد يستلزم حتى الحمل المطبق ببطء تحليلاً ديناميكياً لمنشأ شديد المرونة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مصفوفية تحديد استجابة منظومة بتتابع متكرر من العمليات المصفوفية. وعلاوة على ذلك، يُلغى التكرار على كل زيادة زمنية، الذي تتطلبه إجراءات أخرى، بقلب أولي للمصفوفة.

”Wilson **and** Clough, 1962 “*Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis*

كان هذا العمل مقدمة لتركيز كلوف المتزايد على هندسة الزلازل، والذي بلغ ذروته في كتابه التقليدي (Clough **and** Penzien, 1975).

للتفاصيل التحليلية، انظر §52

12.4 التوحيد والنشر

12.4.1 أوليغ زينكيفيتش (1921–2009)

رسخ أولغيرد سيسيل زينكيفيتش (1921–2009)، الشكل 12.14c، المولود في إنجلترا لأب بولندي، طريقة العناصر المحدودة أداةً عامة للتحليل الهندسي. وبعد عمل مبكر في تحليل إجهادات السدود بجامعة إدنبرة، انتقل سنة 1957 إلى جامعة ويلز في سوانزي، حيث أنشأ إحدى أبرز مجموعات الميكانيكا الحاسوبية في العالم. وكان كتابه المنشور سنة 1967 بالاشتراك مع ي. ك. تشيونغ، *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*، أول كتاب مكرس بالكامل للموضوع، ودرب جيلاً من المهندسين في أنحاء العالم. وما ميز زينكيفيتش هو توسعه الدؤوب بالطريقة إلى ما وراء الميكانيكا الإنشائية، لتشمل ديناميكا الموائع وانتقال الحرارة والكهرومغناطيسية والمسائل متعددة الفيزياء المقترنة، مبيناً أن العناصر المحدودة توفر إطاراً موحداً لجميع معادلات الحقول في الفيزياء الرياضية تقريباً. وأصبحت الطبعات المتعاقبة من كتابه، التي توسعت في النهاية إلى ثلاثة مجلدات، المرجع الحاسم. كما أنتج تعاونه مع بروس آيرونز الصياغة متساوية المعلمات، وكانت مجموعته في سوانزي رائدة في التنقيح التكيفي للشبكات والطرائق المختلطة والتحليل المعتمد على الزمن. ومن خلال كتبه وطلابه وقيادته التحريرية لمجلة *International Journal for Numerical Methods in Engineering*، فعل زينكيفيتش أكثر من أي شخص آخر لنشر طريقة العناصر المحدودة دولياً.

12.4.2 مؤتمر رايت–باترسون (1965)

كان مؤتمر الطرائق المصفوفية في الميكانيكا الإنشائية، الذي عُقد في قاعدة رايت–باترسون الجوية في أكتوبر 1965، حدثاً محورياً في التوحيد الدولي لطريقة العناصر المحدودة. وقد جمع هذا اللقاء مجموعات البحث الرئيسة في التحليل الإنشائي من أنحاء العالم، موفراً منبراً لتبادل الأفكار التي كانت تتطور إلى حد كبير في مسارات متوازية.

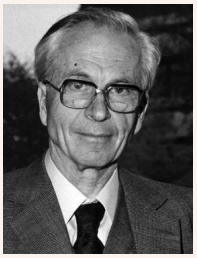
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12.4.3 ريتشارد غالاغر (1927–1997)

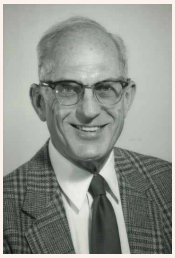
ترأس ريتشارد هـ. غالاغر[5] (1927–1997)، من جامعة كورنيل، جلسة خُصصت تحديداً لطريقة العناصر المحدودة. وقدم أرجيريس تطبيقات على الأجسام الصلبة والصفيحات والقشريات، إلى جانب صيغ عناصر جديدة شملت العنصر المثلثي المستوي ذا العقد الست في إحداثيات المساحة الطبيعية، وعنصر رباعي الوجوه الصلب ذا العقد العشر في إحداثيات الحجم الطبيعية. وأثبت المؤتمر أن الطريقة قد نضجت من تطورات منفصلة في بوينغ وبيركلي وشتوتغارت وسوانزي إلى تخصص دولي متماسك.

وكان غالاغر قد أعد في وقت أسبق دراسة AGARD رقم 69، *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis* (Gallagher, 1964)، وهي مسح شامل طلبته لجنة المنشآت والمواد التابعة لـAGARD. وقد قارن تقرير سنة 1964 هذا منهجياً بين نهجي القوى والإزاحات كما كانا يُمارسان في صناعة هياكل الطائرات، وحدد مواضع الاتفاق بين طرائق منشورة تبدو متباعدة، وقيّم صيغ العناصر من خلال تحليلات واسعة لمنشآت أجنحة متعددة الجدران. وجعلت مقارنة الدراسة التفصيلية للنماذج المثالية وتقييمها الصريح لمصادر الخطأ منها مرجعاً أساسياً للمهندسين الذين يختارون بين النهج المتنافسة.

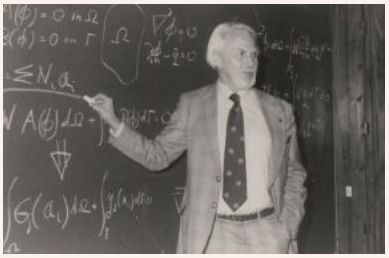
وأصبح غالاغر نفسه مساهماً رئيساً في نظرية العناصر المحدودة، ولا سيما للقشريات، كما وفر كتابه (Gallagher, 1975) مساراً مهماً آخر لنشر الطريقة.



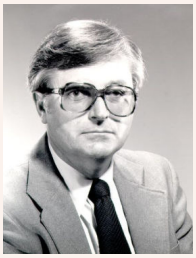
(a) أرجيريس (2004–1913)



(b) كلوف (2016–1920)



(c) زينكيفيتش (2009–1921)



(d) ويلسون (2024–1931)



(e) غالاغر (1997–1927)

شكل 12.14: المؤسسون المعاصرون لطريقة العناصر المحدودة

[5] أُدرج غالاغر في هذه الكوكبة لأنه كان الأستاذ المفضل للمؤلف حين كان طالب دراسات عليا في كورنيل، حيث درّس مقررات في العناصر المحدودة والأمثلية الإنشائية والقشريات. وكان يستطيع في مقرر القشريات اشتقاق المعادلة التفاضلية من الرتبة الثامنة التي تحكم النظرية العامة للقشريات، من دون أن يكاد ينظر إلى ملاحظاته.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12.4.4 الجدل بين طريقة القوى وطريقة الصلابة

استمر الجدل طوال أواخر خمسينيات القرن العشرين والستينيات بشأن المزايا النسبية لطريقتي القوى (المطاوعة) والإزاحات (الصلابة). وأظهرت مقارنة أرجيريس المتوازية (الشكل 12.7) أن الطريقتين تسيران عبر خطوات متماثلة. وقدم Przemieniecki, 1968 [6] مقارنة منهجية بأمثلة عديدة.

خلص بعض المهندسين القادرين على كتابة برامج فورتران إلى أن قدرات الطريقتين متشابهة، وأن الاختيار بينهما مسألة ذوق. وفضلت معظم مجموعات الطيران، تمسكاً بالتقاليد، طريقة القوى. لكن المهندسين الذين نفذوا الطريقتين لاحظوا فروقاً مهمة. فلم يكن لطريقة الصلابة المباشرة مقابل مزدوج يضاهي بساطتها الخوارزمية (Felippa, 2001).

استمر استعمال برامج طريقة القوى القديمة في كثير من شركات الطيران. وكما أشار فيليبا، يذكّر الانقسام بجواب أينشتاين عن رد فعل الحرس القديم على الفيزياء الجديدة: "لم نقنعهم؛ بل عشنا بعدهم." وكان المهندسون الذين عُينوا في أربعينيات القرن العشرين وخمسينياته، وأصبحوا آنذاك في الإدارة، يفضلون طريقة القوى. وبُذل جهد كبير خلال الستينيات على "أدوات تقطيع المنشآت"، أي خوارزميات الاختيار الآلي للزوائد.

12.4.5 قرار ناستران (1969)

جاء الحسم النهائي بقرار مؤسسي. ففي سنة 1965، طلب عرض ناسا لإنشاء منظومة العناصر المحدودة NASTRAN تطوير نسختين متزامنتين، إحداهما للإزاحة والأخرى للقوى، بقدرات متطابقة تشمل الديناميكا والانبعاج. ومُنح عقدان: لشركة MSC (نسخة الإزاحة) ولمارتن (نسخة القوى).

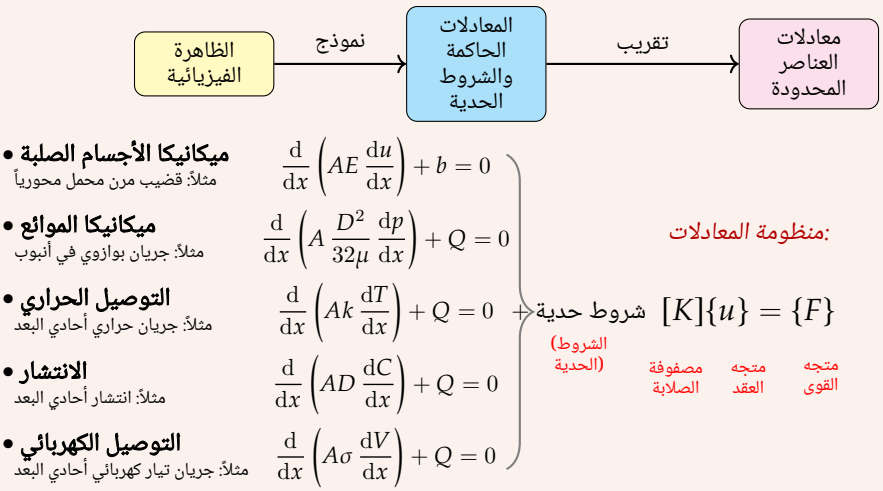
بحلول سنة 1969، أُلغي تطوير نسخة القوى. وقد مثل ذلك نهاية طريقة القوى بوصفها منافساً جدياً في برامج العناصر المحدودة العامة الأغراض، وأصبحت الصياغة القائمة على الإزاحة المعيار الشامل.

12.4.6 التعميم

مع أن طريقة العناصر المحدودة نشأت في الميكانيكا الإنشائية، فإن إطارها الرياضي الكامن، المتمثل في المبادئ التغايرية وصيغ البواقي الموزونة المطبقة على مجالات مقسمة، ثبت انطباقه على أي مسألة قيم حدية تحكمها معادلات تفاضلية جزئية. وكما يوضح الشكل 12.15، تشترك المعادلات الحاكمة لميكانيكا الأجسام الصلبة وميكانيكا الموائع والتوصيل الحراري والانتشار والتوصيل الكهربائي في البنية الرياضية نفسها، ولا تختلف إلا في المعنى الفيزيائي لمتغير الحقل ومعاملات المادة.

في كل حالة، ينتج من التقسيم بالعناصر المحدودة منظومة بالصورة المألوفة $[K]\{u\} = \{F\}$، حيث تكتسب مصفوفة الصلابة والمجهولات العقدية ومتجه القوى تفسيرات خاصة بالمسألة. وقد أدرك زينكيفيتش ومعاونوه في سوانزي هذه الشمولية في وقت مبكر، فوسعوا الطريقة منهجياً إلى انتقال الحرارة وجريان الرشح والكهرومغناطيسية، ثم إلى المسائل متعددة الفيزياء المقترنة. وهكذا تجاوزت طريقة العناصر المحدودة أصلها بوصفها أداة لتحليل إجهادات الطائرات، لتصبح التقنية العددية السائدة في جميع علوم الهندسة تقريباً.

[6] قدم هذا الكتاب كثيراً من المفاهيم والرموز التي ما تزال مستخدمة اليوم، وهو من أروع المعالجات لهذا الموضوع.



شكل 12.15: تعميم طريقة العناصر المحدودة على تخصصات فيزيائية متعددة: على الرغم من اختلاف المعادلات الحاكمة، تفضي جميعها إلى البنية الجبرية نفسها

يفصل الجدول 12.1 التفسير الفيزيائي لمتغيرات الحقل وثوابت المواد لكل فئة من المسائل التي يوحدها إطار العناصر المحدودة.

جدول 12.1: تصنيف مسائل فيزيائية متنوعة

المعادلة التكوينية	المصدر	ثوابت المادة	التدفق	متغير الحالة	مبدأ الحفظ	المسألة الفيزيائية
قانون هوك	قوة جسمية أو جر سطحي	معامل يونغ ونسبة بواسون	الإجهاد أو الانفعال	الإزاحة أو القوى	اتزان القوى	تشوه جسم مرن
قانون كيرشوف	شحنة كهربائية خارجية	الموصلية الكهربائية	التدفق الكهربائي	الجهد أو شدة التيار	اتزان التيارات	شبكة كهربائية
قانون هوك	$-2\times$ زاوية اللي	معامل القص	معدل اللي	الإجهاد أو دالة الالتواء	حفظ الطاقة الكامنة	اللي
قانون فوريه	حرارة داخلية أو خارجية	الموصلية الحرارية	التدفق الحراري	درجة الحرارة	حفظ الطاقة	انتقال الحرارة
قانون ستوكس	قوى جسمية	اللزوجة	إجهاد القص	السرعة	حفظ كمية الحركة	جريان المائع
قانون دارسي	مصادر المائع	النفاذية	معدل الجريان	الرأس الهيدروليكي	حفظ الكتلة	الجريان في وسط مسامي
قانون كولوم	الشحنة	السماحية	التدفق الكهربائي	الجهد الكهربائي	حفظ التدفق الكهربائي	الكهرباء الساكنة
قانون ماكسويل	التيار	النفاذية المغناطيسية	التدفق المغناطيسي	الجهد المغناطيسي	حفظ الجهد المغناطيسي	المغناطيسية الساكنة

12.4.7 الكتب الدراسية والاعتماد العالمي

كتب Zienkiewicz, 1967 أول كتاب دراسي مكرس لطريقة العناصر المحدودة. ومن الجدير بالملاحظة أن تحليل السدود ظهر، حتى في هذا النص التأسيسي، بين الأمثلة التوضيحية (Zienkiewicz **and** Cheung, 1964; Zienkiewicz **and** Cheung, 1965)، في إشارة مبكرة إلى الملاءمة الطبيعية للطريقة للمنشآت الضخمة والمعقدة هندسياً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قدم Zienkiewicz **and** Taylor, 2000 معالجات شاملة دربت أجيالاً من المهندسين في أنحاء العالم، وغطت صياغة العناصر لمختلف الظواهر الفيزيائية، والعناصر متساوية المعلمات، والتكامل العددي، والتحليل اللاخطي والديناميكي، والتنقيح التكيفي للشبكات.

قدم بروس آيرونز، أثناء عمله مع زينكيفيتش في سوانزي، مفهوم تساوي المعلمات (1966)، أي استعمال دوال الاستيفاء نفسها لكل من الشكل الهندسي وحقول الإزاحة (Irons, 1966). وقد أتاحت هذه الصياغة الأنيقة تمثيل حدود العناصر المنحنية تمثيلاً دقيقاً، ويسرت التكامل العددي المنهجي بتربيع غاوس على عنصر أصلي، ووحدت معاملة أنواع العناصر المتنوعة. وأصبح مفهوم تساوي المعلمات أساسياً في جميع تطبيقات العناصر المحدودة الحديثة تقريباً.

وثبت Strang **and** Fix, 1973 الأسس الرياضية بإقامة نظرية تقارب صارمة منحت الطريقة تصديقها النظري.

12.4.8 الأثر والتطبيقات الراهنة

بحلول سنة 1980، كانت طريقة العناصر المحدودة قد أصبحت الطريقة العددية السائدة للتحليل الهندسي. وأتاحت البرامج التجارية (ANSYS وABAQUS وNASTRAN وADINA وغيرها) تحليل منشآت ومنظومات ذات تعقيد غير مسبوق. واليوم توجد العناصر المحدودة في كل مكان:

- **المنشآت:** المباني والجسور والطائرات والمركبات الفضائية والسيارات
- **التصنيع:** محاكاة تشكيل المعادن والصب والتشغيل
- **الميكانيكا الحيوية:** ميكانيكا العظام، وتحليل الأنسجة الرخوة، والتخطيط الجراحي
- **الميكانيكا الجيولوجية:** تصميم الأساسات، وتحليل الأنفاق، والاستجابة للزلازل
- **تعدد الفيزياء:** الاقتران الحراري–الإنشائي، وتفاعل المائع مع المنشأ

حولت العناصر المحدودة التصميم الهندسي من فن قائم على الخبرة إلى علم تقوده المحاكاة. فأصبح من الممكن اختبار النماذج الأولية افتراضياً قبل تصنيعها مادياً، كما أمكن للأمثلية استكشاف فضاءات تصميم أكبر بمراتب عدة مما كان ممكناً من قبل.

ومع ذلك، تظل جذور العناصر المحدودة في الطرائق التقليدية، أي طريقة القوى وطريقة الإزاحة ومبادئ الطاقة، واضحة. فمصفوفة صلابة العنصر ليست سوى النظير المتقطع لمؤثر صلابة الوسط المتصل. ويعكس التجميع بالتراكب مبدأ العمل الافتراضي. كما تتبع عملية الحل منطق اتزان الإزاحة والقوة نفسه الذي أرساه ماكسويل وكاستيليانو ومعاصروهما.

12.5 الخلاصة والإسهامات الرئيسة

يلخص الجدول 12.2 أبرز المساهمين في الطرائق الحاسوبية للتحليل الإنشائي، مرتبين زمنياً حسب الفئة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 12.2: أبرز المساهمين في الطرائق الحاسوبية للتحليل الإنشائي

المساهم	السنة	المرجع	الإسهام
طرائق الفروق المحدودة			
كارل بيرسون (1857–1936)	1905	(Pearson, 1905)	دراسات تجريبية لإجهادات السدود
لويس فراي ريتشاردسون (1881–1953)	1911	(Richardson, 1911)	طريقة الفروق المحدودة لتحليل الإجهادات؛ استقراء ريتشاردسون
طرائق الحل التكرارية			
فيليب لودفيغ فون سايدل (1821–1896)	1874	(Seidel, 1873)	طريقة غاوس–سايدل التكرارية
الأسس الرياضية للعناصر المحدودة			
فالتر ريتز (1878–1909)	1909	(Ritz, 1909)	طريقة التقريب التغايري (رايلي–ريتز)
بوريس غاليركين (1871–1945)	1915	(Galerkin, 1915)	طريقة البواقي الموزونة
ألكسندر هرينيكوف (1896–1984)	1941	(Hrennikoff, 1941)	تماثل الشبكة القضيبية؛ الطريقة الإطارية للمرونة
ريتشارد كورانت (1888–1972)	1943	(Courant, 1943)	دوال تجربة معرفة على أجزاء ضمن مناطق فرعية مثلثية
التحليل الإنشائي بالمصفوفات			
غابرييل كرون (1901–1968)	1944	(Kron, 1944)	الطرائق الموترية؛ تحليل الشبكات؛ مفاهيم البنى الفرعية
جون أرجيريس (1913–2004)	1954–55	(Argyris and Kelsey, 1960)	الصياغة المصفوفية لمبرهنات الطاقة؛ ازدواجية القوة–الإزاحة
طريقة الصلابة المباشرة والعناصر المحدودة			
م. ج. تيرنر، ر. و. كلوف، هـ. س. مارتن، ل. ج. توب	1956	(Turner **andothers**, 1956)	طريقة الصلابة المباشرة؛ عناصر مثلثية للإجهاد المستوي
م. جوناثان تيرنر (1909–1985)	1959	(Turner, 1959)	العرض الرسمي لطريقة الصلابة المباشرة؛ التوسيعات اللاخطية
ناثان م. نيومارك (1910–1981)	1959	(Newmark, 1959)	طريقة نيومارك للتكامل الزمني
راي و. كلوف (1920–2016)	1960	(Clough, 1960)	أطلق اسم "طريقة العناصر المحدودة"؛ التوسيع إلى الأوساط المتصلة

يتبع في الصفحة التالية

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 12.2 – تابع

المساهم	السنة	المرجع	الإسهام
تطورات بيركلي			
إدوارد ل. ويلسون (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	أول تحليل لاخطي بالعناصر المحدودة؛ برنامج SAP
ر. و. كلوف و إ. ل. ويلسون	1962	(Clough, 1962)	تحليل سد نورفورك؛ أول تطبيق رئيس للعناصر المحدودة
إ. ل. ويلسون و ر. و. كلوف	1962	(Wilson and Clough, 1962)	أول تحليل ديناميكي بالعناصر المحدودة؛ طريقة نيومارك المصفوفية
الكتب الدراسية والنشر			
مؤتمر رايت–باترسون	1965		التوحيد الدولي لبحوث العناصر المحدودة
بروس م. آيرونز (1924–1983)	1966	(Irons, 1966)	مفهوم العنصر متساوي المعلمات
أ. س. زينكيفيتش (1921–2009) و ي. ك. تشيونغ	1967	(Zienkiewicz, 1967)	أول كتاب دراسي في العناصر المحدودة
ج. س. بريزيمينيكي (1924–2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	كتاب دراسي منهجي في التحليل الإنشائي بالمصفوفات
غيلبرت سترانغ وجورج فيكس	1973	(Strang and Fix, 1973)	نظرية التقارب الرياضية للعناصر المحدودة
ريتشارد هـ. غالاغر (1927–1997)	1975	(Gallagher, 1975)	كتاب دراسي في العناصر المحدودة؛ تطوير عناصر القشريات
تطوير البرمجيات			
ناسا / MSC / مارتن	1965–69		تطوير NASTRAN؛ إلغاء نسخة القوى سنة 1969

12.6 الخاتمة

لا تمثل الطرائق الحاسوبية التي تتبعها هذا الفصل، من فروق ريتشاردسون المحدودة مروراً بالتحليل الإنشائي بالمصفوفات ووصولاً إلى طريقة العناصر المحدودة، قطيعة مع الميكانيكا الإنشائية التقليدية، بل امتداداً منهجياً لها أتاحته الحوسبة الرقمية.

كانت التطورات الأساسية هي:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1911: طريقة ريتشاردسون للفروق المحدودة في تحليل الإجهادات، وهي أول نهج عددي منهجي لمسائل الأوساط المتصلة

1956–1954: صياغة أرجيريس المصفوفية لمبادئ الطاقة؛ تعاون تيرنر–كلوف الذي أنتج طريقة الصلابة المباشرة

1959: عرض تيرنر الرسمي لطريقة الصلابة المباشرة؛ مخطط نيومارك للتكامل الزمني

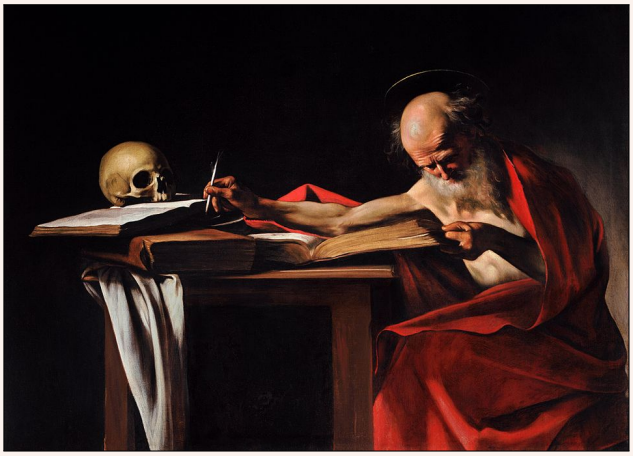
1960: إطلاق كلوف اسم طريقة العناصر المحدودة؛ أول تحليل لاخطي بالعناصر المحدودة

1962: أول تحليل ديناميكي بالعناصر المحدودة؛ وتحليل سد نورفورك الذي برهن التطبيق العملي

1969–1965: تطوير NASTRAN وانتصار الطرائق القائمة على الإزاحة

ترجع مصفوفات صلابة العناصر وإجراءات التجميع ومبادئ الطاقة في تحليل العناصر المحدودة الحديث مباشرة إلى مفاهيم طورها ماكسويل وكاستيليانو ومعاصروهما في القرن التاسع عشر. لقد غير الحاسوب ما يمكن حسابه، لا ما كان يُحسب.

يقف المحلل الإنشائي المعاصر، الذي يعمل ببرمجيات متطورة للعناصر المحدودة قادرة على حل منظومات ذات ملايين درجات الحرية، عند نهاية قوس من التطور بدأ بأول معالجة لنافييه للجوائز غير المحددة. وما تزال المبادئ هي التي أُرست قبل قرنين؛ ولم يتغير إلا نطاق التطبيق.



كارافاجيو، القديس جيروم يكتب (1606–1605)

ينسخ العالم المعرفة وينقلها، من المخطوط إلى الطباعة إلى الشيفرة؛ إنها المهمة الأبدية لحفظ المنهج ونشره.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13 من المِعداد إلى الخوارزميات: مسح تاريخي للحوسبة في العلوم والهندسة

ملخص

لا ينفصل تطور الحوسبة عن تطور الرياضيات والهندسة والاستدلال العلمي. فمن أقدم الأدوات اليدوية إلى المنظومات الرقمية الحديثة، عملت الحوسبة تدريجياً على أتمتة المعالجة الرمزية، فحررت العقل البشري للبصيرة المفاهيمية بدلاً من الحساب المتكرر. يقدم هذا الفصل عرضاً تاريخياً منهجياً لذلك التطور، مع تركيز خاص على الأدوات التي شكلت الممارسة العلمية والهندسية. ويستبعد عمداً تاريخ طريقة الصلابة وصيغ العناصر المحدودة، إذ يتناولهما فصل لاحق.

13.1 المقدمة 410
13.2 أدوات الحساب القديمة والمبكرة 411
13.3 الآلات الذاتية الميكانيكية وآلات الحساب المبكرة 412
13.4 باباج ولافليس: الأصول المفاهيمية للبرمجة 414
13.5 الحوسبة العلمية التماثلية (1900–1945) 415
13.6 الثورة الرقمية (1945–1960) 416
13.7 لغات البرمجة والبرمجيات العلمية المبكرة . 417
13.8 خط زمني للتطورات الحاسوبية الرئيسة . . 417
13.9 البرمجيات الهندسية والإنشائية المبكرة (1960–1980) 417
13.10 عصر الحاسوب الشخصي واتساع الحوسبة الهندسية (1980–2000) 419
13.11 المنظومات الحاسوبية الحديثة (2000–الحاضر) 420
13.12 تطور الكتابة التقنية وإعداد التقارير 421
13.13 الخاتمة 422

13.1 المقدمة

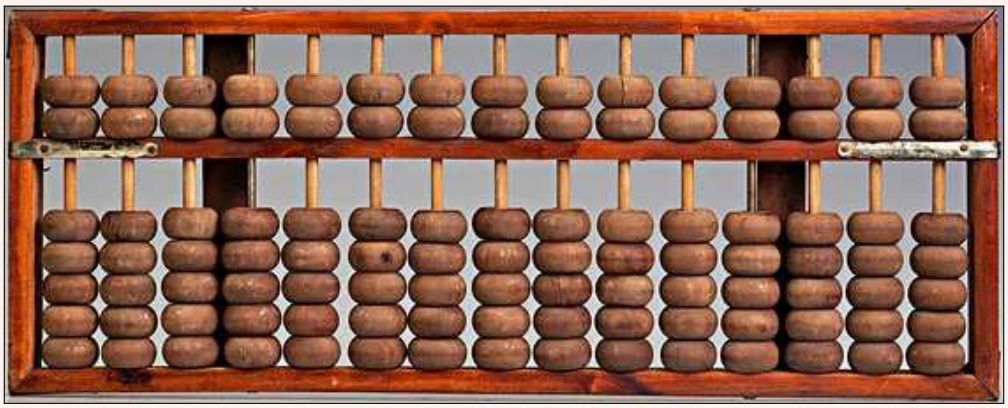
يتتبع هذا الفصل القوس الفكري الطويل الذي أنتج الحوسبة العلمية الحديثة، ابتداءً من أقدم الأدوات اليدوية ووصولاً إلى المنظومات الرقمية المتكاملة التي تقوم عليها الممارسة الهندسية اليوم. ومن المِعداد والجداول اللوغاريتمية إلى آلات باسكال ولايبنتس الحاسبة، يبين السرد كيف أرست الأتمتة الميكانيكية أساس التقدم المفاهيمي الذي حققه باباج ولافليس. وأدخل القرن العشرون المحللات التفاضلية التماثلية، ثم جاءت الثورة الرقمية التي مثلتها ENIAC وEDSAC وأقدم معماريات البرامج المخزنة. وأدى نضج لغات البرمجة، ولا سيما FORTRAN، إلى تحفيز تطوير البرمجيات الهندسية، من SAP وNASTRAN إلى ABAQUS وANSYS. ثم غيرت الحوسبة الشخصية وMATLAB وMathematica وأخيراً Python سرعة التحليل العلمي ونطاقه وقابليته لإعادة الإنتاج. ويختتم الفصل بسير العمل الحديث الذي يشمل نمذجة معلومات البناء والنمذجة البارامترية والمحاكاة السحابية، معبراً عن تخصص أصبحت فيه القدرات الحاسوبية غير قابلة للانفصال عن الإبداع الهندسي والصرامة العلمية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13.2 أدوات الحساب القديمة والمبكرة

المِعداد

أقدم أداة حسابية واسعة الاستعمال هي المِعداد، الذي ترجع أصوله إلى زمن يسبق الأرقام الموضعية بمدة طويلة. وقد ظهر بأشكال متنوعة في بلاد الرافدين واليونان والصين واليابان. ويجسد المِعداد فكرتين محوريتين: الترميز الموضعي والتمثيل الصريح للحالة، الشكل 13.1. فكل خرزة أو قطعة عد تقابل قيمة متقطعة، ويجري الحساب بانتقالات منهجية بين الحالات. وقبل ظهور التحليل المنهجي بزمن طويل، مكّن المِعداد التجار والإداريين من إجراء حسابات دقيقة قابلة للتكرار.



شكل 13.1: مِعداد صيني تقليدي (سوانبان)

لوغاريتمات نابير ومسطرة أوترد الحاسبة

قدم Napier, 1614 اللوغاريتمات سنة 1614، موفراً تبسيطاً جذرياً للحساب العددي. فمن خلال ربط الأعداد بلوغاريتماتها، بيّن نابير أن الضرب يمكن إجراؤه عن طريق جمع اللوغاريتمات، والقسمة عن طريق طرحها. وبعبارته:

> *"بهذه التناسبات، يتحول الضرب الشاق إلى جمع، والقسمة إلى طرح."*
> —جون نابير، *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)

سرع هذا التحويل بدرجة كبيرة الحسابات الفلكية والملاحة والمساحة والأعمال الهندسية المبكرة. ويوضح مثال حديث بسيط بصيرة نابير[1]. ثم استكمل هنري بريغز عمل نابير بإدخال اللوغاريتمات ذات الأساس 10 ونشر جداول مطبوعة واسعة ظلت أدوات قياسية قروناً.

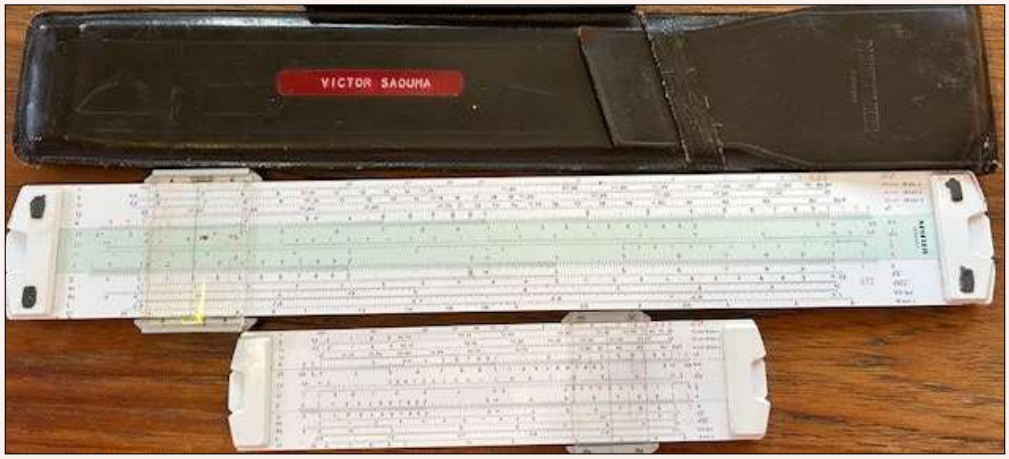
وبناءً على الاختراق المفاهيمي لنابير، قدم Oughtred, 1632 المسطرة الحاسبة نحو سنة 1632، باستعمال مقياسين لوغاريتميين منزلقين. وظلت المسطرة الحاسبة أكثر من ثلاثمئة سنة أداة الحساب

[1] على سبيل المثال، $\log(3 \times 4) = \log 3 + \log 4$. وباستعمال اللوغاريتمات العشرية، $\log 3 \approx 0.4771$ و$\log 4 \approx 0.6021$، ولذلك يعطي مجموعهما 1.0792 القيمة $10^{1.0792} \approx 12$، وهي حاصل الضرب الصحيح. وتعامل القسمة بالمثل: $\log(12/3) = \log 12 - \log 3$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الرئيسة للمهندسين. فقد أتاحت إجراء الضرب والقسمة واستخراج الجذور بسرعة، كما أتاحت، في صور متخصصة، العمليات المثلثية والأسية؛ انظر الشكل 13.2.

بحلول أواخر القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين، بلغت المساطر الحاسبة الهندسية درجة عالية من الإتقان والتخصص. واستعملها المهندسون الإنشائيون لحساب خواص المقاطع ونسب النحافة وضغوط الرياح والإجهادات المسموح بها ومعاملات العزوم، وغالباً مع كتيبات تصميم الفولاذ. واعتمد تصميم ناطحات السحاب المبكرة اعتماداً كبيراً على هذه الأدوات.



شكل 13.2: مساطر المؤلف الحاسبة من مرحلة الدراسة الجامعية

وفي هذا السياق، انتشرت بسرعة طريقة هاردي كروس لتوزيع العزوم، التي طُرحت سنة 1930، ويرجع ذلك جزئياً إلى ملاءمة حسابها التكراري المثالية للمسطرة الحاسبة. فلم تتطلب الطريقة حل منظومات كبيرة من المعادلات في آن واحد؛ بل كانت تمرر العزوم وتوازنها عبر سلسلة من العمليات المباشرة التي أمكن تنفيذها بكفاءة على المقاييس اللوغاريتمية.

13.3 الآلات الذاتية الميكانيكية وآلات الحساب المبكرة

آلة باسكال للجمع

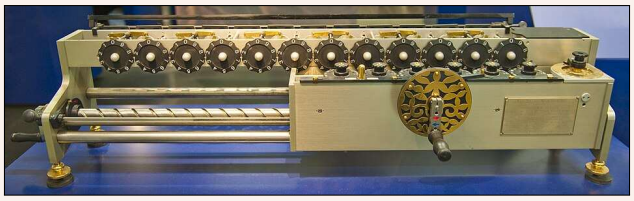
أنشأ Pascal, 1645 سنة 1642 آلة ميكانيكية للجمع (“باسكالين”) استعملت قطارات تروس لأتمتة الجمع والطرح. وكانت عمليات الحمل تنتقل ميكانيكياً عبر آلية التروس. وعلى الرغم من ارتفاع كلفتها ومحدودية مداها، مثلت باسكالين قطيعة مفاهيمية: إذ أمكن تفويض الحساب الروتيني إلى آلة.

حاسبة لايبنتس ذات الأسطوانة المتدرجة

وسع غوتفريد فيلهلم لايبنتس نطاق الحساب الميكانيكي باختراعه الأسطوانة المتدرجة. وكانت “حاسبته المتدرجة” (Leibniz, 1691b) قادرة على إجراء الضرب والقسمة بتكرار الجمع والطرح. وقد اقترح لايبنتس

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في عبارته الشهيرة أن الخلافات المنطقية يمكن، من حيث المبدأ، حسمها بالحساب، مستبقاً فكرة الاستدلال الخوارزمي، الشكل 13.3.



شكل 13.3: حاسبة لايبنتس ذات الأسطوانة المتدرجة

حاسبات العصر الصناعي

طُورت خلال القرنين الثامن عشر والتاسع عشر آلات حاسبة أكثر متانة للأعمال المصرفية والتأمين، لكنها ظلت معقدة ميكانيكياً ومرتفعة الكلفة. وواصل المهندسون الاعتماد أساساً على المساطر الحاسبة والجداول في معظم الحسابات الإنشائية والميكانيكية.

ظهرت الحاسبات الإلكترونية المحمولة في أوائل سبعينيات القرن العشرين، بدءاً بنماذج رائدة من شركات مثل كاسيو، الشكل 13.4، التي طرحت بعض أولى الحاسبات الإلكترونية المدمجة في السوق التجارية. واستبدلت هذه الأجهزة المبكرة بالحساب الميكانيكي دوائر متكاملة وشاشات LED، موفرة سرعة وقابلية للحمل غير مسبوقتين.



شكل 13.4: حاسبة كاسيو إلكترونية مبكرة (نحو 1970)

سرعان ما لحقت هوليت–باكارد بأجهزة علمية وقابلة للبرمجة أكثر تقدماً، فاحتلت مكانة مهيمنة بين المهندسين. وقدمت سلسلة HP في أواخر سبعينيات القرن العشرين وأوائل ثمانينياته، ومنها HP 10C، الشكل 13.5، وHP 11C وHP 15C، إلى مستخدمين كثيرين *الترميز البولندي العكسي*[2] (RPN)، وهي

[2] الترميز البولندي العكسي (RPN) منظومة إدخال قائمة على المكدس، تُدخل فيها المعاملات قبل العامل. فمثلاً، لحساب $3+4$، تتطلب الحاسبة ذات الترميز العكسي إدخال 3 4 +، مما يدفع 3 و4 إلى مكدس داخلي ثم يطبق العامل. ولا حاجة إلى الأقواس (فمثلاً، لحساب $5 \times (4+3)$، يُدخل 3 4 + 5 *). ويقلل هذا الترميز عدد ضغطات المفاتيح وتعقيد التحليل، لكنه قد يبدو مخالفاً للحدس لدى المستخدمين المعتادين على الترميز الوسطي القياسي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

منظومة تسبق فيها المعاملات العوامل. وقد ألغى الترميز البولندي العكسي الحاجة إلى الأقواس وقلل ضغطات المفاتيح، لكنه تطلب تحولاً مفاهيمياً قد يخالف الحدس؛ وما تزال آلة المؤلف HP 10C تذكاراً حياً لمدى الارتباك الذي أحدثه ذلك الانتقال في بدايته.



شكل 13.5: أول حاسبة اقتناها المؤلف

مثلت هذه الحاسبات جسراً حاسماً بين الحساب بالمسطرة الحاسبة والأدوات الرقمية الحديثة: فكانت محمولة ودقيقة وقابلة للبرمجة قبل انتشار الحواسيب الشخصية بزمن طويل. وترث الحاسبات العلمية والبيانية المعاصرة، سواء من كاسيو أو تكساس إنسترومنتس أو HP، هذا النسب، إذ توفر معالجة رمزية وعمليات مصفوفية وحلالات عددية لم يكن من الممكن تصورها في عصر المقاييس اللوغاريتمية.

13.4 باباج ولافليس: الأصول المفاهيمية للبرمجة

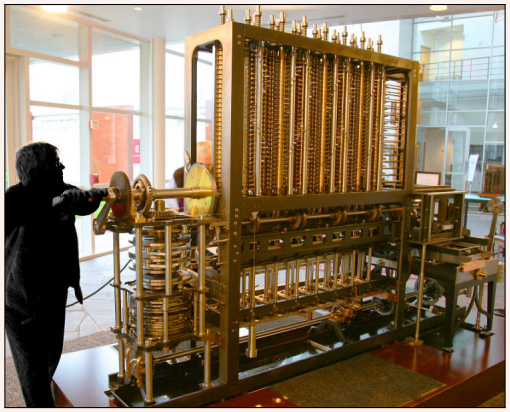
آلة الفروق والآلة التحليلية

اقترح تشارلز باباج آلة الفروق لأتمتة حساب جداول كثيرات الحدود باستعمال الفروق المحدودة. أما رؤيته الأوسع، الآلة التحليلية، فذهبت إلى أبعد من ذلك بكثير. وكما وصفها في كتاباته ثم في Babbage, 1864، تضمنت الآلة التحليلية "مخزناً" (ذاكرة)، و"مطحنة" (وحدة حسابية)، ومدخلات ببطاقات مثقبة، وتفرعاً شرطياً، وأجهزة إخراج. وقد استبقت من حيث المفهوم معمارية الحواسيب الحديثة ذات البرامج المخزنة.

آدا لافليس والحساب الرمزي

قدمت Lovelace, 1843 في ترجمتها لورقة مينابريا ملاحظات تفصيلية على آلة باباج التحليلية، الشكل 13.6. وأدركت أن الآلة قادرة على معالجة الرموز العامة لا الأعداد وحدها، وأدرجت ما يُعد غالباً أول خوارزمية منشورة، لحساب أعداد برنولي. وهكذا صاغت لافليس فكرة البرمجة قبل وجود أي حاسوب عامل متعدد الأغراض بزمن طويل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 13.6: آلة باباج التحليلية

على الرغم من عبقرية آلتي باباج المفاهيمية، لم تكتمل أي منهما في حياته بسبب قيود مالية وسياسية وتصنيعية. غير أن إعادات بناء جزئية في أواخر القرن العشرين برهنت الجدوى الميكانيكية لتصميماته.

13.5 الحوسبة العلمية التماثلية (1900–1945)

المكاملات الميكانيكية والتفكير التماثلي

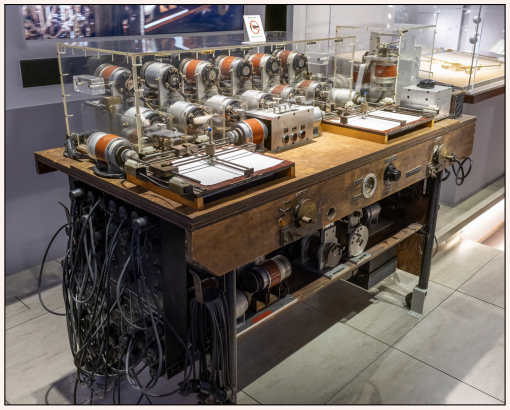
بحلول أوائل القرن العشرين، بدأ المهندسون تصميم آلات تجسد بنية المعادلات الرياضية مباشرة. فنفذت المكاملات الميكانيكية التكامل المستمر بواسطة أقراص وبكرات دوارة؛ وأنشأت التروس التفاضلية والوصلات المجاميع والفروق. ونفذت هذه الأجهزة حساباً تماثلياً: إذ كان سلوك منظومة فيزيائية يمثل حل معادلة.

محلل بوش التفاضلي

وصف Bush, 1931 المحلل التفاضلي الذي أُنشئ في معهد ماساتشوستس للتقنية خلال عشرينيات القرن العشرين وثلاثينياته، الشكل 13.7. واستعملت هذه الآلة وحدات تكامل ميكانيكية متعددة رُبطت بأعمدة ومضخمات عزم لحل منظومات من المعادلات التفاضلية العادية. واستعملها المهندسون لدراسة انحرافات الجوائز والاهتزازات والمنظومات الديناميكية قبل أن تصبح المحاكاة الرقمية ممكنة بزمن طويل.

أدت المحللات التفاضلية والأجهزة التماثلية ذات الصلة أدواراً مهمة في المقذوفات وتصميم الطائرات والبحوث النووية المبكرة. ووفرت حلولاً في الزمن الحقيقي، لكنها قُيدت بالدقة الميكانيكية والانجراف والتعقيد. وقدمت هذه القيود حافزاً قوياً للسعي إلى الحوسبة الرقمية الإلكترونية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

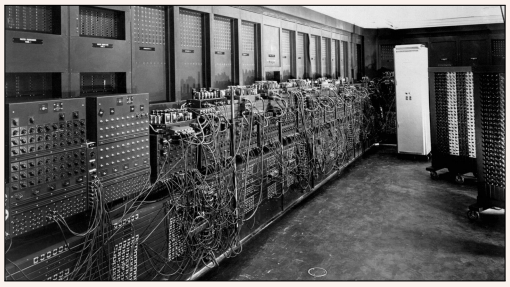


شكل 13.7: محلل بوش التفاضلي

13.6 الثورة الرقمية (1945–1960)

ENIAC

يُعد المكامل والحاسوب العددي الإلكتروني (ENIAC)، الذي طُور في جامعة بنسلفانيا وأُعلن سنة 1946، الشكل 13.8، على نطاق واسع أول حاسوب رقمي إلكتروني كبير. وكان يحتوي نحو 18,000 صمام مفرغ، ويستطيع تنفيذ عدة آلاف من العمليات في الثانية (Eckert **and** Mauchly, 1946). وتطلبت برمجته إعادة توصيل الكابلات وضبط لوحات التوصيل، لكنه برهن أن الحوسبة الإلكترونية بالكامل عملية.



شكل 13.8: حاسوب ENIAC

معمارية فون نيومان والبرامج المخزنة

اقترح جون فون نيومان ومعاونوه معمارية البرنامج المخزن، التي توجد فيها تعليمات البرنامج والبيانات في ذاكرة مشتركة. وأصبح هذا المفهوم، الذي صيغ في تقارير مبكرة عن تصميم EDVAC، مخططاً أساسياً لجميع الحواسيب الرقمية اللاحقة تقريباً. وقد فصلت فكرة البرنامج المخزن الخوارزمية عن العتاد، فأتاحت إعادة البرمجة بمرونة من دون إعادة توصيل مادي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

EDSAC وUNIVAC

كانت الحاسبة الآلية الإلكترونية ذات التخزين بخط التأخير (EDSAC)، التي بُنيت في كامبريدج وبدأ تشغيلها سنة 1949، من أولى آلات البرامج المخزنة العملية. وقد وثق Wilkes, 1951 تشغيلها واستعمالها. وفي الوقت نفسه تقريباً، سُلّم UNIVAC I إلى مكتب الإحصاء الأمريكي سنة 1951، فأصبح أول حاسوب ذي برنامج مخزن متاح تجارياً (Corporation, 1951).

مثّل EDSAC وUNIVAC الانتقال من النماذج الأولية التجريبية إلى الحوسبة العلمية والإدارية العملية. وسرعان ما نُفذت على هذه الآلات برامج إنشائية مبكرة وتحليلات عددية في مجالات متنوعة.

13.7 لغات البرمجة والبرمجيات العلمية المبكرة

كانت الحواسيب الرقمية المبكرة تُبرمج بلغة الآلة أو لغة التجميع، مما حد من تعقيد البرامج العلمية العملية. وقد غير إدخال اللغات عالية المستوى هذا المشهد.

FORTRAN وALGOL

وصف Backus, 1957 لغة FORTRAN (ترجمة الصيغ)، التي أصدرتها IBM سنة 1957. وأتاحت FORTRAN للمهندسين التعبير عن الخوارزميات العددية باستعمال الترميز الجبري والمصفوفات والحلقات. وكانت المترجمات تحول هذه العبارات إلى شيفرة آلة كفؤة. وسرعان ما أصبحت FORTRAN اللغة السائدة للحوسبة العددية، وما تزال مهمة اليوم.

قدمت ALGOL، التي ظهرت في أواخر خمسينيات القرن العشرين، تراكيب منظمة للتحكم في سير التنفيذ وقواعد للنطاق أثرت في لغات لاحقة مثل C وPascal وغيرها كثير. وعلى الرغم من أن استعمالها في الممارسة الهندسية كان أقل انتشاراً من FORTRAN، فقد كانت إسهاماتها المفاهيمية مهمة.

مراكز الحوسبة والمعالجة الدفعية

أنشأت الجامعات والمختبرات مراكز حوسبة مركزية مجهزة بحواسيب رئيسة. وكان المهندسون يُعدون شيفرة FORTRAN على بطاقات مثقبة، ويسلمون المهام إلى مشغل، ثم ينتظرون المخرجات المطبوعة. وكان تصحيح الأخطاء يتطلب في كثير من الأحيان دورات تسليم متعددة. وقد شكل نظام المعالجة الدفعية هذا سير العمل الحاسوبي المبكر، وشجع على الكفاءة الخوارزمية.

13.8 خط زمني للتطورات الحاسوبية الرئيسة

13.9 البرمجيات الهندسية والإنشائية المبكرة (1960–1980)

شهدت الفترة 1960–1980 ظهور برمجيات هندسية عامة الأغراض أتمتت كثيراً من مهام التحليل الإنشائي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المعلم	السنة
انتشار استعمال المِعداد	نحو 2000 ق.م.
نابير يقدم اللوغاريتمات (Napier, 1614)	1614
مسطرة أوترد الحاسبة (Oughtred, 1632)	1632
آلة باسكال للجمع (Pascal, 1645)	1642
حاسبة لايبنتس المتدرجة (Leibniz, 1691b)	تسعينيات القرن السابع
مفهوم آلة باباج التحليلية (Babbage, 1864)	ثلاثينيات القرن التاسع
ملاحظات لافليس على الآلة التحليلية (Lovelace, 1843)	1843
محلل بوش التفاضلي (Bush, 1931)	1931–1925
بدء تشغيل ENIAC (Eckert **and** Mauchly, 1946)	1946
بدء تشغيل EDSAC (Wilkes, 1951)	1949
تسليم UNIVAC I (Corporation, 1951)	1951
إصدار FORTRAN (Backus, 1957)	1957
SAP وSTRUDL وNASTRAN وبدايات ANSYS وغيرها (Wilson, 1969; NASA, 1968)	ستينيات القرن العشرين
أول إصدار من ABAQUS (*ABAQUS User's Manual* 1978)	1978
تقديم MATLAB (*MATLAB User's Guide* 1984)	1984
تقديم Mathematica (Wolfram, 1988)	1988
منظومة Python العلمية، ونمذجة معلومات البناء، والأدوات البارامترية (Foundation, 2001)	العقد الأول من القرن الـ

جدول 13.1: خط زمني للمعالم الرئيسة في الحوسبة العلمية والهندسية

SAP وSTRUDL

طُور في جامعة كاليفورنيا في بيركلي برنامج التحليل الإنشائي (SAP) بوصفه برنامجاً عاماً قائماً على الصلابة لتحليل الإطارات والعناصر المحدودة (Wilson, 1969). وتطور SAP بمرور الزمن إلى SAP IV ثم SAP90، وأخيراً SAP2000 وETABS.

وفي معهد جورجيا للتقنية، طُورت STRUDL (لغة التصميم الإنشائي) منظومة متكاملة تجمع التحليل والتصميم وإدارة البيانات. وكانت من أقدم أمثلة اللغات الإنشائية الخاصة بمجال بعينه.

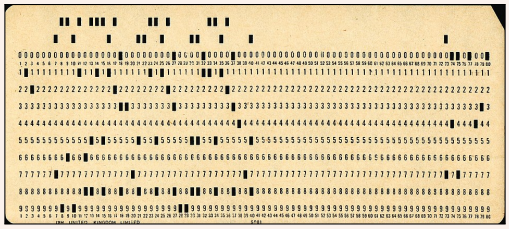
NASTRAN وANSYS وABAQUS

وفر NASTRAN (التحليل الإنشائي لناسا)، الذي طُور أول مرة في ستينيات القرن العشرين برعاية ناسا، صيغ إدخال موحدة وطيفاً واسعاً من إمكانات العناصر المحدودة (NASA, 1968). وأصبح منصة مرجعية للتحليل في الطيران والميكانيكا.

أما ANSYS، الذي ترجع جذوره إلى أوائل سبعينيات القرن العشرين، فتطور إلى بيئة عامة متعددة الفيزياء (Swanson, 1971). وتخصص ABAQUS، الذي صدر أول مرة سنة 1978 (*ABAQUS User's Manual* 1978)، في تحليل العناصر المحدودة اللاخطي، ثم توسع ليغطي نطاقاً واسعاً من المواد وحالات التحميل.

استُعملت هذه البرامج جميعاً في البداية على الحواسيب الرئيسة، وكان الإدخال يُعد على بطاقات مثقبة والنتائج تُطبع على طابعات سطرية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 13.9: البطاقات المثقبة وسير عمل المعالجة الدفعية

13.10 عصر الحاسوب الشخصي واتساع الحوسبة الهندسية (1980–2000)

أدى ظهور المعالجات الصغرية والحواسيب الشخصية في أواخر سبعينيات القرن العشرين وأوائل ثمانينياته إلى لامركزية الحوسبة. فلم يعد المهندسون يعتمدون حصراً على الحواسيب الرئيسة؛ بل أصبح بوسعهم إجراء تحليلات كبيرة على أجهزة مكتبية.

الحوسبة التفاعلية

حلت الحوسبة التفاعلية محل تسليم المهام على دفعات، وشجعت النمذجة الاستكشافية. وبدأت الواجهات الرسومية تستكمل ملفات الإدخال النصية أو تحل محلها، ولا سيما مع تحسن قدرات الذاكرة والرسوميات.

MATLAB

أصبح MATLAB، الذي طُور أولاً في أواخر سبعينيات القرن العشرين وسوقته MathWorks تجارياً سنة 1984، أداة محورية للجبر الخطي العددي ومعالجة الإشارات والتحكم والديناميكا الإنشائية (*MATLAB 1984 User's Guide*). وجعلته لغته الموجهة بالمصفوفات وحلالاته المدمجة ورسومياته مثالياً لبناء النماذج الأولية بسرعة وللتدريس.

Mathematica

جمع Mathematica، الذي قدمه Wolfram, 1988، بين المعالجة الرمزية والحلالات العددية والتصور البياني. ووفر للمهندسين بيئة قوية لاشتقاق العبارات التحليلية والتحقق منها، وحل المعادلات التفاضلية رمزياً، واستكشاف الاعتماد على المعلمات.

انتشار البرمجيات الإنشائية

مع تزايد قدرة الحواسيب الشخصية، أصبحت البرمجيات الإنشائية أيسر منالاً:

- وفر SAP2000 وETABS أدوات شاملة لتحليل المباني وتصميمها.
- توسع STAAD في الأسواق المدنية والصناعية.

- قدم ADINA قدرات متقدمة للتحليل اللاخطي ومتعدد الفيزياء.
- عالج SAFE البلاطات والأساسات.

أتاحت هذه البرامج للمهندسين تصور أشكال الأنماط وخطوط تساوي الإجهاد واستجابات السجل الزمني بطرائق كان تنفيذها غير عملي في عصر الحواسيب الرئيسة.

ومع انتشار برمجيات التحليل الإنشائي في كل مكان، ظهرت مخاوف تستند إلى أساس سليم بشأن إساءة استعمالها (Powell, 2008).

13.11 المنظومات الحاسوبية الحديثة (2000–الحاضر)

Python والحوسبة العلمية مفتوحة المصدر

تطور Python في أوائل العقد الأول من القرن الحادي والعشرين إلى منصة رئيسة للحوسبة العلمية، تدعمه مكتبات مثل NumPy وSciPy وMatplotlib. وأضفت مؤسسة برمجيات Python الطابع المؤسسي على تطوير اللغة (Foundation, 2001). ومع ظهور دفاتر Jupyter، أصبح Python بيئة قياسية للبحوث الحاسوبية القابلة لإعادة الإنتاج.

يتيح Python للمهندسين الإنشائيين كتابة نصوص لأطر العناصر المحدودة، والمحاكاة الاحتمالية، ومعالجة بيانات مراقبة السلامة الإنشائية، والاقتران بحلالات خارجية.

الحوسبة عالية الأداء

تتطلب المحاكاة الإنشائية والزلزالية الحديثة في كثير من الأحيان حوسبة عالية الأداء (HPC). وتتيح الحلالات المتوازية وتسريع وحدات معالجة الرسوميات والمنصات السحابية:

- تحليلات ديناميكية لاخطية واسعة النطاق،
- محاكاة عشوائية بعدد كبير من التحقيقات،
- نماذج مقترنة للمائع–المنشأ أو للحرارة–الميكانيكا.

حولت الحوسبة عالية الأداء صيغاً كانت أكاديمية من قبل إلى أدوات عملية لتقييم الأخطار والمخاطر.

نمذجة معلومات البناء (BIM) والتصميم البارامتري

تدمج نمذجة معلومات البناء (BIM) المعلومات المعمارية والإنشائية ومعلومات التشييد في نموذج رقمي واحد. وتتيح برمجيات مثل Revit وTekla Structures تنسيق الشكل الهندسي والمواد والأحمال والوصلات. كما ييسر معيار فئات مؤسسة الصناعة (IFC) تبادل البيانات بين برمجيات التحليل ومنصات نمذجة معلومات البناء وأدوات التصنيع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وتوسع أدوات التصميم البارامتري والتوليدي (Grasshopper وDynamo) إمكانات النمذجة بإتاحة قيادة الشكل الهندسي والطوبولوجيا بقواعد أو معايير أمثلية. وتمكّن هذه الأدوات من تصميم الأشكال الإنشائية المعقدة على أساس الأداء، وغالباً بالاشتراك مع حلالات العناصر المحدودة.

13.12 تطور الكتابة التقنية وإعداد التقارير

من المخطوطات إلى معالجات النصوص

اعتمد الاتصال العلمي تاريخياً على المخطوطات المكتوبة بخط اليد والصف الميكانيكي. وكانت المراجعات كثيفة العمل، كما تطلب الترميز الرياضي صفافين متخصصين. ووحدت الآلات الكاتبة المظهر، لكنها لم تدعم المعادلات أو الإحالات الآلية. وقد يسرت معالجات النصوص المبكرة التحرير، لكنها لم تُصمم للأعمال التقنية الكبيرة الكثيفة المعادلات.

Microsoft Word

جعل Microsoft Word والأدوات المشابهة إنشاء المستندات متاحاً على نطاق واسع، لكن تحرير المعادلات والإحالات الترافقية وإدارة المراجع ظلت هشة في المشروعات الكبيرة. ومن الصعب الحفاظ على الاتساق في مثل هذه البيئات لكتاب يضم مئات المعادلات والأشكال والاستشهادات.

LaTeX

أصبح LaTeX، الذي طوره ليزلي لامبورت، المعيار الحاسم للصف العلمي. وتجعل دقته الرياضية واتساقه البليوغرافي وقابليته للبرمجة منه المنصة الوحيدة القابلة للتطبيق على عمل تقني بهذا الحجم والتعقيد. ولولا المرونة والأتمتة اللتان يوفرهما LaTeX، بما في ذلك معالجة الروابط التشعبية والإحالات الترافقية ووحدات الماكرو المخصصة والأشكال وشبكات الاستشهاد الواسعة، لما أمكن إنتاج هذا الكتاب ببساطة. فلا يستطيع أي معالج نصوص تقليدي، بما فيه Microsoft Word، إدارة التماسك الإنشائي والرياضي والمرجعي المطلوب هنا. ويُنشأ تقريباً كل شكل ومعادلة وجدول واستشهاد في هذا المجلد بواسطة وحدات ماكرو LaTeX، مما يضمن الوضوح وقابلية إعادة الإنتاج واتساق العرض.

MathCad

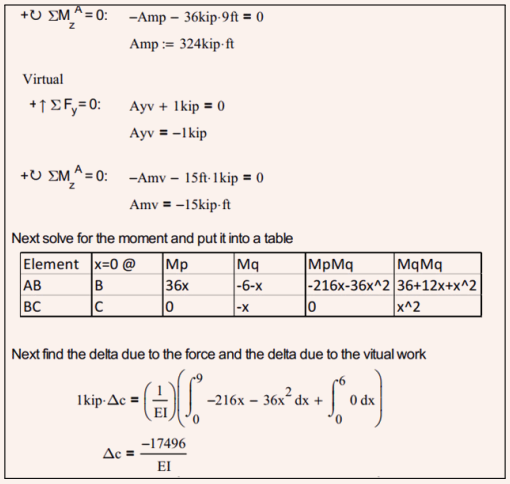
Mathcad بيئة للحساب الهندسي تدمج الرياضيات والنص والرسوميات في مستند واحد، الشكل 13.10. وتتيح للمهندسين إجراء حسابات رمزية وعددية باستعمال الترميز الرياضي القياسي بدلاً من صياغة البرمجة. ومن خصائصها المميزة أن الحسابات والنص التفسيري يتعايشان فيها بسلاسة، مما يتيح إنشاء تقارير تقنية توثق نفسها بنفسها.

تُعالج الوحدات فيها معالجة أصلية، مما يقلل بدرجة كبيرة خطر الأخطاء البُعدية. ويستطيع المهندسون إدراج الرسوم البيانية والجداول ودراسات المعلمات مباشرة إلى جانب المعادلات الحاكمة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويجعل نموذج ورقة العمل الفرضيات والصيغ والنتائج ظاهرة وقابلة للتتبع فوراً. كما يدعم Mathcad التوثيق المضمن والروابط التشعبية والتعليقات المنسقة ضمن ملف الحساب نفسه.

وبفضل شفافيته وسهولة قراءته، يُستعمل على نطاق واسع في الهندسة الميكانيكية والمدنية والكهربائية وهندسة الطيران. وهو ذو قيمة خاصة في فحوص التصميم وحسابات الامتثال للكود والتحقق من نتائج العناصر المحدودة.



شكل 13.10: مثال على MathCad

أصبح Mathcad اليوم أداة قياسية في مكاتب هندسية كثيرة[3]، فهو يصل بين التحليل الصارم والاتصال التقني الواضح.

يقدم الملحق J مجموعة واسعة من أمثلة MathCad المقابلة لمسائل التحليل الإنشائي المحلولة في أنحاء هذا الكتاب.

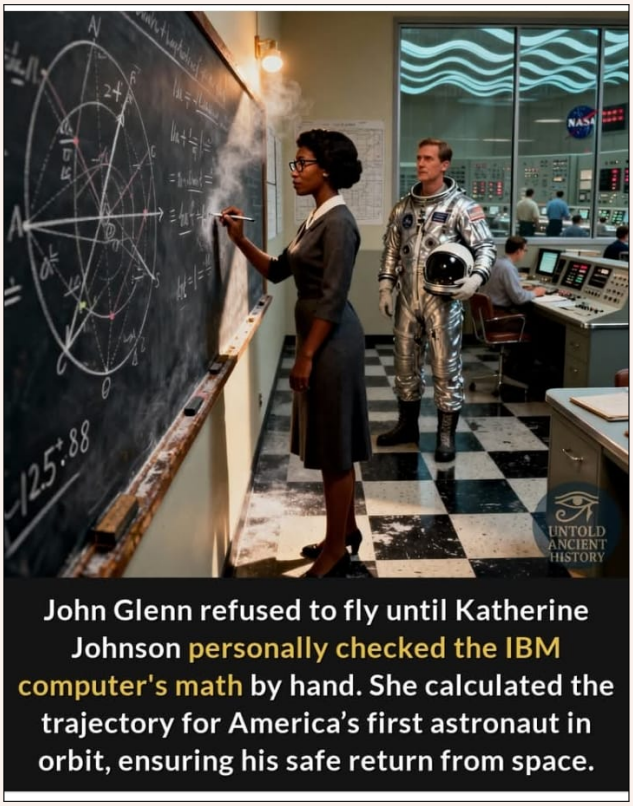
13.13 الخاتمة

يعكس تطور الحوسبة، من المِعداد إلى المنظومات الخوارزمية الحديثة، سعياً متواصلاً لأتمتة الاستدلال البشري وتوسيعه. وقد وسعت كل مرحلة، من اللوغاريتمات والمساطر الحاسبة والآلات الحاسبة الميكانيكية والآلات التماثلية إلى الحواسيب الرقمية ولغات البرمجة وبيئات البرمجيات المتكاملة، قدرة المهندس على نمذجة المنظومات المعقدة وتحليلها وتصميمها.

يرتكز التحليل الإنشائي الحديث والمحاكاة العددية والتصميم القائم على البيانات على هذا النسب. وتشكل الطرائق والأدوات الموصوفة في هذا الفصل الأساس الحاسوبي الذي تُبنى عليه التقنيات التحليلية الأكثر تقدماً في الفصول اللاحقة.

[3] دعوت طويلاً، ومن دون نجاح حتى الآن، إلى اشتراط تقديم جميع واجبات الطلاب في Mathcad، كي نعفي أنفسنا من معاناة فك الخطوط اليدوية، وندرب الطلاب على منصة برمجية واسعة الاستعمال في الممارسة. كما يسهل ذلك اكتشاف الغش، لأن سير الحساب يصبح شفافاً.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الصورة غنية عن الشرح

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14 تطور القوة والمبادئ الافتراضية

ملخص

يتتبع هذا الفصل التطور المتوازي والمتشابك لمفهومين أساسيين في الميكانيكا: مفهوم القوة ومبدأ العمل الافتراضي. وانطلاقاً من تجسيد القوة في صورة إلهية في مصر القديمة وبلاد الرافدين، نتابع الظهور التدريجي للاستدلال الميكانيكي عبر الفلسفة الطبيعية اليونانية، حيث ساد تمييز أرسطو بين الحركة الطبيعية والحركة القسرية قرابة ألفي سنة. ثم يمضي السرد إلى إسهامات علماء الإسلام في العصور الوسطى، الذين صقلوا مفهوم الميل (الدفع)، وإلى مدرسي اللاتينية، ولا سيما استعمال يوردانوس دي نيموري الضمني للإزاحات الافتراضية من خلال "الثقل الموضعي".

تمثل النهضة والثورة العلمية نقطة التحول الحاسمة. فقد أدخل برهان ستيفن بـسلسلة الكرات (1586) استحالة الحركة الدائمة معياراً للاتزان، بينما صاغ غاليليو المقايضة بين القوة والإزاحة في الآلات البسيطة. وأسهم ديكارت بالبصيرة الحاسمة القائلة إن الإزاحات المتناهية في الصغر، أي "بداية الحركة"، هي الكميات الصحيحة للاستاتيكا، ثم أعاد توريتشيلي صياغة الاتزان شرطاً تغايرياً لمركز الثقل. وجمع يوهان برنولي هذه الخيوط معاً؛ إذ قدمت رسالته إلى فارينيون سنة 1715 أول صياغة عامة لمبدأ السرعات الافتراضية: عند الاتزان، ينعدم مجموع القوى مضروبة في إزاحاتها الافتراضية.

يبلغ الفصل ذروته مع التنظيم المنهجي في القرن الثامن عشر على يد دالمبير، الذي وسع العمل الافتراضي إلى الديناميكا بمبدئه للقوى العطالية، وعلى يد لاغرانج، الذي رفع كتابه Mécanique Analytique *(1788) المبدأ إلى أساس الميكانيكا كلها، معبراً عنه بعمليات جبرية بحتة ومن دون رسم واحد. كما نبحث إسهامات لازار كارنو في الحركات الهندسية ونظرية الآلات، وتوسيع فوريه للمبدأ إلى قيود المتباينات. ويلخص جدول زمني التطورات الرئيسة من أرسطو إلى موهر.*

14.1 المقدمة 425
14.2 العصور القديمة والقوة الإلهية 427
14.2.1 مصر 427
14.2.2 بلاد الرافدين 428
14.2.3 الهند 428
14.3 العصور الكلاسيكية القديمة والفلسفة الطبيعية 429
14.3.1 اليونان 429
14.3.2 الرومان، أفلوطين (204–270) . 435
14.3.3 العصر البيزنطي، فيلوبونوس (490–570) 436
14.4 العصور الوسطى والفلسفة المدرسية . . . 437
14.4.1 علماء الإسلام 437
14.4.2 يوردانوس دي نيموري (نحو 1225–نحو 1260) والثقل الموضعي 438
14.4.3 العصور الوسطى: جامعة باريس . 438
14.5 النهضة والثورة العلمية 440
14.5.1 ليوناردو دا فينشي (1452–1519) 441
14.5.2 بينيديتي (1530–1590) 441
14.5.3 باردي (1636–1673) 442
14.5.4 سيمون ستيفن (1548–1620) . 442
14.5.5 غاليليو (1564–1642) 446
14.5.6 كبلر (1571–1630) 449
14.5.7 ديكارت (1596–1650) 451
14.5.8 توريتشيلي (1608–1647) . . . 456
14.5.9 واليس (1616–1703) 458
14.5.10 لايبنتس (1646–1716) 458
14.5.11 نيوتن (1642–1726) 460
14.5.12 دانيال برنولي (1700–1782) . 461
14.5.13 رسالة يوهان برنولي سنة 1715 . 462
14.5.14 فارينيون (1654–1722) 464
14.5.15 دالمبير (1717–1783) 465
14.5.16 كانط (1724–1804) 470
14.5.17 لاغرانج (1736–1813) 470
14.5.18 فوريه (1768–1830) 474
14.5.19 لازار كارنو (1753–1823) . . . 474
14.6 خاتمة الفصل 476
14.7 الخلاصة 477

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.1 المقدمة

ناقش بوانكاريه في كتابه (La Science et l'Hypothèse) "Science and Hypothesis"، Poincaré، 1905 PDF، مناقشة شهيرة ومطولة الأصل التشبيهي الإنساني لمفهوم القوة[1].

إن مفهومي *القوة* و*العمل الافتراضي* هما بالفعل من أكثر مفاهيم الميكانيكا أساسية، ومع ذلك نادراً ما يُروى تاريخاهما معاً. وهذا إغفال، لأن الفكرتين تطورتا في حوار وثيق: فكل تقدم في فهم القوة كان يتطلب مراراً مبادئ جديدة للاتزان، كما أن صقل استدلال العمل الافتراضي أوضح بدوره ما ينبغي أن تعنيه "القوة". ويقدم هذا الفصل سرداً موحداً لهذا التطور المزدوج، ممتداً نحو خمسة وعشرين قرناً من التجسيدات الأسطورية في العصور القديمة إلى الصيغ التحليلية التي تقوم عليها هندسة التحليل الإنشائي الحديثة.

نبدأ بالقوة صفة إلهية، هي نخت المصرية و*إنليل* الرافدينية و*شدّاي* التوراتية، ثم ننتقل إلى اليونان الذين استبدلت فلسفتهم الطبيعية باللاهوت إطاراً لفهم العالم المادي. وقد أرسى تمييز أرسطو بين الحركة الطبيعية والقسرية، على الرغم من خطئه في نهاية المطاف، المفردات المفاهيمية التي ستسود الفكر الغربي حتى الثورة العلمية. وأنتج أتباعه في المدرسة المشائية كتاب *الميكانيكا*، ولعله أول نص يسعى إلى تفسير موحد للفائدة الميكانيكية، فوجده في خصائص الدائرة "العجيبة". أما أرخميدس فقدم براهين هندسية صارمة لقانون الرافعة، لكنه لم يقدم مبدأ عاماً، وهو قيد وصفه ديكارت لاحقاً بأنه يفسر *ما* يحدث لا *لماذا* يحدث.

شهدت العصور الوسطى تطورين متوازيين. ففي العالم الإسلامي، صقل علماء مثل ابن سينا والبغدادي مفهوم أرسطو للقوة المطبوعة إلى نظرية *الميل*، وهو نزوع داخلي يبقي المقذوفات متحركة ويستبق مفهوم كمية الحركة اللاحق. وفي أوروبا اللاتينية، قدم يوردانوس دي نيموري "الثقل الموضعي"، أي الوزن الفعال لجسم على مستوى مائل، وهي فكرة تستدعي الإزاحات الافتراضية ضمناً من دون إدراكها بهذه الصفة. ومهدت نظرية الدفع عند بوريدان والبصائر الحركية لأورسم في جامعة باريس مزيداً من الطريق للثورة المقبلة.

جلبت النهضة روحاً تجريبية جديدة. فسجل ليوناردو دا فينشي خصائص الآلات البسيطة؛ واستنبطت *سلسلة الكرات* عند سيمون ستيفن (1586) قانون المستوى المائل من استحالة الحركة الدائمة، باستدلال يمكن تمييز طابعه "الافتراضي". وصاغ غاليليو المقايضة الأساسية: ما يُكتسب في القوة يُفقد في السرعة. ومع ذلك ظلت هذه البصائر متناثرة، تفتقر إلى مبدأ موحد.

جاء التركيب الحاسم في القرن السابع عشر. فقد أصر ديكارت على أن الاتزان لا يتوقف على حركات محدودة، بل على إزاحات متناهية في الصغر، أي "بداية الحركة"، وبين كيف يوسع إنشاء المماس هذا الاستدلال إلى القيود المنحنية. وأعاد توريتشيلي صياغة الاتزان شرطاً تغايرياً: تكون منظومة من الأجسام الثقيلة في اتزان إذا وفقط إذا لم تستطع أي حركة مقبولة خفض مركز ثقلها المشترك. وعمم واليس هذه الأفكار على اتجاهات قوى اعتباطية، وأسهم لايبنتس بعمق فلسفي، في جدل *القوة الحية*، وبدايات حساب رمزي ملائم للكميات الموجهة.

وضع يوهان برنولي حجر التتويج. ففي رسالة إلى فارينيون مؤرخة في 26 فبراير 1715، صاغ مبدأ السرعات الافتراضية في صورته العامة: في أي منظومة متزنة، ينعدم مجموع كل قوة مضروبة في الإزاحة

[1] كتب: "تساوي عجلة جسم القوة المؤثرة فيه مقسومة على كتلته. فهل يمكن التحقق من هذا القانون بالتجربة؟ إذا كان ذلك ممكناً، وجب علينا قياس المقادير الثلاثة المذكورة في العبارة: العجلة والقوة والكتلة. وأسلم بأن العجلة قابلة للقياس، إذ أتجاوز الصعوبة الناشئة من قياس الزمن. ولكن كيف نقيس القوة والكتلة؟ إننا لا نعرف حتى ماهيتهما. فما الكتلة؟ يجيب نيوتن: "حاصل ضرب الحجم في الكثافة"... وما القوة؟ يجيب لاغرانج: "هي ما يحرك جسماً أو ينزع إلى تحريكه".

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الافتراضية الواقعة في اتجاهها. وقد أدرك فارينيون أن النتيجة "عامة وجميلة إلى حد" جعله يطلب فوراً الإذن بنشرها. وبهذه العبارة الواحدة، توحدت البصائر المتفرقة لألفي سنة في مبدأ واحد قابل للتطبيق على أي منظومة ميكانيكية.

حوّل القرن الثامن عشر هذا المبدأ إلى أساس الميكانيكا التحليلية. فقد وسع كتاب دالمبير *Traité de Dynamique* (1743) العمل الافتراضي إلى الديناميكا بحيلة بسيطة هي معاملة حدود العطالة كقوى: إذ يمكن اعتبار الجسم المتسارع في اتزان تحت التأثير المشترك للقوى المطبوعة والعطالية. ونظم كتاب لاغرانج *Mécanique Analytique* (1788) الموضوع كله، فأدخل الإحداثيات المعممة وبين أن قوى القيود تظهر طبيعياً بوصفها مضاعفات لاغرانج للمسألة التغايرية. وتشهد مفاخرته الشهيرة، بأن العمل لا يحتوي رسماً واحداً، على قوة النهج التحليلي. وأسهم لازار كارنو بمفهومي *الحركات الهندسية* وعزم *الفاعلية*، رابطاً المبادئ المجردة بعلم الآلات العملي. ووسع فورييه الإطار إلى قيود المتباينات، فاتحاً الباب أمام ميكانيكا التلامس الحديثة.

يتكرر موضوعان طوال هذا السرد. أولهما التوتر بين *ما* و*لماذا*، أي بين البراهين التي تثبت تحقق شرط اتزان معين (أرخميدس) والمبادئ التي تفسر لماذا يجب أن يتحقق (برنولي ولاغرانج). وثانيهما التجريد التدريجي للقوة من صفة إلهية، إلى خاصية للأجسام المتحركة، إلى كمية رياضية تعرفها آثارها في الإزاحات الافتراضية. وفي نهاية قصتنا تصبح "القوة" ما يعنيه المهندسون الإنشائيون بالمصطلح: مزدوج الإزاحة في تعبير العمل، وقابلة للاستعادة من الإجهاد بواسطة تكامل كوشي.

يتناول الفصل أيضاً، بصورة غير مباشرة، مفهوم متوازي أضلاع القوى. فالواقع أن إحدى أكثر الأفكار الرياضية أساسية في تحليل المتجهات[2] هي فكرة جمع المتجهات. ويُعرف مجموع متجهين لهما نقطة أصل مشتركة بأنه المتجه الذي يبدأ من النقطة نفسها ويمتد إلى الركن المقابل في متوازي الأضلاع الذي يحدده المتجهان الأصليان. ويمكن تركيب كيانات فيزيائية معينة، مثل السرعات والقوى، بطريقة مشابهة، ومن هذا التطابق ينبع جانب كبير من فائدة تحليل المتجهات (Crowe, 1994).

يمكن العثور على فكرة متوازي أضلاع السرعات لدى مؤلفين يونانيين قدماء مختلفين، كما لم يكن مفهوم متوازي أضلاع القوى نادراً في القرنين السادس عشر والسابع عشر. وبحلول أوائل القرن التاسع عشر، ظهرت متوازيات أضلاع الكيانات الفيزيائية كثيراً في الرسائل العلمية، وقاد هذا الاستعمال بصورة غير مباشرة إلى تحليل المتجهات، إذ قدمت الفكرة مثالاً لافتاً على كيفية استعمال الكيانات المتجهية في التطبيقات الفيزيائية (Crowe, 1994). وسيُنسج تناول متوازي أضلاع القوى في العرض الآتي.

لم يقدم وليم روان هاملتون مفهوم المتجه حتى القرن التاسع عشر[3]، أثناء عمله على جبر *الموجهات الرباعية*؛ وينبغي عدم الخلط بينه وبين حساب المتجهات[4]. ولذلك غابت فكرة المتجهات عن جميع المساهمين الآتين في موضوع متوازي أضلاع القوى.

يختتم الفصل بخاتمة عن القوى الأساسية الأربع في الفيزياء، تذكيراً بأن "قوانا" الإنشائية كهرومغناطيسية المنشأ في نهاية المطاف، وبجدول زمني يلخص التطورات الرئيسة من العصور القديمة إلى القرن التاسع عشر.

[2] من اللافت أن مفهوم "المتجه" لم يظهر حتى القرن التاسع عشر؛ فحتى ديكارت، أبو الهندسة التحليلية (المعروفة أيضاً بهندسة الإحداثيات أو الهندسة الديكارتية)، لم يتصوره.

[3] كان أيضاً أول من صاغ مصطلحي "الكمية القياسية" و"الموتر"، غير أن الأخير كان يشير إلى طول موجه رباعي. وكان Voigt, 1898 هو الذي أعطى المصطلح معناه الحديث سنة 1898.

[4] طور غيبس، الفيزيائي الأمريكي، وهيفيساید، العالم البريطاني، حساب المتجهات لاحقاً وبصورة مستقلة لتفسير معادلات ماكسويل تفسيراً أفضل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ونأمل أن يكتسب القارئ الذي يتابع هذا السرد، لا منظوراً تاريخياً فحسب، بل أيضاً تقديراً أعمق لسبب احتلال مبدأ العمل الافتراضي مكانة محورية في الميكانيكا الإنشائية.

14.2 العصور القديمة والقوة الإلهية

يعتمد هذا القسم اعتماداً كبيراً على *Concepts of Force* من تأليف Jammer, 1957.

14.2.1 مصر

F

حين[5] تطورت المجتمعات المبكرة إلى حضارات مدينية، تحول تصور القوى غير المتوقعة التي تحكم العالم إلى فكرة تراتب منظم للقوى الطبيعية. وتدريجياً، جُسدت هذه القوى في صورة أرواح قوية أو آلهة. وشملت الأساطير القديمة، بوصفها منظومة الاعتقاد الرئيسة المنظمة في العصور المبكرة، علم الكون وما يمكن اعتباره "فيزياء" عصر ما قبل العلم. وفي هذا الإطار، كثيراً ما جُسد مفهوم القوة في هيئة آلهة أو أرواح.

يمكن تتبع المفهوم المجرد للقوة، باعتبارها كياناً إلهياً، إلى مصر القديمة، ولا سيما في نصوص الأسرة التاسعة عشرة والأدب الديموطيقي اللاحق. وكان يُشار إليه باسم "نخت"، وصُور إلهاً شخصياً يجسد القوة الإلهية، لا وسيطاً شيطانياً أو ملائكياً. ويُصور مفهوم القوة الإلهية كياناً قوياً يرسله إله الشمس رع لتنفيذ طلب، مما يبين أن "نخت" لا يشمل العنف والشراسة وحدهما، بل عناصر من النظام والأخلاق حتى في أقدم تصويراته.

ومن أمثلة ذلك الرسم الهيروغليفي للاسم الديموطيقي "Pn-n-nht-w" في الشكل 14.1a، حيث تمثل الشخصية الحاملة للسكين مفهوم القوة الإلهية.



(c) إيل شدّاي

(b) إنليل

a) "Pn-n-nfit-w" (Jammer, 1957)

شكل 14.1: آلهة ارتبطت بالقوة في العصور القديمة

[5] ينسج هذا الفصل موضوعين رئيسين: *القوى* و*المبادئ الافتراضية*. ولمساعدة القارئ على المتابعة، تُعلّم المادة التي تعنى أساساً بالقوى في الهامش بالرمز F؛ والمادة التي تعنى أساساً بالمبادئ الافتراضية بالرمز V؛ أما الأقسام التي تتناول كليهما تناولاً جوهرياً فتُعلّم بالرمز FV.
وإذا بدا هذا الفصل مفككاً بعض الشيء أو متكرراً أحياناً، فذلك لأنه بدأ فصلين منفصلين ("القوة" و"القوى الافتراضية") ثم دُمجا لاحقاً بعناية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.2.2 بلاد الرافدين

F

واجه سكان حضارة بلاد الرافدين ظواهر طبيعية متكررة وغير متوقعة، مثل العواصف الرعدية والرياح والفيضانات، وكانت تجلب الدمار. وجُسدت هذه القوى في *إنليل*، إله العواصف الذي رمز إلى الحركة والتغير، في مقابل إله السماء *آنو* الذي مثل الاستقرار والديمومة. وجسد *إنليل* القوة الغاشمة والمبدأ المنظم للكون معاً، فكان منظماً في مواجهة الفوضى.

يتضح ارتباط إله الكتاب المقدس بمفهوم القوة من إشارات كثيرة تربط اسمه بألفاظ تدل على الشدة والقدرة والبأس والنشاط. فكلمات مثل "البَرَد" و"البأس" و"القدرة" و"الشدة" و"النشاط" تتكرر في وصف الصفات الإلهية. ويرى بعض الباحثين أن اسم "شدّاي"، وهو أحد أسماء إله إسرائيل، قد يكون مشتقاً من جذر سامي معناه "قدرة عظيمة، قوة عظيمة"، بما يؤكد قدرة الإله المطلقة. ويمكن العثور على روابط مشابهة بين الألقاب الإلهية ومفاهيم القوة في لغات قديمة أخرى أيضاً.

14.2.3 الهند

F

طور الجينيون[6]، أتباع جينا (*فاردهامانا*) الذي عاش في زمن مقارب لزمن بوذا، تعددية ذرية واقعية ونسبية (*أنيكانتافادا*). ومن اللافت أنهم لم يدرجوا مفهوم القوة، على خلاف العلم الغربي الذي تؤدي فيه فكرة القوة دوراً أساسياً.

تنقسم فئة *أجيفا* في الفيزياء الجينية إلى عدة مكونات: المادة (*بودغالا*)، والمكان (*أكاشا*)، والحركة (*دارما*)، والسكون (*أدارما*)، والزمن (*كالا*). وتشير *دارما* و*أدارما* إلى شرطي الحركة والسكون على الترتيب. وهما عديمتا الشكل وسلبيتان، لا تفعلان سوى تيسير الحركة أو السكون أو إعاقتهما، على نحو يشبه دعم الماء لحركة السمكة أو توفير الأرض قاعدة للأجسام الساكنة. والزمن أساساً هو الذي يبدأ "الفعل" (*كريا*) و"التغير" (*باريناما*)، من دون افتراض دور فاعل ديناميكي يشبه مفهوم القوة الغربي.

ترتبط *دارما* (الحركة) و*أدارما* (السكون) في الجينية ارتباطاً وثيقاً بالكارما. ومع أن مفهوم الكارما يتعلق أساساً بالعواقب الأخلاقية والمعنوية لأفعال المرء، فإن له آثاراً في العالم المادي أيضاً.

تشير الكارما في الجينية إلى تراكم البقايا الأخلاقية أو العواقب الناجمة عن الأفعال المقصودة. فكل فعل، جسدياً كان أو لفظياً أو ذهنياً، يترك بصمة في الروح تُعرف بالكارما. وتلتصق هذه الجسيمات الكارمية بالروح، وتؤثر في تجاربها وظروفها المستقبلية.

يمكن فهم العلاقة بين الكارما والعالم المادي، بما في ذلك الحركة والسكون، على الوجوه الآتية:

الكارما والفعل: وفقاً للفلسفة الجينية، تتولد الكارما من الأفعال المقصودة. فعندما يقوم الفرد بأفعال تتضمن حركة أو سكوناً، يراكم عواقب كارمية مقابلة. فمثلاً، إذا ارتكب شخص عملاً عنيفاً (يتضمن الحركة)، تراكمت لديه جسيمات كارمية قد تؤدي إلى خبرات معاناة مستقبلية. وبالمثل، تولد الأفعال التي تتضمن ضبط النفس أو اللاعنف (وتتضمن السكون) عواقب كارمية أيضاً.

[6] تؤكد الجينية مبادئ اللاعنف (تجنب إيذاء الحشرات)، والصدق، وعدم السرقة، والعفة، وعدم التملك. ويمارس بعض الرهبان والراهبات الزهاد صوراً متطرفة من الزهد، منها التخلي عن التعلقات الدنيوية، مثل الثياب، ومن ثم العري.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الكارما والظروف: يُعتقد أن الكارما تؤثر في شروط حياة الفرد وظروفها، بما فيها بيئته المادية وخبراته. وقد تشكل العواقب الكارمية لأفعال ماضية الظروف التي تيسر الحركة والسكون أو تعيقهما. فمثلاً، قد تؤدي العواقب الكارمية المواتية إلى بيئة مريحة تساعد على السكون، بينما قد تؤدي الكارما غير المواتية إلى عقبات أو تحديات تعوق الحركة.

الكارما والتحرر: الغاية القصوى في الجينية هي بلوغ التحرر (*موكشا*) من دورة الولادة والموت (*سامسارا*) بتحرير الروح من عبودية الكارما. ويُنال هذا التحرر بممارسات روحية تهدف إلى تطهير الروح والتخلص من الكارما المتراكمة. ويُعتقد أن الأفراد، بتجاوز تأثير الكارما، يبلغون حالة من النعيم الأبدي والتحرر من القيود الدنيوية، ومنها ما يتعلق بالحركة والسكون.

وهكذا، مع أن الكارما تتعلق أساساً بالعواقب الأخلاقية، فإن تأثيرها يمتد إلى جوانب الحياة المختلفة، ومنها العالم المادي. ويرتبط تراكم الكارما وانحلالها ارتباطاً وثيقاً بخبرات الفرد في الحركة والسكون وبالظروف العامة لوجوده في العالم.

14.3 العصور الكلاسيكية القديمة والفلسفة الطبيعية

14.3.1 اليونان

كان النهج اليوناني في الميكانيكا فلسفياً وعملياً في آن واحد. وقد مال اليونان إلى مناقشة المبادئ الميكانيكية في سياق الفلسفة الطبيعية.

كانت الفلسفة الطبيعية عند اليونان القدماء تعني أساساً دراسة العالم الطبيعي وظواهره، وتشمل ما نعامله اليوم بوصفه تخصصات منفصلة مثل الفيزياء والأحياء والكيمياء والفلك. وعلى خلاف العلم الحديث، لم تعتمد كثيراً على التجريب، بل شكلتها الملاحظة والاستدلال المنطقي والتأمل النظري. وأرست الفلسفة الطبيعية اليونانية المفاهيم والطرائق الأساسية التي ستحدد الثقافة الفكرية للعالم الغربي، وأثرت في علماء الرومان والمسلمين في العصور الوسطى. وظلت قائمة حتى بدايات العصر الحديث، ثم أفسحت المجال في نهاية المطاف للثورة العلمية (§ 5.3).

هذا الاستمرار مهم؛ فبينما اعتمد البحث في بلاد الرافدين اعتماداً واسعاً على الرصد طويل الأمد، أخذ العلم اليوناني يؤكد بصورة متزايدة الاستدلال المجرد. وكثيراً ما قامت أبحاثهم على أدلة تجريبية محدودة، وأحياناً سطحية، تلاها استنباط منطقي وحجاج نظري.

وسنعرض مع ذلك بإيجاز ملامح أبرز المؤثرين، الشكل 14.2.

14.3.1.1 إمبيدوكليس (494–434 ق.م.)

F

كان إمبيدوكليس، الشكل 14.2a، فيلسوفاً وشاعراً يونانياً قديماً عاش نحو القرن الخامس قبل الميلاد. وُلد في أكراغاس (أغريجنتو الحالية) في صقلية، التي كانت آنذاك مستعمرة يونانية. واشتهر بإسهاماته في فلسفة ما قبل سقراط ونظرياته الكونية.

افترض إمبيدوكليس ضرورة قوتين متعارضتين، "الحب" (*فيلوتيس*، *فيليا*) و"الشقاق" (*نيكوس*)،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) إمبيدوكليس (b) أفلاطون (c) أرسطو (d) بوسيدونيوس (e) أرخميدس

(f) أفلوطين (g) فيلوبونوس (h) ابن سينا (i) البغدادي

شكل 14.2: أبرز المؤثرين الأوائل في مفهوم القوة

وصنفهما إلى جانب العناصر الأربعة: الأرض والماء والهواء والنار، الشكل 14.3. وكان الحب القوة المتماسكة التي تربط الوجود في انسجام، بينما أحدث الشقاق الاضطراب والفصل بين العناصر. وعكس هذا التفاعل الدوري بين الحب والشقاق، الشبيه بتنفس كائن حي، خلفية إمبيدوكليس الطبية، إذ استمد فهمه للكون من علم وظائف الأعضاء. ونشأ الحب، المشابه للتجاذب الفيزيائي، من مفهوم الاتحاد في وظائف الأعضاء. ولم يسع إمبيدوكليس إلى تفسير ميكانيكي للعمليات الكونية، لأنه رأى الكائن الحيواني أبسط أساساً من الآليات التي يصنعها الإنسان، واتخذ تدفق الدم وجزره في الجسم أساساً لتماثله الفيزيولوجي.

كانت أفكاره الفلسفية مؤثرة في الفكر اليوناني القديم، وظل الفلاسفة اللاحقون، ومنهم أرسطو والرواقيون، يدرسونها ويناقشونها.

14.3.1.2 أفلاطون (427–348 ق.م.)

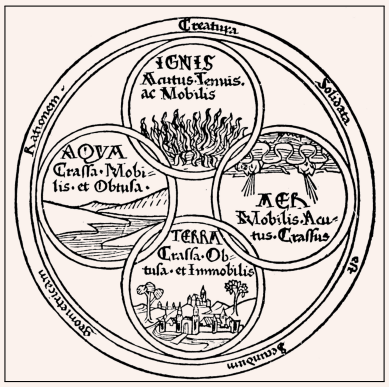
F فسر أفلاطون، الشكل 14.2b، عاملي إمبيدوكليس على أنهما تجاذب وتنافر، واقترح أنهما يعملان في دورات متناوبة، بينما رأى هرقليطس أن القوتين تعملان في آن واحد.

عالج أفلاطون، متأثراً بمذاهبه الميتافيزيقية، مسألة أصل الحركة. ففي محاورته "القوانين" (الكتاب

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) أغريجنتو



(b) نظرية العناصر الأربعة (النار والهواء والماء والأرض)

شكل 14.3: عن إمبيدوكليس

العاشر)، بحث أنواعاً مختلفة من الحركة، مثل الانتقال والدوران والتركيب، وردها في نهاية المطاف إلى الحركة التلقائية، وهي المبدأ الأساسي للحياة والنفس[7]

> **الغريب الأثيني**: إذن يجب أن نقول إن الحركة الذاتية، بوصفها أصل الحركات كلها وأول ما ينشأ بين الأشياء الساكنة وكذلك بين الأشياء المتحركة، هي أقدم مبادئ التغير وأقواها، وأن ما يغيره شيء آخر ثم يحرك بدوره غيره يأتي في المرتبة الثانية.
> **كلينياس الكريتي**: صحيح تماماً.
> **الأثيني**: عند هذه المرحلة من الحجة، لنسأل سؤالاً.
> **كلينياس**: أي سؤال؟ **الأثيني**: لو رأينا هذه القدرة موجودة في مادة أرضية أو مائية أو نارية، بسيطة أو مركبة، فكيف نصفها؟
> **كلينياس**: أتعني أن تسأل هل ينبغي أن نسمي هذه القدرة الذاتية الحركة حياة؟
> **الأثيني**: نعم.
> **كلينياس**: بالتأكيد ينبغي لنا ذلك.
> **الأثيني**: وعندما نرى نفساً في شيء، أفلا يجب أن نفعل الشيء نفسه، أي أن نسلم بأن هذه حياة؟
> **كلينياس**: يجب ذلك.
>
> Plato, 350 BC Laws, Book X

غير أن كتابات أفلاطون لا تطبق هذا المفهوم الميتافيزيقي للقوة عند تفسير الحركة الفعلية. فمثلاً، لا ترتبط الجاذبية، التي تسبب سقوط الأشياء الأرضية، في نظر أفلاطون بمفهومه العام للقوة. بل تُدخل فرضية أخرى غير مفسرة، هي نزوع الأشياء المتشابهة إلى الاجتماع: فتنجذب الأرض إلى الأرض، والماء إلى الماء، والنار إلى النار.

ويعني ذلك بطبيعته أن لكل عنصر منطقة مقررة في المكان. وقد تبنى أرسطو لاحقاً أيضاً هذه الفكرة القائلة بوجود مناطق مقررة في المكان، أو "أماكن طبيعية"، للعناصر.

[7] لاحظ كيف استعمل غاليليو لاحقاً صورة الحوار نفسها للترويج لأفكاره.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.3.1.3 أرسطو (384–322 ق.م.)

V كان أرسطو، الشكل 14.2c، تلميذ أفلاطون ومعلم الإسكندر الأكبر. غير أن هذا التهندس للجاذبية "طرد فكرة التجاذب الثقالي من الفلسفة الطبيعية قروناً"[8]

أما في ميكانيكاه الخاصة، فقصر أرسطو مفهوم القوة على العامل المشترك في *السحب أو الدفع*، وتجاهل مفهوم أفلاطون للقوة الكامنة في المادة، أو ما قد نسميه اليوم الطاقة. ومضى يقول: "فلا نقول إن شيئاً يحدث بالقوة إلا عندما يحرك عامل خارجي شيئاً أو يوقفه على خلاف نزوعه الداخلي؛ أما في غير ذلك فلا نقول إنه يحدث بالقوة."

لم يذكر أرسطو الوحدات التي رأى أن القوة ينبغي أن تُقاس بها. ويمكن افتراض أن وحدة وزن ربما استُعملت لهذا الغرض، لأن الوزن كان تاريخياً أول قوة تُقاس، وظل مرجعاً للقوى الأخرى حتى العصر الحديث. ويرجح أن اليونان قاسوا القوة بالوزن عند تشغيل الروافع، كما في معاصر الزيت. لكن أرسطو رأى الوزن مظهراً للحركة الطبيعية، لا قوة دفع أو سحب. ولذلك لم يكن الوزن، في نظره، صالحاً وحدة قياسية لقياس القوى.

قامت نظرياته على ملاحظاته. فقد رأى أن الأجسام تتوقف عند زوال القوة، كما تتوقف العربة عندما يتوقف الحصان عن جرها. كما أن الأجسام الساقطة تتحرك في وسط، مثل الهواء أو الماء، إذ عُدت الحركة في الخلاء مستحيلة. وباختصار، رأى أرسطو عالماً توجد فيه دائماً مقاومة للحركة؛ وهذه هي حقيقة الحركة. ومن ثم صُورت القوة في إطاره دفعاً أو سحباً لجسم يسبب له حركة قسرية، وقد صنف الحركة إلى:

طبيعية كانت الحركة الطبيعية عند أرسطو كامنة في الأشياء وتقودها طبيعتها الجوهرية. فالأجسام الثقيلة مثلاً تميل إلى السقوط، لأن نزوعها الطبيعي هو البحث عن "مكانها الطبيعي" في مركز الأرض.

قسرية أما الحركة القسرية فهي التي تفرضها على الجسم قوة خارجية. ورأى أرسطو أن الأجسام تحتاج إلى قوة خارجية مستمرة لإدامة حركة تخالف نزوعاتها الطبيعية. فدفع حجر يجعله يتحرك أفقياً، لكن الحركة تتوقف[9] حالما تزول القوة، لأن النزوع الطبيعي للحجر هو أن يسكن.

. في الحركة القسرية، تتوقف الحركة حالما يتوقف الفاعل عن إحداثها؛ وبعبارة أخرى، الحالة الطبيعية للجسم هي السكون، لأن أرسطو لم يعالج الاحتكاك الذي لم يكن قد صُور بعد نوعاً من القوة في إطاره. ومع أن أرسطو يدرج ضمن القوى عاملاً خارجياً "يوقف جسماً على خلاف نزوعه الداخلي"، فلم يكن لديه مبدأ للعطالة. ولذلك لا يمكن عد استمرار حركة إجبارية "نزوعاً داخلياً"، ولا يمكن من ثم إدراك الاحتكاك بوصفه قوة.

كانت حركة المقذوف موضع عثرة في نظرية أرسطو للحركة. فقد صعب تفسيرها وفق نظريته، لأن حركة المقذوف، بوصفها حركة قسرية، تتطلب محركاً مميزاً يجب أن يظل ملامساً باستمرار للشيء المتحرك.

تبنى أرسطو تصنيف إمبيدوكليس. فعد الأرض والماء عنصرين ثقيلين يميلان إلى الحركة إلى أسفل نحو مركز الأرض (*gravitas*)، بينما عد الهواء والنار عنصرين خفيفين يميلان إلى الارتفاع فوق العناصر الأكثر كثافة (*levitas*). وكان ذلك أساس *نظرية الثقل والخفة*. ومن ثم لا يوجد في الخلاء وسط يديم الحركة، وفي غياب المقاومة يتحرك الجسم بسرعة لا نهائية! (وهكذا *الطبيعة تأبى الفراغ*).

من المهم ملاحظة أن مفهوم العطالة كان غريباً عن فيزياء أرسطو. فقد رأى أرسطو وأتباعه أن الجسم لا يبقى

[8] لم يكتسب مفهوم التجاذب الثقالي القبول ويصبح جزءاً لا يتجزأ من فهمنا الحديث للفيزياء إلا لاحقاً، مع تقدم الفهم العلمي في عصر النهضة وأعمال شخصيات مثل غاليليو ونيوتن.

[9] كتب Poincaré, 1905 PDF: "كيف أمكنهم أن يعتقدوا أن الحركة تتوقف بتوقف سبب الحركة؟"

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في حركة إلا بفعل قوة خارجية مستمرة. وسُميت الفيزياء الأرسطية أيضاً الفرضية *المشائية*، وهو موضوع متكرر في تاريخ مفهوم القوة يشير إلى مفهوم الحركة الطبيعية والتمييز بين الحركة الطبيعية والقسرية.

ينبغي الإشارة إلى أن مزج الميتافيزيقا والفيزياء في الفكر الأرسطي ثبت ضرره من منظور علمي. فقد تمتع عمله بسلطة أعاقت مزيداً من التقدم قرابة تسعة عشر قرناً. فمثلاً، أعاق تأكيده أسبقية الحركة الدورانية على الحركة المستقيمة استكشاف القوانين الميكانيكية واكتشافها، كما يتضح من التحديات التي واجهتها شخصيات مثل باش وكبلر ونيوتن.

عالج أرسطو مسألة متوازي أضلاع القوى. وينقل Barnes, 1984 عن *الميكانيكا*

> إذا كانت إزاحتا جسم في نسبة ثابتة أياً كانت، فلا بد أن تكون الإزاحة الناتجة خطاً مستقيماً، وهذا الخط هو قطر الشكل الذي تصنعه الخطوط المرسومة بهذه النسبة... والعكس صحيح أيضاً. فمن الواضح أنه إذا تحركت نقطة على القطر بإزاحتين، فإنها تتحرك بالضرورة وفق نسبة ضلعي متوازي الأضلاع؛ وإلا فلن تتحرك على القطر[10]
>
> Aristotle, 2000 Mechanica, Mechanica 1: 848b. Cf. 23: 854b- 855a

14.3.1.4 أرخميدس (287–212 ق.م.): برهان "ما يحدث"

V

اتخذ أرخميدس (287–212 ق.م.) نهجاً مختلفاً تماماً في كتابه *De Planorum Aequilibriis* (في اتزان المستويات) (Archimedes, -250). وكما يلاحظ بنفينوتو: "بينما يربط أرسطو الميكانيكا بنظرية فيزيائية سعياً إلى تركيب شامل، يرى أرخميدس الاستاتيكا علماً عقلياً مستقلاً قائماً على مسلمات تكاد تكون بديهية ومبنياً ببراهين رياضية صارمة" (Benvenuto, 1991a).

ينص أرخميدس في الكتاب الأول (القضيتان 6–7) على قانون الرافعة في أعم صوره: "تتزن كميتان، سواء أكانتا قابلتين للقياس المشترك أم غير قابلتين له، عند مسافتين تتناسبان عكسياً مع الكميتين" (Archimedes, -250). وصيغ برهانه بدلالة *الكميات*، لا "القوى" بعد، وسار بإنشاء هندسي صريح: تُختار نقطة C على خط DE بحيث تحقق القطعتان على جانبي نقطة الارتكاز التناسب العكسي (مثلاً $A : B = DC : CE$)، ثم يُبين أن وضع الكميتين عند D وE يحقق الاتزان حول C. وفي حالة القابلية للقياس المشترك، يقسم الذراعين إلى أجزاء متساوية ويرد الاتزان إلى مجموعات متناظرة؛ أما في حالة عدم القابلية للقياس المشترك، فيوسع الحجة بالتقريب مع الحفاظ على النتيجة التناسبية نفسها (Archimedes, -250).

يمكن تصور الاستدلال نفسه حديثاً بتجربة فكرية تُمثل فيها الكميات بأعداد كبيرة من "الأوزان" الصغيرة المتساوية الموزعة بانتظام على الرافعة (الشكل 14.4). نبدأ بحمل موزع بانتظام على رافعة طولها الكلي $(p+q)$، ومن المعروف بالتناظر أنها تتزن حول منتصفها O. ثم نقسم الرافعة إلى قطعتين طولاهما $2p$ و$2q$؛ ويمكن بالتناظر نفسه استبدال محصلة واحدة بكل قطعة، تتناسب مع طولها (أي $2p$ و$2q$) وتؤثر في منتصفها. وتقع نقطتا المنتصف على بعدي q وp من O، ومن ثم يعني اتزان المنظومة الموزعة الأصلية اتزان حملين مركزين $2p$ و$2q$ موضوعين عند ذراعي رافعة q وp، أي قانون الرافعة في صورته العكسية $2p \cdot q = 2q \cdot p$، أو $p : q = p : q$ (وهو مكافئ لـ$A : B = DC : CE$ بترميز أرخميدس).

[10] تتبع الإحالات إلى أرسطو ترقيم بيكر القياسي، حيث تشير الأعداد إلى تقسيمات الصفحة والعمود في طبعة إيمانويل بيكر سنة 1831 من *Aristotelis Opera* (فمثلاً، تعني "848b" الصفحة 848، العمود الأيمن).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الكتاب الأول. **أفترض المسلمات الآتية:**

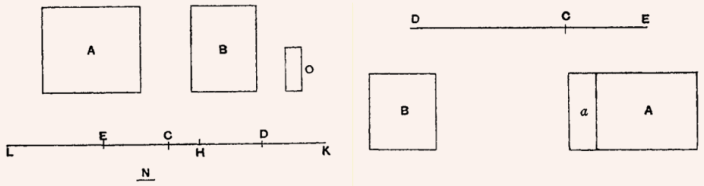
1. تتزن الأوزان المتساوية عند المسافات المتساوية، ولا تتزن الأوزان المتساوية عند المسافات غير المتساوية، بل تميل نحو الوزن الواقع على المسافة الأكبر.
2. إذا كانت أوزان عند مسافات معينة في اتزان ثم أضيف شيء إلى أحد الأوزان، فإنها لا تبقى في اتزان، بل تميل نحو الوزن الذي زيد عليه.
3. وبالمثل، إذا أُخذ شيء من أحد الأوزان، فإنها لا تبقى في اتزان، بل تميل نحو الوزن الذي لم يؤخذ منه شيء.
4. عندما تنطبق أشكال مستوية متساوية ومتشابهة إذا وُضع بعضها على بعض، تتطابق مراكز ثقلها كذلك.
5. في الأشكال غير المتساوية ولكن المتشابهة، تقع مراكز الثقل في مواضع متشابهة. وأعني بالنقاط الواقعة على نحو متشابه بالنسبة إلى الأشكال المتشابهة نقاطاً تكون الخطوط المستقيمة المرسومة منها إلى الزوايا المتساوية زوايا متساوية مع الأضلاع المتناظرة.

.....

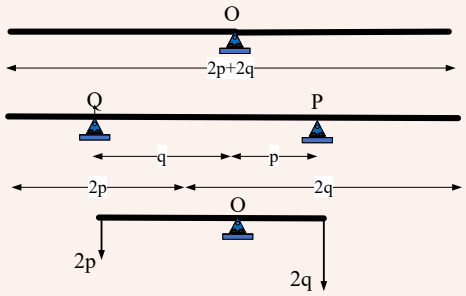
القضيتان 6، 7.

تتزن كميتان، سواء أكانتا قابلتين للقياس المشترك [القضية 6] أم غير قابلتين له [القضية 7]، عند مسافتين تتناسبان عكسياً مع الكميتين.

(Archimedes, -250 De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes



(a) الأصل



(b) تفسير حديث (مقتبس بتصرف من Salencon,) ((2017

شكل 14.4: برهان أرخميدس لقانون الرافعة

هذا البرهان صارم رياضياً، لكنه، كما لاحظ ديكارت لاحقاً، "يشرح بوضوح *quod ita sit*، لا *cur ita sit*"، أي يبين *ما* يحدث، لا *لماذا* يحدث (Descartes, 1898). فلم يستدع أرخميدس أي مبدأ عام؛ بل تطلبت كل آلة برهانها الخاص المنطلق من مسلمات محددة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قد يُفترض أن أرخميدس، أبو الاستاتيكا، كان يفهم مفهوم القوة فهماً شاملاً. غير أن الأمر لم يكن كذلك؛ فإسهاماته في مفهوم القوة كانت في الواقع ضئيلة. وكان نهجه هندسياً في المقام الأول، يركز على المسافة والوزن. ومن المهم ملاحظة أن الوزن والقوى عُدا في عصره مفهومين منفصلين تماماً.

14.3.1.5 بوسيدونيوس (135–51 ق.م.) والرواقيون

F

على خلاف رأي أرسطو في أن القوة تنبعث من الجوهر وتقع في الذات، رأى بوسيدونيوس، الشكل 14.2d، القوة أساسية وكامنة في العلاقة بين الأشياء. فالقوة عنده تقابل متبادل، أو تعاطف بين أشياء متفاعلة، يوحد الكون بمنظومة من القوى.

يعكس هذا التصور الرواقي للقوة، حيث لا ينفصل الفاعل عن المتأثر، اعتقادهم بوحدة الكون. وقد وازى الرواقيون بين هذه الفكرة ومفهوم "التعاطف" في الطب، حيث يؤثر مرض جزء من الجسم في الجسم كله، ومدوا الفكرة إلى الكون. ويمثل إدخال ركيزة، مادية كانت أم روحية، لتفسير عمل "التعاطف" تنازلاً للمفهوم الأرسطي للقوة.

لم يأخذ مفهوم القوة اتجاهاً جديداً إلا مع الرواقيين. فقد بدأ هذا التحول بالبحث في العلاقة بين المد والجزر وحركات الأجرام السماوية. ولم يكن البحث جديداً؛ إذ تناوله أرسطو من قبل، مؤكداً قوى السحب والدفع لتفسير الظاهرة. فرأى أن حركة الشمس تولد الرياح التي تدفع مياه البحر فتسبب المد والجزر. أما بوسيدونيوس فتناول المسألة على نحو مختلف؛ إذ سافر إلى قادس لدراسة المد والجزر مباشرة وجمع الوقائع والبيانات ذات الصلة. ولاحظ دورية المد والجزر وتوافقها مع الدورات السماوية، وفسر الظاهرة بمفهوم تونوس، أي توتر كوني شامل.

14.3.2 الرومان، أفلوطين (204–270)

F

أدى مفهوم "التعاطف" بوصفه شكلاً من القوة دوراً مهماً أيضاً في الأدب العلمي والفلسفي والصوفي في العصر الروماني. وكثيراً ما عزا أفلوطين، الشكل 14.2f، وهو فيلسوف بارز من ذلك العصر، الفعل عن بعد إلى هذا التعاطف.

وبدا أن السحر والتنجيم، وكانا موضوعين محوريين في الحياة الفكرية للعصر الروماني والعصور الوسطى، يجدان تبريراً عقلانياً في مفهوم أفلوطين للقوة. فوفقاً لأفلوطين، يعمل السحر من خلال الصلة التعاطفية بين الأشياء المتشابهة وغير المتشابهة. وينطوي السحر التعاطفي على إحداث حالة معينة في جزء من الكون، اعتقاداً بأن حالة مقابلة ستنشأ في موضع آخر.

ومن ثم تأثر مفهوم الرومان للقوة بتقاليد فلسفية مختلفة، منها التقاليد اليونانية. وأسهمت الرواقية، التي كان لها أثر كبير في الفكر الروماني، في فهمهم للقوة أيضاً. فكثيراً ما رأت الفلسفة الرواقية القوة جانباً كامناً في الكون يحكم التفاعلات بين الأشياء. وارتبطت ارتباطاً وثيقاً بإيمان الرواقيين بالقدر والحتمية، وبتأكيدهم العيش في انسجام مع الطبيعة. وإضافة إلى ذلك، طور المهندسون الرومان والاستراتيجيون العسكريون فهماً عملياً للقوة من خلال أعمال البنية التحتية وخوض الحروب، وإن انشغلوا بتطبيق القوة أكثر من أسسها النظرية. وإجمالاً، شكل مفهوم القوة الروماني مزيج من الأفكار الفلسفية والاعتبارات العملية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كثيراً ما امتزج مفهوما القوة الفيزيائية والعوامل الخفية في الأدب اللاتيني اللاحق من دون تمييز. وكان مصطلح *virtus* يشمل عادة كلا المفهومين. وإضافة إلى ذلك، لأن ترجمة الفولغاتا كانت تنقل الكلمة اليونانية *dynamis* عادة إلى *virtus*، استُعمل المصطلح نفسه للدلالة على القوى في السياقين الفيزيائي والديني.

استُعمل مفهوم "التعاطف" أيضاً لتوفير سند منطقي للتنجيم. فقد استُخدم لتفسير تأثير القمر في المد والجزر، كما فعل أفلوطين، وآثاره في الكائنات الحية. ووسع بروكلوس الفكرة مؤكداً أن الأفلاك السماوية تؤثر في الأحداث الأرضية.

كان أفلوطين قد طرح السؤال: "هل للنجوم أي تأثير؟" ورأى النجوم، مثل أفلاطون، كائنات أبدية وإلهية، وتعبيراً عن المعرفة الكلية لنفس العالم. وعلى خلاف الأرسطيين المخلصين الذين رفضوا، مثل بطليموس، الأفعال عن بعد وحاولوا تفسير المد والجزر بقوى التلامس، مثل التيارات الجوية والحرارة والضوء، عزا أفلوطين التأثيرات الكونية والتنجيمية إلى علاقة "التعاطف" التي رأى أنها قائمة بين جميع أجزاء الكون.

14.3.3 العصر البيزنطي، فيلوبونوس (490–570)

F

كان يوحنا فيلوبونوس، الشكل 14.2g، المعروف أيضاً باسم يوهانس فيلوبونوس أو يوحنا النحوي، فيلسوفاً ولاهوتياً وعالماً بيزنطياً عاش في القرن السادس الميلادي. وُلد في الإسكندرية بمصر، وقدم إسهامات مهمة في مجالات متعددة، منها الفلسفة واللاهوت والعلوم الطبيعية.

اشتهر فيلوبونوس في الفلسفة بنقده لفيزياء أرسطو (Philoponus, 1993). فقد تحدى الأفكار الأرسطية بشأن الحركة، وجادل ضد مفهوم الحالة الطبيعية لسكون الأجسام، واقترح ضرورة قوة خارجية لإبقاء الجسم في حركة. وقد تحدى ذلك تصور أرسطو للحركة، ومهد للتطورات اللاحقة في الفيزياء، ولا سيما في عصر النهضة والثورة العلمية. واعترض فيلوبونوس على عدة مفاهيم أرسطية، منها نظرية الحركة ومفهوم القوة. فقد اقترح أرسطو أن إبقاء جسم في حركة يتطلب قوة خارجية، وأن الجسم يسكن حال زوال القوة. لكن فيلوبونوس خالف هذا الرأي.

جادل فيلوبونوس أولاً وصراحة ضد تفسير أرسطو القائل إن حجراً مقذوفاً، بعد مفارقته اليد، لا يمكن أن يدفعه إلا الهواء الواقع خلفه. ثم تابع:

> بل لا بد أن ينقل القاذف إلى المقذوف قوة حركية غير مادية. أما الهواء المدفوع فلا يسهم في هذه الحركة بشيء، أو يسهم فيها بقدر ضئيل جداً. وإذا كانت الأجسام المتحركة تتحرك بالضرورة بهذه الطريقة، فمن الواضح أن العملية نفسها ستجري بسهولة أكبر بكثير إذا قُذف سهم أو حجر قسراً وعلى خلاف نزوعه في فضاء خال، وأنه لا يلزم لذلك شيء سوى القاذف.
>
> Philoponus, 1993 Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5

.

قُصد من الجملة الأخيرة إظهار أن الجسم المتحرك سيستمر في الحركة في الفضاء الخالي، الذي رفضه أرسطو، خلافاً لرأي أرسطو.

استنتج فيلوبونوس، بالعقل والتجربة معاً، ضرورة وجود قوة محركة غير جسمانية أو ميل، أي نزوع الجسم إلى الحركة أو التسارع في اتجاه معين تحت تأثير قوة، يمتصها المقذوف وتسبب حركته حتى تستنفدها المقاومة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

رأى فيلوبونوس أن القاذف ينقل الميل إلى المقذوف، ثم اقترح مفهوم الدفع. ورأى أن الأجسام المتحركة تمتلك قوة فطرية أو دفعاً يبقيها متحركة حتى في غياب قوة خارجية. وكان هذا الدفع، وفقاً له، مسؤولاً عن استمرار حركة الجسم، ويمكنه تفسير ظواهر طبيعية متعددة. وبعبارة أخرى، حافظت على الحركة خاصية ما في الجسم نُقلت إليه عند تحريكه. ومن المهم أن مفهوم *القوة غير الجسمانية* عنده يفسر أيضاً الحركة الطبيعية، مثل السقوط الحر للجسم وحركة السماوات. وستعود هذه المسألة في عصر النهضة. وينبغي الإشارة إلى أن فيلوبونوس استعمل تعبيرين مختلفين للدفع: القدرة الحركية (*dynamis*) والقوة الحركية (*en-ergeia*). ويدل التعبيران في نظريته على مفهوم قريب من مفهوم الطاقة اليوم، لكنه بعيد جداً من مفهومي الإمكان والفعل عند أرسطو.

ولذلك يُنسب إلى فيلوبونوس إرساء بعض أسس الفكر الحديث الأكثر نقداً والتحليل العلمي، إذ قطع مع بعض جوانب المنطق الأرسطي والأفلاطوني الأشد خللاً بتفنيد نظريتهما في الجاذبية.

14.4 العصور الوسطى والفلسفة المدرسية

شهدت العصور الوسطى مزج اللاهوت المسيحي بالفيزياء الأرسطية عبر الفلسفة المدرسية، التي سعت إلى عقلنة الظواهر الطبيعية بالعقيدة الدينية، لكنها افتقرت غالباً إلى السند التجريبي. وأشعلت النهضة تحولاً نحو الملاحظة والتجريب، ممهدة للثورة العلمية. وكان غاليليو ونيوتن من الشخصيات المحورية، إذ بلورت صياغة نيوتن لقوانين الحركة والجاذبية الكونية مفهوم القوة في سياق علمي. ووسعت الفيزياء الحديثة هذه الأفكار إلى نظريات أشمل، مثل الكهرومغناطيسية وميكانيكا الكم، فصقلت فهمنا للقوة أكثر.

14.4.1 علماء الإسلام

F

14.4.1.1 ابن سينا (980–1037)

أعاد أبو علي الحسين بن عبد الله بن سينا، الشكل 14.2h، المعروف في الغرب باسم أفيسينا (980–1037)، النظر في عمل أرسطو وطور نظرية أكثر تعقيداً للحركة. واقترح أن المقذوف يتلقى من "محركه" ميلاً، وهو كمية مرتبطة بثقل الجسم (وزنه) تساعده على حمل الحركة. ولذلك، يجب أن يكون لكل جسم يقبل "فعل الإمالة" (*الميل*) من الخارج ميل طبيعي، ميل *طبعي*، يقلله الاحتكاك. وليس واضحاً تماماً ما إذا كان *الميل* يحسب السرعة أيضاً؛ فإن كان كذلك، فقد كان بالفعل سلفاً مبكراً لمفهوم كمية الحركة الذي طوره نيوتن لاحقاً. وهكذا وافق ابن سينا على أن القاذف ينقل دفعاً إلى المقذوف، لكنه، بخلاف فيلوبونوس الذي رأى أنه فضيلة مؤقتة تنقص حتى في الخلاء، عدّه مستديماً يحتاج إلى قوى خارجية، مثل مقاومة الهواء، لتبديده.

غير أن الميل عند ابن سينا ليس قوة في ذاته، بل *أداة لقوة المحرك* لإيصال فعله إلى الشيء المتحرك. فـ*الميل* دائم لكنه قابل للفناء. وميز ابن سينا، مثل أرسطو، "ميلاً طبيعياً" (*mayl tabīʿī*)، يسبب الحركة الطبيعية للأجسام الساقطة، و"ميلاً قسرياً" (*mayl qasrī*)، يسبب حركة المقذوفات. ولو لم توجد مقاومة للميل، كما في الخلاء، لاستمر إلى ما لا نهاية، مثل الحركة التي يولدها. كما زعم أن المقذوف في الخلاء لن يتوقف ما لم يؤثر فيه مؤثر، وهو ما يوافق قانون نيوتن الأول.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.4.1.2 البغدادي (1080–1165)

F

كان هبة الله أبو البركات البغدادي[11]، الشكل 14.2i، ناقداً آخر لـ"نظرية الدفع" الأرسطية. وكتب *كتاب المعتبر* الذي رفض فيه فكرة أرسطو القائلة إن القوة الثابتة تنتج حركة منتظمة. وميز بين السرعة والتسارع، وبين أن القوة تتناسب مع التسارع لا السرعة، مستبقاً بذلك قانون نيوتن الثاني للحركة. وذكر أن المحرك ينقل إلى المتحرك ميلاً قسرياً (*mayl qasrī*)، وأن هذا الميل يتناقص كلما ابتعد الجسم المتحرك عن المحرك.

وعدل نظرية ابن سينا، وذكر أن *mayl qasrī* يستنفد نفسه؛ ولذلك يمكن أن توجد حركة قسرية في الخلاء وتنتهي من دون مقاومة خارجية.

14.4.2 يوردانوس دي نيموري (نحو 1225–نحو 1260) والثقل الموضعي

V

كان يوردانوس دي نيموري أهم علماء الميكانيكا في العصور الوسطى. ففي رسالته في علم الأوزان، *Ele-menta super demonstrationem ponderum*، الوثيقة الصلة بكتاب *De ratione ponderis* اللاحق، حلل المستوى المائل بمقارنة "سرعات" الأوزان (إزاحاتها) على مستويات مختلفة الميل. وتستدعي حجته، القائلة إن وزناً على مستوى أشد انحداراً يمتلك "ثقلاً موضعياً" (*gravitas secundum situm*) أكبر لأنه يهبط مسافة أكبر عند حركة معينة على المستوى، الإزاحات الافتراضية ضمناً، وإن لم يدركها بهذه الصفة. وكان مفهوم الثقل الموضعي هذا، الذي يفكك فعلياً قوة الجاذبية وفق اتجاه القيد، إسهاماً أصيلاً لافتاً، على الأقل في صورته الصريحة والمنهجية، ويمثل خطوة حاسمة نحو الفهم الحديث للمنظومات الميكانيكية المقيدة.

14.4.3 العصور الوسطى: جامعة باريس

F

كانت جامعة باريس في العصور الوسطى هيئة مؤلفة من مجموعات مستقلة إلى حد كبير. ولم ينطبق ذلك على انقسامها إلى أربع كليات منفصلة، هي الآداب واللاهوت والقانون الكنسي والطب، فحسب، بل كان صحيحاً أيضاً بالنسبة إلى الأمم الأربع في كلية الآداب. وفي هذه المؤسسة العريقة كاد زمن بوريدان وأورسم يتداخل.

كان أورسم فيلسوفاً طبيعياً ولاهوتياً معاً، بينما اقتصرت خبرة بوريدان المهنية على الفلسفة الطبيعية التي مارسها أعواماً طويلة أستاذاً للفنون في كلية الآداب. وعلق بوريدان على مؤلفات أرسطو حصراً تقريباً. أما إرث أورسم فمختلف تماماً؛ إذ لم يعلق على ست من رسائل أرسطو على الأقل فحسب، بل كتب نحو ضعف هذا العدد من الرسائل في موضوعات واسعة.

14.4.3.1 بوريدان (1295–1358)

F

صقل جان بوريدان (يوهانس بوريدانوس) نظرية *الدفع*، واقترح أن الجسم المتحرك يمتلك قوة أو دفعاً معيناً يبقيه في حركة. وعلى خلاف الرأي الأرسطي التقليدي، القائل إن الأشياء تتحرك ما دامت القوة تطبق

[11] عُرف أيضاً باسمه العبري عند الولادة، باروخ بن ملكا، قبل تحوله من اليهودية إلى الإسلام.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


(a) بوريدان


(b) أورسم

شكل 14.5: بوريدان وأورسم

عليها باستمرار، اقترحت نظرية بوريدان أن الجسم سيواصل الحركة بسرعة ثابتة ما لم تؤثر فيه قوة خارجية (Buridan, 1991). وبعبارة أخرى، قدم بوريدان فكرة العطالة، التي يحافظ الجسم بموجبها على حالة حركته ما لم تؤثر فيه قوة خارجية.

واقترح أيضاً أن مقاومة الهواء والجاذبية كلتيهما ستوقفان الجسم. كما رأى أن الدفع المنقول إلى جسم يزداد مع السرعة التي بدأ بها حركته ومع كمية مادته. ومن الواضح أننا نقترب هنا أكثر فأكثر من مفهوم كمية الحركة الحديث. لكن الوصف ظل نوعياً، بخلاف نيوتن:

> ...بعد مفارقة ذراع القاذف، يتحرك المقذوف بدفع أعطاه إياه القاذف، ويستمر في الحركة ما دام الدفع أقوى من المقاومة، ويكون أبدياً لو لم تُضعفه وتفسده قوة مضادة تقاومه أو شيء يميله إلى حركة مضادة.
>
> Buridan, 1991 John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics

وكتب بشأن الدفع السماوي للأفلاك:

> عندما خلق الله العالم، حرك كل واحد من الأفلاك السماوية كما شاء، وبحركتها طبع فيها دفوعاً حركتها من دون أن يحتاج إلى تحريكها بعد ذلك... ولم تنقص هذه الدفوع التي طبعها في الأجرام السماوية أو تفسد بعدئذ، لأنه لم يكن للأجرام السماوية ميل إلى حركات أخرى. ولم توجد مقاومة تفسد ذلك الدفع أو تقمعه.
>
> Buridan, 1971 John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo

وهكذا، في حالة حركة الأجرام السماوية، يكون الدفع القوة التي طبعها الله فتسبب حركتها *الدائرية* الأبدية. ويساعد مفهوم الدفع هذا على وصف أنواع الحركة كلها: الحركة الأرضية والقسرية والطبيعية للأجسام الثقيلة، وكذلك حركة الأجرام السماوية غير المادية.

رأى بوريدان أيضاً أن الدفع كيفية متغيرة تحدد قوتها سرعة المادة وكميتها في الجسم. وبهذه الطريقة أمكن فهم تسارع الجسم الساقط بدلالة تراكمه التدريجي لوحدات الدفع. ومن المآخذ الكبرى على نظرية *الدفع* هذه أن بوريدان عد الدفع سبب الحركة، لا نتيجتها، وهو فرق جوهري. وعلى الرغم من آثار نظريته الثورية، لم يستعمل مفهوم الدفع لتحويل علم الميكانيكا. فلم يكن سلفاً لغاليليو، وظل أرسطياً بلا اعتذار في جوانب كثيرة أخرى.

ومع ذلك، مهد بوريدان، بإدخال مفهوم العطالة وتأكيد دور الملاحظة التجريبية في فهم العالم الطبيعي، للثورة العلمية في القرنين السادس عشر والسابع عشر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.4.3.2 أورسم (1320–1382)

F وسع أورسم (§8.2.1) أفكار بوريدان بشأن حركة المقذوفات وحفظ الدفع، وطور أكثر فكرة إمكان انتقال الدفع بين الأجسام أثناء التصادمات أو التفاعلات. وأتاحت خلفيته الرياضية له تناول مسائل الحركة بمنظور كمي. واستعمل الاستدلال الرياضي في مناقشاته للدفع والحركة، ممهدًا للمعالجة الرياضية اللاحقة للديناميكا على يد شخصيات مثل غاليليو ونيوتن.

قُرئت شروحه لأرسطو ورسائله الخاصة في الفلسفة الطبيعية على نطاق واسع، وكان لها أثر في أواخر العصور الوسطى والنهضة. وساعدت أعماله على نشر أفكار بوريدان وغيره من مفكري العصور الوسطى وتعميمها، ومنها ما يتعلق بالدفع والديناميكا.

أدت إسهامات بوريدان وأورسم في نظرية الدفع دوراً حاسماً في إعداد الأرضية الفكرية للثورة العلمية في القرنين السادس عشر والسابع عشر. وكان التحول بعيداً عن الفيزياء الأرسطية ونحو نهج أكثر تجريبية وصرامة رياضية في دراسة الطبيعة مديناً كثيراً لبصائر شخصيات مثل بوريدان وأورسم وحججهم.

14.5 النهضة والثورة العلمية



(a) ليوناردو (b) بينيديتي (c) غاليليو (d) كبلر

(e) ديكارت (f) لايبنتس (g) نيوتن

شكل 14.6: ليوناردو، بينيديتي، غاليليو، كبلر، ديكارت، لايبنتس، نيوتن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.5.1 ليوناردو دا فينشي (1452–1519)

F لا شك أن ليوناردو، الشكل 14.6a، (§7.2.1) كان على دراية وثيقة بنظرية بوريدان، وكان لا بد أن يكون لديه ما يكتبه عن مفهوم القوة (Vinci, 1938).

وهذا تعريف ليوناردو للقوة:

> أقول إن القوة فضيلة روحية، وقدرة غير مرئية تنشأ، بالعنف العارض، من الحركة التي تُدخل وتُصب في الأجسام المسحوبة والمنحرفة عن حالتها الطبيعية، فتعطيها حياة فاعلة ذات قدرة عجيبة؛ وتجبر جميع الأشياء المخلوقة على تغيير الشكل والمكان، وتهرع بعنف إلى موتها المنشود، وتتنوع وفق الأسباب. يجعلها البطء عظيمة وتجعلها السرعة ضعيفة. تولد بالعنف وتموت بالحرية. وكلما كبرت، أسرعت في استهلاك نفسها. تطارد بعنف ما يعارض فناءها، وترغب في هزيمة سببها وقتله، أي ما يعوقها، وعندما تنتصر تقتل نفسها؛ وتزداد قوة حين تجد عقبات أكبر. كل شيء يهرب بعنف إلى موته. وحين تُكره تُكره كل شيء. ولا شيء يتحرك من دونها. وحيث يولد الجسم، لا تنمو ولا يتغير وزنها ولا شكلها. ولا حركة تصنعها قابلة للاستدامة. تنمو في التعب وتختفي بالراحة. والجسم الذي تُحبس فيه لا حرية له. وكثيراً ما تولد، من خلال الحركة، قوة جديدة.
>
> Vinci, 1938 The Notebooks of Leonardo da Vinci

ما عرّفه ليوناردو هو بالأحرى الدفع، أو ربما ما نسميه اليوم الطاقة الحركية.

14.5.2 بينيديتي (1530–1590)

F عدل جيوفاني بينيديتي، الشكل 14.6b، نظرية الدفع الآخذة في النضج، مؤكداً أن القوة المطبوعة لا تنتج إلا حركة مستقيمة:

> ... إن أي جزء من المادة الجسمانية يتحرك بذاته بعد أن تطبع فيه قوة محركة خارجية دفعاً، له نزوع طبيعي إلى الحركة على مسار مستقيم، لا منحن.
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

استعمل بينيديتي المثال المألوف لحجر يُدار في مقلاع ليجادل بأن الحركة الدائرية قسرية لا طبيعية، وأن الجسم "يطلب" مساراً مستقيماً بعد إطلاقه.

غير أن الوصف الشائع الاستشهاد لمسار الحجر المماسي، مع القول إن الدفع المطبوع يتناقص تدريجياً وباستمرار، ليس لبينيديتي. بل يرجع إلى مدرسة الدفع الباريسية الأقدم، ولا سيما ألبرت السكسوني، الذي قدم الصيغة المعيارية في كتابه Quaestiones super Physicam. وتنص صياغته على:

> عندما يُطلق المقذوف من المقلاع، يسلك مساره، بهدي الطبيعة، من النقطة التي فارق عندها المقلاع، على خط مماس للدائرة التي رسمها أخيراً... وصحيح أن الدفع المطبوع يتناقص تدريجياً وباستمرار.
>
> Saxony, 1988 Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis

يؤكد وصف ألبرت نقطتين غائبتين عند بينيديتي: هندسة خط المماس عند الانطلاق، واضمحلال الدفع بفعل المقاومة، وهما سمتان من سمات مدرسة باريس في القرن الرابع عشر.

أما عند بينيديتي (Drake, 1976)، فزيادة السرعة في الحركة تنتج من فعل مستمر للقوة، بينما يظل النزوع الطبيعي إلى أسفل (*gravitas*) ثابتاً. وفي الحركة المائلة إلى أعلى لجسم ثقيل، مع افتراض انعدام مقاومة الهواء، يدفع الدفع المطبوع الجسم في خط مستقيم ما دام أقوى من النزوع الكامن إلى أسفل. ولأن النزوع إلى أسفل ثابت، ينشأ تعارض مفترض بين القوتين؛ ومع ضعف الدفع المطبوع تتوازنان في نهاية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

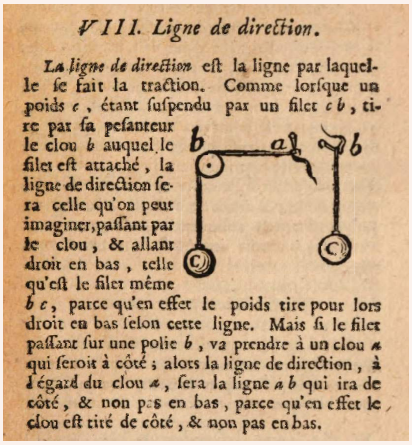
المطاف، وعندئذ يعيد النزوع الطبيعي الجسم إلى الأرض. ويتضح موضع اختلاف بينيديتي عن بوريدان في تتمة المقطع السابق:

> ... ومن ثم يدخل فوراً نزوع الجسم إلى أسفل الناشئ من ثقله، ويمتزج بالقوة المطبوعة، فلا يسمح للخط بالبقاء مستقيماً طويلاً، بل يجعله ينحني سريعاً. فالجسم تحركه قوتان، إحداهما تطبعها القوة، والأخرى تطبعها الطبيعة.
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

14.5.3 باردي (1636–1673)

F

يُعد باردي من الرواد الأوائل لتحليل القوى ومفهوم الاتزان. وقد صاغ تقنيات رياضية لتحليل استقرار المنشآت وتوزيع القوى داخل المنظومات الميكانيكية. كما قدم إسهامات مهمة في فهم متوازي أضلاع القوى، وهو طريقة هندسية لتحديد القوة المحصلة المؤثرة في جسم خاضع لقوى متعددة. وساعد عمله على إرساء المبادئ الرياضية التي يقوم عليها اتزان القوى، ومهد للتطورات اللاحقة في الاستاتيكا، الشكل 14.7.


VIII. Ligne de direction.

La ligne de direction eſt la ligne par laquelle ſe fait la traction. Comme lorſque un poids *c*, étant ſuſpendu par un filet *c b*, tire par ſa peſanteur le clou *b* auquel le filet eſt attaché, la ligne de direction ſera celle qu'on peut imaginer, paſſant par le clou, & allant droit en bas, telle qu'eſt le filet même *b c*, parce qu'en effet le poids tire pour lors droit en bas ſelon cette ligne. Mais ſi le filet paſſant ſur une polie *b*, va prendre à un clou *a* qui ſeroit à côté; alors la ligne de direction, à l'égard du clou *a*, ſera la ligne *a b* qui ira de côté, & non pas en bas, parce qu'en effet le clou eſt tiré de côté, & non pas en bas.

شكل 14.7: مفاهيم الاتزان عند Pardies, 1710

14.5.4 سيمون ستيفن (1548–1620)

F/V

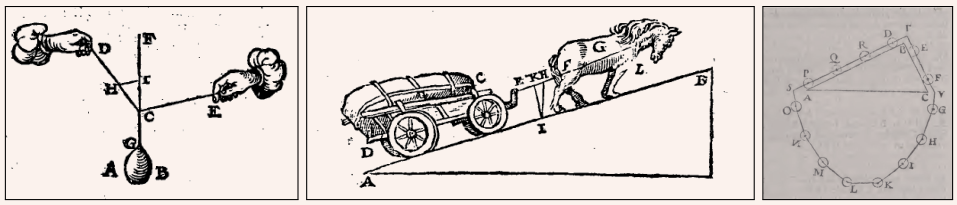
في القوة

F

كان سيمون ستيفن، الشكل 14.8، عالم رياضيات هولندياً يُنسب إليه تأسيس علم الهيدروستاتيكا، وأول من حدد مبدأ *اتزان* القوى[12]، المعروف أيضاً باسم *متوازي أضلاع القوى*.

[12] كثيراً ما يُظن خطأ أن قانون نيوتن الثالث، لكل فعل رد فعل *مساوٍ له* ومعاكس في *الاتجاه*، يوفر اتزان قوتين، هما الفعل ورد الفعل المتساويان والمتعاكسان. لكن القانون يقول في الواقع إنه إذا أثر جسم A بقوة F_a في جسم B، فإن الجسم B يؤثر بقوة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 14.8: سيمون ستيفن (1548–1620)

تناولت رسالته (Stevin, 1586) في الاستاتيكا تحديد مراكز الثقل، والتطبيقات الاستاتيكية (*De Weeghdaet*)، والتطبيقات الهيدروستاتيكية (*De Waterwicht*)، الشكل 14.9. ومن اللافت أنه أعاد في هذا المنشور أيضاً تأكيد اقتناعه بامتياز اللغات الجرمانية. فقد رأى أن الهولندية أفضل لغة للأغراض العلمية لأنها تجمع الإيجاز والوضوح[13].



شكل 14.9: المنشور الرئيس لستيفن (Stevin, 1586)

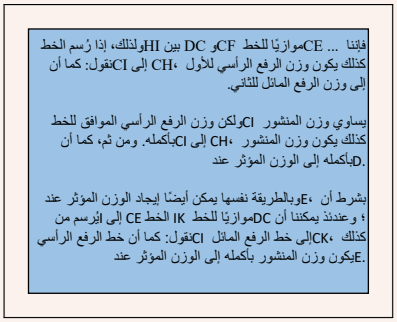
قارن ستيفن (Miller, 2017) القوتين اللتين يبذلهما حبلان يحملان وزناً بالقوة اللازمة لحمله بحبل رأسي واحد. ففي رسمه، الشكل 14.10، يمكن حمل الوزن AB إما بحبل واحد CF، حيث C مركز ثقل الوزن، أو بحبلين CD وCE. وفي الحالة الأخيرة، يمكن إيجاد القوتين اللتين يبذلهما الحبلان برسم مستقيمين موازيين للحبلين نحو الرأسي: فإذا كانت القوة الكلية اللازمة لحمل الوزن بحبل واحد، أي "وزن المنشور كله"، تتناسب مع CI، فإن مركبة القوة المتجهة نحو D تتناسب مع CH، حيث تُعين H برسم الخط HI موازياً لمركبة القوة الأخرى المتجهة نحو E. وبالمثل، يعطي رسم الموازي الآخر IK مقداراً يتناسب مع القوة المتجهة نحو E، وهو CK. والقوتان المركبتان، المتناسبتان مع ضلعي متوازي الأضلاع، لهما معاً أثر مكافئ للقوة المنفردة المتناسبة مع القطر CI.

لكن هذا، على الرغم من مظهره، ليس قاعدة حقيقية لمتوازي أضلاع القوى. فلا تُحسب إلا مقادير الكميات، أما الاتجاهات فمعطاة قبلياً. والأهم أن ستيفن لم يبين أن القوتين المركبتين تنتجان بالضرورة محصلة في اتجاه محدد، هو الرأسي؛ بل افترض ببساطة أن الأمر كذلك. أُدخلت معلومات الاتجاه في الإنشاء، لكنها لم تُستخرج منه. ومن ثم ليست هذه، في أحسن الأحوال، إلا قاعدة لتفكيك مقدار قياسي معطى إلى مقدارين آخرين؛ فلا تُعامل القوى كمقادير موجهة، أو متجهات.

مساوية ومعاكسة F_b في الجسم A. ولا يوجد اتزان، لأن القوتين F_a وF_b تؤثران في جسمين مختلفين، إحداهما في A والأخرى في B.

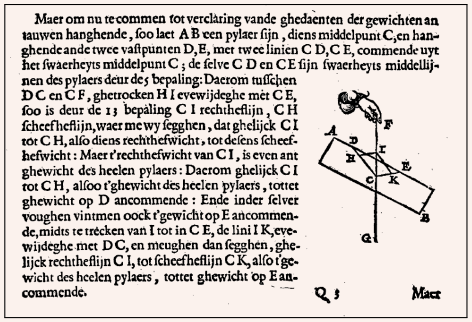
[13] كان طلاب الدراسات العليا في الولايات المتحدة، ولا سيما في الكيمياء والفيزياء، مطالبين سنوات طويلة بدراسة الألمانية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


فإننا ... CE موازيًا للخط CF، بين DC وHI. ولذلك، إذا رُسم الخط
كذلك يكون وزن الرفع الرأسي للأول CH، إلى CI نفول: كما أن
إلى وزن الرفع المائل للثاني.

يساوي وزن المنشور CI، ولكن وزن الرفع الرأسي الموافق للخط
كذلك يكون وزن المنشور CH، إلى CI باكمله. ومن ثم، كما أن
D باكمله إلى الوزن المؤثر عند.

بشرط أن E، وبالطريقة نفسها يمكن أيضًا إيجاد الوزن المؤثر عند
؛ وعندئذ يمكننا أن DC موازيًا للخط IK الخط CE إلى إيرسم من
كذلك CK، إلى خط الرفع المائل CI نفول: كما أن خط الرفع الرأسي
E. يكون وزن المنشور باكمله إلى الوزن المؤثر عند


Maer om nu te commen tot verclaring vande ghedaenten der gewichten an
tauwen hanghende, ſoo laet A B een pylaer ſijn, diens middelpunt C, en han-
ghende ande twee vaſtpunten D, E, met twee linien C D, C E, commende uyt
het ſwaerheyts middelpunt C; de felve C D en C E ſijn ſwaerheyts middellij-
nen des pylaers deur de 5 bepaling: Daerom tuſſchen
D C en C F, ghetrocken H I evewijdeghe met C E,
ſoo is deur de 13 bepaling C I rechtheflijn, C H
ſcheefheflijn, waer me wy ſegghen, dat ghelijck C I
tot C H, alſo diens rechtheſwicht, tot defens ſcheef-
hefwicht: Maer t'rechtheſwicht van C I, is even ant
ghewicht des heelen pylaers: Daerom ghelijck C I
tot C H, alſoo t'ghewicht des heelen pylaers, tottet
ghewicht op D ancommende: Ende inder ſelver
voughen vintmen oock t'gewicht op E ancommen-
de, midts te trecken van I tot in C E, de lini I K, eve-
wijdeghe met D C, en meughen dan ſegghen, ghe-
lijck rechtheflijn C I, tot ſcheefheflijn C K, alſo t'ge-
wicht des heelen pylaers, tottet ghewicht op E an-
commende.
Q 3 Maer

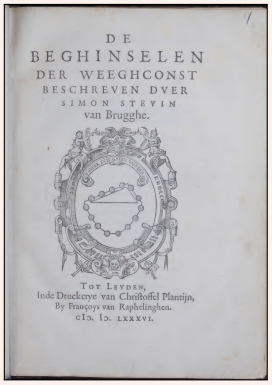
شكل 14.10: تصوير ستيفن لجسم يحمله حبل واحد أو حبلان؛ (Stevin, 1586) و(Miller, 2017)

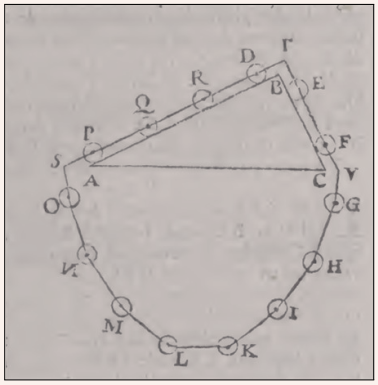
ومع ذلك، برهن ستيفن إمكان تمثيل القوى المؤثرة في جسم هندسياً، وتحديد القوة المحصلة بجمعها. ووفر هذا المبدأ إطاراً رياضياً لتحليل آثار قوى متعددة تؤثر في جسم، وأرسى أساساً مهماً للتطور اللاحق لقوانين نيوتن للحركة.

راجع أيضاً §14.5.4 لمزيد من مناقشة رسالة ستيفن البارزة.

سلسلة الكرات والعمل الافتراضي

V قدم ستيفن إسهاماً حاسماً ببرهانه الشهير بـ*clootcrans* (إكليل الكرات) سنة 1586 (Stevin, 1586). فلا بد أن تكون سلسلة من الكرات المتساوية التباعد معلقة على إسفين مثلثي (الشكل 14.11) في اتزان؛ وإلا لكانت في حركة دائمة، وهو ما عده ستيفن مستحيلاً بداهة. ومن ذلك استنبط قانون المستوى المائل. وكان ستيفن فخوراً جداً بهذا البرهان حتى ظهرت صورته على أغلفة كتبه مع الشعار "Wonder en is gheen wonder" (العجيب ليس عجباً).


DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.
TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Chriſtoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
CIↃ. IↃ. LXXXVI.



شكل 14.11: برهان ستيفن بـ*clootcrans*.

Ghelijck des driehoucx rechter fijde tot de flincker, alfo t'ftaltwicht des cloots op de flincker fijde, tottet ftaltwicht des cloots op de rechter fijde.

Tghegeven. Laet ABC een driehouck wesen diens plat fy rechthouckich op den fichteinder, ende den grondt AC euewydich vanden fichteinder, ende op de fijde AB, die dobbel fy an BC, ligghe een cloot D, ende op de fijde BC een cloot E, euewichtich ende euegroot met den cloot D.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

T’begeerde. Wy mocten bewyfen dat ghelijck de fijde AB 2, tot BC 1, alfoo t’ftaltwicht des cloots E, tottet ftaltwicht des cloots D.

Tbereytsel. Laet ons maecken rondtom den driehouck ABC eenen crans van veerthien clooten, euegroot, euewichtich, ende euewijt van malcandcren als E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D, al ghefnoert an een lini, ftreckende door haer middelpunten, alfo dat fy op die middelpunten drayen mueghen...

Tbewys. Soo t’ftaltwicht der vier clooten D,R,Q,P, niet euen en waer met het ftaltwicht der twee clooten E,F, t’en of t’ander fal fwaerder fijn; laet wesen (foo mueghelick waer) de vier D,R,Q,P... de acht clooten fullen neerwaert rollen, ende d’ander fes rijfen.

Maer dit foo wefende, den crans der clooten ... de acht clooten ter flincker fijde wederom neer fallen rollen, ended’ander fes rijfen, welcke valling ter een der, ende rijfing ter ander, omdat de reden altijdt de felue is, altijdt ghedueren fal, ende de clooten fallen uyt haer feluen een eeuwich roerfel maken, t’welck valfch is.

Daerom ghelijck de lini AB, tot BC, alfoo den cloot D tot den cloot E.

كما يكون الضلع الأيمن للمثلث إلى الأيسر، يكون “الوزن القائم” للكرة على الضلع الأيسر إلى الوزن القائم للكرة على الضلع الأيمن.

المعطى: ليكن ABC مثلثاً مستواه عمودي على الأفق، وقاعدته AC موازية للأفق. وعلى الضلع AB، الذي يساوي ضعفي BC، لتكن كرة D؛ وعلى الضلع BC كرة E مساوية لـ D في الوزن والحجم.

المطلوب: إثبات أن نسبة (AB 2) إلى (BC 1) تساوي نسبة الوزن القائم للكرة E إلى الوزن القائم للكرة D.

الإنشاء: لنصنع حول المثلث ABC إكليلاً من أربع عشرة كرة، متساوية في الحجم والوزن ومتساوية التباعد، تحمل الرموز E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D، ومربوطة كلها بخيط يمر بمراكزها بحيث تستطيع الدوران حول تلك المراكز...

البرهان: إذا لم يكن الوزن القائم للكرات الأربع D,R,Q,P مساوياً للوزن القائم للكرتين E,F، فلا بد أن يكون أحد الجانبين أثقل... وعندئذ تتدحرج الكرات الثماني إلى أسفل وترتفع الست الأخرى.

لكن لو كان الأمر كذلك، لتدحرج إكليل الكرات مرة أخرى إلى أسفل من اليسار وارتفع من اليمين؛ ولأن السبب يظل دائماً نفسه، يستمر ذلك إلى الأبد، وتنتج الكرات من تلقاء نفسها حركة أبدية، وهذا باطل.

ولذلك، كما تكون نسبة الخط AB إلى BC، تكون نسبة الكرة D إلى الكرة E.

Stevin, 1586 De Beghinselen der Weeghconst

ما يقوله ستيفن هو:

- **قانون المستوى المائل (الفائدة الميكانيكية).** في حالة التلامس عديم الاحتكاك، تتناسب القوة، أو “الوزن الفعال”، اللازمة على المستوى المائل مع طول المستوى؛ وبترميز ستيفن:

$$\frac{D}{E} = \frac{AB}{BC},$$

ومن ثم كلما طال المنحدر، عند الارتفاع نفسه، صغر السحب المطلوب.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **الصيغة الحديثة المكافئة.** لوزن W على مستوى مائل زاويته θ وطوله L وارتفاعه h:

$$P = W \sin\theta = W\,\frac{h}{L},$$

ولذلك تتطلب منحدرات مختلفة إلى الارتفاع نفسه قوى تتناسب عكسياً مع أطوالها.
- **الصلة المفاهيمية بالاستدلال "الافتراضي".** يحتج ستيفن بالخلف: فلو لم تتزن القوى، لدارت المنظومة في مسار مغلق وأنتجت حركة دائمة. ولأن ذلك مستحيل، فلا بد أن ينعدم النزوع المحرك الصافي عند الاتزان، وهو سلف قريب لحجج العمل الافتراضي والإزاحة الافتراضية اللاحقة.

يرجح أن ستيفن عد هذا الاشتقاق من أهم ما في الرسالة، وهو ما يفسر ظهور *clootcrans* صورةً في صفحة العنوان (الشكل 14.11).

14.5.5 غاليليو (1564–1642)

يقف غاليليو غاليلي، الشكل 14.6c، عند منعطف محوري في تاريخ الميكانيكا. وتمتد إسهاماته عبر مجالين مترابطين: مفهوم العطالة الناشئ الذي سيزيح نظرية الدفع في نهاية المطاف، واستدلال أولي بالعمل الافتراضي يستبق الصيغ اللاحقة للاتزان الميكانيكي القائمة على الطاقة.

من الدفع إلى العطالة

F

بدأ غاليليو في كتابه *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* (Galilei, 1638) تصوراً حديثاً لكمية الحركة، فوصف الدفع أثراً للحركة ومقياساً لها يُعامل دالة في الوزن والسرعة. وقادته تجاربه بالمستويات المائلة والأجسام الساقطة إلى صياغة مبدأ العطالة، الذي ينص على أن الجسم يبقى في حالة حركته، ساكناً أو متحركاً بسرعة ثابتة، ما لم تؤثر فيه قوة خارجية. وقد تحدى هذا المبدأ الرأي الأرسطي القائل إن الأجسام تسكن بطبيعتها حين لا تخضع لتأثيرات خارجية، وأرسى أساس قانون نيوتن الأول للحركة.

لنتذكر أن نظرية الدفع كانت تعني أن الجسم يسكن في غياب القوة؛ فلم يكن مفهوم العطالة مفهوماً. وتمثل كلمات غاليليو نفسه هذا الانتقال:

> لاحظت أن للأجسام الفيزيائية ميلاً إلى حركة ما، مثل ميل الأجسام الثقيلة إلى أسفل، وهي حركة تمارسها بخاصية ذاتية ومن دون حاجة إلى محرك خارجي خاص، متى لم تعقها عقبة. ولها نفور من حركة أخرى، مثل نفور الأجسام الثقيلة نفسها من الحركة إلى أعلى، ولذلك لا تتحرك بهذه الطريقة قط إلا إذا قذفها محرك خارجي بعنف إلى أعلى. وأخيراً، تكون غير مبالية بحركات معينة، كما تكون الأجسام الثقيلة تجاه الحركة الأفقية[14]، فلا ميل لها إليها... ولا نفور منها... ولذلك، بعد إزالة جميع العوائق الخارجية، يكون الجسم الثقيل على سطح كروي متحد المركز مع الأرض غير مبال بالسكون أو بالحركة نحو أي جزء من الأفق. ويبقى في الحالة التي وُضع فيها مرة؛ فإذا وُضع في حالة سكون حفظها، وإذا وُضع، مثلاً، في حركة نحو الغرب حافظ على تلك الحركة. وهكذا، فإن سفينة... إذا تلقت مرة دفعاً في بحر هادئ، ظلت تتحرك حول كرتنا الأرضية بلا توقف... لو أمكن إزالة جميع العوائق الخارجية.

[14] يعني "الأفقي" عند غاليليو حركة جسم لا تتجه نحو مركز الأرض ولا تبتعد عنه.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Galilei **and** Drake, 1990 *"Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots ((1613), The assayer (1623"*

يقدم غاليليو هنا مفهوم العطالة للمرة الأولى.[15] ونلاحظ أنها تبدأ بـ*العطالة الدائرية* للأجرام السماوية، ثم تمتد إلى السفن التي تدور حول الكرة الأرضية. ومن المؤسف عدم وجود ذكر مباشر وصريح لـ*العطالة الخطية*، وإن أمكن بالتأكيد استنتاجها من مشاهدة إبحار سفينة، في خط مستقيم على الأرجح بالنسبة إلى مراقب. وكان على هذا أن ينتظر نيوتن. وبعبارة موجزة، انتقل غاليليو من *ميكانيكا الدفع* إلى *ميكانيكا العطالة الكلاسيكية*.

ومن الجدير بالملاحظة أيضاً أن غاليليو استنتج لاحقاً، سنة 1632، أنه يستحيل، بناءً على فرضية العطالة الأولية هذه، تمييز جسم متحرك من جسم ساكن من دون مرجع خارجي للمقارنة، وهو مبدأ سيتبناه أينشتاين لاحقاً، وإن كان من المستبعد جداً أن يكون قد استلهمه مباشرة من غاليليو:

> سالف. ما زلنا إذن مصرين على تلك الفكرة المتأصلة بأننا لا نتحرك إلا إذا حملتنا أرجلنا.
>
> ما تقوله صحيح، يا عزيزي سيمبليسيو، إذا كان الشيء الذي تراه متحركاً بينما تظل أنت ساكناً تراقبه. أما إذا كنت في بئر، والبئر وأنت معه تحملكما دورة الأرض، أفلا ترى أن فوهة البئر لن تدركك، لا في ساعة ولا في ألف ولا في الأبد كله؟ ولا يمكن تبين الكيفية التي تؤثر بها حركة الأرض أو سكونها فيك في مثل هذا الوضع من فوهة البئر، بل من جسم آخر منفصل لا يشارك حالة الحركة نفسها، أو ينبغي أن أقول حالة السكون.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

القاعدة الذهبية للميكانيكا

V

إلى جانب عمله في العطالة، ربط غاليليو فاعلية الآلات بالمسافات التي تؤثر خلالها القوى، وفعل ذلك بطريقة تستبق استدلال العمل الافتراضي اللاحق. ففي كتاب *Le meccaniche* (Galilei, 1594)، ذكر قيداً عاماً على الأدوات الميكانيكية: لا يمكن لأي جهاز مضاعفة القوة حقاً من دون خسارة معوضة في السرعة، ومن ثم زيادة في الزمن. وصياغته صريحة:

> cioè, che quanto si guadagna di forza per mezo loro, altrettanto si scapita nel tempo e nella velocità.

> أي إن كل ما يُكتسب بوساطتها من قوة، يُفقد بمقداره نفسه في الزمن والسرعة.
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

ينص مبدأ التعويض هذا، الذي شاع لاحقاً في الكتب الدراسية باسم *القاعدة الذهبية للميكانيكا*، على أن أي كسب في القوة يجب أن يُدفع بخسارة مقابلة في السرعة، أو بزيادة مكافئة في المسافة والزمن اللذين تعمل خلالهما القوة المحركة.

لاحظ غاليليو فوراً أن العبارة قد تبدو متناقضة، لأن اللولب والترتيبات ذات الصلة قد تبدو قادرة على زيادة القوة من دون أن يقطع المحرك مسافة أطول مما يقطعه الجسم المتحرك:

[15] تظهر سوابق التفكير العطالي في تقاليد الدفع الأقدم؛ والمقصود هنا أن غاليليو قدم عبارة صريحة بصورة غير معتادة ومرتكزة في الفيزياء، أولاً في صورة دائرية/أفقية، واستعملها منهجياً.

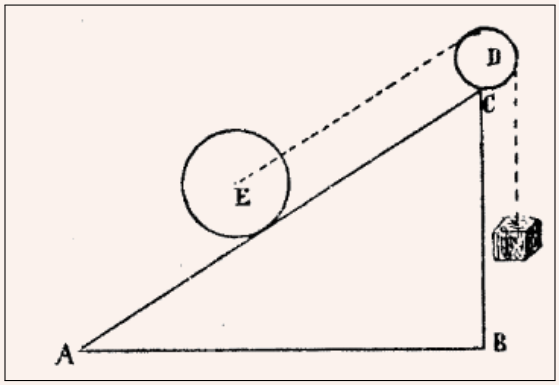
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.senza che il motore si muova per più lungo viaggio che il mobile ...

... من دون أن يتحرك المحرك في مسافة أطول من مسافة الجسم المتحرك.

Galilei, 1594 Le mecaniche

وبعبارة أخرى، صاغ تحليله للمستوى المائل والآلات البسيطة بدلالة "المسافات المقطوعة" (*viaggi*) لكل من القدرة المحركة والحمل؛ لكن تفسيره ظل في لغة الزمن والسرعة.[16]



شكل 14.12: دراسة غاليليو للمستوى المائل (Galilei, 1594)

عاد غاليليو، لإزالة مظهر التناقض، إلى المستوى المائل وقارن الحركات في إطار مضبوط هندسياً. فما يهم ليس مجرد المسافة المرسومة على دليل، بل التغير الرأسي في مواجهة الجاذبية. وفي الترميز الحديث، لحالة مثالية عديمة الاحتكاك، يتطلب رفع وزن W خلال ارتفاع h بالسحب على مستوى طوله L قوة

$$P = W\,\frac{h}{L} = W \sin\theta,$$

بحيث يساوي حاصل الضرب $P\,L$ القيمة $W\,h$. فلا تقلل الآلة القوة المطلوبة إلا بزيادة المسافة، ومن ثم الزمن عند إيقاع متقارب، التي يجب أن تؤثر خلالها القوة المطبقة. وقد عبر غاليليو عن هذه المقايضة بدلالة السرعة والزمن لا بدلالة "العمل"، لكن المضمون واحد: لا يمكن *الحصول على فائدة ميكانيكية من دون دفع ثمنها في الحركة* (Galilei, 1594).

يسير هذا التفكير بالتوازي مع حجة سيمون ستيفن الأسبق للمستوى المائل، القائمة على *clootcrans*: إذ استنتج ستيفن الاتزان من استحالة الحركة الدائمة، واستعاد من ذلك الاتزان التناسب الذي يحكم المستوى المائل. ووصل غاليليو إلى القيد الفيزيائي نفسه من منظور الآلات، مؤكداً المقايضة الضرورية بين القوة والمسافة، ومن ثم الزمن، التي تؤثر خلالها القوة. ويبين ستيفن وغاليليو معاً مسارين متكاملين نحو مبدأ سيصبح لاحقاً قياسياً في لغة العمل الافتراضي: لا تستطيع الآلة خلق فائدة ميكانيكية من دون "ثمن" معوض تماماً في الحركة (Stevin, 1586; Galilei, 1594).

[16] على خلاف الصيغ اللاحقة القائمة على العمل، كثيراً ما احتج غاليليو بمقارنات حركية للسرعات والأزمنة، وهي صياغة تظل أقرب إلى المناقشات السابقة لنيوتن بشأن الحركة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبهذا المعنى، تمثل "قاعدة غاليليو الذهبية" سلفاً قريباً لصيغ الإزاحة الافتراضية والعمل الافتراضي اللاحقة: ففي آلة مثالية متزنة، تُقيد أي حركة صغيرة مقبولة بحيث ينعدم العمل الصافي للقوى المطبقة. وسيعيد مؤلفون لاحقون صياغة الثابت نفسه بلغة تحليلية أكثر منهجية، لكن البصيرة المركزية موجودة بالفعل في كتابات غاليليو الميكانيكية، وتتردد مرة أخرى في *Discorsi* ضمن السياق الأوسع للآلات البسيطة ونقل القوة (Galilei, 1638).

القيود الرياضية والسياق التاريخي

افتقر غاليليو إلى الإطار الرياضي للهندسة التحليلية الديكارتية وحساب التفاضل والتكامل اللذين سيتحكم فيهما نيوتن لاحقاً. ومع أن معاصره كبلر صاغ قوانينه الثلاثة الشهيرة، ظلت إسهامات غاليليو الرياضية محدودة، وكثيراً ما كانت إرشادية أو مبسطة. وتبين مثلاً محاولاته تحديد المحور المحايد (§7.2.2) هذا القيد. ولذلك ليس مستغرباً أن غاليليو لم يصغ معادلة خاصة بالعطالة؛ وكان على ذلك أن ينتظر نيوتن.

تمكن غاليليو، الذي يُعد "أبا الفيزياء" أو "أبا الميكانيكا التجريبية"، من الدفاع عن الكوبرنيكية وهو قريب مكانياً من البابا، الذي كان يتمسك بالرأي الأرسطي القائل بمركزية الأرض. ومن ثم تجدر الإشارة إلى أن غاليليو، مع تعرضه للتدقيق بسبب تأييده الرأي القائل بمركزية الشمس، كان مصير معاصره جوردانو برونو (1548–1600) أشد قسوة بكثير. فقد أُجبر غاليليو على التراجع عن معتقداته القائلة بمركزية الشمس أمام الكنيسة الكاثوليكية الرومانية، بينما تعرض برونو، الفيلسوف الإيطالي والراهب الدومينيكي، للاضطهاد ثم أُعدم في نهاية المطاف بسبب دفاعه الذي لا يلين عن مركزية الشمس ونظريات كونية أخرى عدتها السلطات الدينية هرطقية.

14.5.6 كبلر (1571–1630)

F

تقع مناقشة نشوء الكون القائل بمركزية الشمس خارج نطاق هذا الكتاب. غير أن الابتعاد عن مركزية الأرض حفز إعادة النظر في مفهومي القوة والدفع، وهما محور تركيز هذا الفصل.

وللتذكير سريعاً، اشتمل عمل براهي على مجموعة واسعة من الرصود، وثق فيها بدقة حركات الأجرام السماوية وجمع البيانات في جداول. وعلى الرغم من شمول نهجه التجريبي، افتقرت هذه الرصود إلى إطار رياضي متماسك أو تفسير فيزيائي[17]. وقد عنى غياب أساس نظري شامل أن رصود براهي ظلت منفصلة عن فهم أعمق للميكانيكا السماوية.

كان يوهانس كبلر، الشكل 14.6d، هو الذي قدم في نهاية المطاف النموذج الرياضي اللازم لفهم هذه الرصود، بقوانينه في حركة الكواكب. غير أن التفسير الكامل للمبادئ الكامنة كان عليه أن ينتظر عمل نيوتن الرائد ونظريته في الجاذبية الكونية (Kepler, 1609). وبعبارة موجزة، كان كبلر أول من سعى إلى تعريف كمي *للقوة*؛ فلنر كيف فعل ذلك.

لكن ينبغي أولاً ملاحظة غموض كبلر: ففي العمل الواحد نفسه كان يشير إلى مفهوم القوة أحياناً بوصفه نفساً، وأحياناً بوصفه كمية فيزيائية جسمانية شبه ميكانيكية. ومن الواضح أنه كان يكافح هو أيضاً للانفصال

[17] يشبه ذلك إجراء اختبارات كثيرة للمواد والاكتفاء بجدولتها في صحيفة حساب. وما ينقص هو نموذج تكويني رياضي شامل يفسر الظواهر الكامنة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

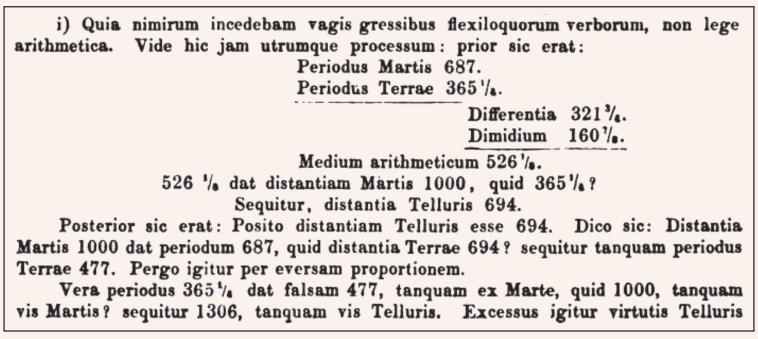
عن أرسطو. ففي كتابه *Mysterium cosmographicum*1 ظل كبلر متمسكاً بالتصور السماوي التقليدي للقوة بوصفها نفساً تحيي الأجسام وتوجه حركاتها الخاصة.

تصور كبلر الطبيعة الكونية لقوى الجاذبية، وسمى الجاذبية "انفعالاً" لا فعلاً. وتوصل إلى تزامن زمني بين المد والجزر وبعض أوضاع القمر. ونتيجة لهذه البحوث، طرح بعضهم نظرية أن القمر يسبب المد والجزر. ووافق كبلر أنصار نظرية القمر، لكنه عمم النتائج بمعنى مهم: فالقمر يجذب المحيطات مثلما تجذب الأرض جميع الأجسام الثقيلة، ومنها المحيطات. انظر الشكل 14.13.

بحث كبلر عن تفسير ديناميكي لحركة الكواكب في أول رسائله الفلكية *Astronomia nova*. وكتب في مقدمة الكتاب:

> هذه هي النظرية الصحيحة للجاذبية. الجاذبية ميل متبادل بين أجسام مترابطة ينزع إلى توحيدها وجمعها، ومن النوع نفسه الملكة المغناطيسية، إذ تجذب الأرض الحجر أكثر مما ينزع الحجر إلى الأرض. وحتى لو وضعنا مركز الأرض في مركز العالم، لما حُملت الأجسام الثقيلة نحو مركز العالم هذا في ذاته، بل نحو مركز الجسم الكروي الذي ترتبط به، أي نحو مركز الأرض. ولذلك، أينما نُقلت الأرض، ظلت الأجسام الثقيلة تُحمل نحوها بفضل الملكة التي تحييها.
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis

ذكر في *الفلك* الجديد نفسه (1609) اكتشاف أن مسار الكوكب "طريق بيضوي، إهليلجي تماماً". وذكر أنه توصل إلى النتيجة بإجراء "براهين شاقة للغاية و... حسابات على عدد كبير جداً من الرصود". كما أوضح أن نجاحه قام على رفض نهج بطليموس، الذي اعتبر متوسط حركة الشمس بدلاً من حركتها الظاهرية. فقد ظن بطليموس أن لا فرق محسوساً بين الحركتين، فاختار الأولى لسهولة الحساب. وتبع كوبرنيكوس (1473–1543) وبراهي (1546–1601) بطليموس، لكن كبلر رأى أن هذه ليست الطريق الصحيحة. وقد أشار في دراسته المبكرة إلى ضرورة أخذ الحركة الظاهرية في الحسبان، أي جعل جسم الشمس الحقيقي نقطة المرجع. لكن ذلك لم يكن كافياً؛ فلم تكن مطابقة الحسابات للرصود بنجاح كافية عند كبلر، بل وجب أن يكون النمط الكامن في الرصود قابلاً للتفسير الفيزيائي. وينبغي لهذا النمط أن يقابل المجالات الثلاثة المنفصلة التي كونت معاً إطار كبلر لإجراء الإصلاح المطلوب في علم الفلك: الهندسة والفيزياء والرصود (Hon **and** Zik, 2009).



i) Quia nimirum incedebam vagis gressibus flexiloquorum verborum, non lege arithmetica. Vide hic jam utrumque processum: prior sic erat:

Periodus Martis 687.
Periodus Terrae 365 ¼.
Differentia 321 ¾.
Dimidium 160 ⅞.
Medium arithmeticum 526 ⅛.

526 ⅛ dat distantiam Martis 1000, quid 365 ¼?
Sequitur, distantia Telluris 694.

Posterior sic erat: Posito distantiam Telluris esse 694. Dico sic: Distantia Martis 1000 dat periodum 687, quid distantia Terrae 694? sequitur tanquam periodus Terrae 477. Pergo igitur per eversam proportionem.

Vera periodus 365 ¼ dat falsam 477, tanquam ex Marte, quid 1000, tanquam vis Martis? sequitur 1306, tanquam vis Telluris. Excessus igitur virtutis Telluris

شكل 14.13: حسابات كبلر (Kepler, 1855)

تجدر الإشارة إلى أن كبلر لم يستدع قط مفهوم العطالة الحديث في كتاباته. ومع ملاحظته أن سرعة الكوكب تبلغ أقصاها عند الحضيض وأدناها عند الأوج، اقتنع بأن دور الشمس في الظاهرة فيزيائي أساساً، ومن ثم ميكانيكي *أكثر* منه روحياً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> إذا استبدلت بكلمة "النفس" كلمة "القوة"، حصلت على المبدأ نفسه الذي تقوم عليه الفيزياء السماوية في الرسالة عن المريخ وغيرها... كنت أعتقد من قبل أن سبب حركة الكواكب نفس، إذ سحرتني تعاليم ج. س. سكاليغر عن العقول المحركة. لكن عندما أدركت أن هذه الأسباب المحركة تضعف مع البعد عن الشمس، خلصت إلى أن هذه القوة شيء جسماني، إن لم يكن بالمعنى الدقيق فعلى الأقل بمعنى معين.
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis

وها قد وصلنا!

استبق عمله أخيراً اكتشاف قانون الجاذبية، إذ أدرك أن القوة المؤثرة في الكواكب لا بد أن تكون قوة تجاذب شعاعية مركزها الشمس. وكان ذلك ابتعاداً مهماً عن تصور أرسطو للقوة بوصفها جراً مماسياً.

14.5.7 ديكارت (1596–1650)

قدم رينيه ديكارت إسهامات حاسمة في مفهوم القوة ومبدأ العمل الافتراضي معاً. فبينما كان كبلر "ميكانيكياً" يستخلص النتائج والمعادلات من الرصود، اتخذ ديكارت، ولا ننسى أنه كان فيلسوفاً كبيراً (*Cogito Ergo Sum*)، نهجاً أكثر تأملاً. وفسرت مفاهيمه كيفية حركة الأجسام وتفاعلها بناءً على مبادئ فلسفية، وإن افتقر نهجه إلى الصياغة الرياضية والقدرة التنبؤية في عمل كبلر.

ومن اللافت أن ديكارت، الكاثوليكي المخلص، قضى معظم حياته في الجمهورية الهولندية، حيث انضم مرتزقاً إلى جيش الولايات الهولندية البروتستانتي، ودرس الهندسة العسكرية كما أسسها سيمون ستيفن. وكانت تلك سنوات العصر الذهبي الهولندي، التي اتسمت بانفتاح ثقافي يناقض بشدة البيئة الأكثر قمعاً في فرنسا.

مزيد عن ديكارت في §6.6.3.

القوة والدفع

F

تمثل إسهام ديكارت[18] في مفهوم القوة في تقديم إطار أنطولوجي بديل[19] لم يعد لمفهوم الدفع التقليدي مكان فيه، الشكل 14.14.

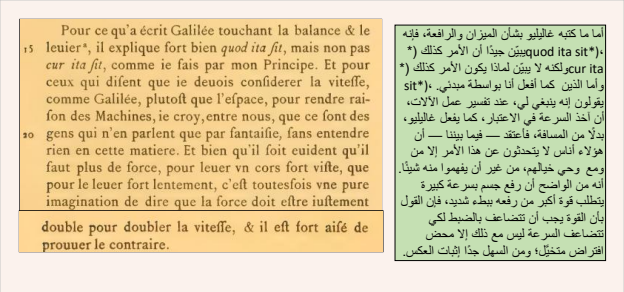
ركز مفهوم ديكارت للدفع أساساً على حركة الأجسام على الأرض لا الأجرام السماوية. وكان معنياً بتفسير الحركة الأرضية، مثل حركة المقذوفات، أكثر من الحركة المدارية للكواكب. وكان نهجه نوعياً، يُستعمل لتفسير استمرار الحركة لا لتقديم نظرية رياضية دقيقة.

زعم ديكارت في *مبادئ الفلسفة* (1644) أن الله هو "السبب الكوني والأولي للحركة" من حيث إنه يحفظ الكمية الكلية للحركة والسكون التي خلقها أولاً في الكون، بواسطة "مشاركته العادية". وفسر ديكارت لاحقاً أن الله يحفظ العالم المادي "بالفعل نفسه ووفق القوانين نفسها التي خلقه بها أول مرة". وفي *المبادئ*، تفيد مطابقة فعل الخلق الإلهي بفعل الحفظ أن الله يحدث انتقالات الحركة الناجمة عن التصادمات التي تحفظ الكمية الكلية للحركة والسكون التي خلقها أولاً (Schmaltz, 2003).

[18] مزيد عن ديكارت في §6.6.3.

[19] الأنطولوجيا: فرع الفلسفة المعني بطبيعة الكينونة والوجود أو الواقع. وبعبارة أبسط، تتناول أسئلة ماهية الأشياء في أساسها، وكيف توجد، وما معنى أن يوجد شيء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance & le leuier*, il explique fort bien *quod ita fit*, mais non pas *cur ita fit*, comme ie fais par mon Principe. Et pour ceux qui difent que ie deuois conſiderer la viteſſe, comme Galilée, plutoſt que l'eſpace, pour rendre raiſon des Machines, ie croy, entre nous, que ce ſont des gens qui n'en parlent que par fantaiſie, ſans entendre rien en cette matiere. Et bien qu'il ſoit euident qu'il faut plus de force, pour leuer vn cors fort viſte, que pour le leuer fort lentement, c'eſt toutesfois vne pure imagination de dire que la force doit eſtre iuſtement double pour doubler la viteſſe, & il eſt fort aiſé de prouuer le contraire.

أما ما كتبه غاليليو بشأن الميزان والرافعة، فإنه يبيّن جيدًا أن الأمر كذلك (*quod ita sit*)، ولكنه لا يبيّن لماذا يكون الأمر كذلك (*cur ita sit*). وأما الذين كما أفعل أنا بواسطة مبدئي، يقولون إنه ينبغي لي، عند تفسير عمل الآلات، أن آخذ السرعة في الاعتبار، كما يفعل غاليليو، بدلًا من المسافة، فأعتقد — فيما بيننا — أن هؤلاء أناس لا يتحدثون عن هذا الأمر إلا من ومع وحي خيالهم، من غير أن يفهموا منه شيئًا. أنه من الواضح أن رفع جسم بسرعة كبيرة يتطلب قوة أكبر من رفعه ببطء شديد، فإن القول بأن القوة يجب أن تتضاعف بالضبط لكي تتضاعف السرعة ليس مع ذلك إلا محض افتراض متخيَّل؛ ومن السهل جدًا إثبات العكس.

شكل 14.14: رينيه ديكارت (1596–1650)

رأى ديكارت أن الكون ممتلئ بمادة تسمى "الأثير"، وأن هذا الأثير في حركة دائمة، يكون دوامات. وكانت الأجرام السماوية، ومنها الشمس والكواكب والنجوم، تحملها هذه الدوامات كما تحمل الأشياءَ مياهُ جدول:

> لكنني أريد الآن أن تتأمل ماهية جاذبية هذه الأرض، أي القوة التي توحد جميع أجزائها وتجعلها جميعاً تنزع إلى مركزها، كل جزء بدرجة تزيد أو تنقص بحسب كبره وصلابته؛ وهي ليست شيئاً آخر ولا تتكون إلا من أن أجزاء السماء الصغيرة المحيطة بها، إذ تدور حول مركزها بسرعة أكبر بكثير من سرعة أجزاء الأرض نفسها، تنزع أيضاً بقوة أكبر بكثير إلى الابتعاد عنه، ومن ثم تدفع أجزاء الأرض نحوه.
>
> Descartes, 1927 Selections

حاول ديكارت هنا إظهار أن الجسيمات الأكبر حجماً المكونة للدوامة التي تقع الأرض في مركزها تتحرك باستمرار نحو محيط الدوامة بسبب كبرها؛ أما المادة الأرضية المتماسكة في كتل كبيرة، فلا تستطيع الاستجابة للضغط المتجه إلى الخارج بسهولة استجابة المادة الأثيرية (Jammer, 1957).

الإزاحات الافتراضية وإنشاء المماس

V

انطلاقاً من بصائر ستيفن الهندسية، أضفى ديكارت وضوحاً غير مسبوق على مبدأ العمل الافتراضي، فحوله من قاعدة تناسب إلى أساس للاستاتيكا كلها. وتمثل إسهاماته المحفوظة في مراسلاته الواسعة (Descartes, 1898) تقدماً مفاهيمياً حاسماً: إدراك أن الإزاحات *المتناهية* في *الصغر* وحدها هي المهمة، وأن *المكان*، لا السرعة، هو المقياس الصحيح للفائدة الميكانيكية.

المبدأ الأساسي (1637). ذكر ديكارت المبدأ الأساسي بوضوح مدهش في رسالة إلى كريستيان هويغنس مؤرخة في 5 أكتوبر 1637، رافقت رسالته القصيرة *Explication des engins par l'aide desquels on peut avec une petite force lever un fardeau fort pesant*:

> يقوم اختراع هذه الآلات كلها على مبدأ واحد، وهو أن القوة نفسها القادرة، مثلاً، على رفع وزن مقداره 100 رطل إلى قدمين، تستطيع أيضاً رفع وزن مقداره 200 رطل إلى قدم واحدة، أو وزن مقداره 400 رطل إلى نصف قدم، وهكذا، بشرط تطبيقها عليها.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Huygens, 5 October 1637, AT I, 435–436

يعبر هذا عن حفظ حاصل ضرب الحمل في الإزاحة الرأسية، وهو يشبه ظاهرياً قاعدة أرسطو في التناسب، لكن مع فرق حاسم: لا توجد *إحالة إلى الزمن أو السرعة*. فـ"القوة" التي يتحدث عنها ديكارت ليست جهداً

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لحظياً، بل فعلاً يقاس بحاصل ضرب الوزن في الارتفاع المقطوع. وكما سيشرح لاحقاً، لهذا الفعل "بُعدان"، بخلاف القوة اللازمة لمجرد حمل وزن ساكن، التي لها بُعد واحد فقط.

هندسة الإزاحة المتناهية في الصغر (1638). طور ديكارت الآثار الكاملة لمبدئه في رسالة لافتة إلى ميرسين مؤرخة في 13 يوليو 1638. وقدم فيها المفهوم الحاسم لـ*الحركة الناشئة*، أي "بداية الحركة"، وبين كيفية تطبيق مبدئه على أجسام مقيدة بالحركة على مسارات منحنية.

تظهر البصيرة الرئيسة في أول الرسالة:

> ينتج من ذلك بوضوح أن الثقل النسبي لكل جسم، أو ما هو الشيء نفسه، القوة التي يجب استعمالها لحمله ومنعه من الهبوط عندما يكون في وضع معين، ينبغي قياسها بـ*بداية الحركة* التي يتعين على القدرة الحاملة أن تصنعها، سواء لرفعه أو لمتابعته إذا هبط. فتكون النسبة بين الخط المستقيم الذي ترسمه هذه الحركة والخط الذي يبين مقدار اقتراب الجسم في الوقت نفسه من مركز الأرض، هي النسبة نفسها بين ثقله المطلق وثقله النسبي.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 228–229

تستحق سمات عدة في هذا المقطع التأكيد. أولاً، تشير عبارة "بداية الحركة" (*commencement du mouvement*) إلى أن ديكارت لا يعنى بإزاحات محدودة، بل بإزاحات متناهية في الصغر، أي هندسة القيد عند نقطة، لا المسار المقطوع عبر مسافة قابلة للقياس. وثانياً، يدل استعماله صيغة الشرط ("يتعين *أن تصنع*"، "ترسم") على أننا لا ننظر في إزاحات فعلية، بل إزاحات ممكنة. ويفتح ذلك الباب لمفهوم *الافتراضية* الذي سيصرح به يوهان برنولي لاحقاً.

وبعد أسطر قليلة، صرح ديكارت بطابع استدلاله المتناهي في الصغر:

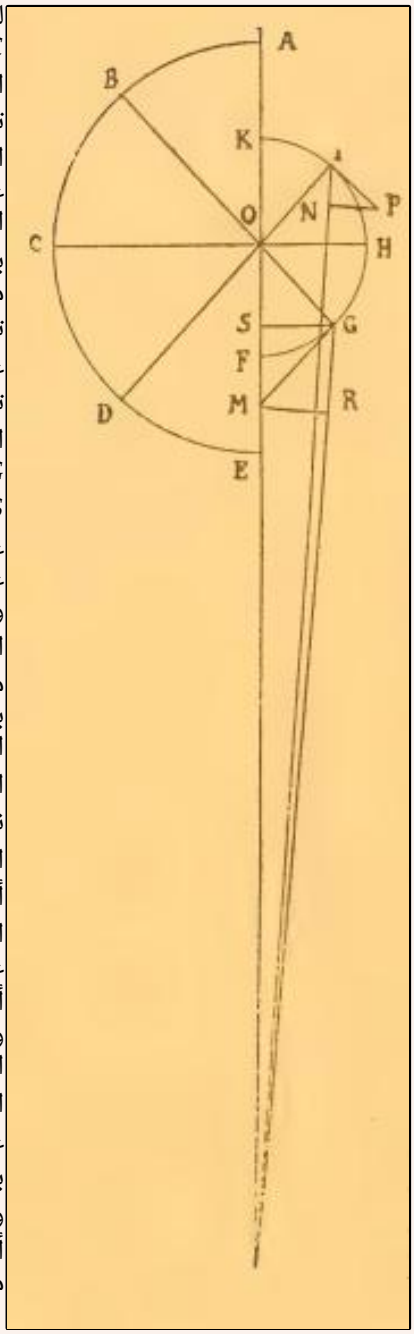
> لاحظ أنني أقول يبدأ في *الهبوط*، لا يهبط فحسب، لأن بداية الهبوط وحدها هي التي يجب أخذها في الحسبان.
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 233

هذه عبارة حاسمة. فما يهم ليس الحركة المحدودة، بل *بداية* الحركة المتناهية في الصغر.

الرافعة وإنشاء المماس. وضح ديكارت مبدأه بثلاثة أمثلة: البكرة والمستوى المائل والرافعة. ومثال الرافعة مهم خصوصاً لأنه يبين كيفية معالجة القيود التي تفرض الحركة على مسارات منحنية. ويستحق المقطع الكامل الاقتباس، إذ يمثل أحد أوضح عروض الاستاتيكا السابقة للاغرانج:

المثال 3 — الرافعة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لتكن CH رافعة مسندة عند النقطة O، بحيث إذا رُفعت أو خُفضت وصفت النهاية C نصف الدائرة $ABCDE$، ووصفت النهاية H نصف الدائرة $FGHIK$، ومركز نصفي الدائرتين هو O. ولا يؤخذ سمكها أو وزنها في الحسبان، بل تُعد خطاً مستقيماً رياضياً تقع عليه النقطة O. لاحظ الآن أنه بينما تصف القوة أو القدرة التي تحركها نصف الدائرة كله $ABCDE$ وتعمل على ذلك الخط $ABCDE$، ومع أن الوزن، الذي أفترضه عند النهاية الأخرى، يصف كذلك نصف الدائرة $FGHIK$، فإنه لا يرتفع بطول ذلك الخط المنحني $FGHIK$، بل بطول الخط المستقيم FK فقط. ومن ثم لا تُقاس النسبة بين القوة التي تحرك الوزن وثقله بنسبة قطري الدائرتين أو محيطيهما، بل بنسبة محيط الدائرة الأولى إلى قطر الثانية.

تأمل أيضاً أن هذه القوة لا يلزم أن تكون كبيرة بالقدر نفسه تقريباً لتحريك الرافعة عندما تكون قرب A أو E كما تكون قرب B أو D، ولا كبيرة قرب B أو D كما تكون قرب C. والسبب أن الوزن يرتفع أقل في تلك المواضع. ويسهل رؤية ذلك إذا افترضنا أن الخط COH موازٍ للأفق وأن AOF يقطعه بزاوية قائمة، وأخذنا النقطة G متساوية البعد من النقطتين F وH، والنقطة B متساوية البعد من A وC، ثم رسمنا GS موازياً للأفق؛ عندئذ نلاحظ أن الخط FS، الذي يبين مقدار ارتفاع الوزن أثناء عمل القوة على الخط AB، أصغر بكثير من الخط SO، الذي يبين مقدار ارتفاعه أثناء عمل القوة على الخط BC.

ولقياس مقدار هذه القوة بدقة عند كل نقطة من الخط المنحني $ABCDE$، ينبغي التفكير في أنها تعمل هناك بالطريقة نفسها تماماً كما لو كانت تسحب الوزن على مستوى مائل دائري؛ ويجب قياس ميل هذا المستوى الدائري، أو الكروي، عند كل نقطة بميل الخط المستقيم المماس للدائرة عند تلك النقطة. فمثلاً، عندما تكون القدرة عند النقطة B، ولإيجاد النسبة بينها وبين ثقل الوزن الموجود عند النقطة G، ينبغي رسم المماس GM، وخط آخر من النقطة G مثل GR يتجه رأساً نحو مركز الأرض؛ ثم من نقطة M تؤخذ كيفما اتفق على الخط GM، يُرسم MR عمودياً على GR. وينبغي اعتبار أن نسبة ثقل هذا الوزن عند النقطة G إلى القوة اللازمة في ذلك الموضع لحمله أو تحريكه على الدائرة FGH هي نسبة الخط GM إلى GR. ولذلك، إذا فُرض أن الخط BO يساوي ضعفي الخط OG، فلا يلزم أن تكون القوة عند النقطة B إلى الوزن عند النقطة G إلا كنصف الخط GR إلى الخط GM كله؛ وإذا تساوى BO وOG، وجب أن تكون هذه القوة إلى الوزن كالخط GR كله إلى الخط GM كله، وهكذا.

وبالمثل، عندما تكون القوة عند النقطة D، ولمعرفة مقدار ثقل الوزن الموجود عند النقطة I، ينبغي رسم المماس IP والخط المستقيم IN نحو مركز الأرض؛ ثم من النقطة P المأخوذة كيفما اتفق على المماس، يُرسم PN عمودياً على IN للحصول على النسبة بين الخط IP ونصف الخط IN، إذا فُرض DO ضعف OI، المقابلة للنسبة بين ثقل الوزن والقوة التي يجب أن تكون عند النقطة D لتحريكه. وهكذا للباقي.

ويبدو لي الآن أن هذه الأمثلة الثلاثة تكفي لتأكيد صحة المبدأ الذي اقترحته، ولإظهار أن كل ما يُعالج عادة في الاستاتيكا يعتمد عليه. فالوتد واللولب ليسا إلا مستويين مائلين، والعجلات التي تُركب منها الآلات ليست إلا روافع ...

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 235–237

الخطوة الحاسمة في هذا التحليل هي استبدال *المماس* عند النقطة المعنية بالمسار المنحني. وهذا إنشاء هندسي تفاضلي: فالمماس يلتقط الاتجاه اللحظي للحركة المسموح بها، وتعطي النسبة $GR : GM$ الفائدة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الميكانيكية عند ذلك التشكيل الدقيق. وبلغة حديثة، نقول إن ديكارت يحسب مركبة قوة الجاذبية على اتجاه القيد، أو، على نحو مكافئ، يقيم العمل الافتراضي لإزاحة متناهية في الصغر على المماس.

المكان، لا السرعة. كان ديكارت واعياً تماماً لاختلاف نهجه عن نهج أسلافه ومعاصريه، الذين صاغ كثير منهم المبادئ الميكانيكية بدلالة السرعات. وفي رسالة إلى ميرسين مؤرخة في 15 نوفمبر 1638، قارن نهجه بنهج غاليليو:

> Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance et le levier, il explique fort bien *quod ita sit*, mais non pas *cur ita sit*, comme je fais par mon Principe. Et pour ceux qui disent que je devois considérer la vitesse, comme Galilée, plutôt que l'espace, pour rendre raison des Machines, je croy, entre nous, que ce sont des gens qui n'en parlent que par fantaisie, sans entendre rien en ...cette matière

---

> فيما يتعلق بما كتبه غاليليو عن الميزان والرافعة، فقد شرح جيداً جداً ما يحدث، لكنه لم يشرح *لماذا* يحدث، كما أفعل بمبدئي. أما الذين يقولون إن عليّ أن أنظر في السرعة، كما يفعل غاليليو، بدلاً من المكان، لتعليل الآلات، فأعتقد، بيني وبينك، أنهم أناس لا يتحدثون إلا من خيال، من دون أن يفهموا شيئاً من الأمر...

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 15 November 1638, AT II, 433–434

يكشف هذا المقطع اقتناع ديكارت بأن مبدأه لا يقدم قاعدة صحيحة فحسب، بل *تفسيراً* حقيقياً. فقد أمكن لغاليليو وغيره اشتقاق قانون الرافعة، لكن استدعاءهم السرعات حجب السبب الحقيقي للفائدة الميكانيكية. وفي رسالة مرافقة مؤرخة في 12 سبتمبر 1638، شرح ديكارت لماذا استبعد السرعة عمداً من صياغته:

> ليس اختلاف السرعة هو الذي يجعل أحد هذين الوزنين ضعف الآخر، بل اختلاف المكان... وإذا كنت قد أظهرت مهارة في أي جزء من هذه الرسالة الصغيرة في الاستاتيكا، فأريد أن يُعلم أنها في هذا الأمر وحده أكثر منها في سائر الرسالة. إذ يستحيل قول شيء حسن أو متين عن السرعة من دون شرح ماهية الثقل حقاً، ومعه منظومة العالم كلها. ولأنني لم أرغب في خوض ذلك، وجدت طريقة لإغفال هذا الاعتبار وفصل الاعتبارات الأخرى عنه، بحيث أشرحها من دونه.

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 12 September 1638, AT II, 353–355

هذه عبارة منهجية لافتة. فقد أدرك ديكارت أن المعالجة الكاملة للسرعات تتطلب نظرية في الديناميكا، أي تفسيراً لكيفية إنتاج القوى للتسارعات، وهو ما يتطلب بدوره فهم طبيعة الجاذبية نفسها. وبصياغة الاستاتيكا بدلالة الإزاحات المكانية وحدها، حقق نظرية مكتفية بذاتها لا تعتمد على مسائل لم تُحل في الفيزياء. وأصبح مبدأ العمل الافتراضي، على يدي ديكارت، عبارة هندسية بحتة عن الاتزان، مستقلة عن أي فرضيات ديناميكية.

إرث ديكارت

يمكن تلخيص إسهامات ديكارت في مبدأ العمل الافتراضي في أربع نقاط:

1. **المبدأ الأساسي**: تُقاس "القوة"، أي الفعل، اللازمة لرفع وزن بحاصل ضرب الوزن في الارتفاع، ويُحفظ هذا الحاصل في جميع الآلات البسيطة. ويعمم ذلك بصائر ستيفن إلى مسلمة كونية للاستاتيكا.
2. **وجهة النظر المتناهية في الصغر**: المهم ليس الإزاحة المحدودة، بل "بداية الحركة"، أي الإزاحة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المتناهية في الصغر المتوافقة مع القيود. ويحول ذلك المبدأ من عبارة عن حركات فعلية إلى عبارة عن إزاحات *افتراضية*.

3. **إنشاء المماس**: في القيود المنحنية، تُقاس الإزاحة ذات الصلة على مماس منحنى القيد. ويتيح هذا الإنشاء الهندسي تطبيق المبدأ على منظومات ميكانيكية اعتباطية.
4. **المكان قبل السرعة**: المتغيرات الصحيحة للاستاتيكا هي الإزاحات المكانية، لا السرعات. وكان فصل الاستاتيكا عن الديناميكا اختياراً منهجياً مقصوداً منح المبدأ عموميته المميزة.

سرعان ما عمم جون واليس (1616–1703) صياغة ديكارت، فوسع في كتابه *Mechanica* (1670–1671) المبدأ إلى قوى اعتباطية: "تُستخرج الحركات إلى الأمام أو الخلف لأي قوى محركة من حواصل ضرب القوى في حركاتها إلى الأمام أو الخلف المقدرة على اتجاهات هذه القوى" (Wallis, 1670). لكن يوهان برنولي هو الذي سيعطي المبدأ في القرن التالي صياغته النهائية واسمه: مبدأ *السرعات الافتراضية*.

14.5.8 توريتشيلي (1608–1647)

V

كان إيفانجليستا توريتشيلي (1608–1647)[20] آخر تلاميذ غاليليو، وخلفه بعد وفاة غاليليو في يناير 1642 عالماً للرياضيات لدى الدوق الأكبر فرديناندو الثاني دي ميديشي في فلورنسا. ونشر سنة 1644 كتابه *Opera geometrica* (Torricelli, 1644)، وهو العمل الوحيد الذي ظهر في حياته. ويحتوي الجزء الثاني من الرسالة، *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*، مبدأ للاتزان سيشكل صلة حاسمة بين الاستاتيكا الأرخميدسية ومبدأ العمل الافتراضي عند برنولي ولاغرانج.

ذكر توريتشيلي مسلمته الأساسية في قسم تمهيدي قصير بعنوان *Praemittamus*، الشكل 14.15:

> *Praemittamus.*
> Duo grauia simul coniuncta ex se moueri non posse, nisi centrum commune grauitatis ipsorum descendat.
>
> Quando enim duo grauia ita inter se coniuncta fuerint, vt ad motum vnius motus etiam alterius consequatur, erunt duo illa grauia tamquam graue vnum ex duobus compositum, siue id libra sit, siue troclea, siue qualibet alia Mechanica ratione. graue autem huiusmodi non mouebitur vnquam, nisi centrum grauitatis ipsius descendat. Quando vero ita constitutum fuerit vt nullo modo commune ipsius centrum grauitatis descendere possit, graue penitus in sua positione quiescet: alias enim frustra moueretur; horizontali, scilicet latione, quae nequaquam deorsum tendit.

سنؤكد ذلك بالبرهان؛ ونتقدم الآن مباشرة لعرض ما هو عند غاليليو مبدأ أو مسلمة. *نقدم هذه المسلمة*.
لا يمكن لجسمين ثقيلين موصولين معاً أن يتحركا من تلقاء نفسيهما ما لم يهبط مركز ثقلهما المشترك.

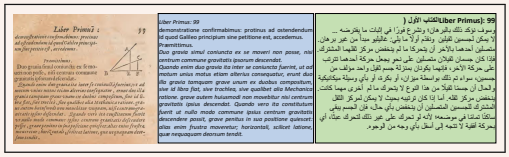
فحين يوصل جسمان ثقيلان أحدهما بالآخر بحيث تتبع حركة أحدهما حركة الآخر أيضاً، يكون الجسمان الثقيلان كجسم ثقيل واحد مركب منهما، سواء أكان ميزاناً أم بكرة أم أي ترتيب ميكانيكي آخر. ولن يتحرك وزن

[20] لعل توريتشيلي أشهر باختراعه البارومتر (1643) وبـ"قانون توريتشيلي" الذي يحكم تدفق المائع من فتحة. لكن إسهاماته في الميكانيكا، وإن كانت أقل شهرة، ذات أهمية أساسية في تاريخ العمل الافتراضي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> من هذا النوع قط ما لم يهبط مركز ثقله. أما إذا رُتب بحيث يستحيل على مركز ثقله المشترك أن يهبط بأي حال، ظل الوزن ساكناً تماماً في موضعه؛ وإلا لتحرك عبثاً، أي بحركة أفقية لا تنزع إلى أسفل بأي وجه.
>
> Torricelli, 1644 Opera geometrica

يعطي النقيض معيار الاتزان: *تكون منظومة من الأجسام الثقيلة الموصولة في اتزان إذا وفقط إذا لم يستطع مركز ثقلها المشترك أن يهبط في أي حركة ممكنة.*



شكل 14.15: مسلمة توريتشيلي

تمثل هذه العبارة البسيطة ظاهرياً تعميماً عميقاً. فقد كان المبدأ القديم، القائل إن جسماً *واحداً* يكون في اتزان إذا سُند عند مركز ثقله، معروفاً من أرخميدس. وما أدركه توريتشيلي هو أن مركز ثقل منظومة مجمعة من أجسام صلبة موصولة، محسوباً وفق قواعد أرخميدس، له الدلالة الفيزيائية نفسها. فإذا لم تستطع أي حركة افتراضية خفض هذه النقطة، كانت المنظومة في اتزان.

العلاقة بالعمل الافتراضي

مع أن مبدأ توريتشيلي لا يذكر صراحة الإزاحات الافتراضية أو العمل الافتراضي، فإنه مكافئ لمبدأ العمل الافتراضي في المنظومات الخاضعة للجاذبية وحدها. لننظر في منظومة من n أجسام ثقيلة أوزانها W_i وارتفاعاتها z_i فوق مستوى مرجعي. يكون ارتفاع مركز الثقل

$$\bar{z} = \frac{\sum_i W_i z_i}{\sum_i W_i}$$

وفي أي إزاحة افتراضية $\delta\mathbf{r}_i$، يكون التغير الافتراضي في ارتفاع مركز الثقل

$$\delta\bar{z} = \frac{\sum_i W_i \, \delta z_i}{\sum_i W_i}$$

إن شرط توريتشيلي القائل إن مركز الثقل لا يمكن أن يهبط، أي $\delta\bar{z} \geq 0$ لجميع الحركات المقبولة مع تحقق المساواة عند الاتزان للإزاحات العكوسة، يكافئ اشتراط انعدام العمل الافتراضي للجاذبية:

$$\delta W = -\sum_i W_i \, \delta z_i = 0 \tag{14.1}$$

لجميع الإزاحات الافتراضية المقبولة. ومن ثم فإن مبدأ مركز الثقل حالة خاصة من مبدأ العمل الافتراضي، مقصورة على قوى الجاذبية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من توريتشيلي إلى برنولي

استعمل توريتشيلي مبدأه لتقديم براهين أنيقة لنتائج في الميكانيكا، منها قانون المستوى المائل واتزان منظومات على مستويات مختلفة الميل، وهي نتائج عالجها غاليليو بطرائق أخرى. وكان لنهجه مزايا واضحة: فلم يتطلب تفكيكاً للقوى، ولا النظر في "نزوعات إلى الحركة"، ولا اللجوء إلى استدلال ديناميكي. بل وفر معيار مركز الثقل اختباراً هندسياً واستاتيكياً محضاً للاتزان.

تبنى علماء الميكانيكا اللاحقون، ولا سيما واليس وهويغنس، المبدأ، فأصبح واحداً من صيغ متنافسة عدة لشرط الاتزان في القرن السابع عشر. وعندما صاغ يوهان برنولي مبدأ السرعات الافتراضية سنة 1715، ركّب بصيرة توريتشيلي مع التقليد الأقدم المنحدر من *الميكانيكا* المنسوبة خطأً إلى أرسطو: فقد انطبق مبدأ برنولي على *أي* قوى، لا الجاذبية وحدها، وعبر عن شرط الاتزان بانعدام العمل الافتراضي، لا بثبات مركز الثقل.

أنصف لاغرانج توريتشيلي على هذه الخطوة الوسيطة المهمة في المسح التاريخي الذي افتتح به *Mé-canique analytique*:

> Torricelli fut le premier qui réduisit le principe des vitesses virtuelles à cette condition, que le centre de gravité des poids ne descende pas.
>
> كان توريتشيلي أول من رد مبدأ السرعات الافتراضية إلى هذا الشرط: ألا يهبط مركز ثقل الأوزان.

يحتل إسهام توريتشيلي موضعاً محورياً في قوس التطور من *الميكانيكا* إلى لاغرانج. فقد بين إمكان وصف الاتزان بخاصية حدية، هي وجود مركز الثقل في أدنى وضع ممكن، بدلاً من توازن القوى أو العزوم. وسيصبح هذا المنظور التغايري، بعد تعميمه من الجاذبية إلى منظومات قوى اعتباطية، سمة مميزة للميكانيكا التحليلية.

14.5.9 واليس (1616–1703)

V

وسع جون واليس في كتابه (Wallis, 1670) *Mechanica* (1670–1671) مبدأ العمل الافتراضي إلى اتجاهات قوى اعتباطية. وذكر أن "الحركات إلى الأمام أو الخلف لأي قوى محركة تُستخرج من حواصل ضرب القوى في حركاتها إلى الأمام أو الخلف المقدرة على اتجاهات هذه القوى." وكان هذا التعميم إلى ما وراء الجاذبية خطوة مهمة نحو المبدأ العام تماماً الذي سيصوغه برنولي.

14.5.10 لايبنتس (1646–1716)

F

أسهم لايبنتس في مفهوم القوة والأداة الرياضية التي ستصفها في نهاية المطاف.

القوة والمونادولوجيا

يمكن فهم القوة عند لايبنتس، الشكل 14.6f، في *المونادولوجيا* بوصفها تعبيراً عن الفاعلية أو النزوع الكامن في *المونادات*. ففي حين تنطوي القوة بالمعنى الميكانيكي التقليدي على فعل خارجي في الأجسام، تصور

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لايبنتس القوة مبدأ داخلياً كامناً في جميع الجواهر. وتؤدي التفاعلات بين *المونادات*[21]، التي تقودها ميولها، إلى تجلي القوة في صورة تغيرات في إدراكاتها أو حالاتها. لاحظ التماثل مع نظرية *الدفع* التي كانت قد دُحضت آنذاك.

نحو حساب للوضع

حتى ذلك الوقت، ظلت القوى تُعامل أساساً بوصفها كميات قياسية: إذ كانت المقادير تُتبع، بينما يوفر شكل الترتيب الهندسي الاتجاهات.

لم يرض لايبنتس عن هذا الفصل بين الحساب والشكل. وأصبح سلفاً مفاهيمياً لحساب رمزي لـ"الوضع"، أي ترميز يراد منه تمثيل الموضع والاتجاه، وحتى الحركة، مباشرة مثلما يمثل المقدار. وكتب إلى هويغنس سنة 1679 (Leibniz **and** Loemker, 1956):

> اكتشفت عناصر معينة لترميز جديد يختلف تماماً عن الجبر، وله مزايا كبيرة في تمثيل كل ما يعتمد على الإدراك الحسي للعقل، تمثيلاً دقيقاً وأميناً لطبيعته، حتى من دون أشكال. فالجبر هو ترميز للأعداد أو المقادير غير المعينة وحدها، لكنه لا يعبر مباشرة عن الوضع والزوايا والحركة. ولذلك يصعب في كثير من الأحيان تحليل خواص شكل بالحساب، ويصعب أكثر إيجاد براهين وإنشاءات هندسية ملائمة جداً، حتى بعد إتمام الحساب الجبري. لكن هذا الترميز الجديد، الذي يتبع الأشكال المرئية، لا بد أن يعطي الحل والإنشاء والبرهان الهندسي جميعاً في وقت واحد، وبطريقة طبيعية وفي تحليل واحد، أي بإجراء محدد.
>
> Leibniz **and** Loemker, 1956 Philosophical Papers and Letters

النقطة الرئيسة هي إصراره على أن الميكانيكا الناجحة تحتاج إلى لغة تحمل "أين" و"في أي اتجاه" إلى جانب "كم"، وهو برنامج يستبق المعالجات المنهجية اللاحقة للكميات الموجهة.

جدل القوة الحية

انقسمت الميكانيكا القارية منذ أواخر القرن السابع عشر وخلال جزء كبير من القرن الثامن عشر بشأن سؤال بسيط ظاهرياً: أي كمية تمثل أفضل تمثيل "المقياس الحقيقي" للقدرة المحركة؟(Descartes, 1644; Leibniz, 1686a) أكد الديكارتيون، وكثير من النيوتنيين بلغة مختلفة، "كمية الحركة" المتناسبة مع mv،(Descartes, 1644; Newton, 1687) لأنها تتتبع ما يتبادل في التصادمات، ولأنها تظهر طبيعياً في حجج اتزان الحركة. أما لايبنتس فجادل بأن "القوة الحية" *vis viva* تتناسب مع mv^2،(Leibniz, 1686a) مؤكداً أن هذا ما تحفظه الطبيعة في عمليات ميكانيكية كثيرة، وما يقيس قدرة الجسم على إحداث آثار.

زاد الجدل حدةً بتجارب التصادم و"أثر" الوزن المتحرك (Gravesande, 1722). فإذا سألنا عما يستطيع جسم متحرك إنجازه ضد الجاذبية، كانت المقارنة ذات الصلة هي مقدار الارتفاع الذي يستطيع رفع وزن إليه. وفي الحالات البسيطة، يتناسب الارتفاع مع v^2 لا مع v، وهو ما أيد مقياس لايبنتس. لكن في التفاعلات الاندفاعية، مثل التصادمات والتغيرات المفاجئة، تكون الكمية المتوازنة بين الأجسام شبيهة بكمية الحركة، وأقرب إلى mv. واستمر جانب كبير من الجدل لأن الطرفين حاولا رفع كميته المفضلة إلى تعريف وحيد للقوة، مع أن السؤالين الكامنين مختلفان: أحدهما يتعلق بالاندفاع والتبادل في الزمن، والآخر بالعمل والقدرة على إحداث تغيرات في التشكيل (d'Alembert, 1743).

[21] الموناد في منظومة لايبنتس الفلسفية مفهوم ميتافيزيقي أساسي يمثل جوهراً غير قابل للانقسام وغير مادي ومكتفياً بذاته.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يرى القارئ الحديث الحل النهائي: ليست mv وmv^2 متنافستين، بل ثابتين متميزين، في شروط مختلفة، مرتبطين بمبدأين متميزين. فكمية الحركة هي العملة الطبيعية للاندفاع ومعادلات الحركة؛ أما $\frac{1}{2}mv^2$ فهي العملة الطبيعية للعمل والطاقة.

14.5.11 نيوتن (1642–1726)

F

وأخيراً يأتي إسحاق نيوتن، الشكل 14.6g. عبقري (§6.6.7)، وخيميائي (6.6.7)! نعم، الرجل نفسه الذي كتب أحد أكثر الكتب تأثيراً على الإطلاق، *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*، تعمق أيضاً في الخيمياء[22]. ومع أننا قد ننظر إلى ذلك بشيء من التعالي، فمن المهم إدراك أن هذه المساعي لم تكن نادرة، وإن كانت سرية غالباً، في عصره.

كانت أعمال أسلاف مثل غاليليو وكبلر قد مهدت الأرض لنيوتن. وكان نيوتن أول من صاغ تعريف القوة بوضوح ودقة غير مسبوقين، فحل غموضاً ظل قائماً حتى ذلك الحين. فمثلاً، لا شك أن نيوتن تأثر بقانون كبلر الذي يبدو *أنه* يعني أن القوة التي تؤثر بها الشمس في الكواكب تتناقص مع المسافة.

وحد نيوتن باكتشافه الجاذبية (Newton, 1687 PDF) المبادئ السماوية التي أرسى كبلر مع الرصود الأرضية عند غاليليو وديكارت، مكوناً نظرية شاملة. وظهرت هذه الوحدة في إدراكه أن القوة التي تسبب سقوط تفاحة هي القوة نفسها المسؤولة عن مدار القمر.

ميز نيوتن بوضوح بين الوزن والكتلة، أو ما سماه "كمية المادة"، وهي فكرة تصورها من قبل بوريدان وكبلر وغاليليو، لكنها لم تُعرف بوعي وصراحة مفهوماً أساسياً في الميكانيكا قبل نيوتن. وظهر مصطلح "القوة" أول مرة في التعريف الثالث من *المبادئ* لنيوتن:

> إن *vis insita*[23]، أو القوة الفطرية للمادة، هي قدرة مقاومة يستمر بها كل جسم، بقدر ما فيه، في حالته الراهنة، سواء كانت سكوناً أم حركة منتظمة إلى الأمام في خط مستقيم.
>
> Newton, 1687 PDF Mathematical principles of natural philosophy

تُصور طبيعة المادة العاطلة هنا قوةً لعدم الفعل. والعطالة في رأي نيوتن هي:

> ... نوع من القوة الكامنة (*insita*) في المادة والمستترة ما دامت لا توجد قوة أخرى مطبوعة في الجسم "تسعى إلى تغيير حالته"... وهي مقاومة بقدر ما يعارض الجسم، حفاظاً على حالته الراهنة، القوة المطبوعة؛ وهي اندفاع بقدر ما يسعى الجسم، بعدم استجابته بسهولة للقوة المطبوعة من جسم آخر، إلى تغيير حالة ذلك الجسم الآخر.
>
> Newton, 1687 PDF Mathematical principles of natural philosophy

من الواضح أن القوة في هذا التعريف لم تُصور بعد سبباً للحركة أو التسارع. لكنه عرف لاحقاً في التعريف الرابع *القوة المطبوعة*:

[22] لم تكن الخيمياء عند نيوتن مجرد محاولة صنع "حجر الفلاسفة" الأسطوري لتحويل المعادن الخسيسة إلى ذهب، بل كانت أيضاً طريقاً لاكتساب معرفة تجريبية أعمق بالعالم المادي والسيطرة على الطبيعة.

[23] ينبغي عدم الخلط بينها وبين *vis viva* ("القوة الحية") عند لايبنتس، المتناسبة مع mv^2، أي الطاقة الحركية لاحقاً حتى عامل ثابت. أما *vis insita* عند نيوتن فهي العطالة: قدرة كامنة على مقاومة تغيرات الحالة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القوة المطبوعة فعل يؤثر في جسم لتغيير حالته، سواء كانت سكوناً أم حركة منتظمة في خط مستقيم.

Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy

حدث انتقال نيوتن من فعل القوى الاندفاعية إلى فعل القوى المستمرة في القضية الأولى من *المبادئ*. ومع أن نيوتن ربما اكتشف الجاذبية، فلم تكن لديه فكرة عن كيفية عملها، وافترض أنها تعمل لحظياً. وكان على ذلك أن ينتظر أينشتاين، الذي رأى المكان والزمن متشابكين في نسيج منحن، وأن المادة تشوه هذا المكان، وأن تشوه الزمكان أو انحناءه هو ما يخلق ما نشعر به جاذبية. وهذا جوهر *نظرية النسبية العامة*[24]

عالج نيوتن أيضاً قانون متوازي أضلاع القوى باعتبارات ديناميكية محضة (Dugas, 1988):

النتيجة الأولى (للقانون الثاني)... يصف جسم، بفعل قوتين مجتمعتين، قطر متوازي أضلاع في الزمن نفسه الذي يصف فيه الضلعين بفعل القوتين منفصلتين. إذا كان جسم سيُحمل، في زمن معين، بحركة منتظمة من A إلى B بفعل القوة M المطبوعة منفردة في الموضع A؛ وسيُحمل من A إلى C بفعل القوة N المطبوعة منفردة في الموضع نفسه؛ فأكمل متوازي الأضلاع $ABCD$، وبفعل القوتين معاً سيُحمل في الزمن نفسه على القطر من A إلى D. ولأن القوة N تعمل في اتجاه الخط AC الموازي لـBD، فلن تغير هذه القوة إطلاقاً، بموجب القانون الثاني، السرعة التي تولدها القوة الأخرى M، والتي يُحمل بها الجسم نحو الخط BD. ولذلك يصل الجسم إلى الخط BD في الزمن نفسه، سواء طُبعت القوة N أم لم تُطبع؛ ومن ثم يوجد عند نهاية الزمن في موضع ما على الخط BD. وبالحجة نفسها، يوجد عند نهاية الزمن نفسه في موضع ما على الخط CD. ولذلك يوجد عند النقطة D حيث يلتقي الخطان. لكنه يتحرك في خط مستقيم من A إلى D بموجب القانون الأول.

Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy, Book I, Cor. I to Law II

يتحدث نيوتن هنا صراحة عن حركة منتظمة ناتجة من قوة معينة، مع أن تغير الحركة، أي التسارع مضروباً في الكتلة، هو الذي يتناسب مع القوة المطبوعة وفق القانون الثاني للحركة. ولا يمكن التوفيق بين هاتين الفكرتين المتناقضتين ظاهرياً في ذهن نيوتن إلا بشرط واحد: أن نيوتن تصور الفعل التسارعي للقوة سلسلة من الأفعال المتعاقبة التي تنقل إلى الجسم المتحرك زيادات متعاقبة في السرعة (Jammer, 1957).

14.5.12 دانيال برنولي (1700–1782)

F عمل دانيال برنولي أيضاً على المبادئ المتعلقة بمتوازي أضلاع القوى، وإن حجبتها أعماله الأخرى.

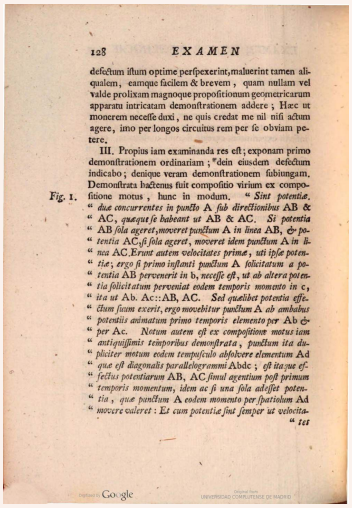
كثيراً ما قال المدافعون الأوائل عن تفسير استاتيكي إن متوازي أضلاع القوى لا يعتمد على قانون نيوتن الثاني. وجادلوا بأن القوى ستظل تتركب وفق نمط متوازي الأضلاع حتى لو اختلفت العلاقة بين القوة والحركة عما يصفه قانون نيوتن الثاني.

وفي هذا السياق، قدم Bernoulli, Daniel, 1726 محاولة رائدة لإعطاء تفسير استاتيكي لمتوازي أضلاع القوى. وللتمهيد، اقترح أن بدائل واسعة لقانون نيوتن الثاني كان يمكن أن تصح، لكنها لم تصح. ومن هذه البدائل "المخالفة للواقع" أن تتناسب القوة المحصلة مع الجذر التربيعي للتسارع المحصل، أو جذره التكعيبي، أو مربعه. لكنه أكد أن متوازي أضلاع القوى سيظل صحيحاً حتى لو صدق أحد هذه الاحتمالات المخالفة للواقع.

لتكن عند النقطة A قوتان متلاقيتان في الاتجاهين AB وAC، تتناسبان مع AB وAC. فإذا عملت القوة AB وحدها، حركت النقطة A على الخط AB، وإذا عملت القوة AC وحدها، حركت النقطة A نفسها على الخط

[24] النسبية الخاصة هي التي أعطت $e = mc^2$، وتفترض إطاراً مرجعياً عطالياً، أي بلا تسارع.

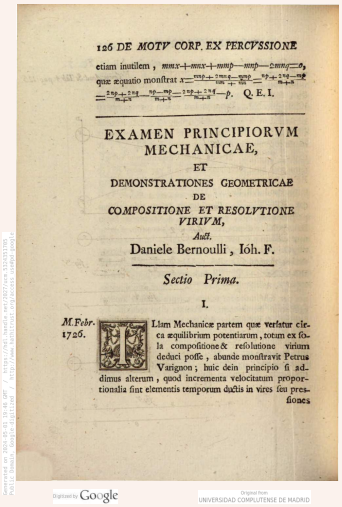
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


128 EXAMEN

defectum ifum optime perfpexerint, manserint tamen aliqualem, eamque facilem & brevem, quam nullam vel valde prolixam magnoque propofitionum geometricarum apparatu intricatam demonftrationem addere; Hæc ut monerem neceffe duxi, ne quis credat me nil nifi actum agere, imo per longos circuitus rem per fe obviam petere.

III. Propius iam examinanda res eft; exponam primo demonftrationem ordinariam; deinde eiusdem defectum indicabo; denique veram demonftrationem fubiungam. Demonftrata hactenus fuit compofitio virium ex compofitione motus, hunc in modum. " *Sint potentiæ,* " *duæ concurrentes in punctis* A *fub directionibus* AB & " AC, *quæque fe habeant ut* AB & AC. *Si potentia* " AB *fola ageret, moveret punctum* A *in linea* AB, *& po-* " *tentia* AC *fi fola ageret, moveret idem punctum* A *in li-* " *nea* AC. *Erunt autem velocitates primæ, uti ipfæ potentiæ; ergo fi primo inftanti punctum* A *follicitatum a po-* " *tentia* AB *pervenerit in* b, *neceffe eft, ut ab altera potentia follicitatum perveniat eodem temporis momento in* c, " *ita ut* Ab. Ac::AB, AC. *Sed quælibet potentia effi-* " *cium fuum exerit, ergo movebitur punctum* A *ab ambabus* " *potentiis animatim primo temporis elemento per* Ab *&* " *per* Ac. *Notum autem eft ex compofitione motus iam* " *antiquiffimis temporibus demonftrata, punctum ita du-* " *pliciter motum eodem tempufculo abfolvere elementum* Ad " *quæ eft diagonalis parallelogrammi* Abdc; *eft ita, ut ef-* " *fectus potentiarum* AB, AC, *finul agentium poft primum* " *temporis momentum, idem ac fi una fola adeffet poten-* " *tia, quæ punctum* A *eodem momento per fpatium* Ad " *movere valeret: Et cum potentiæ fint femper ut velocita-* " *tes*

Fig. 1.


126 DE MOTV CORP. EX PERCVSSIONE

etiam inutilem, $mmxx+mnxx+nnnp-mnnp-2mnnq+\&c.$ quæ æquatio monftrat $x=\frac{np+nq}{m+n}+\frac{mnq-mnp}{mm+2mn+nn}+\frac{np^2+2npq-mpq}{m^3+3mmn+3mnn+n^3}+\frac{2npq+2nqq-mqq}{m^3+3mmn+3mnn+n^3}+\&c.$ $-p$. Q. E. I.

EXAMEN PRINCIPIORVM MECHANICAE, ET DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE DE COMPOSITIONE ET RESOLVTIONE VIRIVM,

Auct.

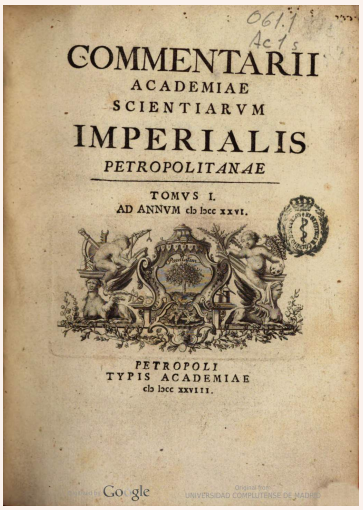
Daniele Bernoulli, Ioh. F.

Sectio Prima.

I.

M. Febr. 1726.

Lam Mechanicæ partem quæ verfatur circa æquilibrium potentiarum, totam ex folo compofitionis & refolutionis virium deduci poffe, abunde monftravit Petrus Varignon; huic dein principio fi addimus alterum, quod incrementa velocitatum proportionalia fint elementis temporum ductis in vires feu preffiones



شكل 14.16: برنولي ومتوازي أضلاع القوى (Bernoulli, Daniel, 1726)

AC. غير أن السرعات الابتدائية تكون كنسب القوى نفسها؛ ولذلك، إذا بلغت النقطة A في اللحظة الأولى، مدفوعة بالقوة AB، النقطة o، لزم أن تبلغ، مدفوعة بالقوة الأخرى، النقطة c في اللحظة نفسها، بحيث Ab. Ac::AB, AC. لكن كل قوة تمارس أثرها الخاص؛ ومن ثم تتحرك النقطة A، المحركة بالقوتين، في اللحظة الأولى من الزمن عبر Ab وAc. ومن المعروف من تركيب الحركة، المثبت منذ أقدم العصور، أن النقطة المتحركة هكذا بحركتين في اللحظة الصغيرة نفسها تستكمل العنصر Ad، وهو قطر متوازي الأضلاع Abdc؛ ومن ثم يكون أثر القوتين AB وAC العاملتين معاً بعد اللحظة الأولى من الزمن هو نفسه كما لو وجدت قوة واحدة تستطيع تحريك النقطة A عبر المسافة Ad في اللحظة نفسها. ولأن القوى تتناسب دائماً مع السرعات...

Bernoulli, Daniel, 1726 *"1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142"*

14.5.13 رسالة يوهان برنولي سنة 1715

V

ظهر مبدأ السرعات الافتراضية، في صورته التحليلية الحديثة، أول مرة في رسالة من يوهان برنولي (1667–1748) إلى بيير فارينيون (1654–1722)، مؤرخة في 26 فبراير 1715.[25] وتمثل هذه الرسالة، المحفوظة في كتاب فارينيون *Nouvelle Mécanique ou Statique* المنشور بعد وفاته (Varignon, 1725)، لحظة فاصلة في تاريخ الميكانيكا، إذ قدمت أول عبارة صريحة وعامة لما سيصبح أساس الاستاتيكا التحليلية.

قدم فارينيون إسهام برنولي في بداية القسم التاسع من المجلد الثاني:

Dans une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717, M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante,

[25] يُذكر التاريخ عادة في الأدبيات على أنه "26 يناير 1717"، تبعاً لخطأ طباعي في كتاب فارينيون الذي نُشر بعد وفاته (1725 *Nouvelle Mécanique Complete*). أما التاريخ الصحيح، كما أثبته البحث الحديث، فهو 26 فبراير 1715؛ انظر *Dictionary of Scientific Biography*، مادة "Bernoulli, Johann".

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

m'annonça qu'*en tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies negatives, prises affirmativement*.

في رسالة كُتبت من بازل في 26 يناير 1717، أعلن لي السيد (يوهان) برنولي، بعد أن عرّف ما يعنيه بكلمة *الطاقة* على النحو المبين في التعريف الآتي، أنه في *كل اتزان لقوى أياً كانت، وبأي طريقة طُبقت بعضها على بعض، مباشرة أو بواسطة، يكون مجموع الطاقات الموجبة مساوياً لمجموع الطاقات السالبة مأخوذة بمقادير موجبة*.

"Varignon in Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*

(لاحظ أن التاريخ الوارد في نص فارينيون المنشور يحتوي الخطأ الطباعي المذكور أعلاه.)

يكشف رد فعل فارينيون الأهمية التي عزاها إلى هذا المبدأ:

Cette proposition me parut si generale & si belle, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précédente, je lui demandai la permission qu'il m'accorda, de l'ajouter ici avec la démonstration que cette Théorie m'en fournissoit, & qu'il ne m'envoyoit pas.

بدت لي هذه القضية عامة وجميلة إلى حد أنني، إذ رأيت أنني أستطيع استنباطها بسهولة من النظرية السابقة، طلبت منه الإذن، فمنحنيه، لإضافتها هنا مع البرهان الذي توفره لي هذه النظرية ولم يرسله إليّ.

"Varignon in Bernoulli, Johann, 1725 *"Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*

ثم يأتي التعريف الرئيس بكلمات برنولي نفسه، الشكل 14.17:

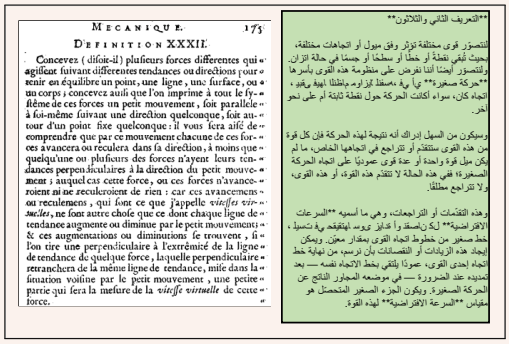
التعريف الثاني والثلاثون Concevez (disoit-il) plusieurs forces differentes qui agissent suivant differentes tendances ou directions pour tenir en equilibre un point, une ligne, une surface, ou un corps; concevez aussi que l'on imprime a tout le systeme de ces forces un petit mouvement, soit parallele a soi-meme suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque: il vous sera aise de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, a moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires a la direction du petit mouvement; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien: car ces avancements ou reculements, qui sont ce que j'appelle vitesses virtuelles, ne font autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; & ces augmentations ou diminutions se trouvent, si l'on tire une perpendiculaire a l'extremite de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la meme ligne de tendance, mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la vitesse virtuelle de cette force.

التعريف الثاني والثلاثون تصور، كما قال، عدة قوى مختلفة تعمل وفق نزوعات أو اتجاهات مختلفة لإبقاء نقطة أو خط أو سطح أو جسم في اتزان؛ وتصور أيضاً أننا نطبع في منظومة هذه القوى كلها حركة صغيرة، إما انتقالاً موازياً لنفسه في اتجاه ما، أو دوراناً حول نقطة ثابتة ما. ويسهل عندئذ فهم أن كل واحدة من هذه القوى تتقدم أو تتراجع بهذه الحركة على اتجاهها، إلا إذا كانت نزوعات قوة واحدة أو عدة قوى عمودية على اتجاه الحركة الصغيرة؛ ففي هذه الحالة لا تتقدم القوة أو القوى ولا تتراجع إطلاقاً. فهذه التقدمات أو التراجعات، وهي ما أسميه السرعات الافتراضية، ليست سوى المقدار الذي يزيد به كل خط نزوع أو ينقص تحت الحركة الصغيرة؛

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وتوجد هذه الزيادات أو النقصانات برسم عمود عند نهاية خط نزوع قوة ما، فيقتطع هذا العمود من خط النزوع نفسه، بعد وضعه في الموضع المجاور بالحركة الصغيرة، جزءاً صغيراً يكون مقياس السرعة الافتراضية لهذه القوة.

”Bernoulli, Johann, 1725 “*Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*


MECANIQUE. 175
DEFINITION XXXII.
Concevez (difoit-il) pluſieurs forces differentes qui agiſſent ſuivant differentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une ſurface, ou un corps ; concevez auſſi que l'on imprime à tout le ſyſtême de ces forces un petit mouvement, ſoit parallele à ſoi-même ſuivant une direction quelconque, ſoit autour d'un point fixe quelconque : il vous ſera aiſé de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans ſa direction, à moins que quelqu'une ou pluſieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires à la direction du petit mouvement ; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien : car ces avancemens ou reculemens, qui ſont ce que j'appelle *viteſſes virtuelles*, ne ſont autre choſe que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement ; & ces augmentations ou diminutions ſe trouvent, ſi l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la même ligne de tendance, miſe dans la ſituation voiſine par le petit mouvement, une petite partie qui ſera la meſure de la *viteſſe virtuelle* de cette force.

التعريف الثاني والثلاثون

لتصوّر قوى مختلفة تؤثر وفق ميول أو اتجاهات مختلفة، بحيث تُبقي نقطة أو خطًا أو سطحًا أو جسمًا في حالة اتزان. ولتصور أيضًا أننا نفرض على منظومة هذه القوى بأسرها **حركة صغيرة** أي بأية ،بسطة تراوم باطلنا ابهية يقيد ، اتجاه كان، سواء أكانت الحركة حول نقطة ثابتة أم على نحو آخر.

وسيكون من السهل إدراك أنه نتيجة لهذه الحركة فإن كل قوة من هذه القوى ستتقدم أو تتراجع في اتجاهها الخاص، ما لم يكن لبل قوة واحدة أو عدة قوى عموديًا على اتجاه الحركة الصغيرة؛ ففي هذه الحالة لا تتقدم هذه القوة، أو هذه القوى، ولا تتراجع مطلقًا.

وهذه التقدمات أو التراجعات، وهي ما أسميه **السرعات الافتراضية** لكن تصدق وا تتابز ويوسد ابتقدمه بهة تتسبب ، خط صغير من خطوط اتجاه القوى بمقدار معين. ويمكن إيجاد هذه الزيادات أو النقصانات بأن نرسم، من نهاية خط اتجاه إحدى القوى، عمودًا يلتقي بخط الاتجاه نفسه — بعد تمديده عند الضرورة — في موضعه المجاور الناتج عن الحركة الصغيرة. ويكون الجزء الصغير المتحصل هو مقياس **السرعة الافتراضية** لهذه القوة.

شكل 14.17: سرعات يوهان برنولي الهندسية، (Bernoulli, Johann, 1725)

تستحق عدة سمات في صياغة برنولي التأكيد:

- ينطبق المبدأ على *أي* منظومة، نقطة أو خطاً أو سطحاً أو جسماً، تحفظ في اتزان بـ*أي* ترتيب للقوى، سواء طُبقت مباشرة أم عبر آليات وسيطة.
- ”الحركة الصغيرة” المطبوعة في المنظومة اعتباطية تماماً: فقد تكون انتقالاً في أي اتجاه أو دوراناً حول أي نقطة ثابتة. وهذه الاعتباطية بالضبط هي ما يمنح المبدأ قوته.
- ”السرعات الافتراضية” كميات هندسية، هي إسقاطات الإزاحات الصغيرة على خطوط عمل القوى المعنية، وليست سرعات فعلية بالمعنى الحركي.

إن ”طاقة” برنولي هي ما نسميه اليوم *العمل الافتراضي*: حاصل ضرب قوة في سرعتها الافتراضية، أي مركبة الإزاحة الافتراضية على خط عمل القوة. ويمكن كتابة المبرهنة نفسها (المبرهنة XL، ص. 176) بالترميز الحديث:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{(للاتزان)}$$

تمثل هذه الصياغة ذروة تطور دام قرابة ألفي سنة، من البصائر الحدسية في *الميكانيكا* المنسوبة خطأ إلى أرسطو، مروراً بـ*gravitas secundum situm*، عند يوردانوس، و*clootcrans* عند ستيفن، و”قاعدة غاليليو الذهبية”، ومبدأ الحفظ عند ديكارت، وصولاً إلى عبارة برنولي التحليلية العامة تماماً. وسيجد المبدأ مكانه النهائي في الميكانيكا من خلال كتاب لاغرانج 1788 (*Mécanique Analytique*)، حيث يقوم أساساً لبناء الميكانيكا التحليلية كله.

14.5.14 فارينيون (1654–1722)

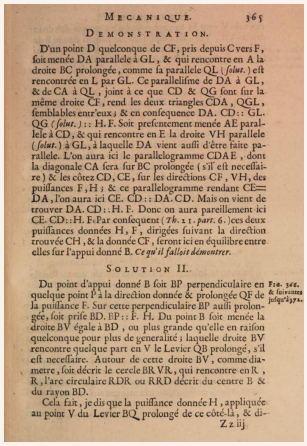
F

نشر فارينيون سنة 1687، وهي سنة نشر *المبادئ*، كتاب *Nouvelle Mécanique ou Statique*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(Varignon, 1725)، الذي طبق فيه مبدأ متوازي أضلاع القوى، المستنتج من وجهة نظر أرسطية إلى حد ما، على حل فئة من المسائل لم يعالجها نيوتن.

> **اللمة الثالثة:** إذا دُفعت النقطة عديمة الوزن A بانتظام وفي الوقت نفسه بقوتين [*puissances*] E وF على الخطين AC وAB [في الشكل 221]، اللذين يصنعان بينهما زاوية ما CAB، وكان فعل القوة E إلى فعل القوة F كنسبة AC إلى AB، فإن هذه النقطة A تتبع القطر AD لمتوازي الأضلاع BC الذي يكونه الخطان.
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII


MECANIQUE. 365

DEMONSTRATION.

D'un point D quelconque de CF, pris depuis C vers F, soit menée DA parallele à GL, & qui rencontre en A la droite BC prolongée, comme la parallele QL (*folut.*) eſt rencontrée en L par GL. Ce parallelisme de DA à GL, & de CA à QL, joint à ce que CD & QG ſont ſur la même droite CF, rend les deux triangles CDA, QGL, ſemblables entr'eux; & en conſequence DA. CD :: GL. QG (*folut.*) :: H. F. Soit preſentement menée AE parallele à CD, & qui rencontre en E la droite VH parallele (*folut.*) à GL, à laquelle DA vient auſſi d'être faite parallele. L'on aura ici le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſera ſur BC prolongée (s'il eſt neceſſaire) & les côtez CD, CE, ſur les directions CF, VH, des puiſſances F, H; & ce parallelogramme rendant CE= DA, l'on aura ici CE. CD :: DA. CD. Mais on vient de trouver DA. CD :: H. F. Donc on aura pareillement ici CE. CD :: H. F. Par conſequent (*Th.* 1. *part.* 6.) ces deux puiſſances données H, F, dirigées ſuivant la direction trouvée CH, & la donnée CF, ſeront ici en équilibre entre elles ſur l'appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

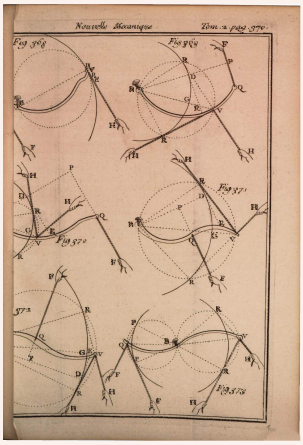
SOLUTION II.

Du point d'appui donné B ſoit BP perpendiculaire en quelque point P à la direction donnée & prolongée QE de la puiſſance F. Sur cette perpendiculaire BP auſſi prolongée, ſoit priſe BD. BP :: F. H. Du point B ſoit menée la droite BV égale à BD, ou plus grande qu'elle en raiſon quelconque pour plus de generalité; laquelle droite BV rencontre quelque part en V le Levier QB prolongé, s'il eſt neceſſaire. Autour de cette droite BV, comme diametre, ſoit décrit le cercle BR VK, qui rencontre en R, R, l'arc circulaire RDR ou RRD décrit du centre B & du rayon BD.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée au point V du Levier BQ prolongé de ce côté-là, & di-

Zz iij

Fig. 368. Fig. 369. Fig. 370. Fig. 371. Fig. 372.



شكل 14.18: مفاهيم الاتزان عند Varignon, 1725

وبما أننا نعالج هنا متوازي أضلاع القوى، ينبغي أن نذكر عرضاً مبرهنة فارينيون الشهيرة:

> يساوي مجموع عزوم عدة قوى متلاقية حول نقطة عزم محصلة هذه القوى؛ أو، على نحو مكافئ، يساوي عزم قوة حول نقطة مجموع عزوم مركباتها.
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII

14.5.15 دالمبير (1717–1783)

F/V وسع كتاب جان لو رون دالمبير (d'Alembert, 1743) *Traité de Dynamique* (1743) مبدأ السرعات الافتراضية من الاستاتيكا إلى الديناميكا، ووحد بذلك علم الميكانيكا.

كان موقف دالمبير الفلسفي مميزاً. فقد سعى إلى تطهير الميكانيكا من المفاهيم الغامضة:

> J'ai, pour ainsi dire, détourné les yeux des causes motrices, pour n'envisager uniquement que le mouvement qu'elles produisent; j'ai entièrement proscrit les forces inhérentes au corps en mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.

لقد صرفت بصري، إن جاز التعبير، عن الأسباب المحركة، لأنظر فقط في الحركة التي تنتجها؛ وحظرت تماماً القوى الكامنة في الأجسام المتحركة، وهي كيانات غامضة وميتافيزيقية لا تقدر إلا على إلقاء الظلام على علم واضح في ذاته.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

d’Alembert, 1743 Traite de dynamique

وضعه ذلك في قلب جدل *vis viva* الذي قسم علماء الميكانيكا القاريين منذ لايبنتس.

> Cette question ... consiste à savoir, si la force des Corps en Mouvement est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse ... Malgré les disputes que cette question a causées, l’inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m’a engagé à n’en faire aucune mention dans l’Ouvrage que je donne aujourd’hui.

> يسأل هذا السؤال هل تتناسب قوة الأجسام المتحركة مع الكتلة مضروبة في السرعة، أم مع الكتلة مضروبة في مربع السرعة... وعلى الرغم من الخلافات التي أثارها، فإن عدم فائدته التامة للميكانيكا دفعني إلى عدم ذكره في العمل الذي أنشره اليوم.

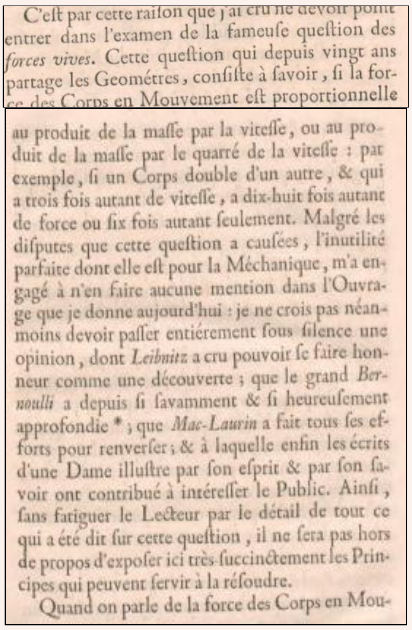
d’Alembert, 1743 Traite de dynamique

وبإعادة صياغة الديناميكا مسألة اتزان، تجنب دالمبير النزاع على “المقياس الحقيقي” للقوة.

كانت بصيرته الأساسية بسيطة ظاهرياً. إذ يمكن إعادة كتابة قانون نيوتن الثاني، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، في الصورة:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

وهذه عبارة عن اتزان بين القوة المطبقة $\mathbf{F}$ وما سماه دالمبير “قوة العطالة”، $-m\mathbf{a}$. ويمكن معاملة الجسم المتسارع كما لو كان في اتزان استاتيكي تحت التأثير المشترك للقوى المطبوعة وقوى العطالة، الشكل 14.19.



C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis vingt ans partage les Geométres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe : par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illuſtre par ſon eſprit & par ſon ſavoir ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très-ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

أما فيما يتعلّق بالبراهين على هذه المبادئ ذاتها، فإن النهج الذي اتبعته، لكي أضفي عليها كل ما بدا لي أنها قابلة له من الوضوح والبساطة، كان دائمًا أن أستنبطها من مجرد النظر في الحركة، منظورًا إليها بأبسط صورة وأوضحها. وكل ما ندركه بوضوح في حركة جسم ما هو أنه يقطع مسافةً معيّنة، وأنه يستغرق زمنًا معيّنًا لقطعها.

ومن ثم، فمن هذه الفكرة وحدها ينبغي استنباط جميع مبادئ الميكانيكا، متى أُريد البرهنة عليها بطريقة واضحة ودقيقة؛ وهكذا لن يكون من المستغرب أنني، نتيجةً لهذا التأمل، قد صرفتُ نظري، إذا جاز التعبير، عن الأسباب المحرِّكة، لكي أنظر فقط في الحركة التي تُحدثها؛ وأنني استبعدتُ تمامًا القوى الكامنة في الجسم المتحرّك، تلك الكائنات الغامضة والميتافيزيقية، التي لا شأن لها إلا أن تنشر الظلام على علمٍ واضحٍ في ذاته.

شكل 14.19: دالمبير وجدال القوة الحية: خلاف عده عديم الفائدة، لكنه تناوله بإيجاز (d’Alembert, 1743)

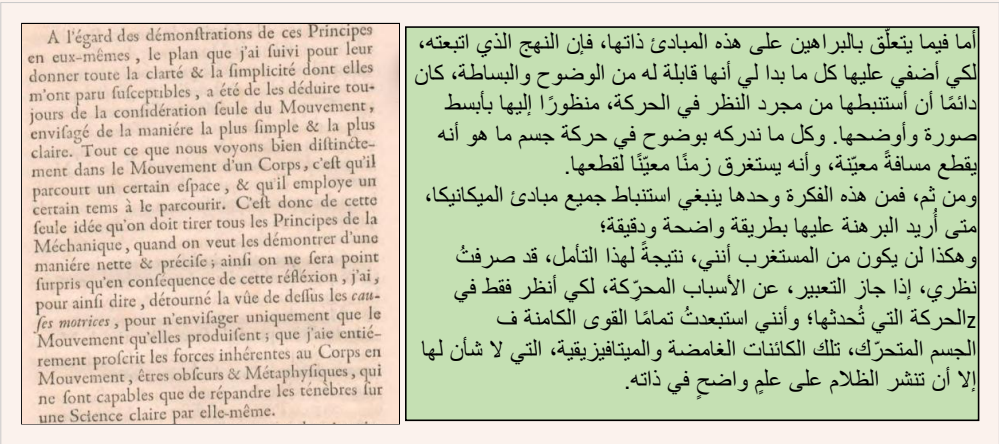
لاحظ أن عبارة دالمبير في هذا النص، "السيدة المتميزة بعقلها وعلمها"، تشير إلى إميلي دو شاتليه (1706–1749)، التي ساعدت كتاباتها، ولا سيما 1740 *Institutions de physique*) وتدخلاتها في جدل القوة الحية، على إيصال الخلاف إلى جمهور أوسع.

ينطبق مبدأ السرعات الافتراضية مباشرة بعد ذلك. ولمنظومة من الجسيمات، ينص مبدأ دالمبير على:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

حيث $\delta \mathbf{r}_i$ إزاحات افتراضية متوافقة مع القيود.

هذه ديناميكا رُدت إلى الاستاتيكا. فبمعاملة حدود العطالة كقوى، وحد دالمبير الميكانيكا وبرهن العمومية الاستثنائية للعمل الافتراضي. وأصبح من الممكن تناول كل مسألة في الديناميكا، مهما تعقدت منظومة الأجسام والقيود، بالإطار التغايري نفسه الذي أرساه برنولي للاستاتيكا. ومن ثم أعطى دوراً بارزاً لجميع مبادئ الميكانيكا في الاشتقاق الصارم، الشكل 14.20.


A l'égard des démonſtrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai ſuivi pour leur donner toute la clarté & la ſimplicité dont elles m'ont paru ſuſceptibles, a été de les déduire toujours de la conſidération ſeule du Mouvement, enviſagé de la maniére la plus ſimple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien diſtinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'eſt qu'il parcourt un certain eſpace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'eſt donc de cette ſeule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette & préciſe; ainſi on ne ſera point ſurpris qu'en conſequence de cette réfléxion, j'ai, pour ainſi dire, détourné la vûe de deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténébres ſur une Science claire par elle-même.

أما فيما يتعلّق بالبراهين على هذه المبادئ ذاتها، فإن النهج الذي اتبعته، لكي أضفي عليها كل ما بدا لي أنها قابلة له من الوضوح والبساطة، كان دائمًا أن أستنبطها من مجرد النظر في الحركة، منظورًا إليها بأبسط صورة وأوضحها. وكل ما ندركه بوضوح في حركة جسم ما هو أنه يقطع مسافةً معيّنة، وأنه يستغرق زمنًا معيّنًا لقطعها.
ومن ثم، فمن هذه الفكرة وحدها ينبغي استنباط جميع مبادئ الميكانيكا، متى أُريد البرهنة عليها بطريقة واضحة ودقيقة؛
وهكذا لن يكون من المستغرب أنني، نتيجةً لهذا التأمل، قد صرفتُ نظري، إذا جاز التعبير، عن الأسباب المحرّكة، لكي أنظر فقط في الحركة التي تُحدثها؛ وأنني استبعدتُ تمامًا القوى الكامنة ف
الجسم المتحرّك، تلك الكائنات الغامضة والميتافيزيقية، التي لا شأن لها إلا أن تنشر الظلام على علمٍ واضحٍ في ذاته.

شكل 14.20: دالمبير والحركة بوصفها الأساس الوحيد للميكانيكا (d'Alembert, 1743)

وأخيراً، لم يكن لدى دالمبير صبر على الجدل الذي يعامل "القوة" سبباً ميتافيزيقياً خفياً أو مجرد ساحة صراع اصطلاحي. فقد قال صراحة إنه "صرف نظره" عن الأسباب المحركة لينظر في الحركة التي تنتجها وحدها، ورفض نزاع القوة الحية بوصفه عديم الفائدة إلى حد كبير للميكانيكا، مفضلاً مبادئ واضحة وإجرائية قائمة على الحركة والحساب، الشكل 14.20.

وتجدر الإشارة إلى أن دالمبير نفسه لم يسم ذلك "مبدأ دالمبير"؛ فقد جاءت التسمية لاحقاً. وعرضه في *Traité* طريقة عامة لحل مسائل الحركة المقيدة، لا مبدأً ذا اسم. أما التسمية فوضعتها الأجيال اللاحقة التي أدركت الطابع التأسيسي لبصيرته.

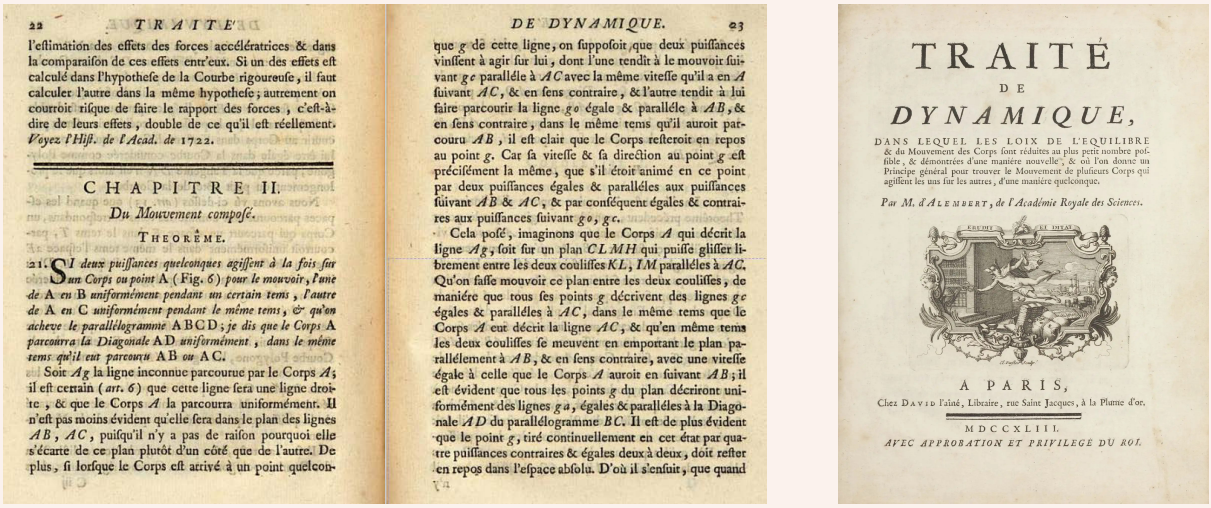
في القوة ومتوازي الأضلاع

F عالج دالمبير في *Traité de Dynamique* مسألة متوازي أضلاع القوى بطريقة هندسية لتحليل نتيجة قوى متزامنة تؤثر في جسم. وبحث الحالة التي تؤثر فيها قوتان في نقطة في آن واحد، وتوجه كل منهما النقطة

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

على أحد مسارين AB وAC، على الترتيب، خلال الزمن نفسه. وبإنشاء متوازي أضلاع يمثل فيه AB وAC ضلعين متجاورين، يمثل القطر المنطلق من A المسار المحصل الناتج من التأثير المشترك للقوتين:

> المبرهنة 2. إذا أثرت قدرتان اعتباطيتان في الوقت نفسه في جسم أو نقطة A لتحريكها، إحداهما بانتظام من A إلى B في زمن معين، والأخرى بانتظام من A إلى C في الزمن نفسه، وأُنشئ متوازي الأضلاع $ABCD$؛ فأقول إن الجسم A يتحرك بانتظام على القطر AD في الزمن نفسه الذي كان سيتحرك فيه على AB أو AC.
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique



22 TRAITE

l'eſtimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaiſon de ces effets entr'eux. Si un des effets eſt calculé dans l'hypotheſe de la Courbe rigoureuſe, il faut calculer l'autre dans la même hypotheſe; autrement on courroit riſque de faire le rapport des forces, c'eſt-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il eſt réellement. *Voyez l'Hiſt. de l'Acad. de 1722.*

CHAPITRE II.

Du Mouvement compoſé.

THEOREME.

21. SI *deux puiſſances quelconques agiſſent à la fois ſur un Corps ou point* A (Fig. 6) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on achève le parallélogramme* ABCD; *je dis que le Corps* A *parcourra la Diagonale* AD *uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru* AB *ou* AC.

Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le Corps A; il eſt certain (*art. 6*) que cette ligne ſera une ligne droite, & que le Corps A la parcourra uniformément. Il n'eſt pas moins évident qu'elle ſera dans le plan des lignes AB, AC, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, ſi lorſque le Corps eſt arrivé à un point quelconque

DE DYNAMIQUE. 23

que g de cette ligne, on ſuppoſoit que deux puiſſances vinſſent à agir ſur lui, dont l'une tendît à le mouvoir ſuivant ge parallèle à AC avec la même viteſſe qu'il a en A ſuivant AC, & en ſens contraire, & l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne go égale & parallèle à AB, & en ſens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il eſt clair que le Corps reſteroit en repos au point g. Car ſa viteſſe & ſa direction au point g eſt préciſément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puiſſances égales & parallèles aux puiſſances ſuivant AB & AC, & par conſéquent égales & contraires aux puiſſances ſuivant go, gc.

Cela poſé, imaginons que le Corps A qui décrit la ligne Ag, ſoit ſur un plan $CLMH$ qui puiſſe gliſſer librement entre les deux couliſſes KL, IM parallèles à AC. Qu'on faſſe mouvoir ce plan entre les deux couliſſes, de maniére que tous ſes points g décrivent des lignes ge égales & parallèles à AC, dans le même tems que le Corps A eut décrit la ligne AC, & qu'en même tems les deux couliſſes ſe meuvent en emportant le plan parallélement à AB, & en ſens contraire, avec une viteſſe égale à celle que le Corps A auroit en ſuivant AB; il eſt évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga, égales & parallèles à la Diagonale AD du parallélogramme BC. Il eſt de plus évident que le point g, tiré continuellement en cet état par quatre puiſſances contraires & égales deux à deux, doit reſter en repos dans l'eſpace abſolu. D'où il s'enſuit, que quand

TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps ſont réduites au plus petit nombre poſſible, & démontrées d'une maniére nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres, d'une maniére quelconque.

Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,

Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

M. DCC. XLIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

شكل 14.21: دالمبير ومتوازي أضلاع القوى (d'Alembert, 1743)

كتب دالمبير في عمل لاحق:

> **القضية 1.** تنتج قدرتان متساويتان $\alpha\beta$ و$\alpha\xi$، تصنعان بينهما أي زاوية، القطر $\alpha\delta$ محصلةً دائماً.
>
> d'Alembert, 1761 *"Démonstration du principe de la composition des forces"*, p. 177

تجدر الإشارة إلى أن دالمبير استعمل كلمة "قدرة" في نص القضية وفي متن المذكرة أيضاً، مع أن كلمة "قوة" تظهر في العنوان؛ وهذا يبين الحرية التي كان يبادل بها بين المصطلحين.

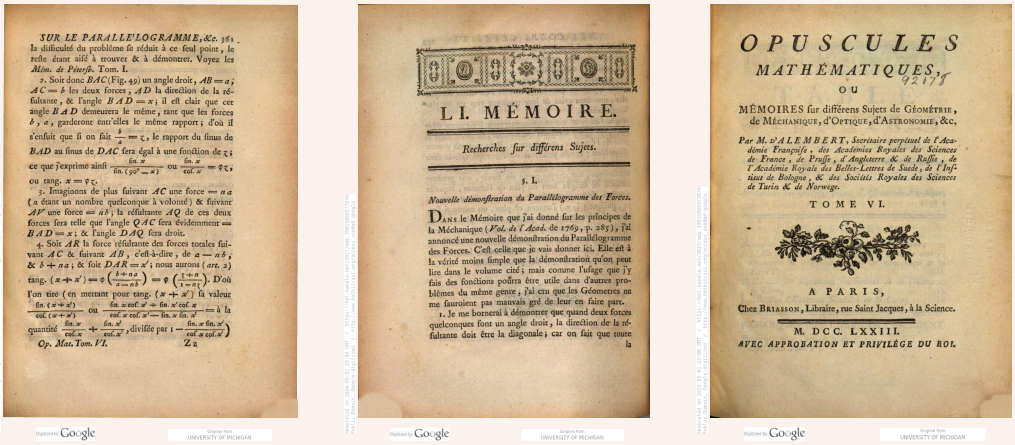
عاد دالمبير إلى الموضوع مرة أخرى. فكتب تحت عنوان *Nouvelle démonstration du Parallélogramme des Forces*، الشكل 14.22:

> أعلنت في المذكرة التي قدمتها عن مبادئ الميكانيكا برهاناً جديداً لمتوازي أضلاع القوى. وهذا هو البرهان الذي سأقدمه هنا. وهو في الواقع أقل بساطة من البرهان الذي يمكن قراءته في المجلد المذكور؛ غير أن استعمالي بعض الدوال قد يكون مفيداً لحل مسائل أخرى من النوع نفسه، ولذلك أعتقد أن علماء الهندسة لن يغضبوا إذا شاركتهم إياه.
>
> d'Alembert, 1773 *"Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces"*

التوسيع إلى الديناميكا والعمل الافتراضي

V

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 14.22: ملاحظات دالمبير الأخيرة على متوازي أضلاع القوى (d'Alembert, 1773)

كان دافع دالمبير فلسفياً في جانب منه. فقد سعى إلى حذف "القوة" بوصفها سبباً ميتافيزيقياً عده غامضاً، وإعادة صياغة الميكانيكا بعبارات هندسية وحركية خالصة:

> J'ai, pour ainsi dire, détourné la vue de dessus les causes motrices, pour n'en envisager uniquement que le Mouvement qu'elles produisent; j'ai entièrement proscrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obscurs & Métaphysiques, qui ne sont capables que de répandre les ténèbres sur une Science claire par elle-même.

> لقد صرفت بصري، إن جاز التعبير، عن الأسباب المحركة، لأنظر فقط في الحركة التي تنتجها؛ وحظرت تماماً القوى الكامنة في الأجسام المتحركة، وهي كيانات غامضة وميتافيزيقية لا تقدر إلا على إلقاء الظلام على علم واضح في ذاته.

d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

وضعه ذلك في قلب جدل *vis viva*[26] الذي قسم علماء الميكانيكا القاريين منذ لايبنتس:

> Cette question ... consiste à savoir, si la force des Corps en Mouvement est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse, ou au produit de la masse par le quarré de la vitesse ... Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui.

> يسأل هذا السؤال هل تتناسب قوة الأجسام المتحركة مع الكتلة مضروبة في السرعة، أم مع الكتلة مضروبة في مربع السرعة... وعلى الرغم من الخلافات التي أثارها، فإن عدم فائدته التامة للميكانيكا دفعني إلى عدم ذكره في العمل الذي أنشره اليوم.

d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

وبإعادة صياغة الديناميكا مسألة اتزان، تجنب دالمبير النزاع على "المقياس الحقيقي" للقوة.

[26] ينبغي عدم الخلط بين *vis viva* ("القوة الحية") عند لايبنتس، المتناسبة مع mv^2، أي الطاقة الحركية لاحقاً حتى عامل ثابت، و*vis insita* ("القوة الفطرية") عند نيوتن، أي العطالة أو مقاومة تغير الحالة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كانت بصيرته الأساسية بسيطة ظاهرياً. إذ يمكن إعادة كتابة قانون نيوتن الثاني، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، في الصورة:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

وهذه عبارة عن اتزان بين القوة المطبقة $\mathbf{F}$ وما سماه دالمبير "قوة العطالة"، $-m\mathbf{a}$. ويمكن معاملة الجسم المتسارع كما لو كان في اتزان استاتيكي تحت التأثير المشترك للقوى المطبوعة وقوى العطالة.

ينطبق مبدأ السرعات الافتراضية مباشرة بعد ذلك. ولمنظومة من الجسيمات، ينص مبدأ دالمبير على:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

حيث $\delta\mathbf{r}_i$ إزاحات افتراضية متوافقة مع القيود.

هذه ديناميكا رُدت إلى الاستاتيكا. فبمعاملة حدود العطالة كقوى، وحد دالمبير الميكانيكا وبرهن العمومية الاستثنائية للعمل الافتراضي. وأصبح من الممكن تناول كل مسألة في الديناميكا، مهما تعقدت منظومة الأجسام والقيود، بالإطار التغايري نفسه الذي أرساه برنولي للاستاتيكا.

وتجدر الإشارة إلى أن دالمبير نفسه لم يسم ذلك "مبدأ دالمبير"؛ فقد جاءت التسمية لاحقاً. وعرضه في *Traité* طريقة عامة لحل مسائل الحركة المقيدة، لا مبدأً ذا اسم. أما التسمية فوضعتها الأجيال اللاحقة التي أدركت الطابع التأسيسي لبصيرته.

14.5.16 كانط (1724–1804)

F

سيختتم هذا القسم بنهاية فلسفية.

ناقش Kant, 2023 في كتابه "الأسس الميتافيزيقية للعلوم الطبيعية" تركيب الحركات، وهو موضوع يرتبط بمتوازي أضلاع القوى.

بحث كانط في الفورونوميا، وهو مصطلح صاغه للدلالة على دراسة حركات الأجسام من دون اعتبار للقوى أو طبيعة الأجسام نفسها، أي علم الحركة، فكرة جمع حركات مختلفة لنقطة واحدة لفهم كيفية اندماجها في حركة محصلة. وكان نهجه الفلسفي يهدف إلى توفير أساس ميتافيزيقي لهذه المفاهيم، موضحاً كيف يمكن فهم حركات مختلفة عند نقطة واحدة ككل موحد، لا كمجرد أسباب تنتج آثاراً. ولم يطور كانط نفسه أي قوانين رياضية محددة.

> **قضية** لا يمكن تصور تركيب حركتين لنقطة واحدة بعينها إلا بتمثيل إحداهما في مكان مطلق، وتمثيل حركة مساوية في السرعة ومعاكسة في الاتجاه للمكان النسبي، بدلاً من الأخرى، على أنها مطابقة لها.
>
> Kant, 2023 Metaphysical foundations of natural science

ليس واضحاً ما معنى ذلك. لكن إيمانويل كانط كان، مرة أخرى، واحداً من كبار الفلاسفة الذين تناولوا الفيزياء.

14.5.17 لاغرانج (1736–1813)

V

يمثل كتاب جوزيف-لويس لاغرانج *Mécanique Analytique*، الذي نُشر أول مرة سنة 1788 (Lagrange, 1788)، ذروة تقليد العمل الافتراضي. ففي هذا المؤلَّف الضخم، جعل لاغرانج مبدأ السرعات الافتراضية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أساس الميكانيكا *كلها*—الاستاتيكا والديناميكا والأجسام الصلبة والموائع—وصاغ الموضوع بأكمله في صورة تحليلية خالصة.

لاغرانج مؤرخاً

كان لاغرانج نفسه واعياً بحدة بالتطور التاريخي للأفكار التي كان ينظمها. ويُفتتح كتاب *Mécanique Analytique* بمسح تاريخي موسع يتتبع تطور الميكانيكا من العصور القديمة حتى زمنه. ويناقش أرخميدس وستيفن وغاليليو وتوريتشيلي وديكارت ووواليس وهويغنز وآل برنولي ودالمبير، مقدماً ما لا يزال أحد أجود الروايات التاريخية للموضوع بقلم أحد ممارسيه. ويمنح هذا الوعي التاريخي—النادر بين الرياضيين—عمله إحساساً بالنسب الفكري يصل القارئ بسلسلة الاكتشافات الطويلة التي أفضت إلى مبدأ السرعات الافتراضية.

البرنامج التحليلي

صرح لاغرانج في المقدمة بمقصده الثوري:

> On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme.

> لن يجد المرء أي رسوم في هذا المؤلَّف. فالطرائق التي أعرضها لا تتطلب إنشاءات ولا استدلالات هندسية أو ميكانيكية، بل عمليات جبرية فحسب، خاضعة لمسار منتظم وموحد.

Lagrange, 1788 Mécanique Analytique

ولم يكن هذا مجرد تفاخر. فكتاب *Mécanique Analytique* لا يضم رسماً واحداً—وهو إنجاز لافت في مؤلَّف عن الميكانيكا، وشهادة على قوة الطرائق التحليلية التي طورها لاغرانج.

الإحداثيات المعممة

كان إدخال *الإحداثيات المعممة* أحد ابتكارات لاغرانج الأعمق أثراً. فبدلاً من وصف منظومة ميكانيكية بإحداثيات كل جسيم الديكارتية—وهي غير مستقلة عادة بسبب القيود—مثّل لاغرانج المنظومة بمجموعة دنيا من المتغيرات المستقلة $q_1, q_2, \ldots, q_n$، حيث n عدد درجات الحرية.

كان هذا التجريد ثورياً. فالبندول المزدوج، والعجلة المتدحرجة، والدوامة الدوارة، والوتر المهتز—كلها يمكن تناولها بالصياغة نفسها، بصرف النظر عن الطبيعة الفيزيائية للإحداثيات. وقد تمثل q_j زوايا أو أطوالاً أو أي كميات أخرى تلائم المسألة. وهكذا أصبح مبدأ السرعات الافتراضية، معبراً عنه بهذه الإحداثيات المعممة، أداة شاملة قابلة للتطبيق على منظومات بأي درجة من التعقيد.

مبدأ السرعات الافتراضية

تقول صياغة لاغرانج المعممة للمبدأ:

> Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, & qu'on donne à ce système un petit mouvement

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro.

إذا كانت منظومة كيفما كانت، مؤلفة من أي عدد مطلوب من الأجسام أو النقاط، تؤثر في كل منها قوى كيفما كانت، في حالة اتزان، وأُعطيت هذه المنظومة حركة صغيرة كيفما كانت تقطع بموجبها كل نقطة مسافة متناهية الصغر تعبّر عن سرعتها الافتراضية؛ فإن مجموع القوى، مضروبة كل منها في المسافة التي تقطعها نقطة تطبيقها في اتجاه القوة نفسها، يساوي دائماً صفراً.

Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §1

غير أن لاغرانج أبدى في الطبعات اللاحقة تحفظاً على اعتبار المبدأ بديهياً بذاته:

Quant à la nature du principe des vitesses virtuelles, il faut convenir qu'il n'est pas assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe primitif.

أما طبيعة مبدأ السرعات الافتراضية، فينبغي الإقرار بأنه ليس واضحاً بذاته بما يكفي كي يُقام مقام مبدأ أولي.

Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §18

تعكس هذه الفقرة، التي أضيفت في الطبعة الثانية (1811–1815) وكان لاغرانج يراجعها وقت وفاته، رأيه الناضج بأن مبدأ بهذه القوة يتطلب برهاناً انطلاقاً من أسس أبسط.

برهان لاغرانج بكتل البكرات

قدم لاغرانج، في بحث نشره في *Journal de l'École Polytechnique* (Lagrange, 1798)، برهاناً بارعاً للمبدأ يقوم على اتزان كتل البكرات (الشكل 14.23).

تقوم الفكرة على تخيل أن جميع القوى المؤثرة في المنظومة تولدها أثقال تعمل عبر مجموعات من البكرات موصولة بحبل واحد غير قابل للتمدد. فإذا كانت في المنظومة أجسام في مواضع خاضعة للقوى P وQ وR وS وT، إلخ، ولّدت هذه القوىَ كتلُ بكرات ذات فوائد ميكانيكية تتناسب، على الترتيب، مع P وQ وR وS وT، وكلها موصولة بالحبل نفسه إلى ثقل واحد.

إذا تعرضت الأجسام لإزاحات متناهية الصغر تغير المسافات في منظومات البكرات بالمقادير α وβ وγ وδ وε، . . .، فإن الطرف الحر للحبل يتحرك بمقدار:

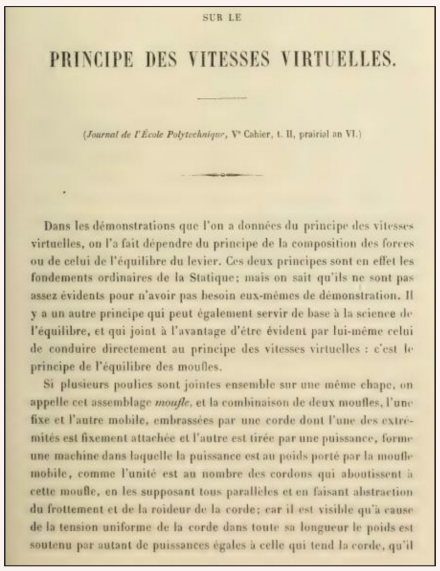
$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + S\delta + T\varepsilon + \cdots$$

وللاتزان، يجب أن تنعدم هذه الإزاحة (وإلا هبط الثقل، مخالفاً شرط الاتزان). ومن ثم:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \cdots = 0$$

"وهذه بالضبط العبارة التحليلية للمبدأ العام للسرعات الافتراضية."

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



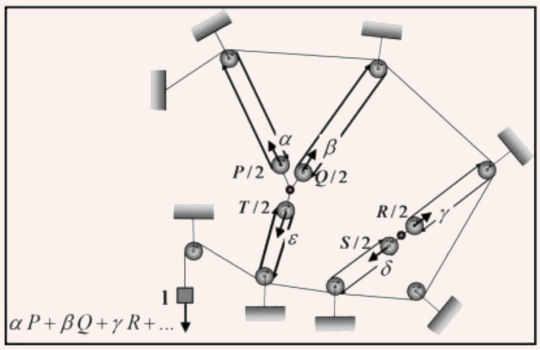
SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, Ve Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il



شكل 14.23: برهان لاغرانج لمبدأ السرعات الافتراضية باستخدام كتل البكرات (نقلاً عن Salençon, 2018)

مضاعفات لاغرانج وقوى القيود

لعل أعمق إسهامات لاغرانج في جهاز الميكانيكا كان معالجته للقيود. فإذا خضعت المنظومة لقيود هندسية معبراً عنها بالصورة:

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \dots$$

فإن معادلة العمل الافتراضي تحت هذه القيود تكافئ:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \cdots = 0$$

للتغيرات *الاعتباطية*، حيث λ وμ وν مقادير قياسية غير محددة—أي *مضاعفات لاغرانج* الشهيرة.

ثم أبدى لاغرانج الملاحظة الحاسمة بأن الحدود $\lambda\,dL$ و$\mu\,dM$، إلخ، لها تماماً الصورة الرياضية نفسها لحدود القوى $P\,dp$ و$Q\,dq$، إلخ. ويقود هذا إلى تفسير فيزيائي عميق: مضاعفات لاغرانج هي قوى القيود—أي ردود الأفعال. فكل معادلة قيد هندسي تكافئ قوة واحدة أو عدة قوى تؤثر في المنظومة؛ وبالعكس، يمكن إحلال هذه القوى محل معادلات القيود الهندسية بحيث تعد الأجسام المكونة حرة تماماً. وتمثل المضاعفات بدقة المقاومات التي تواجهها الأجسام بسبب روابطها، أو ردود الأفعال التي يجب أن تساوي الضغوط التي تبذلها الأجسام وتعاكسها.

تكمن هذه البصيرة—أي إن القوى والقيود مفهومان متقابلان—في صميم الميكانيكا الإنشائية الحديثة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

معادلات لاغرانج للحركة

كان الإنجاز المتوج لكتاب *Mécanique Analytique* اشتقاق المعادلات العامة لحركة أي منظومة ميكانيكية. فبدمج مبدأ دالمبير مع صياغة الإحداثيات المعممة، بيّن لاغرانج أن حركة منظومة ذات n من درجات الحرية تحكمها n معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.2}$$

حيث T الطاقة الحركية وQ_j القوى المعممة.

وعندما يمكن اشتقاق القوى من طاقة وضع $V(q_1, \ldots, q_n)$ بحيث $Q_j = -\partial V/\partial q_j$، تتخذ المعادلات الصورة الأنيقة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.3}$$

حيث $L = T - V$ هي *دالة لاغرانج* للمنظومة.

هذه هي معادلات *أويلر–لاغرانج*، المعادلات الأساسية للميكانيكا التحليلية. فكل مسألة في الديناميكا—من حركة الكواكب إلى اهتزازات الأجسام المرنة—تُرد إلى كتابة دالة لاغرانج وحل هذه المعادلات. وقد رُد هنا صرح الميكانيكا الكلاسيكية كله، الذي شيده غاليليو ونيوتن وآل برنولي وأويلر ودالمبير جزءاً بعد جزء على مدى قرنين، إلى إجراء واحد موحد.

14.5.18 فوريه (1768–1830)

V

وسع فوريه (Fourier, 1798) إطار لاغرانج ليشمل قيود *المتباينات*، ملاحظاً أنه "إذا عُدت المقاومات قوى... أمكن اعتبار الجسم حراً، وكان مجموع العزوم صفراً لجميع الإزاحات الممكنة." ويتيح هذا التوسيع معالجة *القيود أحادية الجانب*، مثل التلامس من دون شد—كجسم يستند إلى سطح يستطيع دفعه لا جذبه. ويصبح مبدأ العمل الافتراضي *متباينة*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \le 0$$

لجميع الإزاحات الافتراضية المتوافقة مع القيد. وقد فتحت هذه الصياغة الباب للنظرية الحديثة للمتباينات التغايرية وميكانيكا مسائل التلامس.

14.5.19 لازار كارنو (1753–1823)

V

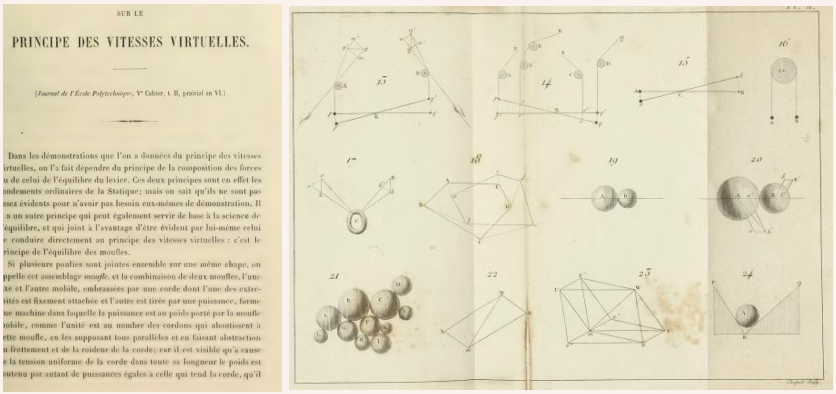
يُذكر لازار نيكولا مارغريت كارنو (1753–1823) أساساً بوصفه "l'organisateur de la vic-toire"—المهندس العسكري ورجل الدولة الذي نظم جيوش الثورة الفرنسية. لكن كارنو قدم، قبل أن تستغرقه حياته السياسية ثم بعد سقوطه من السلطة سنة 1797، إسهامات أساسية في الميكانيكا تصل بين صياغة لاغرانج التحليلية والعلم العملي للآلات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نُشر كتاب كارنو *Essai sur les machines en général* أول مرة سنة 1783 (Carnot, 1783)، حين كان نقيباً مغموراً في سلاح الهندسة الملكي. ولم يحظ آنذاك باهتمام كبير. وبعد عشرين عاماً، إثر أفول نجمه السياسي، نشر كارنو نسخة منقحة تنقيحاً جوهرياً بعنوان *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (Carnot, 1803 PDF). ويمثل هذان العملان أول مؤلَّف نظري حقيقي في العلم العام للآلات.

للاطلاع على دراسة ممتازة وترجمة إنجليزية لكتاب كارنو *Essai*، انظر Pisano, Coopersmith **and** Peake, 2021.

كان الابتكار المحوري لكارنو مفهوم *mouvement géométrique*—أي الحركة الهندسية، (Carnot, 1803 PDF). وقد عرّفها بأنها حركة تعتمد على هندسة المنظومة الميكانيكية وحدها، لا على ديناميكيتها: أي حركة "تكون الحركة المعاكسة لها ممكنة دائماً." وبالمصطلحات الحديثة، الحركات الهندسية هي ما نسميه *الإزاحات الافتراضية المتوافقة مع القيود*، مع اشتراط إضافي هو قابلية العكس (الشكل 14.24).


SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, Ve Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *mouffle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la mouffle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette mouffle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

شكل 14.24: رسم كارنو التوضيحي لمنظومات الأجسام والحركات الهندسية وميكانيكا التصادم (Carnot, 1803 PDF)

أدخل كارنو مصطلح *moment d'activité* لما نسميه الآن *الشغل*، أي حاصل ضرب القوة في الإزاحة الواقعة في اتجاهها. وباستخدام الحركات الهندسية وعزم الفعالية، صاغ كارنو مبدأ معمماً: في أي منظومة أجسام خاضعة لقيود، تكون الحركات الهندسية تحديداً هي الحركات التي ينعدم عندها عزم الفعالية الكلي. وهذه صورة من مبدأ العمل الافتراضي مصوغة بلغة تلائم تحليل الآليات أكثر من صياغة لاغرانج المجردة.

ومن السمات المميزة لميكانيكا كارنو معالجته *corps durs*—أي الأجسام الصلبة التي تتعرض لتغيرات لحظية في السرعة عند التصادم أو عند فرض القيود فجأة. وقد اشتق لمثل هذه المنظومات نظريته في فقدان *vis viva* عند التصادم غير المرن: تساوي *القوة الحية* المفقودة القوة الحية التي كانت ستولدها "السرعات المفقودة":

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i U_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i|^2 \tag{14.4}$$

حيث $\mathbf{U}_i$ و$\mathbf{V}_i$ السرعتان قبل التصادم وبعده. وتبين هذه النتيجة، التي تسمى أحياناً نظرية كارنو، أن الحركة الفعلية بعد التصادم تقلل فقدان الطاقة الحركية إلى أدنى حد بين جميع الحركات المتوافقة مع القيود.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالنسبة إلى القوى المتغيرة تدريجياً، وسع كارنو تحليله إلى مبدأ الاستمرارية: تعمل الآلة بأقصى كفاءة عندما يحدث انتقال الحركة من دون تغيرات مفاجئة في السرعة. وكان لهذه البصيرة أثر عملي مباشر في تصميم الآلات، وآثار نظرية عميقة استثمرها لاحقاً سادي ابن كارنو: فمفهوم العملية القابلة للعكس ينحدر مباشرة من مفهوم لازار للحركة الهندسية.[27]

إذا كان لاغرانج قد حول العمل الافتراضي إلى فرع من التحليل الخالص، فإن كارنو حوله إلى أداة هندسية. وقد وفر مفهومه للحركة الهندسية تفسيراً فيزيائياً للإزاحة الافتراضية أكثر تجسيداً من تعريف لاغرانج التحليلي الخالص، كما استبق تركيزه على الشغل بوصفه المقدار الأساسي في تحليل الآلات المنهج القائم على الطاقة الذي سيهيمن على فيزياء القرن التاسع عشر.

14.6 خاتمة الفصل

وفي ختام هذا العرض، نغمز غمزة صغيرة لزملائنا في الفيزياء وننهي هذا الفصل بتعريفاتهم للأنواع الأربعة من القوى.

قوة الجاذبية هي قوة التجاذب بين كتلتين. وهي المسؤولة عن التجاذب الثقالي الذي تمارسه الأجسام ذات الكتلة بعضها على بعض. ووفق قانون نيوتن للجذب العام، يتناسب مقدار قوة الجاذبية بين كتلتين طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مع مربع المسافة بين مركزيهما.

القوة الكهرومغناطيسية هي القوة المؤثرة بين الجسيمات المشحونة كهربائياً. وتشمل القوى الكهربائية (التجاذب أو التنافر بين الجسيمات المشحونة) والقوى المغناطيسية (التفاعل بين الشحنات المتحركة). وهي القوة التي تمنع كتاباً من السقوط عبر طاولة، لأن الكتاب والطاولة، على المستوى الذري، مكوّنان من ذرات تتألف من نواة (تحتوي بروتونات ونيوترونات) تحيط بها إلكترونات. وتتنافر إلكترونات الكتاب وإلكترونات سطح الطاولة بفعل شحناتها السالبة. وبالمثل، تتنافر أيضاً إلكترونات ذرات الكتاب مع إلكترونات ذرات سطح الطاولة. وقوة التنافر هذه بين الإلكترونات سالبة الشحنة هي ما يمنع يدك من المرور عبر الطاولة.

القوة النووية الضعيفة مسؤولة عن بعض أنواع التحلل الإشعاعي والتفاعلات التي تشمل الجسيمات الأولية.

القوة النووية الشديدة هي القوة التي تربط البروتونات والنيوترونات معاً داخل نواة الذرة. وهي أشد القوى الأساسية الأربع، لكن مداها قصير جداً ولا تعمل إلا عبر مسافات تقارب حجم النوى الذرية. والقوة النووية الشديدة مسؤولة عن تماسك النوى الذرية رغم التنافر الكهروستاتيكي بين البروتونات موجبة الشحنة.

[27] أسس سادي كارنو (1796–1832) الديناميكا الحرارية بكتابه *Réflexions sur la puissance motrice du feu* (1824). وكان للجهاز المفاهيمي الذي ورثه عن أبيه، ولا سيما مفهوم العمليات القابلة للعكس، دور حاسم في ذلك العمل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14.7 الخلاصة

عند التأمل في فهمنا الراهن للفيزياء والميكانيكا، من المدهش حقاً أن نرى مدى التقدم الذي أحرزته البشرية في فهم مفهوم القوة. فالأفكار الأولى، التي كانت ممتزجة في البداية بالتدخل الإلهي والفلسفة المجردة، تبدو اليوم بعيدة عن مناقشاتنا المباشرة والتجريبية. والحق أن الرحلة من تصور القوة تجلياً للإرادة الإلهية إلى فهمها عبر منظاري الفيزياء والميكانيكا الحديثتين الواضحين والدقيقين تمثل تطوراً كبيراً.

ويؤكد هذا التحول، الذي حفزته الثورة العلمية منذ أواخر القرن السادس عشر، سعينا الدؤوب إلى المعرفة والانتقال العميق من التفسيرات الصوفية إلى العلم التجريبي ("من أسفل إلى أعلى") والنظري ("من أعلى إلى أسفل").

ومن ثم أختم على نحو ملائم باقتباس منسوب إلى أحد مؤسسي ميكانيكا الكم والديناميكا الكهربائية الكمية، بول ديراك[28]

> يبدو واضحاً أن الولع الراهن بالديناصورات والاهتمام التاريخي الذي يبديه الناس بالأديان البدائية ينبعان من السبب نفسه—الرغبة في فهم الكيفية التي واجه بها الإنسان البدائي العالم. وكانت الأديان القديمة محاولات لفهم قوى الطبيعة عن طريق تشخيصها.
>
> Dirac, 1963 "*The Evolution of the Physicist's Picture of Nature*"

ملخص زمني

[28] https://freethoughtblogs.com/singham/2013/03/24/paul-dirac-on-religion/

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 14.1: التطور الزمني لمفهوم القوة والمبادئ الافتراضية.

الإسهام الرئيس	المرجع	المؤلف	السنة
"الحب" و"الصراع" سببان متعارضان للحركة (مفاهيم أولية شبيهة بالقوة)	لا يوجد	إمبيدوكليس	نحو 450 ق.م.
الحركة الذاتية سبب أول؛ تأطير ميتافيزيقي مبكر للفاعلية في الحركة	Plato, 350 BC	أفلاطون	نحو 350 ق.م.
تفسير الرافعة بالسرعات الدائرية؛ مفهوم "القدرة"	Aristotle, 2000	أرسطو	نحو 350 ق.م.
برهان صارم لقانون الرافعة؛ من دون مبدأ تغايري عام	Archimedes, -250	أرخميدس	نحو 250 ق.م.
القوة "توتر" فعال؛ تأكيد صريح للدفع/الشد؛ ثنائية الفاعل/القابل	لا يوجد	بوسيدونيوس الرواقيون /	نحو 100 ق.م.
نقد أرسطو؛ استمرار الدفع المطبوع بعد انقطاع التلامس (عطالة أولية)	Philoponus, 1993	فيلوبونوس	نحو 530
الميل نزوع مطبوع؛ استمرار الحركة من دون محرك مستمر	لا يوجد	ابن سينا	نحو 1020
ربط القوة بتغير الحركة (تمييز التسارع من السرعة؛ صيغة أولية لـ $F \propto a$)	لا يوجد	البغدادي	نحو 1120
"الثقل الموضعي"؛ إزاحات افتراضية ضمنية في المنظومات المقيدة	Nemore, 1250	جوردانوس دي نيمور	نحو 1250
تنقيح نظرية الدفع؛ عبارة شبيهة بالعطالة (تستمر الحركة ما لم تعقها مقاومة)	Buridan, 1991	جان بوريدان	نحو 1340
مخطوطات عن الآلات البسيطة؛ قاعدة التناسب؛ توليف عملي	Vinci, 1881	ليوناردو دا فينشي	نحو 1500
clootcrans؛ استحالة الحركة الدائمة؛ متوازي أضلاع القوى	Stevin, 1586	سيمون ستيفن	1586
"ما يُكتسب في القوة يُفقد في السرعة" (مقايضة القوة والحركة)	Galilei, 1594	غاليليو غاليلي	1594
Les raisons des forces mouvantes؛ إدخال مصطلح "travail" (الشغل)	Caus, 1615	سالومون دي كوس	1615
إزاحات متناهية الصغر؛ إنشاء المماس؛ المكان (لا الزمن/السرعة)	Descartes, 1898	رينيه ديكارت	1637
معيار مركز الثقل: الاتزان إذا وفقط إذا تعذر هبوط مركز الثقل المشترك	Torricelli, 1644	إيفانجليستا توريتشيلي	1644
تعميم التركيب إلى ما وراء الاتجاهات الخاصة؛ تحليل أوسع للقوى	Wallis, 1670	جون واليس	1670
vis viva (mv^2) في مقابل كمية الحركة (mv): ربط "القوة" بالشغل/الطاقة	Leibniz, 1686a	غ. ف. لايبنتس	1686
قوانين الحركة؛ اشتقاق متوازي أضلاع القوى من الديناميكا	Newton, 1687	إسحاق نيوتن	1687
أول صياغة عامة للسرعات الافتراضية (رسالة إلى فاريغنون)	Bernoulli, Johann, 1725	يوهان برنولي	1717
نظرية فاريغنون في العزوم؛ نشر النتائج السابقة وتنظيمها	Varignon, 1725	بيير فاريغنون	1725
تفسير استاتيكي لمتوازي أضلاع القوى؛ ترسيخ تركيب القوى	Bernoulli, Daniel, 1726	دانيال برنولي	1726
التوسيع إلى الديناميكا عبر قوى العطالة؛ إعادة الصياغة بأسلوب العمل الافتراضي	d'Alembert, 1743	جان دالمبير	1743
"الحركات الهندسية"؛ *moment d'activité*؛ نظرية الآلات	Carnot, 1783	لازار كارنو	1783
معالجة فلسفية لتركيب الحركات (المكان المطلق/النسبي)	Kant, 2023	إيمانويل كانط	1786
التنظيم المنهجي؛ المضاعفات بوصفها قوى القيود؛ الميكانيكا التحليلية	Lagrange, 1788	جوزيف لاغرانج	1788
قيود المتباينات (أحادية الجانب)؛ معاملة ردود الأفعال كقوى	Fourier, 1798	جوزيف فورييه	1798
طريقة الحمل الوحدي؛ نظرية التقابل	Maxwell, 1864c	جيمس ماكسويل	1864
منهجة طريقة الحمل الوحدي للإطارات	Mohr, 1868	أوتو مور	1868

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



كارافاجيو، اهتداء القديس بولس (1601)

قوة خفية تصرع بولس عن حصانه—السبب غير مرئي، والأثر لا سبيل إلى إنكاره. تظل القوة نفسها غامضة فيما تتجلى عواقبها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الفاصل الثالث: حين تلتقي المعرفة بالشغف

يخرج الفصلان التاليان عن العرض التاريخي أو الموضوعي الصارم ليتناولا موضوعين أكن لهما اهتماماً شخصياً عميقاً. وأهمهما الفصل 15، حيث نبحث نقطة الالتقاء الدقيقة بين المنشآت والعمارة. ثم يستكشف الفصل 16 تقاطعاً مختلفاً: تقاطع الزلازل والأسطورة.

وبالمعنى الدقيق، لا يقع أي من الموضوعين تماماً ضمن نطاق هذا الكتاب؛ غير أنهما يعكسان اهتمامات شخصية راسخة انسكبت بطبيعتها في هذين الفصلين الختاميين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15 العمارة والمنشآت

ملخص

يبحث هذا الفصل العلاقة المعقدة والمتطورة بين العمارة والهندسة الإنشائية—وهما تخصصان كانا يوماً موحدين في شخص المعلم البنّاء، ثم أخذا يتمايزان منذ القرن الثامن عشر. وانطلاقاً من المبادئ التأسيسية التي صاغها فيتروفيوس في كتابه De Architectura—وهي firmitas وutilitas وvenustas (المتانة والمنفعة والجمال)—نتتبع انتقال هذه المُثل عبر مؤلفات عصر النهضة لدى ألبيرتي وبالاديو، وتكييفها مع مواد العصر الصناعي على أيدي مهندسين مثل إيفل ومايار، ثم إعادة صياغتها في نهاية المطاف ضمن مفهوم بيلينغتون في القرن العشرين عن "الفن الإنشائي". ويعرض الفصل كبار progettisti—أي المصممين البنّائين الذين حققوا تكامل المنطق الإنشائي والتعبير الجمالي، وهو أسمى ما تدعو إليه مهنتنا—مع مواجهة حقائق غير مريحة عن واقع ممارسة الهندسة الإنشائية اليوم. ففي عصر حولت فيه الأدوات الحاسوبية مهندسين كثيرين إلى "فنيين وداعمين للأفكار المعمارية"، نبحث ما يميز "الخمسة في المئة" المبدعين الذين يواصلون دفع الحدود. وبدلاً من تبني مصطلح بيلينغتون المختلف عليه، "الفن الإنشائي"، ندافع عن التسمية الأدق، "العمارة الإنشائية"، ونقترح أن الطريق إلى الأمام لا يكمن في رفض التكنولوجيا، بل في إعادة اكتشاف المبادئ الأساسية التي أتاحت إنجازات أسلافنا.

15.1 المقدمة 482
15.1.1 تنظيم الفصل 483
15.2 التقليد الفيتروفي 484
15.2.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو: أول مؤثر معماري 484
15.2.2 إعادة اكتشاف فيتروفيوس في عصر النهضة 490
15.2.3 القياسات البشرية ومسألة المقياس 497
15.3 فاصل: المعماريون والمهندسون—فن وعلم؟ 508
15.4 الرواد 510
15.4.1 الدعامة الطائرة: المنطق الإنشائي وقد صار مرئياً 511
15.4.2 غوستاف إيفل (1832–1923) . 514
15.4.3 لويس هنري سوليفان (1856–1924) 516
15.4.4 روبرت مايار (1872–1940) . . 517
15.4.5 أوغست بيريه (1874–1954) . 519
15.4.6 إدواردو توروخا ميريت (1899–1961) 520
15.4.7 بيير لويجي نيرفي (1891–1979)523
15.4.8 ريكاردو موراندي (1902–1989) 528
15.4.9 كريستيان مين (1927–2018) . 530
15.4.10 فضل الرحمن خان (1929–1982)532
15.4.11 مقارنة الـProgettisti: المصممون البنّاؤون وموادهم 534
15.5 التشكل الإنشائي: الشخصيات الرئيسة . . . 536
15.5.1 السلسلة المعلقة 537
15.5.2 القشريات والأغشية 539
15.5.3 المنشآت المتبادلة 542
15.5.4 التحسين الرياضي: ماكسويل وميشيل وبيكر وبيغيني 545
15.5.5 خاتمة: حين تصادم المعماريون والمهندسون 550
15.6 جيل الحاسوب 552
15.6.1 المعماريون «الاستثنائيون» 553
15.6.2 المهندسون الإنشائيون: فئة الخمسة في المئة 555
15.7 إعادة النظر في فيتروفيوس 564
15.7.1 تفكيك الفن الإنشائي 565
15.7.2 ما الفن؟ 566
15.7.3 العمارة الإنشائية: بيان ليونجي . . 568
15.8 الخلاصة 568

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.1 المقدمة

تعود العلاقة بين العمارة والهندسة إلى قِدم البناء نفسه[1]. وقبل احتراف هذين التخصصين في القرن الثامن عشر، كان شخص واحد—المعلم البنّاء—يتصور المنشآت العظيمة في العصور القديمة والوسطى ويصممها وينفذها. فالدعامات الطائرة للكاتدرائيات القوطية، وقباب الكنائس البيزنطية، وجسور الطرق الرومانية لم تنشأ من تعاون متخصصين، بل من أفراد جمعوا المعرفة العملية بالبناء والحس الجمالي على قدم المساواة.

بدأت هذه الوحدة تتصدع مع ظهور الميكانيكا العقلانية وتأسيس المؤسسات التعليمية المتخصصة: *École des Ponts et Chaussées* (1747)، و*École Polytechnique* (1794)، ونظائرهما في أنحاء أوروبا. وأصبح *ingénieur*، المتدرب في الرياضيات والميكانيكا، متميزاً من *architecte*، المتدرب في التأليف والرسم والتاريخ. وتحولت الدعوة الواحدة إلى مهنتين، لكل منهما قيمها وطرائقها وبُناها المؤسسية.

بخلاف فصول الكتاب الأخرى، التي تتبع بنية يغلب عليها التسلسل الزمني، يعتمد هذا الفصل نهجاً موضوعياً. فالمعالجة الزمنية الخالصة لن تكون مملة فحسب، بل ستعجز أيضاً عن التقاط التفاعلات المعقدة بين مختلف الشخصيات والأفكار التي شكلت علاقة العمارة بالمنشآت. وقد يبدو المحتوى الناتج متنوعاً على غير تجانس—عاكساً، باعترافنا، اهتمامات المؤلف وحماسه الخاصين—غير أن هذا التنظيم الانتقائي يخدم غرضنا على نحو أفضل في فهم كيفية تأثير الابتكار التقني والرؤية الجمالية والتأمل النظري بعضها في بعض عبر القرون والقارات. والواقع أن هذا الفصل، إلى جانب الفصل 29[2]، كانا من أحب الفصول إليّ أثناء الكتابة، إذ أتاحا فرصة التعبير عن اهتمامات وانحيازات شخصية ربما ظلت لولا ذلك مستترة تحت العرض التقني الذي يهيمن على بقية هذا العمل.

إن التوتر بين هذين التخصصين—والسؤال عما إذا كان انفصالهما يمثل تقدماً أم خسارة—هو ما يحرك هذا الفصل. فمن جهة، أتاح ظهور الهندسة الإنشائية تخصصاً علمياً إنجازات غير مسبوقة: جسوراً تمتد مسافات بدت مستحيلة لبنّائي العصور الوسطى، وأبراجاً ترتفع إلى علو يتحدى قواعد فيتروفيوس في التناسب، وقشريات من الرقة بحيث قاربت الحدود النظرية لسلوك المواد. ومن جهة أخرى، أوجد هذا التخصص تقسيماً للعمل كثيراً ما حصر المهندس الإنشائي في دور المستشار التقني، يحل مسائل حددها غيره بدلاً من المشاركة في تشكيل تصور المباني منذ نشأتها.

تمثل الشخصيات التي يبحثها هذا الفصل—من فيتروفيوس عبر أساتذة عصر النهضة إلى كبار المهندسين البنّائين في القرنين التاسع عشر والعشرين—استجابات مختلفة لهذا التوتر الأساسي. فبعضهم، مثل نيرفي وتوروخا، حقق توليفاً بين الإتقان التقني والرؤية الجمالية يضاهي أي إنجاز "فني" خالص. وآخرون، مثل غيري وكالاترافا، تحدوا المهندسين الإنشائيين لتحليل أشكال بلغ تعقيدها الهندسي حداً استلزم تطوير أدوات حاسوبية جديدة لتحقيقها. وسعى آخرون أيضاً، مثل بيلينغتون، إلى صياغة إطار نظري يرسخ الهندسة الإنشائية تخصصاً إبداعياً مستقلاً لا مجرد خادمة للعمارة.

لا يقدم هذا الفصل حلولاً سهلة لهذه التوترات، بل يوفر السياق التاريخي والمفاهيمي اللازم للمهندس الإنشائي المتبصر كي يتعامل معها. ويظل ثالوث فيتروفيوس—المتانة والمنفعة والجمال—ملائماً اليوم كما كان قبل ألفي عام، وإن تغيرت وسائل تحقيق هذه الأهداف إلى حد لا يكاد يُعرف. وفهم هذا التقليد وكبار

[1] نشأ هذا الفصل من حوارات كثيرة مع المعمارية باتريتسيا غالديري، التي ساعد فضولها بشأن الحد الفاصل بين العمارة والهندسة الإنشائية على إيقاظ فضولي أنا أيضاً.

[2] التحديات الكبرى: السلسلة المعلقة، والمنحنى المرن، وميلاد الميكانيكا التحليلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الممارسين الذين جسدوه ضروري لكل من يطمح إلى ممارسة الهندسة الإنشائية لا بوصفها اختصاصاً تقنياً فحسب، بل تخصصاً إبداعياً جديراً بهذا الاسم.

15.1.1 تنظيم الفصل

ينتظم هذا الفصل في سبعة أقسام رئيسة، يعالج كل منها جانباً مميزاً من علاقة العمارة بالمنشآت:

- §15.2: **التقليد الفيتروفي** نبدأ بالنص المؤسس لنظرية العمارة الغربية عبر ثلاثة أقسام فرعية: يبحث §15.2.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو ومؤلَّفه الشامل *De Architectura*، ويقرر الثالوث الشهير *firmitas* و*utilitas* و*venustas*؛ ويتتبع §3.2.4.1 انتقال مبادئ فيتروفيوس عبر مؤلفات عصر النهضة لدى ألبيرتي وبالاديو؛ ويستكشف §15.2.3 التقليد الأنثروبومتري من فيتروفيوس عبر ليوناردو إلى *Modulor* لو كوربوزييه.
- §15.3: **فاصل—المعماريون والمهندسون** بحث نقدي في كيفية افتراق دوري المعماري والمهندس في القرن الثامن عشر، مما أوجد التوترات المهنية المستمرة إلى اليوم، مع عرض رؤى آدا لويز هكستابل وإدواردو توروخا ولو كوربوزييه في العلاقة السليمة بين هذين التخصصين.
- §15.4: **الرواد** يتناول قلب الفصل كبار *progettisti*—المهندسين الذين حققوا الفن الإنشائي بدمج الإتقان التقني والرؤية الجمالية. من الدعامات الطائرة القوطية، مروراً بإنشاءات إيفل الحديدية، وأقواس مايار الخرسانية، وقشريات توروخا، والخرسانة المسلحة بالحديد لنيرفي، والخرسانة مسبقة الإجهاد لموراندي، وجسور مين، وناطحات السحاب الأنبوبية لخان.
- §15.5: **التشكل الإنشائي** تقليد إيجاد الشكل، حيث ينبثق الشكل الإنشائي من متطلبات الحمل والمادة والتنفيذ، لا من تفضيل جمالي اعتباطي—من دراسات السلسلة المعلقة وتجارب الأغشية إلى مناهج التحسين الرياضي.
- §15.5.5: **منافسة القرن التاسع عشر بين المعماريين والمهندسين** بحث تاريخي في التنافس المهني بين المعماريين والمهندسين خلال العصر الصناعي، بما فيه دراسات حالة لمسابقة برج إيفل، وقصر الكريستال، وجسر بروكلين.
- §15.6: **جيل الحاسوب** مواجهة تحول ممارسة الهندسة الإنشائية بفعل الأدوات الحاسوبية، وعرض "الخمسة في المئة" المبدعين الذين يتجاوزون الحساب التقني المجرد—من مركز التجارة العالمي لروبرتسون، مروراً بناطحات السحاب المحسنة طوبولوجياً لبيكر، إلى تصاميم الجسور المتطورة لفيرلوجو—مع بحث أعمال "معماريين استثنائيين" مثل كانديلا وغيري وكالاترافا.
- §15.7: **إعادة النظر في فيتروفيوس** بحث نقدي لمفهوم بيلينغتون عن "الفن الإنشائي"، ودفاع عن المصطلح الأدق، "العمارة الإنشائية"، مع الحجة القائلة إن ثالوث فيتروفيوس يظل الإطار الأوفى لتقييم الإنجاز الإنشائي في عصر الحوسبة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.2 التقليد الفيتروفي

15.2.1 ماركوس فيتروفيوس بوليو: أول مؤثر معماري

لم يكن لأي منظّر معماري تأثير بأهمية تأثير ماركوس فيتروفيوس بوليو (المعروف بفيتروفيوس) وطول بقائه، أو بتعبير أدق تأثير كتابه *De Architectura, libri decem*، المعروف اليوم باسم *الكتب العشرة في العمارة* (Vitruvius **and** Morgan, 1914). ومن المثير للاهتمام، في سياق هذا الكتاب، أنه كثيراً ما يوصف بأنه معماري روماني ومهندس عسكري. وقد كُتب *De Architectura* في عهد أغسطس وأُهدي إلى الإمبراطور، ويتألف من عشرة كتب تتناول تعليم المعماريين، ومواد البناء، وإنشاء المعابد، والمباني العامة والخاصة، والأرضيات والجص، وإمدادات المياه، والفلك وقياس الزمن، والآلات المدنية والعسكرية. ولعله أول دراسة شاملة في موضوعه، إذ لا يضم إنشاء المباني فحسب، بل جوانب كثيرة من الهندسة الميكانيكية أيضاً، منها إدارة التشييد، والهندسة المدنية، وهندسة المواد، والهندسة العسكرية، والتخطيط الحضري.

15.2.1.1 فيتروفيوس في التعليم

على غرار كثير من طلاب الدراسات العليا حين يشكرون لجان رسائلهم، يعرب فيتروفيوس عن امتنانه لوالديه ويؤكد أن الاعتبارات المالية لم تكن دافعه.[3]

> ومن ثم فإني مدين لوالديّ بامتنان عظيم لا حد له لموافقتهما على هذا القانون الأثيني، ولحرصهما على أن أتعلم فناً لا يمكن بلوغ الكمال فيه من دون تحصيل العلم والثقافة الحرة في فروع المعرفة كلها. وبفضل عناية والديّ وتعليم أساتذتي، اكتسبت إذاً نطاقاً واسعاً من المعرفة، وبفضل ما أجده من متعة في الموضوعات الأدبية والفنية وكتابة المؤلفات، حصلت على ثروة فكرية أهم ثمارها هاتان الفكرتان: أن الفائض عديم النفع، وأن الغنى الحقيقي هو ألا يشعر المرء بالحاجة إلى شيء. غير أن بعض الناس قد يرون هذا كله بلا أهمية، ويظنون أن الحكماء هم أصحاب المال الوفير. ولذلك يسعى كثيرون جداً إلى تلك الغاية، فيتلبسون الوقاحة وينالون الشهرة والثروة معاً. أما أنا، يا قيصر، فلم أحرص قط على جني المال من فني، بل سرت على مبدأ أن قلة ذات اليد مع حسن السمعة خير من الغنى مع سوء الصيت.
>
> Vitruvius, 1960

تبنى فيتروفيوس فكرة أن المعماري ينبغي أن يكون واسع التعليم وألا يتخصص في مرحلة مبكرة—وهو شعور يتردد صداه في المخاوف الحديثة من ضيق التدريب التقني المفرط:

> 1. ينبغي أن يتسلح المعماري بمعرفة فروع كثيرة من الدراسة وأنواع شتى من العلم، لأن حكمه هو المحك الذي تُختبر به جميع أعمال الفنون الأخرى. وهذه المعرفة وليدة الممارسة والنظرية. ... 4. ... ينبغي للمعماري أن يكون مثقفاً كي يترك في مؤلفاته ذكراً أبقى. وثانياً، يجب أن يعرف الرسم حتى يستطيع إعداد رسوم تخطيطية تبين بسهولة مظهر العمل الذي يقترحه. كما أن الهندسة نافعة جداً في العمارة، وتعلمنا على وجه الخصوص استعمال المسطرة والفرجار، اللذين نكتسب بهما خاصة سهولة إعداد مخططات المباني في مواقعها، والتطبيق الصحيح للزاوية والميزان والشاقول. 5. تلزم معرفة واسعة بالتاريخ ... 6. أما الفلسفة، فترفع همة المعماري ولا تجعله معتداً بنفسه، بل تصيره مهذباً عادلاً أميناً منزهاً عن الطمع. ... 8. وينبغي للمعماري أيضاً أن يفهم الموسيقى كي يعرف النظرية القانونية والرياضية. ... 9. وكذلك في المسارح توجد الأوعية البرونزية. 10. وينبغي للمعماري أيضاً أن يعرف الطب بسبب مسائل المناخ. وأرى أنه لا يحق للرجال أن يعلنوا أنفسهم معماريين على عجل، من دون

[3] وبلغة عصرنا، كان يطلب المكانة العلمية لا الشهرة.

> أن يصعدوا منذ الصبا درجات هذه الدراسات، وأن يبلغوا، وقد غذتهم معرفة فنون وعلوم كثيرة، أعالي الأرض المقدسة للعمارة.
>
> Vitruvius, 1960

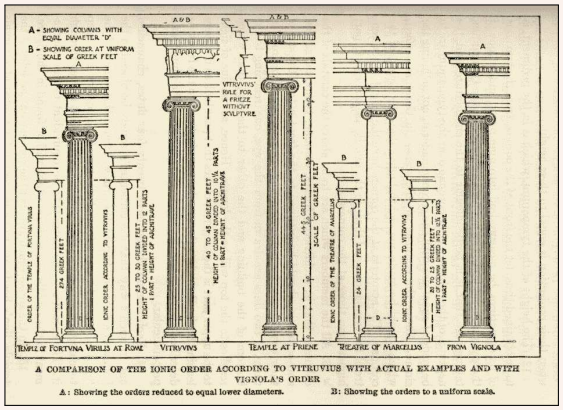
ومثل كثير منا نحن العلماء، كان فيتروفيوس قلقاً أيضاً من مهارته في الكتابة، طالباً من قيصر الصفح "إذا عُرض شيء مع تقصير في مراعاة قواعد النحو."

15.2.1.2 فيتروفيوس المهندس

ابتكر فيتروفيوس، بوصفه مهندساً عسكرياً، قواعد بسيطة للتصميم الإنشائي. وكان كتابه *De Architectura* (Vitruvius, 1960) بالفعل أول مجموعة مدونة مسجلة من القواعد الخاصة بالمنشآت، تتألف من مباحث في طيف واسع من الموضوعات المتعلقة بالعمارة والهندسة والصرف الصحي والهيدروليكا العملية والأواني الصوتية وما شابه. ويبدو أن قدراً كبيراً من مادته أُخذ من مؤلفات أقدم مفقودة لمعماريين يونانيين. وظلت هذه الكتابات تُدرس منذ عصر النهضة بوصفها كنزاً لفن العمارة الرومانية الكلاسيكية، الشكل 15.1b. ويمكن، لجميع الأغراض العملية، النظر إليها دليلاً لمشروعات البناء.



(a) فيتروفيوس يقدم *De Architectura* إلى القيصر أغسطس



(b) قوانين فيتروفيوس في النسب، (Vitruvius, 1960)

شكل 15.1: فيتروفيوس

المحتوى العملي لكتاب *De Architectura* واسع: يناقش فيتروفيوس خصائص مواد البناء (الجير والرمل والحجر والخشب)، وتصميم الأساسات، وبناء الجدران، والنسب المناسبة لمختلف أنواع المباني. ويصف الطرز الكلاسيكية (الدوري والأيوني والكورنثي) وتطبيقاتها الصحيحة، ويربط النسب المعمارية بجسم الإنسان—أي إنسان فيتروفيوس الشهير الذي رسمه ليوناردو لاحقاً، والذي نبحثه بمزيد من التفصيل في §15.2.3—ويقدم وصفاً مفصلاً لآلات البناء، بما فيها الرافعات والمصاعد وأجهزة رفع المياه.

أبرز ما في هذا الكتاب قواعد التناسب، ومنها القاعدة الآتية:

> إذا أريد للعرض أن يزيد على أربعين قدماً، فلتوضع أعمدة في الداخل قبالة الأعمدة الواقعة بين الجدارين البارزين. وينبغي أن يكون لها ارتفاع الأعمدة التي أمامها نفسه، لكن تُخفض سماكتها بنسبة مناسبة: فإذا كانت سماكة الأعمدة الأمامية ثُمن ارتفاعها، فلتكن سماكة هذه عُشره؛ وإذا كانت الأولى تُسع الارتفاع أو عُشره، فلتُخفض

> الأخرى بالنسبة نفسها. فلن يُلحظ هذا التخفيض، لأن الهواء لا يتحرك حولها بحرية. ومع ذلك، إذا بدت أنحف مما ينبغي، فيمكن أن يكون لها ثمانية وعشرون أو اثنان وثلاثون تخديداً حين يكون للأعمدة الخارجية عشرون أو أربعة وعشرون. وهكذا يعوض العدد الإضافي من التخديدات، بنسبة مناسبة، النقص في جسم الساق ويمنع ظهوره، فتبدو الأعمدة متساوية السماكة بطريقة مختلفة.
>
> Vitruvius, 1960, **page** 4.4.2

كانت قواعد الخبرة هذه صالحة لأن التجربة أثبتت أن العمود المصمم بهذه الطريقة مرضٍ—أي يمكن أن يكون جزءاً من مبنى من دون انبعاج أو سحق. وفوق ذلك، بينت التجربة إمكان بناء العمود بأي مقياس، خلافاً للحدس "الحديث" (Heyman, 2003). وقد نجحت هذه القواعد قروناً لأن المواد المستخدمة في البناء القديم—الحجر والخشب إلى حد ما—تتعرض لإجهادات منخفضة جداً في المنشآت المكتملة. وكان من الممكن تشييد جسور حجرية ببحور كبيرة جداً، وبناء كاتدرائيات إلى ارتفاعات مذهلة؛ وكل ما يلزم هو صحة الشكل (حلقة القوس أو الدعامة الطائرة)، وهذا مطلب هندسي يُستوفى باتباع قواعد التناسب. وبالطبع، لم يكن أحد يعرف مقدار أمان المنشأ، ولذلك لا بد أن العملية قامت على التجربة والخطأ (والانهيارات).

وهكذا ظل نهج فيتروفيوس—قوانين النسب—نهج التصميم السائد قروناً لأن *الشكل* كان الهدف الأهم. فلم تكن المقاومة ذات شأن (فالحجارة قوية جداً)، وربما لم يخطر للبنّائين قط أن الصلابة مسألة تستحق النظر، أما الاستقرار فعولج هندسياً (مثلاً كيفية تشكيل القوس لتجنب إجهادات الشد التي تولد الشقوق، والتي تؤدي بدورها إلى الانهيار).

حدود التناسب: تصميم الجسور ظلت القواعد التناسبية ملائمة للمباني، لكن تصميم الجسور كشف حدودها قبل تحدي غاليليو النظري. وكما بيّن Huerta, 2018، فإن مسألة تصميم الجسر القوسي غير تناسبية بطبيعتها: فعند حمل مروري معين تكون الجسور الأصغر "أضعف"—أي أشد حساسية لتأثير الأحمال العابرة—من الجسور الأكبر. ومع ذلك، ظلت القواعد المعروفة حتى القرن الثامن عشر تناسبية. فقد نص كتاب ألبيرتي (Alberti, 1485) *De Re Aedificatoria* على أن يكون عرض الركيزة ثلث البحر وسماكة القوس واحداً من خمسة عشر منه—وهي قواعد مستمدة من السوابق الرومانية وتناقلتها مؤلفات العمارة ثلاثة قرون.

أدرك المهندس الفرنسي هوبير غوتييه (1660–1737)، في كتابه *Traité des ponts* (1716) (Gautier, 1765)—وهو أول مؤلَّف مكرس بالكامل للجسور—أن القواعد التناسبية تفشل مع الأقواس الصغيرة. فقد لاحظ أن قوساً بطول *toise* واحد (6 أقدام)، مصمماً بقاعدة ألبيرتي التي تجعل السماكة البحر/15، ستكون سماكته أقل من 6 بوصات، وهي غير كافية بوضوح مقارنة بما تتطلبه التجربة، أي 1.5 قدم. وفسر غوتييه هذا التباين:

> Il est certain qu'un grand Pont qui porte une grande voiture, est bien moins chargé qu'un Ponceau qui porte la meme voiture

---

> إن الجسر الكبير الذي يحمل عربة ثقيلة يكون أقل تحميلاً بكثير من جسر صغير يحمل العربة نفسها.
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

تحتاج عبارة غوتييه إلى توضيح: فهو يقصد أن *نسبة* الحمل المروري إلى وزن الجسر الذاتي أصغر بكثير في الجسر الكبير منها في الصغير. فالجسر الكبير، لكونه أثقل، يهيمن عليه وزنه الذاتي؛ ولا تمثل العربة العابرة إلا جزءاً ضئيلاً من الحمل الكلي. أما الجسر الصغير، لكونه أخف، فتكون العربة نفسها اضطراباً أكبر نسبياً عليه.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهذا ما يجعل القواعد التناسبية ($t/s = \text{const.}$) تفشل عند البحور الصغيرة: فالمقدار المطلق للحمل الحي لا يتدرج مع المنشأ، وإن كان الحمل الميت يتدرج معه. وكان هذا أول إدراك صريح بأن تصميم الجسر القوسي غير *تناسبي*.

جاء الحل الحاسم على يد جان رودولف بيرونيه (1708–1794)، مؤسس مدرسة الجسور والطرق وأول مدير لها، الذي ترك مذكرات منشورة وأخرى غير منشورة. وأبرزها مذكرته غير المنشورة *Mémoire sur l'epaisseur que doivent avoir les voussoirs à la clef, dans les differentes voûtes des Ponts* (مذكرة في السماكة الواجبة لصنجات حجر المفتاح في مختلف قبوات الجسور).[4] وفي هذه المذكرة غير المنشورة من سنة 1748، جمع بيرونيه بيانات أكثر من مئتي جسر قائم واشتق قاعدة غير تناسبية: في الأقواس نصف الدائرية ينبغي أن تكون سماكة حجر المفتاح t (بالقدم) مساوية لـ $t = s/24 + 1 - s/144$، حيث s هو البحر. وخفضت هذه القاعدة تقريباً إلى النصف السماكة التي وصفها ألبيرتي وغوتييه للجسور الكبيرة، مع توفير سماكة كافية للصغيرة. وبرر بيرونيه منهجه تجريبياً:

> في مسائل البناء، لا يمكن للتأمل وحده أن يتغلب على الخبرة.
>
> Perronet, quoted in Huerta, 2018 PDF "*Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet*"

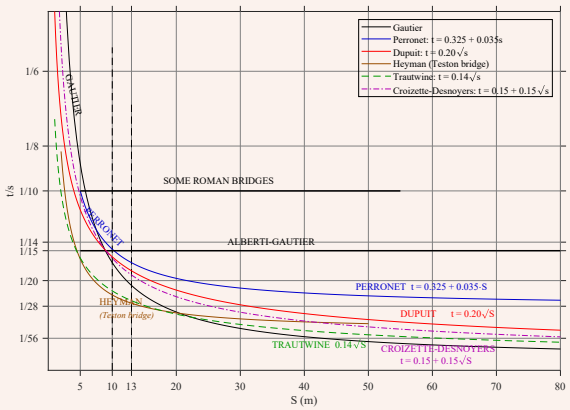
ظلت قاعدته مستخدمة أكثر من قرن، كما أن المنهج التجريبي—أي مقارنة التصاميم المقترحة بقواعد بيانات السوابق الناجحة—يستبق الهندسة الحديثة القائمة على الأداء.

> *للتفاصيل التحليلية، انظر* §62.3.2.3

يوضح الشكل 15.2 تطور القواعد التجريبية لتصميم الجسور القوسية من العصور القديمة حتى القرن التاسع عشر، إذ يرسم نسبة سماكة القوس t إلى البحر s بدلالة البحر. ويمثل الشريط الأفقي العلوي النسب النموذجية للجسور الرومانية ($t/s \approx 1/10$ إلى $1/12$)، في حين ظلت قاعدة ألبيرتي وغوتييه $t/s = 1/15$—الموروثة من المصادر الكلاسيكية والمدونة في مؤلفات عصر النهضة—القاعدة التناسبية القياسية ثلاثة قرون. وكان إسهام غوتييه سنة 1717 إدراكه أن هذه القاعدة التناسبية تفشل مع البحور الصغيرة، حيث تزداد الأهمية النسبية للأحمال المرورية؛ وقد مثل منحناه الحاد للأقواس الصغيرة ($s < 40$ قدماً) أول نهج غير تناسبي. أما قاعدة بيرونيه سنة 1748، $t = 0.325 + 0.035s$ (بالمتر)، فمثلت تقدماً حاسماً: فبدراسة أكثر من مئتي جسر قائم، أثبت إمكان بناء الأقواس الكبيرة بأنحف كثيراً مما وصف ألبيرتي—إذ خفض السماكة المطلوبة للبحور الأكبر من 30 متراً إلى النصف تقريباً. وبعد سنة 1850، أدرك المهندسون أن القواعد التي تتضمن الجذر التربيعي للبحر تمثل العلاقة غير الخطية بين الحجم والسماكة المطلوبة تمثيلاً أفضل، فظهرت صيغ مثل صيغة دوبوي $t = 0.2\sqrt{s}$ وصيغة تراوتواين $t = 0.14\sqrt{s}$. ويمثل الخط المتقطع عند $t/s \approx 1/56$ الحد العملي الأدنى الذي عينه Heyman, 1982 من تحليله لجسر تيستون العائد إلى العصور الوسطى—وهو برهان لافت على المدى الذي استطاع التصميم التجريبي بلوغه في نحافة المنشآت قبل ظهور التحليل الحديث. ويعكس الهبوط التدريجي لهذه المنحنيات تنامي ثقة المهندسين بخفض المواد استناداً إلى الخبرة المتراكمة، مستبقاً الانتقال من قواعد الخبرة الهندسية إلى التحليل القائم على الميكانيكا الذي حل محلها في نهاية المطاف.

[4] لم أتمكن من العثور على نسخة بصيغة PDF من هذه الوثيقة؛ والمخطوطة الأصلية (Ms. 2202) محفوظة في *Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées* في باريس. ويمكن للقراء المهتمين بهندسة الجسور عند بيرونيه الرجوع إلى عمله المنشور لاحقاً (Perronet, 1782–1788 PDF) أو (Perronet, 1782 PDF).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.2: تطور القواعد التجريبية لتصميم الجسور القوسية (نقلاً عن (Huerta, 2018)).

وهكذا استبق تطور قواعد تصميم الجسور التحول الأوسع من التفكير الهندسي إلى التفكير الميكانيكي. فبينما كفى تناسب فيتروفيوس للمباني التي يعتمد استقرارها على الهندسة وحدها، تطلبت الجسور الانتباه إلى المقدار المطلق للقوى—وهو تحول مفاهيمي سيصوغه غاليليو نظرياً، وسيغير الهندسة الإنشائية كلها في نهاية المطاف.

تحدي غاليليو استمر نظام التناسب المريح هذا قرابة ألفي عام، حتى استلزمت المواد الجديدة والطموحات الجديدة نهجاً مختلفاً. وكان Galilei, 1632 هو من تحدى الفكرتين التأسيسيتين: فأولاً، أدخل مفهوم الإجهاد، §7.2.2 (في كمرة، الشكل 15.3a)، بوصفه اعتباراً تصميمياً مستقلاً عن الهندسة؛ وثانياً، أكد وجود حد لقابلية تغيير المقياس—أي إنه لا يمكن ببساطة تكبير المنشأ إلى ما لا نهاية مع الإبقاء على نسبه[5]، الشكل 15.3b. ومع غاليليو، بدأ عصر التصميم الهندسي الخالص يفسح المجال لعصر الميكانيكا. غير أن ظهور الآثار الكاملة لهذا التحول استغرق قروناً، وظل التناسب الفيتروفي دليلاً عملياً صالحاً للمباني المشيدة بالمواد التقليدية حتى زمن متأخر من العصر الحديث.

> رسمت مرة شكل عظم، فمددته إلى ثلاثة أمثال طوله، ثم زدت سماكته بنسبة تمكنه من أداء وظيفته في الحيوان الكبير كما يخدم العظم الأصغر الحيوان الأصغر: وهذه هي الصور؛ وترون كم يصبح شكل العظم المكبر غير متناسب. ومن هذا يتضح أنه لو أريد الإبقاء في عملاق هائل على نسب الأطراف الموجودة في الإنسان العادي، للزم إما العثور على مادة أصلب وأشد مقاومة لتكوين عظامه، وإما السماح بأن تكون متانته أضعف نسبياً من متانة الرجال متوسطي القامة؛ وإلا، فإذا نما إلى ارتفاع غير معقول، بدا مسحوقاً تحت وزنه وسقط.
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

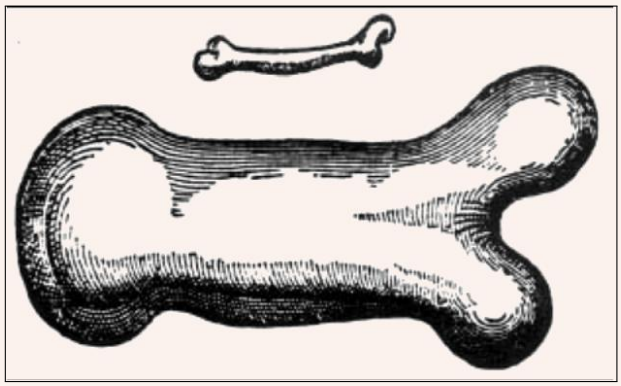
15.2.1.3 فيتروفيوس المعماري: الثالوث الباقي

مع أن *De Architectura* تضمن معلومات نافعة كثيرة عن المواد والتقنيات القديمة، فإن ظهور الميكانيكا والتحليل الإنشائي الحديث تجاوز منذ زمن بعيد تلك القواعد العملية. والإرث الباقي لفيتروفيوس هو تحليله الأكثر تجريداً للعمارة، حيث عرّف الكمال المعماري بثلاث صفات لا تنفصل—أي *ثالوث* فيتروفيوس الشهير: قدم فيتروفيوس ثالوث العمارة الدائم: *firmitas* (السلامة الإنشائية)، و*utilitas* (الكفاية الوظيفية)،

[5] تناول المؤلف هذه المسألة في (Saouma and Fava, 2006).



(a) الإجهادات مهمة



(b) حدود تغيير المقياس

شكل 15.3: غاليليو يتحدى فيتروفيوس (Galilei, 1632)

وvenustas (الجاذبية الجمالية)—وهو إطار يستبق النقاشات الحديثة في التكامل الإنشائي وقابلية الخدمة والتعبير المعماري. ويصر فيتروفيوس على أن البناء السليم يجب أن يكون متيناً ووظيفياً وجميلاً؛ وهذه الصفات ليست مستقلة بل يعزز بعضها بعضاً. ويبين مؤلَّفه الوحدة الكلية بين التفكير الإنشائي والجماليات وطرائق البناء التي ميزت الهندسة الرومانية في أفضل صورها (Vitruvius, 1960, Book III, Chap III).

Firmitas المتانة[6] (الكتابان الثاني والثالث)

Utilitas المنفعة[7] (الكتابان الرابع والخامس).

Venustas الجمال (الكتب السادس–التاسع)؛ وينقسم بدوره إلى ستة مفاهيم أساسية متصلة بالأذواق الاجتماعية (Vitruvius, 1960, Book I Chap. II):

مبادئ التناسب النظام (*Ordinatio*)، والترتيب (*dispositio*)، والاقتصاد (*distributio*)

الصفات الجمالية تناسق الإيقاع (*eurythmia*)، والتماثل (*symmetria*)، والملاءمة (*decor*)

اشتق فيتروفيوس من هذه التعريفات قواعد محددة تحكم التخطيط والكمال.

ومن المثير للاهتمام أن هذه المبادئ الثلاثة مجتمعة تشغل أقل من عشرة أسطر في *De Architectura*، ولا يبرزها أي تمهيد للكتاب—فكأنها خاطرة لاحقة:

> يجب أن تُبنى هذه كلها مع المراعاة الواجبة لـ*المتانة والملاءمة والجمال*. وتُضمن المتانة عندما تُمد الأساسات إلى الأرض الصلبة وتُختار المواد بحكمة وسخاء؛ وتُضمن الملاءمة عندما يكون ترتيب الحجرات خالياً من العيوب ولا يعوق الاستعمال، وعندما يخصص لكل نوع من المباني التعرض المناسب والملائم؛ ويُضمن الجمال عندما يكون مظهر العمل ساراً وحسن الذوق، وعندما تكون أجزاؤه متناسبة وفق المبادئ الصحيحة للتماثل.
>
> Vitruvius, 1960) Book I Chapter III)

ولا تجتمع المصطلحات الثلاثة ثانية إلا مرة واحدة—"يجب الآن عرض النسق حسن الأعمدة، وهو أكثر

[6] بمصطلحات العصر: استيفاء متطلبات المقاومة والصلابة والاستقرار.
[7] وهو ما لم يثن نيرون لاحقاً عن تشييد مبان باذخة عديمة المنفعة الحقيقية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الأنواع استحساناً، ويرتب وفق مبادئ موضوعة بقصد الملاءمة والجمال والمتانة"—في الكتاب الثالث، الفصل الثالث، عند تناول نسب المسافات بين الأعمدة ونسب الأعمدة نفسها.

لم يكن لهذه القواعد أثر يذكر في عمارة زمن فيتروفيوس نفسه، لكنها اعتُمدت مذهباً صحيحاً في عصر النهضة. ولا يزال ثالوث فيتروفيوس محكاً في تعليم العمارة والهندسة، يذكر الممارسين بأن المنشآت يجب أن تستوفي معايير متعددة في آن واحد. وسيظل هذا الثالوث—المتانة والمنفعة والجمال—يتردد في جميع النظريات المعمارية اللاحقة، من ألبيرتي إلى بالاديو. وكما سنرى في §15.7.1، فإن مفهوم بيلينغتون في القرن العشرين عن "الفن الإنشائي"، بأركانه الثلاثة: الكفاءة والاقتصاد والأناقة، ليس في جوهره إلا إعادة صياغة لما عبر عنه فيتروفيوس قبل ألفي عام.

15.2.1.4 فيتروفيوس في الرياضيين والعلماء

يتناول جانب أقل شهرة لكنه ممتع من كتابات فيتروفيوس ظلم مكافأة الرياضيين الأولمبيين على *أجسامهم* *التي يقويها التدريب*، مع إهمال العلماء رغم *المعارف التي أودعوها كتبهم*. ولا شك أن هذه الشكوى تجد صداها في مجتمعنا الحديث، حيث يُكافأ المدربون الرياضيون برواتب غير متناسبة مقارنة برواتب العلماء من عامة البشر:

> قرر أسلاف اليونان تكريم الرياضيين المشهورين الفائزين في الألعاب الأولمبية والبيثية والإسثمية والنيمية تكريماً عظيماً، فلا يُستقبلون بالتصفيق فحسب وهم واقفون بسعفة النصر وإكليله في المحفل نفسه، بل يعودون أيضاً ظافرين إلى دويلاتهم، فيدخلون مدنهم وبيوت آبائهم في عربات تجرها أربعة خيول، ويتمتعون مدى الحياة بدخل ثابت على نفقة العامة. وكلما فكرت في ذلك، تعجبت من أن الأوسمة نفسها، بل أعظم منها، لا تُمنح للمؤلفين الذين تمتد خدماتهم غير المحدودة إلى كل زمان وكل أمة. وكان إرساء هذه الممارسة أجدر، لأن التدريب لا يقوي عند الرياضيين إلا أجسامهم، أما عند المؤلفين فيقوي العقل، لا عقولهم وحدهم بل عقل الإنسان عامة، بما يقررونه في كتبهم من معارف تُكتسب وتشحذ الذهن.
>
> (Vitruvius, 1960)

15.2.2 إعادة اكتشاف فيتروفيوس في عصر النهضة

بعد العثور مجدداً على *De Architectura* في دير سانت غالن سنة 1414، أصبح الكتاب الأساس النظري لعمارة عصر النهضة. ويُعتقد على نطاق واسع أن بوجيو براتشوليني هو من "أعاد اكتشاف" *De Architectura*، إذ وجده في مكتبة دير سانت غال في سويسرا[8]—لكن بصرف النظر عن مدى جدة هذا الاكتشاف فعلاً، فقد كان حافزاً لتجدد الاهتمام بفيتروفيوس. وكان التوقيت مناسباً، إذ وافق السنوات الأولى لعصر النهضة.

كان لفيتروفيوس في عصر النهضة تأثير كبير في عدد من المعماريين، ولا سيما ألبيرتي وبالاديو، وكذلك سيرليو وفينيولا؛ فقد استندوا جميعاً إليه مع تكييف مبادئه للممارسة المعاصرة. ويلخص الجدول 15.1 محتويات أشهر ثلاثة مؤلفات معمارية—مؤلفات فيتروفيوس وألبيرتي وبالاديو—إلى جانب الفضائل المعمارية التي دعا إليها كل مؤلف. ولا تزال هذه الأعمال وثيقة الصلة اليوم كما كانت يوم كُتبت قبل نصف ألف عام أو ألفي عام.

[8] طعن Krinsky, 1967 في هذا الزعم، إذ بيّن وجود ثمان وسبعين نسخة على الأقل في مكتبات أوروبية مختلفة آنذاك.

جدول 15.1: محتويات مؤلفات فيتروفيوس وألبيرتي وبالاديو

الكتاب	فيتروفيوس	ألبيرتي	بالاديو
الأول	تخطيط المدن، والعمارة أو الهندسة المدنية عامة	التخطيطات	مواد البناء وتقنياته
الثاني	مواد البناء	المواد	تصميم المنازل الحضرية الخاصة والفيلات الريفية
الثالث	المعابد والطرز المعمارية	التشييد	تخطيط المدن
الرابع	تتمة الكتاب الثالث	الأشغال العامة	تصاميم معابد رومانية معينة من العصور القديمة وتصميم واحد فقط لكنيسة معاصرة
[2pt] **الخامس**	المباني المدنية	أعمال الأفراد	
السادس	المباني السكنية	الزخرفة	
السابع	الرصف وأعمال الجص الزخرفية	زخرفة المباني المقدسة	
الثامن	إمدادات المياه والقنوات المائية	زخرفة المباني العامة العلمانية	
التاسع	العلوم المؤثرة في العمارة: الهندسة والقياس والفلك والمزاول الشمسية	زخرفة المباني الخاصة	
العاشر	استخدام الآلات وبناؤها—آلات الحصار الرومانية، وطواحين المياه، وآلات الصرف، والرفع، وعلم الهواء المضغوط	ترميم المباني	

15.2.2.1 ليون باتيستا ألبيرتي (1404–1472)

ألّف ليون باتيستا ألبيرتي[9] (1404–1472) (Alberti, 1485) أول مؤلَّف معماري شامل في عصر النهضة، محولاً العمارة من حرفة قروسطية إلى تخصص فكري إنساني. وكان كتابه *De Re Aedificato-ria* (في فن البناء) (Alberti, 1988)، الذي اكتمل نحو سنة 1452 ونُشر بعد وفاته سنة 1485، أول عمل يضاهي فيتروفيوس نطاقاً وطموحاً. وقد كُتب باللاتينية على منوال فيتروفيوس—وإن كان أكثر منهجية وأصالة بكثير—ويتألف من عشرة كتب تتناول اختيار الموقع، ومواد البناء، وطرائق التشييد، والمباني المقدسة والعلمانية، والزخرفة، والترميم. وقدم ألبيرتي المخطوطة إلى البابا نيقولا الخامس؛[10] وتداولها الناس مخطوطة قبل صدور طبعتها الأولى سنة 1485. ومن اللافت أن أول طبعة مطبوعة لفيتروفيوس أعقبتها سنة 1486، ثم أخذ العملان يؤثر كل منهما في قراء عصر النهضة إلى جانب الآخر.

الأساس النظري و*Concinnitas* بخلاف فيتروفيوس الذي كتب بوصفه معمارياً ممارساً، تناول ألبيرتي العمارة بصفته منظّراً ومفكراً درس المباني الكلاسيكية مباشرة وأخضع السلطة القديمة للحكم النقدي. وطور نظرية في الجمال تقوم على *concinnitas*—أي التناغم في توافق الأجزاء مع الكل—وتستند إلى النسب

[9] يمكن العثور على مزيد من تفاصيل حياة ألبيرتي المبكرة في §6.4.1.

[10] بينما أهدى فيتروفيوس كتبه العشرة إلى الإمبراطور القيصر أغسطس، أهدى ألبيرتي كتابه إلى البابا نيقولا الخامس.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الرياضية ومبادئ التناسب العامة[11] والانسجام. ويضمن مبدأ التكامل المتناغم هذا استحالة إضافة شيء أو حذفه أو تغييره من دون إنقاص قيمة الكل، وينطبق على التأليف الجمالي والتماسك الإنشائي معاً: فيجب أن يكون المبنى المصمم جيداً جميلاً ووظيفياً وسليماً، وأن تنشأ هذه الصفات من العلاقات الهندسية الأساسية نفسها.

أصر ألبيرتي على أن دور المعماري الصحيح هو التصميم بالرسوم والنماذج، وترك التنفيذ للبنّائين—وهو تمييز رفع الممارسة المعمارية إلى مرتبة الفنون الحرة. وقد أسس تأكيده أولوية *lineamenta* (الإطار الهندسي المجرد للتصميم) على التشييد المادي للفصل المفاهيمي بين التصميم والبناء، وهو فصل يميز الممارسة المهنية الحديثة. وأقام المؤلَّف العمارة فناً حراً جديراً بالعناية العلمية، ففصل التصميم الفكري عن التنفيذ اليدوي ورفع المعماري من حرفي إلى مهني متعلم.

الفهم الإنشائي وخصائص المواد يعالج *De Re Aedificatoria* المسائل الإنشائية مباشرة من خلال فهم متطور لكيفية مقاومة المباني للأحمال ولسبب كون بعض الأشكال أكثر استقراراً من غيرها. ويناقش ألبيرتي خصائص مواد البناء—الحجر والطوب والخشب والجير—واستعمالاتها المناسبة. كما يحلل بناء الجدران وتصميم الأساسات وسلوك الأقواس، مستنداً إلى المصادر القديمة ومشاهداته الخاصة للآثار الرومانية. وتميز معالجته للقبوات بين الأنواع الإنشائية المختلفة وتطبيقاتها الملائمة. ويؤكد ألبيرتي في جميع المواضع أن الكفاية الإنشائية والصفة الجمالية لا تنفصلان: فالمبنى الذي يفشل إنشائياً لا يمكن أن يكون جميلاً، والمبنى الذي يخل بتناغم النسب لا يمكن أن يكون سليماً حقاً.

الزخرفة والضرورة ربما كان ألبيرتي سلفاً لسوليفان في تبنيه ما يعادل نهجاً حد أدنى—أي فكرة أن الزخرفة ينبغي أن تنشأ من الضرورة، لا أن تُطبق اعتباطاً:

> الزينة الأولى والرئيسة لأي شيء أن يخلو من كل ما لا يليق. ولذلك يكون التقسيم عادلاً وسليماً إذا لم يكن مشوشاً ولا منقطعاً، ولا مفرطاً في التشتت ولا مؤلفاً من أجزاء غير مناسبة، وإذا لم تكن أعضاؤه أكثر أو أقل مما ينبغي، ولا أصغر أو أكبر، ولا متنافرة أو قبيحة، ولا منفصلة عن بقية الجسم كأنها مقسومة عنه؛ بل يكون كل شيء مرتَّباً وفق الطبيعة والملاءمة والاستعمالات المقصودة للمنشأ، وبنظام وعدد وحجم وموضع وشكل تجعلنا نقتنع بأنه لا شيء في البناء كله إلا وقد صُمم لمنفعة أو ملاءمة، وبأجمل تراص للأجزاء كلها.... ومن ثم ينبغي أن يبدو تأليف الأعضاء كله مصنوعاً وموجهاً بالضرورة والملاءمة وحدهما؛ فلا تسرك كثرة هذه الأجزاء أو تلك في المبنى بقدر ما يسرك ترتيبها وتوزيعها في موضع ونظام واتصال كهذه.
>
> Alberti, 1485

الأثر الباقي كان تأثير *De Re Aedificatoria* عميقاً ودائماً. فقد أرسى الأساس النظري لعمارة عصر النهضة، وأثر في برامانتي ورافائيل وميكيلانجيلو. وبعد ترجمته إلى الإيطالية سنة 1550، شكل التعليم المعماري قروناً. وأقام إصرار ألبيرتي على أن تستند العمارة إلى مبادئ عقلانية—رياضية وجمالية وإنشائية—جسراً حاسماً بين العصور الكلاسيكية القديمة وظهور علم الهندسة الحديث. وبهذا المعنى، كان *De Re Aedifica-toria* أول مؤلَّف "حديث" في العمارة، ويُعد جسراً بين العمارة الرومانية وعمارة عصر النهضة.

15.2.2.2 أندريا بالاديو (1508–1580)

يمكن العثور على تفاصيل حياته المبكرة في §6.4.3.

[11] يوجد مفهوم مواز في الجماليات اليابانية: *shibusa*، أي صفة الأناقة المتحفظة التي لا يبقى فيها شيء زائد. وينطبق المبدأ—أن الكمال يتحقق حين لا يعود ممكناً حذف شيء—بالقدر نفسه على سعي المهندس الإنشائي إلى الكفاءة وسعي المعماري إلى الجمال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I Quattro Libri dell'Architettura تتناول الكتب الأربعة، على الترتيب: المبادئ الأساسية والمواد والتقنيات (الكتاب الأول)؛ والعمارة السكنية، بما فيها فيلات بالاديو وقصوره (الكتاب الثاني)؛ والمباني العامة والشوارع والتصميم الحضري (الكتاب الثالث)؛ والمعابد الرومانية القديمة (الكتاب الرابع). وينتقل هذا التنظيم من المبادئ إلى الممارسة ثم إلى السوابق، موفراً أساساً نظرياً ونماذج عملية في آن. وبخلاف المؤلفات المعمارية الأقدم، جمع بالاديو المبادئ النظرية إلى تفاصيل تنفيذية دقيقة ورسوم مقيسة—مخططات وواجهات ومقاطع ذات أبعاد—فوضع معياراً للتوثيق المعماري لا يزال أساسياً في الممارسة المهنية. وبذلك أرسى بالاديو العمارة تخصصاً عقلانياً تحكمه النسب والهندسة والمنطق الإنشائي.

منظومات التناسب والوضوح الإنشائي تحتل منظومات التناسب عند بالاديو مركز طريقته. فقد اشتق أبعاد الغرف من نسب توافقية تماثل التآلفات الموسيقية، منشئاً تتابعات فراغية تتدرج عبر نسب مترابطة. وقد تتبع غرف الفيلا نسب 1:1 و$1:\sqrt{2}$ و2:3 و3:4، فتقيم علاقات رياضية تُدرك في صورة انسجام جمالي. ولا تحكم هذه النسب أبعاد المسقط فحسب، بل ارتفاعات الأسقف وأحجام النوافذ وتأليف الواجهات أيضاً، فتوجد مباني توحدها علاقات هندسية على كل مقياس.

وإلى جانب الجماليات، أولى بالاديو الوضوح الإنشائي عناية منهجية. وتستخدم فيلاته تراتبيات إنشائية واضحة: تحدد الجدران الحاملة الفراغات الرئيسة، وتبين الأعمدة والأسكفات مسارات الحركة، وتمتد منشآت الأسقف بين المساند في أنماط عقلانية مقروءة. وتبين تصاميم جسوره—ومنها المشروع الشهير غير المنفذ لجسر ريالتو—فهماً متقدماً لكيفية سريان القوى عبر المنشآت الخشبية والحجرية. وتعالج المواصفات الإنشائية المفصلة في الكتاب الأول الأساسات وبناء الجدران وخصائص مواد البناء بخبرة عملية.

مبادئ فيتروفيوس والنظرية المعمارية أكد بالاديو أنه درس، في إعداد كتابه، أعمال من سبقوه ممن كتبوا في العمارة، وشدد أكثر من مرة على أهمية ألبيرتي. لكنه وضع فيتروفيوس فوق جميع الكتب الحديثة، واختاره *per maestro, e guida* (معلماً ودليلاً). وربما كان أعرف بفيتروفيوس من أي معماري معاصر آخر (Wittkower, 1944). وفي *Quattro Libri* يعترف بالاديو بدين عصر النهضة لفيتروفيوس، ويقترح تنويعه الخاص للثالوث: المنفعة والملاءمة والدوام والجمال (Palladio, 1570). وكتب بالاديو في العلاقة بين هذه الصفات:

> ينشأ الجمال من الشكل الرشيق وعلاقة الكل بالأجزاء، وعلاقة الأجزاء بعضها ببعض وبالكل، لأن المباني يجب أن تبدو كأجسام مكتملة ومحددة جيداً، يوافق فيها عضو عضواً آخر وتكون جميع الأعضاء ضرورية لما هو مطلوب.
>
> Palladio, 1570 I quattro libri dell'architettura, **pages** I, I, 7

التأثير العالمي والإرث المعماري امتد تأثير بالاديو بعيداً وراء إيطاليا. فقد نقل إنيغو جونز البالادية إلى إنجلترا في أوائل القرن السابع عشر؛ وأحياها اللورد برلنغتون في القرن الثامن عشر؛ ثم عبرت الأطلسي لتشكل العمارة الأمريكية من فرجينيا جيفرسون إلى جنوب ما قبل الحرب الأهلية. وظلت قصوره وفيلاته تُحاكى أربعمئة عام؛ وكان أول معماري ينظم مسقط المنزل منهجياً ويستعمل باستمرار واجهة المعبد اليوناني الروماني القديم رواقاً. وحددت تصاميم فيلاته—بأروقتها ذات واجهات المعابد، ومخططاتها المتماثلة، ونسبها التوافقية—مفردات انتشرت إلى ما وراء إيطاليا بكثير. وأتاح استعماله منظومات تناسب معيارية معالجة الشكل المعماري والتخطيط الإنشائي والتنظيم الفراغي معالجة متماسكة. وقد هيمنت في القرن الثامن عشر على العمارة الإنجليزية، ثم أثرت بعمق في المباني المدنية والسكنية الأمريكية، من مونتيتشيلو لتوماس جيفرسون إلى عدد لا يحصى من دور المحاكم والمزارع والمباني المؤسسية. وفي هذه السياقات، ارتبطت العمارة البالادية بالعقلانية والاستقرار والنظام المدني.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الموقع في تاريخ الفكر الإنشائي يحتل بالاديو موقعاً فريداً في تاريخ التفكير الإنشائي. ومع أنه لم يصغ نظرية في الميكانيكا ولم يحلل القوى والإجهادات صراحة، فإن عمله يبين كيف يمكن للشكل المعماري أن يجسد مبادئ عقلانية متوافقة مع المنطق الإنشائي. وتكشف مبانيه فهماً حدسياً لمسارات الأحمال والتماثل والوضوح الإنشائي—وهي صفات سيصوغها التحليل الإنشائي اللاحق رياضياً. وقد فرض إصراره على التناسب والاتزان والانتظام نظاماً إنشائياً ضمنياً على المباني، موائماً الشكل المعماري وإمكان التنفيذ.

وفر الوضوح والعقلانية والتنظيم المنهجي التي تميز تصميم بالاديو جسراً حاسماً بين العمارة الكلاسيكية والتفكير الإنشائي الحديث. وبهذا المعنى، يمثل بالاديو تياراً موازياً للميكانيكا المبكرة: تقليداً استبقت فيه الهندسة والنسب وممارسة البناء المعالجة التحليلية اللاحقة للمنشآت. وقد وفر تأثيره في الشكل المعماري إطاراً مستقراً أمكن أن يعمل داخله لاحقاً علم الميكانيكا الإنشائية الناشئ.

15.2.2.3 إعادة ترتيب الثالوث

بينما صاغ فيتروفيوس التسلسل اللاتيني *firmitas, utilitas, venustas*، أعاد كل من ألبيرتي وبالاديو ترتيب المصطلحات في الإيطالية إلى *comodità* (المنفعة)، و*perpetuità* (الدوام)، و*bellezza* (الجمال). وورود *venustas* (أو *bellezza*) أخيراً في الصياغتين يعني أن الجمال لا يتحقق إلا باستيفاء الشرطين الأولين—أي إن الصفة الجمالية تنشأ من الكفاية الوظيفية والإنشائية، ولا تُفرض عليها. وهذه نقطة حاسمة سنعود إليها عند بحث إعادة بيلينغتون في القرن العشرين صياغة هذه المبادئ نفسها في §15.7.1.

وكما لاحظ Wittkower, 1944 في مؤلَّف ألبيرتي:

> من الموضوعات الرئيسة في مقدمة ألبيرتي خدمة فن العمارة للبشرية. وتؤكد المقدمة أن العمارة ينبغي أن تكون "عظيمة النفع للبشر في جميع النواحي." والمبنى الذي لا صفة له غير هذه المنفعة العامة والخاصة سيكون ممتعاً للنظر. ولكل مبنى نوع مختلف من الجمال يناسب اختلاف الغرض؛ وهكذا التزم ألبيرتي المبدأ الأرسطي للجمال النسبي، الذي شاع لاحقاً بين نقاد العمارة في القرن الثامن عشر. وأكد ألبيرتي مراراً فكرة أن العمارة في معظمها وليدة الضرورة والملاءمة؛ ولا تخدم المتعة والترفيه إلا أخيراً وبدرجة ثانوية. والطريقة الصحيحة لدراسة العمارة أن نبدأ بالحس السليم في البناء. وهذه هي النبرة السائدة في مؤلَّفه.
>
> Wittkower, 1944 "*Principles of Palladio's Architecture*"

وبعبارة أخرى، أعاد أبرز معماريي عصر النهضة النظر مرات كثيرة على مر القرون في فضائل فيتروفيوس (أو ثالوثه)، فلا يسعنا تجاهلها لمصلحة أي تعريف يُفترض أنه جديد. ومنذ زمن ألبيرتي فصاعداً، صُورت العمارة في صورة رياضيات تطبيقية، إذ لم تكن حتى ذلك الحين قد خضعت إلا بالكاد للتحليل المنطقي (Wittkower, 1944).

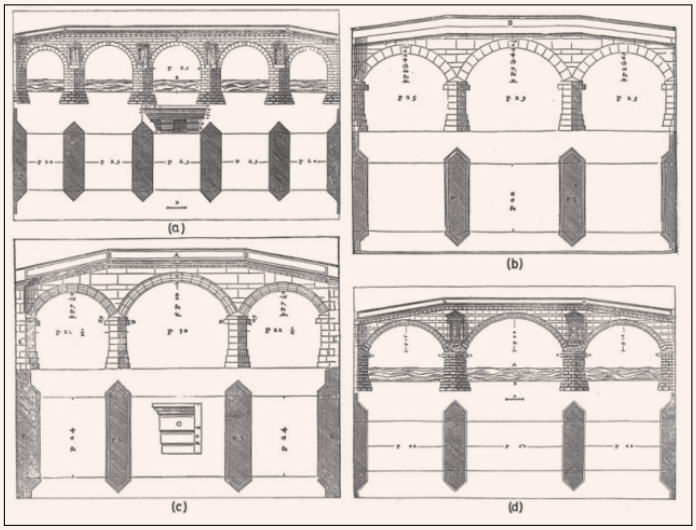
15.2.2.4 ألبيرتي وبالاديو مهندسين

قد يهم المهندس الإنشائي ما يمثل في جوهره إرشادات ألبيرتي لصناعة الأسمنت ثم خلطه لصنع *الخرسانة*:

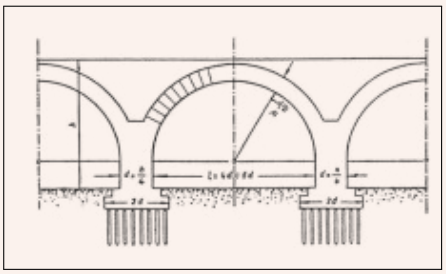
> ... ما استُخرج حديثاً من المحجر أفضل مما خُزن طويلاً؛ وما تماسك مرة بالمونة لن يتماسك جيداً بها مرة ثانية. ويكفي هذا في شأن الحجر. أما الجير، فيذمون منه ما لا يخرج من الفرن كتلاً كاملة، بل قطعاً مكسرة كأنها مسحوق، ويقولون إنه لن يكون صالحاً قط. ويمدحون ما يتنقى ويبيض في النار، ويكون خفيفاً رناناً، وينفجر حين يُرش بالماء ويطلق دخاناً قوياً كثيفاً عالياً في الهواء. ولأن الأول ضعيف، فهو يحتاج بطبيعة الحال إلى رمل أقل؛ أما الثاني القوي فيحتاج إلى أكثر. ويوصي كاتو بأن نخصص لكل قدمين من العمل مكيالاً من الجير ومكيالين

> من الرمل، ويصف آخرون نسباً مختلفة. ويرى فيتروفيوس وبليني خلط الرمل على النحو الآتي: لكل مكيال من الجير ثلاثة من رمل الحفر، أو اثنان من رمل النهر أو البحر. وأخيراً، عندما تتطلب صفة حجرك وطبيعته مونة أكثر سيولة أو قابلية للتشكيل (وهو ما سنبينه بوضوح أكبر أدناه)، ينبغي غربلة الرمل بمنخل؛ أما حين يلزم أن تكون أصلب، فاخلطه بنصف مقدار من الحصى وشظايا الحجر المكسور. ويتفق الجميع على أن مزجه بثلث من القرميد أو الآجر المكسور المدقوق يجعله أشد تماسكاً بكثير. ومهما كانت طريقة مزجك له، يجب تقليبه مراراً حتى تندمج أصغر القطع؛ وبعضهم يقلبه لهذا الغرض، ولكي يمتزج جيداً، ويدقه زمناً طويلاً في هاون. ولن نقول هنا مزيداً عن الأسمنت، إلا أن الجير يتشبث بالحجر من نوعه، ولا سيما المستخرج من المحجر نفسه، أفضل من تشبثه بحجر غريب.
>
> (Alberti, 1485)

وإلى جانب المواد، قدم ألبيرتي ما قد يكون أول معالجة منهجية لتصميم الجسور في عصر النهضة. فقد خصص كتابه *De re aedificatoria* (Alberti, 1485) عناية كبيرة للجسور في الكتابين الرابع والثامن، ووضع قواعد هندسية دقيقة أثرت في بنّائي الجسور ثلاثة قرون (Huerta, 2018). ووصف للركائز عرضاً يساوي ثلث البحر—وهي قاعدة يمكن تتبعها إلى ممارسة العصور الوسطى، إذ تظهر في مخطوطة من سنة 1401 عن الجسر الحجري في سرقسطة (Huerta, 2004). أما سماكة القوس عند التاج فحددها بما لا يزيد على واحد من خمسة عشر من البحر: "في الجسر الكبير ينبغي ألا تشغل أكثر من واحد من خمسة عشر من الفتحة الكلية." كما أعطى قاعدة بديلة لأقواس الواجهات لا تقل فيها السماكة عن عُشر البحر. وكانت هذه القواعد دقيقة بما يكفي لإعادة إنشاء هندسة جسر كامل منها وحدها (الشكل 15.4a).



(b) الجسور التي وصفها بالاديو (1570): (أ) جسر ريميني الروماني؛ (ب) جسر العصور الوسطى فوق نهر ريروني؛ (ج) جسر بالاديو في فيتشنزا؛ (د) تصميم جسر جديد (Palladio, 1570)



(a) قواعد ألبيرتي لتصميم الجسر القوسي، نقلاً عن Straub, 1952

شكل 15.4: تصميم الجسور في عصر النهضة: قواعد ألبيرتي الهندسية وأمثلة بالاديو الموثقة (Huerta, 2018)

قد تبدو هذه القواعد بدائية مقارنة بتعقيد تصميم الجسور وتنفيذها فعلياً، لكنها كانت دليلاً للمعلم البنّاء الذي يمتلك الحكم اللازم لتطبيقها—والخروج عليها عند الضرورة. وكما يلاحظ Huerta, 2018، يشغل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قسم ألبيرتي عن الجسور ربع كتابه السادس عن الأشغال العامة كاملاً، ويعالج كل جانب من اختيار الموقع إلى تنفيذ الأساسات والمواد، وكلها متداخلة مع أمثلة تاريخية مثل جسر يوليوس قيصر فوق الدانوب وجسر الملك مينا في منف. وكانت القواعد محافظة: إذ أظهرت الجسور الرومانية عادة نسب سماكة إلى بحر بين 1/10 و1/12، مع أن منشآت استثنائية حققت نحافة أكبر بكثير. فحقق القوس الرئيس للجسر الروماني في نارني (بحر 21 m) نسبة 1/17؛ وبلغ جسر ألكانتارا الروماني في طليطلة (28.8 m) نسبة 1/16 (Fernández Casado, 1980).

أما بالاديو، فعلى طريقته المعهودة، لم يعلم بقواعد صريحة بل بأمثلة مقيسة—وهو نهج تعليمي أودع النسب الآمنة داخل سوابق موثقة. ويعرض كتابه الثالث (Palladio, 1570) أربعة جسور بأبعادها (الجدول 15.2): الجسر الروماني في ريميني، وجسر العصور الوسطى فوق ريروني، وجسره هو في فيتشنزا، وتصميماً غير منفذ. والتدرج مفيد: فبينما تمسكت الممارسة الرومانية والقروسطية بنسب 1/10 إلى 1/12، وافق عمل بالاديو سابقة العصور الوسطى عند 1/12، في حين دفع تصميمه الافتراضي نحو 1/17—مقترباً من نحافة أجرأ المنشآت الرومانية، ومستبقاً التخفيض التدريجي للسماكة الذي سيميز هندسة الجسور الفرنسية في القرن الثامن عشر.

جدول 15.2: نسب الجسور عند بالاديو (1570)، نقلاً عن Huerta, 2018

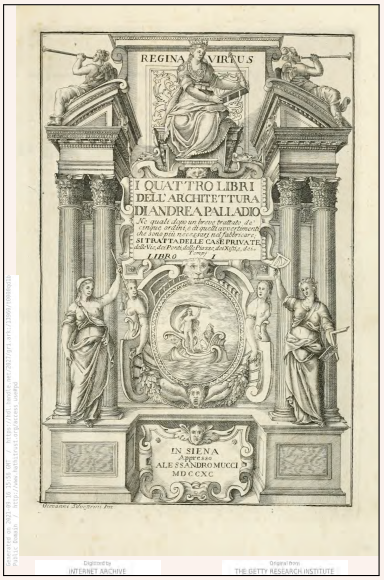
الجسر	سماكة القوس/البحر
(أ) الجسر الروماني (ريميني)	1/10
(ب) جسر العصور الوسطى (ريروني)	1/12
(ج) جسر بالاديو (فيتشنزا)	1/12
(د) تصميم بالاديو	1/17

قام تقليد ألبيرتي وبالاديو في القواعد التناسبية على بصيرة أساسية: استقرار المنشآت الحجرية يعتمد على الهندسة، لا على الحجم المطلق. فالقوس الذي يقف عند مقياس ما سيقف عند أي مقياس إذا حوفظ على نسبه. غير أن هذا المبدأ، الصحيح أساساً للمباني، سيثبت قصوره في الجسور. وكما أدرك هوبير غوتييه أول مرة سنة 1716، يجب أن تتحمل الجسور مرور أحمال مرورية ثقيلة، وهذه مسألة غير تناسبية بطبيعتها: فعند حمل معين تكون الجسور الأصغر "أضعف"—أي أكثر حساسية لتأثير المركبات العابرة. وقد تجهد عربة جسرًا صغيراً إجهاداً شديداً بينما لا تكاد تؤثر في جسر عظيم. وسيقود هذا الإدراك في نهاية المطاف جان-رودولف بيرونيه، في مذكرته غير المنشورة سنة 1748، إلى اقتراح قواعد خفضت تقريباً إلى النصف السماكة التي وصفها ألبيرتي وغوتييه للبحور الكبيرة—قواعد لم تُشتق من الميكانيكا النظرية (التي رأى بيرونيه قصورها عن تعقيد المسألة)، بل من الدراسة المنهجية لأكثر من مئتي جسر قائم. وكتب بيرونيه: "في مسائل البناء، لا يمكن للتأمل وحده أن يتغلب على الخبرة" (Huerta, 2018).

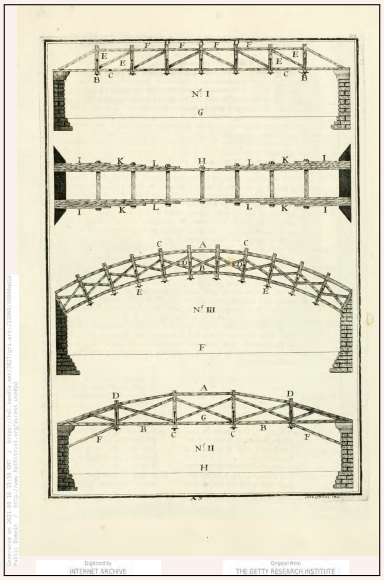
لكن اهتمامات بالاديو امتدت إلى ما وراء الأقواس الحجرية. فعنوان الفصل الثامن من كتابه الثالث هو *Dì tre altre invenzioni secondo le quali si ponno fare i ponti di legno senza porre altrimenti pali nel fiume*—في ابتكارات أخرى تمكننا من بناء جسور خشبية من دون وضع ركائز في النهر. وكما يظهر في الشكل 15.5b، كان هذا من أوائل الرسوم المسجلة لما عُرف لاحقاً بالجملون. والواقع أن الجملون شكل إنشائي أكثر تطوراً من الجسر القوسي: فهو لا يتطلب حجارة ثقيلة، بل عناصر خشبية فحسب؛ ومع أن بعض

الأشكال المعروضة غير مألوف وفق الفهم الإنشائي الحديث (الشكل III في اللوحة الأصلية)، فإن بعضها الآخر تصاميم سليمة تماماً تستبق التطورات اللاحقة.

يشبه *Ponte dell'Accademia* الشهير في البندقية تصميم بالاديو للجسر القوسي شبهاً لافتاً (الشكل III في اللوحة)، مع أنه بُني سنة 1854 وكان مصنوعاً في الأصل من الحديد؛ ثم هُدم وأعيد بناؤه بالخشب سنة 1933. ولعل ذلك مجرد مصادفة—أو لعله شهادة على الأثر الباقي لخيال بالاديو الإنشائي.



(a) صفحة الغلاف



(b) جمالونات



(c) في *Ponte dell'Accademia* البندقية

شكل 15.5: كتاب بالاديو *الكتب الأربعة في العمارة* (Palladio, 1570)

نرى هنا مثالاً كان فيه المعماري مبتكر الشكل الإنشائي.[12] وفي إيطاليا لاحقاً، سيكون المهندسون الإنشائيون هم الذين تأتي تصاميمهم روائع معمارية—مثل *Palazzetto dello Sport* لبيير لويجي نيرفي، الذي سنبحثه في §19.2.12.

15.2.3 القياسات البشرية ومسألة المقياس

لطالما حضرت صلات الجسد بالعمارة وظاهرة الجسدية المعقدة في الثقافة المعمارية. فمن العصور القديمة إلى القرن العشرين، سعى المعماريون والمنظرون إلى إرساء النسب المعمارية على قياسات هيئة الإنسان ونسبها—وهي ممارسة تسمى *القياسات البشرية*. وكان الافتراض الكامن أن النسب المشتقة من جسم الإنسان تمتلك انسجاماً ذاتياً ينتج، عند تطبيقه على المباني، نتائج منسجمة مثلها—وأن هذه النسب قابلة للتطبيق على أي مقياس.

[12] وحتى يومنا هذا، يدرس طلاب العمارة في الجامعات الإيطالية مقررات عديدة في التحليل الإنشائي، لا مقرراً "تمهيدياً" واحداً كما في معظم البلدان الأخرى.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.2.3.1 فيتروفيوس: النص المؤسس

قدم فيتروفيوس الملاحظة التأسيسية التي تصل النسب البشرية بالعمارة:

> صممت الطبيعة جسم الإنسان بحيث يكون الوجه، من الذقن إلى أعلى الجبهة وأدنى منابت الشعر، عُشر الارتفاع الكلي؛ وتكون اليد المفتوحة من الرسغ إلى طرف الإصبع الوسطى بالمقدار نفسه تماماً؛ ويكون الرأس من الذقن إلى القمة ثُمناً، ومع العنق والكتف من أعلى الصدر إلى أدنى منابت الشعر سُدساً؛ ومن منتصف الصدر إلى قمة الرأس ربعاً. وإذا أخذنا ارتفاع الوجه نفسه، كانت المسافة من أسفل الذقن إلى أسفل المنخرين ثلثه؛ والأنف من أسفل المنخرين إلى خط بين الحاجبين بالمقدار نفسه؛ ومن هناك إلى أدنى منابت الشعر ثلثاً أيضاً، وهو الجبهة. وطول القدم سُدس ارتفاع الجسم؛ والساعد ربعه؛ وعرض الصدر ربعه كذلك. وللأعضاء الأخرى أيضاً نسبها المتماثلة الخاصة، وباستخدامها بلغ رسامو العصور القديمة ونحاتوها المشهورون مجداً عظيماً لا ينتهي.
>
> وبالمثل، ينبغي أن يكون في أعضاء المعبد أعظم انسجام في العلاقات المتماثلة بين مختلف الأجزاء والمقدار العام للكل....
>
> Vitruvius, 1960 The Ten Books on Architecture, Book III, Chapter I

رأى فيتروفيوس أن جسم الإنسان حسن التكوين يُظهر *symmetria*—أي قابلية قياس الأجزاء بعضها إلى بعض وإلى الكل—وهي ما ينبغي للعمارة أن تحاكيه. ولاحظ أن السرة تحدد مركز دائرة تحيط بالأطراف الممدودة، بينما يحتوي مربع الهيئة إذا مُدت الذراعان أفقياً؛ وهي ملاحظات ستأسر فناني عصر النهضة ومعمارييه.

15.2.3.2 الانتقال في العصور الوسطى

كانت من أقدم محاولات العصور الوسطى لتدوين هذه النسب محاولة فيلار دو أونيكور (نشط نحو 1225–1250)، الذي تضم حافظته رسوماً تخطيطية تضع أشكالاً هندسية فوق هيئات بشرية وحيوانية، الشكل 15.7a (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858). وتمثل هذه الرسوم، وإن كانت بدائية وفق المعايير اللاحقة، محاولة لرد الشكل العضوي إلى هندسة قابلة للإنشاء—وهو اهتمام عملي لمعلم بناء يعمل في عصر انتقلت فيه معرفة التصميم بالرسوم وممارسة الورش، لا بالمؤلفات المطبوعة.

15.2.3.3 إحياء عصر النهضة

حفز إحياء مُثل فيتروفيوس في عصر النهضة بحوثاً أكثر صرامة. وقد تجاوز ليون باتيستا ألبيرتي (1404–1472)، في مؤلفه القصير *De Statua*[13] (Alberti **and** Tiraboschi, 1804)، النسب التناسبية ليطور أدوات للقياس الدقيق لأبعاد الجسم ونقلها. وأقام *exempeda* منظومة قياس تقسم ارتفاع الإنسان إلى ستة أقدام (*pedes*)، وكل قدم إلى عشر بوصات (*unceolae*)، وكل بوصة إلى عشرة أجزاء صغرى (*minuta*)—وهو تقسيم عشري يستبق إصلاحات القياس اللاحقة. أما *definitor* أو *finitorium* الأكثر براعة، الشكل 15.7b، فتألف من قرص دائري مدرج ذي ذراع دوارة يتدلى منها شاقول. وبه أمكن تسجيل أي نقطة على نموذج بمزيج من الزاوية القطبية والإحداثي الرأسي، مما أتاح النقل الميكانيكي من نموذج الطين إلى كتلة الرخام بدقة غير مسبوقة.

[13] تشمل إسهاماته البارزة الأخرى *De Pictura* (نُشر مع 1435، *De Statua*)، و1452، *De Re Aedificatoria*—أول مؤلَّف معماري في عصر النهضة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وسع فرانشيسكو دي جورجيو مارتيني (1439–1501)، معماري دوق أوربينو ومهندسه، التفكير الأنثروبومتري إلى العمارة على نحو أكثر مباشرة. ففي *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare* (Giorgio Martini, ca. 1480)، أعد رسوماً لافتة تضع هيئة الإنسان فوق مخططات الكنائس والحصون وقطاعات الأعمدة. ولم تكن المطابقة عند فرانشيسكو مجازية فحسب: فصحن الكنيسة صار الجذع، والمجازان المعترضان الذراعين، والحنية الرأس. وقد وجه هذا الإسقاط الجسدي تحديده نسب الفراغات ونهجه في تصميم التحصينات.

يمثل *إنسان* فيتروفيوس الشهير لليوناردو دا فينشي (نحو 1490)، الشكل 15.7c، أدق توليف في عصر النهضة لنص فيتروفيوس.[14] وتمثل ابتكار ليوناردو في حله لغزاً هندسياً كامناً في نص فيتروفيوس: كيف يمكن إدراج الهيئة نفسها في دائرة ومربع معاً؟ فبتعديل موضع الأطراف قليلاً، ونقل مركز الدائرة إلى السرة مع جعل قاعدة المربع عند القدمين، بيّن ليوناردو إمكان اجتماع الإنشاءين—الدائرة تمثل الهندسة الكونية أو الإلهية، والمربع يمثل الأرضي والقابل للإنشاء.

لم تكن بحوث عصر النهضة هذه تمارين فنية فحسب. فقد وفر الاعتقاد بأن النسب البشرية تعكس نظاماً إلهياً أو طبيعياً تبريراً نظرياً للقواعد المعمارية. وحين وصف ألبيرتي أو بالاديو نسباً معينة لأبعاد الغرف أو تباعد الأعمدة، فقد احتكما ضمناً إلى هذا الأساس الأنثروبومتري: فالمباني التي تُضبط نسبها على مثال جسم الإنسان تمتلك الانسجام الذاتي نفسه.

15.2.3.4 القرن العشرون: الموديولور وشارل-إدوار جانيريه لو كوربوزييه (1887–1965)

وُلد شارل-إدوار جانيريه سنة 1887 في لا شو دو فون بسويسرا، وهي مدينة شكلتها صناعة الساعات وثقافة الحرف الدقيقة المرتبطة بها. وتدرب أولاً نقاشاً وفنان زخرفة في مدرسة الفن المحلية، حيث تأثر بشارل لبلاتنييه، الذي وجهه نحو العمارة وشجعه على الرصد المنهجي للمنشأ والشكل. وعرّفته رحلاته المبكرة في إيطاليا وألمانيا والبلقان بالعمارة الكلاسيكية والبناء العامي والطرائق الصناعية الناشئة، فشكلت رؤية للعالم تجمع الوعي التاريخي إلى الافتتان بالتكنولوجيا الحديثة[15] وفي سنة 1917 استقر نهائياً في باريس واتخذ اسم لو كوربوزييه، معلناً قطيعة حاسمة مع التقليد الأكاديمي.

كان أشد معماريي القرن العشرين تأثيراً، ومجادلاً شكلت كتاباته الخطاب المعماري بعمق يماثل تشكيل مبانيه للمدن.[16] وقد قدم بيانه نحو عمارة جديدة (Le Corbusier, 1931)، المنشور سنة 1923، المفهوم الاستفزازي[17] للمبنى بوصفه "آلة للسكن"—وهي صياغة بلورت برنامج الوظيفية في الحركة الحديثة، وطالبت العمارة بتبني الوضوح العقلاني للهندسة.

[14] خلافاً للاعتقاد الشائع، لا صلة لهذا الرسم بالنسبة الذهبية؛ فقد كان ليوناردو يوضح ادعاءات فيتروفيوس المحددة في النسب.

[15] قبل أن يتخذ الاسم المستعار لو كوربوزييه، عمل جانيريه الشاب في مرسم أوغست بيريه في باريس (1908–1910)، فاستوعب منه—ثم قاوم لاحقاً—مذهب الصدق الإنشائي في الخرسانة المسلحة. انظر § 15.4.5.

[16] قدم هو وابن عمه بيير جانيريه سنة 1927 تصميماً رائداً لمسابقة قصر عصبة الأمم في جنيف. واستُبعد مشروعهما بحجة تقنية هي أن الرسوم مطبوعة آلياً لا مرسومة يدوياً بالحبر الهندي كما اشترطت قواعد المسابقة. ورأى كثيرون في القرار ذريعة من أعضاء لجنة التحكيم المحافظين لاستبعاد تصميم حديث جذرياً خرج على التصورات التقليدية لـ"القصر". وقد حفز الجدل الحركة الحديثة الدولية وأفضى مباشرة إلى تأسيس المؤتمر الدولي للعمارة الحديثة (CIAM) سنة 1928.

[17] ناقش الباحثون على نطاق واسع صلات لو كوربوزييه السياسية. ومع أنه طلب تكليفات من قادة سلطويين، منهم موسوليني، وعمل لفترة وجيزة مع فرنسا الفيشية (1940–1941)، خلص معظم المؤرخين إلى أنه كان تكنوقراطياً انتهازياً لا فاشياً عقائدياً. وكان التزامه الرئيس تنفيذ رؤاه المعمارية عبر أي نظام سياسي متاح. انظر Fishman, 1982 *Urban Utopias in the Twentieth Century* (1977).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الكتاب توليف من المقالات والصور والسجالات، يضع صور صوامع الحبوب والسيارات والسفن العابرة للمحيطات إلى جانب البارثينون والعمارة الرومانية. وجادل لو كوربوزييه بأن المهندسين، إذ يعملون بالحساب والاقتصاد، حققوا انسجاماً وجمالاً لم يستطع المعماريون المعاصرون، الغارقون في التاريخانية الأكاديمية، مضاهاتهما. وأعلن أن "جماليات المهندس والعمارة أمران يسيران معاً وينشأ أحدهما من الآخر." وأصبح هذا الاحتفاء بالمنطق الهندسي—التعبير الصادق عن المنشأ، واتباع الشكل للوظيفة، وتجريد الزخرفة—عقيدة الحداثة.

أرست "نقاط العمارة الجديدة الخمس" للو كوربوزييه (*Les cinq points d'une architecture nouvelle*) (Corbusier **and** Jeanneret, 1929)، التي صاغها سنة 1927، المبادئ الأساسية للتصميم الحداثي:

1) **الركائز** —أعمدة خرسانية مسلحة تحل محل الجدران الحاملة وترفع المبنى عن الأرض، فتحرر الطابق الأرضي للحركة وتنشئ جمالية جديدة تقوم على الوضوح الإنشائي؛
2) **المسقط الحر** —يتيح فصل المنشأ عن الجدران ترتيبات داخلية مرنة، فتقسم الفراغات بحواجز متحركة بدلاً من القواطع الثابتة؛
3) **الواجهة الحرة** —بإبراز الطوابق وراء الأعمدة الداعمة كالشرفات، تفقد الواجهة وظيفتها الإنشائية، ويمكن للنوافذ أن تمتد إلى أي طول بصرف النظر عن التقسيمات الداخلية؛
4) **النوافذ الأفقية** —نوافذ شريطية توفر إضاءة أقوى ثماني مرات من الفتحات الرأسية المكافئة، مع إتاحة مشاهد بانورامية وتأكيد الهندسة الخطية للمبنى؛
5) **حديقة السطح** —أسطح مستوية تتحول إلى شرفات مزروعة تعيد المساحة الخضراء التي فقدها البناء، وتوفر في الوقت نفسه العزل ومناطق للمعيشة في الهواء الطلق. وقد أنشأت هذه المبادئ، التي جسدتها فيلا سافوا (1929–1931)، ما سماه لو كوربوزييه "آلة للسكن"—عمارة تتبنى المنطق الصناعي والمواد الحديثة لإعادة تشكيل التصميم الفراغي جذرياً.

تبيّن أعماله المنفذة—ومنها وحدة السكن[18] (Cité de l'architecture & du patrimoine, 2015) (الشكل 15.6a)، وكنيسة رونشان (الشكل 15.6c)، ومباني شانديغار—تطور تفكيره من العقلانية النقية إلى التعبيرية النحتية، لكنها تشترك كلها في الالتزام بالوضوح الإنشائي والتعبير الصادق عن المواد. وقد أرسى دمج لو كوربوزييه الكفاءة الإنشائية والجماليات المعمارية، وإصراره على نشوء الجمال من التصميم العقلاني لا من الزخرفة المضافة، وتبنيه المواد وطرائق البناء الجديدة، نماذج لا تزال تشكل تعليم العمارة وممارستها.

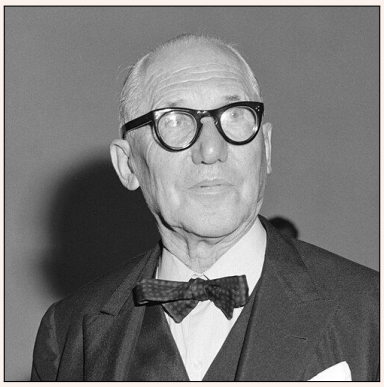
منظومة الموديولور استمر تقليد النسب المعمارية في هيئة متحولة إلى القرن العشرين مع موديولور لو كوربوزييه (1948، نُقح سنة 1955)، الشكل 15.7d (Corbusier, 1954; Corbusier, 1955). وقد طُورت منظومة النسب هذه خلال الحرب العالمية الثانية ونُقحت في السنوات التالية، وكانت محاولة صريحة لإنشاء مقياس عام يصل فيزيولوجيا الإنسان بالأبعاد المعمارية والإنشائية. واستناداً إلى أبعاد جسم الإنسان والنسبة الذهبية ومتتالية فيبوناتشي، صُمم الموديولور جسراً بين القياسات البشرية والرياضيات والبناء، يوفر إطاراً عددياً متماسكاً لتحديد أحجام العناصر الإنشائية والوحدات الفراغية ومكونات المباني. ومع أنه تعرض كثيراً للنقد بسبب افتراضاته المعيارية وضعف قابليته للتكيف، فقد مثل محاولة جادة لإرساء النسب

[18] كانت وحدة السكن في مرسيليا (1947–1952)، المعروفة أيضاً باسم المدينة المشعة، أول وأشهر تحقيق لمفهوم لو كوربوزييه عن التجمعات السكنية الرأسية. وقد أصبح المبنى، المؤلف من 337 شقة والمرفوع على ركائز، بما فيه من شارع تسوق داخلي ومرافق على السطح وتطبيق لمنظومة نسب الموديولور، نموذجاً لأربع وحدات سكن إضافية بُنيت في نانت-ريزيه وبرلين وبرييه-أون-فوريه وفيرميني.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) وحدة السكن



(b) شارل-إدوار سنة 1964



(c) كنيسة نوتردام دو أو

شكل 15.6: شارل-إدوار جانيريه لو كوربوزييه

المعمارية على مبادئ قابلة للقياس وشبه هندسية بدلاً من السوابق التاريخية أو القواعد الجمالية الاعتباطية، عاكساً طموح لو كوربوزييه الدائم إلى التوفيق بين المقياس الإنساني والعقلانية الصناعية.

عرّفه لو كوربوزييه على النحو الآتي:

> "الموديولور" مقياس يقوم على الرياضيات والمقياس الإنساني، ويتألف من سلسلتين من الأعداد: السلسلة الحمراء والسلسلة الزرقاء.
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 60

بدأت منظومة لو كوربوزييه بطول إنساني معياري قدره 1.83 m (ستة أقدام)، اختير جزئياً للتوفيق بين النظامين المتري والإمبراطوري—وهو طموح لاحقه بإصرار كبير. وانطلاقاً من هذا الطول حُددت نقاط أساسية: الضفيرة الشمسية عند 1.13 m، وقمة الذراع المرفوعة عند 2.26 m (ضعف ارتفاع الضفيرة الشمسية). وكما كتب، فإن جميع المقاييس "تنشأ من مصدر واحد، القياس 113، أي الضفيرة الشمسية لرجل طوله ستة أقدام" (Corbusier, 1954). ثم فُصلت هذه الأبعاد من خلال سلسلتين متداخلتين قائمتين على فيبوناتشي—"السلسلة الحمراء" و"السلسلة الزرقاء"—بحيث تقارب نسبة كل حد إلى مجاوريه النسبة الذهبية.

ولدت السلسلة الحمراء، القائمة على ارتفاع الضفيرة الشمسية (1.13 m):

$$\ldots, 27, 43, 70, 113, 183, 296, \ldots \text{ cm}$$

أما السلسلة الزرقاء، القائمة على ضعف ارتفاع الضفيرة الشمسية (2.26 m)، فولدت:

$$\ldots, 33, 53, 86, 140, 226, 366, \ldots \text{ cm}$$

ووفرت السلسلتان معاً نطاقاً من الأبعاد استخدمه لو كوربوزييه في مبانيه بعد الحرب، ولا سيما وحدة السكن في مرسيليا (1947–1952)، حيث اشتُق كل بُعد تقريباً—عروض الشقق، وارتفاعات الأسقف، وتباعد كاسرات الشمس—من قيم الموديولور.

قدم لو كوربوزييه عمله صراحة بوصفه خروجاً على تقليد فيتروفيوس الساكن:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> كان ليوناردو ومعاصروه—وهم يفكرون في فيتروفيوس—قد بينوا نسب الإنسان بوضع جسده، وذراعاه مفتوحتان، داخل دائرة. ذلك هو الإنسان الساكن، الموافق لعمارة ساكنة.... [أما لو كوربوزييه] فيجسد منظومته برجل ذراعه مرفوعة. ذلك هو الإنسان المتحرك، الموافق لعمارة متحركة.
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 75

فحيث صور فيتروفيوس وليوناردو الإنسان ساكناً، ذراعاه ممدودتان في اتزان خامل، تمتد هيئة لو كوربوزييه إلى أعلى—إيماءة فاعلة تحدد البعد الرأسي للحيز الصالح للسكن.

أثار الموديولور الإعجاب والنقد معاً. وقد عرضت المنظومة على ألبرت أينشتاين في برينستون سنة 1946، فقدم تقييماً ظل لو كوربوزييه يقتبسه بقية حياته:

> تكرم أينشتاين في رسالة كتبها إليّ مساء اليوم نفسه بقوله عن "الموديولور": *إنه مقياس للنسب يجعل السيئ صعباً والجيد سهلاً.*
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 58

عد لو كوربوزييه ذلك إقراراً من العلم، مع أن النقاد لاحظوا أن المنظومة ضُبطت على جسم ذكري مثالي، وأنها قد تنتج فراغات تبدو ضيقة للأطول قامة. وعلى نحو أعمق، استند ادعاء الموديولور العمومية الرياضية إلى تفضيلات جمالية لا إلى ضرورة إنشائية أو وظيفية.

15.2.3.5 من التناسب إلى علم بيئة العمل

مثل الموديولور آخر محاولة كبرى لإرساء النسب المعمارية على مبادئ أنثروبومترية. وقد انتقلت التطورات اللاحقة في القرن العشرين—ولا سيما *Bauentwurfslehre* (بيانات المعماريين، 1936) لإرنست نويفرت (Neufert, 1970)، و*The Measure of Man* (مقياس الإنسان، 1960) لهنري دريفوس (Dreyfuss, 1960)—من انسجام النسب إلى الوظيفة الإرغونومية: فلم يعد الاهتمام بالنظام الكوني، بل بالملاءمة العملية واستيعاب نطاق أحجام أجسام البشر في تصميم الأثاث والمعدات والخلوصات الفراغية.

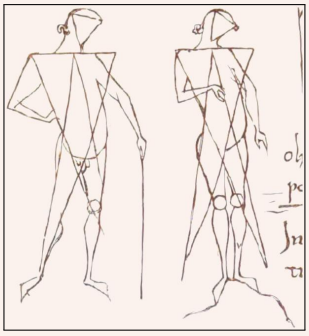
15.2.3.6 الافتراض الخفي: الاستقلال عن المقياس

حملت النسب الأنثروبومترية، عبر هذا التقليد الممتد ألفي عام من فيتروفيوس إلى لو كوربوزييه، افتراضاً ضمنياً: أن النسب المشتقة من جسم الإنسان يمكن تطبيقها على أي مقياس. فيمكن للمعبد أن يستخدم نسب ضريح صغير نفسها؛ ويمكن للكاتدرائية ببساطة أن تكون كنيسة صغيرة مكبرة. وقد ثبتت صحة هذا الافتراض إلى حد بعيد في المنشآت الحجرية—فكما ذُكر في §15.2.1، يتعرض الحجر لإجهاد منخفض بحيث تحكم الهندسة، لا المقاومة، التصميم.

لكن لهذا الافتراض حدوداً. فكما برهن غاليليو في *Discorsi* (الذي نوقش في §15.2.1)، لا يمكن ببساطة تكبير منشأ إلى ما لا نهاية مع الحفاظ على نسبه. فنسبة مساحة المقطع إلى الحجم تتغير مع المقياس: ضاعف الأبعاد الخطية فتزداد المساحة أربعة أمثال، بينما يزداد الحجم (ومن ثم الوزن) ثمانية أمثال. وتزداد الإجهادات حتى تنهار المادة في نهاية المطاف. وهذا ما يجعل للفيلة أرجل أسمك نسبياً من أرجل الفئران، وما جعل الكاتدرائيات القوطية، رغم طموحها الشاهق، تبلغ حدوداً عملية لم يكن في وسع أي تنقيح هندسي تجاوزها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

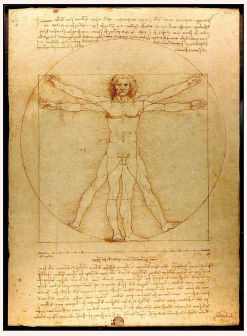
وهكذا يمثل التقليد الأنثروبومتري إنجازاً فكرياً لافتاً—لكنه محكوم بالحقائق الفيزيائية التي صاغها غاليليو أول مرة وجعلها التحليل الإنشائي الحديث دقيقة. فلا يمكن للتناسب وحده أن يحل محل الميكانيكا.



(a) فيلار دو أونيكور، نحو 1240 (De Honnecourt, 1858)



(b) *Definitor* لألبيرتي (Alberti) and Tiraboschi, 1804)



(c) *إنسان* فيتروفيوس لليوناردو، نحو 1490



(d) موديولور لو كوربوزييه (Corbusier, 1954)

شكل 15.7: منظومات النسب الأنثروبومترية: من هندسة العصور الوسطى عبر إنسانية عصر النهضة إلى حداثة القرن العشرين

15.2.3.7 الهندسة التنفيذية: كيف خطط المعلمون البنّاؤون مبانيهم فعلياً

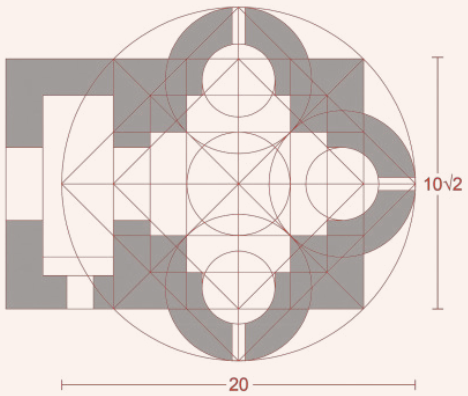
يصف التقليد الأنثروبومتري الذي بُحث أعلاه كيف فكر المعماريون في التناسب. ويكشف سؤال مكمل—كيف طبق المعلمون البنّاؤون هذه المبادئ في موقع البناء—ممارسة غنية بالقدر نفسه ومنهجية على نحو مفاجئ. وقد أعادت دراسات حديثة (Oikonomou, 2022) بناء الهندسة التنفيذية المستخدمة من مصر القديمة حتى القرن الثامن عشر، مبينة أن طريقتين إنشائيتين متميزتين استُخدمتا باستمرار عبر الثقافات والآلاف السنين.

تقوم الطريقة الأولى، *ad quadratum*، على تدوير مربعات مدرجة في دائرة. فالمربع المدرج في دائرة، إذا دُور 45°، يولد مربعاً ثانياً تكون نسبة ضلعه إلى ضلع الأول $\sqrt{2} : 1$—وهي علاقة غير نسبية تنشأ مع ذلك طبيعياً من عملية هندسية عملية خالصة. أما الطريقة الثانية، *ad triangulum*، فتدرج مثلثات متساوية الأضلاع في دائرة حاكمة، فتولد نسب ارتفاع إلى عرض تحكمها $\sqrt{3}$. وقد ولدت هاتان العمليتان—السهل تنفيذهما بالفرجار والحبل على أي مقياس—العلاقات التناسبية الرئيسة الموجودة في المنشآت التاريخية من الأهرامات المصرية إلى الكاتدرائيات القوطية. ويوضح الشكل 15.8 الطريقتين مطبقتين على مسقط كنيسة بيزنطية ثلاثية المحاريب؛ ويبلغ قطر الدائرة الأساسية 20 قدماً بيزنطية تماماً[19]؛ وتُشتق جميع العناصر الإنشائية من تقاطع مربعين مدورين مدرجين فيها.

دور المثلثات الفيثاغورية إلى جانب هذه الطرائق القائمة على الدائرة، اعتمد المعلمون البنّاؤون على فئة ثانية من الأدوات: حبال معقودة تكوّن مثلثات فيثاغورية قائمة. واستُخدم المثلث 3-4-5، الذي لا يتطلب إنشاء زاويته القائمة أداة غير ثلاثة أطوال من الحبل، في العصور القديمة والوسطى لتعيين التعامد وضبط التخطيط

[19] كانت القدم البيزنطية وحدة طول مستخدمة في أنحاء الإمبراطورية البيزنطية، ومشتقة من *pes* الرومانية. وتؤخذ قيمتها عادة بنحو 0.312 m (31.2 cm). وتظهر في التحليل المعماري كثيراً بوصفها الوحدة الأساسية التي تتولد منها الإنشاءات الهندسية (المربعات والمثلثات والدوائر)، مما يبين التعايش التاريخي بين وحدة قياس نسبية والنسب الهندسية مثل $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.8: مسقط باناجيا كومبيليديكي (كاستوريا، القرن العاشر) بتخطيط *ad quadratum* ((Oikonomou, 2022

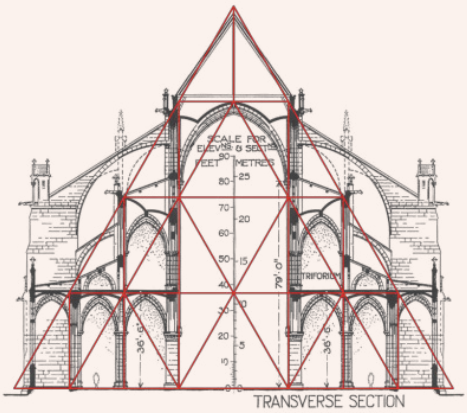
المستطيل لمحيط المبنى. لكن 3-4-5 لم يكن الأداة الوحيدة؛ فقد كانت المثلثات 5–12–13 و8–15–17 و12–35–37 معروفة أيضاً، ويوفر كل منها نسب أبعاد مختلفة تلائم أنواعاً معينة من المباني. ونقلت نقابات البنّائين بالحجر هذه المعرفة بالممارسة لا بالنص، وهو ما يفسر جزئياً بقاء هذه الطرائق الإنشائية غير ظاهرة إلى حد بعيد في تقليد المؤلفات المعمارية—فقد كتب فيتروفيوس وألبيرتي وبالاديو عن التناسب؛ أما المعرفة التنفيذية بكيفية تحقيقه على الأرض فكانت في أيدي البنّائين.

من الدوائر إلى الكاتدرائيات لم تكن المنظومتان—*ad quadratum* و*ad triangulum*—متنافستين، بل متكاملتين. فقد استخدم المعلمون البنّاؤون القوطيون في آن واحد المتتاليات النسبية (مثل 1:2:4:2:1 لعروض البحور) والنسب غير النسبية ($\sqrt{2}$ من قطر المربع، و$\sqrt{3}$ من المثلث المتساوي الأضلاع)، متقبلين استحالة التوفيق الكامل بين الأشكال المعيارية والهندسية. وكما لاحظ جون جيمس عن بنّائي شارتر، فقد "اختاروا عمداً استعمال كليهما، ثم قبلوا الصراع اللازم للجمع بينهما" (James, 1982, p. 98). ويوضح مقطع نوتردام دو باري (تأسست سنة 1163) طريقة *ad triangulum* بجلاء: فمثلث واحد متساوي الأضلاع، مرسوم انطلاقاً من العرض الكلي لصحن الكنيسة وممريها، يحدد الارتفاع الداخلي الكلي، ويعين عند تقسيمه إلى ثلاثة موضع قاعدة الرواق الثلاثي؛ كما يظهر في الشكل 15.9، حيث يحدد مثلث واحد متساوي الأضلاع، مرسوم من كامل العرض الداخلي، الارتفاع الكلي، ويحدد تقسيمه إلى ثلاثة قاعدة الرواق الثلاثي.

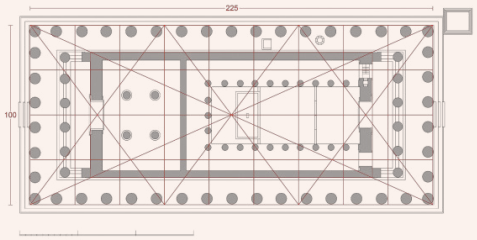
المنظومات المعيارية ومقاييس القياس عملت الطرائق الهندسية بالتآزر مع معايير القياس. فقد صُممت المعابد اليونانية القديمة على شبكات معيارية معبراً عنها بالقدم الأتيكية (30.85 cm)؛ واستخدمت الكنائس البيزنطية القدم البيزنطية (31.2 cm) أو الشبر (23.4 cm)؛ واستخدمت الكاتدرائيات القوطية *pied de roi*[20] أو الـbraccio المحلي. ويرتكز مصطَب البارثينون على شبكة من 25×25 قدماً أتيكية، بينما يُظهر صحنه (sekos) نسبة 5:12 تقابل مباشرة المثلث الفيثاغوري 5–12–13 (Oikonomou, 2022). وهكذا فإن ما يبدو انسجاماً هندسياً خالصاً في المبنى المكتمل قد تولد من تفاعل وحدة قياس محلية ومثلث فيثاغوري وشبكة معيارية—منظومة عملية بقدر أناقتها، كما يوضح الشكل 15.10، حيث تُوضع نسبة 5:12 للصحن ومطابقتها للمثلث الفيثاغوري 5–12–13 فوق شبكة معيارية من 25 × 25 قدماً أتيكية.

[20] كانت *pied de roi* ("قدم الملك") وحدة الطول الفرنسية القياسية قبل اعتماد النظام المتري. وكانت قيمتها نحو 0.32484 m، وتقسم إلى 12 *pouces* (بوصة)، وتقسم كل منها إلى 12 *lignes*. وقد حُددت أبعاد كثير من الأعمال المعمارية والهندسية الفرنسية بهذه الوحدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.9: مقطع نوتردام دو باري بتخطيط *ad triangulum* (Oikonomou, 2022)



شكل 15.10: تحليل مسقط البارثينون (Oikonomou, 2022)

يجمع الجدول 15.3، مرجعاً للمقارنة، وحدات الطول الرئيسة المستخدمة عبر الثقافات والعصور، معبراً عنها بالمتر.

جدول 15.3: وحدات قياس الطول والميل التاريخية المستخدمة في العمارة والبناء

الوحدة	الحضارة / العصر	سياق الاستخدام	المكافئ المتري
		مصرية	
الإصبع (*db*)	مصر القديمة	أصغر تقسيم معياري	18.75 mm
الشبر (*šsp*)	مصر القديمة	4 أصابع؛ وحدة التناسب الأساسية	75 mm
الذراع العادية (*mh*)	مصر القديمة	6 أشبار؛ البناء اليومي	450 mm
الذراع الملكية (*mh nsw*)	مصر القديمة	7 أشبار؛ البناء التذكاري	525 mm
القصبة (*h3yt*)	مصر القديمة	10 أذرع ملكية؛ مسح الأراضي	5.25 m
سيكد†	مصر القديمة	ميل الهرم: أشبار لكل ذراع ملكية ارتفاعاً	بلا أبعاد
		بلاد الرافدين	
الذراع (*kus*)	بابل / سومر	وحدة طول معيارية	500 mm

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 15.3 — *تتمة من الصفحة السابقة*

الوحدة	الحضارة / العصر	سياق الاستخدام	المكافئ المتري
		أمريكا الوسطى	
تلاكشيتلي	الأزتك	من السرة إلى الأرض؛ وحدة قائمة على الجسم	$1.00 \approx$ m
تلالكواويتْل	الأزتك	قصبة أرض؛ وحدة مسح معيارية	$2.50 \approx$ m
		يونانية	
القدم الأتيكية	اليونان القديمة	شبكة تخطيط المعابد	308.5 mm
		بيزنطية	
القدم البيزنطية	الإمبراطورية البيزنطية	بناء الكنائس والمباني المدنية	312 mm
سبيثامي	الإمبراطورية البيزنطية	شبر (من الإبهام إلى الخنصر)	234 mm
		إيطالية — الـBraccio حسب المدينة (قبل الوحدة، قبل 1861)	
Braccio (فلورنسا)	توسكانا، القرنان 13–18	مقياس معماري وللقماش؛ 2 palmi	583 mm
Braccio (البندقية، da seta)	جمهورية البندقية	تجارة الحرير والتجارة البحرية	639 mm
Braccio (البندقية، da panno)	جمهورية البندقية	مقياس القماش	595 mm
Braccio (ميلانو)	دوقية / مملكة لومبارديا	البناء العام والقماش	595 mm
Braccio (روما)	الولايات البابوية	مقياس معماري (*da fabbrica*)	634 mm
Braccio (نابولي)	مملكة الصقليتين	مقياس القماش؛ $\approx$ 2.67 palmi	700 mm
Braccio (بولونيا)	الولايات البابوية / إميليا	مقياس عام	640 mm
Braccio (تورينو / بيدمونت)	مملكة سردينيا	البناء العام؛ 2 *piedi liprandi*	683 mm
Braccio (جنوة)	جمهورية جنوة	مقياس تجاري وإنشائي	595 mm
Braccio (فيرونا)	لومبارديا–البندقية	البناء والقماش	642 mm
Braccio (مانتوفا)	لومبارديا–البندقية	معيار بناء محلي	467 mm
Braccio (كريمونا، da fabbrica)	لومبارديا	التصنيع والبناء	483 mm
		العصور الوسطى وعصر النهضة (أخرى)	
Pied de roi	فرنسا قبل النظام المتري	القدم الفرنسية القياسية؛ الأعمال المعمارية والهندسية	324.84 mm
		عثمانية	

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Arşin	الإمبراطورية العثمانية	وحدة بناء؛ تخطيط الحمامات	757.7 mm

† ليست *seked* وحدة طول، بل مقياساً للميل: عدد الأشبار الأفقية لكل ذراع ملكية واحدة من الارتفاع الرأسي، وهو ما يكافئ ظل التمام الحديث لزاوية الوجه. وتبلغ قيمة seked في هرم الجيزة الأكبر $5\frac{1}{2}$ (أي 5 أشبار وإصبعان)، بما يقابل زاوية وجه قدرها $51.84°$.

ملاحظة: قيم braccio هي المعايير التقليدية السابقة لسنة 1861. وقد زيدت braccio الفلورنسية بمقدار $\frac{17}{16}$ (6.25%) بقانون 2 يوليو 1782؛ وتُذكر هنا القيمة التاريخية الأقدم، 583 mm. كما عُدلت القيم النابولية بالزيادة بمقدار $0.33\% \approx$ بعد سنة 1840.

لم يكن التباين اللافت في *braccio*، الجدول 15.4، بين دويلات إيطاليا قبل الوحدة—من 467 mm في مانتوفا إلى 700 mm في نابولي، أي نسبة تقارب 3:2—نتيجة عارضة لعدم الدقة، بل تعبيراً مقصوداً عن السيادة. فقد حافظت كل دولة إيطالية بغيرة على معاييرها الخاصة للأوزان والمقاييس، لأن السيطرة على القياس لم تكن تنفصل عن السيطرة على التجارة والضرائب وعقود البناء. ومن ثم كان توحيد *braccio* أحد الأفعال السياسية الصريحة لحركة توحيد إيطاليا: فقانون 28 يوليو 1861، الذي فرض النظام المتري في أنحاء مملكة إيطاليا الموحدة حديثاً، كان إعلاناً للسيادة الوطنية بقدر ما كان إصلاحاً عملياً. وتبين وحدتا braccio في البندقية—639 mm (*da seta*) لتجارة الحرير و595 mm (*da panno*) للقماش—طبقة أخرى من التعقيد: فحتى داخل الدولة-المدينة الواحدة، حافظت نقابات متنافسة على معايير متميزة لسلع مختلفة.

جدول 15.4: الـ*braccio* في دويلات إيطاليا قبل الوحدة

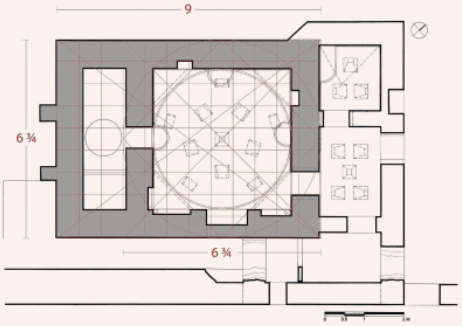
القيمة	الأسرة الحاكمة / السلطة	الكيان السياسي	المدينة
583 mm	ميديتشي؛ هابسبورغ-لورين بعد 1737	دوقية توسكانا الكبرى	فلورنسا
595 mm–639 mm	سيرينيسيما (مستقلة حتى 1797)	جمهورية البندقية	البندقية
595 mm	هابسبورغ الإسبان، ثم النمساويون	دوقية / مملكة لومبارديا	ميلانو
634 mm	الكرسي الرسولي	الولايات البابوية	روما
700 mm	ملكية البوربون	مملكة الصقليتين	نابولي
640 mm	الكرسي الرسولي (شبه مستقلة)	الولايات البابوية (مفوضية بولونيا)	بولونيا
683 mm	أسرة سافوي	مملكة سردينيا	تورينو
595 mm	سيرينيسيما (مستقلة حتى 1797)	جمهورية جنوة	جنوة
642 mm	البندقية، ثم النمسا بعد 1797	جمهورية البندقية → لومبارديا–البندقية	فيرونا
467 mm	غونزاغا، ثم هابسبورغ النمساويون	دوقية مانتوفا → لومبارديا–البندقية	مانتوفا
483 mm	هابسبورغ الإسبان، ثم النمساويون	دوقية ميلانو → لومبارديا–البندقية	كريمونا

ملاحظة: احتفظت البندقية بوحدتي braccio مختلفتين في آن واحد—639 mm (*braccio da seta*) لتجارة الحرير و595 mm (*da panno*) للقماش العام—مما يعكس سيطرة النقابات، لا الدولة وحدها، على معايير القياس. وجميع القيم معايير تقليدية سابقة لسنة 1861؛ وقد فرض قانون 28 يوليو 1861 النظام المتري في أنحاء إيطاليا الموحدة.

الاستمرارية من العصور القديمة إلى العصر العثماني يبين هذا التقليد التنفيذي استمرارية لافتة. فالأدوات الأساسية نفسها—الحبال المعقودة، والشواقل، والمربع الدوار، والمثلث المدرج—تظهر في البناء المصري نحو 2500 ق.م، وتخطيط الكنائس البيزنطية في القرن العاشر، والعمارة السكنية العثمانية في القرن الثامن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عشر (Oikonomou, 2022). وعمل البناؤون العثمانيون على شبكة *arşin* (75.77 cm)، فخططوا محيط الحمامات بمثلثات 3-4-5 مكبرة، وحددوا مخططاتها الداخلية المثمنة بعمليات *ad quadratum*—وهو المنطق الهندسي نفسه الذي نظم الكنائس البيزنطية ثلاثية المحاريب قبل ألف عام. وحين ذكر النجار الألباني أن ارتفاع السقف يُحصل عليه "بحبل بسيط، إلى ربع عرض البيت"، كان يصف ممارسة يمتد أصلها إلى ماسحي الحبال في وادي النيل. ويوضح الشكل 15.11 كيف طُبقت هذه العدة الهندسية على حمام عثماني في شمال اليونان: شبكة *arşin* وتخطيط المثلث الفيثاغوري 3-4-5. ويُرسم المحيط على شبكة 4×3 *arşin*؛ أما الداخل المثمن فيُشتق من عملية *ad quadratum*.



شكل 15.11: حمام عثماني في فلورينا (القرن الثامن عشر)، أعيد رسمه نقلاً عن Oikonomou, 2022

تمثل هذه الهندسة التنفيذية الركيزة العملية تحت الصرح النظري لفيتروفيوس وألبيرتي وبالاديو. فقد دوّن مؤلفو الكتب *ما* ينبغي تحقيقه من نسب؛ وعرف المعلمون البنّاؤون كيف يحققونه، بعدة من العمليات الهندسية التي لم تترك سجلاً مكتوباً، لكنها شكلت كل منشأ عظيم في العالم الغربي.

15.3 فاصل: المعماريون والمهندسون—فن وعلم؟

يتبين من الأقسام السابقة أن أدوار المعماري والبنّاء وبنّاء الحجر والمهندس لم تكن متميزة دائماً. فحتى منتصف القرن الثامن عشر، اجتمعت هذه الوظائف في شخص واحد: المعلم البنّاء. واعتمد البناؤون أولاً على التجربة والخطأ—أي على الإخفاقات—ثم على قواعد خبرة وقوانين نسب مشتقة استدلالياً، تناقلتها الأجيال.[21]

لخصت الناقدة المعمارية آدا لويز هكستابل هذه الوحدة التاريخية جيداً:

> نوقشت طبيعة العمارة قروناً. أهي فن أم إنشاء، جماليات أم هندسة—أو إن كانت مزيجاً منهما، فبأي نسبة—ذلك تحد دائم وموضوع مستمر للجدل.
>
> ولم يكن الأمر كذلك دائماً. فعلى الرغم من أن الأسئلة نفسها خالدة، فإن الالتباس بشأنها حديث النشأة نسبياً في الواقع. ففي روما، شمل دور المعماري بلا تحفظ جميع أنشطة المهندس. وقد لاحظ فيتروفيوس، في كتابه في *العمارة*، المكتوب بين سنتي 25 و23 ق.م، أن مسؤوليات المعماري تشمل البناء والميكانيكا—وليس أقل

[21] قد نعجب اليوم بالمنشآت القديمة الباقية، لكن ينبغي ألا ننسى أنها تمثل جزءاً متناهي الصغر مما بُني، وأنها تكاد جميعاً تكون مصممة بإفراط وفق المعايير الحديثة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> فنون عصره الميكانيكية شأناً—صناعة الساعات، مع تشديد خاص على أن يراعي البناء بالتساوي المتانة (المنشأ) والمنفعة (الوظيفة) والرشاقة (الفن).
>
> وتوضح سجلات مكتب فيلار دو أونيكور سنة 1235 أن "المعلم البنّاء" في العصور الوسطى ظل معمارياً ومهندساً معاً، ونعلم من مؤلَّف ليون باتيستا ألبيرتي المعماري الحاسم في سنتي 1451–1452 أن عصر النهضة لم يأت بتقسيم للعمل. فقد عد إنسان عصر النهضة المتعدد المواهب جميع الفنون مجاله، والهندسة كلها جزءاً من الفن.
>
> (Huxtable, 2017, p. 11)

جاء الفصل في القرن الثامن عشر، مدفوعاً بظهور الميكانيكا العقلانية ومأسسة التعليم التقني. ففي فرنسا، أنشأ تأسيس 1747 (*École des Ponts et Chaussées*)، ثم 1794 (*École Polytechnique*)، شخصية جديدة: الـ*ingénieur*، المتدرب في الرياضيات والميكانيكا، المتميز من الـ*architecte* المتدرب في *École des Beaux-Arts* على التأليف والرسم والتاريخ. وفي بريطانيا، رسخ وصف جون سميتون نفسه بأنه "مهندس مدني" (1768) وتأسيس مؤسسة المهندسين المدنيين (1818) الفصل نفسه. وزاد نظام الجامعات الألمانية في القرن التاسع عشر، بتأكيده البحث الخالص إلى جانب التدريس، من احتراف التخصصين (**Graham and Diamond, 2004**).

ومنذ ذلك الحين، أصبح احتمال الصدام بين العمارة والهندسة حقيقياً. وقد وصف بيير لويجي نيرفي، متأملاً تدريبه، هذا الانقسام بصراحته المعهودة:

> حين درست في مدرسة الهندسة المدنية الممتازة في بولونيا، لم تكن كلمة العمارة تشير إلا إلى دراسة الواجهات وتفاصيلها. ولم يخطر لأساتذتنا، ولا لنا حتى، أن جسراً أو منشأ حاملاً أو مخططاً حضرياً يمكن أن يكون أيضاً عملاً معمارياً.... وكانت منشآت الخرسانة المسلحة أو الحديد، رغم وجود أمثلة آنذاك لجسور عظيمة ولبرج إيفل، تُعد مآثر تقنية طُورت في ميادين لا صلة لها بالعمارة.... وكانت هذه التصاميم أشد اهتماماً بمظهر المبنى من طريقة تركيبه، وهو نهج يقوم على شكلانية زائفة تؤكد "الانقسام بين الجوهر والمظهر... عقلية المزخرف، التي يصبح معها كل شيء ممكناً في ميدان القوالب والزخرفة التشكيلية والتصويرية... والجهل بالكيان الفيزيائي للعمارة، التي لا تستطيع، مثل الكائن الحي، فصل الجمال عن الصحة الفيزيولوجية للجسد."
>
> (Huxtable, 2017, p. 21)

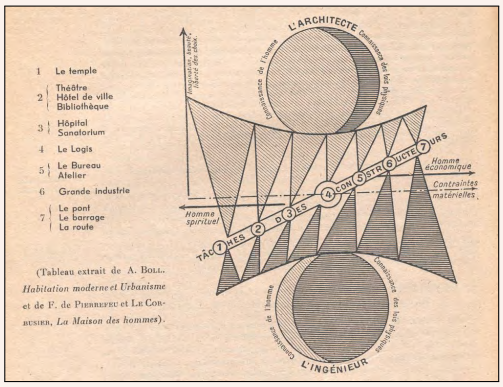
ومن المفارقات أن معمارياً عظيماً هو من منح الدور الإبداعي للمهندسين قدراً كبيراً من المصداقية. فقد كتب لو كوربوزييه في 1923 (*Vers une architecture*)، الشكل 15.12a:

> جماليات المهندس والعمارة أمران يسيران معاً وينشأ أحدهما من الآخر: بلغ الأول الآن ذروته، بينما يعاني الآخر حالة مؤسفة من التراجع.
>
> المهندس، الملهم بقانون الاقتصاد والمحكوم بالحساب الرياضي، يجعلنا ننسجم مع القانون الكوني. إنه يحقق الانسجام.
>
> أما المعماري، فيحقق بترتيبه الأشكال نظاماً هو خلق خالص لروحه؛ وبالأشكال والهيئات يؤثر في حواسنا تأثيراً حاداً ويثير انفعالات تشكيلية.
>
> (Le Corbusier, 1931)

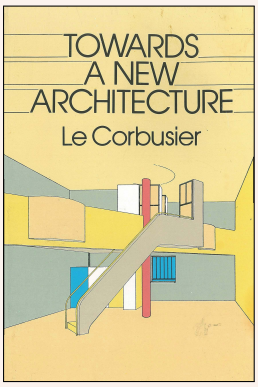
لم تكن رؤية لو كوربوزييه للـ*ingénieur-architecte*—المجسدة في مخططه التصويري الشهير (الشكل 15.12b)—دعوة إلى أن يصبح المهندسون معماريين أو العكس، بل إلى أن يدرك كلاهما أن البناء العظيم يتطلب توليف المنطق الإنشائي والفن الفراغي.

وجدت هذه الرؤية صداها عند المهندس الإسباني إدواردو توروخا:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) مخطط لو كوربوزييه التصويري للـ*ingénieur*
(*architecte* (Pierrefeu **and** Corbusier, 1942



a) Le Corbusier,)
1931

شكل 15.12: مخطط لو كوربوزييه التصويري للـ*ingénieur-architecte* (Pierrefeu **and** Corbusier, 1942).

> يتعلق التصميم الإنشائي بما هو أكثر بكثير من العلم والتقنيات: فهو معني أيضاً إلى حد بعيد بالفن والحس السليم والشعور والاستعداد ومتعة مهمة ابتكار الخطوط الملائمة التي تضيف إليها الحسابات العلمية اللمسات الأخيرة، مثبتة أن المنشأ سليم وقوي وفق المتطلبات.
>
> ليست الرياضيات إلا أداة مريحة يحدد بها المصمم النسب الفيزيائية وتفاصيل منشأ مخطط، كي يحول أفكاره من خطوط المخطط إلى حقيقة منشأ مكتمل.
>
> (Torroja, Polivka **and** Polivka, 1958)

ومع ذلك، يستمر الانقسام المهني. وكما لاحظ هنري بتروسكي، يلعن المهندسون المعماريين الذين يتصورون مباني يتطلب تنفيذها التواءات استثنائية من الخرسانة الثقيلة والأعمال الفولاذية؛ ويحتقر المعماريون المهندسين الذين يتهمونهم بالافتقار إلى الإبداع الإنشائي أو إلى الرغبة في إطلاق خيالهم (Petroski, 1997).

للإيطاليين كلمة تصف من يتجاوز هذا الانقسام: *progettista*—أي من يتصور المشروع كاملاً ويحققه، موحداً التصميم والتنفيذ، والشكل والمنشأ. والشخصيات التي نبحثها في الأقسام التالية—من أساتذة الكاتدرائيات القوطية المجهولين إلى مايار ونيرفي وكانديلا وخان—كلهم، بطرائقهم المختلفة، *progettisti*. وهم يبرهنون أن ثالوث فيتروفيوس لم يكن قط قائمة للاختيار منها، بل وحدة ينبغي تحقيقها.

15.4 الرواد

مع أن التاريخ شهد اختلاطاً بين العمارة والهندسة، ينشأ سؤال طبيعي: هل استمر ذلك بعد ظهور الهندسة الإنشائية تخصصاً علمياً؟ يؤطر هذا البحث سؤالان:

1. هل لدينا مهندسون حديثون أفضت تصاميمهم إلى منشآت جميلة في *ذاتها*—أعمال تمس حساسية المعماري؟

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. هل لدينا معماريون حديثون تتحدى تصاميمهم الجريئة أو المبتكرة المهندس الإنشائي ليتفوق على نفسه؟[22]

يتناول هذا القسم السؤال الأول بالتركيز على "المهندسين الحقيقيين" الذين كانوا رواد التصميم قبل ظهور الحواسيب.

حين يصبح المنشأ فناً: جماليات الضرورة

مع أن العمارة كثيراً ما تُحتفى بتعبيرها البصري، فإن المنشأ الكامن هو ما يجعل هذا التعبير ممكناً. وفي بعض الأعمال الاستثنائية، تصبح الضرورة الإنشائية نفسها المصدر الرئيس للقوة البصرية. فهذه ليست مباني يُسدل فيها الشكل فوق الوظيفة، بل مبان يكون الشكل فيها هو الوظيفة—يكشف كيف تسري القوى في الفضاء بدلاً من حجبها. ولا تكمن أناقة هذه المنشآت في الزخرفة، بل في وضوح أشكالها وحتميتها. وحين تُواجه التحديات الهندسية بالدقة والخيال، قد تكون النتيجة جميلة بعمق: منشأ عقلاني ومعبر في آن.

يُكرس هذا القسم لمنشآت أيقونية تصورها مهندسون إنشائيون—تصاميم لا تحل تحديات تقنية شاقة فحسب، بل تأسر العين والخيال أيضاً. وفي كل حالة تقريباً، تنشأ هندسة هذه التصاميم ونسبها وإيقاعها مباشرة من القوى التي يجب أن تقاومها والأحمال التي يجب أن تحملها. ومع ذلك، فإنها تحقق، بأداء دورها الإنشائي، نوعاً من الفن—فتتكلم عبر الأقواس والجمالونات والكابلات والقشريات بلغة ضرورة تصير شعراً في الفضاء (Pedreschi, 2008).

تناول لو كوربوزييه في وقت مبكر السؤال المحوري لهذا القسم:

> ينتج مهندسونا عمارة، لأنهم يستخدمون حساباً رياضياً مشتقاً من قانون طبيعي، وتمنحنا أعمالهم شعوراً بالانسجام. ومن ثم فللمهندس جمالياته الخاصة، إذ يجب عليه، عند إجراء حساباته، أن يقيد بعض حدود معادلته؛ وهنا يتدخل الذوق. والآن، حين يعالج الإنسان مسألة رياضية، ينظر إليها من وجهة نظر مجردة خالصة، وفي هذه الحال يجب أن يسلك ذوقه طريقاً أكيداً ثابتاً.
>
> (Le Corbusier, 1931)

أفضل ما عبّر به الإيطاليون عن دور المهندس-المعماري هو مصطلح *progettista*—أي من يضع مشروعاً ذا طبيعة معمارية أو تقنية من خلال عملية تصميم: الشخصية المهنية التي تتصور أولاً ما سيُبنى، مستندة إلى خلفية ثقافية وخبرة تقنية كافية. وتبرز الأقسام التالية بإيجاز منشآت أيقونية صممها *progettisti*.

15.4.1 الدعامة الطائرة: المنطق الإنشائي وقد صار مرئياً

تمثل الدعامة الطائرة أحد أقدم الأمثلة الأيقونية على اتباع الشكل للوظيفة، وكانت نتائجها مبهرة. وقد ولدت من الضرورة في العصر القوطي، إذ عالجت تحدياً إنشائياً أساسياً: الدفع الجانبي الذي تولده القبوات المضلعة والأسقف الحجرية الثقيلة في الكاتدرائيات الفسيحة. وبدلاً من الاعتماد على الجدران الضخمة وحدها لمقاومة هذه القوى، تصور البناؤون حلاً خارجياً جريئاً—مساند مقوسة توجه الأحمال الأفقية إلى الخارج ثم إلى أسفل نحو ركائز بعيدة.

[22] حتى زها حديد (1950–2016)، التي درست الرياضيات في المرحلة الجامعية في الجامعة الأمريكية في بيروت، وربما شعرت لذلك بالارتياح إلى تصميم المنشآت المنحنية، كان المعماريون البارزون كلهم رجالاً.

سرعان ما تطور ما بدأ استجابة عملية للقيود الهندسية إلى سمة معمارية محددة. فلم تحرر الأقواس النحيلة الشاهقة للدعامات الطائرة الفراغ الداخلي للنوافذ الزجاجية الملونة والتعبير الرأسي فحسب، بل أصبحت إيماءات جمالية في ذاتها. والتقى فيها الوضوح الإنشائي بالرشاقة النحتية، فافتتحت تقليداً طويلاً يمكن فيه لعمل المهندس الإنشائي أن يكون عملاً فنياً أيضاً.

والواقع أنه يستحيل كتابة عرض عام لنظرية التحليل الإنشائي من دون الإشارة إلى الكاتدرائيات القوطية. فقد كانت نتيجة تجريب إنشائي جريء لم يظهر مثله ثانية حتى تشييد الجسور طويلة البحور والمباني ذات الإطارات المعدنية في النصف الثاني من القرن التاسع عشر (Mark, 1978).

ورغم روعة هذه المنشآت، التي ترتفع إلى العلاء تمجيداً لله مع أقصى قدر من الضوء (بخلاف الكنائس الرومانسكية السابقة)، فقد قدمت الكاتدرائيات القوطية تحديات تقنية أقل مما قد يتوقع المرء. وظلت تُصمم بقواعد خبرة نُقحت عبر الأجيال—أي لا بد أن حوادث مميتة متعددة وقعت في الطريق.

تتصل موضوعات كثيرة تهم المهندس الإنشائي بالعمارة القوطية: القباب والقبوات المضلعة والأقواس وغيرها. غير أن هذا القسم يقتصر على الأهمية الإنشائية للدعامات الطائرة.

عند النظر إلى كاتدرائية قوطية، تبرز الدعامات الطائرة فوراً. وقد استُخدمت أول مرة لتوفير الاستقرار للطبقة العلوية المزججة من صحن نوتردام دو باري (Murray, 1998) قبل سنة 1180 بقليل. ومع ذلك، لا تخبرنا السجلات الباقية من العصر إلا بالقليل جداً عن تقنيات التصميم المستخدمة في إنجاز تقني بارز كهذا. ولذلك يصح استبعاد استخدام أي منهج علمي. كما أن غياب النظرية الإنشائية يلغي إمكان النمذجة الكمية على مقياس صغير؛ إذ لم يكن في وسع البنّائين التنبؤ بيقين بما إذا كانت العناصر الإنشائية الصالحة في المباني الأصغر ستؤدي أداءً موثوقاً عند المقياس الكبير للبناء الجديد.

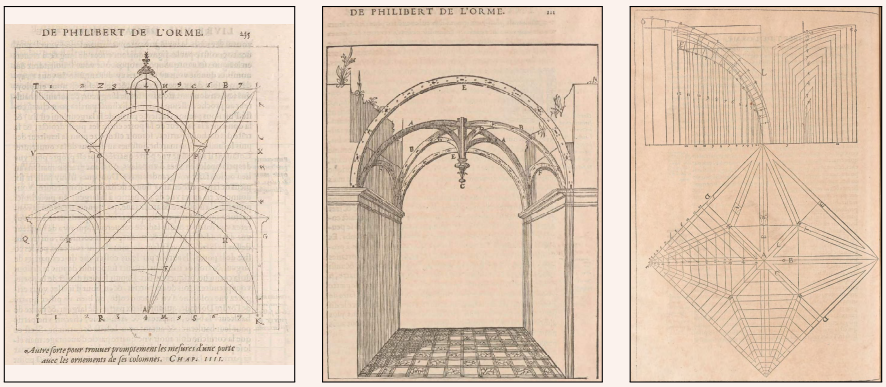
غير أن ثمة استثناء مهماً هو الاستقرار الإجمالي ضد الانقلاب تحت أحمال الوزن الميت، وهو لا يعتمد على المقياس. فقد يصلح نموذج بحجم منضدة للدلالة على الاستقرار الإجمالي لمبنى بالحجم الكامل. وساعدت حقيقة السلوك الإنشائي هذه على تعويض بعض مشكلات التصميم الجديد واسع المقياس—مع أن بنّائي العصور الوسطى ربما لم يدركوها (Mark, 1978).

نُشر في باريس سنة 1568 مؤلَّف أساسي في العمارة لفيليبر دو لورم (De l'Orme, 1561). وهو أول عمل يقدم فن الإسقاط الحجري، ويضم بحثاً بالغ الاكتمال يصف *les traicts geometriques qui montrent comme[nt] il fault tailler et coupper les pierres*—أي الطرائق الهندسية لقطع الحجارة وتشكيلها، أو بعبارة أبسط: فن الحصول من المخططات والتصاميم على أشكال الحجارة المفردة في هيئة ملائمة ليشيد البنّاء المبنى المقترح.

وفي القرن التاسع عشر لاحقاً، كتب أوجين فيوليه-لو-دوك الشهير *Dictionnaire Raisonné* (Viollet-le-Duc, 1854). غير أن أهم إسهاماته النظرية جاء في *Discourses on Architecture* (Viollet-le-Duc, 1875)[23]، حيث صاغ فلسفة شاملة للوضوح الإنشائي والمبادئ الكامنة وراء التصميم القوطي—وهو عمل يصل بين التقليد التجريبي في العصور الوسطى والنظرية الإنشائية الحديثة. (لدوره التأسيسي في فهم

[23] هذا معجم أبجدي شامل ضخم في تسعة مجلدات لجميع المصطلحات المعمارية، يضم مئات الرسوم البالغة الدقة والجمال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.13: رسوم من دو لورم (De l'Orme, 1561)

المبادئ الإنشائية القوطية، انظر §4.3.) كما رمم—أو "شوّه" بحسب بعض المؤرخين المحدثين—مباني كثيرة من العصور الوسطى تضررت في الثورة الفرنسية.[24]

وكتب Willis, 1910 مؤلَّفاً ضخماً آخر، استهله بقوله:

> تختلف القبو المضلعة في العصور الوسطى ...اختلافاً تاماً عن قبوات الرومان. فهي تتألف ...من إطار من الأضلاع، أو الأقواس الحجرية، ترتكز عليه القبوات الحقيقية أو الأغطية الفعلية للحجرة. وتُبنى هذه القبوات عادة من مادة أخف وبصنعة أخشن من الأضلاع التي ترتكز عليها، والتي تشكل بينها، في الواقع، نوعاً من اللوح الرقيق. ولا يثير بناء هذه الأضلاع صعوبة في قطع الحجر، إذ يمثل كل منها، إذا نُظر إليه منفرداً، قوساً بسيطاً؛ ومع ذلك، لا يكاد يُتصور الحصول على أشكال صنجاته من دون رسم هيئة هذا القوس بالحجم الكامل على الأرض، لاستخراج قوالب وجوه الصنجات منها.
>
> Willis, 1910 On the construction of the vaults of the Middle Ages

وأخيراً، سعى Mark **and** Prentke, 1968 في بحث بارز إلى مزيد من الفهم بتحليلات مفصلة (باستخدام تقنيات المرونة الضوئية) لعدد من الكنائس القوطية الكبرى. وكشفت تحليلاته أن البرج المدبب الموضوع فوق الحواف الخارجية للركائز-الدعامات—وهي المنشآت الشبيهة بالأبراج على محيط الكنيسة، التي تقاوم الدفع الخارجي للدعامات الطائرة—ساعد على الحفاظ على تكامل الركيزة-الدعامة بالتغلب على الشد الموضعي الناتج من اجتماع أحمال الوزن الميت والرياح: إذ يولد وزن البرج المدبب ضغطاً في الركيزة-الدعامة يلغي الشد. ويعمل البرج المدبب عنصراً سابق الإجهاد.

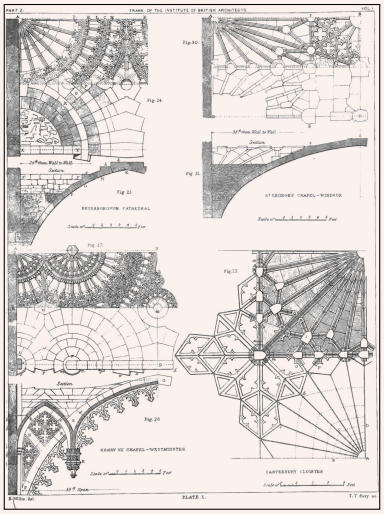
كان هذا الاكتشاف مدهشاً لأن الوظيفة التقنية للبرج المدبب يحجبها دوره الزخرفي الطاغي، ولأن اعتبارات الاستقرار الإجمالي كانت ستضعه على الحافة الداخلية للركيزة-الدعامة لا الخارجية.

ولم يغب الدور الإنشائي للبرج المدبب عن المهندسين الذين صمموا جسر ألكسندر الثالث شديد التسطح في باريس (الشكل 15.15b)، المشيد تكريماً للتحالف الفرنسي الروسي سنة 1892.

لفهم أعمق للعلم الكامن وراء الكاتدرائيات القوطية، ينبغي للقارئ الرجوع إلى Heyman **andothers,** 1992 و Heyman, 1998b.

[24] فمثلاً، سمح لنفسه بإضافة برج مدبب إلى صحن نوتردام دو باري المركزي (الذي احترق حديثاً)، مع أنه لم يكن موجوداً قط قبل تدخله.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.14: رسوم من Willis, 1910



(a) دعامة طائرة Viollet-le-Duc, 1854)

(b) جسر ألكسندر الثالث، باريس

شكل 15.15: انتقال حمل الدفع في الأقواس

15.4.2 غوستاف إيفل (1832–1923)

كان غوستاف إيفل المثال النموذجي للمهندس الفرنسي، والنتاج الخالص لـ*Grandes Écoles* النخبوية.[25] ولعله أبرز مثال لمهندس صمم "منشأ" لا يؤدي أي غرض إطلاقاً[26] غير أن يكون شهادة فنية على *براعة*

[25] مع أنه اختار، على نحو مفاجئ، *École Centrale des Arts et Manufactures* بدلاً من *École Polytechnique* الأرفع مكانة بكثير.

[26] مع احتمال استثناء مطعم في الطابق الثالث.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فرنسا في إتقان منشآت الحديد المطاوع لمعرض العالم سنة 1889؛ وقد وثق إيفل المشروع بنفسه في دراسة فاخرة من مجلدين نُشرت في العقد التالي (Lemoine, 2002).[27]

مع أن إيفل كان مسؤولاً عن التصميم النهائي، فقد وضع التصور الأصلي مهندسان آخران في شركته: موريس كوشلان وإميل نوغييه. ولم يحظ كوشلان إلا بقليل من الاعتراف، مع أنه شارك بكثافة في تصميم برج إيفل وجسر غارابيت، إلى جانب منشآت أخرى.

وكان إيفل قد صمم من قبل الهيكل الحديدي الداخلي لتمثال الحرية للنحات أوغست بارتولدي. ثم صمم لاحقاً جسوراً علوية ومحطات سكك حديدية متعددة في بلدان عدة. ويبين الشكل 15.16b جسره القوسي الشهير ذي المفصلين، جسر ماريا بيا.



(a) الفن: البرج



(b) الهندسة: الجسر

شكل 15.16: غوستاف إيفل: البرج والجسر

كثيراً ما يُعجب بالشكل المتناقص للبرج بوصفه اختياراً جمالياً خالصاً، لكن مقطعه اشتُق في الواقع من ضرورة هندسية: فقد شكل إيفل كل قطاع بحيث تظل محصلة ضغط الرياح على المنشأ فوق أي قطع أفقي مماسة لحافتي البرج، مخفضة إجهادات الانحناء الناتجة من أحمال الرياح. وقد دُرس لاحقاً هذا المنطق الريحي الكامن وراء انحناء البرج تحليلياً بمقارنته بنماذج حديثة لمقطع الرياح في الطبقة الحدية الجوية، فأكد مدى اقتراب شكل إيفل المشتق تجريبياً من استباق نظرية الديناميكا الهوائية اللاحقة (Weidman, 2009).

وكما سيشارك نيرفي لاحقاً في *ferrocemento* لقشرياته، شارك إيفل نفسه في التصنيع من خلال *Eiffel Constructions Métalliques*. وكما سيكون لموراندي لاحقاً نوع جسور يمثل "توقيعه"، كان لإيفل جسره القوسي ذو المفصلين بوصفه توقيعه:[28] جسر ماريا بيا (Thrall, Billington **and** Bréa, 2012)، وجسر غارابيت، وجسر دوم لويس، وجسر فيانا دو كاستيلو الطرقي الحديدي، وغيرها.

[27] تغلب إيفل على تصميم منافس لجول بورديه، اقترح "برج شمس" مكسواً بالغرانيت ومضاءً بالكهرباء—وهو مفهوم أدنى جمالياً وإنشائياً كان سيكون أغلى بكثير وأقل ابتكاراً (Bourdais, 1881). انظر §15.5.5 لعرض أوفى لهذه المسابقة.

[28] كما يظهر في الفصل 31، تحليل الأقواس ذات المفصلين أعقد بكثير من تحليل الأقواس ذات المفاصل الثلاثة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كانت شركة إيفل، *Compagnie des Établissements Eiffel*، في طليعة الإطارات الحديدية مسبقة الصنع (Établissements Eiffel, 19th Century). وقد أتاح هذا النهج الصناعي تشييد الجسور والأبراج وغيرها من المنشآت بسرعة وبتكلفة فعالة. وشدد على النمطية بطرائق رئيسة عدة، وهو نهج دُرست لاحقاً بالتفصيل مبادئ التحسين الإنشائي الكامنة وراءه (Sundaram **and** Ananthasuresh, 2009):

- **التصنيع المسبق:** صُنعت المكونات في الورش بدقة عالية، ثم نُقلت إلى الموقع للتركيب، مما خفض زمن التشييد في الموقع وضمن ضبط الجودة.
- **المكونات المعيارية:** استخدم إيفل مكونات حديدية وفولاذية معيارية يمكن إنتاجها بكميات كبيرة وإعادة استخدامها في مشروعات متعددة—فكانت اقتصادية وقابلة للتوسع.
- **الوصلات بالمسامير والبرشام:** فضل الوصلات المثبتة بالمسامير والبرشام على تقنيات البناء الحجري أو اللحام التقليدية، مما سهل التجميع والتفكيك.
- **منشآت خفيفة وقوية:** استخدم تصاميم شبكية وجملونية لتحسين استعمال المواد، فجعل المنشآت أخف مع الحفاظ على مقاومتها.
- **قابلية التكيف:** أتاح النهج النمطي تكييف تصاميمه مع التضاريس المعقدة، مثل الأودية شديدة الانحدار والأنهار، كما في جسر غارابيت وغيره من جسور السكك الحديدية.

أحدثت مبادئ النمطية هذه ثورة في البناء واسع النطاق، وألهمت تقنيات التصنيع المسبق والتصميم النمطي الحديثة في العمارة والهندسة.

لطخت مشاركة إيفل في فضيحة قناة بنما سمعته مؤقتاً، مع أنه بُرئ لاحقاً (Charle, 2004). ولا يزال إرثه في الإنشاء المعدني بلا نظير، إذ وضع الأساس لناطحات السحاب والجسور طويلة البحور الحديثة.

15.4.3 لويس هنري سوليفان (1856–1924)

وُلد سوليفان سنة 1856، ودخل معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا في السادسة عشرة. وبعد عمل قصير في شيكاغو، التحق بـ*École des Beaux-Arts* في باريس، ثم أمضى بعض الوقت مسافراً إلى روما وفلورنسا.

جمع أسلوب سوليفان المعماري كتلًا ضخمة إلى زخرفة معقدة. وكانت الزخرفة عنده عنصراً يعزز مباني الإطارات الفولاذية المباشرة في ما عدا ذلك.

ولكونه واحداً من القلائل جداً الذين تدربوا في الهندسة والعمارة معاً، فليس مستغرباً أن يكون هو من صاغ العبارة المأثورة الشهيرة (Sullivan, 1896 PDF) للمنشآت (في مقابل العمارة)، الواردة أدناه:

> لكن العين الثابتة لمن يقف على شاطئ الأشياء، ناظراً قبل كل شيء وبأعظم المحبة إلى الجانب الذي تشرق عليه الشمس والذي نشعر بفرح أنه الحياة، يبهج قلبها دائماً الجمال والعفوية الرائعة التي تطلب بها الحياة أشكالها وتتخذها في توافق يستجيب لحاجاتها تماماً. ويبدو دائماً كأن الحياة والشكل واحد لا ينفصل، لشدة اكتمال الإحساس بالتحقق. وسواء كان النسر ينساب في طيرانه، أم زهرة التفاح تتفتح، أم حصان العمل يكدح، أم البجعة تمرح، أم شجرة البلوط تتفرع، أم الجدول يلتوي عند قاعدتها، أم السحب تنجرف والشمس تجري فوق الجميع، فإن الشكل يتبع الوظيفة دائماً، وهذا هو القانون. إنه القانون الساري في كل الأشياء العضوية وغير العضوية، وكل الأشياء الفيزيائية والميتافيزيقية، وكل الأشياء البشرية وما فوق البشرية، وكل التجليات الصادقة للرأس والقلب والروح: أن تُعرف الحياة في تعبيرها، وأن *الشكل يتبع الوظيفة دائماً*. هذا هو القانون. وحيث لا تتغير الوظيفة، لا يتغير الشكل. فصخور الغرانيت والتلال المتأملة أبداً تبقى دهوراً؛ والبرق يحيا ويتخذ شكلاً ويموت في لمح البصر. ... وهكذا،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- حين تحكم الغريزة الفطرية والحس ممارسة فننا المحبوب؛
- حين يكون القانون المعروف المحترم أن الشكل يتبع الوظيفة دائماً؛
- حين يكف معماريونا عن التبختر والثرثرة، مقيدي الأيدي مزهوين في مصح مدرسة أجنبية؛
- حين يُشعر حقاً ويُقبل بمرح أن هذا القانون يفتح شمس الحقول الخضراء وهواءها، ويمنحنا حرية تمنع كل إنسان عاقل حساس، بفعل جمال تطبيق القانون نفسه وفخامته كما يظهران في الطبيعة، من تحويلها إلى انفلات؛
- حين يتضح أننا لا نفعل إلا التحدث بلغة أجنبية بلكنة أمريكية ملحوظة، بينما يمكن لكل معماري في البلاد، تحت التأثير الحميد لهذا القانون، أن يعبر بأبسط الطرق وأكثرها تواضعاً وطبيعية عما في داخله ليقوله؛ وأن ينمي حقاً وبالتأكيد فرديته المميزة، وأن يصبح الفن المعماري معه صورة حية للكلام، وصورة طبيعية للتعبير، تمنحه السكينة وتضيف كنوزاً صغيرة وكبيرة إلى فن بلاده النامي؛
- حين نعرف ونشعر أن الطبيعة صديقتنا لا عدوتنا التي لا تلين، وأن ظهيرة في الريف، أو ساعة على شاطئ البحر، أو مشهداً كاملاً مفتوحاً ليوم واحد من الفجر إلى الظهيرة العالية فالشفق، يوحي إلينا بالكثير مما هو إيقاعي وعميق وخالد في فن العمارة الشاسع، شيء عميق وصادق إلى حد لا تستطيع معه جميع الشكليات الضيقة والقواعد الجامدة والقيود الخانقة للمدارس أن تخنقه فينا،

—عندئذ يمكن إعلان أننا على الطريق السريع إلى فن طبيعي مرضٍ، وعمارة ستصبح قريباً فناً جميلاً بالمعنى الحقيقي الأفضل للكلمة، فناً سيحيا لأنه سيكون من الشعب وللشعب وبالشعب.

(Sullivan, 1896)

ملاحظة: قد تبسط صياغة سوليفان الخطية العلاقة بين الفضاء والشكل تبسيطاً مفرطاً. وكما لاحظ الفيلسوف الروسي بافل فلورنسكي:

> "سندور إذاً في حلقة إذا حاولنا تحديد أيهما يسبق الآخر: المكانية أم الشيئية."
>
> Florensky, 1996 Beyond Vision: Essays on the Perception of Art

يوحي هذا بأن الفضاء المعماري يمكن أن يؤثر في الشكل الإنشائي بقدر ما تشكل المتطلبات الوظيفية التجربة الفراغية—وهي علاقة متبادلة فهمها أعظم المهندسين الإنشائيين، من نيرفي إلى توروخا، فهماً حدسياً في أعمالهم.

الجزء الثاني مزهر جداً على طريقة كبلنغ. ومن الواضح أن مهارات سوليفان الكتابية لا تنسجم مع البساطة التي يدعو إليها في المنشآت. ومع أن سوليفان آمن بوجوب تعبير المباني عن وظيفتها، فقد كانت منشآته ضخمة[29]. ورغم اعتباره مبتكراً في تصميم المباني العالية، لم يستطع الامتناع عن الزخرفة فيما كان آنذاك أعظم إسهام أمريكي في نشأة العمارة الحديثة: المنظومة الإنشائية الفولاذية.

كان سوليفان مرشداً لفرانك لويد رايت الشاب. ومن المؤسف أن سنواته العشرين الأخيرة اتسمت بتدهور سريع، وقلة التكليفات، والصعوبات المالية، وإدمان الكحول.

15.4.4 روبرت مايار (1872–1940)

بفضل عمل بيلينغتون (Billington, Mark **and** Abel, 1972; Billington, 1979)، رُفع مايار إلى منزلة المثال الأسمى لـ"الفنان الإنشائي".

[29] وهو ما يفسر سبب عدم رؤيتي حاجة إلى تضمين صورة لأي من منشآته.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كان روبرت مايار (الشكل 15.17a) مهندساً سويسرياً تدرب في سلف المعهد الاتحادي السويسري للتكنولوجيا في زيورخ (ETH)، حيث درس على فيلهلم ريتر (وهو نفسه تلميذ كولمان) وأصبح من أشد أنصار الاستاتيكا البيانية.

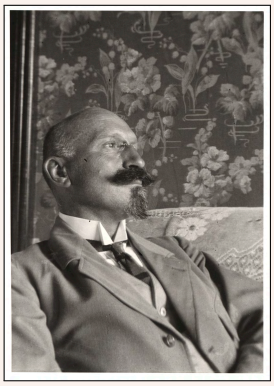
كره مايار الإفراط في النظرية، وفهم ضرورة وضع الافتراضات وتصور السلوك الإنشائي.[30] ومن المثير للاهتمام أن مهندسين سويسريين بارزين آخرين اتبعا نهجاً مماثلاً في زمن متأخر بكثير: جيوفاني لومباردي في تصميم السدود، وكريستيان مين الذي اعتمد الحساب بعد إتمام التصاميم الأولية لتنقيحها.

كان مايار رائداً في استخدام الخرسانة المسلحة، وصمم عدداً من الأقواس ذات المفاصل الثلاثة (كما يظهر في §31.1.1.2.3، تحليلها بسيط جداً)، مسترشداً بحس جمالي مرهف.

كان لسويسرا—ولا يزال لها—تقليد في تنظيم مسابقات مفتوحة لاختيار المشروعات المدنية، مع اعتماد الاختيار على معايير متعددة لا على التكلفة وحدها. وبفعل تقليد البلاد القائم على الحساب البسيط المقترن بفهم جيد ("إحساس") بالاستجابة الإنشائية، أمكن للتصاميم الأصيلة أن تزدهر. وقد تعارض هذا مع ثقافات اعتمدت بإفراط على استلهام التصاميم السابقة المعززة بالرياضيات، مثل الثقافة الألمانية أو الفرنسية آنذاك—وهي مناهج نزعت إلى خنق الإبداع.

وعلى سبيل الاستطراد، لم تكن المسابقة المسماة مفتوحة دائماً بالشفافية والإنصاف المتوقعين في سويسرا. ومن أشهر الأمثلة أن مسابقة مقر عصبة الأمم أُفسدت، فانتهى الأمر بمعماري سويسري شاب، لو كوربوزييه، يحزم أمتعته ويرحل إلى فرنسا بعد أن اعتمدت اللجنة "تصميماً باللجنة" (قائماً إلى حد بعيد على فكرته)، من دون الاعتراف بعمله—وكان من مبررات ذلك جزئياً أن المعماري الشاب تجرأ على عدم تقديم رسوماته بالحبر الهندي. وخسرت سويسرا شخصية شامخة لمصلحة فرنسا، وإن كان وجهه يزين الآن ورقة 10 CHF.

وهكذا، حين حان وقت بناء جسر في منطقة نائية من سويسرا قليلة المرور، بنى مايار منشأه الأيقوني الأشهر: جسر سالغيناتوبل، المحتفى به عالمياً (الشكل 15.17b). ويُناقش تصميم آخر لمايار، مستودع ماغاتسيني جينيرالي، في الفصل 38.3 (استناداً إلى ملاحظات بيلينغتون).



(a) السيد مايار



(b) جسر سالغيناتوبل

شكل 15.17: روبرت مايار

[30] قليل من مهندسي اليوم يمتلكون هذا الفهم العميق للسلوك الإنشائي، مما يقود إلى الإفراط في الاعتماد على النماذج الحاسوبية التي تولد صوراً بيانية جميلة (ومقنعة).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فبينما فضل إيفل القوس ذا المفصلين لجسور الحديد المطاوع، وجد مايار الجمال في الأقواس الخرسانية ذات المفاصل الثلاثة.

15.4.5 أوغست بيريه (1874–1954)

كان أوغست بيريه (بروكسل، 1874–باريس، 1954) معمارياً وبنّاءً فرنسياً فعل للخرسانة المسلحة ما فعله مايار للجسر: فقد أثبت أن المادة لا تحتاج إلى الاختباء خلف كسوة حجرية أو جص زخرفي، بل يمكنها أن تقف مكشوفة بوصفها التعبير الصادق عن منشأ المبنى. وحيث عامل معاصروه الخرسانة هيكلاً نفعياً ينبغي إلباسه، عاملها بيريه بوصفها العمارة نفسها—شكّلها وضبط نسبها وفصلها بالعناية نفسها التي يبذلها بنّاء كلاسيكي في الحجر المقطوع[31].

تدرب بيريه في *École des Beaux-Arts* في باريس، لكنه لم يحصل قط على شهادته، مفضلاً العالم العملي لشركة أبيه للإنشاء، بيريه إخوان، التي تولى قيادتها في نهاية المطاف. وشكلت هذه الهوية المزدوجة—التكوين في التأليف الكلاسيكي والرسوخ في واقع البناء—كل ما بناه. وكان مبناه السكني البارز في 25 bis شارع فرانكلين، باريس (1903)، من أوائل المنشآت التي تكشف إطاراً من الخرسانة المسلحة على الواجهة، وتُظهر ألواح ملء من البلاط الخزفي بصدق بوصفها غير إنشائية. ولا تزال كنيسة *Notre-Dame du Raincy* (1923)) رائعته: كنيسة تحمل فيها أعمدة خرسانية نحيلة قبو قشرة رقيقاً، وتذوب الجدران بالكامل في شبكة من زخارف خرسانية مسبقة الصب ملأها موريس دوني بالزجاج الملون—منطق قوطي وُلد من جديد في مادة صناعية، الشكل 15.18. أما أكبر تكليفاته، إعادة بناء لوهافر بعد تدميرها في الحرب (1945–1954)، فطبق هذه المبادئ على المقياس الحضري: مركز مدينة موحد من الخرسانة، كلاسيكي النسب لكنه حديث بلا لبس، معترف به اليوم موقعاً للتراث العالمي لليونسكو.



شكل 15.18: نوتردام دو رانسي لبيريه (1923)

فلسفة التصميم كان اعتقاد بيريه الموجه أن المنشأ والعمارة لا ينفصلان.

[31] يمكن النظر إلى بيريه، بأثر رجعي، بوصفه سلفاً غير مقصود لما سيطلق عليه آل سميثسون ورينر بانهام لاحقاً *الوحشية*—أي الكشف المتعمد للخرسانة الخام (*béton brut*) كسطح نهائي. والمفارقة كبيرة: فقد كانت خرسانة بيريه المكشوفة دائماً مصقولة، كلاسيكية النسب، دقيقة التفاصيل؛ بينما احتفت الوحشية التي أسهم في إلهامها بالخشونة جمالاً في ذاتها. وقد صمم *Unité d'Habitation* للو كوربوزييه (1952)—الذي منح سطح خرسانته المطبوع بألواح القوالب الوحشية اسمها نفسه—رجل أمضى عامين في مرسم بيريه يستوعب الدرس المعاكس تماماً: أن الخرسانة المكشوفة تتطلب أعلى درجات الصنعة ولا تعفي منها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> Celui qui dissimule une partie quelconque de la charpente se prive du seul légitime et plus bel ornement de l'architecture. Celui qui dissimule un poteau commet une faute. Celui qui fait un faux poteau commet un crime.

> من يخفي أي جزء من المنشأ يحرم نفسه من الزخرفة الوحيدة المشروعة والأجمل في العمارة. ومن يخفي عموداً يرتكب خطأً. ومن ينشئ عموداً زائفاً يرتكب جريمة.
>
> Perret, 1952 Contribution à une théorie de l'architecture

كتب ذلك—وهي عبارة كان يمكن أن يوقعها نيرفي أو توروخا بالقدر نفسه. رفض نزعة *Art Nouveau* إلى إذابة المنشأ في الزخرفة، ورفض بالقدر نفسه الحداثة الناشئة التي ردت المباني إلى كتل مجردة لا تبالي بالمادة والصنعة. ولم تكن الأعمدة والكمرات والإطارات عند بيريه عقبات أمام الجمال، بل مصدره نفسه، بشرط ضبط نسبها بصرامة وتنفيذها بدقة. ووضعه ذلك في نسب فكري يمتد من فيتروفيوس عبر فيوليه-لو-دوك إلى الفنانين الإنشائيين في القرن العشرين—بنّاء ومنظّر فهم أن ثالوث *firmitas, utilitas, venustas* ليس تراتباً بل وحدة.

كان تأثيره في الجيل التالي مباشراً وشخصياً. ومن المعماريين الشباب الذين مروا بمرسمه الباريسي شارل-إدوار جانيريه—أي لو كوربوزييه لاحقاً—الذي عمل هناك من 1908 إلى 1910 واستوعب إصرار بيريه على الصدق الإنشائي، وإن كان قد قاومه لاحقاً.[32] وحيث ظل بيريه وفياً للعمود والزاوية القائمة، سيذيب تلميذه الجدار بالكامل؛ لكنهما اتفقا على أن المنشأ يجب ألا يكذب.

15.4.6 إدواردو توروخا ميريت (1899–1961)

كان إدواردو توروخا إي ميريت (مدريد، 1899–1961) مهندساً إنشائياً إسبانياً يُعد على نطاق واسع واحداً من أكثر أربع شخصيات تأثيراً في التطور التقني والجمالي للخرسانة المسلحة في النصف الأول من القرن العشرين، إلى جانب روبرت مايار وأوجين فريسينيه وبيير لويجي نيرفي. وكان من أعظم المهندسين الإنشائيين في القرن العشرين، وأستاذاً في المنشآت القشرية والأشكال الخرسانية الرقيقة، حققت أعماله تكاملاً بين المنطق الإنشائي والجمال المعماري قلما ضُوهي قبله أو بعده.

درس توروخا في *Escuela de Ingenieros de Caminos*[33] في مدريد، حيث درس على خوان مانويل دي سافرا إي إستيبان، الباحث البارز في ميدان الخرسانة المسلحة الناشئ، وعلى خوسيه ريبيرا الذي ترأس شركة هينبيك في إسبانيا. وكان لوصاية هذين الرجلين دور مهم في تطور توروخا اللاحق. وبعد تخرجه في مدرسة مهندسي الطرق سنة 1923، أسس مكتبه التقني الخاص (*Oficina Técnica Eduardo Torroja*) سنة 1927 (Winchurch, 2007).

ركز أولاً على تصميم المباني وتحليلها، ثم أتم نحو سنة 1933 مشروعات عدة تتضمن قشريات رقيقة وقبوات أسطوانية (Winchurch, 2007). ومضت أعماله المبكرة إلى تصميم منشآت خرسانية قشرية رقيقة أيقونية، منها قاعة سوق الجزيرة الخضراء (1933)، وسقف مضمار زارزويلا الكابولي في مدريد

[32] كانت العلاقة ممتدة طوال العمر وحادة أحياناً: اختلف لو كوربوزييه الثوري وبيريه الكلاسيكي علناً في كل شيء تقريباً، ومع ذلك تظهر بصمات بيريه—الركائز والواجهة الحرة والإطار المكشوف—في أعمال لو كوربوزييه المبكرة كلها.

[33] كأن هذا الاسم لم يكن غريباً بما يكفي للمؤسسة، فقد أصبحت لاحقاً *Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos* (جامعة مدريد التقنية). ولا شيء في العنوان عن الهندسة المدنية أو الإنشائية.

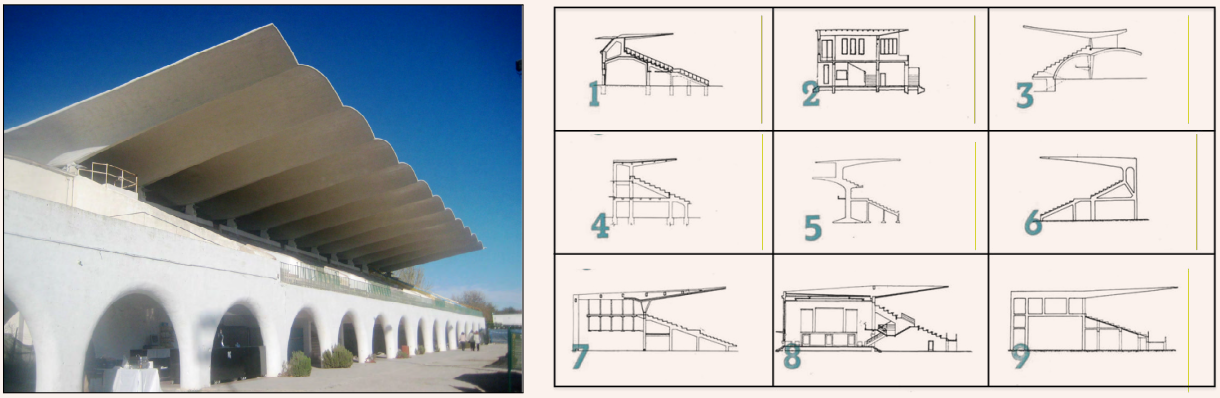
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(1935)، وقاعة فرونتون ريكوليتوس الرياضية (1935)—فأظهرت تحكماً استثنائياً في إنشاء القشريات الخرسانية المسلحة. وتميز فرونتون ريكوليتوس، الذي دُمر في الحرب الأهلية الإسبانية، بقشريات أسطوانية متقاطعة ذات فتحات هلالية مزججة أغرقت الداخل بالضوء—توليف للمنشأ والفضاء والإضاءة.

شارك توروخا في مسابقة تصميم مضمار زارزويلا الجديد في مدريد؛ واختير تصميمه (رقم 3) من بين تسعة متأهلين نهائيين (الشكل 15.19a). وكانت هذه *الرائعة الكبرى* أكثر المقترحات إنجازاً إنشائياً وجمالياً، مشبعة بما يسمى *العقلانية المدريدية*.[34] ولم يكن قد تجاوز السادسة والثلاثين.

> مُنحت الجائزة الأولى للحل المقترح من المعماريين ك. أرنيتشيس وم. دومينغيز والمهندس إ. توروخا، الذي تميز بأصالة الغطاء القشري، وهو منشأ جديد تماماً في زمنه، ولا يزال اليوم، بعد سبعة وعشرين عاماً، يُظهر أصالته المعبرة عن عبقرية توروخا، الذي حقق بهذا العمل أول انتصار له في مسابقة.
>
> Torroja, 1962a

لا يزال سقف زارزويلا، وهو قشرة زائدية تمتد كابولياً 12.8 متراً بسماكة 5 سنتيمترات فقط عند الحافة، أيقونة للأناقة الإنشائية. والواقع أن مضمار زارزويلا أصبح، بعد أكثر من خمسين عاماً، معلماً "تاريخياً فنياً" في إسبانيا. ويقدم Antuña Bernardo, 2003 تحليلاً ممتازاً لعمارة توروخا.



(a) المقترحات (Torroja, 1962a)

(b) تصميم توروخا

شكل 15.19: توروخا، مضمار زارزويلا

بحلول سنة 1936، أقر توروخا بأن المضي أبعد يتطلب اكتساب مزيد من المعرفة. وعُين سنة 1940 مديراً لـ*Laboratorio Central de Ensayos de Materiales*، حيث شدد على اختبار النماذج والمواد. ثم أسس لاحقاً معهد البناء والأسمنت التقني (معهد إدواردو توروخا اليوم) في مدريد، الذي أصبح مركزاً رائداً للبحث في تكنولوجيا الخرسانة والهندسة الإنشائية. وشارك أيضاً في تأسيس *Comité Européen du Béton* (CEB)، وشغل رئاسة FIP (*Fédération Internationale de la Précontrainte*). وكان أستاذاً في مدرسة مدريد للهندسة المدنية، وأستاذاً زائراً في برينستون وهارفارد ومعهد ماساتشوستس للتكنولوجيا.

[34] تتميز العقلانية المدريدية بعمارة تبرز في أشكالها وعناصرها وفي المواد المستخدمة معاً: الخرسانة المسلحة، والطوب المكشوف، والنوافذ الأفقية الكبيرة، والواجهات الملساء الخالية من الزخرفة. وقد دفعتها جزئياً ندرة المواد في بلد ظل فقيراً بعد الحرب الأهلية الوحشية التي هزت إسبانيا.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فلسفة التصميم والحدس الإنشائي رفضت فلسفة توروخا في التصميم فرض الشكل اعتباطاً والتطبيق الآلي للحساب معاً. وكتب: "يجب أن يمتلك المصمم الإنشائي حدساً إبداعياً وقدرة على رؤية الكل قبل الأجزاء." ودعا إلى أشكال تنشأ طبيعياً من سريان القوى عبر الشكل—قشريات تحمل الأحمال بفعل الغشاء، وأقواس تتبع خطوط الدفع، وكابلات تتخذ الأشكال الحبلية. وتطلب هذا النهج، الذي سماه "الحدس الإنشائي"، فهماً عميقاً لسلوك المواد وللكيفية التي تجد بها القوى مساراتها عبر المنشآت. وكان رائداً في استخدام الاختبار بالحجم الكامل للتحقق من سلوك المنشآت القشرية المعقدة قبل تثبيت التصاميم، جامعاً الحدس إلى التحقق التجريبي حين عجزت طرائق التحليل المتاحة آنذاك.

ومثل هاردي كروس، اعتقد توروخا أن التحليل المفصل لا ينبغي أن يأتي إلا بعد التصميم الأولي. ورأى الحسابات أقرب إلى فكرة لاحقة، ضرورية لتقييم صلاحية تصميم سبق تصوره بالحدس.[35]

> لأن حساب الإجهادات في منشأ أو في عناصر إنشائية مفردة، بعد اكتمال التصميم العام، عمل أكثر تقنية وتخصصاً، فهو موضوع يقع خارج نطاق هذا الكتاب، ولن تُقدم إلا ملاحظات عامة. ولا يستطيع حساب الإجهادات إلا فحص أحجام العناصر الإنشائية التي تصورها حدس المصمم واقترحها وتصحيحها. ولا يولد العمل نفسه من الحساب أبداً. فالحساب يشير إلى التصميم كما تُصور واعتُمد؛ ويُجرى عادة بعد التصميم العام لضمان استقرار المنشأ ومقاومته. وإذا لم يثبت الحساب الأمان المطلوب للمنشأ، وجب على المصمم تعديل عمله وإعادة الحسابات للموافقة النهائية. ويجب أن تفحص الحسابات لا المقاومة وحدها، بل مرونة البناء واستقراره الاستاتيكي أيضاً. وكثيراً ما تكون مقاومة المنشأ واضحة ولا تحتاج إلى حسابات. غير أن هذا لا يعني إمكان إغفال الفحص الدقيق في حالات أخرى من دون تبرير كاف.
>
> (Torroja, Polivka **and** Polivka, 1958)

ركز توروخا في سنواته الأخيرة على النشر. وأصبح كتابه **Razón y Ser de los Tipos Estructurales** (نُشر بالإنجليزية بعنوان *Philosophy of Structures*، *Razón y Ser de los Tipos Estructurales*) (1958) (Torroja, 2008 PDF; Torroja, 1962b; Torroja **and** Miret, 1958) أحد أكثر النصوص تأثيراً في التصميم الإنشائي عالمياً، وصاغ فلسفة تصميم تتمحور حول التعبير الطبيعي لسريان القوى عبر الشكل. وكتب توروخا هذا الكتاب حجة على من سعوا إلى رد المنشآت إلى مجرد مسألة حساب؛ فكانت المقاومة عنده أساسية، لكنها لم تكن قط المبرر الوحيد أو الأول للبناء. ويعرض الكتاب تأملاته في العملية الذهنية—العقلانية والعاطفية معاً—التي يستخدمها المصمم الإنشائي عند مواجهة مشروع جديد. وعن أولوية التصميم المفاهيمي على الحساب، كتب توروخا صراحة في المقدمة: *قبل كل حساب وفوقه توجد الفكرة، تشكل المادة* في صورة مقاومة كي تؤدي مهمتها. وتؤكد هذه العبارة أن توروخا اعتقد بالفعل أن التحليل الإنشائي ينبغي أن يتبع التصميم المفاهيمي الأولي للمنشأ، لا أن يسبقه.

إن *Philosophy of Structures* مؤلَّف تقني وتأمل في فن التصميم الإنشائي معاً. فبينما يقدم (Torroja, Polivka **and** Polivka,) منظوراً لإنجازاته الشخصية الكثيرة، فإن (Torroja **and** Miret, 1958) أشد إثارة للاهتمام بكثير: يتأمل فيه مهنة الهندسة الإنشائية، ثم يصف بعبارات بسيطة (من دون معادلة واحدة) السلوك الإنشائي لمنشآت مختلفة مثل الأقواس والقباب والقشريات والسدود وغيرها. ويحلل توروخا الأنواع الإنشائية—الكمرات والأقواس والجمالونات والإطارات والقشريات—لا بوصفها تجريدات رياضية مجردة، بل استجابات لمتطلبات فيزيائية وفراغية. ويؤكد أن التحسين الإنشائي والجمال المعماري

[35] وبالمثل، قلت دائماً للطلاب إنه ينبغي أن يكون لديهم "إحساس" أو جواب تقريبي للمسألة قبل تحليلها ببرنامج العناصر المحددة. وينبغي النظر إلى التحليل الإنشائي بوصفه مسألة فيرمي.

ليسا هدفين متنافسين، بل جانبين متكاملين للتصميم الجيد: فالمنشآت التي تقاوم الأحمال بكفاءة تنزع أيضاً إلى الأناقة، لأن الكفاءة والجمال ينشآن معاً من التعبير الواضح عن الفعل الإنشائي.

امتد تأثير توروخا في أنحاء العالم الناطق بالإسبانية وما وراءه، فألهم مهندسين سعوا إلى توحيد البراعة التقنية والجمال الشكلي. وأثبتت قشرياته، رغم صعوبة تنفيذها، إمكان تحقيق الخرسانة المسلحة خفة ورشاقة تنافسان أجمل القبوات القوطية.

15.4.7 بيير لويجي نيرفي (1891–1979)

كان بيير لويجي نيرفي (سوندريو، 1891–روما، 1979)، المبين في الشكل 15.20، مهندساً إنشائياً ومعمارياً إيطالياً يُعد على نطاق واسع، إلى جانب روبرت مايار وأوجين فريسينيه وإدواردو توروخا، واحداً من أكثر الشخصيات تأثيراً في تطور إنشاء الخرسانة المسلحة في القرن العشرين. ووصفه مؤرخ العمارة نيكولاوس بيفسنر بأنه "ألمع فنان في الخرسانة المسلحة في عصرنا." وكان من أكثر مهندسي القرن العشرين إبداعاً وتأثيراً (Nervi, 1956a)، إذ تعلم ومارس بصفته *ingegnere edile* ("مهندس مبان") في جامعة بولونيا. وبعد تخرجه في الهندسة المدنية من جامعة بولونيا سنة 1913، عمل نيرفي في *Società Anonima per Costruzioni Cementizie* قبل أن يؤسس شركة مقاولاته سنة 1920، ثم شركته الخاصة سنة 1923، ولاحقاً 1932 (*Società Ingg. Nervi & Bartoli*)، التي عمل من خلالها مصمماً ومنفذاً معاً—وهي تركيبة غير مألوفة أتاحت له اختبار أفكاره المبتكرة وتنقيحها مباشرة في الموقع، ومنحته الحدس والبراعة لتحقيق تصاميم مبتكرة اقتصادية. وكان بالفعل *progettista par excellence*. وكان تكامل التصميم والتنفيذ هذا محور فلسفته: إذ أصر على أن الشكل الإنشائي يجب أن ينشأ من حقائق المواد والصنع، لا من هندسة مجردة تُفرض من دون اعتبار لقابلية البناء.

من الشائع في الثقافة الإيطالية أن يسبق اسم الشخص لقبه (*Dottore, Avvocato, Ragioniere, Architetto, Ingegnere*، إلخ). وحين كان الناس يشيرون إلى نيرفي بقولهم *Architetto Nervi*، كان يصحح لهم دائماً: "لا، *Ingegnere Nervi*" (Maier, 2007).

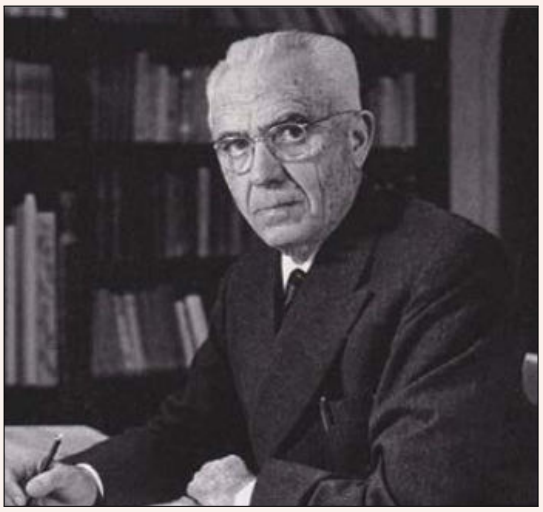
تشمل أعماله الكبرى ملعب بيرتا (ملعب أرتيميو فرانكي) في فلورنسا (1930–1932)، وحظائر الطائرات في أورفييتو وأوربيتيلو (1935–1942)، وقاعات معارض تورينو (1947–1950)، ومقر اليونسكو في باريس (مع بروير وزيرفوس، 1950)، وبرج بيريللي في ميلانو (مع جيو بونتي، 1955–1959)، وقصور الرياضة لأولمبياد روما سنة 1960، ومنها *Palazzetto dello Sport* و*Palazzo dello Sport* (ولا ينبغي الخلط بينهما). ودرّس في كلية العمارة بروما من 1946 إلى 1961، وألقى محاضرات تشارلز إليوت نورتن في هارفارد سنة 1961–1962.

كانت علاماته المميزة الأشكال المنحنية والأقواس الشاهقة. لكن مبانيه كانت عقلانية في أساسها، تتسم بضبط النفس. ولم يستحسن المباني المتباهية التي تكون منشآتها أعقد مما تتطلبه المهمة؛ بل سعى إلى مبان معقولة مباشرة توحي بالبساطة والاقتصاد. وقال: "لا يأتي الجمال من الزخرفة، بل من التماسك الإنشائي" (The Baltimore Sun, 1979).

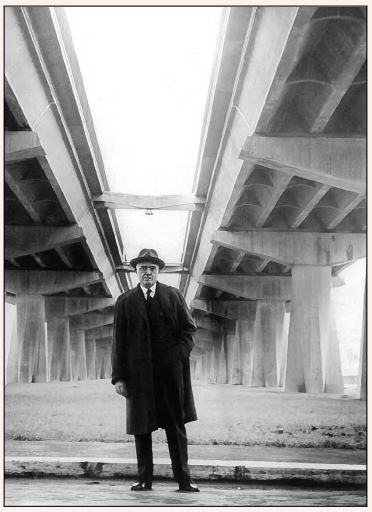
الابتكارات التقنية والتكامل المهني جمع نيرفي بمهارة ثلاثة جوانب من المهنة: الفهم الإنشائي لسريان القوى في المنشأ، ولا سيما تحديد الخطوط *متساوية الاستاتيكا*[36] حتى في المنشآت المعقدة؛ والتطوير المبتكر

[36] تحدد الخطوط متساوية الاستاتيكا اتجاهات قيمة رئيسة لموتر من الرتبة الثانية (مثل σ_{ij} أو M_{ij}) لتصور مسارها في الكمرات أو البلاطات أو غيرها من العناصر.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) (Nervi, Neri **andothers**, 2014)



(a) (Lori, 2009)

شكل 15.20: *L'Ingegnere* بيير لويجي نيرفي

لمادة *ferrocemento*، التي أدت دوراً كبيراً في بناء قشرياته؛ وتقنيات البناء التي تخفض التكلفة من دون المساس بالجمال أو الأمان.

امتدت إسهامات نيرفي إلى ما وراء التصميم لتشمل ابتكارات أساسية في تكنولوجيا البناء. فقد طور *ferrocemento* (الأسمنت الحديدي) وسجل براءة اختراعه—وهو مركب أسمنتي رقيق يستخدم طبقات متعددة من شبك فولاذي دقيق تُرش بمونة أسمنتية—مما أتاح إنشاء عناصر قليلة السماكة ذات مقاومة ولدونة لافتتين. واستُخدمت هذه التقنية أولاً في جدران المستودعات وهياكل القوارب، ثم في عناصر معمارية واسعة النطاق، وأصبحت علامة أعماله بعد الحرب، إذ أتاحت التصنيع المسبق لأشكال منحنية معقدة يمكن تجميعها في الموقع. كما كان رائداً في استخدام العناصر الإنشائية مسبقة الصب ومنظومات القوالب المتحركة، فخفض زمن البناء وتكاليفه جذرياً مع الحفاظ على أعلى معايير الأناقة الإنشائية.

المهندس: خطوط تساوي الاستاتيكا والفهم الإنشائي اعتمد المهندسون في زمن نيرفي على فهم راسخ للميكانيكا يكمله الاختبار. فلم تكن الحواسيب متاحة بعد، وكانت الحسابات (بالمعايير الحديثة) أولية نسبياً.

كانت منظومته في *التضليع متساوي الاستاتيكا*، المسجلة براءة سنة 1949، تحاذي الأضلاع الخرسانية مع خطوط عزوم الانحناء الرئيسة، فتحسن استعمال المواد وتنتج في الوقت نفسه الأنماط المجوفة المميزة الظاهرة في أعمال مثل مصنع غاتي للصوف وPalazzetto dello Sport. وينسب نيرفي الفكرة إلى ألدو أركانجيلي، أحد مهندسي مكتب نيرفي وبارتولي، الذي اقترح أن تتبع أضلاع البلاطة خطوط تساوي الاستاتيكا لعزوم انحنائها الرئيسة. وتعتمد هذه الخطوط حصراً على شروط تحميل المنشأ، وقد أدهش نيرفي أنه، بقصر مهمته على تفسير ظاهرة فيزيائية خالصة، استطاع اكتشاف أشكال جديدة غير متوقعة ومعبرة. وتنحني أضلاع البلاطة الموضوعة على خطوط تساوي استاتيكا العزوم انحناءً جميلاً في المسقط (Nervi, 1956b).

يمكن إنشاء خطوط تساوي الاستاتيكا (وينبغي عدم الخلط بينها وبين خطوط الكنتور) بسهولة بالخوارزمية الآتية:

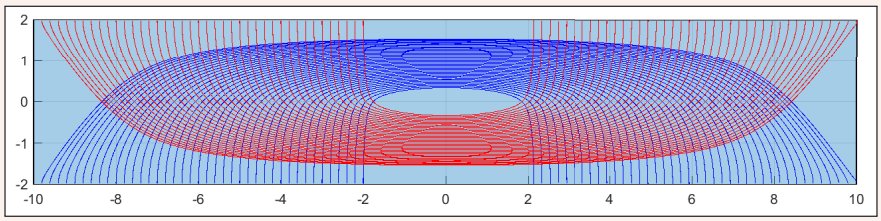
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
procedure ISOSTATIC                                  ▷ ارسم خطوط تساوي الاستاتيكا
    هيئ Γ, h, L, nLines, frac, vect, i                ▷ هيئ الثوابت
    for nLines إلى 0 ← Line do                        ▷ كرر على عدد الخطوط
        x_0 = −L/2 + Line × L/frac;  y_0 = 0.99 × h/2  ▷ هيئ النقطة الأولى
        x(1) = x_0; y(1) = y_0                        ▷ هيئ المصفوفة
        Inside ← true
        k = 1                                         ▷ هيئ عداد الخط
        while Inside = True do
            احسب σ_xx;  σ_yy;  τ_xy                   ▷ احسب مركبات الموتر
            T = Tensor(σ_xx τ_xy)                     ▷ كوّن موتر الإجهاد/العزم
            [Vect, D] = eig(Tensor)                   ▷ احسب المتجهات الذاتية المطَبّعة/المرتبة
            V(:) = Vect(:, i)                         ▷ استخرج المتجه (المتجه الذاتي الأول أو الثاني (ضغط أو شد)
            k = k + 1                                 ▷ زد عداد الخط
            x(k) = x(k − 1) + vect × V(1)             ▷ حدد النقطة التالية
            y(k) = y(k − 1) + vect × V(2)             ▷ بطول قوس مقداره vect
            if Γ خارج x, y, then                      ▷ تحقق من البقاء داخل السطح
                Inside ← false
            end if
        end while
        Plot(x,y)                                     ▷ ارسم هذا الخط
    end for
end procedure
```

حيث

Γ	حجم الجسم $(h \times L)$
h	الارتفاع
L	الطول
seniLn	عدد خطوط تساوي الاستاتيكا
carf	عدد كبير لتجنب البدء عند $x = \pm L/2$
tcev	الزيادة في طول قوس خط تساوي الاستاتيكا
i	الضغط $(i = 1)$ أو الشد $(i = 2)$

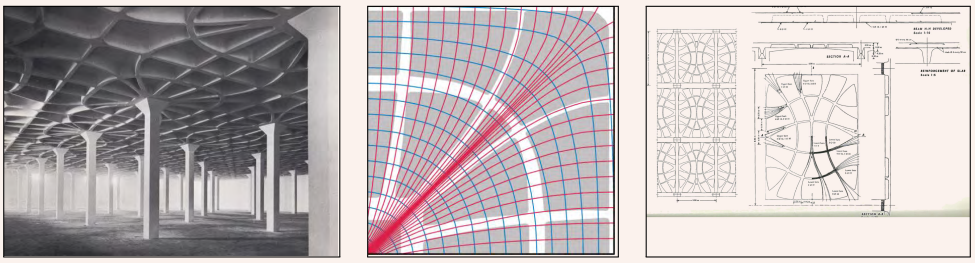
باستخدام هذه الخوارزمية (شيفرة MATLAB مدرجة في §I.2.10) يمكن رسم خطوط تساوي الاستاتيكا بسهولة لكمرة تحت حمل منتظم (=VECT, I=1&2, DELTA=100, NLINES=40/h100).



في الشكل 15.21b، تمثل الخطوط الحمراء خطوط تساوي الاستاتيكا الموافقة لعزوم الانحناء الرئيسة العظمى، وتمثل الخطوط الزرقاء الخطوط الثانوية الموافقة لعزوم الانحناء الرئيسة الصغرى (Halpern, Billington and Adriaenssens, 2013). وفي هذه الحالة، وُلد زوجا الخطوط من عقد بدء على الحدود الأربعة كلها. وتشير تجمعات الخطوط إلى تقارب اتجاهات عزوم الانحناء الرئيسة. ويبين المحيط الرمادي والأبيض مسقطاً تقريبياً لطابق مصنع غاتي للصوف، لتوضيح الترابط بين خطوط تساوي الاستاتيكا النظرية ونمط الأضلاع المنفذ. وتعكس خطوط تساوي الاستاتيكا الثانوية المتراكزة المتولدة حول مسند العمود أسفل يسار ربع البلاطة منطق وضع منحنيات تسليح متراكزة حول رأس العمود، وتتحقق من وضع نيرفي للضلع

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحيط بالعمود. كما تُظهر الأضلاع المنبعثة من العمود المركزي ترابطاً وثيقاً مع خطوط تساوي الاستاتيكا الرئيسة المتولدة. ويمكن العثور على أمثلة متعددة لتصميمات أسقف نيرفي المستلهمة من خطوط تساوي الاستاتيكا في (Vitalis, 2021).



(a) بلاطة أرضية تستخدم أضلاعاً متساوية الاستاتيكا (Nervi, 1956b)

(b) خطوط تساوي الاستاتيكا في مصنع غاتي للصوف (Halpern, Billington **and** Adriaenssens, 2013)

شكل 15.21: أمثلة لخطوط تساوي الاستاتيكا

مثل معظم الإيطاليين من جيله، وفي غياب طريقة العناصر المحددة التي لم تكن قد طُورت بعد، عد نيرفي التجريب دائماً أفضل طريقة لتطبيق حدود النظرية أو اختبارها حين تثبت النظرية قصورها عن دعم تصاميمه المبتكرة.[37] وكان العمل بنماذج اختبار مصغرة ثابتاً في أعماله التصميمية؛ استخدمها لـ"اختبار" افتراضاته غير المثبتة و"ضبطها". ويبين الشكل 15.23a اختبار نموذج لحظيرة أورفييتو (الشكل 15.24b). وقد استخدم نيرفي باستمرار نماذج مصغرة تُختبر في ظروف مخبرية للتحقق من السلوك الإنشائي قبل البناء—وهي ممارسة أكملت تحليله النظري بالتحقق التجريبي. ولم يعتمد نيرفي على اختبار النماذج بمقاييس الانفعال وحده، بل استخدم أيضاً المرونة الضوئية والنظرية الرياضية.

ومن الجدير بالذكر أن بعضهم رأى في عمل نيرفي إرهاصاً بعلم *العمارة المحاكية للطبيعة*، ملاحظين تشابهاً قوياً بين خطوط تساوي الاستاتيكا وتعريق الأوراق الطبيعي أو تفرع الأشجار، *Victoria Amazonica* (Vitalis, 2021) (الشكل 15.22).

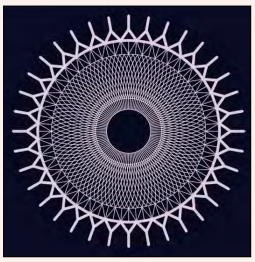
عالم المواد: ابتكار الأسمنت الحديدي يرتبط اسم نيرفي بقوة بـ*ferrocemento*، الذي كان رائداً فيه[38] بوصفه مادة صالحة لقوالب إنشاء القشريات. وهو لا يزيد على مونة أسمنت بورتلاندي مسلحة بطبقات متقاربة من شبكات أو أنسجة ألياف مستمرة (مثل "سلك الدجاج")، كما يظهر في الشكل 15.23b.

بدلاً من القوالب، طُبقت الخرسانة بالمسطرين على شبكة سلكية بأي شكل، مثبتة بقضبان داعمة. وبهذه الطريقة تحررت الخرسانة المسلحة لا من هيئة الهيكل الخطي وحدها، بل من الهندسة الصلبة لقوالبها أيضاً. وكانت الخرسانة المصبوبة بلا فواصل، وشكلها مستقلاً تماماً. واستخدم نيرفي هذه العناصر شديدة النحافة والمشكلة خصيصاً بكفاءة اقتصادية عالية بوصفها عناصر نهائية، أو قوالب، أو قوالب مفقودة. ويلائم الأسمنت

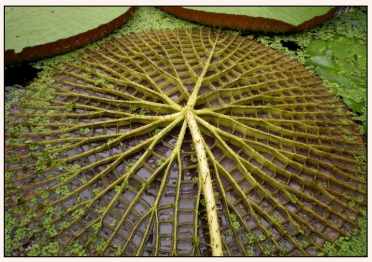
[37] أُجريت اختبارات كثيرة لنيرفي في *Istituto Sperimentale Modelli e Strutture* (ISMES)، الذي أُغلق الآن، وكان رائداً في اختبار السدود (غالباً) والمنشآت المبتكرة.

[38] في الواقع، اخترع الأسمنت الحديدي فرنسيان: جوزيف مونييه وجوزيف-لويس لامبو (الذي بنى قارباً بالمنظومة سنة 1848). وكان هذا سلف الخرسانة المسلحة التي "اخترعها" لاحقاً فرانسوا هينبيك.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) قبة *Palazzetto dello Sport*



b) *Victoria Amazonica*)

شكل 15.22: نيرفي والعمارة المحاكية للطبيعة

الحديدي على وجه الخصوص إنشاء أسطح ومنشآت رقيقة نسبياً وصلبة وقوية بأشكال متعددة (هياكل القوارب، والأسقف القشرية، وخزانات المياه). كما حظي نيرفي بالثناء لاستخدام الأسمنت الحديدي في بناء القوارب، مع أن لامبو في فرنسا وهوليستر في الولايات المتحدة سبقاه بلا شك في القرن التاسع عشر.

وهكذا نرى كيف جمعت عبقرية نيرفي المادة والشكل والبناء والتعبير المعماري بصورة اقتصادية. وقد بينت أشكاله الإنشائية الكفؤة—أضلاع تتبع خطوط الإجهاد الرئيس، وقشريات يشكلها فعل الغشاء، وكوابيل تتناقص مع انخفاض العزوم—كيف يمكن للابتكار التقني أن يقود التعبير المعماري.

البنّاء: الأعمال الكبرى والابتكار الإنشائي باشرت إيطاليا بعد الحرب العالمية الثانية إعادة إعمار واسعة. وكانت الخرسانة رخيصة، والفولاذ نادراً، والعمالة وفيرة وذات مهارة تاريخية. وأفضى هذا المزيج، إلى جانب إبداع وبراعة شخصيات كبرى قليلة، إلى بعض أكثر منشآت القرن العشرين أيقونية. ويلتقط (Desideri andothers, 2013) هذا العصر جيداً.

أظهرت ملاعبه البلدية المبكرة في فلورنسا (1930–1932)، المبينة في الشكلين 15.24c و15.24d، إمكانات الخرسانة المسلحة في الكوابيل الدرامية والشكل المعبر. لكن عمل نيرفي الناضج اكتسب طابعه المميز بتطوير الأسمنت الحديدي والعناصر المضلعة مسبقة الصنع التي يمكن إنتاجها بكميات كبيرة وتجميعها في الموقع. وأتاحت هذه التقنيات إنشاء أسطح منحنية معقدة باقتصاد لافت.

تبين قاعات المعارض في تورينو (1948–1950)، ومقر اليونسكو في باريس (1953–1958، مع بروير وزيرفوس)، وبرج بيريللي في ميلانو (1956–1958، مع بونتي)، وPalazzo dello Sport وPalazzetto dello Sport لأولمبياد روما سنة 1960، وقاعة الجمهور في الفاتيكان (1971)، اتساع نطاق نيرفي وبراعته. وتتميز قاعات تورينو بأسطح قبوات متموجة درامية مجمعة من وحدات مسبقة الصنع؛ أما Palazzetto dello Sport فيحقق قبة تمتد 60 متراً بقشرة مضلعة من عناصر مسبقة الصب، وداخله إنجاز بارع في التعبير الإنشائي.[39]

دافع نيرفي عن تآزر البناء النمطي والخرسانة المسلحة والأناقة الإنشائية. وجادل بأن المهندسين، إذا

[39] كان من حسن حظ المؤلف، أثناء دراسته الثانوية في روما، أن شارك في مباريات كرة اليد داخل Palazzetto dello Sport. والواقف على ذلك الملعب تحت قبة نيرفي المضلعة الشاهقة لا يستطيع إلا أن يشعر بالمنشأ حضوراً حياً—الأضلاع تشع فوق الرأس كقبوات كاتدرائية مستقبلية، والضوء يتسلل عبر المحيط المزجج، والفضاء كله ضخم وحميم على نحو ما في آن واحد. وقد تركت تلك التجربة في الصبا أثراً لا يمحى: كان هنا دليل على أن الهندسة تستطيع أن تطمح إلى الفن، وأن المنشأ يستطيع تحريك الروح كما يفعل أي نحت أو سمفونية. ولا يزال الـPalazzetto عند المؤلف المبنى الذي تُقاس إليه المباني كلها.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تحرروا من التصورات الأسلوبية المسبقة، يستطيعون تحقيق "حقيقة إنشائية" جميلة بطبيعتها—لا بالزخرفة المضافة، بل بالتعبير الواضح عن سريان القوى عبر المادة. وأثبت عمل نيرفي أن الاقتصاد والكفاءة الإنشائية والجمال ليست أهدافاً متنافسة، بل حلفاء طبيعيون حين ينطلق التصميم من تعامل صادق مع المواد والقوى.

فلسفة التصميم والكتابات النظرية لا تقل كتابات نيرفي النظرية أهمية عن أعماله المبنية. وقد طرح أشهر كتبه، *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato* (1945) (Nervi, Neri **andothers**, 2014)، سؤالاً أساسياً عن طبيعة التصميم الإنشائي، ساعياً إلى التوفيق بين الانقسام التاريخي بين المنهجين التقني العلمي والحدسي الفني في البناء. وأُعيد نشر العمل سنة 1997 بمبادرة المعماري ألدو روسي، الذي وصفه بأنه "أحد الكتب القليلة التي أوصيت بها طلابي دائماً"؛ ودافع عن اتزان عقلاني وحساس في الوقت نفسه بين تحديد النسب والحساب والرصد التجريبي والحس الجمالي.

وسعت محاضرات نورتن التي ألقاها في هارفارد سنة 1961، ونُشرت لاحقاً بعنوان *Aesthetics and Technology in Building* (Nervi, 2018)، هذه الأفكار، مبينة من خلال مشروعاته كيف يمكن للخرسانة مسبقة الصب والمصبوبة في الموقع أن تستوفي مطالبه الثلاثة: الاقتصاد والصحة التقنية والإشباع الجمالي. وعن دور الحدس في مقابل الحساب في تصور المنشأ، كتب نيرفي سنة 1931 أن النتائج العددية المحصلة بالصيغ "لا يمكن عدها إلا معلمات هادية، يفسرها ويقيّمها الشعور والحدس، وهما الملكتان الوحيدتان القادرتان على تقييم ما لا يمكن تقييمه بالمسطرة والميزان" (Nervi, 2018, p. 16). وأصر كذلك على أن مهمة المصمم الإنشائي هي "ابتكار" منشأ أولاً—تصوره مسبقاً شكلاً في الفضاء—ثم حسابه. وهذا الاعتقاد بأن التصور الحدسي يجب أن يسبق التحقق الرياضي يضع نيرفي تماماً إلى جانب توروخا في تقليد المهندسين الفنانين الذين رأوا التحليل أداة للتنقيح لا لتوليد الشكل الإنشائي.

> ...أود أن ألفت انتباه المعماريين والمهندسين والنقاد—وجميع أتباع ميدان العمارة الرائع—إلى حقيقة موضوعية كثيراً ما تُهمل، وكثيراً ما تُنكر من خلال مثالية شكلية وثقافية مضللة للحقيقة المعمارية: المواد، والاستاتيكا، وتكنولوجيا البناء، والكفاءة الاقتصادية، والحاجات الوظيفية هي مفردات الخطاب المعماري.
>
> ويستحيل رفع هذا الخطاب إلى مستوى الشعر (العمارة)، بل حتى إلى النثر الصحيح (البناء الجيد)، من دون فهم كامل لهذه المفردات وقواعد النحو والتركيب (التقنية) التي يجب أن تُؤلف بها.
>
> (Nervi, 1963)

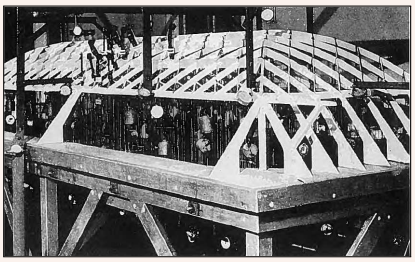
أما الحسابات، فمن المؤسف أن القليل منها بقي؛ غير أن مؤلفين كثيرين عرضوا عمله بإسهاب (Nervi, 1956b; Greco, 2008; Nervi, 2018; Lori, 2009; Nervi, 1963; Chiorino **and** Olmo, 2010)، وأرشيفه مقسم بين متحف MAXXI في روما وجامعة بارما (CSAC، *Centro Studi e Archivio della Comunicazione*).

تظهر بعض أكثر منشآت نيرفي أيقونية في الشكل 15.24. ويصوغ كتاباه *Structures* (1956) و-*Aes*thetics and Technology in Building* (1965) فلسفة ينشأ فيها الجمال طبيعياً من التعبير الصادق عن المنطق الإنشائي وعملية البناء.

15.4.8 ريكاردو موراندي (1902–1989)

دخلت إيطاليا بعد الحرب العالمية الثانية في حمى إعادة إعمار. وباجتماع هذا الجهد مع الإبداع التاريخي والحس الجمالي للإيطاليين، ظهرت منشآت أيقونية—معظمها، إن لم يكن كلها، من الخرسانة، لأنها كانت أرخص بكثير من الفولاذ، ولأن العمالة الرخيصة نسبياً كانت وفيرة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

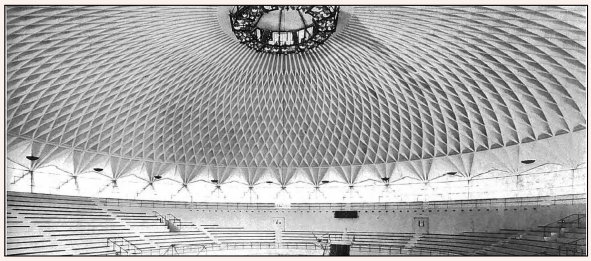


(a) اختبار نموذج لحظيرة أورفييتو (Lori, 2009)

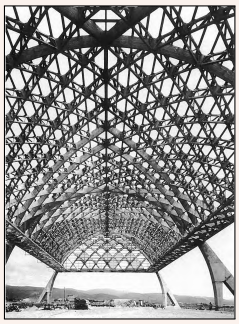


(b) الأسمنت الحديدي

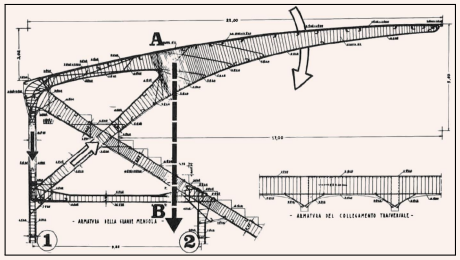
شكل 15.23: نيرفي: المهندس الإنشائي ومهندس المواد



(a) داخل *Palazzetto dello Sport* (Nervi, 1963)



(b) حظيرة أورفييتو (Lori, 2009)



(c) ملعب فلورنسا (Nervi, 2018)



(d) ملعب فلورنسا (Nervi, 2018)

شكل 15.24: منشآت نيرفي الأيقونية

يُعرف ريكاردو موراندي خصوصاً باستخدامه المبتكر للخرسانة المسلحة ومسبقة الإجهاد، وكذلك الجسور المثبتة بالكابلات.

وربما استلهم موراندي جسر بيكسبي كريك (الشكل 15.25a) حين صمم جسر بول ساور في جنوب أفريقيا (الشكل 15.25b). ويُعد كلاهما منشأ أيقونياً في بلده.

ثم تبنى موراندي لاحقاً تصميم المنشآت المدعومة بالكابلات، وارتبط اسمه بقوة بثلاثة جسور تكاد تتطابق تصميماً: جسر الجنرال رافائيل أوردانيتا في فنزويلا، وجسر بولتشيفيرا العلوي الذي يعبر مدينة جنوة، وجسر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وادي الكوف في ليبيا. وربما كانت هذه الجسور مرضية "جمالياً" (ولا يتفق الجميع)، لكنها افتقرت إلى التكرار الإنشائي واحتاجت إلى صيانة دؤوبة لمنع تآكل الكابلات. وقد انهار جسر جنوة (وهو في الواقع جسر علوي) في أغسطس 2018، فقتل 43 شخصاً. ومن المفارقات أن رينزو بيانو، المعماري الجنوي الشهير الذي شارك في تصميم مركز بومبيدو، هو من صمم الجسر العلوي البديل.

ومن منشآت موراندي المعروفة أيضاً (وإن لم تكن "أيقونية" ربما) زوج حظائر أليطاليا في مطار فيوميتشينو بروما، اللتان يراهما جميع المسافرين. وتتألف كل حظيرة من 19 كابلاً منحنياً سابق الإجهاد يحمل السقف. وتحمل هذه الكابلات عند كل طرف كمرة خرسانية مسبقة الإجهاد. وأخيراً، ترتبط هذه العناصر بالجدران بسلسلتين من أوتار خرسانية مسبقة الإجهاد تنتشر مروحية من الأبراج (Morandi **and** Piccarreta, 1972). وتشبه هذه الحظيرة كثيراً سقف مطار دالاس المنحني الذي تصوره إيرو سارينن (انظر الفصل 38.1). ومن باب المصادفة، كان موراندي مهندساً وسارينن معمارياً.



(a) جسر بيكسبي كريك (بانهورست، 1932)



(b) جسر بول ساور (موراندي، 1953)

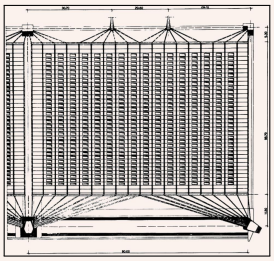


(c) جسر الجنرال رافائيل أوردانيتا (1958)



(d) جسر بولتشيفيرا العلوي، جنوة (موراندي، 1963)





(e) حظيرة أليطاليا، فيوميتشينو (موراندي، 1962)

شكل 15.25: ريكاردو موراندي

15.4.9 كريستيان مين (1927–2018)

رأينا من خلال مايار كيف يستطيع مهندس سويسري أن يجمع بقوة بين الكفاءة الإنشائية والجمال. وقد تبعه مواطنان بارزان: كريستيان مين وأوتمار أمان.[40]

مين بلا شك أبرز مهندسي الجسور في منتصف القرن العشرين. فعلى مدى خمسين عاماً استخدم الابتكار

[40] صمم أوتمار أمان جسر جورج واشنطن (§38.4)، وجسر فيرازانو-ناروز، وجسر بايون.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والخيال و"الإحساس الداخلي" الهندسي الإنشائي السليم، والأهم الحس الجمالي. ومارس المهنة مع التدريس في ETH (الذي سبق أن درس فيه مايار). ويلخص (Brühwiler, 2010) مسحاً لعمله.

يظهر إتقان مين لتحليل المنشآت (جسور الخرسانة مسبقة الإجهاد) في كتابه (Menn, 1990). ويلمح مين فيه إلى أن الجسر المصمم جيداً، مع مراعاة الاقتصاد وتكاليف دورة الحياة وتكاليف البناء، سيكون بحكم *الواقع* جميلاً.[41] ويقدم Honigmann **and** Billington, 2003 دراسة ممتعة لجسر سونيبيرغ الشهير (الشكل 15.26).

يناقش مين دور الجمال في (Menn, 1996):

> يجب أن تستوفي الجسور متطلبات وظيفية وقيوداً محددة، مثل الخلوص وبرنامج البناء. وإضافة إلى هذه المتطلبات، فإن أهم أهداف التصميم هي: السلامة الإنشائية، وقابلية الخدمة، والاقتصاد، والأناقة.
>
> تحدد معايير التصميم مقاييس السلامة الإنشائية وقابلية الخدمة، وهي تعكس أحدث مستوى تقني في الجوانب الفنية لتصميم الجسور. ويحقق المهندسون السلامة الإنشائية وقابلية الخدمة حين يعملون أساساً حرفيين، أي بالتطبيق المنطقي لمبادئ راسخة. ويمكن تقدير تكلفة جسر معين استناداً إلى الخبرة ودراسة التصورات البديلة. ويعتمد الاقتصاد أساساً على تصور التصميم. أما الأناقة فتتصل خصوصاً بالتأثير في البيئة وجمال المنشآت نفسها. ومع استحالة قياس الأناقة عقلانياً، فإن التفاعل بين الجوانب التقنية والبصرية لتصميم الجسر يعني أن الأناقة تحكمها أيضاً معايير معينة. ويمكن، على وجه الخصوص، الحكم على الأناقة موضوعياً بحس مدرب جيداً للشكل البصري.
>
> ...
>
> الجوانب الجمالية في تصميم الجسور أهم مما يُعترف به عادة. فالمنشآت الهندسية تحدث عادة أثراً كبيراً في البيئتين الطبيعية والبشرية. كما يحدث مستخدمو الجسور آثاراً جديدة وغير سارة عادة في البيئة، مثل الضوضاء وغازات العادم. ولهذه الأسباب، كثيراً ما يُنظر إلى الجسور سلباً في المجتمع.
>
> (Menn, 1996)



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85195985

شكل 15.26: جسر سونيبيرغ لمين

[41] وفق فيتروفيوس، إذا استوفيت متطلبات *firmitas* و*utilitas*، تبعتها *venustas*.

15.4.10 فضل الرحمن خان (1929–1982)

كان فضل الرحمن خان (1929–1982)، المولود في دكا (وكانت آنذاك في الهند البريطانية، وهي اليوم في بنغلاديش)، مهندساً إنشائياً ومعمارياً بنغلاديشياً أمريكياً، ولعله كان، بعد نيرفي، أعظم مهندس إنشائي في النصف الثاني من القرن العشرين. ويشار إليه على نطاق واسع بـ"أبي التصاميم الأنبوبية" و"أينشتاين الهندسة الإنشائية"؛ فقد أحدث خان ثورة في تصميم ناطحات السحاب وإنشائها وفي تصميم المباني العالية في النصف الثاني من القرن العشرين. وطور منظومات إنشائية مبتكرة—منها الأنبوب المؤطر والأنبوب الجملوني والأنبوب المجمع—أتاحت ارتفاعات غير مسبوقة للمباني بكفاءة مادية ومرونة معمارية أكبر، وجعلت المباني فائقة الارتفاع مجدية اقتصادياً، ولا تزال أساسية في تشييد المباني العالية اليوم، وحولت المنطق الإنشائي لناطحات السحاب، وأتاحت المباني فائقة الارتفاع التي تحدد آفاق المدن المعاصرة (الشكل 15.27).

بعد حصوله على بكالوريوس الهندسة المدنية من كلية أحسن الله للهندسة (جامعة بنغلاديش للهندسة والتكنولوجيا اليوم) في دكا، سافر إلى الولايات المتحدة سنة 1952 بمنحة فولبرايت. وفي جامعة إلينوي في أوربانا-شامبين، حصل في ثلاث سنوات فقط على درجتي ماجستير (في الهندسة الإنشائية والميكانيكا النظرية والتطبيقية) ودكتوراه في الهندسة الإنشائية. وبعد عودة قصيرة إلى باكستان مهندساً تنفيذياً لهيئة تنمية كراتشي، انضم خان سنة 1955 إلى مكتب شيكاغو لشركة سكيدمور، أوينغز وميريل (SOM) ، حيث أمضى حياته المهنية كلها، فأصبح شريكاً سنة 1966 ومواطناً أمريكياً بالتجنس سنة 1967. وكانت شيكاغو، مهد ناطحة السحاب والمنافس التقليدي لنيويورك في تشييد المباني العالية، البيئة المثالية لابتكارات خان. وبخلاف معظم المهندسين الذين سبقت مناقشتهم (باستثناء إيفل)، صمم خان أساساً بالفولاذ.

تشمل أعماله الكبرى مركز جون هانكوك ذا المئة طابق (1969)، وبرج سيرز ذا المئة وعشرة طوابق (برج ويليس اليوم، 1973)—وقد احتفظ الأخير بلقب أعلى مبنى في العالم أكثر من عقدين. وانتُخب خان عضواً في الأكاديمية الوطنية للهندسة سنة 1973، وحصل على دكتوراه فخرية من جامعة نورث وسترن وجامعة ليهاي وETH زيورخ، وسمته *Engineering News-Record* رجل العام سنة 1972.

علاوة الارتفاع والابتكار الأنبوبي حين بدأ خان عمله في SOM أواخر خمسينيات القرن العشرين، كانت الخيارات المتاحة لمصممي المباني العالية محدودة على نحو مفاجئ. والتحدي الأساسي للمباني العالية هو مقاومة الأحمال الجانبية—أي مقاومة عزوم الانقلاب وقص الطوابق الناتجين من الرياح والزلازل. وكان الإطار الفولاذي الصلب التقليدي—حيث تحمل الأعمدة الموزعة في المسقط أحمال الجاذبية والأحمال الجانبية معاً—قد هيمن على تشييد ناطحات السحاب منذ أواخر القرن التاسع عشر. ويغدو إنشاء الإطارات الصلبة التقليدية، ذات الوصلات المقاومة للعزوم بين الأعمدة والكمرات، أقل كفاءة باطراد كلما ارتفعت المباني: إذ تكبر مقاطع العناصر بسرعة وتتكاثر الأعمدة الداخلية. ومع ذلك، كلما ارتفعت المباني ازدادت كمية الفولاذ اللازمة لمقاومة قوى الرياح بنسبة غير متكافئة، فنشأ ما سماه خان "علاوة الارتفاع". وقد بيّن مخططه الشهير سنة 1969 كيف ترتفع متطلبات فولاذ تدعيم الرياح ارتفاعاً هائلاً مع ارتفاع المبنى في الإطارات التقليدية، مما يجعل المباني فائقة الارتفاع باهظة التكلفة إلى حد المنع.

كانت بصيرة خان الثورية إدراك أن الإطار الصلب ليس المنظومة الإنشائية الوحيدة الملائمة للمباني العالية، وإعادة تصور محيط المبنى كله أنبوباً إنشائياً—كابولاً أجوف يرتفع من الأرض، بأعمدة خارجية متقاربة تصل بينها كمرات حزامية عميقة، فتكوّن أنبوباً صلباً يقاوم الأحمال الجانبية بفعل الكابول والإطار. وبنقل عناصر مقاومة الأحمال الجانبية الرئيسة إلى محيط المبنى، تصور المنشأ أنبوباً أجوف ثلاثي الأبعاد كابولياً من الأساس—يشبه، كما لاحظ لاحقاً، الخيزران الذي ينمو في موطنه بنغلاديش. واستخدم هذا المفهوم الأنبوبي،

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الذي طُبق أول مرة في شقق ديويت-تشستنَت ذات 43 طابقاً في شيكاغو (1963–1966)، ثم تحقق في مبنى شقق ديويت-تشستنَت (1963) ومبنى برونزويك ذا 43 طابقاً (1965)، أعمدة محيطية متقاربة تصل بينها كمرات حزامية عميقة لإنشاء "جلد" خارجي صلب يعمل في آن واحد منشأً وتدعيماً للرياح وتعبيراً معمارياً، مع تحرير الداخل لمخططات طوابق مرنة وتحسين الكفاءة الإنشائية جذرياً. وبتركيز المقاومة الجانبية في المحيط، حرر الأنبوب الفراغات الداخلية من غابة الأعمدة التي تتطلبها الإطارات التقليدية.

المنظومات الإنشائية والأعمال الكبرى طور خان تنويعات عدة للمفهوم الأنبوبي لمعالجة نطاقات مختلفة من الارتفاع والمتطلبات الوظيفية، وعلاقات منهجية بين ارتفاع المبنى والمنظومة الإنشائية المثلى—من الإطارات الصلبة للمباني المنخفضة، مروراً بجدران القص والإطارات المدعمة، إلى تشكيلات أنبوبية متنوعة للارتفاعات المتزايدة. وقدم مفهوم "علاوة الارتفاع" للمصممين إرشاداً عقلانياً لاختيار المنظومات الإنشائية على أساس الكفاءة لا السابقة. وأثبت *الأنبوب المؤطر*، الذي مثله مبنى ديويت-تشستنَت ثم برجا مركز التجارة العالمي في نيويورك (اللذان هندسهما ليسلي روبرتسون مستخدماً مبادئ خان)، كفاءته للمباني حتى نحو 60 طابقاً.

أدخل خان لمركز جون هانكوك ذي المئة طابق (1965–1969) *الأنبوب الجملوني* (أو الأنبوب المدعم)، حيث تزيد عناصر التدعيم القطرية—دعامات X الخارجية الأيقونية للمبنى—صلابة الأنبوب ضد تأخر القص، وتخفض متطلبات الفولاذ جذرياً. ولم يستخدم مركز هانكوك إلا 145 kg من الفولاذ لكل متر مربع، مقارنة بـ206 kg/m^2 لمبنى إمباير ستيت و275 kg/m^2 لوان تشيس مانهاتن بلازا. واخترع خان لبرج سيرز *الأنبوب المجمع*، المؤلف من تسعة أنابيب مربعة مختلفة الارتفاعات مجمعة معاً، مما وفر صلابة استثنائية مع السماح لمقطع المبنى بالتراجع درجات كلما ارتفع—فأثبت أن "الأبراج الكفؤة لم تعد مضطرة إلى أن تكون صندوقية؛ إذ يمكن للوحدات الأنبوبية أن تتخذ أشكالاً مختلفة وأن تُجمع معاً في تشكيلات متنوعة." وبرهن برج سيرز ذو المئة وعشرة طوابق (1973، برج ويليس اليوم)، باستخدامه تسعة أنابيب مجمعة مختلفة الارتفاعات، إمكانات المنظومة في البناء فائق الارتفاع.

كان خان أيضاً رائداً في المنظومات المركبة من الفولاذ والخرسانة وفي استخدام الخرسانة الخفيفة في المباني العالية، وكان من أوائل من استخدم الحواسيب في التحليل الإنشائي والتحقق من التصميم. ومع ذلك، لعله كان آخر مصمم عظيم لناطحات السحاب لم يعتمد اعتماداً ذا شأن على الحواسيب؛ إذ كانت الأمور على وشك أن تتغير.

يلخص الاقتباس الآتي نهجه المنهجي:

> غير أن تشييد المباني العالية لا يكون جذاباً اقتصادياً إلا إذا امتلك المهندسون الإنشائيون من جهة فهماً شاملاً للسلوك الإنشائي لمختلف المنظومات، ومن جهة أخرى حساً عملياً بمشكلات البناء.
>
> ...
>
> قد يؤدي منشأ يستخدم أقل كمية من الفولاذ إلى مبنى مكتمل بالغ الكلفة، لأنه لم تُراع أي من العوامل غير الإنشائية المؤثرة في المبنى المكتمل. ومن جهة أخرى، لا بد أن يسهم منشأ صُمم فقط ليلائم "رؤى" المعماري الجمالية واحتياجات جميع المهن الأخرى في تدني جودة المبنى المكتمل وارتفاع تكلفته المفرط. وتقع المنظومة الإنشائية المثلى لأي مشروع معين بين هذين الطرفين، ويُترك ليقظة المهندس ومشاركته الفاعلة تطوير المنظومة المثلى. وقد بينت الخبرة إمكان تصنيف معظم منشآت المباني في ست فئات عامة:
>
> a منشآت بسيطة الوصل
> b منشآت شبه صلبة
> c منشآت ذات إطارات صلبة

d منشآت ذات جمالونات قص
e منشآت ذات تفاعل بين الإطار وجمالونات القص
f منشآت من نوع الصندوق الصلب

i أعمدة خارجية متقاربة
ii قطريات متقاربة بوصفها جدراناً خارجية
iii التوليف الأمثل للعمود والقطر والكمرة الحزامية في الجدران الخارجية

(Khan, 1965)

فلسفة التصميم والتعاون تميز خان، إلى جانب ابتكاراته التقنية، بنهجه في العلاقة بين الهندسة والعمارة. وجسدت شراكته الشهيرة مع المعماري بروس غراهام في SOM إيمانه بأن المنشأ يجب أن يكون المبدأ المنظم للتصميم المعماري، لا مجرد إطار خفي. وامتلك خان ما وصفه غراهام بأنه "فهم حدسي للسلوك الإنشائي"—وقال مرة: "حين أفكر في التصميم، أضع نفسي مكان مبنى كامل وأشعر بكل جزء. وأتصور في ذهني الإجهادات والالتواء الذي يتعرض له المبنى." لكنه أصر على أن البراعة التقنية يجب أن تخدم أغراضاً بشرية أوسع: "يجب ألا يضيع الإنسان التقني في تقنيته الخاصة؛ بل يجب أن يكون قادراً على تقدير الحياة، والحياة هي الفن والمسرح والموسيقى، والأهم من ذلك الناس."

جسد دمجه المنطق الإنشائي بالتخطيط المعماري—إذ أتاح الأنبوب فراغات داخلية خالية من الأعمدة وبلاطات طوابق مرنة—التعاون بين المهندس والمعماري الذي ينتج أفضل المباني العالية. وكان خان أيضاً رائداً في التحليل الإنشائي بمساعدة الحاسوب، وأدرك مبكراً إمكانات الحساب الرقمي في تحليل المنظومات المعقدة شديدة اللاتعين للمباني العالية. وامتدت هذه الرؤية الإنسانية إلى أنشطته التعليمية في معهد إلينوي للتكنولوجيا، حيث عمل مع الطلاب على تطوير مفاهيم—مثل الأنبوب الخرساني الجملوني—لم تتحقق في البناء إلا بعد سنوات.

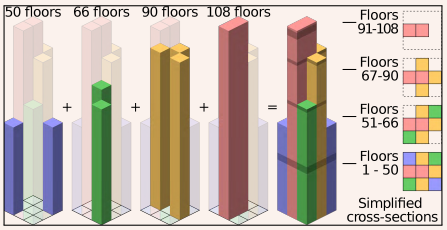
توفي خان فجأة سنة 1982 في الثانية والخمسين، أثناء عمله في مشروع صالة الحجاج في السعودية، فقطع مسيرة ذات إبداع استثنائي؛ لكن منظوماته الإنشائية لا تزال تشكل آفاق المدن عالمياً، من برجي بترونّاس في كوالالمبور إلى برج خليفة في دبي—والأخير يمثل، كما لاحظ أحد المعلقين، "التعبير النهائي عن فلسفته التصميمية الجريئة الخفيفة." ويقدم مجلس المباني العالية والمساكن الحضرية تكريماً له ميدالية فضل الرحمن خان لإنجاز العمر. واستغرق تحديث بحثه البارز في المباني العالية، على يد Baker, Skidmore andothers, 2013 للأبراج فائقة الارتفاع في القرن الحادي والعشرين، قرابة خمسين عاماً.

15.4.11 مقارنة الـProgettisti: المصممون البنّاؤون وموادهم

يشترك المهندسون المعروضون في هذا الفصل في صفة مميزة: لم يكونوا مصممين فحسب، بل *بنّائين* أيضاً—رواد أعمال امتلكوا شركات إنشاء أو سيطروا عليها، مما أتاح لهم تجربة تقنيات ومواد جديدة بطرائق نادراً ما يستطيعها المهندسون الاستشاريون. وكان تكامل التصميم والبناء هذا، الذي يجسده المصطلح الإيطالي *progettista*، محور إنجازاتهم.



(a) تدعيم X الخارجي لمبنى جون هانكوك (b) برج ويليس



(c) وحدات برج ويليس

شكل 15.27: مباني خان الأيقونية

15.4.11.1 إيفل والمعدن

تخصصت شركة غوستاف إيفل، *Compagnie des Établissements Eiffel*، في الإطارات الحديدية والفولاذية مسبقة الصنع. وصنعت الشركة المكونات في الورش بدقة عالية، ثم نقلتها وجمعتها في الموقع—وهو نهج صناعي أتاح تشييد الجسور والأبراج والمباني بسرعة وبتكلفة فعالة. وصُنع برج إيفل نفسه مسبقاً خارج الموقع وجُمع بسرعة لافتة. ووضع استخدام إيفل المكونات المعيارية المثبتة بالمسامير وتشديده على النمطية أسس الإنشاء الفولاذي الحديث.

15.4.11.2 نيرفي والأسمنت الحديدي

أسس بيير لويجي نيرفي *Nervi & Bartoli* سنة 1932، وطور من خلالها الأسمنت الحديدي وطبقه مادة بناء عملية. وأتاحت له سيطرته على التصميم والتنفيذ معاً الابتكار من دون الاعتماد على مقاولين خارجيين، وضمنت إمكان التحقيق الكامل لأفكاره عن القشريات الرقيقة والمنشآت المضلعة. وقد صنعت شركته العناصر مسبقة الصنع من الأسمنت الحديدي المستخدمة في قاعات معارض تورينو وPalazzetto dello Sport، مبرهنة تكامل ابتكار المواد والتصميم الإنشائي واقتصاد البناء.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.4.11.3 روبلنغ والكابلات

يستحق جون روبلنغ (1806–1869)، مع أنه لا يُناقش بإسهاب في هذا الفصل، الذكر بوصفه رائد الجسور المعلقة بالحبال السلكية. فقد صممت شركته، *John A. Roebling's Sons Company*، الجسور وصنعت أيضاً الكابلات السلكية المستخدمة فيها—وهو تكامل رأسي أتاح لروبلنغ الحفاظ على رقابة صارمة على جودة المواد. وأظهر جسر بروكلين (1883)، الذي أكمله ابنه واشنطن بعد وفاة روبلنغ، إمكانات الكابلات السلكية في المنشآت المعلقة طويلة البحور، وأرسى نموذج تصميم الجسور المعلقة الحديثة.

15.4.11.4 خيوط مشتركة

تبرز من هذه المقارنات أنماط عدة:

الشركة مختبر. استخدم كل مهندس شركته منصة للتجريب ودفع حدود الممكن بمادته المختارة—إيفل بالحديد والفولاذ، ونيرفي بالأسمنت الحديدي، وروبلنغ بالحبال السلكية.

المشاركة المباشرة في البناء. شارك الثلاثة بعمق في عملية البناء الفعلية، مما منحهم معرفة حميمة بكيفية تنفيذ تصاميمهم، وأتاح لهم الحفاظ على ضبط الجودة.

تكامل التصميم والهندسة. أتاحت القدرة على التصميم والبناء داخل الشركة نفسها لهؤلاء المهندسين دمج الجوانب الجمالية والوظيفية بسلاسة، فنتجت منشآت لافتة بصرياً وسليمة إنشائياً معاً.

إتقان المادة. أصبح كل منهم أبرز ممارس لمادته الإنشائية المختارة، وطور تقنيات وتطبيقات تبناها آخرون لاحقاً ونقحوها.

ومع أن نموذج المصمم-البنّاء-رائد الأعمال هذا أقل شيوعاً اليوم، بالنظر إلى فصل التصميم عن البناء في الممارسة الحديثة، فإنه يظل نموذج تحقيق تكامل المنشأ والعمارة الذي يميز أعظم أعمال الهندسة الإنشائية.

15.5 التشكل الإنشائي: الشخصيات الرئيسة

ستلتقي في الصفحات التالية الشخصيات الرئيسة التي أسهمت في تأسيس ما يمكن تسميته *التشكل الإنشائي*: أي فكرة إمكان توليد الشكل الإنشائي بالقيود بدلاً من اختياره بالذوق وحده. ويعني التشكل هنا (حرفياً، "صنع الشكل") العملية التي تنبثق بها الهندسة من متطلبات الحمل وشروط الإسناد وحدود المادة والاستقرار وقابلية البناء. وتعلم هؤلاء المهندسون والمعماريون أن "يدعوا المنشأ يتكلم"، سواء بالنماذج المعلقة والحبلية، أو تجارب الأغشية والقشريات، أو دراسات شبكات الشد، أو لاحقاً بإيجاد الشكل حاسوبياً. وسترى أن أشكالاً شهيرة كثيرة لم تُخترع ببساطة، بل *اكتُشفت* بوصفها تشكيلات اتزان تستقر فيها القوى والمواد والهندسة في كل متماسك—وأنيق كثيراً ما يكون.

يرتاح المهندسون والمعماريون أكثر إلى المنشآت القابلة للوصف رياضياً: كمرة مستقيمة، أو قوس (دائري أو مكافئ أو سلسلي)، أو قشرة تعرفها أسطح تربيعية.[42] وهذه الأشكال لا تكون "مرضية" فحسب، بل تجعل البحث عن حل رياضي قابلاً للمعالجة أيضاً.

[42] مثل المخروط والأسطوانة والإهليلج والمخروط الإهليلجي والأسطوانة الإهليلجية والقطع الزائد الإهليلجي والقطع المكافئ الإهليلجي والأسطوانة الزائدية والقطع المكافئ الزائدي والقطع المكافئ والكرة وشبه الكرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن هل يمكننا البحث عن سطح مرضٍ بالقدر نفسه يستوفي معيارين: (أ) الجاذبية الجمالية، و(ب) السلامة الإنشائية؟

يناقش هذا القسم بحث مهندسين بارزين عن أشكال من هذا النوع بطرائق إيجاد الشكل. وقد تناولت دراسات Boller **and** Schwartz, 2020; Boller **and** D'Acunto, 2021 هذا السؤال حديثاً بفحص أعمال فراي أوتو وإيسلر وموسميشي (الجدول 15.5).

جدول 15.5: مكتشفو الأشكال

السلسلة المعلقة		
سلك معلق	شد	هويغنز
قبة القديس بطرس	ضغط	بوليني
ساغرادا فاميليا	ضغط	غاودي
قوس سانت لويس	ضغط	سارينن
الغشاء		
أسقف قشرية	ضغط	إيسلر
جسر بازنتو	ضغط	موسميشي
ملعب ميونيخ	شد	فراي أوتو

15.5.1 السلسلة المعلقة

كانت أول مسألة "إيجاد شكل" تاريخياً البحث عن شكل—أي المعادلة الرياضية التي تصف—كابل معلق بين نقطتين. ومع أن معادلة رياضية وُجدت في النهاية، فإن تاريخ دراسات السلسلة المعلقة في أواخر القرن السابع عشر قصة رائعة للقارئ الحديث. وكان حافزاً لتطوير التفاضل والتكامل على يد لايبنتس وآل برنولي.

إنها قصة تنافس (بين ثلاث شخصيات شامخة)، وأنا (رغبة لايبنتس في إثبات تفوق تفاضله وتكامله "الخاص")، واتصالات سرية (استخدام واسع للشفرات)، ومراسلات خاصة (بين لايبنتس وهويغنز)، وغيرة (بين الأخوين ياكوب ويوهان برنولي)، وضغط للنشر (من محرر *Acta Eruditorum*[43])، وأكثر من ذلك بكثير.

وفوق ذلك، كانت "شأناً عائلياً"، إذ ارتبط جميع أبطالها بطريقة ما: كان هويغنز معلّم لايبنتس، الذي كان مستشار ياكوب برنولي، شقيق يوهان برنولي، والد دانيال برنولي ومستشار أويلر.

للتفاصيل التحليلية، انظر §30.3.3

15.5.1.1 بوليني (1683–1761)

كان أول تطبيق معروف لإيجاد الشكل من عمل جيوفاني بوليني، الذي طُلب منه التحقيق في تشقق قبة القديس بطرس في روما (§4.4.3) (الشكل 15.28a).

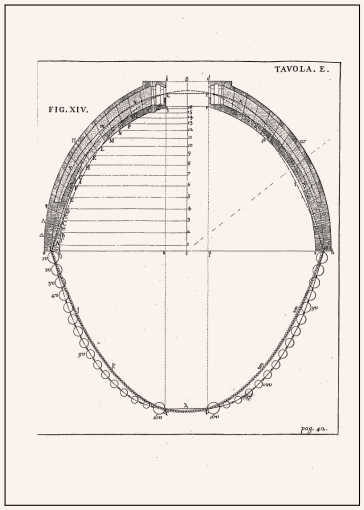
[43] المجلة العلمية الرائدة في أوروبا آنذاك.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بعد تحقيق أولي أجراه من سُموا "علماء الرياضيات الثلاثة"، كُلف بوليني بتقديم تقرير. وقد قيّم فيه استقرار القبة بتقسيمها إلى خمسين شريحة ومقارنة شكل كل شريحة بسلسلة معلقة مقلوبة—إذ كان معروفاً أن الكابل المعلق يحمل شداً خالصاً (Poleni, 1748) (الشكل 15.28b).



(a) تقرير بوليني



(b) مقارنة بوليني شريحة من القبة بسلسلة معلقة

شكل 15.28: تحقيق بوليني في تشقق قبة القديس بطرس (Poleni, 1748)

15.5.1.2 أنطوني غاودي (1852–1926)

انتظر أبرز مثال للتصميم الإنشائي القائم على تكبير النماذج بضعة قرون، حتى تصميم غاودي *Sagrada Família* في برشلونة أوائل القرن العشرين. وكما كان معروفاً بالفعل، فإن قلب سلسلة معلقة (أي الشكل الذي يتخذه كابل مرن تحت وزنه الذاتي) يولد قوساً كاملاً تحت ضغط خالص (Huerta, 2006).

الخط المستقيم للإنسان، والمنحني لله.

(Attributed to Antoni Gaudí (widely quoted, no verified primary source

شرع غاودي في إيجاد أشكال الكاتدرائية ببناء نموذج مصغر من *أشباه السطوح السلسلية* (قشريات تُحصل بتدوير منحنى سلسلة معلقة حول محور)، كما يظهر في الشكل 15.29a. وكان هذا بالفعل بديلاً بالغ الذكاء لمسألة معقدة في غير ذلك. ونلاحظ أنه بينما استكشف كثيرون شكل سلسلة معلقة واحدة، ربما كان غاودي أول من استكشف تجميعاً من السلاسل المعلقة يتصل بعضها ببعض. ويبين الشكل 15.29b نموذجاً جبسياً للكاتدرائية، حيث يميز الصحن المدبب العالي شكل السلسلة المعلقة.

15.5.1.3 إيرو سارينن (1910–1961)

كان إيرو سارينن معمارياً استعان بمهندسين إنشائيين لتصميم منشآت بارزة. وجمع حسه الشكلي المعماري إلى المتطلبات العلمية والتقنية اللازمة لتحقيق أعمال مبتكرة وأصيلة بنجاح (Rega, 2013). وصمم منشأين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) نموذج شبه سطح سلسلي لغاودي من أجل ساغرادا فاميليا (Dragicevic **and** Jansen, 2012)



(b) نموذج جبسي

شكل 15.29: ساغرادا فاميليا لغاودي

بارزين في الولايات المتحدة، استُلهم كلاهما من السلسلة المعلقة: (أ) مطار دالاس (المحلل في الفصل 38.1)؛ و(ب) قوس بوابة سانت لويس.

أتاحت القواعد الصارمة للرياضيات والميكانيكا رؤية المعماري الشكلية، إذ تمثل السلسلة المعلقة المتزنة المقلوبة الشكل الأمثل لقوس ينقل وزنه الذاتي إلى الأرض من دون إجهادات شد.

ولوعي سارينن بحدوده في التحليل الإنشائي، طلب مساعدة هانسكارل باندل للحصول على الشكل النهائي للقوس. وحين حاول سارينن إظهار الشكل الذي يريده بسلسلة معلقة بين يديه، لم يستطع تحقيق الأثر الممدود قليلاً و"الشاهق" الذي أراده. فطلب باندل السلسلة، وعاد بعد أيام قليلة، وأنتج منحنى سارينن باستبدال بعض الحلقات ثابتة الحجم بحلقات متغيرة،[44] فغيّر الوزن وتوزيعه والشكل. وعند تقييم مقاومة القوس البالغ ارتفاعه 630 قدماً للرياح، قرر باندل ضرورة إضافة وزن إلى أول 300 قدم من القوس لخفض مركز الثقل. وتطلب ذلك 25,980 طناً من الخرسانة.

يبلغ ارتفاع القوس 625 قدماً وعرض قاعدته 600 قدم. ومقطعه مثلث متساوي الأضلاع، وتتضاءل مساحة المقطع خطياً مع الارتفاع. وتنخفض الأضلاع المقابلة من 54 قدماً عند القاعدة إلى 17 قدماً عند القمة (الشكل 15.30A). وحساب أبعاد القوس بعيد عن البساطة[45] (تُدرج شيفرة MATLAB في الملحق I.1.2)، وكان هذا التفاعل اللافت بين معماري ومهندس إنشائي هو ما أتاح ذلك بالفعل.

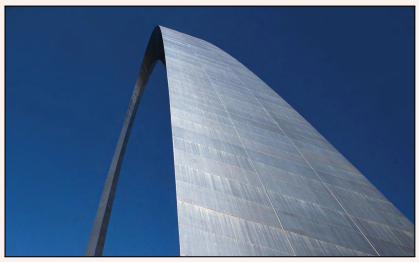
15.5.2 القشريات والأغشية

بينما جرّب غاودي وسارينن منحنيات السلسلة المعلقة لتحديد الشكل الكامل لسقف أو قوس، جرّب فراي أوتو وإيسلر وموسميشي الأسطح—الأول في الشد، والآخران في الضغط.

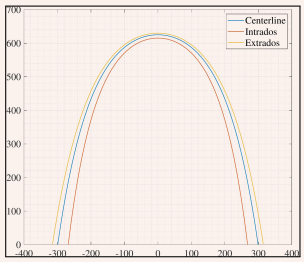
[44] يبدو من الفحص الدقيق للشكل 15.28b أن بوليني استخدم خرزات متغيرة الحجم في عمله لقبو القديس بطرس.

[45] أُجريت الحسابات، التي تشمل دوال زائدية، إلى المنزلة العشرية السادسة، من دون الاستفادة من الآلات الحاسبة والحواسيب الحديثة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) القوس



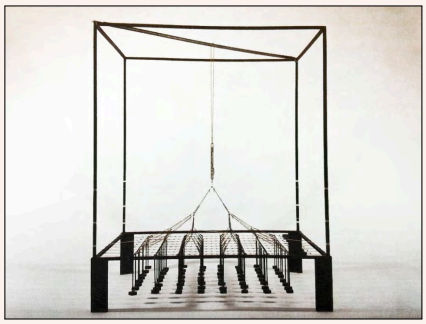
(a) الأبعاد

شكل 15.30: قوس البوابة لسارينن

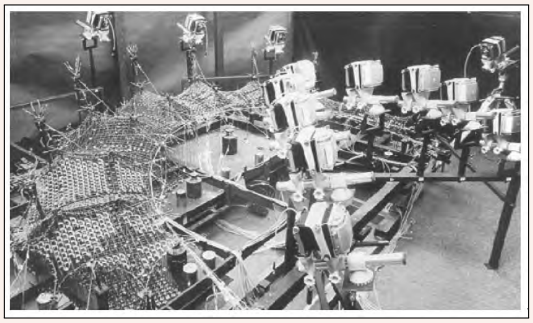
15.5.2.1 فراي بول أوتو (1925–2015)

كان فراي بول أوتو معمارياً ألمانياً متعدد المواهب ومهندساً إنشائياً. وعمل على إيجاد أشكال لأسطح الأغشية المشدودة (Rasch **and** Otto, 1996)، والإنشاء المتفرع (أساساً في الضغط) (Ap **and** Faia, 2018) (الشكل 15.31a)، وتحليل الأغشية المعلقة (شد) (Otto, Trostel **and** Schleyer, 1973) (الشكل 15.31b).

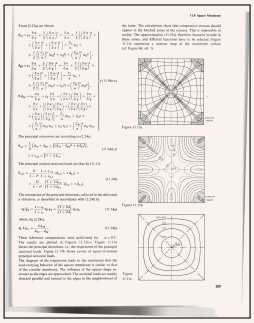
ولم يكن أوتو مجرباً ومعمارياً ماهراً فحسب، بل كان مرتاحاً بالقدر نفسه إلى الميكانيكا والرياضيات المعقدتين المتصلتين بالتحليل التحليلي لمنشآت الأغشية المشدودة (الشكل 15.31c).



(a) دراسة منشأ متفرع



(b) اختبار نموذج ملعب ميونيخ



(c) تحليل غشاء مشدود (Otto, Trostel **and** Schleyer, 1973)

شكل 15.31: فراي أوتو

15.5.2.2 هاينز إيسلر (1926–2009)

اتبع المهندس السويسري هاينز إيسلر هذا النهج (Chilton **and** Isler, 2000)، فصمم قشريات طبيعية (أي غير معرفة تحليلياً). وفي طريقة "الغشاء المعلق الحر"، أنشأ إيسلر الأشكال بتعليق قماش مبلل بحرية؛ ثم طوى حواف القشرة استناداً إلى خبرته لزيادة صلابتها. وصلب النماذج إما بتجميدها في الخارج في الطقس البارد، أو بإضافة خليط أسمنتي. وأخيراً، كبّرها وأعاد إنتاج هندستها الحبلية (Brew, 2007). كما استخدم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

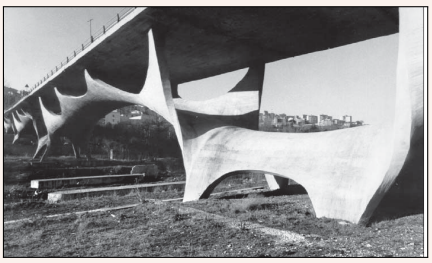
إيسلر حسابات بسيطة، قائمة على افتراض انعدام عزم الانحناء، لتقدير مقدار القوى—مع أن فعلاً انحنائياً ضئيلاً يوجد قرب المساند.



(a) نموذج غاودي (المصدر)



(b) قشرة إيسلر الطبيعية



(c) جسر موسميشي (المصدر)

شكل 15.32: أمثلة حديثة لإيجاد الشكل بالنماذج الفيزيائية

15.5.2.3 سيرجيو موسميشي (1926–1981)

كان سيرجيو موسميشي مهندساً متعدد الجوانب، استكشف أكثر من معظم غيره الاعتماد المتبادل بين المنشأ والشكل المعماري بطريقته الفريدة. وكان مجرباً بارعاً يفهم سريان القوى[46] ويشتق منه الشكل تبعاً لذلك. ورأى أن الشكل (لا الإجهادات) ينبغي أن يكون المجهول الرئيس.

أكثر المنشآت ارتباطاً بسيرجيو موسميشي جسره الشهير فوق نهر بازنتو (الشكلان 15.33a–15.33b). ويحمله سطح ملتف واحد مستمر، تمتد أصابعه فترفع سطح الجسر بالتناوب أو تهبط إلى الأرض، مولدة أربعة بحور يبلغ كل منها نحو سبعين متراً. ويبلغ طول الجسر نحو 300 m، ويتألف من سطح صندوقي من الخرسانة المسلحة تحمله قشرة مستمرة مزدوجة الانحناء من المادة نفسها. وتكوّن القشرة أربعة بحور متساوية طول كل منها 69.2 m، وسماكتها 0.30 m، وتميزها أضلاع أعمق عند الحدين الجانبيين. وتحمل سطح الجسر بواسطة 16 زوجاً من المساند موضوعة بفواصل متساوية قدرها 17.30 m على المحور الطولي و12.00 m في الاتجاه العرضي. وتُسلح القشرة الخرسانية المسلحة بشبكتين من قضبان فولاذية قطرها $16\ \text{mm}\phi$، بتباعد منتظم 0.2 m، موضوعتين عند السطحين الداخلي والخارجي بغطاء خرساني متساو. ويزود الضلعان الأعمق على جانبي القشرة بتسليح إضافي (Marmo **andothers,** 2019).

أجرى موسميشي اختبارات تجريبية واسعة (الشكل 15.33c) لإيجاد الشكل وتحليل الإجهادات.[47] وكان ذلك ضرورياً للتسليح المعقد الناتج (الشكل 15.33d). وينبغي إضافة أنه أكمل نمذجته المصغرة بفرض معادلات لابلاس وطرائق الفروق المحددة.

وكما حدث لمضمار زارزويلا في مدريد، أعلنت وزارة التراث والثقافة الإيطالية الجسر "معلماً ذا أهمية ثقافية".

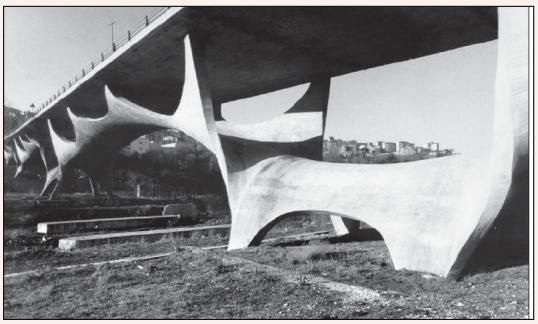
> وفق موسميشي، ليس شكل المنشأ مجرد نتيجة للحسابات؛ بل هو أيضاً وسيلة للتعبير، على المستوى الدلالي، عن فكرة أن كل ما هو أساسي للسلوك الإنشائي [...] ينبغي أن يكون أيضاً جزءاً من الشكل المرئي. وهذا جزء من الرسالة.

[46] في منشآت أعقد بكثير من منشآت نيرفي.
[47] اختُبر نموذج الخرسانة المصغرة في ISMES، برغامو.

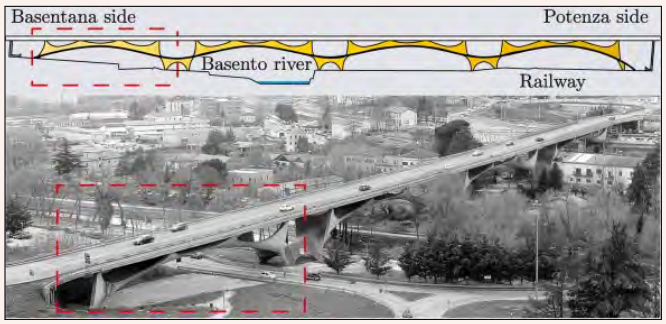
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(Brodini, 2013)

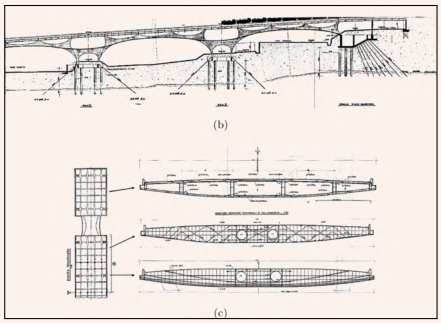
يجتمع الشكل والوظيفة في الجسر بانسجام يفوق منشآت كثيرة أخرى، مع أن قيمته المعمارية/الجمالية قابلة للنقاش. ومع ذلك، فهو توليف فريد جدير بالدراسة.



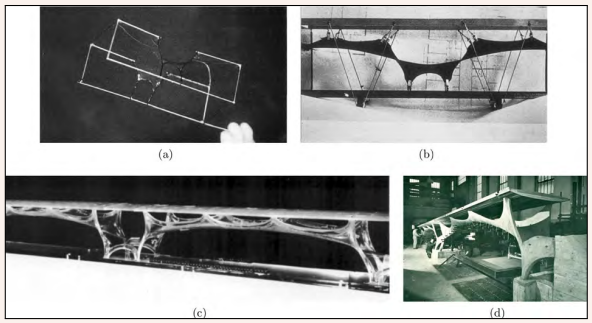
(b) تفاصيل الجسر (Desideri **andothers**, 2013)



(a) الجسر المكتمل (Marmo **andothers**, 2019)



(d) التسليح (Marmo **andothers**, 2019)



(c) اختبارات النماذج: (أ) صابون، (ب) نيوبرين، (ج) زجاج عضوي، (د) خرسانة مصغرة (Marmo **andothers**, 2019)

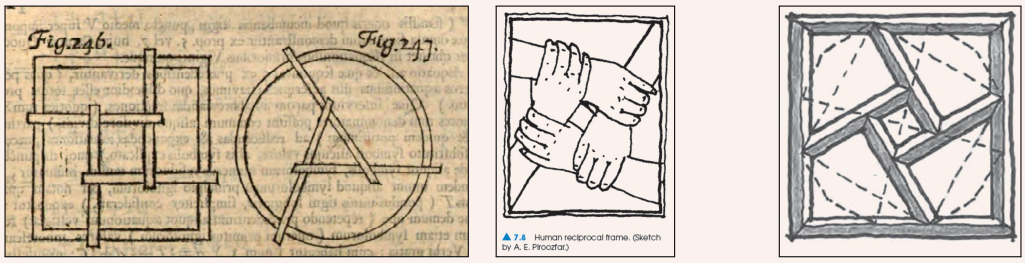
شكل 15.33: جسر موسميشي فوق نهر بازنتو

15.5.3 المنشآت المتبادلة

يقوم مبدأ التبادل على استخدام عناصر حاملة يسند بعضها بعضاً على امتداد بحورها، ولا تسندها عند النهايات قط، فتكوّن تشكيلاً فراغياً بلا تراتب إنشائي واضح (Pugnale **and** Sassone, 2014). وبعبارة أخرى، تعتمد جميع عناصر المنشأ بعضها على بعض في الإسناد المتبادل، ولا يكون أي منشأ فرعي مستقراً حتى يكتمل المنشأ كله. وأخيراً، يجعل نزع عنصر إنشائي واحد كل جزء من المنشأ قابلاً للحركة بالنسبة إلى كل جزء آخر.

يظهر التخطيط الأيقوني لمنشأ متبادل في الشكل 15.34.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(PDF a) (Larsen, 2007) PDF b) Wallis, 1695)

شكل 15.34: المنشآت المتبادلة: مفاهيم توضيحية

15.5.3.1 التطور التاريخي

قدم فيلار دو أونيكور (De Honnecourt, 1858) (PDF De Honnecourt, 2006) أقدم مثال معروف نحو سنة 1240. ويبين الشكل 15.35a رسمه لمنشأ متبادل، مع نص مرافق يصف المسألة: *Ensi poe's ovrer a one tor u a one maison de bas, si sunt trop cor*—وترجمته التقريبية "كيف تعمل على برج أو بيت إذا كانت الكمرات أقصر مما ينبغي."

ثم تناول ليوناردو دا فينشي هذا المخطط في اثنتين من مدوناته.[48] ففي مدونة مدريد I (Da Vinci, 1490 PDF) نجد رسماً مشابهاً (الشكل 15.35b). وفي المدونة الأطلسية (Da Vinci, 1505) نرى تنويعاً أعقد على الموضوع نفسه (الشكل 15.35c).

وبالطبع، لم يقدم أونيكور ولا ليوناردو حلاً تحليلياً لمسألة المنشأ المتبادل المعقدة. وانتظر ذلك Wallis, 1695 PDF، الذي ربما كان تحليله الرياضي للقوى في المنشأ المتبادل أول مثال مسجل لتحليل إنشائي شامل لمنشأ غير بسيط.[49]

وهكذا قدم واليس أول حساب إنشائي جُمعت فيه العناصر الآتية كلها (PDF Houlsby, 2014):

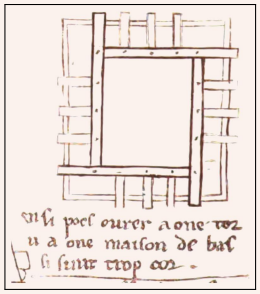
- عرض رسم واضح للمنشأ، تُسمى فيه الوصلات؛
- استغلال التماثل الرباعي لتبسيط التحليل اللاحق؛
- تحليل يقوم على التطبيق المنهجي لمبدأ بسيط (اتزان عزوم كل كمرة) على جميع العناصر في المنشأ، ينتج 25 معادلة خطية آنية؛
- حذف منهجي بين المعادلات لحل المتغيرات الخمسة والعشرين؛
- استخلاص نتائج إنشائية مهمة من النتيجة المحصلة عن الأحمال على العناصر البارزة في المنشأ.

ملاحظة عن جون واليس (1616–1703): كان رجل دين ورياضياً إنجليزياً يُنسب إليه جزء من الفضل في

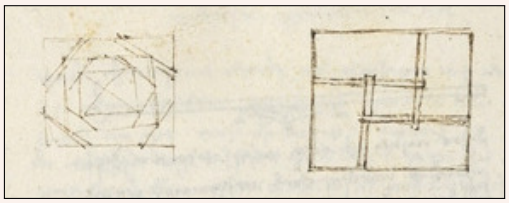
[48] كانت المدونة السلف التاريخي للكتاب الحديث ذي المحتويات المخطوطة. والمدونة، مثل الكتاب الحديث إلى حد بعيد، تُجلد بتكديس الصفحات وتثبيت مجموعة واحدة من الحواف—وهي هيئة تماثل تجليد الكتب الحديث. وقد حلت المدونة محل لفائف البردي وألواح الشمع الأقدم، وقدمت مزايا عدة: يمكن فتحها مباشرة عند أي موضع في النص، وتتيح الكتابة على وجهي الورقة، ويمكنها احتواء نصوص طويلة. ولا نشير في المدونة إلى أرقام الصفحات، بل إلى ورقة.

[49] كما ذُكر من قبل، كان جون واليس هو من أدخل رمز اللانهاية ∞ سنة 1655.

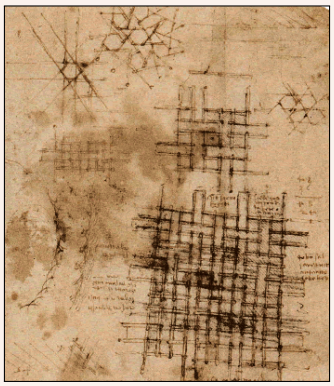
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



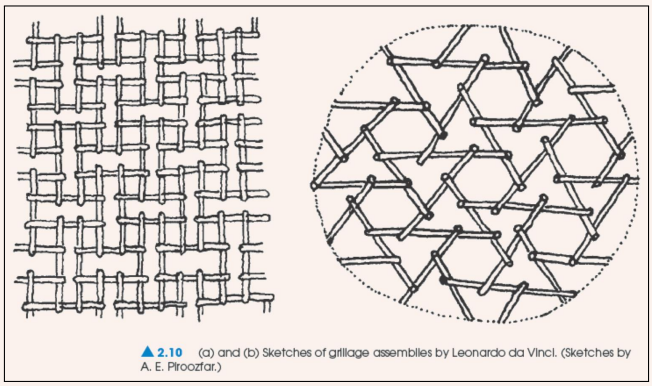
(a) دفتر De Hon-necourt, 2006، الورقة E XLIII



(b) Da Vinci, 1490) مدونة مدريد، الورقة 49

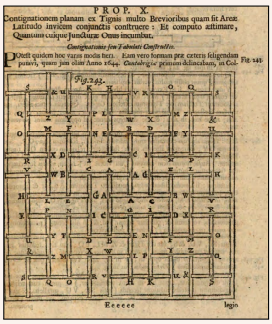


(c) Da Vinci, 1505) المدونة الأطلسية، الورقة 899v

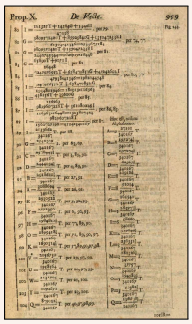


(d) شرح رسم ليوناردو (Larsen, 2007)

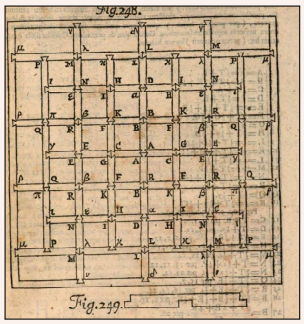
شكل 15.35: أمثلة مبكرة للمنشآت المتبادلة



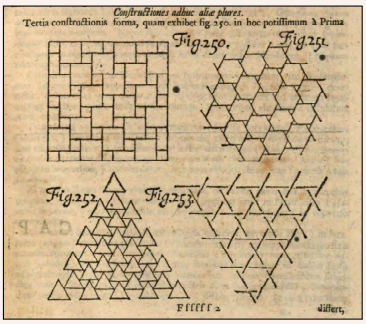
(a) صياغة المسألة



(b) حل 25 معادلة ذات 25 مجهولاً



(c) مسار الحمل



(d) تنويعات على موضوع

شكل 15.36: تحليلات المنشآت المتبادلة عند Wallis, 1695

تطوير حساب التفاضل والتكامل المتناهي الصغر. ويُنسب إليه إدخال الرمز ∞ لتمثيل مفهوم اللانهاية. كما استخدم $1/\infty$ لكمية متناهية الصغر. وكان معاصراً لنيوتن وأحد أعظم مفكري النهضة المبكرة للرياضيات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.5.3.2 الإحياء الحديث

يبدو أن مصطلح "الإطارات المتبادلة" حل الآن محل "المنشآت المتبادلة"، ويبدو أن أولغا بوبوفيتش أحيت دراستها من خلال أطروحتها (Popovic, 1996) وكتابها المؤسس (Larsen, 2007) ومنشورات أخرى كثيرة (Popovic Larsen, 2014).

يركز الشكل 15.37 على ما قد يكون أشهر إطار متبادل في اليابان، *قاعة سيوا للمعارض* التي صممها كازوهيرو إيشي. ومن الصعب تصديق إجراء تحليلات إنشائية مفصلة؛ بل يبدو أن "الحكم الهندسي" الخالص للمعماري والصنعة الممتازة هما اللذان سادا.



شكل 15.37: قاعة سيوا للمعارض (اليابان) (Popovic, 1996)

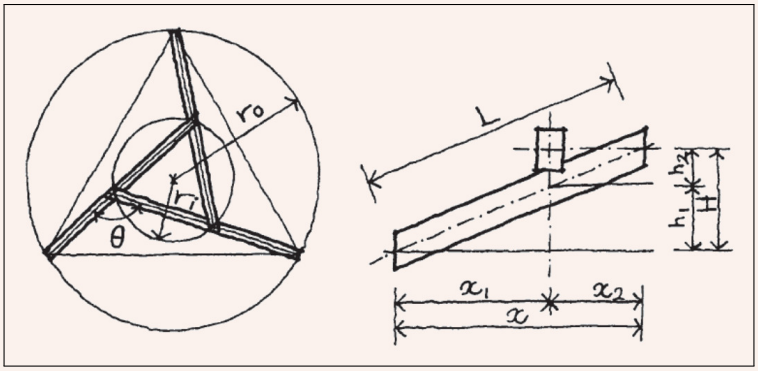
لا تطيل بوبوفيتش، بوصفها معمارية، الحديث في الحسابات، والواقع أنه لا يبدو أن هناك إلا أمثلة قليلة عليها (Schrama, 2021). وتنازلها الوحيد للميكانيكا هو التعريف البارامتري لوحدة إطار متبادل (الشكل 15.38):

- عدد الكمرات (n)
- نصف القطر المار بالمساند الخارجية (r_o)
- نصف القطر المار بنقاط تقاطع الكمرات (r_i)
- الارتفاع الرأسي من المساند الخارجية إلى نقاط تقاطع الكمرات (H)
- التباعد الرأسي لخطوط مراكز الكمرات عند نقاط تقاطعها (h_2)
- طول الكمرات على الميل (L)

15.5.4 التحسين الرياضي: ماكسويل وميشيل وبيكر وبيغيني

نتتبع في هذا القسم تطور إرشادات التصميم الرئيسة من المبادئ المؤسسة إلى التطبيق الحديث. ونبدأ ببحث Maxwell, 1864c المؤسس، الذي لم يتناول اعتبارات التصميم مباشرة. ثم يأتي بحث Michell, 1904 البارز (المعد أول بحث يعالج التحسين الإنشائي)، وأخيراً تطبيق بيكر وبيغيني الحديث لهذه المبادئ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.38: تمثيل بارامتري لوحدة إطار متبادل (Popovic, 1996)

15.5.4.1 ماكسويل (1831–1879)

بينما وضع بحث ماكسويل المؤسس (Maxwell, 1864c) أسس طريقة العمل الافتراضي، كان بحثه اللاحق (Maxwell, 1864b) أشد أثراً في المهنة (انظر §15.5.4.2).

يمكن تلخيص ما كتبه في الآتي:

1. في أي منظومة نقاط متزنة في مستوى تحت تأثير قوى تنافر وتجاذب، يساوي مجموع حاصل ضرب كل قوة تجاذب في المسافة بين النقطتين اللتين تؤثر بينهما مجموع حاصل ضرب قوى التنافر، كل منها في المسافة بين النقطتين اللتين تؤثر بينهما.
2. اضرب كل حمل في ارتفاع نقطة تأثيره، وكل قوة شد في طول العنصر الذي تؤثر فيه، واجمع جميع هذه الحواصل.
3. ثم اضرب الضغوط الرأسية على مساند الإطار، كل منها في ارتفاع نقطة تأثيره، وكل ضغط في طول العنصر الذي يؤثر فيه، واجمع الحواصل. ويساوي هذا المجموع المجموع السابق.

وبعبارة بسيطة: مجموع *مسارات أحمال الشد* في *المنشأ* مطروحاً منه مجموع *مسارات الضغط* يساوي قيمة *متصلة بالقوى الخارجية المطبقة*:

$$\sum F_T L_T - \sum F_C L_C = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{\Delta}_i \tag{15.1}$$

ويتابع ماكسويل:

> تنشأ أهمية هذه المبرهنة للمهندس من أن مقاومة العنصر تتناسب عموماً مع مساحة مقطعه، بحيث إذا تناسبت مقاومة كل عنصر مع الإجهاد الذي عليه تحمله، تناسب وزنه مع حاصل ضرب الإجهاد في طول العنصر. ومن ثم تقدم مجاميع الحواصل هذه تقديراً لكمية المادة الكلية التي يجب استخدامها لتحمل الشد والضغط، كل على حدة.
>
> (Maxwell, 1864c)

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.5.4.2 ميشيل (1870–1959)

مع أن ماكسويل اشتق، لجميع الأغراض العملية، مبدأ العمل الافتراضي (بطريق غير مباشر)، فإنه لم يتصور تطبيق اشتقاقه على التصميم الأمثل للمنشآت.[50]

وفعل ذلك Michell, 1904، الذي تابع عمل ماكسويل (المعادلة 15.1). وحدد التخطيط الأمثل لجملون في حالة حمل واحدة حين لا يجوز أن تتجاوز القيمة المطلقة للإجهاد المحوري في أي قضيب حداً معيناً. وحظي حله وشرط التصميم باهتمام كبير خلال القرن العشرين.[51]

> ومن ثم يبلغ الإطار حد اقتصاد المادة الممكن في أي منشأ إطاري تحت القوى المطبقة نفسها، إذا أمكن إخضاع الحيز الذي يشغله لتشوه صغير، بحيث تزيد الانفعالات في جميع قضبان الإطار بكسور متساوية من أطوالها، لا تقل عن التغير الكسري لأي عنصر من الحيز. وإذا امتد الحيز الخاضع للتشوه إلى اللانهاية في جميع الاتجاهات، كان حجم الإطار أصغر من جميع غيره؛ وإلا فقد ثبت أنه أصغر بالنسبة إلى ما يقع داخل الحد المعين نفسه.
>
> يمكن بوضوح استيفاء الشرط $e = \varepsilon$ حين تكون الإجهادات في جميع قضبان الإطار من الإشارة نفسها. ويكون تشوه الاختبار المطبق عندئذ تمدداً منتظماً أو انكماشاً (بحسب كون الإطار في الشد أو الضغط) لحيز يحيط بالإطار ويمتد إلى أي حد محدود أو إلى اللانهاية كما يُراد.
>
> أبسط الإطارات الدنيا [الجمالونات] من هذه الفئة الخاصة هي:
>
> I روابط ودعامات خاضعة لزوج واحد من القوى المتساوية والمتعاكسة.
> II إطارات مثلثية ورباعية السطوح تحت قوى مطبقة عند زوايا الشكل، وتؤثر على خطوط تتقاطع داخله.
> III سلاسل معلقة عامة، حيث تكون نقاط تطبيق القوى المطبقة والقوى نفسها معلومة.
>
> وفي جميع هذه الحالات يكون الحجم الأدنى للإطار
>
> $$V_m = \frac{\sum l[f]}{P} = \frac{\partial W}{\varepsilon P} = \frac{\sum \varepsilon F r \cos\theta}{\varepsilon P} = \frac{\sum F r \cos\theta}{P}$$
>
> حيث F إحدى القوى المطبقة، وr مسافة نقطة تطبيقها R من نقطة اعتباطية O، وθ الزاوية بين RO واتجاه F، وP الإجهاد المسموح في المادة.
>
> ...
>
> يبلغ إطار (الأمثل إذا) حد اقتصاد المادة الممكن في أي منشأ إطاري تحت القوى المطبقة نفسها، إذا أمكن إخضاع الحيز الذي يشغله لتشوه صغير ملائم، بحيث تزيد الانفعالات في جميع قضبان الإطار بكسور متساوية من أطوالها، لا تقل عن التغير الكسري في طول أي عنصر من الحيز.
>
> (Michell, 1904)

ويتابع ميشيل قائلاً إن فئة أعم من الإطارات التي تستوفي الشرط $e = \varepsilon$ تتألف من تلك التي تكون قضبانها، قبل التشوه وبعده، منحنيات في منظومات متعامدة. وهذا تحديداً موضع اتصال ميشيل بالبحث الثاني لـMaxwell, 1864b.

قدم ميشيل التصاميم المثلى لعدد قليل من المنشآت (الجمالونات)، المبينة في الشكل 15.39.

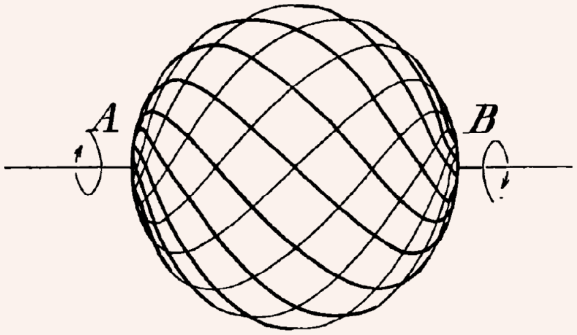
[50] وبالقياس، عرّف Eshelby, 1970 عدداً من التكاملات الكنتورية المستقلة عن المسار بموجب مبرهنة حفظ الطاقة، من دون إسناد أي تفسير فيزيائي ("لمجرد جمال الرياضيات والميكانيكا"، إن صح التعبير). ولأنه لم يسع قط إلى إسناد معنى فيزيائي إلى معادلاته الكثيرة، لفتت إحداها انتباه Rice, 1968، الذي وجد أنها تقابل معدل انطلاق طاقة الشق، فعرّف بذلك التكامل الكنتوري الذي حمل اسمه.

[51] يبدو أن المسألة الأعقد، أي التخطيط الأمثل لجملون تحت أحمال بديلة، حظيت باهتمام أقل.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. (Fig. 5.) Equal and opposite couples applied at points A, B on the straight line AB.

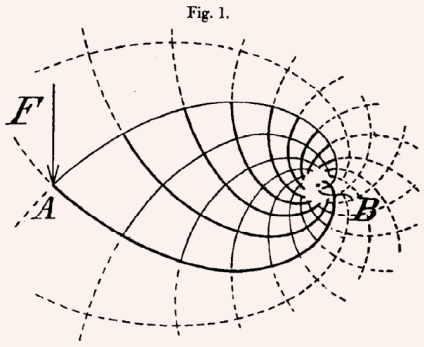
Fig. 5.



The minimum frame consists of the series of rhumb-lines inclined at 45° to the meridians of the sphere having its poles at A and B.

1. (Fig. 1.) A single force F applied at A, and acting at right angles to the line AB, is balanced by an equal and opposite force and a couple, of moment F × AB, applied at B.

Fig. 1.

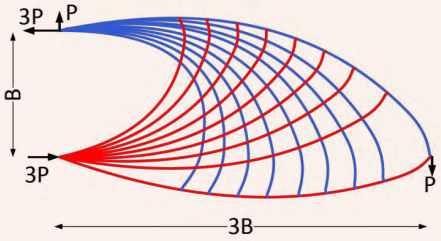


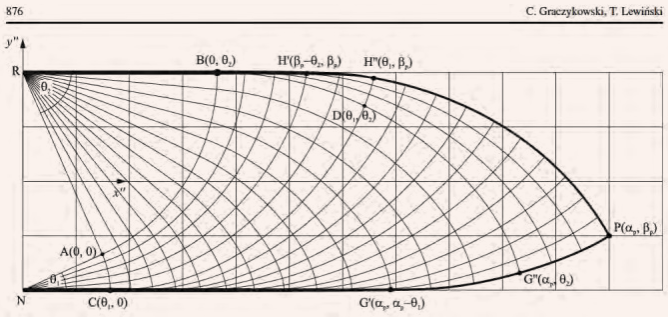
The minimum frame is formed of two similar equiangular spirals having their origin at B and intersecting orthogonally at A, together with all the other spirals orthogonal to these and enclosed between them.

شكل 15.39: تصاميم مثلى (Michell, 1904)

يمكن القول على نحو معقول إن ميشيل كان، ببحثه، "أبا" *التحسين الإنشائي*.

ونشأ من ذلك ما يسمى منشآت ميشيل—أي المنشآت المصممة على النحو الأمثل وفق هذه المبادئ (مثل الجملون في الشكل 15.40).





شكل 15.40: جملون ميشيل

15.5.4.3 بيكر وبيغيني

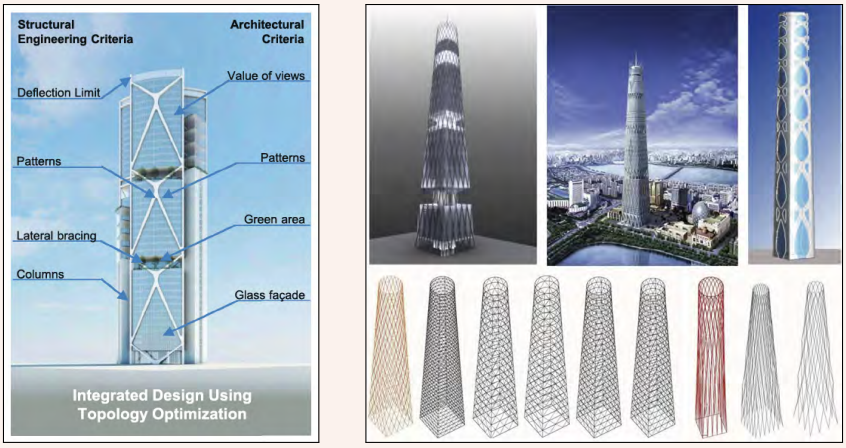
يبدو أن Baker, 1992 استثمر عمل ميشيل في تصميم المنظومات الجانبية القائم على الطاقة. ووسع Beghini **andothers**, 2014 ذلك، رابطاً العمارة بالهندسة من خلال التحسين الطوبولوجي للمنشآت (الشكل 15.41).

مثال: تصميم جملون

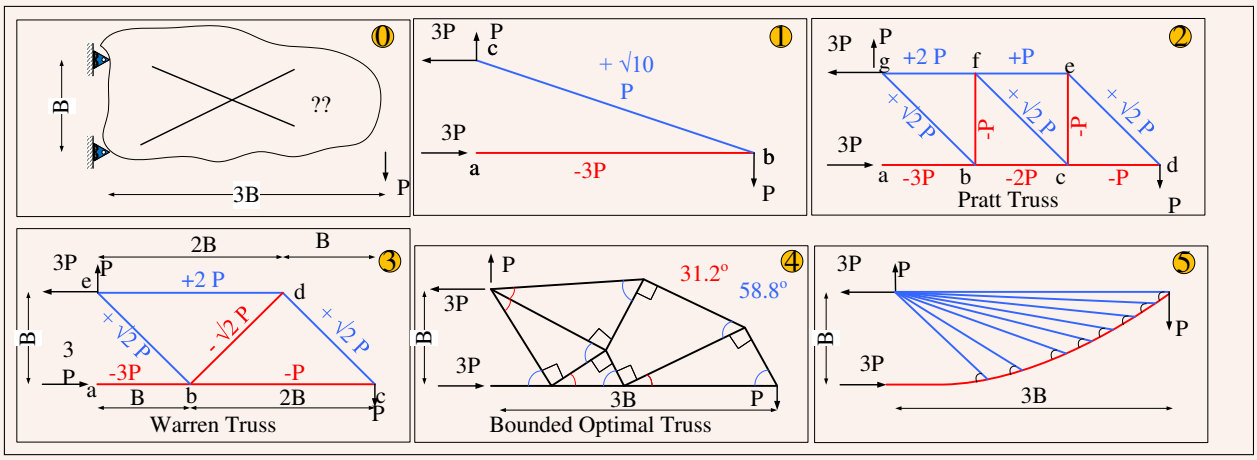
مقتبس من "Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies" لـ Baker **andothers**, 2015.

نسعى إلى تصميم جملون مسند عند عقدتين ويحمل حملاً رأسياً عند عقدة أخرى، مع إهمال الوزن الذاتي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 15.41: التحسين الطوبولوجي للمنشآت (Beghini **andothers,** 2014)



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Two bar Truss									
1	a-b	3.000		3.000		9.0	-9.0	9.0	
2	b-c	3.162	3.162		10.0		10.0	10.0	
Sum		**6.162**			**10.0**	**9.0**	**1.0**	**19.0**	**19.0**
Warren Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	2.000		1.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
4	d-e	2.000	2.000		4.0	0.0	4.0	4.0	
5	b-e	1.414	1.414		2.0	0.0	2.0	2.0	
6	b-d	1.414		1.414		2.0	-2.0	2.0	
Sum		**9.243**			**8.0**	**7.0**	**1.0**	**15.0**	**15.0**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Pratt Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	1.000		2.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
4	d-e	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
5	e-f	1.000	1.000		1.0		1.0	1.0	
6	f-g	1.000	2.000		2.0		2.0	2.0	
7	b-g	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
8	c-f	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
9	b-f	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
10	c-e	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
Sum		**11.243**			**9.0**	**8.0**	**1.0**	**17.0**	**17.0**

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لا تُعرض هنا تفاصيل التحليل (المباشر لكنه طويل)؛ غير أن النتائج تُلخص أدناه لتشكيلات مختلفة من الجملونات.

يتناسب العمود I مع الحجم الكلي للمادة (بافتراض الإجهاد المسموح نفسه في الشد والضغط). ويتناسب الانحراف (J) مع حجم المادة (I).

	مسارات الأحمال			الانحراف	
	حمل الشد $A = \frac{\sum F_T L_T}{PB}$	حمل الضغط $B = \frac{\sum F_C L_C}{PB}$	$A - B$	$A + B$	$\frac{\Delta}{\frac{\sigma B}{E}}$
①	10	9	.1	19	19
②	9↘	8↘	→.1	17↘	17↘
③	8↘	7↘	→.1	15↘	15↘
④	7.7↘	6.7↘	→.1	14.47↘	14.47↘
⑤	8.52	7.52	.1	16.04	16.04

حلل Graczykowski **and** Lewiński, 2010 هذا الجملون وحصل على التشكيل المبين في ⑤.

15.5.5 خاتمة: حين تصادم المعماريون والمهندسون

كان القرن التاسع عشر زمن تصنيع سريع وتقدم تقني، وشهد توتراً ومنافسة، بل عداوة، كبيرة بين *المعماريين والمهندسين*. وكثيراً ما اختلفت الفئتان المهنيتان في دور *الجماليات* مقابل *الوظيفة*، وفي *الإرث الفني* للعمارة الكلاسيكية مقابل *الإمكانات المبتكرة* لمواد الهندسة الحديثة مثل الحديد والفولاذ. واتخذ هذا التوتر أشكالاً مختلفة على امتداد القرن: فكان أحياناً مسابقة مباشرة بين خصمين معروفين يتنافسان على التكليف نفسه، وأحياناً مقاومة من المؤسسة المعمارية لحل مهندس منفذ بالفعل بعد وقوع الأمر. وتوضح ثلاث حوادث نطاق هذا الصراع—مسابقة برج إيفل وبورديه في باريس، واستقبال قصر باكستون الكريستالي في لندن، والنقد الذي واجهه جسر روبلنغ في بروكلين بنيويورك—وتعكس معاً التحول الاجتماعي الأوسع من *الرومانسية* و*التاريخانية* في أوائل القرن التاسع عشر إلى *الحداثة الصناعية* التي حددت نصفه الثاني.

15.5.5.1 الحالة الأولى: بورديه في مقابل إيفل (باريس، 1889)

تلخص المنافسة بين جول بورديه (1835–1915)، المعماري المدرب كلاسيكياً، وغوستاف إيفل (1832–1923)، المهندس المبتكر (انظر §15.4.2 لعرض أوفى لمسيرته)، على تصميم البرج الضخم لمعرض العالم سنة 1889 في باريس موضوعات هذا الفصل. فقد كانت منافسة بين التقليد والحداثة، وبين المُثل الكلاسيكية لـ*École des Beaux-Arts* والمبادئ الهندسية العقلانية لـ*École Centrale*.

خريجان من المدرسة المركزية اشترك الرجلان في أساس تعليمي واحد في *École Centrale des Arts et Manufactures*. وقد تأسست المدرسة سنة 1829 لإعداد مهندسين للاقتصاد الفرنسي سريع التصنيع، مركزة على الهندسة العملية والتطبيقات الصناعية بدلاً من الدراسات الكلاسيكية للعمارة. وأكد منهاجها الرياضيات والميكانيكا والفيزياء والكيمياء—ودرب الطلاب على حل مسائل واقعية معقدة بالمبادئ العلمية.

افترق مساراهما بعد التخرج. فتابع بورديه دراسته في *École des Beaux-Arts*، مركز العمارة الكلاسيكية في فرنسا، التي أكدت التماثل والتناسب والمراجع التاريخية إلى اليونان وروما القديمتين. وأصبح نصيراً

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

للعمارة الكلاسيكية، وصمم مباني مثل *Palais du Trocadéro*، الذي جسد مُثل الفنون الجميلة في الضخامة والزخرفة المفصلة.

أما إيفل فسلك، على العكس، مسيرة في الهندسة، وطور خبرة في الحديد المطاوع وتقنيات البناء المسبق. وأظهرت أعماله في الجسور والجسور العلوية—مثل جسر غارابيت—إتقانه للديناميكا الإنشائية ومقاومة الرياح. وبخلاف بورديه، آمن إيفل بصدق المواد وبفكرة أن جمال المنشأ ينبغي أن ينشأ من وظيفته ودقته الهندسية، لا من الزخرفة المضافة.

المقترحان المتنافسان اقترح بورديه لمعرض سنة 1889 منشأ حجرياً ضخماً على هيئة عمود عملاق—"برج الشمس" (*Tour Soleil*)—يذكّر بالنصب النصر الرومانية (Bourdais, 1881). وكان التصميم ضخماً ثقيلاً مزخرفاً، ملتزماً بالمُثل الجمالية الكلاسيكية في التماثل والدوام. وكان سيُكسى بالغرانيت ويتوجه ضوء كهربائي ينير باريس كلها.

كان تصميم إيفل، الذي طوره مع المهندسين موريس كوشلان وإميل نوغييه والمعماري ستيفن سوفستر، مختلفاً جذرياً: برجاً شبكياً حديدياً ارتفاعه 300 متر، مصنوعاً من أجزاء حديدية مسبقة الصنع (Lemoine, 2002). وكان حديثاً رشيقاً واحتفاءً بالتكنولوجيا الصناعية. ورمز الإطار الحديدي المكشوف إلى عقلانية الهندسة الحديثة وصدقها.

النتيجة اختارت الحكومة الفرنسية في النهاية تصميم إيفل، إدراكاً منها للأهمية الرمزية للهندسة الحديثة لأمة تسعى إلى إظهار براعتها الصناعية. ولم يخل القرار من الجدل: فقد عارض نقاد كثيرون، ولا سيما الفنانون والمثقفون، تصميم إيفل في البداية. ووقع فريق من الباريسيين البارزين، منهم الكاتب غي دو موباسان، عريضة تصف المنشأ الحديدي المقترح بأنه "مسخ" و"عار على باريس".

حظي مقترح بورديه بتأييد التقليديين في الوسط المعماري الفرنسي، لكن برجه الحجري كان سيكون أغلى بكثير وأبطأ بناء وأقل ابتكاراً إنشائياً. أما برج إيفل، الذي اكتمل في الموعد وتحت الميزانية، فأصبح رمز المعرض—ثم رمز باريس نفسها في نهاية المطاف.

15.5.5.2 الحالة الثانية: باكستون وقصر الكريستال (لندن، 1851)

بخلاف مسابقة بورديه وإيفل، لم يكن صراع جوزيف باكستون مع خصم واحد معروف، بل مع المؤسسة المعمارية الأوسع. فقد اقترح باكستون، الذي تدرب بستانياً ومصمم بيوت زجاجية لا معمارياً أكاديمياً، منشأ هائلاً مسبق الصنع من الحديد والزجاج للمعرض العظيم سنة 1851—وهو نوع من المباني مشتق مباشرة من خبرته في تصميم البيوت الزجاجية الكبيرة، ومختلف جذرياً عن كل ما أنتجته مهنة العمارة. ونُشر عرض معاصر مفصل لتصميم المبنى وإنشائه في السنة نفسها التي افتُتح فيها (Berlyn **and** Fowler, 1851).

واجه تصميمه مقاومة من *Royal Institute of British Architects* (*RIBA*) ومن معماريين بارزين في عصره. ومثّل كل من ديسيموس بيرتون، الذي أيد باكستون أولاً لكنه جاء من تدريب كلاسيكي، وأ. و. ن. بيوجن، أبرز نصير لإحياء العمارة القوطية، قيماً معمارية تقليدية تتعارض مع استخدام باكستون الجذري للمواد الصناعية. ولم يتركز النقد على تصميم بديل منافس بقدر ما ركز على قلق أوسع: أن مبنى مركباً من مكونات حديدية وزجاجية منتجة بكميات كبيرة، بدلاً من البناء الحجري المصنوع وفق سوابق تاريخية، لا يمكن أن يسمى عمارة على الحقيقة.

ورغم هذه المقاومة، بُني قصر الكريستال في أقل من ستة أشهر—إنجاز غير مسبوق في البناء المسبق—وأصبح، مثل برج إيفل بعد عقود، الرمز الباقي للمعرض الذي بُني لإيوائه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.5.5.3 الحالة الثالثة: روبلنغ وجسر بروكلين (نيويورك، 1869–1883)

واجه جسر بروكلين لجون روبلنغ نمطاً مماثلاً من المعارضة المؤسسية لا المنافسة المباشرة. واستُقبل تصميم روبلنغ—جسر معلق ببحر غير مسبوق، يستخدم كابلاً فولاذياً من ابتكاره—بنقد من شخصيات منها ريتشارد أبجون، المعماري البارز في إحياء القوطية، وفريدريك لو أولمستد، معماري المناظر الطبيعية والمخطط الحضري وراء سنترال بارك؛ فقد اعترض كلاهما على اقتحام الجمال الصناعي للكابلات والأعمال الفولاذية المكشوفة الطابع البصري للمدينة (McCullough, 1972). ووثق روبلنغ بنفسه تقدم المشروع في تقاريره السنوية إلى مديري شركة الجسر (Roebling, 1877 PDF).

وكما في حالة باكستون، لم يكن الاعتراض تصميماً منافساً بقدر ما كان انزعاجاً مؤسسياً أوسع من إزاحة جماليات الهندسة لجماليات العمارة في منشآت مدنية بارزة. ولم يعش روبلنغ ليرى الجسر مكتملاً—إذ مات من مضاعفات حادث مسح قبل بدء البناء، وتولى ابنه واشنطن روبلنغ، الذي أقعده هو أيضاً مرض تخفيف الضغط أثناء المشروع، الإشراف على إتمامه إلى حد بعيد من خلال عمل زوجته إميلي وارن روبلنغ. وأصبح الجسر المكتمل، مثل قصر الكريستال لباكستون وبرج إيفل، أحد المعالم المحددة لمدينته.

15.5.5.4 الإرث

يتكرر النمط نفسه في الحوادث الثلاث: حل هندسي مسبق الصنع وصناعي وجريء إنشائياً يواجه مقاومة من مؤسسة معمارية تدافع عن تقاليد جمالية ومادية موروثة—وفي كل حالة يصبح منشأ المهندس في النهاية الرمز الباقي لمدينته وعصره. وكانت مسابقة بورديه وإيفل أكثر الثلاث مباشرة، مسابقة رسمية وجهاً لوجه ذات فائز معلن؛ أما باكستون وروبلنغ فواجها معارضة منتشرة من مؤسسات ونقاد يتفاعلون مع عمل بدأ بالفعل. ومع ذلك، تثبت الحالات الثلاث أن الهندسة يمكن أن تكون فناً—وأن المنشأ نفسه، إذا عُبر عنه بصدق، يستطيع تحقيق *venustas* التي طالب بها فيتروفيوس إلى جانب *firmitas* و*utilitas*.

استمر إرث بورديه الكلاسيكي في فرنسا، ووجد نهجه أصداءً في حركة «المدينة الجميلة» وفي كلاسيكية الفنون الجميلة التي هيمنت على العمارة المدنية الأمريكية حتى ثلاثينيات القرن العشرين. غير أن البرج والقصر والجسر كان كل منها قد أعلن، في مدينته وعقده، قدوم عصر جديد: عصر سيؤدي فيه *proget-tista*—المهندس الذي يصمم ويبني ويدع المنشأ يتكلم—دوراً متزايداً في تشكيل البيئة المبنية.

وهكذا تعيدنا المسابقة إلى الموضوع المركزي لهذا الفصل: هل ينبغي للشكل أن يتبع الوظيفة؟ وهل يستطيع الجمال أن ينبثق من الضرورة الإنشائية؟ وهل يستطيع المهندس أن يحقق ما عُدَّ يوماً مجالاً حصرياً للمعماري؟ وكان الجواب، المكتوب بالحديد على خلفية الآفاق العمرانية لثلاث مدن، نعم.

15.6 جيل الحاسوب

أتاح ظهور طريقة العناصر المحددة للمعماريين، وللمهندسين أحياناً، استكشاف أشكال متزايدة الصعوبة ودفع حدود الممكن إلى ما لم يكن المرء ليجرؤ على تنفيذه من دون دعم حاسوبي. فبدأ المعماريون يستكشفون أشكالاً إنشائية يستحيل تصورها من دون التحليل الحاسوبي، بينما صمم المهندسون مباني شاهقة جداً قادرة على مقاومة أحمال الرياح القصوى (برج خليفة)، وجسوراً طويلة البحور تراعي تأثيرات ثانوية مثل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاهتزاز (جسر الألفية)، ومنشآت خرسانية معقدة تتضمن تأثيرات طويلة الأمد كالزحف والانكماش (جسر ميو). وسأقتصر على ثلاثة من هؤلاء الممارسين، اثنان منهم مثيران لقدر كبير من الجدل.

15.6.1 المعماريون «الاستثنائيون»

مع أن بعض المعماريين لا يُعدون *progettisti* بالمعنى التقليدي تماماً، فإنهم يتحدون المهندسين الإنشائيين كي يحللوا هندساتهم المعقدة ويصمموها على الوجه الصحيح. وفيما يأتي منشآت لافتة وُلدت في أذهان معمارية خلاقة وترجمتها إلى واقع خبرة مهندسين إنشائيين يعملون عند حدود الإمكانات الحاسوبية.

وسأركز على مثالين بارزين فقط، إذ سبق تناول عمل ثالثهما (سارينن).

15.6.1.1 فيليكس كانديلا (1910–1997)

وُلد فيليكس كانديلا أوتيرينيو (مدريد، 1910–رالي، كارولاينا الشمالية، 1997) في إسبانيا، ودرس العمارة في المدرسة التقنية العليا للعمارة في مدريد، وتخرج سنة 1935. لكنه، بعد مشاركته في الحرب الأهلية الإسبانية مهندساً في صف الجمهوريين واحتجازه مدة قصيرة في معسكر اعتقال فرنسي، هاجر إلى المكسيك سنة 1939، حيث أمضى معظم مسيرته ونال شهرة دولية.

صمم كانديلا، مثل نيرفي، المباني تصميماً كلياً، فجمع في آن واحد أدوار المعماري والمهندس والمقاول. وكان رائداً في استخدام القشريات ذات القطع المكافئ الزائدي (HP)، وهو شكل إنشائي بالغ الكفاءة بفضل تقوسه المزدوج الذي يسمح بنقل الأحمال أساساً بفعل الغشاء لا الانحناء. لكنه لم يكن أول من درس هذه الأشكال أو بناها (Espion, 2016)—إذ سبقه فرناند إيمون (Aimond, 1936) في فرنسا وجورجيو باروني (Currà and Russo, 2018) في إيطاليا. ومع ذلك ظل شكل القطع المكافئ الزائدي قليل المعرفة في الممارسة المعمارية إلى أن لفت إليه عمل كانديلا المبتكر في خمسينيات القرن العشرين الأنظار عالمياً.

ولا شك في أن أشهر أمثلة قشريات كانديلا ذات القطع المكافئ الزائدي هو مطعم لوس مانانتياليس في سوتشيميلكو بالمكسيك، الذي اكتمل سنة 1957. وحقق التصميم نجاحاً ألهم منشآت كثيرة مماثلة حول العالم. وينتج النظام الإنشائي الكفء، بحوافه المميزة المنحنية إلى أعلى، قشرة فائقة النحافة لا يتجاوز سمكها 40 mm وتغطي بحراً داخلياً مقداره 30 m. ويبلغ ارتفاع القشرة عند مركزها 5.8 m، بينما ترتفع حوافها إلى 9.9 m. وترتبط المساند بقضبان شد أسفل إنشاء الأرضية، صُممت لمقاومة الدفع الأفقي المتولد عند قاعدة القشرة. وكان كانديلا نفسه يعد هذا المنشأ الخفيف الأنيق أهم أعماله—شاهداً على اقتران الكفاءة الإنشائية بالشاعرية المعمارية الذي ميز نهجه في تصميم القشريات.

15.6.1.2 فرانك غيري (1929–2025)

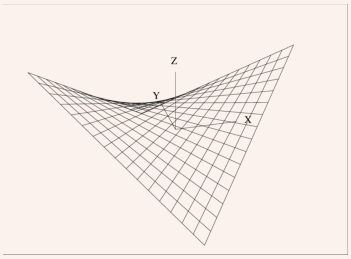
فرانك أوين غيري (تورونتو، 1929–2025) ليس مهندساً بل معماري، ولذلك لا ينتمي بالمعنى الدقيق إلى هذا الجمع من كبار المهندسين. غير أن عمله تحدى مهنة الهندسة الإنشائية تحدياً عميقاً—إذ دفع حدود ما يمكن تحقيقه حاسوبياً وإنشائياً—حتى صار لا بد من استثنائه.

يمكن النظر إلى غيري بوصفه معمارياً ونحاتاً معاً. فبينما كانت الاستعراضات المعمارية لكالاترافا تتألف عموماً من خطوط مستقيمة ومنحنيات بسيطة، كان غيري مولعاً بأسطح منحنية معقدة بلغت من التطور

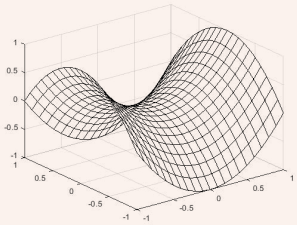
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) مطعم لوس مانانتياليس في سوتشيميلكو



(b) محدودة بخطوط مستقيمة



(c) محدودة بقطوع مكافئة

شكل 15.42: قشريات فيليكس كانديلا ذات القطع المكافئ الزائدي

الهندسي أن تمثيلها الرقمي نفسه كان موضوع رسائل دكتوراه (Shelden, 2002). وتتحدى مبانيه التصنيفات الإنشائية التقليدية، وتستلزم مناهج جديدة تماماً للتحليل والتصنيع والبناء.

ومع أن معظم المعماريين اليوم يعتمدون بصورة روتينية على برمجيات موجودة (مثل SAP2000 أو RISA أو برامج شبيهة) يستطيع المهندسون الإنشائيون استخدامها لتحليل مبانيهم وتصميمها، فقد بلغ تعقيد عمل غيري الهندسي حداً لم تعد معه البرمجيات الإنشائية التقليدية كافية. لذلك أنشأ ضمن مكتبه مجموعة تقنية مستقلة لتكييف وتعديل CATIA—وهو برنامج لصناعة الطيران طورته أصلاً شركة داسو سيستيم لتحليل الأسطح المنحنية للطائرات (Gehry, Lloyd **and** Shelden, 2020). وقد جعل تطويع أدوات الطيران الحاسوبية للتصميم المعماري مكتب غيري مرادفاً لتقنيات الحوسبة المتقدمة وعمليات التصنيع بمساعدة التصميم والتصنيع الحاسوبيين، وغير جذرياً طريقة تحويل الهندسات المعمارية المعقدة إلى واقع.

أشهر منشآت غيري هو متحف غوغنهايم في بلباو، الذي اكتمل سنة 1997.[52] وتجسد منحنياته اللافتة المكسوة بالتيتانيوم، المبينة في الشكل 15.43a، استخدام أدوات حاسوبية متخصصة في التصميم والتحليل الإنشائي معاً. ولا يمكن تحقيق فضاءاته الداخلية الكهفية الهائلة إلا بالنمذجة الحاسوبية المتطورة، وهي تهيئ بيئة مناسبة لأعمال فنية معاصرة منحنية بدورها، مثل المنحوتات الفولاذية الضخمة لريتشارد سيرا (أحد نحاتيّ المفضلين في المدرسة الاختزالية) (الشكل 15.43b).

15.6.1.3 سانتياغو كالاترافا (1951–)

درس سانتياغو كالاترافا فالس (بينيماميت، فالنسيا، 1951–) العمارة أولاً في جامعة فالنسيا التقنية، وتخرج سنة 1974، ثم درس الهندسة المدنية في المعهد الاتحادي السويسري للتكنولوجيا في زيورخ، حيث أتم الدكتوراه سنة 1981. وعلى الرغم من دراسته هناك في أثناء عمل كريستيان مين ، فلا دليل على تعاون وثيق بينهما. ويتسم أسلوب كالاترافا المعماري بخصوصية وانتقائية وحيوية تجعله سهل التعرف فوراً—فهو مزج بين منطق الهندسة الإنشائية والطموح النحتي. ويقدم (McQuaid, 1993) تقييماً نقدياً لأعماله المبكرة.

ومع أن كالاترافا معماري ومهندس إنشائي معاً، فقد وضعته في هذا القسم المعماري لأن أعظم أثر له كان بصرياً وشكلياً لا إسهاماً أساسياً في علم الهندسة الإنشائية (كما عند شخصيات مثل فضل الرحمن خان).

[52] كانت بلباو مدينة صناعية متعثرة اقتصادياً في إقليم الباسك شمال إسبانيا، ومثّل متحف غوغنهايم محاولة جريئة (وناجحة في النهاية) لإنعاش المدينة اقتصادياً وثقافياً عن طريق السياحة المعمارية—وهي استراتيجية تُعرف اليوم باسم «تأثير بلباو».

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) متحف غوغنهايم في بلباو



(b) عمل ريتشارد سيرا «Band»

شكل 15.43: متحف غوغنهايم في بلباو لفرانك غيري ومنحوتة ريتشارد سيرا

ويقدم نهجه التعبير المعماري على التحسين الإنشائي، وينظر إلى كل مشروع بوصفه مبنى ومنحوتة في آن واحد.

وتتراوح منشآته من البسيط المتقشف نسبياً—مثل جسر ألاميو في إشبيلية[53] أو محطة شتادل هوفن للقطارات في زيورخ—إلى المبهر النحتي، مثل جسر مارغريت هنت هيل في دالاس أو محطة قطارات TGV في مطار سانت إكزوبيري في ليون. وبينما تردد الأعمال الأبسط مبدأ سوليفان القائل إن الشكل يتبع الوظيفة، لا يسعى كالاترافا إلى الاختزال، ولا يبحث عن الأشكال الإنشائية المثلى التي سعى إليها مهندسون مثل مايار أو نيرفي. فالمنشأ يؤدي عنده دورين، حلاً هندسياً وبياناً فنياً، وغالباً ما يقدم الدراما البصرية على الكفاءة الإنشائية.

وقد أثار هذا النهج الإعجاب والنقد معاً. فكثيراً ما ابتليت أعمال كالاترافا بالتأخيرات وتجاوزات التكلفة والدعاوى القضائية (Daley, 2013). وأشهر الأمثلة مدينة الفنون والعلوم في مسقط رأسه فالنسيا—وهي أكبر مجموعة من أعماله في العالم، وتشمل قاعة عروض وجسوراً وقبة سماوية ودار أوبرا ومتحف علوم وممشى مغطى وأفدنة من الأحواض العاكسة. وكان تقدير ميزانية المجمع في الأصل نحو 405$ مليون، لكنه كلف في النهاية قرابة ثلاثة أمثال ذلك المبلغ وأدى إلى دعاوى قضائية متعددة، مجسداً التوتر بين الطموح المعماري والواقعية الهندسية الذي يميز كثيراً من أعماله.

15.6.2 المهندسون الإنشائيون: فئة الخمسة في المئة

سأبدأ باقتباس المقدمة الاستفزازية لكتاب ممتاز من تأليف (Llunji, 2022 PDF)، يقدم تقييماً واقعياً مثيراً للتأمل للحالة الراهنة للهندسة الإنشائية:

> عدد المهندسين في العالم أكبر من عدد المعماريين؛ فهم أكثر من خمسة ملايين. ومع ذلك، قد لا يوجد اليوم في الهندسة الإنشائية سوى عشرة مصممين حقيقيين في العالم—لا أكثر. أما الباقون جميعاً فتقنيون ومساندون لأفكار معمارية؛ منفذون لرغبات المعماري، وخدم في العادة، ونادراً ما يكونون شركاء، ولا يكونون قادة أبداً. يبدو

[53] من الكتب ذات الأهمية الخاصة لطلاب الهندسة الإنشائية كتاب Pollalis, 1999، الذي يصف كل خطوة في تصميم جسر ألاميو وإنشائه ويشرح مقاصد كالاترافا المعمارية، بما في ذلك الحسابات الهندسية والتفاصيل التقنية ذات الصلة. ويحتوي الكتاب أيضاً على بيانات هندسية تمكّن المهندسين من نمذجة المنشأ، كما يناقش §G.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) جسر ألاميو، إشبيلية



(b) محطة قطارات TGV في مطار ليون سانت إكزوبيري

شكل 15.44: كالاترافا: الأناقة الإنشائية في جسر ألاميو في مقابل الثقل البصري لمحطة قطارات TGV في ليون سانت إكزوبيري.

> هذا قاسياً، لكنه صحيح. وفي عالمنا الرقمي الراهن، عالم ما بعد الصناعة، لم تعد الهندسة المدنية في طليعة التطور الاجتماعي. إن المهندسين، في سعيهم إلى «أتمتة» التحليل والتصميم الإنشائيين، يصيرون أقل حدة، ويفقدون «رهافتهم» وبعض إبداعهم، ويتحولون إلى دعم تقني محض للمعماريين، بإسهام إبداعي ضئيل في التصميم النهائي. وفي مكان ما على الطريق صار المهندسون الإنشائيون «خاضعين» للتكنولوجيا بدلاً من أن يكونوا في مقدمة الابتكارات التقنية. ووفقاً لتقارير حديثة، ثمة إجماع على أن «الأتمتة تقلل مكانة المجتمع الهندسي وسلطته، وأن التنسيق الرقمي يغير طريقة عمل الصناعة». ويدرك معظم العاملين منا في صناعة الهندسة الإنشائية أن فرعنا تعرض لزلزال كبير من التغييرات، قد يجعل دور المهندسين غير ذي صلة، وهو مصدر قلق رئيسي لدى المهندسين الممارسين في أنحاء العالم. ... وثمة أصوات كثيرة في صناعة البناء تقلل من دور المهندس. والآن، بعد أن أُتمتت كل مرحلة تقريباً من مراحل التصميم الإنشائي، يرى بعضهم أن التصميم الإنشائي قد لا يحتاج أصلاً إلى مهندسين إنشائيين. فإذا استطاع الحاسوب (البرنامج) أداءه، فقد يكون المشغل تقنياً ذا معرفة أولية بالمنشآت. غير أن هذا التوسع في الهندسة الرقمية قد يكون «سيفاً ذا حدين»، لأن الاستخدام غير الماهر للأدوات الحاسوبية يمكن أن يؤدي إلى انهيار مبانٍ يُلام عليه المهندسون. ومن المهم التشديد على أن البرنامج نفسه ليس معيباً؛ بل تكمن المشكلة الأساسية في كيفية استخدام هذه الأدوات وهوية مستخدميها. وتتطلب الأدوات الجديدة طرائق عمل جديدة، وهذه بدورها تتطلب أساليب جديدة لضمان الجودة. ... ولعل 95% من المشروعات التي أنجزناها حتى الآن ستصبح من عمل التقنيين أو الأتمتة، ولن يبقى لتعريف الهندسة الإنشائية إلا المهمات الإنشائية غير المألوفة حقاً، أي نسبة 5% المتبقية. ويرى آخرون، ومنهم هذا المؤلف، المستقبل من منظور «المعماري الإنشائي»، حيث سيكون مهندس المستقبل الإنشائي أكثر تأهيلاً معمارياً، وسيكون معماري المستقبل أكثر نزوعاً إلى الإنشاء.
>
> (Llunji, 2022)

يلامس هذا التقييم الصارم واقع الممارسة المعاصرة بعمق. فتحول الهندسة الإنشائية من تخصص إبداعي—جسدته شخصيات مثل نيرفي وتورّوخا وخان—إلى عمل حاسوبي روتيني إلى حد بعيد يمثل تحولاً أساسياً في هوية المهنة. ويلخص مفهوم «فئة الخمسة في المئة» حقيقة مزعجة: أن الإبداع الإنشائي الأصيل، من النوع الذي يدفع الحدود ويقيم نماذج جديدة، يصير نادراً على نحو متزايد في عالم تهيمن عليه البرمجيات الموحدة والممارسة النافرة من المخاطر.

ولا يسعني إلا أن أوافق ليونجي تماماً في تحديده تهميش المهندسين الإنشائيين ضمن عملية التصميم المعماري، حيث صاروا بالفعل متعاونين، أو في الأغلب مستشارين تقنيين تابعين، لا شركاء إبداعيين متساوين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وكان كبار المهندسين البنّائين في الماضي—من إيفل إلى كالاترافا—سيصابون بالخيبة لو رأوا مهنتهم تُختزل إلى تدقيق الاشتراطات والتحقق من مسارات الأحمال.

لكن المهندسين الإنشائيين لا يقتصرون على المباني والجسور، وقد يكمن خلاص المهنة تحديداً في مجالات منفصلة تماماً عن العمارة. فما زالت الحاجة ماسة إلى المهندسين لإجراء تحليلات متقدمة لمنشآت لا يمسها المعماريون: السدود والمنصات البحرية وحاويات الاحتواء النووي والمنشآت الفضائية الجوية والأجهزة الطبية الحيوية وتطبيقات صناعية لا تحصى. وتتطلب هذه التخصصات معرفة بالهندسة الإنشائية تتجاوز كثيراً المستوى اللازم لممارسة البناء التقليدية—فتشمل السلوك اللاخطي والاستجابة الديناميكية والتحليل الاحتمالي وآليات الانهيار التي تدفع حدود القدرة الحاسوبية والحدس الهندسي.

وتتطلب هذه المجالات مهندسين يظلون مصممين حقيقيين، يواجهون تحديات غير مسبوقة تستلزم تطوراً حاسوبياً وحكماً هندسياً يتجاوزان بكثير تحليل المباني الروتيني. فسواء كانوا يحللون الاستجابة الزلزالية لسد قوسي خرساني، أو سلوك الكلال لمنصة بحرية تحت أحمال الأمواج، أو سلامة احتواء وعاء مفاعل نووي، فإن هؤلاء المهندسين يعملون عند تخوم المعرفة الإنشائية حيث لا تكفي حلول البرمجيات الموحدة ويصبح حل المشكلات الإبداعي ضرورة. وفي هذه المجالات المتخصصة تبقى المهنة، في صورتها الجوهرية، حية مزدهرة خارج ظل العمارة أو الممارسة الإنشائية[54].

ومع ذلك، يتيح تقييم Llunji, 2022 القاتم أملاً لتلك النسبة الثمينة، 5% من المهندسين الإنشائيين الذين يواصلون دفع الحدود وتحديد مستقبل التخصص. ومع أن مهندسين كثيرين حول العالم قد يستحقون الانضمام إلى هذه الفئة المنتقاة، فسأقتصر على دراسة اثنين من أبرز المعاصرين: مصمم جسور ومهندس ناطحات سحاب يجسد عملهما استمرار أهمية الإبداع الإنشائي في عصرنا الحاسوبي.

ومن اللافت أن البحث عن الشكل «المثالي» يظل في الحالتين جوهرياً—وهو مسعى يعيدنا، بمعنى عميق، إلى عصر ما قبل غاليليو حين كان الشكل الهندسي أصعب جوانب التصميم الإنشائي. ففي البناء الحجري قلما كانت المقاومة هي العامل الحاكم؛ بل كان الفن في تحقيق الثبات والجمال بالهندسة الخالصة. ولم يصبح الشكل والقوة مرتبطين ارتباطاً لا ينفصم إلا حين بدأ غاليليو تحليل العلاقة بين الحجم والوزن ومقاومة المادة. وقد أكمل أكثر مهندسي اليوم الإنشائيين إبداعاً الدائرة، فهم يستخدمون القدرة الحاسوبية لا لمجرد التحقق من الكفاية، بل لاكتشاف أشكال جديدة تعبر عن جريان القوى بأناقة وكفاءة غير مسبوقتين.

15.6.2.1 المباني الشاهقة

عند مطلع القرن الحادي والعشرين، تجدد التنافس بين المدن الكبرى حول العالم على تشييد أعلى مبنى، وتصدرت شيكاغو ونيويورك السباق فيما ظهر منافسون جدد مثل دبي. ودفع هذا السباق نحو الارتفاع المهندسين الإنشائيين إلى نطاق «الخمسة في المئة» الثمين، حيث ثبت قصور مناهج التصميم التقليدية وأصبح الحل الإبداعي للمشكلات ضرورة.

[54] قدم المؤلف خبرة تقنية إلى مجموعات مواطنين (C-10) تعترض على سلامة محطة سيبروك للطاقة النووية في نيوهامبشير، حيث تمثل منشآت الاحتواء الخرسانية المتقادمة تحديات هندسية غير مسبوقة، (NRC-ML19312B609, 2019). وتجسد هذه الحالة عمل «الخمسة في المئة» الذي يتطلب تحليلاً إنشائياً إبداعياً: فلا تتناول أي اشتراطات تصميم قائمة آليات التدهور المعقدة تناولاً كافياً، ولا تستطيع البرمجيات المعيارية نمذجة العمليات الحرارية والميكانيكية والكيميائية المقترنة، ويتطلب التحليل تركيب عقود من الأبحاث في ديمومة الخرسانة وميكانيكا الكسر والتقييم الاحتمالي. وتمثل مثل هذه المشكلات—حيث تتوقف السلامة العامة على النتيجة وتثبت المناهج الهندسية التقليدية قصورها—اللب الجوهري للهندسة الإنشائية الذي لا يمكن لأي قدر من الأتمتة أن يستبدله.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يقدم المقطع التالي (Seabrook, 2001) عرضاً تاريخياً موجزاً للنظم الإنشائية المستخدمة في ناطحات السحاب بمدينة نيويورك خلال القرن الماضي. وهو مكتوب من منظور صحفي علمي وثيق الصلة بالمهندسين الإنشائيين الممارسين، ويتتبع التطور من مباني الحوائط الحاملة والحديد الزهر، مروراً بناطحات السحاب المبكرة ذات الإطارات الفولاذية، وصولاً إلى النظم الأنبوبية ونظم النوى التي تميز تصميم المباني الشاهقة الحديثة. وإضافة إلى قيمته الوصفية، يرصد النص تحولاً في التفكير الإنشائي: من البناء المحافظ الكثيف المادة إلى نظم أكثر دقة وكفاءة في حمل الأحمال، تستند إلى تحسن أدوات التحليل والمواد وأساليب التصنيع.

> استُخدمت خلال الأعوام المئة والعشرين الماضية ثلاثة أنواع رئيسية من المنشآت في المباني الشاهقة بمدينة نيويورك. استُخدم النوع الأول في مباني الحديد الزهر في ثمانينيات وتسعينيات القرن التاسع عشر، حيث كانت الحوائط الخارجية تحمل معظم «حمل الجاذبية»—أي وزن المبنى. ويولد هذا النوع من المنشآت فضاءات للمصانع والمخازن (وللشقق العلوية السكنية اليوم) خالية نسبياً من الأعمدة الداخلية الحاملة—أي عقارات أكثر قابلية للاستعمال للمستأجرين—لكنه، إذا اقترن بكمرات أرضيات خشبية واشتراطات بناء أقل صرامة، يجعل المباني عرضة للانهيار أيضاً. ففي الحريق تميل الأرضيات إلى الانهيار، ويفقد الإطار الحديدي مقاومته وينطبق إلى الداخل. أما الجيل الثاني من المباني الشاهقة، الذي يضم مبنى متروبوليتان لايف (1909) ومبنى وولورث (1913) ومبنى إمباير ستيت (1931)، فيتكون من منشآت إطارية، يمتد فيها هيكل من أعمدة وكمرات فولاذية ملحومة أو مبرشمة، مغلفة بالخرسانة غالباً، عبر المبنى كله. وينتج هذا النوع من البناء منشأ بالغ القوة، لكن فضاءاته الداخلية ليست جذابة إلى هذا الحد. فالداخل ممتلئ بأعمدة وحوائط حاملة ثقيلة، وكلما اتجه المرء نحو مركز هذه المباني زاد إحساسه بأنه في سرداب. وقال لي تشارلي ثورنتون، من مكتب ثورنتون-توماسيتي إنجنيرز للهندسة الإنشائية في مانهاتن، وهو من أبرز مصممي منشآت المباني الشاهقة الحديثة: «إن مبنى مثل إمباير ستيت مفرط في تصميمه وبنائه إلى حد بعيد. لم يكن المبنى يحتاج إلى كل ذلك الإسناد. لم يفهم أولئك المهندسون الأحمال كما نفهمها نحن—فقد استخدموا المساطر الحاسبة لحسابها، بينما لدينا نحن الحواسيب—ولذلك جنحوا إلى جانب الأمان». وتستخدم معظم المباني الشاهقة المشيدة منذ ستينيات القرن العشرين نوعاً ثالثاً من المنشآت—تركيباً يجمع أفضل جوانب النوعين السابقين. وتشبه المنشآت المحيطية لهذه المباني أنابيب. وفي الداخل تضم نواة جوفاء ضخمة من الفولاذ و/أو الخرسانة كثيراً من الخدمات: المصاعد والسلالم ودورات المياه. ولأن النواة والأعمدة المحيطية تحمل قدراً كبيراً من الحمل، استطاع المصممون إلغاء الأعمدة الداخلية، فنتج عن ذلك فضاء أرضي مفتوح أكبر للمستأجرين. ولأن المنشآت الإطارية تتطلب من عمال الحديد لحام الكمرات بالأعمدة الحاملة أو برشمتها في الموقع، وهو أمر مكلف وخطير معاً، فإن تقليل امتداد الإطار يعني إمكان تصنيع جزء أكبر من المنشأ خارج الموقع، مما يجعل تشييده أكثر أماناً وأقل تكلفة. وأخيراً، زادت التحسينات في علم الفلزات مقاومة الفولاذ الإنشائي في هذه المباني، فأتاحت للمهندسين تقليل استخدام الخرسانة في حمل المنشأ أو إلغاءه. ومع أن الخرسانة المسلحة أكثر مقاومة للحريق من الفولاذ، فإن العمل بها فوضوي ومكلف، ولا سيما في مانهاتن حيث تجعل قيود المرور وضيق المواقع إدخال أساطيل خلاطات الأسمنت اليومية اللازمة لمشروع كبير أمراً عسيراً. وأرضيات معظم المباني الشاهقة المشيدة منذ الستينيات أخف وزناً بكثير من أرضيات المباني القديمة. ففي أرضية مكتب نموذجية في مبنى شاهق، تغطي طبقة خرسانة سمكها ثلاث أو أربع بوصات سطحاً فولاذياً مموجاً تحمل وزنه كمرات على شكل I، أو «جمالونات» طويلة في حالة البرجين التوأمين—وهي شرائط خفيفة من الفولاذ تقويها شبكات متقاطعة من قضبان مربعة أو أسطوانية، فتولد فراغاً أجوف تحت سطح كل أرضية. ويتيح هذا الفراغ للبنائين تركيب مجاري التدفئة والتبريد داخل الأرضيات، بدلاً من سقف مستعار أسفلها—وهو ابتكار يمكّن المطور من زيادة عدد طوابق المبنى كله.
>
> (Seabrook, 2001)

15.6.2.1.1 ليزلي روبرتسون (1928–2021)

جسد ليزلي إيرل روبرتسون، المهندس الإنشائي المعتمد للبرجين التوأمين (مركز التجارة العالمي)، المسار غير التقليدي الذي كثيراً ما يميز «الخمسة في المئة». فقد ترك المدرسة الثانوية في السادسة عشرة، وخدم فنياً للإلكترونيات في البحرية، ثم حصل على شهادة علمية

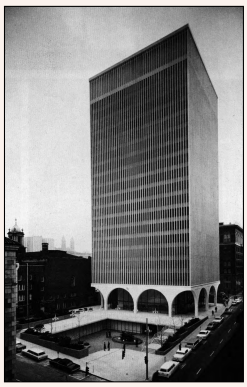
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من جامعة كاليفورنيا في بيركلي قبل أن ينتقل من الهندسة الكهربائية إلى الهندسة الإنشائية؛ وتبين هذه الخلفية غير المألوفة أن الموهبة الهندسية الخلاقة قد تنشأ من أماكن غير متوقعة.

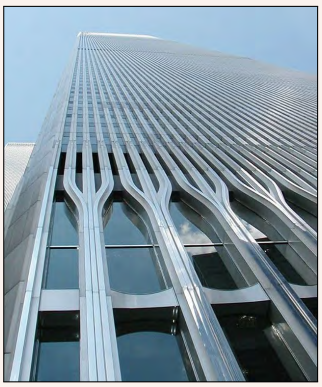
حين نفد مال روبرتسون في سياتل سنة 1958 والتحق بمكتب الهندسة الإنشائية الذي كان يسمى آنذاك ورثنغتون-سكيلينغ، بدأ ما صار عملية تعلم ذاتي أسطورية. فكان يعمل ليلاً وفي عطلات نهاية الأسبوع، ويعلم نفسه مفاهيم أساسية مثل معادلات الميل والإزاحة وطريقة هاردي كروس، مطوراً حدساً إنشائياً عميقاً لا يستطيع أي برنامج حاسوبي توفيره.[55]

وبعد خمسة أعوام، دخل المكتب مسابقة لتشييد ما كان سيصبح أعلى مبنيين شُيدا على الإطلاق: برجا مركز التجارة العالمي. وعلى الرغم من أن المكتب لم يكن قد صمم مبنى أعلى من مبنى IBM ذي العشرين طابقاً في سياتل، فقد امتلك ميزة حاسمة: كان المعماري مينورو ياماساكي، الذي اختارهم لذلك المشروع، هو أيضاً معماري مركز التجارة العالمي.

وفي اجتماع العرض الحاسم، قدم جون سكيلينغ فكرته مستخدماً لوحة رسم وحاملاً وأقلام تعليم فقط—من دون عروض PowerPoint أو رسوم حاسوبية متحركة متقنة.[56] وكان في البساطة عمق: فقد أراد ياماساكي، الذي كان يعاني رهاب المرتفعات، عناصر إنشائية حول محيط المبنى كي يشعر شاغلوه بالأمان في الارتفاعات الكبيرة. وكان حل سكيلينغ منشأً أنبوبياً خالصاً دفع مفهوم خان الأنبوبي أبعد مما جُرب من قبل.



(a) مبنى IBM في سياتل



(b) «رماح» مركز التجارة العالمي الثلاثية



(c) مركز شنغهاي المالي العالمي

شكل 15.45: ياماساكي وروبرتسون: من نموذج سياتل الأولي إلى التأثير العالمي

انتقل روبرتسون في الخامسة والثلاثين إلى نيويورك للإشراف على إنشاء ما كان سيصبح أعلى مباني العالم. ودفعته التحديات الهندسية إلى أرض مجهولة: تحديد عتبات إدراك الإنسان للحركة الأفقية (Chen

[55] والواقع أن إجراء هذه الحسابات اليدوية لمنشآت متزايدة التعقيد ينمي فهماً للسلوك الإنشائي لا يمكن بلوغه بتكرار المحاكاة الحاسوبية. وهذا مماثل لمصممي السدود القوسية الذين استخدموا طريقة *الحمل التجريبي* مقارنة بمن اعتمدوا على النماذج الحاسوبية وحدها. وقد دعا المؤلف إلى العودة إلى هذا الفهم الأساسي في تقييمات السلامة النووية، حيث يجب التحقق من النماذج الحاسوبية بالحكم الهندسي المتولد من التحليل القائم على المبادئ الأولى.

[56] يا له من تناقض منعش مع عروض اليوم المعتمدة على التكنولوجيا!

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

and Robertson, 1972)، وتطوير مخمدات لزجة مرنة لضبط الاهتزازات التي تحدثها الرياح (Mahmoodi **andothers**, 1987)، وابتكار نظم إنشائية لم يسبق اختبارها بهذا المقياس.

وأخضعت الأحداث المأساوية في 11 سبتمبر 2001 تصميم روبرتسون للاختبار النهائي غير المقصود. وكشف التحليل الإنشائي لانهيار البرجين—المفصل في بحثين أساسيين لـ Eagar **and** Musso, 2001 و Bažant **and** Zhou, 2002—أنه مع نجاة المبنيين أولاً من اصطدام الطائرتين، فإن استمرار درجات حرارة تجاوزت 800°C بفعل الحرائق الناتجة أضعف في النهاية مقاومة خضوع الفولاذ، وأدى إلى انهيار متتابع. وكان هذا التحليل الجنائي نفسه من هندسة «الخمسة في المئة»: فهم آليات انهيار لم تتوقعها أي اشتراطات ولم يكن لأي تحليل معياري أن يتنبأ بها.

وشملت مسيرة روبرتسون اللاحقة منشآت شاهقة جداً شهيرة أخرى، مثل مركز شنغهاي المالي العالمي وبرج بنك الصين في هونغ كونغ، قدم كل منها تحديات فريدة تطلبت حلولاً إبداعية تتجاوز الممارسة التقليدية. وتوثق مذكراته (Robertson, 2017) مسيرة أمضاها في حل مشكلات لم يسبق حلها.

كشف المنشأ: جولات المشي في زمن الجائحة أضاءت جائحة كوفيد-19، التي أفرغت شوارع مدن العالم الكبرى سنة 2020، العلاقة بين العمارة والهندسة بطريقة جديدة غير متوقعة. أطلق مايكل كيمِلمان، الناقد المعماري في نيويورك تايمز، سلسلة من جولات المشي الافتراضية في مدينة نيويورك خلال الإغلاق، بمشاركة معماريين ومؤرخين، و—وهو الأهم لهذا الفصل—مهندسين إنشائيين. وكما لاحظ كيمِلمان: «لم يكن المعماريون على مر السنين وحدهم من نقشوا أفق نيويورك—الصورة المميزة للقرن الأمريكي الماضي—عبر الأثير الحضري. فقد عرف أيضاً، ضمن آخرين، مهندسون إنشائيون، شعراء عمليّون كثيراً ما امتلكوا خيالاً شاهقاً وأهمية عظيمة، كيف يبلغون تلك الارتفاعات». وتلخص عبارة «شعراء عمليّون» المثل الفيتروفي بدقة: مهندسون يحققون *venustas* لا بزخرفة مضافة، بل بالتعبير البليغ عن *firmitas*.

وفي جولة لافتة لناطحات السحاب في وسط مانهاتن، سار كيمِلمان المسار نفسه مرتين: أولاً مع المعمارية أنابيل سيلدورف، ثم مع المهندس الإنشائي غاي نوردنسون من جامعة برنستون. وقدّم المهنيان، وهما ينظران إلى المباني نفسها—مبنى سيغرام وبلاك روك (مبنى CBS) ومبنى AT&T و432 بارك أفينيو—تفسيرين متكاملين ومتميزين لهذه المعالم. فحيث شددت سيلدورف على التجربة المكانية والقصد المعماري، كشف نوردنسون البراعة الإنشائية الكامنة: الجمع المبتكر بين الإطارات المدعمة والإطارات المقاومة للعزوم في مبنى سيغرام، والمخمدات البندولية الضخمة داخل 432 بارك أفينيو النحيل كالقلم التي تلطف الاهتزازات الناجمة عن الرياح، و«مآثر الهندسة الإنشائية» التي تجعل ناطحات السحاب الفائقة المعاصرة ممكنة. وقال نوردنسون عن مبنى سيغرام: «بالنسبة إليّ، سيغرام أروع مبنى شاهق في نيويورك. فهو يجسد العلاقات بين المواهب الخلاقة التي يجب أن تتضافر حتى يحدث شيء متميز معمارياً». وتردد هذه الروح التعاونية—المعماري والمهندس والراعي يعملون معاً—الممارسة الموحدة لـ*progettisti* عصر النهضة، وتستعيد إصرار فيتروفيوس على أن المعماري (وكان مرادفاً للبنّاء والمهندس في زمنه) يجب أن يتقن تخصصات متعددة ليبلغ الامتياز.

وأظهرت هاتان الجولتان المتوازيتان، على نطاق مصغر، الطريقتين المتكاملتين والمتميزتين اللتين يدرك بهما المعماريون والمهندسون البيئة المبنية—والافتقار الذي ينشأ عند غياب أي من المنظورين. يرى المهندس الإنشائي ما سماه فيتروفيوس *firmitas*: جريان القوى عبر الأعمدة والنوى، ورقصة الشد والضغط التي تبقي البرج قائماً أمام الرياح والجاذبية. ويهتم المعماري بـ*utilitas* و*venustas*: كيف تخدم الفضاءات أغراض الإنسان وكيف ترضي الأشكال العين. وحين يلتقي المنظوران—كما في الأعمال الكبرى لنيرفي وتورّوخا وخان—تكون النتيجة عمارة إنشائية تحقق الثالوث الفيتروفي كاملاً. وجمع كيمِلمان هذه الجولات لاحقاً

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في *المدينة الحميمة: المشي في نيويورك* (2022)، وهو كتاب كشف «التاريخ والمخططات والقوانين ومآثر الهندسة الإنشائية والمعالم المعمارية والوقائع اليومية» التي تؤلف الحياة الحضرية (Kimmelman, 2020). وتقدم هذه الجولات للمهندس الإنشائي نموذجاً للتواصل العام يكشف، ولا يخفي، إسهام التخصص الجوهري في البيئة المبنية—ويبرهن أن *firmitas*، إذا عُبر عنها على الوجه الصحيح، يمكن أن تصبح هي نفسها مصدراً لـ*venustas*.

وكان وليام بيكر من سكيدمور، أوينغز & ميريل من المهندسين المعاصرين الذين أبرز نوردنسون أعمالهم في جولته—وهو المكتب نفسه الذي صمم عدة معالم مروا بها في وسط المدينة. وربما تمثل إنجازات بيكر أوضح مثال على ما تستطيع «الخمسة في المئة» تحقيقه حين يقترن التطور الحاسوبي بحدس إنشائي عميق.

15.6.2.1.2 وليام بيكر (1953–) لو أُريد تحديد أبرز المهندسين الإنشائيين المعاصرين وأكثرهم إبداعاً—شخص أتقن الأدوات الحاسوبية الحديثة ومضى أبعد من مبادئ فضل الرحمن خان الرائدة—لكان وليام فريزر بيكر، الشريك في مكتب سكيدمور، أوينغز & ميريل الأسطوري في شيكاغو. ويمثل بيكر تطور «الخمسة في المئة»: مهندساً يستخدم القدرة الحاسوبية لا بديلاً عن الإبداع، بل أداة لتحقيق تعبير إنشائي كان مستحيلاً من قبل.

ويجسد تصميم ناطحات سحاب فائقة مثل برج خليفة الذي صممه بيكر في دبي بارتفاع 828 متراً هذا النموذج الجديد. ففي حين يمكن التعامل مع الأحمال الرأسية بخرسانة فائقة المقاومة، يكمن التحدي الحاكم في القوى الجانبية—تأثيرات الرياح والزلازل التي تولد سلوكاً ديناميكياً ثلاثي الأبعاد معقداً يتطلب تحليلاً متقدماً يتجاوز الممارسة المعيارية بكثير.

ويوضح مشروع برج خليفة، الذي صممه المعماري أدريان سميث وهندسه بيكر (وكان كلاهما في SOM)، استمرار التوتر بين الرؤية المعمارية والواقع الهندسي. فمع أن المعماري قد يستأثر بالأضواء العامة، فإن التصور الإنشائي—نظام النواة المدعمة، والهندسة المستجيبة للرياح، والهيكل الداخلي المعقد—يمثل إبداعاً هندسياً خالصاً من فئة «الخمسة في المئة».

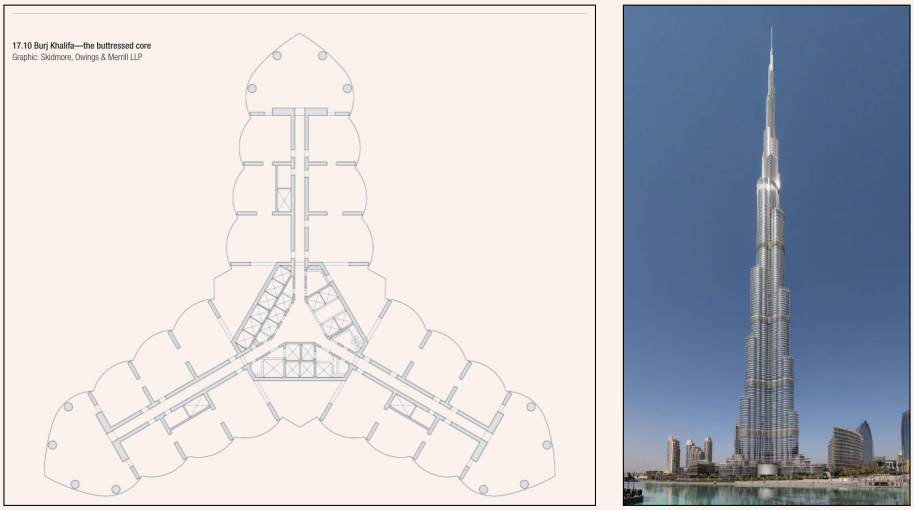
وتمتد إسهامات بيكر النظرية، الموثقة في (Baker, Skidmore **andothers**, 2013)، بإرث خان إلى العصر الحاسوبي:

> لعل أهم معلمة إنشائية في المبنى الشاهق هي كتلته المعمارية، أو شكله. فهي لا تحدد تعقيد البرج فحسب، بل تؤثر عادة تأثيراً كبيراً في قوى الرياح الواقعة على المبنى. والرياح هي الاعتبار الإنشائي المهيمن في تصميم المباني الشاهقة. فكثيراً ما يكون جريان الرياح حول مبنى شاهق غير مستقر. وحين تمر الرياح، ينفصل الجريان عن جانب البرج، مولداً سلسلة من الدوامات التي تحدث فروق ضغط عبر المبنى. ومع أن تأثيرات سحب الرياح على البرج مهمة، فإن هذه القوى ليست عموماً مصدر القلق الحاكم. وإنما تستطيع قوى الرياح العرضية الناشئة عن انفصال الدوامات، بالاقتران مع التوافقيات الطبيعية للبرج، أن تولد قوى كبيرة جداً متعامدة مع اتجاه الرياح. وبسبب سرعة أحداث الرياح الشائعة والمجال المعتاد لعرض المبنى، ستوجد أحداث رياح معينة يطابق فيها انفصال الدوامات التوافقيات الطبيعية للبرج.
>
> (Baker, Skidmore **andothers**, 2013)

لا يكمن إرث بيكر في المباني التي صممها وحدها، بل في إثبات أن اقتران البصيرة الهندسية بالرؤية الخلاقة يظل عصياً على الاستبدال حتى في عصرنا المؤتمت. ويقنن كتابه الحديث (Baker **and** McRobie, 2025) *الهندسة والاتزان: الميكانيكا الإنشائية في القرن الحادي والعشرين* هذه الفلسفة، مبيناً كيف تستطيع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المبادئ الأساسية للهندسة والاتزان أن تقود المهندسين إلى حلول مبتكرة لا يستطيع التحليل الحاسوبي وحده اكتشافها.



شكل 15.46: بيكر وبرج خليفة: تطور حاسوبي في خدمة الطموح المعماري (Baker, Skidmore **andothers,** 2013)

وإلى جانب المشروعات الفردية، كان فريق بيكر في SOM رائداً في استخدام التحسين الطوبولوجي الإنشائي أداةً للتصميم، جاعلاً منه جسراً بين الكفاءة الهندسية والتعبير المعماري. ويمثل منهجهم المفصل في (Beghini **andothers,** 2014) نموذجاً جديداً:

> من القضايا السائدة التي تواجه صناعة البناء في عالم اليوم التوازن بين الهندسة والعمارة: فقد ركز هدف المعماري تقليدياً بدرجة أكبر على جماليات المنشأ، أو «شكله»، بينما ركز هدف المهندس على الثبات والكفاءة، أو «وظيفته». ونناقش في هذا العمل أهمية التعاون الوثيق بين هذين التخصصين، ونقدم نهجاً بديلاً لتوليد أفكار تصميم جديدة ومتكاملة بواسطة إطار مخصص للتحسين الطوبولوجي الإنشائي، يمكن أن يفيد كلاً من مجتمعي العمارة والهندسة الإنشائية.
>
> (Beghini **andothers,** 2014)

يبين هذا العمل، الموضوع في سياقه والموضح في §15.5.4.3، كيف تستخدم «الخمسة في المئة» الأدوات الحاسوبية لا لاستبدال الإبداع، بل لاكتشاف أشكال جديدة تعبر عن المنطق الإنشائي بوضوح وأناقة غير مسبوقين. ولا يكمن إرث بيكر في المباني التي صممها وحدها، بل في إثبات أن اقتران البصيرة الهندسية بالرؤية الخلاقة يظل عصياً على الاستبدال حتى في عصرنا المؤتمت.

15.6.2.2 الجسور: ميشيل فيرلوغو (1946–)

يجسد ميشيل فيرلوغو ذروة التميز الهندسي الفرنسي، فهو نتاج نظام البلاد التعليمي للنخبة: المدرسة متعددة التقنيات والمدرسة الوطنية للجسور والطرق، إضافة إلى دكتوراه في الهندسة الإنشائية. وبعد أن رسخ سمعته في SETRA (الهيئة الحكومية المسؤولة عن الدراسات التقنية للطرق والطرق السريعة)، انتقل إلى الاستشارات المستقلة، حيث استطاعت رؤيته الخلاقة أن تزدهر بعيداً عن القيود البيروقراطية.

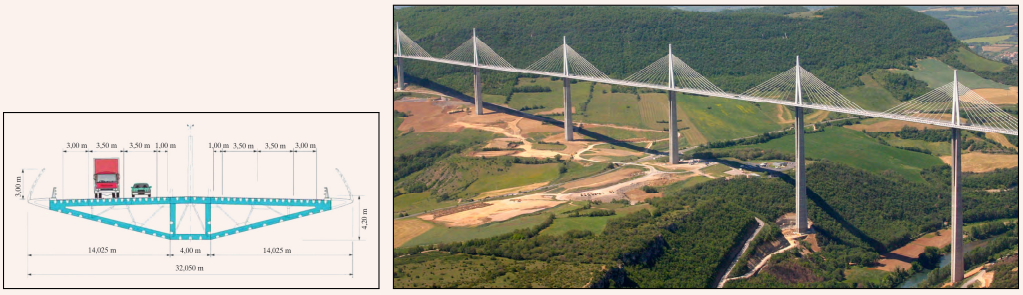
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويجسد فيرلوغو «الخمسة في المئة» بتصميمه أكثر من مئة جسر، أبرزها جسر نورماندي وجسر ميو (الشكل 15.47). وتحقق جسوره المدعمة بالكابلات تميزاً جمالياً لا بالزخرفة المضافة، بل باختزال التصميم إلى جوهره الإنشائي—وهي فلسفة تردد أصداء كبار المهندسين الفنانين في الماضي. غير أن البساطة الظاهرة لهذه المنشآت تخفي تعقيداً تحليلياً استثنائياً: لاخطيات هندسية تسببها تشوهات الكابلات الكبيرة، وتفاعلات ديناميكية مع الرياح، وآليات معقدة لإعادة توزيع الأحمال تتطلب تحليلاً حاسوبياً متقدماً يتجاوز الممارسة المعيارية بكثير.

ويوضح تقييم فيرلوغو التقني نفسه تعقيد تصميم الجسور المدعمة بالكابلات ومتعددة البحور:

> أفضل الحلول وأكثرها أناقة هو توزيع الجساءة بين العناصر الإنشائية المختلفة (البلاطة والأعمدة والأبراج) لموازنة تأثيرات الانحناء التي تحدثها الأحمال الحية غير المتماثلة والحد من الإزاحات. ويمكن مقارنة حلول عدة بين الطرفين:
>
> - بلاطة ذات جساءة كافية لمقاومة عزوم الانحناء الناشئة عن الأحمال الحية. ولا يصلح هذا الحل إلا للجسور المدعمة بالكابلات ذات البحور الصغيرة والمتوسطة.
> - أبراج ذات جساءة انحناء كبيرة، تتخذ مثلاً شكل حرف V مقلوب طولياً، مع نقل قوى الانحناء إلى الأعمدة الواقعة أسفلها للحد من الدوران عند مستوى البلاطة. وفي هذه الظروف يمكن استخدام بلاطة فائقة النحافة والمرونة.
> - توزيع الجساءة بين جميع العناصر الإنشائية، أي البلاطة والأبراج.
>
> وكما ذُكر أعلاه، يجب أن يسمح التصميم الإنشائي بتغيرات الطول التي تحدثها أوتار سبق الإجهاد المستمرة المركبة في البحور بعد إغلاقها، وزحف الخرسانة وانكماشها اللذان يتطوران بعد إغلاق البحور، وتغيرات درجة الحرارة. ولذلك ستُحلل الحلول العملية كلها واحداً تلو الآخر.
>
> (Virlogeux, 2001)

يقف جسر ميو، الذي اكتمل سنة 2004، بوصفه لعل أكثر الجسور المدعمة بالكابلات أناقة مما بُني قط: منشأ متماثل ذو ستة بحور طول كل منها 342 متراً وبحرين طرفيين طول كل منهما 240 متراً، يرتفع 245 متراً فوق وادي تارن. وتطلب المشروع ابتكارات في النمذجة الحاسوبية ومنهجية البناء وعلم المواد دفعت حدود ما كان يُعد ممكناً. وتوجد أوصاف تقنية مفصلة في (Virlogeux **andothers,** 2005)، بينما يقدم (Bergsjö **and** Pettersson, 2016) قراءة أساسية لطلاب تحليل الجسور المدعمة بالكابلات، تكمل معالجة فيرلوغو الأسهل تناولاً في (Virlogeux, 2001).

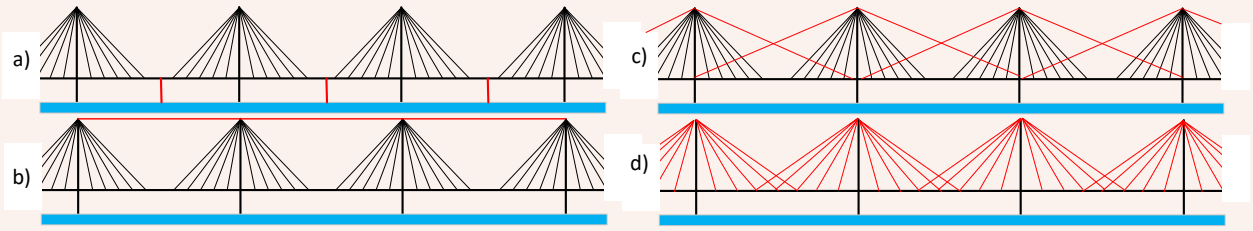


شكل 15.47: فيرلوغو وجسر ميو: شاعرية إنشائية بمقياس غير مسبوق (Virlogeux **andothers,** 2005)

يكشف نهج فيرلوغو في التصميم الحكم المتقدم الذي يميز «الخمسة في المئة» من الممارسين الروتينيين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وإذ كان شديد الوعي بالتوازن الدقيق بين الكفاءة الإنشائية والتميز الجمالي—وهو توتر يعود إلى فيتروفيوس—واجه هذه المعضلة مباشرة في مشروع ميو. يبين الشكل 15.48 أربعة حلول كافية إنشائياً لتقوية الجسور المدعمة بالكابلات ومتعددة البحور، يقدم كل منها مفاضلات مختلفة بين اقتصاد المادة وتعقيد البناء. ومع ذلك رفض فيرلوغو البدائل الأربعة كلها لأنها غير مقبولة جمالياً، واختار بدلاً منها الحل الأكثر أناقة الظاهر في الجسر المكتمل. وتطلب هذا القرار جساءة إضافية للبلاطة وتحليلاً أكثر تطوراً، مثبتاً أن على الكفاءة والاقتصاد أحياناً أن يتراجعا، ولو قليلاً، أمام السعي إلى الجمال الإنشائي.



شكل 15.48: نظم إنشائية بديلة للجسور المدعمة بالكابلات ومتعددة البحور، رفضها فيرلوغو كلها لأسباب جمالية (Virlogeux **andothers,** 2005)

ويميز هذا الاستعداد لاختيار الجمال على التحسين الخالص فيرلوغو من نسبة 95% التي قد تختار الحل الأكثر اقتصاداً آلياً. فبخلاف مايار، الذي تكمن عبقريته في تحقيق التحسين المتزامن للمنشأ والاقتصاد والجمال، أدرك فيرلوغو أن السعي إلى التميز الجمالي يبرر مزيداً من التطور الإنشائي في سياقات معينة—ولا سيما عند مقياس معالم البنية التحتية الكبرى. وتقف جسوره نُصباً لا للقدرة الهندسية وحدها، بل لاستمرار أهمية الحكم الجمالي في مهنة تزداد أتمتة. وهي تثبت أنه حتى في عصرنا الحاسوبي، تظل «الخمسة في المئة» التي تجمع الإتقان التقني بالرؤية الفنية ضرورة لا غنى عنها لإنشاء بنية تحتية تسمو بالمشهد الطبيعي والروح الإنسانية معاً.

15.7 إعادة النظر في فيتروفيوس

أُعيد اكتشاف مؤلَّف فيتروفيوس (القرن الأول قبل الميلاد) في عصر النهضة، وأكدت أجيال متعاقبة من المعماريين المهندسين مبادئه للمتطلبات الإنشائية ونقحتها. ولم تتعرض تلك المبادئ الأساسية لتحد ملحوظ إلى أن صاغ Billington, 1983b مصطلح *الفن الإنشائي* وعرفه بطريقة تذكر على نحو لافت بأسلافه العظام: فيتروفيوس وألبرتي وبالاديو.

سيتحدى هذا القسم مفهوم الفن الإنشائي نفسه ويحاول تفكيكه—لا للانتقاص من إنجازات كبار المهندسين البنّائين، بل لتوضيح الإطار المفاهيمي الذي نفهم أعمالهم من خلاله.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.7.1 تفكيك الفن الإنشائي

بعد نشر ما أعده أفضل كتاب دراسي كُتب على الإطلاق عن المنشآت القشرية، *المنشآت الخرسانية رقيقة القشرة*،[57] نمّى Billington, 1965 اهتماماً عميقاً بالجماليات الإنشائية. وتطور هذا الاهتمام عبر تقارير داخلية كثيرة في برنستون (Billington **and** Mark, 1970; Billington, Mark **and** Abel, 1972; Billington, 1984a; Billington, 1979; Billington, 1983a; Billington, 1984b) قبل أن يبلغ ذروته في عمله البارز (Billington, 1983b).

وفي هذا الكتاب المؤسس، *البرج والجسر*، حدد بيلنغتون تقليداً جمالياً في الهندسة الإنشائية الحديثة رأى أنه مستقل عن العمارة—وسماه *الفن الإنشائي*. ويلخص العمل أفكاره عن تقاطع الهندسة الإنشائية والعمارة والفن، مقترحاً أن التصميم الإنشائي يبلغ منزلة *الفن الإنشائي* حين يحقق الامتياز في ثلاثة مجالات: *الكفاءة والاقتصاد والأناقة*. ويستعرض الكتاب منشآت كبرى مختارة لتوماس تلفورد وجون روبلنغ وغوستاف إيفل وبنجامين بيكر (ممثلين العصر الذهبي لمنشآت الحديد في أواخر القرن التاسع عشر)، ثم مايار ونيرفي وآخرين من عصر الخرسانة في أوائل القرن العشرين.

ومتطلبات بيلنغتون للفن الإنشائي، في جوهرها، إعادة صياغة لمبادئ أُعلنت في القرن الأول قبل الميلاد (الجدول 15.6)، مع فرق حاسم واحد. فقد عد أسلافه هذه الفضائل أساسية في جميع المنشآت الجديرة، بينما يحتفظ بيلنغتون بوصف الفن الإنشائي للمنشآت التي تحقق معاييره الخاصة فقط.

جدول 15.6: الفضائل المعمارية من فيتروفيوس إلى بيلنغتون

بيلنغتون 1983	**بالاديو**[58] 1570	**ألبرتي** 1452	**فيتروفيوس** ~ 20 ق.م.
الفن الإنشائي		*جميع المنشآت*	
الكفاءة	المنفعة	المنفعة (*Comodità*)	المقاومة (*Firmitas*)
الاقتصاد	الملاءمة	الديمومة (*Perpetuità*)	المنفعة (*Utilitas*)
الأناقة	الديمومة & الجمال	الجمال (*Bellezza*)	الجمال (*Venustas*)

حفز هذا العمل المؤثر رسائل وأبحاثاً لاحقة كثيرة لطلاب حللوا أعمال «الفنانين الإنشائيين» وفق قالب راسخ: وصف المنشأ، ووضعه في سياقه التاريخي، وتقييم جماله وأناقته، وإجراء حسابات تؤكد فرضيات التصميم.

وأيدت منشورات لا حصر لها المصطلح منذ ذلك الحين، لكن القليل منها فحصه نقدياً. فقد كان بيلنغتون، في النهاية، شخصية عملاقة وصلت بين العمارة والمنشآت. وكان تبني رؤيته الجذابة أسهل كثيراً من فحص أسسها الفلسفية.

[57] ينطلق بيلنغتون من علاقات أساسية مألوفة لجميع الطلاب ومدعومة برسوم ممتازة، فيشتق المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثامنة الحاكمة لسلوك القشرة. ثم يبسطها لمعالجة أنواع مختلفة من القشريات، و—وهو أمر شديد الندرة في كتب التحليل الصارم—يكيف النظرية مع ممارسة التصميم الفعلية للخرسانة المسلحة.

[58] تتألف صياغة بالاديو نفسها في الحقيقة من أربعة مصطلحات—المنفعة والملاءمة والديمومة والجمال—لا من التقسيم الثلاثي الذي استخدمه فيتروفيوس وألبرتي وبيلنغتون؛ وقد جُمع الأخيران هنا للحفاظ على محاذاة الصفوف عبر الجدول.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.7.2 ما الفن؟

لكن ما الفن، على وجه الدقة؟ أرى أن غرض الفن المتفرد هو أن يغرس في البشر *تواصلاً* معدياً *للعواطف*—تجلياً شخصياً عميقاً وغير أناني للمشاعر الباطنة. والفنون التقليدية السبعة هي: الرسم والنحت والعمارة والموسيقى والرقص والأدب والمسرح والسينما. وبالتعريف، لا يخدم أي منها غرضاً نفعياً. ولا تظهر العمارة في هذه القائمة إلا للمتعة الجمالية المستمدة من البناء الجميل. فمثلاً، تعد فيلا روتوندا لبالاديو (الشكل 15.49a) وكازا مالاباراتي[59] في كابري (الشكل 15.49b) (Iacovou, 2024) تحفتين معماريتين تعملان تعبيراً فنياً خالصاً. غير أن تصورهما الإنشائي لا يكاد يؤثر في قيمتهما الفنية.



(a) فيلا روتوندا (بالاديو)



(b) كازا مالاباراتي، كابري

شكل 15.49: العمارة فناً خالصاً: الشكل متحرراً من التعبير الإنشائي

الفن دائماً تعبير، ولا يمكن أن يكون صفة تطلق على أشياء وظيفية (مع أن «فني» قد يكون وصفاً ملائماً). فلا نستطيع الحديث عن «فن الأقلام» لمجرد أن قلم حبر من مونتيغرابا جميل (الشكل 15.50a) أو يثير العاطفة. فرغم جماله وحسن صنعه، يظل في جوهره أداة وظيفية—قلماً جميلاً بلا شك، لكنه ليس فناً.

وبالمثل، يوجد الجسر لينقلنا من النقطة A إلى النقطة B. وقد يكون—وينبغي أن يكون—بناءً جميلاً، لكن لا ينبغي لنا أن نسميه فناً. وحين صمم مايار جسر سالجيناتوبل، لم يكن هدفه إنشاء فن إنشائي، بل بناء جسر وظيفي يكون جميلاً أيضاً ومندمجاً برشاقة في محيطه (الشكل 15.50b).

بعد الاعتراض على إطلاق «الفن الإنشائي» على منشآت كثيرة صنفها بيلنغتون كذلك، يبقى السؤال: هل يوجد الفن الإنشائي حقاً؟ الجواب نعم، لكن أمثلته نادرة للغاية. ولكي يستحق منشأ هذا الوصف، يجب أن يكون غرضه النهائي الجمال البصري والتواصل العاطفي حصراً، وأن يتطلب في الوقت نفسه مهارات مهندس إنشائي لتحقيقه. ويشمل ذلك برج إيفل (بُني محوراً لمعرض العالم سنة 1889 احتفاءً بعظمة فرنسا، الشكل 15.51a)، وقوس البوابة في سانت لويس (الشكل 15.51b)، وكرة العلم والابتكار من معرض سويسرا 2002 (الشكل 15.51c).

يجدر التشديد على أن الفن لم يكن بالتأكيد هدف مايار أو نيرفي الأساسي حين تصورا جسورهما وملاعبهما.

[59] صممها أدالبرتو ليبيرا، مع إعادة تصميم كبيرة وتأليف مباشر من كورتسيو مالاباراتي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) قلم حبر من مونتيغرابا



(b) جسر سالجيناتوبل لمايار

شكل 15.50: الوظيفة والجمال: القلم والجسر



(a) برج إيفل



(b) قوس البوابة، سانت لويس



(c) معرض سويسرا 2002

شكل 15.51: الفن الإنشائي الأصيل: المنشأ تعبيراً خالصاً

فقد كان هدفهما تصميم بنية تحتية وظيفية صادف أن حققت الجمال ببساطتها وأناقتها الإنشائيتين.[60] ويمثل هذا الجمال قيمة مضافة هائلة، لكنه ينبثق من السعي إلى المنطق الإنشائي لا إلى التعبير الفني.

وهذا يثير سؤالاً أساسياً: لماذا نصوغ مصطلحاً جديداً وقد عبّر فيتروفيوس عن المبادئ الجوهرية قبل ألفي عام؟ فقد قررت ثلاثيته *Firmitas, Utilitas, Venustas* أن على جميع المنشآت الجديرة أن تحقق ثلاثة شروط: المقاومة والمنفعة والجمال. وكثيراً ما فُسر هذا على أنه يعني أن الشرط الثالث يتبع تلقائياً إذا تحقق الشرطان الأولان. ولا تمثل أركان بيلنغتون الثلاثة—الكفاءة والاقتصاد والأناقة—أكثر من مصطلحات محدثة للمبادئ الفيتروفية (الجدول 15.6). وكانت هذه الشروط عند فيتروفيوس تعرّف المنشأ الجدير نفسه؛ أما عند بيلنغتون فإن تحققها ينشئ «فناً إنشائياً».

ولهذا أرفض مصطلح *الفن الإنشائي* وأفضل عليه *العمارة الإنشائية*—وهو وصف أكثر تواضعاً ودقة.

[60] من أحب ذكرياتي في المدرسة الثانوية ذكرى أستاذ رياضيات قال لنا، حين عجزنا عن تخمين معادلة منحنى وردة: «المنحنى بسيط وجميل—فلا بد أن تكون له معادلة بسيطة وجميلة بالقدر نفسه» ($r = a\cos(n\theta)$).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15.7.3 العمارة الإنشائية: بيان ليونجي

مع أن كتاب بيلنغتون *البرج والجسر* حظي بتأثير واسع، فإن بياناً أقل شهرة نشره حديثاً المهندس الإنشائي المونتينيغري ميلوش ليونجي يستحق اهتماماً مساوياً، إن لم يكن أكبر (Llunji, 2022).

يفكك هذا النص الجوهري مفهوم الفن الإنشائي بصورة منهجية، ويبرز قيوده، وينتقد من تبنوه بلا تمحيص، ويدعو إلى إحياء مصطلح *العمارة الإنشائية*—الذي صاغه نيرفي في الأصل (Nervi, 1963). ولا يسعني إلا أن أوافق تحليل ليونجي بأقوى صورة.

وقد عرضت بالفعل تقييم ليونجي الواقعي لحالة مهنة الهندسة الإنشائية في §15.6.2. وتقدم توصياته خاتمة ملائمة لهذا القسم المثير للجدل:

> إذا قبلنا أن مهنتنا في أزمة، وإذا أردنا أن نجعلها جذابة من جديد، فعلينا إدخال تغييرات جذرية على تعليم طلاب الهندسة، الذي يترك في الوقت الراهن كثيراً مما ينبغي تحسينه. وتفضل الأجيال الأصغر اختيار العمارة على الهندسة لأنها لم تعد تربط ممارسة الهندسة المدنية بالإبداع والابتكار. ويجب أن نشدد على الجانب الإبداعي لمهنتنا ونروّج له، فنعيد بهذه الطريقة ابتكار صورة يمكن التعرف عليها، ونفتح الأبواب المغلقة أمام اضطلاع الهندسة بدور قيادي.
>
> (Llunji, 2022)

وسواء تحدثنا عن الفن الإنشائي أم العمارة الإنشائية، فمن المرجح أننا نخاطب المجال العاطفي والجمالي نفسه، لكنني أجد المصطلح الثاني أدق وأكثر أمانة فكرية. فنحن في النهاية نمنح الكلمات المعاني الأنسب لأغراضنا، وكما تذكرنا جولييت عند شكسبير:

> ما الاسم؟ إن التي نسميها وردة
> لو سُمّيت بغير اسمها لفاح عطرها كما هو.
>
> روميو وجولييت، الفصل الثاني، المشهد الثاني

لا تكمن عظمة مايار ونيرفي وتورّوخا ومعاصريهم في أنهم ابتكروا «فناً»، بل في أنهم أثبتوا أن المنشآت الوظيفية، إذا تُصورت بفهم عميق للمواد والقوى، تستطيع بلوغ جمال ينافس أي إبداع فني. وهم يذكروننا بأن أسمى رسالة للهندسة الإنشائية ليست تقليد الفن، بل اكتشاف الشعر الكامن في منطق البناء نفسه.

15.8 الخلاصة

تكشف هذه الرحلة عبر تقاطع الهندسة والعمارة—من روما القديمة إلى العصر الرقمي—مهنة تمر بتحول. فقد تتبعنا التطور من مبادئ فيتروفيوس المؤسسة، مروراً بكبار المهندسين البنّائين في العصر الصناعي، وصولاً إلى ممارسي اليوم الحاسوبيين، وشهدنا إنجازات استثنائية واتجاهات مقلقة معاً.

ويمثل المهندسون والمعماريون الذين تناولهم هذا الفصل ما يسميه ليونجي «الخمسة في المئة»—أولئك الممارسين النادرين الذين يتجاوزون الحساب الروتيني ليحققوا إبداعاً إنشائياً أصيلاً. فمن أناقة إيفل العقلانية إلى شاعرية نيرفي الإنشائية، ومن ابتكارات خان الأنبوبية إلى تطور بيكر الحاسوبي، تبين هذه الشخصيات أن التصميم الإنشائي العظيم لا ينبثق من خوارزميات البرمجيات، بل من اقتران الإتقان التقني بالرؤية الخلاقة.

ومع ذلك، تواجه المهنة، كما رأينا، تحدياً وجودياً. فقد أدى شيوع الأدوات الحاسوبية، على نحو متناقض،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إلى تقليص دور المهندسين الإنشائيين، واختزال كثير منهم إلى «تقنيين ومساندين لأفكار معمارية» بدلاً من شركاء مبدعين في عملية التصميم. ويتفاقم هذا التحدي الآن بظهور الذكاء الاصطناعي، الذي يعد بمزيد من أتمتة المهمات الهندسية الروتينية. وفي حين يستطيع الذكاء الاصطناعي أن يكون أداة قوية للمهندس المبدع—يسرع الحسابات ويستكشف بدائل التصميم ويتولى التحليلات المتكررة—فإنه يهدد أيضاً بمزيد من تآكل الانخراط الفكري الذي يميز الهندسة الحقيقية من مجرد الحساب.

ولا يكمن الخطر في الذكاء الاصطناعي نفسه، بل في الإفراط في الاعتماد عليه. فكما أتاح برنامج العناصر المحددة ظهور مهندسين يستطيعون تشغيل تحليلات معقدة من دون فهم الفيزياء الكامنة، يخاطر الذكاء الاصطناعي بإنتاج ممارسين يستطيعون توليد تصاميم من دون استيعاب المبادئ الأساسية الحاكمة للسلوك الإنشائي. وسيستخدم المهندس الحكيم الذكاء الاصطناعي كما استخدم نيرفي أجهزة اختباراته أو كما يستخدم بيكر التحسين الطوبولوجي: أداةً للتحقق من أفكار نشأت من الفهم وتنقيحها، لا بديلاً عن الحكم الهندسي أبداً.

ولا يكمن الطريق إلى الأمام في رفض التكنولوجيا، بل في إعادة اكتشاف المبادئ الأساسية—الهندسة والاتزان وسلوك المادة[61]—التي تتيح حلولاً مبتكرة حقاً. فالمهندس الذي يفهم سبب عمل القوس على هيئة سلسلة معلقة، ويستطيع تصور جريان الإجهاد عبر كمرة، ويدرك العلاقة بين الشكل والقوة، سيظل يمتلك شيئاً لا يمكن استبداله: القدرة على التمييز بين الممكن والمثالي، وبين الحساب والبصيرة. ويجب أن يصبح شعار عصر الذكاء الاصطناعي ثق ولكن تحقق—احتضن قوة الأداة مع الحفاظ على الاستقلال الفكري اللازم لمساءلة مخرجاتها.

وللمهندس الإنشائي أو المعماري الطموح الذي يسعى إلى الانضمام إلى تلك النسبة الثمينة، تقدم النصوص التالية أساساً لا غنى عنه:

1. Vitruvius, 1960، *The Ten Books on Architecture* — المبادئ المؤسسة التي تظل صحيحة بعد ألفي عام
2. Alberti, 1485، *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo* — تركيب عصر النهضة بين النظرية الكلاسيكية والتطبيق العملي
3. Palladio, 1570، *I quattro libri dell'architettura* — نظم التناسب وعمارة المنشأ
4. Sullivan, 1896، "The tall office building artistically considered" — الأساس الفلسفي للتعبير الإنشائي الحديث
5. Torroja, Polivka **and** Polivka, 1958، *Philosophy of structures* — الحدس الإنشائي في مقابل الحساب الآلي
6. Nervi, 1956b، *Structures* — تكامل الهندسة والرؤية الفنية
7. Khan, 1965، "Design of high-rise buildings" — منهج منظم للنظم الإنشائية في المباني الشاهقة
8. Le Corbusier, 1931، *Towards a new architecture* — مبادئ الحداثة وآثارها الإنشائية
9. Billington, 1983b، *The Tower and the Bridge* — البيان المرجعي للجماليات الإنشائية
10. Llunji, 2022، *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner* — نقد ضروري وطريق نحو التجدد

[61] أو كما يتكرر مرات لا تحصى في الكتب الثلاثة التالية: الاتزان والتوافق والنموذج التأسيسي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يسجل الجدول التالي أبرز الشخصيات التي نوقشت، كاشفاً التطور من الحدس التجريبي، مروراً بالصرامة الرياضية، إلى التطور الحاسوبي:

جدول 15.7: تطور مناهج التصميم الإنشائي

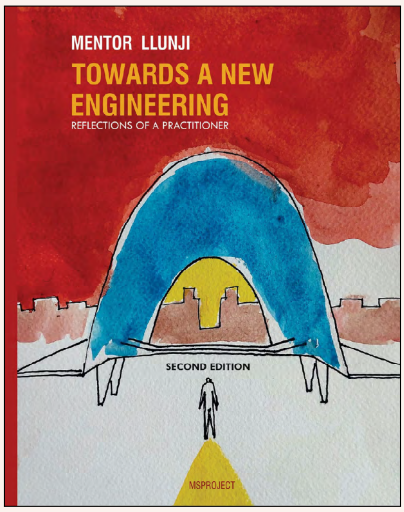
الاسم	الأعوام	البلد (الممارسة)	معماري أو مهندس	الابتكار الأساسي
		المناهج التجريبية والحدس الإنشائي		
إيفل	1832–1923	فرنسا	مهندس	البناء العقلاني بالحديد
غاودي	1852–1926	إسبانيا	معماري	هندسة السلسلة المعلقة
مايار	1872–1940	سويسرا	مهندس	أقواس خرسانية ثلاثية المفاصل
بيريه	1874–1954	فرنسا	معماري	عمارة الإطار الخرساني المكشوف
نيرفي	1891–1979	إيطاليا	مهندس	قشريات الأسمنت الحديدي
موراندي	1902–1989	إيطاليا	مهندس	الخرسانة مسبقة الإجهاد
سارينن	1910–1961	الولايات المتحدة	معماري	أشكال خرسانية تعبيرية
كانديلا	1910–1997	المكسيك	معماري	قشريات القطع المكافئ الزائدي
		إيجاد الشكل الفيزيائي		
أوتو	1925–2015	ألمانيا	معماري	منشآت الشد
إيسلر	1926–2009	سويسرا	مهندس	طريقة الغشاء المعلق
موسوميتشي	1926–1981	إيطاليا	مهندس	جسور خرسانية تجريبية
خان	1929–1982	الولايات المتحدة	مهندس	نظم المباني الأنبوبية
مين	1927–2018	سويسرا	مهندس	جسور الخرسانة مسبقة الإجهاد
		التصميم الحاسوبي		
روبرتسون	1928–2021	الولايات المتحدة	مهندس	نظم المباني الفائقة الارتفاع
غيري	1929–2025	الولايات المتحدة	معماري	التصنيع الرقمي
كالاترافا	1951–	إسبانيا	معماري/مهندس	الهندسة النحتية
فيرلوغو	1946–	فرنسا	مهندس	جسور معقدة مدعمة بالكابلات
بيكر	1953–	الولايات المتحدة	مهندس	التحسين الطوبولوجي

تعكس الرحلة الفكرية من بيلنغتون إلى ليونجي (الشكل 15.52) تطور فهمنا لمعنى ممارسة الهندسة الإنشائية بوصفها تخصصاً إبداعياً. فبينما احتفى بيلنغتون بالإنجازات الجمالية لكبار المهندسين، يتحداانا ليونجي أن نفحص ما إذا كانت المهنة قد ضلت طريقها في سعيها إلى الكفاءة الحاسوبية على حساب التميز الإبداعي.

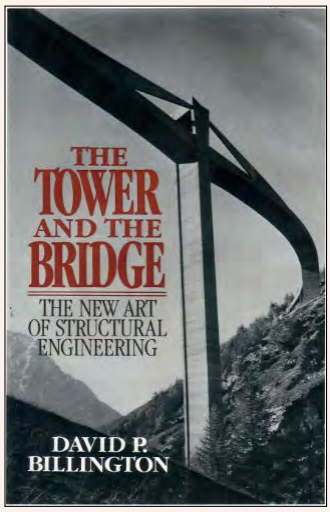
ولا يتطلب الطريق إلى الأمام التخلي عن التكنولوجيا ولا التراجع إلى الحنين إلى الماضي، بل تنمية ما يسميه بيكر «الهندسة والاتزان»—أي البصائر الأساسية التي تمكّن المهندسين من استخدام الأدوات الحاسوبية وسائل للاكتشاف لا بدائل عن التفكير. ولا يستطيع مهندسو اليوم أن يأملوا في إنشاء منشآت جديرة بالانضمام إلى تلك السلسلة المتميزة إلا بفهم المبادئ التي وجهت جسور مايار وقشريات نيرفي.

ويظل الاختيار الذي يواجه كل جيل جديد من المهندسين الإنشائيين هو نفسه الذي واجه إيفل وتورّوخا: هل تقنع بأن تكون «تقنياً ومسانداً لأفكار معمارية»، أم تطمح إلى الانضمام إلى الخمسة في المئة الذين يستخدمون المنطق الإنشائي لابتكار أشكال جديدة من الجمال؟ لا تكمن الإجابة في تطور برامجك، بل في عمق فهمك لكيف تتآزر المواد والقوى لتنشئ المنشأ—ومن خلال المنشأ، المعنى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) نحو هندسة جديدة (Llunji, 2022)



(a) البرج والجسر (Billington, 1983b)

شكل 15.52: من الاحتفاء إلى النقد: تطور وجهات النظر في الإبداع الإنشائي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



كارافاجيو، مرثا ومريم المجدلية (1598)

الحياة العملية والحياة التأملية في حوار: يخدم المنشأ العمارة كما تخدم مرثا مريم—رسالتان متميزتان، واعتماد متبادل، وكل منهما أساسي للكل.

16 Terrae Motus: أساطير الزلازل ومعتقداتها وتمثيلاتها

ملخص

يتناول هذا الفصل الزلزال بوصفه محفزاً دائماً للخيال الإنساني عبر الثقافات والعصور التاريخية. وينطلق من أقدم الأطر الأسطورية—حيث نُسبت الأحداث الزلزالية إلى حيوانات جوفية أو اختلال كوني أو صراع عمالقة مسجونين—ثم يتتبع التطور التدريجي لتفسير الزلازل من خلال البنى الرسمية للدين، والبحث العقلي للفلسفة، والموارد التعبيرية للأدب والعمارة والفن والموسيقى والسينما. ويظهر نمط ثابت: فحيثما تتكرر الزلازل بما يكفي لدخول الذاكرة الثقافية، تنشئ أطراً تفسيرية تسند الفعل إلى فاعل، وتدمج الحدث في نظام أخلاقي أو كوني، وتستدعي استجابة جماعية. ويذهب الفصل إلى أن هذا المنعكس التفسيري—أي الإصرار على أن اهتزاز الأرض يعني شيئاً—لا يزيحه تقدم المعرفة الطبيعية، بل يحوله تدريجياً: من نظرية أرسطو الهوائية، مروراً بأزمة لشبونة في عصر التنوير، إلى المرثية العلمانية في أدب القرن العشرين وفنه. ويرى الفصل أن الزلزال من أخصب الظواهر الطبيعية جميعاً لدراسة كيفية مواجهة المجتمعات الإنسانية حدود النظام والثبات والفهم.

16.1 مقدمة 574
16.2 الأساطير 574
16.2.1 اليابان 575
16.2.2 شمال غرب المحيط الهادئ 578
16.2.3 الأمريكيتان 579
16.2.4 تقاليد أخرى 580
16.2.5 تركيب: الأسطورة ذاكرةً زلزالية . 580
16.3 الدين 581
16.3.1 الكتاب المقدس 581
16.3.2 اليونان 585
16.3.3 الهند 590
16.3.4 الإسلام 592
16.3.5 أمريكا الوسطى 594
16.3.6 الشنتو 595
16.3.7 تركيب: الدين ومعنى الكارثة الزلزالية 598
16.4 الفلسفة 602
16.4.1 أرسطو 602
16.4.2 إراتوستينس 603
16.4.3 لوكريتيوس وبلينيوس 603
16.4.4 زلزال لشبونة حدثاً فلسفياً 604
16.4.5 إعادة الإعمار 605
16.5 الأدب 607
16.5.1 الزلازل في الأدب 607
16.5.2 زلزال لشبونة سنة 1755 ونقاش عصر التنوير 607
16.5.3 زلزال مسّينا سنة 1908 609
16.5.4 خلاصة: الأدب والذاكرة الثقافية للزلازل 610
16.6 العمارة 610
16.6.1 بيرّو ليغوريو 610
16.6.2 جيبلّينا 611
16.7 الفن 614
16.7.1 الفن الصخري وآثار الصدوع . . . 614
16.7.2 الرسم 616
16.7.3 مجموعة كوزاك 616
16.7.4 مجموعة أميليو 617
16.8 الموسيقى 619
16.9 التصوير السينمائي 619
16.10 الخلاصة 620
16.11 خاتمة: من نامازو إلى روزويل 621

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16.1 مقدمة

يتناول هذا الفصل، شأنه شأن بضعة فصول أخرى[1]، موضوعاً آخر يتصل بمؤثر رئيس في المنشآت[2]: الزلازل، وبصورة أخص علاقتها بالعقل الباطن للإنسان. وبعبارة أخرى، يبحث كيف شكلت الزلازل خيالنا الجمعي وأثرت في الأساطير والدين والفلسفة والفنون.

وقبل المضي، من المفيد توضيح ثلاثة مجالات مترابطة ترابطاً وثيقاً لكنها متمايزة، حاول الإنسان من خلالها تفسير الظواهر الطبيعية: الأساطير والدين والفلسفة. وهذه المجالات ليست منفصلة بحدود جامدة؛ فكما سيتضح، كثيراً ما تكون الحدود بينها نافذة، ونادراً ما يقع تأثير الزلازل في الفكر الإنساني ضمن فئة واحدة بوضوح.

الأساطير هي الروايات التقليدية التي تفسر الظواهر الطبيعية بقصص رمزية تتضمن كائنات خارقة أو قوى كونية. وفي سياق الزلازل، كثيراً ما تنسب الأساطير اهتزاز الأرض إلى أفعال حيوانات أو آلهة أو قوى جوفية. وتُعالج الأساطير أولاً في هذا الفصل لأنها تمثل أقدم طبقات التفسير الإنساني وأكثرها شمولاً.

الدين يقدم إطاراً أكثر تنظيماً للمعتقدات والممارسات، يمكن أن تُفسر فيه الزلازل بوصفها تجليات للإرادة الإلهية أو عقاباً أو إنذاراً أو اختباراً أخلاقياً ضمن نظام لاهوتي أوسع. ومن الأهمية بمكان أن التقاليد الدينية كثيراً ما تتجذر في روايات أسطورية أسبق أو تستوعبها—فالحد بين الاثنين مائع تاريخياً لا ثابت. وقد تندمج أسطورة تنسب الزلازل إلى إله جوفي قلق، مع مرور الزمن، في نظام ديني رسمي له شعائره وكهنته ونصوصه المقدسة. ولهذا تقاوم بعض تقاليد الزلازل التي يناقشها هذا الفصل التصنيف الصارم بوصفها أسطورية خالصة أو دينية خالصة، وينبغي للقارئ أن يضع ذلك في الحسبان.

أما **الفلسفة** فتبحث، على النقيض، عن تفسيرات عقلانية قائمة على الاستدلال والرصد. ومنذ العصور القديمة، حاول الفلاسفة فهم الزلازل بوصفها عمليات طبيعية تحكمها مبادئ كامنة، ناقلين التفسير بذلك من السرد الأسطوري نحو البحث المنهجي—وهو مسار انتهى إلى علم الزلازل الحديث.

ونظراً إلى الاتساع غير المألوف لموضوع هذا الفصل—الذي يمتد إلى مجالات تقع بعيداً عن النطاق المعتاد لكتاب في الهندسة الإنشائية—يقدم الشكل 16.1 خريطة موضوعية توجه القارئ قبل بدء المعالجة التفصيلية.

16.2 الأساطير

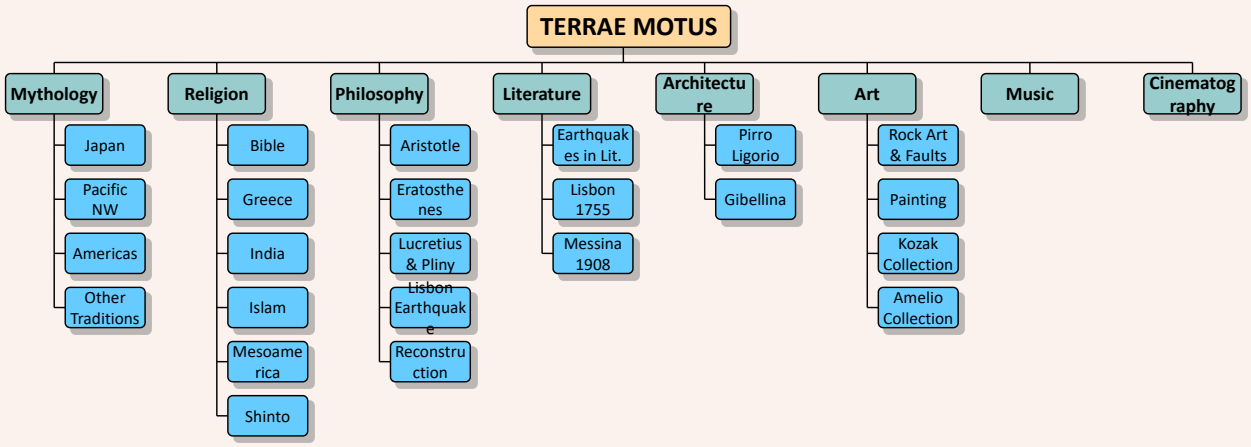
كتب بول ديراك عبارته الشهيرة:

> من المفهوم تماماً أن الشعوب البدائية، التي كانت أشد تعرضاً منا اليوم لقوى الطبيعة الساحقة، قد جسدت

[1] نشأ هذا الاهتمام لدي حين زرت بلدة جيبيلينا التي دمرها الزلزال (§16.6.2)، وتأملت كيف أن المجتمع «غطاها» بالمعنى الحرفي تماماً.

[2] في سياق التحليل الإنشائي، يدل *المؤثر* على كل فعل أو تأثير يحدث إجهادات أو تشوهات داخل منشأ. ويشمل الأحمال الخارجية (مثل الجاذبية والرياح والزلازل والتأثيرات الحرارية أو الإزاحات المفروضة)، وكذلك التأثيرات البيئية أو المعتمدة على الزمن (مثل تدرجات الحرارة أو الانكماش أو الزحف). وباختصار، المؤثر هو كل سبب فيزيائي قادر على توليد قوى داخلية أو إجهادات أو انفعالات داخل نظام إنشائي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 16.1: البنية الموضوعية للفصل

> هذه القوى في خوف وارتجاف. أما اليوم، وقد صرنا نفهم عمليات طبيعية كثيرة، فلم نعد في حاجة إلى مثل هذه الحلول.
>
> Dirac, 1963 "*The Evolution of the Physicist's Picture of Nature*"

قبل ظهور الأديان المنظمة أو التفسيرات الفلسفية بزمن طويل، حاولت المجتمعات الإنسانية فهم *الزلازل* من خلال *الأساطير*. ولم تكن هذه الأساطير مدمجة في نظم لاهوتية رسمية، بل انتمت إلى تقاليد شفهية فسرت الظواهر الطبيعية بروايات رمزية. وفي تلك الروايات، كثيراً ما نُسبت الزلازل إلى حركات حيوانات أو كائنات خارقة اعتُقد أنها تحمل الأرض أو تسكنها. وتعكس هذه التفسيرات محاولات مبكرة لإضفاء المعنى والسببية على أحداث بدت مفاجئة وعنيفة ومستعصية على الفهم.

إن شيوع الروايات الأسطورية عن الزلازل بين ثقافات متباعدة جداً أمر لافت في ذاته. فمن اليابان وآسيا الوسطى إلى شمال غرب المحيط الهادئ في أمريكا الشمالية وأمريكا الوسطى، توصلت مجتمعات لم يكن بينها اتصال إلى أطر تفسيرية متشابهة في بنيتها: مخلوق هائل يتحرك تحت الأرض؛ حارس خارق يغفل عن واجبه؛ قوى كونية متعارضة تفقد اتزانها مؤقتاً. ونشوء هذه الروايات مستقلة في أنحاء العالم شاهد على دافع معرفي إنساني مشترك—الحاجة إلى تثبيت عشوائية الكارثة الزلزالية المرعبة داخل قصة تسند الفعل والسبب، وفي النهاية، المعنى.

16.2.1 اليابان

تقليد نامازو

يتمحور التفسير الشعبي السائد—وإن لم يكن الوحيد—للزلازل في اليابان حول وجود سمكة سلور عملاقة تحت الأرض (*Namazu*). وتطور الاعتقاد تدريجياً عبر قرون عدة من تقاليد شعبية يابانية أصلية تأثرت جزئياً بأفكار كونية صينية. ووفق هذا التصور، كان نامازو العملاق يعيش في مياه جوفية تحت ضريح كاشيما في مقاطعة هيتاتشي (محافظة إيباراكي اليوم). وكان يُعتقد أن صخرة كبيرة تعرف باسم *kaname-ishi* («حجر الأساس» أو «حجر المحور») تثبت المخلوق وتمنعه من الحركة (الشكل 16.2c).

غير أن الحجر وحده لم يكن يُعد كافياً لكبح نامازو. فقد اعتمد النظام على إله كاشيما (*Takemikazuchi-*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

no-kami)، وهو إله مرتبط بالرعد والقوة الحربية، يضغط على الحجر ليبقي سمكة السلور ساكنة (الشكل 16.2c). وكان يُعتقد أن كاشيما يغادر موضعه كل عام في الشهر القمري العاشر—المسمى *kannazuki*، أي «الشهر الخالي من الآلهة»—ويسافر إلى إيسه لحضور الاجتماع السنوي لكبار الآلهة اليابانية في الضريح الكبير. وفي غيابه كان على الإله المحلي إبيسو (أو إيبيزو) أن يحافظ على الضغط فوق الحجر. فإذا أهمل كاشيما واجبه، أو أخفق إبيسو في كبح المخلوق أثناء غياب الإله، تلوى نامازو تحت الأرض فأحدث الزلازل (الشكل 16.2b). وكان يُعتقد أن شدة الاهتزاز تتناسب مباشرة مع مقدار حركة سمكة السلور.

وتبلورت الأبعاد الثقافية والاجتماعية لتقليد نامازو بوضوح شديد عقب زلزال آنسي إيدو الكبير سنة 1855، الذي ولد مجموعة رائعة من المطبوعات الخشبية عُرفت باسم *Namazu-e* («صور السلور»، الأشكال 16.2a–16.2e). (Smits, 2006)، وتصور هذه المطبوعات السمكة في طيف واسع من الأدوار السردية والساخرة: تعيث في المدينة خراباً في غياب إله كاشيما (الشكل 16.2b)، أو يخضعها الإله ويعاقبها عند عودته (الشكل 16.2c)، أو تشرف، في تصوير أكثر التباساً، على مشاهد لإعادة توزيع الثروة يربح فيها عامة الناس من تدمير السلع التي كنزها التجار الأغنياء (الشكلان 16.2a و 16.2d) (Smits, 2006). ويعكس هذا الموضوع الأخير—نامازو بوصفه فاعل *yonaoshi* («تقويم العالم»)—تياراً شعبياً رأى الزلزال، على الرغم من رعبه، قوةً تسوي بين الناس وتزعزع التراتب الاجتماعي الراسخ (الشكل 16.2e).

لا يزال الأصل الدقيق للصلة بين نامازو والزلازل غير مؤكد. فمن الممكن أن تكون الفكرة الأوسع لسمكة عملاقة تحمل الأرض قد انتقلت من الصين عبر التقاليد البوذية. وتصور بعض المعابد الصينية البوديساتفا غوانين واقفاً فوق سمكة كبيرة تشبه نامازو الياباني. ومع أن الفكر الصيني أثر دون شك في علم الكونيات الياباني، يبدو أن الارتباط المحدد والمستمر بين سمكة سلور عملاقة والزلازل تطور بصورة فريدة في اليابان (Ludwin **and** Smits, 2007). واختيار سمكة السلور دال في ذاته: فهي تعيش في القاع، وتظل غير مرئية إلى حد بعيد، وقادرة على حركة قوية مفاجئة—فتصلح رمزاً للقوى الخفية في العالم الجوفي.

ومن اللافت وجود بعض الأدلة في علم الزلازل الإثني توحي بأن سمك السلور وغيره من الأسماك التي تتغذى في القاع يظهر فعلاً سلوكاً غير مألوف في الساعات أو الأيام السابقة للزلازل، ربما استجابة لتغير كيمياء المياه الجوفية أو الحقول الكهرومغناطيسية أو السوابق الزلزالية الدقيقة. ويبقى السؤال مفتوحاً: هل لاحظ اليابانيون حقاً مثل هذه الشذوذات السلوكية وأدخلوها في الأسطورة، أم كانت السمكة مجرد صورة رمزية؟ غير أن احتمال احتفاظ تقليد نامازو ببذرة من الرصد التجريبي داخل إطاره الأسطوري جدير بالنظر (Ludwin **and** Smits, 2007).

تفسيرات كونية: اليِن واليَانغ والأطر المتنافسة

إلى جانب تقليد نامازو، شاع في اليابان تفسير أكثر فلسفية للزلازل، متجذر في الفلسفة الطبيعية الصينية. ويفسر *Ansei Kenmonroku* (سجل ما شوهد وسُمع في عصر آنسي، نحو 1854) الزلازل بالنظرية الكونية لـ اليِن (*in*) واليَانغ (*yō*): فالماء (يِن خالص) يهيمن عادة على العالم الجوفي ويكبح النار (يَانغ خالص)، لكن الزلازل تحدث حين يختل هذا الاتزان وتتغلب النار الجوفية مؤقتاً على الماء. والتشابه مع الظواهر البركانية والحرارية الجوفية لافت، وقد يعكس حدساً—مهما كان سابقاً للعلم—بأن الحرارة ضالعة في اهتزاز الأرض.

ومن المهم أن بعض المنشورات الشعبية المطبوعة بعد زلزال آنسي سنة 1855 استخدمت الإطارين معاً، مع وصف تفسير سمكة السلور صراحة بأنه «نظرية ساذجة». ويبين تعايش الأساطير الشعبية وعلم الكونيات الفلسفي بوصفهما إطارين تفسيريين متوازيين—ومتنافسين أحياناً—أن الثقافات السابقة للعلم لم تكن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) أهالي إيدو يهاجمون نامازو لتسببه في زلزال 1855



(b) نامازو يعيث خراباً بينما تحترق المدينة



(c) إله كاشيما يخضع سمكة السلور المسببة للزلازل



(d) سمكة السلور إلهاً شعبياً يأتي بتغير اجتماعي محمود



(e) كاشيما أو إبيسو مع حجر الأساس

شكل 16.2: أمثلة من مطبوعات *namazu-e* تصور سمكة السلور العملاقة المسؤولة عن الزلازل (Miyata **and** Takada, 1995)

ساذجة التصديق على نحو موحد: فقد ناقشت الروايات المتنافسة للسببية الطبيعية ورتبتها ورفضتها صراحة أحياناً.

مطبوعات نامازو وتقويم العالم

ضرب زلزال آنسي–إيدو سنة 1855، المقدرة قوته بين 7.0 و7.1، إيدو (طوكيو الحديثة) في اليوم الثاني من الشهر العاشر من سنة آنسي 2، فتسبب في حرائق مدمرة ومقتل ما بين 4,000 و10,000 شخص (Miyata **and** Takada, 1995; Smits, 2006; Abe, 2000). وفي غضون يومين، بدأ الطباعون إنتاج منشورات *namazu-e* التي تؤلف واحدة من أروع مجموعات الصور الشعبية للكوارث في تاريخ ما قبل الحداثة.

وأكسب التوزيع الجغرافي للأضرار الحدث دلالة سياسية خاصة: فقد وقع الدمار بصورة غير متناسبة على مساكن الساموراي وأنصار شوغونية توكوغاوا *bakufu*، التي كانت سلطتها قد ضعفت بالفعل بسبب فتح

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

اليابان القسري أمام التجارة الخارجية عقب زيارتي العميد البحري بيري في 1853–54، بينما نجت بعض أحياء العامة بأضرار قليلة نسبياً Smits, 2006. واستغل الفنانون هذا التفاوت بمفهوم *yonaoshi* («تقويم العالم»): فلم يظهر نامازو مدمراً فحسب، بل عاملاً للمساواة أيضاً، يشرف على إعادة توزيع الثروة من النخبة إلى الحرفيين والتجار الذين سيربحون من إعادة الإعمار. ولأن النقد المباشر لحكومة توكوغاوا كان يعاقب بعقوبات شديدة، دُمج هذا التعليق السياسي في الرمزية والمجاز البصري والتلاعب بالألفاظ—فلم تعد *na-mazu-e* مجرد رسوم لحدث زلزالي، بل وثائق ثقافية غنية تعكس التوترات الاجتماعية والسياسية في أواخر عصر إيدو (Wakamizu, 2003) (انظر الشكل 16.2).

16.2.2 شمال غرب المحيط الهادئ

فُسرت الزلازل وأمواج التسونامي على طول ساحل كاسكاديا بروايات أسطورية تتضمن كائنات خارقة قوية، اعتُقد أن حركاتها تهز الأرض وترسل أمواجاً عظيمة إلى الشاطئ. وفي منطقة تقع فوق نطاق اندساس كاسكاديا—وهو من أخطر البيئات التكتونية في العالم من حيث الزلازل وتوليد التسونامي—قد تختزن هذه الروايات ذكريات ثقافية لأحداث جيولوجية كارثية حقيقية، منها الزلزال والتسونامي الكبيران في يناير 1700 وأحداث أسبق في سجل الهولوسين.

طائر الرعد والحوت

يتضمن أشهر موضوع زلزالي في المنطقة صراعاً بين طائر الرعد، وهو روح سماوية قوية مرتبطة بالرعد والعواصف، والحوت، وهو مخلوق من أعماق المحيط. ووفق تقاليد كثيرة، جعلت مواجهاتهما العنيفة الأرض ترتج والبحر يطغى—وهو اقتران يطابق تماماً علامة التسونامي المتزامن مع زلزال صدعي كبير في نطاق اندساس كاسكاديا. وتصف التقاليد الشفهية لدى شعب كويلوت على ساحل واشنطن معركة عظيمة ارتبط فيها اهتزاز الأرض بفيضان الساحل ارتباطاً لا ينفصم. وتظهر صور مشابهة لدى شعب يوروك في شمال كاليفورنيا، مما يوحي بامتداد الفكرة عبر جزء كبير من المنطقة الأوسع، الشكل 16.3b. وقد دفع استمرار هذه القصص واتساعها الجغرافي، إلى جانب ربطها الثابت اهتزاز الأرض بالغمر الساحلي، بعض الباحثين إلى القول إن دورة طائر الرعد والحوت تحفظ ذاكرة حقيقية لزلازل دفع هائل سابقة للتاريخ (Ludwin **and** Smits, 2007).

أرواح المشهد الطبيعي والذاكرة الجيولوجية

تربط تقاليد أخرى من منطقة بيوجت ساوند الزلازل والتحولات المفاجئة في المشهد الطبيعي بكائنات حية خارقة على هيئة أفاعٍ تسكن معالم جغرافية معينة. ومن الأمثلة اللافتة «صخرة الروح» قرب فونتلروي في غرب سياتل، التي ربطتها الشعوب الأصلية المحلية تقليدياً بكيان خارق يعرف باسم *A’Yahos*، ووُصف بعبارات تطابق عن قرب الآثار الفيزيائية للزلازل أو الانهيارات الأرضية الكبيرة: اهتزاز عنيف مفاجئ، وتحول تضاريس مألوفة، وانطلاق قوى مدمرة من باطن الأرض. وتنتشر الأفعى ذات الرأسين المرتبطة باضطرابات الأرض في ثقافات شمال غرب المحيط الهادئ، وتظهر في سياقات احتفالية كثيرة، منها أقنعة *Sxwayxwey* لدى شعوب ساليش الساحلية. ويمكن فهم هذه الصورة بوصفها ترميزاً رمزياً للازدواج التكتوني: قوة جوفية وسطحية في آن واحد، تصل باطن الأرض الخفي بالمشهد المرئي فوقه، الشكل 16.3a.

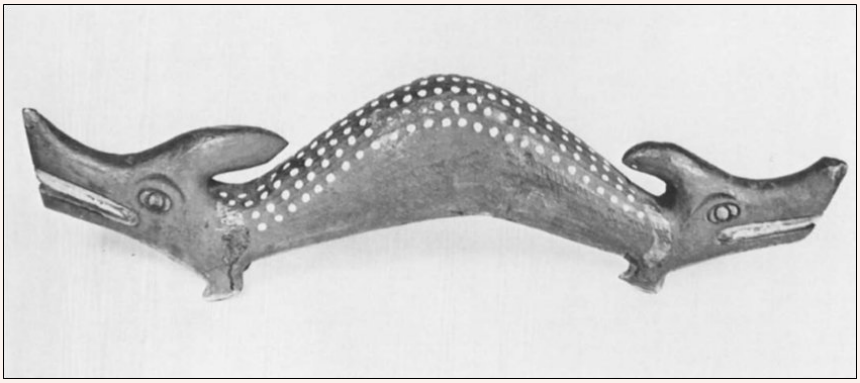
وتحظى تقاليد شمال غرب المحيط الهادئ باهتمام خاص لدى علماء الزلازل المعاصرين لأن السجل الجيولوجي للمنطقة مضبوط ضبطاً غير مألوف. فزلزال كاسكاديا سنة 1700 موثق في الطبقات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجيولوجية—غابات الأشباح وطبقات رمال التسونامي والمستنقعات الساحلية الهابطة—وفي السجلات التاريخية اليابانية لتسونامي يتيم. وقد أعاد هذا التقارب بين الأدلة الجيولوجية والتاريخية والشفهية للشعوب الأصلية على حدث كارثي واحد قدراً جديداً من المصداقية لفرضية أن هذه الروايات تحفظ ذاكرة حقيقية لحدث 1700، وربما لتصدعات أسبق في كاسكاديا (Ludwin **and** Smits, 2007)، مثيراً أسئلة عميقة عن قدرة التقليد الشفهي على أن يكون مستودعاً للمعلومات الجيولوجية عبر أزمنة تمتد قروناً أو آلاف السنين.



(a) قناع Sxwayxwey من البر الرئيس لكولومبيا البريطانية.



(b) تمثيل احتفالي لدى شعب كويلوت.

شكل 16.3: أدوات احتفالية من ساحل شمال غرب المحيط الهادئ تمثل أرواح الزلازل.

16.2.3 الأمريكيتان

تطورت أساطير الزلازل في أمريكا الوسطى وعلى ساحل المحيط الهادئ—وهي منطقة شديدة النشاط الزلزالي والبركاني على الحافة الشرقية لحزام النار في المحيط الهادئ—في توافق جغرافي وثيق مع المخاطر الجيولوجية التي خبرتها الشعوب المقيمة في تلك البيئات.

أمريكا الوسطى والمخطوطات المصورة

تصور المخطوطات المصورة المعروفة باسم المدونات في وسط المكسيك وشمالها الزلازل، وتسجل في بعض الحالات عدد الأحداث وتواريخها، مما يوحي بأن الأحداث الزلزالية اندمجت في النظم التاريخية والتقويمية والعرافية. وفي تقليد الأزتك، احتلت علامة اليوم *Ollin* («الحركة» أو «الزلزال») مكانة بارزة في التقويم الطقسي ذي الأيام الـ260، *tonalpohualli*، وسُمي العصر الكوني الحالي—الشمس الخامسة—*Nahui Ollin* («الحركات الأربع»)، وتنبأت النبوءة بانتهائه بزلزال كارثي. ويضع حجر شمس الأزتك (*Piedra del Sol*)، أحد أشهر آثار حضارة ما قبل كولومبوس، رمز *Ollin* في مركز تكوينه تماماً—إعلاناً بصرياً لمركزية الزلزال الكونية يتجاوز التفسير الشعبي البسيط بكثير، ويمثل بدلاً منه انخراطاً فلسفياً متطوراً مع تكرر الأحداث الزلزالية وعدم إمكان التنبؤ بها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16.2.4 تقاليد أخرى

مع أن الأقسام السابقة ركزت على تقاليد إقليمية موثقة جيداً، فإن أساطير الزلازل ظاهرة عالمية بحق، وتستحق تقاليد إضافية عدة نظرة موجزة.

ففي إسكندنافيا، كما ذُكر أعلاه، نسبت الأساطير الإسكندنافية الزلازل إلى تشنجات لوكي، الإله المخادع، الذي حُكم عليه أن يظل مقيداً تحت الأرض وأفعى تقطر السم على وجهه. وكان تلويه من الألم—الذي تخففه زوجته سيغين مؤقتاً بالتقاط السم في وعاء، ثم يتجدد بعنف خاص حين تنصرف لإفراغه—يجعل الأرض فوقه تهتز. وتتميز الأسطورة بإطارها الأخلاقي: فالزلزال هنا نتيجة عقاب إلهي وتجسيد خارجي للخطيئة والمعاناة.

وفي الهند، تصف *Shatapatha Brahmana* ونصوص مبكرة أخرى الأرض مستقرة فوق ظهر خنزير عظيم (*Varaha*)، وهو تجسد لفيشنو، بينما نسبت التقاليد الشعبية في أقاليم مختلفة الزلازل إلى حركات فيل عظيم أو سلحفاة العالم التي تتوازن الأرض على ظهرها. وهكذا شاركت تقاليد جنوب آسيا وجنوب شرقها في فكرة «الأرض التي يحملها حيوان» الواسعة الانتشار التي نوقشت أعلاه. وفي علم الكونيات الفلسفي الهندوسي، فُسرت الزلازل أيضاً من منظور *karma* والزمن الكوني: إذ ارتبطت أحداث زلزالية معينة بالانتقالات بين العصور الكونية (*yugas*)، مما منحها دلالة أخروية مماثلة لـ*Nahui Ollin* عند الأزتك.

وفي الشرق الأوسط، تسجل نصوص بلاد الرافدين القديمة من سومر وبابل أحداثاً زلزالية وتنسبها إلى غضب آلهة معينة، ولا سيما إله العاصفة. وقد ذهب بعض الباحثين إلى أن تدمير مدن قديمة على امتداد منظومة فالق البحر الميت التحويلي—وهي بنية نشطة زلزالياً تمتد عبر المشرق—ينعكس في روايات الكتاب المقدس عن الدمار المأمور به إلهياً، ومنها سقوط أريحا وتدمير سدوم وعمورة. ومع أن الروابط السببية بين نصوص محددة وأحداث جيولوجية محددة لا تزال موضع نقاش، فإن النمط الأوسع للنشاط الزلزالي في المنطقة وتأثيره المحتمل في التقاليد الدينية والأسطورية موضوع بحث مستمر متعدد التخصصات.

16.2.5 تركيب: الأسطورة ذاكرةً زلزالية

تكشف التقاليد المستعرضة في هذا الفصل نمطاً عالمياً ثابتاً: فالثقافات الإنسانية الواقعة في مناطق نشطة زلزالياً تطور أطراً أسطورية ترمز خبرة الزلازل وتفسرها وتمنحها دلالة أخلاقية واجتماعية. وتختلف هذه الأطر في صورها المحددة—حيوانات حارسة، وقوى أفعوانية، واختلال كوني، وعقاب إلهي—لكنها تشترك في منطق بنيوي واحد. فهي تسند فاعلية إلى الزلزال (إذ يسببه كائن)، وتدمج تلك الفاعلية في رواية رقابة أو حراسة (فالكائن مضبوط عادة لكنه يفلت أو يضرب أحياناً)، وكثيراً ما تربط الزلزال بعمليات أوسع للتجدد الاجتماعي أو الكوني.

ويبدو أن بعض هذه التقاليد يحمل محتوى تجريبياً حقيقياً إلى جانب أطره الرمزية. فقصص شمال غرب المحيط الهادئ التي تربط اهتزاز الأرض بالغمر الساحلي تطابق بدقة علامة التسونامي المتزامن مع أحداث الدفع الهائل في كاسكاديا. ويوحي التجمع الجغرافي للفن الصخري المتصل بالزلازل فوق فوالق نشطة في باخا كاليفورنيا وجنوب كاليفورنيا بأن مواضع الصور الأسطورية حددتها في بعض الحالات ظواهر زلزالية مرصودة. وقد يحتفظ التقليد الياباني للسلوك الشاذ لسمك السلور ببذرة من رصد السوابق الحيوانية للأحداث الزلزالية. ولا يقتضي شيء من هذا أن ننسب إلى هذه التقاليد فهماً علمياً بالمعنى الحديث؛ لكنه يوحي بأن الانتباه الدقيق إلى التقاليد الأسطورية والشفهية قد يقدم، في بعض الحالات، معلومات ذات صلة جيولوجية حقيقية.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهكذا فإن دراسة أساطير الزلازل ليست مجرد تمرين في التاريخ الثقافي. فهي تضيء حاجة الإنسان العميقة إلى فهم الكارثة، وتبين في الوقت نفسه أن الحد بين الرواية الأسطورية والرصد التجريبي كثيراً ما يكون أنفذ مما قد يبدو.

16.3 الدين

لا يختلف التفسير الديني للزلازل عن التفسير الأسطوري في النوع، بل في درجة التطور المؤسسي. فحيث تقدم الأساطير تفسيرات سردية متجذرة في التقليد الشفهي والصور الرمزية، يدمج الدين تلك التفسيرات في بنى رسمية من العقيدة والطقوس والنصوص المقدسة—مانحاً الزلزال مكاناً ثابتاً داخل نظام لاهوتي أكبر، ومولداً استجابات جماعية مقررة للكارثة الزلزالية. غير أن الحد بين المجالين، كما لاحظت مقدمة هذا الفصل، مائع تاريخياً لا ثابت: فكثيراً ما تستوعب النظم الدينية الروايات الأسطورية، فتحولها في أثناء ذلك من دون أن تمحوها تماماً. وتوضح التقاليد المستعرضة في هذا القسم تلك الديناميكية بجلاء خاص.

ويظهر نمط ثابت عبر التقاليد التي تُبحث أدناه—اليهودية–المسيحية واليونانية والهندوسية والبوذية والإسلامية والأمريكية الوسطى واليابانية. فالزلازل ليست قط أحداثاً جيولوجية محضة؛ بل هي دائماً رسائل أيضاً، سواء عن حضور إلهي أو غضب إلهي أو اختلال كوني أو قرب أخروي. ويختلف المحتوى اللاهوتي المحدد لهذه الرسالة اختلافاً هائلاً بين التقاليد، لكن المنعكس التفسيري نفسه—أي الإصرار على أن اهتزاز الأرض يعني شيئاً، وأنه موجه إلى البشر ويستدعي استجابة—يبدو عالمياً. وهذا المنعكس تحديداً هو ما سيخضعه التقليد الفلسفي، المستعرض في §16.4، لأول فحص نقدي متواصل.

16.3.1 الكتاب المقدس

يتجلى الله كثيراً من خلال الظواهر الطبيعية في التقليد اليهودي–المسيحي. ولذلك لا تُفسر الزلازل والعواصف والنار والفيضان بوصفها وقائع جيولوجية أو جوية فحسب، بل تعبيرات مرئية عن الحضور الإلهي والقدرة والإرادة. ويتصل هذا الإطار التفسيري بالتقاليد الأسطورية المستعرضة أعلاه، لكنه يتميز منها: فحيث تسند الأسطورة الفعل الزلزالي إلى مخلوقات جوفية أو قوى كونية، يدمج الدين الكتابي الزلزال في رواية لاهوتية عن العهد والدينونة والخلاص—رواية لا ينفصل فيها ارتجاف الأرض عن الحالة الأخلاقية للبشر. ويعمل الزلزال الكتابي، تبعاً للسياق، تجلياً إلهياً، أو أداة تدخل إعجازي، أو ذاكرة مرمزة لكارثة جيولوجية حقيقية استوعبتها الرواية المقدسة.

التجلي والحضور الإلهي

يقع مثال لافت للزلزال بوصفه تجلياً إلهياً[3] أثناء الوحي عند جبل سيناء:

[3] من اليونانية *theophaneia* (*θεοφανεια*)، المركبة من *theos* (*θεος*)، أي «إله»، و*phainein* (*φαινειν*)، أي «يظهر» أو «يجعل ظاهراً». ويدل المصطلح على تجل مباشر محسوس للإله داخل نظام الخليقة—ويختلف عن *epiphaneia*، *epiphany* (*επιφανεια*)، الذي يدل بصورة أوسع على ظهور إلهي أو حلول، وعن *apokalýpsis*، *apocalypse* (*αποκαλυψις*)، الذي يعني كشفاً أو إظهاراً لمعرفة خفية. وينتمي التجلي عند سيناء في التقليد العبري إلى جنس أدبي محدد المعالم، تشير فيه الظواهر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

> كان جبل سيناء كله مغطى بالدخان لأن الرب نزل عليه في صورة نار. وتصاعد الدخان إلى السماء كدخان أتون، واهتز الجبل كله بعنف. (الخروج 19:18)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



شكل 16.4: *إسرائيل عند جبل سيناء* (1703) ليان لويكن. يصور النقش التجلي الزلزالي انقلاباً بيئياً كاملاً، حيث يوحي رسم القمم مسنناً مضطرباً بـ«اهتزاز الأرض العنيف» استجابة للحضور الإلهي.

لا يقف الزلزال هنا منفرداً، بل يؤلف جزءاً من مركب أكبر من الظواهر البركانية والجوية—النار والدخان والظلمة—يتجلى الحضور الإلهي من خلالها (الشكل 16.4). ويظهر اقتران مشابه للعلامات الزلزالية والجوية في *سفر القضاة*:

> ارتجت الأرض، وقطرت السماوات، وأسالت السحب ماء؛ وذابت الجبال من أمام الرب.[4]
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments

يعمل اهتزاز الأرض في المقطعين اعترافاً كونياً بالحلول الإلهي—إذ يستجيب المشهد الطبيعي نفسه لحضور الله.

البركانية والزلزالية والجوية مجتمعة إلى اقتراب *YHWH* (الاسم الرباعي، المنقول صوتياً *yod-hē-wāw-hē*)، إله إسرائيل. وتظل المعالجة الأكاديمية الكلاسيكية في Jeremias, 1965.

[4] القضاة 5:4. وتقول الترجمة الفرنسية، وهي بليغة بالقدر نفسه: *"La terre trembla, les cieux chancelèrent, les nuées déversèrent de l'eau, les montagnes s'affaissèrent devant le Seigneur"* (Louis Segond, 1910). ويحمل الفعل العبري المترجم «ذابت» (*nāzalû*) معنى الجريان أو الذوبان، موحياً بتميع المشهد الطبيعي أو فقدانه الاستقرار أمام الاقتراب الإلهي—وهي تفصيلة قد تكون ذات أهمية زلزالية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزلزال تدخلاً إعجازياً

يضم العهد الجديد حوادث عدة ترافق فيها الزلازل لحظات ذات دلالة دينية حاسمة. فعند وفاة المسيح، يسجل متى أن «الأرض تزلزلت والصخور تشققت والقبور انفتحت» (متى 27:51–53)—وهو مقطع غائب بوضوح عن الأناجيل الأخرى، ويعمل فيه الحدث الزلزالي تصديقاً كونياً للصلب. وبالمثل، تسجل رواية القيامة في متى 28:2 أنه «حدث زلزال عظيم، لأن ملاك الرب نزل من السماء».

وتقع حادثة أكثر حميمية للتدخل الزلزالي الإعجازي في أعمال الرسل 16:19–40، حين يُسجن بولس وسيلا في فيلبي، ويواصلان الصلاة وترتيل الترانيم رغم قيودهما (الشكل 16.5). ويُكافأ ثباتهما بصورة مثيرة:

> فجأة وقع زلزال عظيم حتى تزعزعت أسس السجن؛ وانفتحت الأبواب كلها في الحال وانفكت قيود الجميع.
> (أعمال الرسل 16:26)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



شكل 16.5: رجم الرسول فيلبس في هيرابوليس، فريجيا (يان لويكن، 1685).

لا يعمل الزلزال هنا تجلياً ولا دينونة، بل تحريراً—تعبيراً زلزالياً عن تضامن إلهي مع المؤمنين المضطهدين. ويتسق النمط مع اللاهوت الكتابي الأوسع، حيث لا تكون الكارثة الطبيعية عشوائية قط، بل ذات غرض دائماً: فهي تخدم أو تعاقب أو تنقذ أو تكشف.

أحداث جيولوجية في الرواية الكتابية

يبدو أن بعض الروايات الكتابية يقابل أحداثاً جيولوجية يمكن تحديدها، مما يثير سؤال مقدار ما تحتفظ به الذاكرة الدينية القديمة من آثار كوارث زلزالية حقيقية. ومن أكثر الأمثلة نقاشاً عبور نهر الأردن، ثم تدمير أسوار أريحا. ويقع الحدثان على امتداد فالق وادي الأردن الانزلاقي الجانبي الكبير، وهو من أنشط البنى زلزالياً في المشرق. وربما أدى زلزال قوي إلى انهيار ضفاف النهر الرسوبية شبه الرأسية—المؤلفة من مارل

طري وطين غريني شديد القابلية لفقد الاستقرار الزلزالي—فحبس الجريان مؤقتاً أعلى النهر، وأتاح لمجرى النهر أسفل السد أن يفرغ بما يكفي للعبور. وما يمنح هذه الفرضية وزناً غير مألوف هو الدقة الجغرافية للرواية الكتابية نفسها: فيشوع 3:16 يسمي تحديداً بلدة *آدم* (المطابقة لدامية الحديثة) موضعاً «تراكمت» عنده المياه—وهو تحديداً الموقع الذي وثقت فيه تاريخياً انهيارات ضفاف أحدثتها الزلازل في مناسبات متعددة، منها أعوام 1267 و1546 و1906، وآخرها سنة 1927، حين حبس زلزال بقوة 6.2 النهر أكثر من إحدى وعشرين ساعة. ويمنح تكرر هذه الظاهرة في الموضع الجغرافي نفسه تفسير رواية يشوع زلزالياً قدراً كبيراً من المعقولية. وربما أسهمت أضرار زلزالية أخرى بعد ذلك في انهيار أسوار أريحا (الشكل 16.6). وقد صُنف تدمير أريحا بالفعل حدثاً زلزالياً في سجل زلازل من القرن الخامس عشر، وكشفت الحفريات الأثرية في تل السلطان طبقات دمار تتسق مع أضرار الزلازل (Nur **and** Burgess, 2008).



شكل 16.6: معركة أريحا (نحو 1560) لفيرجيل سوليس (مجموعة كوزاك).

ورُبط تدمير سدوم وعمورة على نحو مماثل بزلزال كبير على منظومة الفالق نفسها، ربما رافقته انطلاقات انفجارية للغاز الطبيعي والقار—وكلاهما موثق بكثرة على امتداد بنى فالق البحر الميت التحويلي—إضافة إلى نشاط بركاني في المنطقة. وقد سبقت الإشارة إلى هذه الصلة في القسم السابق عن تقاليد الشرق الأوسط الأسطورية (§16.2.4).

وتربط فرضية أكثر تخميناً لكنها واسعة النقاش رواية الخروج بالثوران الكارثي لسانتوريني (ثيرا)، وهو من أقوى الأحداث البركانية في العالم القديم، ويؤرخ بنحو القرن السابع عشر أو السادس عشر ق.م. وتقترح الفرضية، التي طورها بصور مختلفة باحثون منهم Nur **and** Burgess, 2008، أن النشاط الزلزالي والبركاني الشديد المرتبط بهذا الثوران ربما أطلق سلسلة من الاضطرابات البيئية عبر شرق المتوسط شبيهة بضربات الكتاب المقدس—منها الظلمة الطويلة المرتبطة بسحب الرماد البركاني—وأن اضطرابات زلزالية ربما أسهمت في التغير المؤقت لمناسيب المياه الموصوف في رواية عبور الخروج. وفي معالجة أكثر شعبية للفرضية نفسها، يشير Jacobovici **and** Cameron, 2006 إلى نقش هيروغليفي في متحف الإسماعيلية، ويذهب إلى أن «البحر الأحمر» في الرواية الكتابية قد يدل على حوض ضحل من المياه العذبة، بحيرة البلاح، التي جفت بعد إنشاء قناة السويس في القرن التاسع عشر، وربما كان منسوب مياهها عرضة لتغيرات سريعة تحدثها الزلازل.

وسواء ثبتت صحة هذه التفسيرات الجيولوجية في النهاية أم لم تثبت، فهي توضح ظاهرة أوسع وراسخة:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أن المجتمعات المقيمة في بيئات نشطة زلزالياً ترمز خبرتها بالأحداث الكارثية داخل روايات تاريخية ولاهوتية وأسطورية في آن واحد. والحدود بين هذه الفئات، كما لاحظت مقدمة الفصل، قلما تكون ثابتة. وبهذا المعنى يشارك الكتاب المقدس الديناميكية الأساسية نفسها التي حُددت عبر التقاليد الأسطورية المستعرضة أعلاه—أي دافع الإنسان إلى جعل عدم قابلية الأرض المرعبة للتنبؤ ذات معنى داخل إطار سردي أوسع.

16.3.2 اليونان

احتل تفسير الزلازل عند اليونان القدماء موقعاً أسطورياً ودينياً و—كما سيبين القسم التالي—فلسفياً ناشئاً في آن واحد. وكانت الحدود بين هذه المجالات مائعة على نحو خاص في العالم اليوناني: فقد يُدعى الإله نفسه في سياق شعائري، وتُروى قصته في شعر أسطوري، ويخضع للنقد العقلاني خلال جيل واحد من المفكرين. ولذلك يستحيل فصل الاستجابة الدينية اليونانية للزلازل تماماً عن التقاليد الأسطورية المستعرضة أعلاه؛ بل ينبغي فهمهما طبقتين متعاقبتين من تقليد تفسيري متصل.

بوسيدون إينوسيخثون: هازّ الأرض

لم تكن نسبة الزلازل إلى بوسيدون مجرد حيلة أسطورية، بل مسألة عبادة دينية حية. فقد حمل بوسيدون، من بين ألقابه الكثيرة، لقب *Enosichthon* (*ενοσιχθων*)—«هازّ الأرض»—ولقب *Ennosigaios* (*εννοσιγαιος*)، أي «من يهز الأرض». وتظهر هذه الألقاب بالفعل عند هوميروس وهسيود، شاهدة على قدم الارتباط. ويُوصف انتقال بوسيدون عبر المشهد في *الإلياذة* بعبارات لا تترك التباساً في طبيعته الزلزالية:

> خطا، فارتجت الغابات الشاهقة والجبال تحت قدمي بوسيدون الخالدتين وهو يمضي. (*الإلياذة*، XIII.18)
>
> Homer, 1924 The Iliad

ومع أن بوسيدون يُذكر في النظام الأولمبي اللاحق أساساً بوصفه إله البحر، توحي طبقات أقدم من التقليد بدور أعرق وأوسع. فقبل أن تصبح هويته بحرية في المقام الأول، يبدو أنه ارتبط بالأرض ذاتها، وبالعالم المعدني تحت القشرة، وبالقوى الخفية القادرة على اضطراب سطحي عنيف. وفي هذا التصور الأقدم، كانت الزلازل والعواصف معاً تجليات لغضبه. ويعكس تضيق مجاله تدريجياً إلى البحر، مع احتفاظ الزلزال باسمه، الطابع الطبقي للتقليد الديني اليوناني: فقد وُضعت بنى لاهوتية جديدة فوق بنى أقدم من دون أن تزيحها تماماً.

ولذلك لم تكن الزلازل في اليونان تُفسر بالإشارة إلى بوسيدون فحسب، بل كانت تُقابل بممارسة دينية. فقد قُدمت القرابين لاسترضاء الإله بعد الأحداث الزلزالية الكبرى، وكثيراً ما أُقيمت معابده في المناطق الساحلية والنشطة جيولوجياً. وهكذا تأسس الارتباط بين عدم الاستقرار الزلزالي والحضور الإلهي في العبادة، ولم يُروَ في الأسطورة وحدها.

إنسيلادوس وصراع العمالقة

تعايش تقليد بوسيدون، الذي تسبب فيه حركة الإله الفاعلة اهتزاز الأرض، في الفكر الديني اليوناني مع رواية مختلفة بنيوياً ومتجذرة في أسطورة صراع العمالقة—الحرب البدئية الكبرى بين الآلهة الأولمبيين والعمالقة المولودين من الأرض. وفي هذا التقليد، لا تسبب مرور إله الزلازل، بل صراعات عدو كوني مهزوم ومسجون.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كان إنسيلادوس (*Εγκελαδος*)، أقوى العمالقة والخصم التقليدي لأثينا في صراع العمالقة، قد سقط برمح الإلهة ودُفن تحت جزيرة صقلية—أو تحت جبل إتنا نفسه في تقليد فيرجيل وستاتيوس الأكثر تحديداً. وكان يُعتقد أن نيران إتنا البركانية أنفاس إنسيلادوس، وأن هزاته نتيجة تقلبه على جانبه الجريح تحت الجبل. ويقدم فيرجيل أشهر تعبير لاتيني عن الأسطورة:

Fama est Enceladum semustum fulmine corpus
urgeri mole hac, ingentemque insuper Aetnam
impositam ruptis flammam exspirare caminis,
et fessum quotiens mutet latus, intremere omnem
murmure Trinacriam et caelum subtexere fumo.

تروي الحكاية أن إنسيلادوس، وقد ندّبت الصواعق جسده،
يرقد سجيناً تحت هذه الكتلة كلها، وفوقه
تنفث إتنا العملاقة النار من أتونها المتفجر؛
وكلما قلب جانبه من الإعياء،
ارتجت صقلية كلها وأنّت، واحتجب الدخان به وجه السماء.

Vergilius Maro, 2008 The Aeneid

ويختلف المنطق اللاهوتي لتقليد إنسيلادوس عن منطق بوسيدون في وجه حاسم. فبوسيدون إله سيد تولد حركته أو غضبه آثاراً زلزالية بوصفها نتيجة عرضية لقدرته، أما إنسيلادوس فسجين—ممثل لقوى الأرض البدئية (المولود من غايا ودم أورانوس) التي هزمها النظام الأولمبي وقمعها. ولا يدل استمرار وجوده تحت الأرض على قدرة إلهية، بل على نصر إلهي: فالزلزال آخر تشنج لنظام سابق للكون هُزم، وبرهان على أن الأولمبيين أخضعوا العنف الكامن في الأرض ذاتها من دون أن يطفئوه كلياً. وليس لهذا الفهم للزلزال بوصفه استمرار قوة بدئية مقموعة تحت نظام كوني مفروض نظير في تقليد بوسيدون، وهو يستبق، في صورة أسطورية، المنطق البنيوي لروايات هزيمة الأفاعي التي يبحثها §16.3.2.



(a) إنسيلادوس مدفون في البحر يحمل صقلية وجبل إتنا على بطنه



(b) إنسيلادوس من البرونز المذهب، لغاسبار ميرسي، فرساي

شكل 16.7: أسطورة إنسيلادوس

لا نظير لاستمرار إنسيلادوس ثقافياً بين الشخصيات الزلزالية المستعرضة في هذا الفصل. فلم يبق اسمه مجرد إحالة عالمة أو استعارة شعرية؛ بل دخل اللغة اليونانية اسماً عاماً عادياً للزلزال—*egkelados*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

)*Εγκελαδος*(—ولا يزال كذلك في اليونانية الحديثة إلى يومنا هذا.[5] وليس هذا بقاءً على طريقة اسم مكان أو كوكبة؛ بل هو تحول الأسطورة إلى لغة. فكل متحدث يوناني يبلغ عن زلزال يستدعي، سواء علم أم لم يعلم، عدواً كونياً مهزوماً مسجوناً تحت صقلية—تفسيراً زلزالياً منغرساً في الثقافة إلى حد أنه عمر أكثر من اللاهوت والعبادة والإمبراطورية والحضارة التي أنتجته، وبقي مفردة حية أكثر من ألفين وخمسمئة عام. وتجد الملاحظة المنسوبة إلى ديراك في استهلال §16.2—أن الفهم الحديث للعمليات الطبيعية جعل التفسير الأسطوري قديماً بالياً—أبلغ مثال مضاد لها لا في حجة لاهوتية، بل في معجم: فكلمة الزلزال في اليونانية الحديثة أسطورة.

وظلت تلك الشخصية قوية خارج العالم القديم في سياقات أخرى أيضاً. ففي فرساي، تضمن توظيف لويس الرابع عشر المنهجي للآلهة الأولمبيين شعارات للسيادة الملكية نافورة ضخمة لإنسيلادوس—*Bosquet de l'Encélade*، صُممت نحو سنة 1675 ونفذها غاسبار ميرسي من كامبراي بالبرونز المذهب (الشكل 16.7b). وتصور النافورة العملاق نصف مدفون تحت صخور صقلية، يندفع الماء من فمه بدلاً من النار البركانية—تحويلاً بصرياً لصورة فيرجيل إلى مفردات الحديقة الرسمية الهيدروليكية. ولم يكن الاختيار عارضاً: فإخضاع إنسيلادوس أمام ملك الشمس يعكس، بلغة الباروك، المنطق الكوني نفسه الذي دفنه تحت إتنا.

الجغرافيا المقدسة والمشهد الزلزالي

من السمات المتكررة في الممارسة الدينية اليونانية تعمد إقامة المعابد في مواضع تُظهر فيها الأرض سلوكاً غير مألوف أو غامضاً: ينابيع حارة، وانبعاثات غازية، وشقوق أرضية، ومناطق نشاط زلزالي مستمر. ولم تُفهم هذه الأماكن على أنها مثيرة جيولوجياً فحسب، بل بوصفها *enargeis*—مواضع كان الإله فيها قريباً من سطح العالم على نحو غير مألوف.

وأشهر الأمثلة معبد أبولو في دلفي، الشكل 16.8. وقد ثبت الآن أن وحي دلفي كان قائماً مباشرة فوق فالق زلزالي نشط، وأن الإلهام النبوي لـ*Pythia* ربما ساعده مادياً استنشاق أبخرة هيدروكربونية—أساساً الإيثيلين—صاعدة عبر شقوق في الحجر الجيري الكامن (Broad, 2006; De Boer **and** Sanders, 2005). وهكذا كان الموقع المقدس مديناً بجزء من سلطته الدينية لظروف جيولوجية فسرها اليونانيون علاماتٍ على قرب الإله. وكان اختيار أبولو لهذه الأرض المتشققة الباعثة للأبخرة مقراً لنبوءته متسقاً تماماً داخل الخيال الديني اليوناني: فقد تكلم الإله من خلال عدم استقرار الأرض نفسها. وتجدر الإشارة إلى أن هذه القراءة الجيولوجية لسلطة دلفي—أي تفسير ما خبره اليونانيون إلهياً تفسيراً طبيعياً—تستبق المشروع الفلسفي لفصل السببية الطبيعية عن الخارقة، الذي يتناوله §16.4.

ويمتد نمط المواقع المقدسة المقامة فوق بنى زلزالية إلى ما وراء دلفي، وقد حُدد في معابد كبرى أخرى عدة في أناضول بحر إيجه والعالم اليوناني (Piccardi, 2007). ومن شبه المؤكد أن التقاء الدلالة الدينية والنشاط الجيولوجي في هذه المواقع لم يكن مصادفة: فالمجتمعات التي خبرت اضطراباً زلزالياً متكرراً في موقع معين كانت ستفسر ذلك الاضطراب بطبيعة الحال دليلاً على حضور إلهي، ثم تضفي بمرور الزمن صفة رسمية على ذلك التفسير ببناء معبد. وبهذا المعنى، كتبت الأرض نفسها جزءاً من الجغرافيا المقدسة للعالم اليوناني.

[5] يربط الاشتقاق الاسم بالفعل *Εγκελεύω* *enkeleuô*)، «يحث» أو «يدعو إلى الهجوم»—وهو اشتقاق يحفظ طابع العملاق الحربي حتى بعد انتقال الاسم من الأسطورة إلى الكلام العام.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 16.8: ثولوس دلفي، معبد دائري بُني بين عامي 380 و360 ق.م داخل حرم أثينا بروناية في دلفي، اليونان.

زلزال سنة 60 م وتحول الرواية المقدسة

يقدم زلزال سنة 60 م واحداً من أكثر الأمثلة دلالة على كيفية استيعاب الرواية الدينية حدثاً جيولوجياً حقيقياً ثم تحويله. فقد أثرت الأزمة الزلزالية في تلك الحقبة في قوس واسع من غرب الأناضول، ويمكن تتبع آثارها في السجل المادي وفي التقاليد الدينية لموقعين كبيرين: هيرابوليس وكولوسي. وفي الحالتين، رُوي لاحقاً ما يوحي السجل الجيولوجي بأنه تمزق أرضي كارثي بوصفه تدخلاً إلهياً إعجازياً (Piccardi, 2007). وهكذا يوضح الموقعان الديناميكية الكامنة نفسها: حدث جيولوجي تستوعبه الذاكرة الدينية، فيتحول من دون أن يُمحى.

في **هيرابوليس**، ثمة أدلة أثرية وجيولوجية قوية على تعمد إقامة الحرم المقدس الرئيس مباشرة فوق أثر فالق نشط، يبدو أنه يمتد من معبد أبولو إلى الينبوع الحار الكبير. وكان الموقع، قبل وصول المستوطنين اليونانيين بزمن طويل، يُعد موضع اتصال بالعالم السفلي—ويرجح أن السبب هو الانبعاثات الغازية الموضعية والنشاط الحراري المائي المرتبطان بنطاق الفالق. وقد منحت هذه القوى الجوفية، التي فسرها الخيال الديني اليوناني أنفاساً لآلهة العالم السفلي، الموقع طابعه المقدس قبل زمن طويل من اكتسابه ارتباطاته الهلنستية ثم المسيحية.

ويُقال إن الرسول فيلبس وصل إلى هيرابوليس نحو سنة 70–80 م. ويؤطر التقليد وصوله بظاهرتين خارقتين: ظهور تنين يرافقه زلزال عنيف وبرق، وانفتاح هاوية عظيمة فجأة في وسط المدينة، ابتلعت سبعة آلاف رجل مع الإلهة الأفعى إكيدنا. وثمة الآن أدلة مقنعة على أن هذه الرواية تحفظ ذكرى زلزال سنة 60 م، الذي يبدو أنه فتح تمزقاً سطحياً طويلاً على امتداد مسار الطريق الرئيس عبر المدينة—وهو تحديداً «هاوية» التقليد. وتشارك صورة الأفعى هنا في القواعد الرمزية الأوسع التي تُناقش أدناه (§16.3.2).

وفي **كولوسي**، يمكن تمييز عملية موازية للترميز الديني. ويسجل التقليد أن الوثنيين حاولوا تدمير الحرم المسيحي المحلي بتحويل مجرى ماء لإغراقه. وحين استدعاه الكاهن أرخيبوس، ظهر رئيس الملائكة ميخائيل وضرب الصخر بعصاه، ففتح شقاً في الأرض صرف المياه بعيداً عن الحرم، الشكل 16.9. وأخذت المستوطنة الجديدة التي نشأت حول هذا الشق اسمها—خوناي (*χωναι*، «قمع»)—مباشرة من المعلم الجيولوجي. وتشير الأدلة بقوة إلى أن هذا الشق الإعجازي كان في الحقيقة تمزق فالق مرتبطاً بزلزال سنة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 م، وأن إعادة تنظيم التصريف الموصوفة في التقليد تعكس تغيراً حقيقياً في المشهد أحدثه الزلزال (Piccardi, 2007). ومع ذلك اكتمل التحول اللاهوتي: فما أنتجته الجيولوجيا نسبته الرواية الدينية إلى تدخل ملائكي.



شكل 16.9: أيقونة روسية من القرن الثامن عشر تصور معجزة رئيس الملائكة ميخائيل في خوناي.

الأفاعي والتنانين واللغة الرمزية للقوة الزلزالية

ليس ظهور الأفاعي والتنانين في تقليدي هيرابوليس وكولوسي عارضاً. فكما نوقش في §16.2.4 و§16.2.3، تؤلف صورة الأفعى واحدة من أوسع الوسائط الرمزية انتشاراً واستمراراً للقوى الزلزالية والجوفية عبر الثقافات. وقد تطور هذا الارتباط بثراء خاص في التقليد الديني اليوناني. فبايثون الذي قتله أبولو في دلفي، وإكيدنا في هيرابوليس، والتنين الذي سحقه رئيس الملائكة ميخائيل في كولوسي، تشارك جميعاً في قواعد رمزية واحدة: قوة أفعوانية جوفية عظيمة ترتبط بعدم الاستقرار الجيولوجي والنظم الدينية الأقدم، تتغلب عليها سلطة إلهية أو رسولية جديدة.

ويوحي هذا النمط—أفعى يهزمها إله أو قديس فوق موقع نشط زلزالياً—بأن تنصير الأناضول لم يزح ببساطة التفسير الديني اليوناني الأقدم للزلازل، بل استوعبه وأعاد ترجمته. فتنين هيرابوليس وبايثون دلفي ينتميان إلى الأسرة الرمزية نفسها؛ ولا يكمن الفرق إلا في هوية المنتصر فوق الهاوية، أهو أبولو أم الرسول فيلبس. وفي الحالتين، ترمز الرواية الدينية مواجهة مجتمع لأرض غير مستقرة وخطيرة، وتحل تلك المواجهة بتأكيد قدرة الإله على القوة الجوفية. وستظهر القواعد الرمزية نفسها من جديد في صورة شيشا الهندوسية

(§16.3.3) والناغا البوذية موكالیندا (§16.3.3)، مؤكدة الانتشار العابر للثقافات للأفعى بوصفها استعارة زلزالية.

16.3.3 الهند

تقع شبه القارة الهندية عند التقاء الصفيحتين التكتونيتين الهندية والأوراسية، وهي من أكثر مناطق العالم نشاطاً زلزالياً. لذلك ليس مستغرباً أن يطور كلا التقليدين الدينيين الكبيرين اللذين نشآ فيها—الهندوسية والبوذية—أطراً لاهوتية متطورة لتفسير ارتجاف الأرض، يمكن مقارنتها بأطر التقاليد الكتابية واليونانية المستعرضة أعلاه، مع بقائها متجذرة بخصوصية في مقدماتها الكونية.

الهندوسية

يقدم التقليد الكوني الهندوسي واحدة من أكثر الروايات تطوراً عن العلاقة بين الظواهر الزلزالية والنظام الإلهي. فكما ذُكر في القسم السابق عن الأساطير (§16.2.4)، تصورت تقاليد عدة الأرض مستقرة فوق فيل عظيم، يقف بدوره فوق سلحفاة العالم، وتسبب حركاتها الزلازل. وتقدم *Shatapatha Brahmana* رواية أكثر تطوراً لاهوتياً، فتصف الأرض محمولة على *Varaha*، تجسد فيشنو في هيئة خنزير بري، الذي أنقذها من المياه البدئية في مطلع الزمن الكوني. وفي هذا الإطار، لا يكون عدم الاستقرار الزلزالي ظاهرة فيزيائية فحسب، بل لاهوتية أيضاً: فهو يعكس الجهد المستمر للقدرة الإلهية في حفظ النظام أمام تهديد الانحلال الكوني الدائم.

ويتجلى هذا البعد الأخروي على أكمل وجه في عقيدة *yugas*، العصور الكونية الأربعة المتعاقبة الموصوفة في *Puranas* و*Mahabharata*. ويتميز كل عصر بتدهور متدرج للنظام الأخلاقي والمادي، ويقترن الانتقال بين العصور بأحداث طبيعية كارثية—منها الفيضانات والحرائق والزلازل. ويُفهم العصر الحالي، *Kali Yuga*، بوصفه حقبة أقصى اضطراب، تكون فيها الاضطرابات الزلزالية من علامات اقتراب الانحلال الكوني (*pralaya*). وثمة تشابه بنيوي لافت مع *Nahui Ollin* عند الأزتك ونبوءته بزلزال نهائي، المشار إليه في §16.2.3 والمطور أكثر في §16.3.5: فعبر تقاليد متباعدة جداً، يظهر الزلزال أداةً للخاتمة الأخروية.

وصورة الأفعى المركزية في علم الكونيات الزلزالي الهندوسي هي *Shesha* (وتسمى أيضاً *Ananta*، أي اللانهائي)، الناغا الكونية العظيمة التي يستلقي فيشنو على لفاتها في الفاصل بين دورات العالم. ويُفهم أن شيشا تحمل الأرض ذاتها، وأن حركتها—أو تثاؤبها في بعض الروايات—هي التي تجعل الأرض ترتج. وهكذا ترمز صورة أسطورية واحدة إلى الشكل الأفعواني الذي ظهر في أنحاء هذا الفصل استعارةً زلزالية عابرة للثقافات (انظر §16.3.2)، وإلى المنطق الكوني لأرض معلقة دائماً فوق الانحلال. ويبين الشكل 16.10A فيشنو مستلقياً على الأفعى الكونية شيشا، في معبد داشافاتارا، ديوغاره، ماديا براديش، الهند، نحو سنة 500 م (العصر الغوبتي). وتُفهم لفات شيشا تحت الأرض على أنها تسبب الزلازل حين تتحرك الأفعى. نحت حجري، في موضعه.

ويمكن، داخل هذا الإطار، تفسير الأحداث الزلزالية الفردية بمنظور *karma*—القانون الأخلاقي للسبب والنتيجة—بوصفها عواقب لخطيئة بشرية جماعية. وقد استمر هذا المنعكس التفسيري القديم الأصل بحيوية لافتة إلى العصر الحديث. وحين ضرب زلزال كارثي منطقة بيهار شمال شرقي الهند في 15 يناير 1934، فقتل نحو 20,000 شخص، أعلن المهاتما غاندي علناً أنه عقاب إلهي على خطيئة النبذ الطبقي—أي الإقصاء المنهجي للمجتمعات الدنيا طبقياً من المشاركة الاجتماعية والدينية الكاملة. وأثار قوله رداً فورياً شهيراً من

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

رابندرانات طاغور[6]، الذي رأى أن نسبة كارثة طبيعية إلى خطيئة اجتماعية عمل غير مسؤول أخلاقياً ورجعي فكرياً، ولا يليق بقائد في منزلة غاندي (Paranjape, 2011). وللتبادل دلالة تاريخية تتجاوز كثيراً سياقه المباشر: فهو يعيد، بصيغة هندية حديثة، المواجهة نفسها بين التفسيرين اللاهوتي والعقلاني لكارثة الزلزال، التي عصفت بالفكر الأوروبي قبل نحو قرنين عقب زلزال لشبونة سنة 1755 (§16.5.2).[7]

ويمثل هذا التبادل رداً مباشراً على الرفض الواثق الذي عبر عنه ديراك في الصفحة 575 في استهلال §16.2،[8] إذ افترض أن الفهم الحديث للعمليات الطبيعية جعل التفسير اللاهوتي للكارثة الطبيعية قديماً بالياً. ويوحي زلزال بيهار سنة 1934 بخلاف ذلك.

البوذية

يقدم التقليد البوذي رواية متميزة لكنها مكملة عن الزلازل، لا تتجذر في علم الكونيات الأخروي بقدر ما تتجذر في سيرة بوذا نفسه. ويسجل *Pali Canon*، أقدم مجموعة باقية من النصوص البوذية المقدسة، أن الزلازل رافقت كل لحظة من اللحظات العظيمة الثماني في حياة بوذا الأرضية: الحبل به، وميلاده، وتخليه عن الحياة الدنيوية، وبلوغه التنوير تحت شجرة بودي، وموعظته الأولى في سارناث، وإعلانه قرب وفاته، وانتقاله إلى *parinirvana* النهائية، وتوزيع رفاته. وفي هذا الإطار، لا يكون الزلزال أداة عقاب إلهي، بل تصديقاً كونياً—إذ تشهد الأرض نفسها أحداثاً ذات أهمية روحية عليا، كما اهتزت الأرض عند الصلب والقيامة في إنجيل متى (§16.3.1).

ومن أشد تجسيدات هذا اللاهوت الزلزالي إثارة بصرياً حادثة *Mucalinda*، ملك الناغا الذي يرتفع من تحت الأرض ليقي بوذا المتأمل العاصفة بقلنسوته المبسوطة. وتجمع الصورة في تكوين واحد موضوعات الفصل المركزية: الأفعى قوةً جوفية، والأرض مقراً لقوة تحويلية، والعلاقة بين تلك القوة وأسمى بلوغ روحي. ويبين الشكل 16.10ʙ بوذا تحميه الناغا الملك موكالیندا، منطقة أنكور، كمبوديا، القرن الثاني عشر م (خميري، أسلوب بايون المتأخر). وترتفع الأفعى من تحت الأرض لتحمي بوذا المتأمل، مجسدة التصور البوذي للقوة الجوفية بوصفها خطرة وحامية في آن، إذا فُهمت فهماً صحيحاً.

يسرد *Anguttara Nikaya* أسباب الزلازل بطريقة منهجية لافتة، فيميز بين الأحداث الزلزالية التي تسببها الرياح والمياه بفعلها في الأرض، وتلك التي تسببها القدرة الروحية للنساك العظماء، وتلك التي ترافق أحداث حياة بوذا. ولهذا التصنيف الثلاثي أهمية كبيرة: فهو محاولة مبكرة للتمييز بين الأسباب الطبيعية والبشرية والمتعالية للظواهر الزلزالية، ويستبق في بنيته—وإن لم يكن في مضمونه—المسعى الفلسفي اللاحق إلى فصل السببية الطبيعية عن الخارقة، الذي يُبحث في §16.4.

وحين انتشرت البوذية من شبه القارة الهندية إلى آسيا الوسطى والصين والتبت واليابان، استوعبت الأطر الكونية للثقافات المستقبلة لاهوتها الزلزالي وعدلته. وفي اليابان، كما ذُكر في §16.2.1، يبدو أن الأفكار البوذية عن سمكة عظيمة تحمل الأرض أسهمت في تطور تقليد *Namazu*، مما يوضح نفاذ الحدود الدينية

[6] رابندرانات طاغور (1861–1941)، شاعر وفيلسوف وملحن بنغالي، نال جائزة نوبل في الأدب سنة 1913—أول كاتب غير أوروبي ينالها—وهو مؤلف النشيدين الوطنيين للهند وبنغلاديش.

[7] أثار زلزال لشبونة سنة 1755 (§16.5.2) نقاشاً مطابقاً في بنيته في عصر التنوير الأوروبي، فشغل فولتير وروسو دورين مماثلين لدوري طاغور وغاندي على التوالي، وكانت عقيدة *التفاؤل* عند لايبنتس—أن هذا «أفضل العوالم الممكنة كلها»—هي الموقف اللاهوتي الواقع تحت الهجوم. ويُناقش هذا التشابه بين الحادثتين، اللتين يفصل بينهما قرنان وقارتان مع تطابق منطقهما الكامن، بمزيد من التفصيل في §16.5.2.

[8] «أما اليوم، وقد صرنا نفهم عمليات طبيعية كثيرة، فلم نعد في حاجة إلى مثل هذه الحلول» (Dirac, 1963). ويوحي زلزال بيهار سنة 1934 بأن دافع تفسير الكارثة الطبيعية تفسيراً لاهوتياً أبقى مما توحي به ملاحظة ديراك.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a: فيشنو مستلقياً على الأفعى *Anantashayana Vishnu*) الكونية شيشا.



(b) بوذا تحميه الناغا الملك موكاليندا.

شكل 16.10: الأفاعي الكونية قوى تثبيت وحماية في الأيقونية الهندوسية والبوذية.

حين تلتقي التقاليد عبر التخوم الجغرافية والثقافية. وفي التبت، أُدمجت الزلازل في إطار *Vajrayana* لعلم الكونيات التنتري، حيث يمكن أن تشير إلى نشاط أرواح جوفية قوية (*nagas*) تحتاج إلى استرضاء طقسي. وهكذا تنضم *naga*—وهي كائن أفعواني مرتبط بالماء والعالم السفلي والاضطراب الزلزالي—إلى القائمة الطويلة من صور الأفاعي التي ظهرت عبر هذا الفصل بوصفها وسائط رمزية للقوى الخفية للأرض (انظر أيضاً §16.3.2).

16.3.4 الإسلام

تحتل الزلازل في التقليد الإسلامي منزلة ذات وزن لاهوتي كبير، فتظهر في القرآن علاماتٍ للقدرة الإلهية الفاعلة في العالم الحاضر، ونذيراً بالرجفة الأخروية التي تفتتح اليوم الآخر. ويمنح هذا الطابع المزدوج—الزلزال آيةً إلهية معاصرة وخاتمةً كونية—لاهوت الأحداث الزلزالية الإسلامي نطاقاً وشدة يدعوان إلى مقارنته بالتقليدين الكتابي والهندوسي المستعرضين أعلاه (§16.3.1، §16.3.3)، مع بقائه متجذراً في مقدماته اللاهوتية المتميزة.

السورة 99: الزلزلة

ترد أكثر معالجات القرآن للزلازل تركيزاً وصراحة لاهوتية في السورة 99، المعنونة *الزلزلة*.[9] وهي من أقصر سور القرآن، إذ لا تتألف إلا من ثماني آيات، لكنها من أشدها حمولة أخروية. وتبدأ السورة برؤية لرجفة زلزالية كونية:

Bismi llāhi r-raḥmāni r-raḥīm
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

[9] يُشتق العنوان العربي *الزلزلة* من الجذر الرباعي ز-ل-ز-ل، الدال على اهتزاز عنيف متكرر—وهي صيغة محاكية للصوت يجسد جرسها نفسه الظاهرة التي تصفها. ومن الجذر نفسه الفعل *زلزل* والاسم *زلزال*، وكلاهما مستعمل في القرآن للدلالة على رجفة زلزالية أو أخروية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.


سُورَةُ الزِّلْزَالِ مَدَنِيَّةٌ وَهِيَ ثَمَانِي آيَاتٍ
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ
إِذَا زُلْزِلَتِ الْأَرْضُ زِلْزَالَهَا ۝١ وَأَخْرَجَتِ الْأَرْضُ أَثْقَالَهَا ۝٢
وَقَالَ الْإِنسَانُ مَا لَهَا ۝٣ يَوْمَئِذٍ تُحَدِّثُ أَخْبَارَهَا ۝٤ بِأَنَّ
رَبَّكَ أَوْحَىٰ لَهَا ۝٥ يَوْمَئِذٍ يَصْدُرُ النَّاسُ أَشْتَاتًا لِّيُرَوْا
أَعْمَالَهُمْ ۝٦ فَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ۝٧ وَمَن
يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ۝٨

شكل 16.11: رسم خطي للسورة 99:1–8 (*الزلزلة*)

1. *Idhā zulzilati l-arḍu zilzālahā*
إِذَا زُلْزِلَتِ الْأَرْضُ زِلْزَالَهَا
2. *Wa-akhrajati l-arḍu athqālahā*
وَأَخْرَجَتِ الْأَرْضُ أَثْقَالَهَا
3. *Wa-qāla l-insānu mā lahā*
وَقَالَ الْإِنْسَانُ مَا لَهَا
4. *Yawma'idhin tuḥaddithu akhbārahā*
يَوْمَئِذٍ تُحَدِّثُ أَخْبَارَهَا
5. *Bi-anna rabbaka awḥā lahā*
بِأَنَّ رَبَّكَ أَوْحَىٰ لَهَا
6. *Yawma'idhin yaṣduru n-nāsu ashtātan li-yuraw amàlahum*
يَوْمَئِذٍ يَصْدُرُ النَّاسُ أَشْتَاتًا لِيُرَوْا أَعْمَالَهُمْ
7. *Fa-man yamàl mithqāla dharratin khayran yarah*
فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ
8. *Wa-man yamàl mithqāla dharratin sharran yarah*
وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ

Abdel Haleem, 2004 The Qur'an: A New Translation

سورة الزلزلة (99:1–8)

ليس الزلزال هنا مجرد حدث فيزيائي، بل أداة كشف كوني: فالأرض نفسها، إذ ترتج إلى أسسها، تطلق الأسرار التي احتفظت بها، وتصبح أعمال البشر كلها ظاهرة في نور الدينونة الإلهية. والتشابه البنيوي مع عقيدة *pralaya* الهندوسية ونبوءة *Nahui Ollin* عند الأزتك لافت في هذا الصدد: فعبر تقاليد متباعدة جداً في المكان والزمان، يظهر الزلزال آليةً للخاتمة الأخروية والحساب الأخلاقي (انظر §16.3.7).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزلازل آياتٍ إلهية

إلى جانب وظيفتها الأخروية، تظهر الزلازل في القرآن وفي أدبيات *الحديث*—الروايات المجموعة لأقوال النبي وأفعاله[10]—بوصفها *آيات* («علامات»[11]) للقدرة الإلهية والحضور الفاعل داخل نظام الخليقة. وهي تعمل بهذه الصفة عملاً مماثلاً لزلازل التجلي الإلهي في التقليد الكتابي (§16.3.1): فهي ليست أحداثاً طبيعية عشوائية، بل رسائل مقصودة من الله إلى البشر. وقد ورد في *أحاديث* عدة أن النبي محمد فسر الزلازل مواعظ إلهية، ووسّع الفقه الإسلامي هذا المبدأ منهجياً: فالزلازل من الوسائل التي ينبه الله بها البشر إلى حالهم الأخلاقية.

وولدت هذه القراءة استجابة طقسية محددة. فقد جرت العادة في مجتمعات إسلامية كثيرة عقب زلزال كبير على أداء *صلاة الخسوف*[12]، وهي صلاة خاصة للدعاء والتوبة—تماثل في منطقها استجابات القرابين للأحداث الزلزالية في الممارسة الدينية اليونانية القديمة (§16.3.2)، والنذور المقدمة في اليابان عقب الزلازل الكبرى (§16.2.1).

16.3.5 أمريكا الوسطى

يختلف التفسير الديني للزلازل في أمريكا الوسطى عن التفسيرات المستعرضة أعلاه في وجه أساسي واحد: فلم تندمج الكارثة الزلزالية في أي مكان آخر من العالم القديم بهذا الاكتمال والمنهجية في البنية الرسمية للفكر الديني. وفي تقليد الأزتك، لم يكن الزلزال مجرد علامة على سخط إلهي أو تجل لقدرة إلهية؛ بل كان المصير الكوني للعالم نفسه، مدمجاً في قلب التقويم الطقسي ومرمزاً في أقدس آثار الحضارة.

الشمس الخامسة وناوي أولين

يرى علم الكونيات عند الأزتك أن العالم الحاضر هو الخامس في سلسلة من العصور الكونية، حكمت كل واحد منها شمس مختلفة وأنهته كارثة مختلفة: فقد دمر الفيضان والريح ومطر النار والظلمة العوالم الأربعة السابقة. وسُمي العصر الحالي، الشمس الخامسة، *Nahui Ollin* («الحركات الأربع» أو «الزلازل الأربعة»)، وتنبأت النبوءة بأنه سينتهي لا بفيضان أو نار، بل بزلزال كارثي.[13] ولم تكن هذه النبوءة عنصراً هامشياً في الفكر الديني للأزتك، بل مركزه الكوني: فقد عاش العالم الحاضر تحت حكم زلزالي دائم، وكان من وظائف الطقوس—ومنها التضحية البشرية—إرجاء تلك الرجفة النهائية بتغذية الشمس والحفاظ على النظام الكوني.

ووُضع رمز *Ollin* في مركز *Piedra del Sol* («حجر شمس الأزتك» المسمى كذلك) تماماً، وهو من أشهر آثار حضارة ما قبل كولومبوس، ويوجد الآن في المتحف الوطني للأنثروبولوجيا في مكسيكو سيتي. وموضعه

[10] تؤلف *الأحاديث* («الروايات» أو «الأخبار»)، إلى جانب القرآن، المصادر المعيارية الرئيسة للشريعة واللاهوت الإسلاميين. وأوثق المجموعات *الصحيحان* («المجموعتان الصحيحتان») للبخاري ومسلم بن الحجاج.

[11] العربية *آيات*، جمع *آية*، وتدل على آيات القرآن المفردة وعلى علامات القدرة الإلهية الظاهرة في نظام الخليقة معاً. والكلمة من جذر سامي مشترك *أ-و-ت* يقابل العبرية *ot*، أي «علامة».

[12] العربية *صلاة الخسوف*، أي حرفياً «صلاة خسوف القمر»، وقد مُدت بالقياس الفقهي (*القياس*) لتشمل الزلازل وغيرها من الأحداث الطبيعية الخارقة للعادة. وتتألف الصلاة من ركعتين (ركعتان) مع إطالة القراءة، وتؤدى جماعة، وتُختتم بموعظة (خطبة).

[13] تدل كلمة *ollin* في الناهواتل على الحركة، ومن ثم على الزلزال؛ وهي العلامة اليومية السابعة عشرة من علامات *tonalpo-hualli* العشرين، أي التقويم الطقسي ذي الأيام الـ260. ويحدد العدد السابق *nahui* («أربعة») الموضع التقويمي المحدد لليوم الذي خُلق فيه عصر العالم الحاضر والذي قُدر له أن ينتهي فيه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المركزي إعلان بصري لأولوية الزلزال الكونية: فالزمن كله والطقوس كلها والتاريخ كله تشع إلى الخارج من مصير العالم الزلزالي.

> سيكون اسم هذه الشمس الموجودة الآن ناوي أولين، الزلزال الرابع. [...] ستقع الزلازل، وسيحل الجوع، ثم تأتي نهايتنا. (*Anales de Cuauhtitlan*)
>
> León-Portilla, 1963 Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind

الاستجابة الطقسية وإرجاء الكارثة

كانت لدمج نبوءة الزلزال في الممارسة الدينية للأزتك نتائج طقسية عميقة. فإذا أمكن إرجاء الزلزال النهائي بالحفاظ على النظام الكوني، أمكن للفشل الطقسي—الإثم أو إهمال التضحية أو الخطيئة الأخلاقية—أن يعجله. ولذلك كان كل زلزال حقيقي احتمالاً لتذوق الرجفة الأخيرة مسبقاً، وتذكيراً بهشاشة عصر العالم الحاضر وضرورة صيانته بالطقوس. ومنح هذا الأحداث الزلزالية إلحاحاً في الخيال الديني للأزتك تجاوز كثيراً نظيره في التقليدين الكتابي والإسلامي: فلم يكن الزلزال مجرد إنذار إلهي، بل تدريباً محتملاً على نهاية العالم.

ولذلك عوملت علامة اليوم *Ollin* في التقويم الطقسي بجدية خاصة. وكان يُعتقد أن من وُلدوا في يوم *Ollin* موسومون بعلاقة خاصة مع القوى الزلزالية، وأن يوم *Ollin* نفسه ملائم لبعض الطقوس ومشؤوم لغيرها. وهكذا لم يرتبط التقويمي بالجيولوجي بالتشابه فحسب، بل اندمجا بنيوياً: فقد نُظم الزمن نفسه حول إيقاع الكارثة الزلزالية.

الاستمرار مع التقليد الأسطوري

كما ذُكر في §16.2.3، لا يظهر رمز *Ollin* ومفهوم *Nahui Ollin* في السياقات الدينية للأزتك وحدها، بل في مدونات عدة ثقافات من أمريكا الوسطى، مما يوحي بأن دمج الظواهر الزلزالية في التفكير الكوني والتقويمي تقليد إقليمي شديد القدم لا ابتكار خاص بالأزتك. وهكذا يمثل النظام الديني للأزتك أكمل تعبير متطور عن انشغال أوسع في أمريكا الوسطى بالزلازل، امتد من التسجيل التقويمي، مروراً بالرواية الأسطورية، إلى العقيدة اللاهوتية الرسمية والممارسة الطقسية.

وفي هذا الصدد تقف حالة أمريكا الوسطى عند الطرف الأقصى من طيف يمتد عبر التقاليد كلها المستعرضة في هذا الفصل. فالتقليد الكتابي يفسر الزلازل تدخلات إلهية عارضة داخل نظام مخلوق مستقر في ما عدا ذلك، والتقليد الإسلامي يدمجها في علم أخرويات يظل مستقبلياً ومشروطاً، أما تقليد الأزتك فقد جعل الزلزال النهائي المقدمة البنيوية لنظامه الكوني والطقسي كله. ولم يكن العالم معرضاً لمجرد احتمال أن ينتهي بزلزال؛ بل كان مقدراً له تكوينياً أن يفعل، ونُظمت الحياة الدينية كلها استجابة لذلك اليقين.

16.3.6 الشنتو

إن العلاقة بين الزلازل والفكر الديني في اليابان موثقة على نحو غير مألوف، وتمتد الأدلة النصية والفنية والطقسية فيها قرابة ألف عام. وكما نوقش في §16.2.1، قدم التقليد الأسطوري الشعبي المتمحور حول سمكة السلور الجوفية العملاقة *Namazu* التفسير الشعبي المهيمن للأحداث الزلزالية في اليابان السابقة للحداثة. وما يحتاج إلى التشديد هنا هو مدى استيعاب هذا التقليد الأسطوري داخل البنى الرسمية للممارسة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 16.12: *Piedra del Sol* (حجر شمس الأزتك)، ورمز *Ollin* في مركزه.

الدينية في الشنتو—في توضيح شديد الجلاء للحد المائع بين الأساطير والدين الذي حددته مقدمة هذا الفصل.

كاشيما ولاهوت الكبح

لب تقليد الشنتو اللاهوتي عن الزلازل شخصية *Takemikazuchi-no-kami*، المعبود في ضريح كاشيما في محافظة إيباراكي اليوم، ودوره كابحاً إلهياً لـ*Namazu*. وتحولت الرواية الأسطورية داخل ممارسة الشنتو إلى أساس علاقة طقسية حية بين المجتمع وإلهه الحامي: فقد ضم تقويم الضريح شعائر موجهة صراحة إلى الحفاظ على كبح الإله لسمكة السلور، وسافر الحجاج إلى كاشيما طلباً للحماية من الزلازل (الشكل 16.13). ويبين القسم العلوي من هذا الرسم الحجر في ضريح كاشيما، بينما يثبت الإله تاكيميكازوتشي في الأسفل سمكة السلور العملاقة Onamazu بسيفه. ويُقال إن Onamazu تعيش تحت جزر اليابان وتسبب زلازلها الكثيرة حين تُستفز. ويكبح تاكيميكازوتشي السمكة بحجر الأساس. وهكذا استلزم تهديد الكارثة الزلزالية صيانة طقسية مستمرة—تماثل بنيوياً إرجاء الأزتك الزلزال النهائي بالتضحية (§16.3.5).

وكان *kannazuki*، الشهر القمري العاشر الذي يسافر فيه كاشيما إلى الاجتماع الكبير للآلهة في إيسه، يُعد فترة خطر زلزالي مرتفع، تعوضه زيادة الصلاة والنذور وطقوس التطهير. وهكذا نُظم التقويم الطقسي جزئياً حول إيقاع الخطر الزلزالي.

الزلزال والتطهير والتجدد

تستحق مطبوعات *namazu-e* سنة 1855، التي نوقشت في §16.2.1 بوصفها وثائق شعبية، إعادة النظر هنا بوصفها وثائق دينية. فقد كانت لكثير منها وظيفة تعويذية صريحة: إذ كان يُفهم أن عرض صورة تاكيميكازوتشي وهو يخضع سمكة السلور يمنح الحماية من كوارث زلزالية أخرى، مما يضع المطبوعات بوضوح داخل المجال التعبدي المنزلي لممارسة الشنتو (الشكل 16.14). وكان *Namazu* نفسه، بصفته كائناً

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 16.13: ضريح كاشيما (محافظة إيباراكي)، مقر *Takemikazuchi-no-kami* والموقع الرئيس لطقوس الشنتو الواقية من الزلازل في اليابان السابقة للحداثة.

ذا قدرة خارقة رهيبة، *kami*[14]—لا مخلوقاً يجب قمعه فحسب، بل قوة ينبغي استرضاؤها وإدماجها في الاقتصاد الديني للمجتمع.

ويجد هذا أعمق تعبير له في مفهوم *yonaoshi* («تقويم العالم»). ففي إطار الشنتو، يتراكم الفساد الاجتماعي والإهمال الطقسي بوصفهما شكلي تلوث (*kegare*)؛ ويمكن فهم الأحداث الكارثية—ومنها الزلازل—عمليات تطهير عنيفة مؤلمة لكنها ضرورية لاستعادة الاتزان (Smits, 2006). ويجد لاهوت التجدد الكارثي هذا أوجهاً موازية بنيوياً عبر التقاليد المستعرضة في هذا الفصل: الدينونة والخلاص في الكتاب المقدس (§16.3.1)، و*pralaya* الهندوسية (§16.3.3)، ورؤية الأزتك لعصور العالم المتعاقبة (§16.3.5). فالزلزال قلما يكون مدمراً فحسب عبر التقاليد؛ بل هو أيضاً المقدمة العنيفة لعالم متجدد.

الشنتو والبوذية والتوفيق الزلزالي

لا تكتمل أي رواية لتقليد الشنتو عن الزلازل من دون الاعتراف بتأثير البوذية. فقد تعايشت الشنتو والبوذية في اليابان أكثر من ألف عام في الاندماج التوفيقي المعروف باسم *shinbutsu-shūgō*[15]، ولم يكن تفسير الزلازل استثناء. واستوعبت المخاوف الزلزالية في الشنتو بسهولة الأطر الأخروية البوذية—ومنها عقيدة *mappō* («الأيام الأخيرة للدارما»، المماثلة لـ*Kali Yuga* الهندوسية التي نوقشت في §16.3.3)—فأنتجت استجابة دينية متعددة الطبقات تستمد من التقليدين في آن واحد. وهكذا يمثل تقليد الشنتو عن الزلازل ذروة عملية طويلة من التركيب الثقافي، دُمجت فيها الأطر الأسطورية الأصلية والكونية الصينية والأخروية البوذية تدريجياً في تفسير ديني متماسك للكارثة الزلزالية.

[14] يدل مصطلح *kami* على الحضورات أو القوى المقدسة التي تحيي الظواهر الطبيعية في رؤية الشنتو للعالم—أي شيء يمتلك قدرة غير مألوفة تبعث الرهبة، سواء كانت خيرة أم مخيفة، كما وصفها الباحث موتوري نوريناغا (1730–1801).

[15] يعني حرفياً «اندماج الكامي والبوذا»، وقد هيمن هذا التوفيق على الحياة الدينية اليابانية من عصر نارا (710–794 م) إلى فصل حكومة ميجي التقليدين قسراً سنة 1868.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 16.14: مطبوعة تعويذية من *namazu-e* تصور *Takemikazuchi-no-kami* يخضع سمكة السلور.

16.3.7 تركيب: الدين ومعنى الكارثة الزلزالية

تكشف التقاليد المستعرضة في هذا القسم نمطاً متسقاً على نحو لافت عبر ثقافات وعصور تاريخية متباعدة جداً. ففي كل تقليد بُحث، تُدمج الزلازل في إطار لاهوتي ينجز ثلاثة أمور في آن واحد: يسند معنى إلى الحدث الزلزالي (فهو ليس عشوائياً، بل مقصود)؛ ويضع ذلك المعنى داخل نظام أخلاقي (فالزلزال يبلغ شيئاً عن العلاقة بين البشر والإله)؛ ويولد استجابة جماعية مقررة (تضحية، أو صلاة، أو تطهير، أو صيانة طقسية). ويختلف المحتوى المحدد للمعنى، والإطار الأخلاقي المحدد، والاستجابة الطقسية المحددة اختلافاً هائلاً بين التقاليد—لكن البنية الثلاثية نفسها عالمية.

وتستحق ثلاثة موضوعات عابرة للتقاليد تشديداً خاصاً. أولها تقارب التفكير الأخروي. فتضع *pralaya* الهندوسية واليوم الآخر الإسلامي و*Nahui Ollin* عند الأزتك و*mappō* البوذية الزلزال عند الحدث النهائي للتاريخ الكوني أو قريباً منه—وهو تقارب بنيوي قائم بين تقاليد لا اتصال تاريخياً بينها، ويدل على استجابة معرفية مشتركة لخبرة الكارثة الزلزالية سبق رصدها في تركيب الأساطير (§16.2.5).

وثانيها استمرار التفسير الأخلاقي للزلازل عبر العصور التاريخية. فلم يذب المنعكس الذي ينسب الأحداث الزلزالية إلى عقاب إلهي على خطيئة بشرية—الموثق في الكتاب المقدس، وفي ممارسة العبادة اليونانية، ولاهوت *karma* الهندوسي، وتقليد *الحديث* الإسلامي، ونظام الأزتك الطقسي—مع ظهور الحداثة. ويبين تفسير غاندي زلزال بيهار سنة 1934 عقاباً على خطيئة النبذ الطبقي أن هذا المنعكس اللاهوتي ظل مسيطراً حتى القرن العشرين، وأثار من طاغور الحجج العقلانية المضادة نفسها التي وجهها فولتير إلى القراءات العنايتية لزلزال لشبونة قبل قرابة قرنين (§16.5.2). وتفصل بين الحادثتين قارتان وقرنان، ومع ذلك يتطابق منطقهما الكامن: المواجهة نفسها بين التفسيرين اللاهوتي والعقلاني للكارثة، تُعرض في سجلين ثقافيين مختلفين.

وثالث الموضوعات إقامة الأماكن المقدسة منهجياً فوق بنى نشطة جيولوجياً—وهو موثق في دلفي وهيرابوليس وكولوسي وضريح كاشيما، ويوحي بنزعة أوسع إلى تفسير مناطق عدم الاستقرار الزلزالي مناطقَ حضور إلهي شديد. وبهذا المعنى، ليس التفسير الديني للزلازل مجرد استجابة لاحقة للأحداث الزلزالية؛ بل يشكل الجغرافيا المقدسة للمشهد الطبيعي ذاته، ناقشاً المعنى اللاهوتي في الأرض نفسها التي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تبني المجتمعات فوقها معابدها. وما يبدأ رعباً يصبح، بوساطة الرواية الدينية، دليلاً على الحضور والقدرة الإلهيين—ثم يصير في النهاية، كما يبين القسم التالي، مناسبة لأول تحد فلسفي لذلك الفهم.

وهذا الإضفاء اللاهوتي الشامل على الخبرة الزلزالية تحديداً—أي الإصرار على أن الزلزال يعني شيئاً، وأنه موجه إلى البشر، وأنه لا يتطلب الاحتمال وحده بل التفسير والاستجابة—هو ما سيخضعه التقليد الفلسفي لأول فحص نقدي متواصل في §16.4.

وتدعو عالمية النمط الموثق في هذا القسم إلى سؤال أعمق: ليس مجرد *أن* التفسيرات اللاهوتية لكارثة الزلزال استمرت عبر الثقافات والقرون، بل *لماذا* ثبتت هذه القدرة اللافتة على البقاء—فنجت من صعود الفلسفة الطبيعية وعصر التنوير وعلم الزلازل الحديث على السواء. وقد صاغ سبينوزا الجواب بدقته المميزة قبل ثلاثة قرون ونصف:

> ما كان البشر ليكونوا خرافيين لو استطاعوا تدبير أحوالهم كلها بقواعد ثابتة، أو لو حالفهم الحظ دائماً؛ لكنهم كثيراً ما يُدفعون إلى مضائق لا تنفع فيها القواعد، وكثيراً ما يظلون يتأرجحون في بؤس بين الرجاء والخوف بفعل chap:trustregion نعم الحظ التي يشتهونها بجشع، ولذلك يكونون في الأغلب شديدي الميل إلى التصديق. فالخوف إذن يولد الخرافة ويحفظها ويرعاها.
>
> Spinoza, 1670 Tractatus Theologico-Politicus

يجسد الزلزال، من بين الظواهر الطبيعية كلها، الحالة التي يصفها سبينوزا أكمل تجسيد: فهو يضرب بلا إنذار، ويعصى التنبؤ، ويطغى على كل قاعدة يدبر بها البشر أحوالهم عادة. ولذلك فإن توليده الخرافة—وثبات تلك الخرافة—ليس غرابة من غرائب جهل ما قبل الحداثة، بل نتيجة بنيوية للحدث نفسه. وهذا الإدراك تحديداً هو ما سيحاول التقليد الفلسفي، الذي يبحثه القسم التالي، أن يجيب عنه لا بالأسطورة أو الطقس، بل بالعقل.

يمكن عرض التقاليد السبعة المستعرضة أعلاه، والموضوعات الثمانية المتكررة التي تشترك فيها، عرضاً تخطيطياً في الجدولين التاليين. ويلخص الجدول 16.1 لكل تقليد الدور اللاهوتي الأساسي المسند إلى الزلزال، والفاعل الإلهي أو الكوني المسؤول عنه، ووجود بعد أخروي أو غيابه، والاستجابة الطقسية المقررة، والمصادر النصية الرئيسة. ويربط الجدول 16.2 أهم ثمانية موضوعات عابرة للثقافات بالتقاليد التي تشهد عليها، محدداً تجلياتها الخاصة ودلالتها التحليلية معاً.

وثمة نمطان يكشفهما الجدولان يستحقان تعليقاً موجزاً هنا. أولاً، إن **الأفعى أو التنين بوصفه فاعلاً زلزالياً**—الموثق عبر خمسة تقاليد تمتد في الهند واليابان واليونان وأمريكا الوسطى—هو في الواقع أوسع موضوعات الفصل كله انتشاراً، بل أعم من القراءات الأخروية التي يبدأ بها التركيب. وليس غيابه عن التقليدين الكتابي والإسلامي عارضاً: فهذان تحديداً هما التقليدان اللذان طورا على أكمل وجه لاهوت الفاعلية الإلهية المباشرة، حيث لا حاجة إلى مخلوق جوفي وسيط لتفسير ارتجاف الأرض. ولذلك يعمل وجود الأفعى أو غيابها علامة تشخيصية للبنية اللاهوتية الكامنة في كل تقليد.

ثانياً، إن عمود **الغيابات** في الجدول 16.2 ذو دلالة تحليلية تماثل دلالة عمود الحضور. فالبوذية وحدها، من بين التقاليد المستعرضة كلها، ترفض باستمرار القراءة الأخلاقية للزلازل بوصفها عقاباً—فالزلزال في الإطار البوذي تصديق كوني لا قصاص. واليونان وحدها تفتقر إلى بعد أخروي متطور. وليست هذه الغيابات فجوات في الأدلة، بل سمات بنيوية للتقاليد نفسها، وهي تمنع الاستنتاج الجذاب سطحياً بأن الاستجابات الدينية للزلازل كلها متماثلة في جوهرها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 16.1: التقاليد الدينية والزلزال: ملخص مقارن.

التقليد	الدور الأساسي للزلزال	الفاعل / الموضع	أخروي؟	الاستجابة الطقسية	المصادر الرئيسة
الكتاب المقدس (اليهودي–المسيحي)	تجل إلهي؛ أداة تحرير أو دينونة إعجازية؛ ذاكرة جيولوجية مرمزة	*YHWH* / الله مباشرة	جزئياً—توحي الصور الزلزالية في سفر الرؤيا بأحداث نهائية	صلاة؛ نذور؛ توبة جماعية	الخروج 19:18؛ أعمال الرسل 16:26؛ متى 27–28؛ Nur **and** Burgess, 2008
اليونان (الديانة الهلينية)	تجل للغضب الإلهي (*Enosichthon*)؛ نطاقات الفوالق مواضع للحضور المقدس والنبوءة؛ استمرار قوة بدئية مهزومة (إنسيلادوس) مسجونة تحت الأرض	بوسيدون *Enosichthon*؛ إنسيلادوس والعمالقة الجوفيون؛ القوى الجيولوجية الجوفية	لم يُحدد	التضحية بالحيوان لبوسيدون؛ تعمد إقامة المعابد فوق آثار فوالق نشطة	*الإلياذة* XIII.18؛ Vergilius Maro, 2008؛ Piccardi, 2007؛ The Aeneid Broad, 2006
الهندوسية	عدم استقرار كوني؛ نتيجة كارمية لخطيئة جماعية؛ علامة اقتراب *pralaya*	شيشا / فيشنو؛ *karma* الجماعية	نعم—*pralaya*، الانحلال النهائي للكون	استرضاء طقسي؛ تفسير بواسطة لاهوت الكارما	*Shatapatha Brahmana*؛ *Puranas*؛ تبادل غاندي–طاغور (1934) (Paranjape, 2011)
البوذية	تصديق كوني لأحداث حياة بوذا؛ مخطط سببية ثلاثي يميز الأسباب الطبيعية والبشرية والمتعالية	الأرض كوناً مستجيباً؛ *nagas*	جزئياً—عقيدة *mappō*؛ ازدياد الزلازل قرب نهاية عصر الدارما	استرضاء *nagas* طقسياً؛ الحج	*Pali Canon*؛ *Anguttara Nikaya*
الإسلام	آية إلهية (*ayat*) للموعظة الأخلاقية في الحاضر؛ أداة كشف كوني في اليوم الآخر	الله مباشرة؛ القرآن سلطة مرجعية	نعم—تضع السورة 99 الزلزال في افتتاح اليوم الآخر	*Salāt al-khusūf* (صلاة جماعية خاصة للتوبة)	السورة 99 (*Al-Zalzalah*)؛ مجموعات *hadīth*
أمريكا الوسطى (الأزتك)	المصير الكوني لعصر العالم الحاضر؛ كل زلزال فعلي تدريب على الرجفة النهائية	قوة *Ollin*؛ بنية التقويم الكوني	نعم—تكويني؛ مقدر للعالم أن ينتهي بزلزال (*Nāhui Ollin*)	التضحية البشرية؛ صيانة التقويم الطقسي لإرجاء الزلزال النهائي	*Anales de Cuauhtitlan*؛ *Piedra del Sol*؛ León-Portilla, 1963
الشنتو (اليابان)	عدوان نامازو الذي يستلزم كبحاً إلهياً؛ تطهير كارثي (*yonaoshi*) وتقويم العالم	نامازو (سمكة السلور العملاقة)؛ تاكيميكازوتشي كابحاً	جزئياً—*mappō* مستوعبة عبر التوفيق البوذي	شعائر ضريح كاشيما؛ تعاويذ *namazu-e*؛ طقوس التطهير	مطبوعات *Namazu-e* (1855)؛ Smits, 2006؛ سجلات ضريح كاشيما

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 16.2: موضوعات متكررة عابرة للثقافات في التفسير الديني للزلازل. ✓ = الموضوع موثق؛ × = الموضوع غائب أو هامشي.

الموضوع	الكتاب المقدس	اليونان	الهندوسية	البوذية	الإسلام	أمريكا الوسطى	الشنتو	الدلالة
الأفعى / التنين فاعلاً زلزالياً	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	أوسع الموضوعات انتشاراً. يحاكي الجسم الأفعواني آثار الفوالق والتمزق الأرضي؛ وترمز هزيمته على يد إله أو قديس إلى فرض النظام الإلهي على القوة الجوفية. وهو غائب عن التقليدين اللذين طورا لاهوت الفاعلية الإلهية المباشرة على أكمل وجه (الكتاب المقدس؛ الإسلام).
الزلزال نهايةً أخروية	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	حاضر في كل تقليد ذي علم أخرويات متطور. ويظهر الزلزال آلية للإغلاق الكوني—التعبير الفيزيائي عن نهاية جيولوجية وأخلاقية ولاهوتية في آن واحد. واليونان وحدها تفتقر إلى هذا البعد.
إقامة مواقع مقدسة فوق فوالق جيولوجية	✓	✓	×	×	×	✓	✓	فسرت المجتمعات التي خبرت اضطراباً زلزالياً متكرراً في موقع ما عدم الاستقرار قرباً إلهياً. وشكلت الجيولوجيا الجغرافيا المقدسة: فتحول الرعب دليلاً على الحضور الإلهي.
الزلزال عقاباً أخلاقياً / نتيجة كارمية	✓	✓	✓	×	✓	×	✓	أبقى القراءات تاريخياً—إذ استمرت إلى الحداثة (غاندي، 1934). وترفضها البوذية وحدها باستمرار: فالزلزال تصديق كوني، لا قصاص. وتثير الرد العقلاني نفسه في كل عصر.
استجابة طقسية جماعية مقررة	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	عالمية عبر جميع التقاليد. فالزلزال لا يستدعي الاحتمال وحده، بل فعلاً طقسياً جماعياً. ويختلف الشكل اختلافاً هائلاً (من الصلاة إلى التضحية)، لكن المنطق البنيوي—الزلزال رسالة مقصودة تتطلب استجابة—متطابق.
الكارثة تطهيراً وتجديداً	✓	×	✓	×	×	✓	✓	الزلزال مولد ومدمر معاً—مقدمة عنيفة لعالم متجدد. يحول الرعب إلى غائية: فالكارثة تخدم غرضاً أكبر منها. وهو غائب بوضوح عن الإطارين اليوناني والإسلامي.

يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 16.2 (تابع)

الموضوع	الكتاب المقدس	اليونان	الهندوسية	البوذية	الإسلام	أمريكا الوسطى	الشنتو	الدلالة
ذاكرة مرمزة لأحداث جيولوجية حقيقية	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	بعض الروايات الدينية استجابات يمكن البرهنة عليها لأحداث جيولوجية محددة (انهيارات فالق وادي الأردن المرمزة في روايتي يشوع وأريحا؛ زلزال الأناضول سنة 60 م المستوعب في تقليدي هيرابوليس وكولوسي؛ الطبيعة البركانية والزلزالية لإتنا التي أُسطرت تشنجاتٍ لإنسيلادوس المسجون؛ زلزال آنسي إيدو سنة 1855 الذي تبلور في مجموعة *namazu-e*). ويُستوعب الحدث المادي في الرواية الدينية—فيتحول من دون أن يُمحى.
حيوان حامل تسبب حركته الزلازل	×	×	✓	✓	×	×	✓	متميز من موضوع الأفعى: الحيوان الكوني الذي يحمل الأرض وتسبب حركته غير المقصودة عدم الاستقرار الزلزالي. وهو موثق مستقلاً في تقاليد متباعدة جغرافياً كالهند واليابان (الفيل / السلحفاة الكونيان؛ شيشا؛ نامازو).

16.4 الفلسفة

طالما تكهن الفلاسفة بأسباب الزلازل. ويُنسب أحد أقدم التفسيرات إلى طاليس الملطي، الذي اعتقد أن الأرض تطفو فوق الماء؛ ولذلك ظُن أن اضطرابات هذا الوسط الكامن قادرة على إحداث الهزات. وطور فلاسفة آخرون سابقون لسقراط الفكرة: فاقترح أنكسيمينس أن الهواء المضغوط المحبوس تحت السطح يجعل الأرض تتشقق وتنتفخ، بينما بحث أنكسيمندر وديوجين الأبولوني عن تفسيرات متجذرة في تفاعل العناصر الأساسية الأربعة—الأرض والماء والهواء والنار (De Boer **and** Sanders, 2005). وقد أرست هذه المحاولات المبكرة، مهما كانت تخمينية، عادة فكرية تبحث عن أسباب فيزيائية للظواهر الزلزالية لا أسباب أسطورية محضة—فكانت أول تحد متواصل للمنعكس التفسيري الموثق عبر التقاليد الدينية في §16.3.

16.4.1 أرسطو

كان التفسير الهوائي الذي اقترحه أرسطو من أشد النظريات القديمة تأثيراً. ووفق هذا التصور، تنتج الزلازل من رياح جوفية محبوسة داخل تجاويف تحت سطح الأرض. وحين تصارع هذه الرياح للخروج، تجعل الأرض تهتز أو تتشقق. وقد أثبتت نظرية أرسطو قدرة لافتة على البقاء، وظلت الإطار الفكري المهيمن لتفسير الزلازل قروناً كثيرة.

وتطورت تفسيرات كونية مماثلة مستقلة في ثقافات أخرى. ففي الصين القديمة، نُسبت الزلازل أحياناً إلى اضطرابات في اتزان القوى الكونية المعبر عنها بتفاعل العوامل الأساسية الخمسة (*gogyo*) المرتبطة بالِين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

واليَانغ (Guidoboni **and** Poirier, 2004). وعلى الرغم من اختلاف صياغتها، شاركت هذه الأفكار الفلسفة اليونانية محاولة تفسير الزلازل نتيجةً لعمليات طبيعية كامنة لا لأسباب أسطورية محضة.

16.4.2 إراتوستينس

قدم إراتوستينس القوريني (نحو 276–194 ق.م)، العالم الموسوعي وأمين مكتبة الإسكندرية المشهور قبل كل شيء بقياسه بالغ الدقة لمحيط الأرض، إسهاماً مهماً لكنه كثيراً ما يُغفل في الفهم الفلسفي والجغرافي للزلازل. وفي *Geographika*، أنجز إراتوستينس ما يمكن اعتباره أول رسم جغرافي منهجي للنشاط الزلزالي في العالم القديم. فبدلاً من معاملة الزلازل أحداثاً منفردة أو عشوائية، سعى إلى تحديد المناطق التي تتكرر فيها أكثر، وربط توزيعها بالمعالم الفيزيائية الأوسع للمشهد الطبيعي.

ولاحظ إراتوستينس أن النشاط الزلزالي يتركز على امتداد المناطق الساحلية وبالقرب من المناطق البركانية—وهو ارتباط دائم الدلالة لم يحظ بتفسير فيزيائي صارم إلى العصر الحديث. وأشار إلى الطابع الزلزالي لسلاسل جزر المتوسط، ونسب عدم استقرار بعض السواحل إلى فعل قنوات مياه جوفية تصل البحر بتجاويف تحت الأرض. وحين تضطرب هذه الصلات الخفية، تصبح الأرض فوقها عرضة للهبوط أو الاهتزاز. وكانت هذه النظرية الهيدروليكية للزلازل، وإن ثبت خطؤها في النهاية، محاولة حقيقية لدمج الظواهر الزلزالية في جغرافيا فيزيائية متماسكة للأرض.

ولا تكمن دلالة إسهام إراتوستينس في صحة آلية محددة بقدر ما تكمن في منهجه: فقد استبق، بفهرسة المناطق الزلزالية وربطها بالمعالم الجغرافية والجيولوجية، الإدراك الحديث بأن وقوع الزلازل ليس موزعاً بانتظام، بل تحكمه الخصائص البنيوية لقشرة الأرض. ولذلك يمثل عمله لحظة انتقالية مهمة بين التفسير الأسطوري والبحث الطبيعي المنهجي، (Dragoni, 2005).

16.4.3 لوكريتيوس وبلينيوس

تظهر معالجة فلسفية بالغة الأهمية في عمل الشاعر والفيلسوف الروماني لوكريتيوس (Lucretius, 1995). فقد سعت قصيدته الملحمية *De Rerum Natura* (في *طبيعة الأشياء*)، المكتوبة في القرن الأول ق.م، إلى تفسير الظواهر الطبيعية بواسطة الفلسفة الأبيقورية. ويناقش لوكريتيوس الزلازل في الكتاب السادس وينسبها إلى حركات هواء محبوس داخل تجاويف الأرض. وحين تتراكم هذه الرياح الجوفية وتبحث عن منفذ، تولد اهتزازات تهز الأرض أو تجعلها تنشق. ويعكس هذا التفسير محاولة أوسع لفهم العالم الطبيعي بآليات فيزيائية لا بتدخل إلهي.

وكثيراً ما توسع المؤلفون القدماء في هذه النظرية الهوائية. فقارن بعضهم الأرض بإسفنجة تسمح تجاويفها الداخلية للرياح بالدوران عبر ممرات جوفية. وحين يتجاوز الهواء المتراكم سعة هذه التجاويف، يولد الضغط الناتج أصوات هدير واهتزازاً للأرض وأحياناً شقوقاً تخرج الرياح منها. وردد مؤلفون وشعراء كلاسيكيون لاحقون هذه التفسيرات، منهم سالوست ولوكّان، اللذان وصفا الزلازل نتيجةً لقوى تتحرك في فراغات الأرض الخفية.

ومن المصادر القديمة المهمة أيضاً *Naturalis Historia* لبلينيوس الأكبر (77–78 م)، وهو عمل موسوعي بحث ظواهر طبيعية كثيرة، منها الزلازل (Pliny the Elder, 1906). ولاحظ بلينيوس أن الهزات الزلزالية تتكرر في مناطق معينة أكثر، ولا سيما المناطق البحرية، مع أن المناطق الجبلية لم تكن مستثناة. ولاحظ أيضاً أنماطاً موسمية، مقترحاً أن الزلازل تقع بكثرة أكبر في الخريف والربيع—وهي ملاحظة كررها كانط

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحقاً. وسجل بلينيوس كذلك أن الحيوانات كثيراً ما تتصرف على نحو غير مألوف قبل الزلازل، وهو من أقدم المراجع الموثقة لما سيصبح لاحقاً موضوعاً متكرراً في تراث الزلازل.

16.4.4 زلزال لشبونة حدثاً فلسفياً

حوّل الزلزال الكارثي الذي ضرب لشبونة في 1 نوفمبر 1755—عيد جميع القديسين—النقاش الفلسفي حول الزلازل. فقد قتلت الكارثة عشرات الآلاف من المصلين في الكنائس المنهارة، وأطلقت حرائق وأمواج تسونامي دمرت المدينة أياماً، الشكل 16.15a. ولم تدمر عاصمة فحسب؛ بل هزت الحياة الفكرية الأوروبية. فقليل من الأحداث الطبيعية في التاريخ المسجل أثار نقاشاً فلسفياً بهذه الكثافة والعواقب، ولم يعمل أي زلزال آخر في آن واحد بؤرةً للاهوت والفلسفة الأخلاقية والعلم الطبيعي والخيال الأدبي. وسيظهر الحدث مرة أخرى في القسم التالي عن الأدب (§16.5.2)، حيث تُبحث أصداؤه الأدبية بالتفصيل؛ أما الاهتمام هنا فبأبعاده الفلسفية.

وقع الزلزال في ذروة عصر التنوير الأوروبي، حين كان الرأي المتعلم ميالاً إلى عد العالم الطبيعي منظماً عقلانياً وخيراً في النهاية. وكشف بوحشية فورية حدود تلك الثقة. ولم يكن السؤال اللاهوتي الذي طرحه جديداً: فكما أوضح استعراض التقاليد الدينية في §16.3، شكّلت نسبة الكارثة الزلزالية انعكاسياً إلى عقاب إلهي الاستجابات من الكتاب المقدس إلى *الحديث* الإسلامي وعقيدة *karma* الهندوسية. والجديد كان الجمهور: أوروبيون متعلمون مسلحون بأدوات الفلسفة العقلانية المفاهيمية ونفد صبرهم حديثاً من الإجابات التقليدية. وقد عُرضت هنا للمرة الأولى في مركز الحياة الفكرية الأوروبية المواجهة نفسها بين التفسيرين اللاهوتي والعقلاني للزلزال التي شكلت تبادل غاندي–طاغور عقب زلزال بيهار سنة 1934 (§16.3.3).

16.4.4.1 فولتير وروسو محاورين فلسفيين

استجاب فولتير بسرعة وشدة عاطفية غير مألوفتين حتى لديه. ففي *Poème sur le désastre de Lisbonne* (Voltaire [Arouet, 2009] (1756))، رفض صراحة الفلسفة التفاؤلية الأكثر ارتباطاً بلايبنتس—وهي العقيدة التي طُورت منهجياً أول مرة في *Essais de Théodicée* (Leibniz, 1710)، والقائلة إن هذا العالم «أفضل العوالم الممكنة كلها»، وإن كل شر ظاهر يمكن التوفيق بينه في النهاية وبين تصميم خيّر أكبر. ويُناقش هذا الموقف الفلسفي أكثر في §16.5.2 في سياق الأبعاد الأدبية لنقاش لشبونة؛ والمهم هنا هدفه الفلسفي. فقد مثّل تفاؤل لايبنتس نظرية العناية الإلهية المهيمنة في عصر التنوير: منهجية عقلانية وتبدو متسقة مع الكون المنظم الذي كشفه علم نيوتن. وهاجمت قصيدة فولتير هذا الموقف بوصفه غير قابل للدفاع أخلاقياً أمام معاناة الأبرياء، وأعادت بذلك مسألة الشر الطبيعي إلى قلب الاهتمام الفلسفي.

ورد جان جاك روسو برسالة شهيرة في أغسطس 1756 (Rousseau, 1967) حولت شروط النقاش في اتجاه ذي عاقبة فلسفية. وكانت حجته المركزية أن حجم دمار لشبونة لا يمكن نسبته إلى الطبيعة وحدها: فقد كان كثير من المعاناة نتيجة الطريقة التي نظم بها المجتمع الإنساني نفسه. ولو عاش سكان لشبونة في مستوطنات أصغر وأكثر تفرقاً لكانت الكارثة أقل فتكاً بكثير. وكان تركيز السكان في منشآت حضرية كثيفة، كثير منها سيئ البناء، هو ما حول حدثاً جيولوجياً إلى كارثة بشرية من الدرجة الأولى. ولم يكن الزلزال، في هذه القراءة، نقضاً للنظام الإلهي، بل كشفاً للاضطراب البشري: فضحاً لمواطن الضعف التي يخلقها المجتمع الإنساني لنفسه.

وتمثل هذه الحجة لعل أقدم بيان منهجي لما يسميه علم الكوارث المعاصر *البناء الاجتماعي لقابلية الضرر*:

إدراك أن القدرة التدميرية لأي خطر طبيعي لا تنفصل عن البيئة المبنية والترتيبات الاجتماعية التي يواجه المجتمع الخطر من خلالها (Blaikie **andothers,** 1994; Wisner **andothers,** 2004). وتحتفظ بصيرة روسو—أن الزلزال لم يقتل عشرات الآلاف؛ بل مدينة لشبونة هي التي قتلتهم—بقوتها التحليلية في الحاضر، وتستبق بقرنين الإطار الذي يقيّم من خلاله المهندسون المعاصرون وباحثو الكوارث الخطر الزلزالي.

16.4.4.2 كانط

تناول إيمانويل كانط زلزال لشبونة من اتجاه فلسفي مختلف، فأنتج ثلاثة مقالات علمية عن الموضوع في الأشهر التالية مباشرة للكارثة. ورفض كانط كلاً من القدرية اللاهوتية والتفسيرات القائمة على المصادفة المحضة، وذهب إلى وجوب فهم الكارثة نتيجةً دقيقة لقوانين طبيعية ثابتة. وتعمل الطبيعة، وفق هذا التصور، بمبادئ منتظمة لا بقوى عشوائية. ولا تنقض الكوارث وجود النظام الطبيعي، بل تكشف العمليات الديناميكية التي تتطور الأرض من خلالها.

وشدد كانط على أنه لا يمكن تفسير العالم الطبيعي من منظور متمركز حول الإنسان وحده. فللأرض انتظامها واقتصادها الخاصان، وتقع التحولات الجيولوجية وفق قوانين قد تولد تغيراً تدريجياً واضطراباً مفاجئاً معاً. والكون نفسه في تحول مستمر، ولا تكون الانتقالات داخل الطبيعة مسالمة دائماً. ومع ذلك تقع هذه التغيرات داخل إطار منظم تحكمه قوانين طبيعية.

ومن هذا المنظور، لا يصبح زلزال لشبونة حدثاً بلا معنى، بل تجلياً ديناميكياً للعمليات التي تشكل الأرض. ولذلك يجب فهم الكوارث الطبيعية جزءاً من التطور الأوسع للكوكب. ويمنح قبول التغير داخل جسم الطبيعة الكارثة بُعداً فلسفياً مختلفاً: فبدلاً من الفوضى المحضة، تمثل الكارثة تعبيراً ممكناً عن التحولات القانونية التي تبني العالم الطبيعي. وبهذا المعنى تمثل استجابة كانط للشبونة لحظة حاسمة في تاريخ الفلسفة الطبيعية: اللحظة التي يتوقف فيها الزلزال عن أن يكون مشكلة لاهوتية في المقام الأول، ويصبح بدلاً من ذلك مشكلة علمية. وتُبحث الأبعاد الأدبية لنقاش لشبونة—*Candide* لفولتير، وقصة كلايست، ومجموعة الأدب التي ولدتها—في §16.5.2.

وهكذا عملت الزلازل، من التكهن اليوناني المبكر إلى بوتقة التنوير في لشبونة، محفزاً دائماً للتأمل الفلسفي، فأجبرت المفكرين على مواجهة أسئلة أساسية عن بنية العالم الطبيعي، وحدود العناية الإلهية، ومكان البشر داخل كون عنيف لا يمكن التنبؤ به أحياناً. وكان كانط أول من صاغ الجواب الذي ستصدقه علوم الأرض خلال القرنين التاليين: لا يعني الزلزال شيئاً إلا ما تقتضيه قوانين الطبيعة.

16.4.5 إعادة الإعمار

كان للكارثة أيضاً أثر مادي مباشر ودائم الأهمية. وتقف إعادة ماركيز بومبال إعمار حي بايشا لحظةً مؤسسة للتخطيط الحضري الحديث والهندسة الزلزالية—وكان جواب السؤال الفلسفي عن كيفية استجابة البشر للكارثة، في حالة بومبال، مكتوباً بالطوب والحجر. لكن الإنجاز المعماري لا يمكن فصله عن الظروف السياسية التي جعلته ممكناً. فقد كانت استجابة بومبال منذ البداية ممارسة لما يمكن تسميته الاستبداد المستنير: شُنق اللصوص علناً، وأجبر الجيش الفارين القادرين على العمل على المشاركة في الإغاثة، وحُظر البناء الجديد فوراً في أنحاء المدينة لمنع إعادة الإعمار الفوضوية التي أحبطت خطة رن المماثلة للندن عقب حريق 1666. وفي غضون خمسة أشهر، أرسى إطار استراتيجي—*Dissertação* لمانويل دا مايا—مبادئ تخطيط بايشا الجديدة؛ وفي غضون عامين، نقلت إعادة تشكيل قانونية جذرية لملكية العقارات الأرض من الأرستقراطية

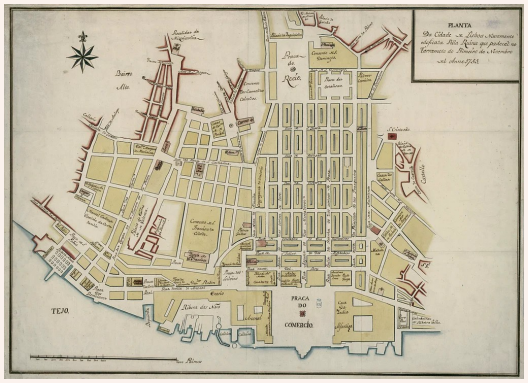
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والسلطات الكنسية إلى طبقة التجار الصاعدة، فهندست فعلياً زلزالاً سياسياً يرافق الزلزال المادي (Brand **and** Nicholson, 2013).

ولم تكن الابتكارات التقنية المدمجة في الخطة أقل عاقبة. فقد خُططت بايشا الجديدة على شبكة متعامدة عقلانية، الشكل 16.15b—نظام ديكارتي فُرض على أنقاض مدينة العصور الوسطى—بأبعاد موحدة للكتل، وارتفاعات مبانٍ منتظمة، وتسلسل واضح للشوارع المسماة على أسماء النقابات التي ستشغلها. وأدت ملاحظات التميع في المناطق النهرية إلى استخدام أساسات مدقوقة على أوتاد خشبية؛ وأدى ارتفاع معدل نجاة المباني ذات الإطارات الخشبية إلى تطوير نظام *gaiola*—أقفاص خشبية داخلية مدعمة قطرياً تستقر مستقلة داخل حوائط محيطية حجرية، وهي أول نمط بناء مقصود لمقاومة الزلازل في التاريخ الأوروبي. ووُسعت الشوارع بحيث يظل ممر للإخلاء بين المباني حتى إذا انهارت مباني الجانبين في آن واحد. وصُنعت المكونات مسبقاً خارج الموقع لتتيح التجميع السريع، وأصبحت حوائط الحريق الممتدة فوق خط السقف معياراً في جميع المباني. وهكذا مثلت الخطة تقاطعاً منتجاً بين البحث التجريبي بعد الكارثة والتنفيذ التقني واسع النطاق، لم يتكرر منهجياً إلى القرن العشرين.



(a) لشبونة



(b) إعادة إعمار حي بايشا

شكل 16.15: لشبونة، قبل وبعد

تخلص دراسة Brand **and** Nicholson, 2013 المقارنة بين لشبونة وكرايستشيرش بعد الزلزال إلى أن نجاح إعادة الإعمار البومبالية قام على ثلاثة أركان مترابطة: الهدم الكامل لبايشا المدمرة، وإعادة رسم حدود الملكيات إلزامياً، ورؤية تصميم حضري راسخة في أفضل الممارسات الدولية (Brand **and** Nicholson, 2013). وتطلب كل منها تجاوز حقوق الملكية الفردية باسم المرونة الجماعية—إخضاع المصلحة الخاصة للضرورة العامة لم يكن ممكناً إلا لأن بومبال امتلك سلطة تنفيذية مركزة وكان مستعداً لاستخدامها. وليس الدرس أن الاستبداد مرغوب في ذاته، بل أن إعادة الإعمار بعد الكوارث بجودة دائمة تطلبت تاريخياً وحدة سلطة اتخاذ القرار، ووضوح الرؤية التقنية، والاستعداد للعمل بسرعة وحسم قلما تسمح بهما العمليات الديمقراطية التداولية[16]. وفي لشبونة بومبال، لم يُعبر عن الجواب الفلسفي للكارثة بالطوب والحجر فحسب؛ بل فُرض بمرسوم.

[16] لم ينجح نقل هذا النموذج دائماً. وتقدم إعادة إعمار بيروت بعد الحرب الأهلية بواسطة *Solidere* مثالاً مضاداً تحذيرياً: فقد سُوي المركز التاريخي بالأرض، وتفكك نسيجه الاجتماعي، وأُدينت النتيجة على نطاق واسع بوصفها محاكاة معقمة شبيهة بمتنزه موضوعي للمدينة التي حلت محلها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16.5 الأدب

16.5.1 الزلازل في الأدب

تركت الزلازل أثرها في الأدب أيضاً، حيث تظهر مراجع تاريخية وأدوات درامية أو رمزية قوية في آن واحد. وقبل وقت طويل من أن يحول عصر التنوير الزلزال إلى وسيلة للنقاش الفلسفي، كانت الأحداث الزلزالية قد دخلت بالفعل المخيلة الأدبية بوصفها علامات للذاكرة الجماعية. ومن الأمثلة المبكرة زلزال مضيق دوفر في 6 أبريل 1580، الذي يبدو أنه كان أكبر زلزال سجلته السجلات التاريخية في إنجلترا وفلاندرز وشمال فرنسا. وكان الحدث راسخاً في الذاكرة إلى حد أنه دخل الوعي الثقافي لذلك العصر، وبعد نحو أحد عشر عاماً أدرج شكسبير إشارة عابرة إليه في روميو وجولييت. ففي الفصل الأول، المشهد الثالث، تتذكر المرضعة:

> مضت الآن إحدى عشرة سنة منذ الزلزال.
>
> الفصل الأول، المشهد الثالث Romeo and Juliet ,1597 Shakespeare

وعلى إيجاز هذه العبارة، فإنها تؤدي وظيفة مرساة زمنية، وتوحي بأن الزلزال ظل حياً في الذاكرة الجماعية حين ألّف شكسبير المسرحية—وهو مثال صغير لكنه بليغ على الكيفية التي تستقر بها الأحداث الزلزالية في الزمن الثقافي.

وبحلول نهاية القرن الثامن عشر، ازداد توظيف الكوارث الطبيعية في الأدب أدواتٍ درامية ضمن سرديات أخلاقية وفلسفية. وقد أثر زلزال لشبونة سنة 1755، على وجه الخصوص، تأثيراً عميقاً في المناخ الفكري الأوروبي، وألهم مجموعة من الأعمال الأدبية التي حولت الزلزال إلى وسيلة رمزية لاستكشاف موضوعات العدالة الإلهية والمعاناة البشرية وهشاشة الحضارة. ومن الأمثلة البارزة مأساة 1758) *Die Lissabonner* لكريستيان غوتليب ليبركون (Lieberkühn, 1758)، والرومانس الشعري 1777) *Les Incas* لجان فرانçوا مارمونتيل (Marmontel, 1777)، وقصة هاينريش فون كلايست الشهيرة *Das Erdbeben in Chile* (كُتبت نحو 1806 ونُشرت سنة 1810) (Kleist, 1810). وفي هذه الأعمال كلها لا يكون الزلزال مجرد ظاهرة فيزيائية، بل محفزاً سردياً يكشف التوترات الأخلاقية والتناقضات الاجتماعية والأسئلة الفلسفية عن المصير والعناية الإلهية وطبيعة المجتمع البشري.

16.5.2 زلزال لشبونة سنة 1755 ونقاش عصر التنوير

بُحثت الأبعاد الفلسفية لزلزال لشبونة في §16.4.4: استجابة كانط الطبيعية، وقراءة روسو شبه السوسيولوجية لقابلية الضرر، وهجوم فولتير على التفاؤل اللايبنتسي موقفاً فلسفياً. وما يبحثه هذا القسم هو الاستجابة الأدبية الموازية—أي الكيفية التي لم يولّد بها الحدث نفسه حججاً فحسب، بل قصائد وهجاءً وأعمالاً تخييلية أوصلت أسئلته إلى جمهور أوسع كثيراً ومنحتها دواماً لم يكن النثر الفلسفي وحده ليضمنه. ولا ينفصل البعدان: فقد كان فولتير فيلسوف لشبونة وصوتها الأدبي الأعظم في آن واحد، ويصعب عملياً رسم الحد الفاصل بين غضبه الفلسفي وغضبه الشعري.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فولتير

منحت *Poème sur le désastre de Lisbonne* لفولتير (1756) الزلزال أشهر صوت أدبي له. وليست القصيدة عملاً في الحجاج الفلسفي بل في الغضب الفلسفي: إذ تطالب بمعرفة كيف يمكن لأي نظرية تفاؤلية أن تصمد أمام مشهد الأطفال المسحوقين تحت أنقاض لشبونة.

> Direz-vous, en voyant cet amas de victimes :
> “Dieu s’est vengé, leur mort est le prix de leurs crimes” ?
> Quel crime, quelle faute ont commis ces enfants
> ? Sur le sein maternel écrasés et sanglants
>
> Voltaire [Arouet, 2009 *“Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien”*

ويمكن نقل المقطع هكذا: «*أفتقولون، وأنتم ترون هذا الركام من الضحايا: ‘لقد انتقم الله؛ وموتهم ثمن جرائمهم’؟ فأي جريمة، وأي ذنب اقترفه هؤلاء الأطفال، المسحوقون النازفون على صدور أمهاتهم؟*» ولا تتجه لائحة الاتهام إلى التفاؤل اللاهوتي وحده، بل إلى كل إطار تفسيري—دينياً كان أم فلسفياً—يحاول عقلنة المعاناة التي تصيب الأبرياء. ويصبح الزلزال، بين يدي فولتير، تفنيداً: برهاناً بالكارثة على أن العالم غير مرتب لمنفعة الإنسان، وأن المنظومات الفكرية المبنية على هذا الافتراض لا يمكن الدفاع عنها أخلاقياً.

وبعد ثلاث سنوات عاد فولتير إلى لشبونة، في *Candide, ou l’Optimisme* (1759) (Voltaire [Arouet, 1759)، بنبرة مختلفة تماماً. فالرواية—ولعلها أوسع أعمال الهجاء الفلسفي قراءةً في المرجعية الغربية—تمر ببطلها الساذج عبر أنقاض المدينة، حيث يشهد الزلزال وعواقبه، ومنها محرقة auto-da-fé نفذتها محاكم التفتيش لمنع أحداث زلزالية مقبلة. والمجاورة بشعة عن قصد: لاهوت رسمي يرد على كارثة جيولوجية بالقتل القضائي. وفي شخصية الدكتور بانغلوس، الذي يصر في كل كارثة على أن «كل شيء يسير نحو الأفضل في أفضل العوالم الممكنة كلها»، ابتكر فولتير أحد أعظم رموز خداع الذات الفلسفي في الأدب—شخصية يتحول تفاؤلها المبتهج، في مواجهة لشبونة، إلى ضرب من العمى الأخلاقي.

كلايست

تُعد قصة هاينريش فون كلايست *Das Erdbeben in Chile* («الزلزال في تشيلي»، كُتبت نحو 1806 ونُشرت سنة 1810) (Kleist, 1810) أكثر المعالجات الأدبية للزلزال اكتمالاً من الناحية الفنية في الأدب الأوروبي، وأشدها انخراطاً بصورة مباشرة في الأسئلة الفلسفية التي طرحتها لشبونة—مع أن أحداثها تقع في سانتياغو لحظة الزلزال الكارثي سنة 1647. ويكون بطلاها، خيرونيمو وخوسيفا، على وشك الإعدام لانتهاكهما القواعد الأخلاقية للمدينة، حين يدمر الزلزال السجن ومنصة الإعدام معاً، ويطلقهما إلى عالم متحول.

وما يتبع ذلك في القصة من أرهف استكشافات الكارثة والوهم في الأدب الألماني. فالزلزال يخلق، لوهلة قصيرة، نوعاً من الفردوس الاجتماعي: تُعلق التراتبيات المعتادة، ويساعد الغرباء بعضهم بعضاً، ويختبر الناجون تضامناً عابراً يتجاوز الطبقات الصارمة للمجتمع الاستعماري. ويبدو كلايست لحظةً كأنه يكتب سردية *yonaoshi*—أي «تقويم العالم» بالمعنى الياباني المناقش في §16.2.1—حيث يعمل الزلزال مسوّياً اجتماعياً عنيفاً لكنه خلاصي في النهاية.

لكن هذا الوهم يتحطم بعنف كلايستي مميز. إذ يجتمع الناجون في كنيسة لسماع عظة شكر، ويعيد الواعظ تأسيس النظام اللاهوتي الذي علقه الزلزال، فيعرّف الكارثة بأنها عقاب إلهي على المخالفات الأخلاقية نفسها

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التي اتُهم بها خيرونيمو وخوسيفا. ويهجم المصلون على الزوجين ويقتلونهما بعد أن اشتعلت مخاوفهم اللاهوتية من جديد. فيعيد النظام—الاجتماعي واللاهوتي والعنيف—فرض نفسه على الانفتاح العابر الذي أوجدته الكارثة. ولا يخلّص الزلزال؛ بل لا يفعل سوى توفير المناسبة لوحشية أكثر منهجية.

وهكذا تجسّد قصة كلايست، على مستوى السرد، المواجهة نفسها بين التفسيرين اللاهوتي والعقلاني للزلزال التي خاضها فولتير وروسو حجاجاً فلسفياً (§16.4.4). فالواعظ يقرأ الزلزال حكماً إلهياً؛ ويقرأه مجتمع الناجين العابر تحرراً؛ ويقرأه السرد الساخر لدى كلايست كشفاً للعنف الكامن في كل نظام اجتماعي. ولا تُثبت أي من هذه القراءات؛ بل تنكشف كلها إسقاطات تفسيرية على حدث جيولوجي لا يبالي، في ذاته، بالمعنى الإنساني. وبهذا المعنى يمكن قراءة *Das Erdbeben in Chile* بوصفها الإنجاز الأدبي للمسار الفلسفي الممتد من فولتير إلى كانط (§16.4.4): الزلزال مناسبةً لتجريد الأوهام المعزية ومواجهة العالم كما هو.

16.5.3 زلزال مسّينا سنة 1908

إذا كان زلزال لشبونة محفزاً لفلسفة التنوير، فإن زلزال مسّينا في 28 ديسمبر 1908 كان الكارثة الزلزالية الكبرى في المخيلة الأدبية الأوروبية الحديثة—مع أن استجابته الأدبية اتسمت بالرثاء والوطنية لا بالفلسفة بالمعنى اللشبوني. فقد ضرب الزلزال والتسونامي المصاحب له ساحلي مضيق مسّينا كليهما في ساعات الصباح الأولى، وقتلا ما يقدر بنحو 80,000 إلى 120,000 إنسان ودمرا مدينتين تدميراً شبه كامل، مما جعله أشد الأحداث الزلزالية فتكاً في التاريخ الأوروبي.

وأثار حجم الكارثة استجابة فورية من الوسط الأدبي الإيطالي. فكتب جيوفاني فيرغا، الروائي الواقعي الصقلي الكبير، عن الناجين «الصامدين على أنقاض مدينتهم المنكوبة»—مستحضراً لغة المقاومة والهوية التي ستصبح مركزية في الذاكرة الثقافية للحدث. ووصف لويجي كابوانا، أحد مؤسسي حركة *verismo*، الدمار بمباشرته المعهودة: لم يحتج الزلزال إلا إلى دقيقة واحدة لمحو ما استغرق بناؤه أجيالاً. وتوضح هذه الاستجابات، التي جُمعت في منشور *Scilla e Cariddi* (Barzilai, 1909) الصادر عن رابطة الصحافة الدورية الإيطالية لمساعدة أيتام الزلزال، كيف استوعبت كارثة مسّينا ضمن خطاب التضامن الوطني والحداد الجماعي—وهي عملية تماثل بنيوياً القراءات الاجتماعية والسياسية المشفرة في مطبوعات *namazu-e* اليابانية المناقشة في §16.2.1.

غير أن أبقى الاستجابات الأدبية لزلزال مسّينا جاءت من كاتب عاشه طفلاً. فقد انتقل الشاعر سالفاتوري كوازيمودو—الذي سينال جائزة نوبل في الأدب سنة 1959—إلى مسّينا مع أسرته في أعقاب الكارثة مباشرة، إذ نُقل والده إليها بصفته موظفاً في السكك الحديدية للمساعدة في جهود الإنقاذ. وفي قصيدته *إلى أبي*، التي كتبها بعد عقود، استعاد كوازيمودو المشهد بدقة تصويرية تحفظ تجربة الكارثة رغم امتداد السنين:

Dove sull’acque viola era Messina,
tra fili spezzati e macerie
tu vai lungo binari e scambi
col tuo berretto di gallo isolano.
Il terremoto ribolle da due giorni,
è dicembre d’uragani
e mare avvelenato.

حيث كانت مسّينا بنفسجية فوق المياه،
بين الأسلاك الممزقة والأنقاض،
تمضي على امتداد القضبان والمفاتيح
بقلنسوة ابن الجزيرة المزهو بنفسه.
ومنذ يومين والزلزال يفور،
إنه ديسمبر الأعاصير
وبحر مسموم.

“Al padre” La terra impareggiabile, Quasimodo, 1958

وتلتقط صورة مسّينا المستلقية «بنفسجية فوق المياه»، باقتصاد غنائي، ما تسجله المسوحات الهندسية في

إحصاءات الأضرار: مدينة كاملة ذابت إلى أنقاض عند حافة البحر. أما كون الزلزال «يفور» ثلاثة أيام فيشفّر، في تكثيف الشاعر، تجربة الهزات الارتدادية التي مددت الدمار إلى ما بعد الحدث الأول—وهو تفصيل ذو أهمية زلزالية وأدبية معاً.

والمقارنة مع لشبونة مفيدة. فقد ولّدت مسّينا الرثاء والتضامن الوطني، حيث ولّدت لشبونة الفلسفة والأزمة اللاهوتية. ولا يعكس الفرق مجرد المسافة الثقافية بين 1755 و1908، بل تحولاً مهماً في الإطار الفكري الذي فُسرت الزلازل ضمنه: فبحلول أوائل القرن العشرين لم يعد السبب الطبيعي للزلزال موضع نزاع جدي، وانحسر سؤال الحكم الإلهي عن مركز الخطاب المتعلم. وما بقي—وما يعكسه أدب مسّينا—هو التجربة الإنسانية للكارثة: الحزن والتضامن والذاكرة وعملية إعادة البناء. وفي هذا الانتقال من اللاهوتي إلى المعيش، تعكس الاستجابة الأدبية للزلزال المسار الفكري الأوسع المرسوم في هذا الفصل كله، من الأسطورة مروراً بالدين والفلسفة وصولاً إلى المواجهة العلمانية مع القوى الطبيعية التي تميز العصر الحديث.

16.5.4 خلاصة: الأدب والذاكرة الثقافية للزلازل

تكشف التقاليد الأدبية المدروسة في هذا القسم مدى ثبات عمل الأحداث الزلزالية الكبرى محفزاتٍ للمراجعة الثقافية والفكرية—وكيف تغيرت طبيعة تلك المراجعة عبر الزمن. فإشارة شكسبير الوجيزة إلى زلزال 1580 تعمل علامة تذكارية، ودليلاً على أن الأحداث الزلزالية تستقر في الذاكرة الجماعية وتصبح نقاطاً مرجعية للزمن الثقافي. ويؤدي أدب لشبونة وظيفة مختلفة وأكثر طموحاً: فهو يحول كارثة جيولوجية إلى حجة، ويوظف الزلزال دليلاً في نزاع فلسفي حول بنية العالم ومكان الإنسان فيه—وهو نزاع أرسى كانط وفولتير وروسو بنيته التحتية الفلسفية، كما بُحث في §16.4.4، ويُبحث تعبيره الأدبي هنا. أما أدب مسّينا، بالمقابل، فهو ما بعد فلسفي: يرثي ويحيي الذكرى ويشهد، لكنه لم يعد يسأل إن كان الزلزال يعني شيئاً بالمعنى اللاهوتي.

ويعكس هذا المسار—من علامة تذكارية، مروراً بمحفز فلسفي، إلى مرثية علمانية—القوس الأوسع المرسوم في هذا الفصل كله: الإزاحة التدريجية للتفسيرات الأسطورية والدينية والعنايتية للزلازل بأطر متجذرة في البحث الطبيعي والتجربة الإنسانية. ويجد تأكيد ديراك الواثق، المقتبس في افتتاح §16.2، أن الفهم الحديث للعمليات الطبيعية جعل التفسير اللاهوتي للكوارث متقادماً، أكثر أدلته إقناعاً لا في أي حجة فلسفية بل في السجل الأدبي نفسه: في المسافة بين *Poème* فولتير—التي لم تستطع وصف لشبونة من دون مواجهة الله—وقصيدة كوازيمودو، التي يغيب الله عنها تماماً، ويفور فيها الزلزال ثلاثة أيام في بحر مسموم.

16.6 العمارة

16.6.1 بيرّو ليغوريو

تمثل أعمال بيرّو ليغوريو، الذي كتب *Libro di diversi terremoti* سنة 1570، محطة مهمة أخرى في التاريخ الفكري المبكر للزلازل. فقد جمعت هذه الرسالة النظريات المعاصرة عن الظواهر الزلزالية وقيمتها نقدياً، وتمثل إحدى أقدم المحاولات المنهجية في العالم الغربي لإخضاع الزلازل للتحليل العقلاني بدلاً من التفسير اللاهوتي—مما يضعها في صميم التقليد المدروس في هذا الفصل. ومن اللافت أن العمل يتضمن

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أيضاً ما يُعتقد أنه أول تصميم لمنشأ مقاوم للزلازل في تاريخ العمارة الغربية، وهو تفصيل يجعل ليغوريو شخصية انتقالية بين التقليد الفلسفي المستعرض أعلاه والتقليد الهندسي المدروس في فصول لاحقة من هذا العمل. وقد أعادت إيمانويلا غيدوبوني اكتشاف المخطوطة ونشرتها في طبعة علمية حديثة سنة 2005 (Ligorio, 2005).[17]

16.6.2 جيبلّينا

في 15 يناير 1968 ضرب زلزال مدمر مقداره 6.4 مدينة وادي بيليتشي في غربي صقلية، فقتل نحو 400 شخص وترك قرابة 100,000 بلا مأوى. وكانت جيبلّينا، وهي بلدة زراعية صغيرة تضم نحو 6,000 نسمة، من البلدات التي دُمرت تماماً، الشكل 16.16a. وكان الدمار شاملاً: انهارت كتل كاملة، ومُحي نسيج الشوارع الوسيط، وفر الناجون إلى مدن خيام مؤقتة في الريف المحيط، الشكل 16.16b. وما تلا ذلك كان أحد أطول جهود إعادة الإعمار وأكثرها شحناً سياسياً في تاريخ إيطاليا. فقد استجابت الدولة الإيطالية ببطء وفوضى؛ ولم تُسلّم مساكن الطوارئ لسنوات، وظل المهجرون عالقين في ثكنات مؤقتة—بعضهم لأكثر من عقد. وأصبح الزلزال رمزاً لإهمال روما لجنوب إيطاليا، وصار وادي بيليتشي مثلاً للفشل المؤسسي والفجوة بين الشمال المزدهر و*Mezzogiorno* الفقير. واحتشد الكتاب والمثقفون والنقابيون حول الناجين، ثم ارتبطت إعادة بناء بلدات بيليتشي في النهاية بنقاشات أوسع عن التخطيط الحضري والهوية الثقافية وسياسات الكوارث في إيطاليا ما بعد الحرب (Musolino, 2017).

وفي هذا السياق المشحون تصور الفنان ألبرتو بوري (1915–1995) واحدة من أروع الاستجابات للدمار في تاريخ فن الأرض. وكان بوري آنذاك من أشهر فناني إيطاليا بعد الحرب، ومعروفاً دولياً بأعماله *Sacchi* (لوحات مصنوعة من أكياس خيش مخيطة)، ومواد البلاستيك المحروقة، وقبل كل شيء بأعماله *Cretti*—وهي لوحات مغطاة بخلائط أساسها الكاولين تولد، مع جفافها وانكماشها، شبكات من الشقوق تشبه على نحو غريب الأرض الظامئة أو الطين الجاف أو—لا محالة—الأرض التي صدعها الزلزال. وكانت القفزة من اللوحة إلى المشهد الطبيعي جريئة مفاهيمياً لكنها متماسكة بصرياً: ففي جيبلّينا واصل بوري ببساطة ما فعله دائماً، ولكن على مقياس حضاري (Forty, 2013).

بين عامي 1984 و1989، ثم في عمل أُنجز بعد وفاته سنة 2015، أشرف بوري على تغليف حقل أنقاض جيبلّينا القديمة كله تحت غطاء متصل من الخرسانة البيضاء (Forty, 2013)، الشكل 16.16c. ولم تكن العملية محواً بل تحجيراً: فقد اتبعت الخرسانة شبكة الشوارع السابقة، وحفظت مخططات الطرق والأفنية وبصمات المنازل في هيئة شرائط بيضاء مرتفعة تفصل بينها شقوق يمكن السير فيها. وتعكس هذه الشقوق—«المشققة» عمداً في السطح—التمزقات الزلزالية التي سببت الدمار والمعالجة السطحية المميزة للوحاته معاً، وقد اتسعت الآن إلى مقياس حي حضري كامل. ويبلغ قياس العمل المنجز نحو 300 في 400 م، ويغطي قرابة 80,000 متر مربع، ويُقرأ شكلاً متماسكاً في التصوير الجوي والفضائي. وهو من أكبر منشآت فن الأرض التي أُنشئت قط.

[17] تُنسب حالة لافتة أخرى من البحث المبكر في الزلازل إلى أنثيميوس التَرالِيسي (نحو 474–نحو 558)، أحد المعماريين الرئيسيين لآيا صوفيا، الذي قيل إنه أنشأ جهازاً ميكانيكياً يستخدم البخار لمحاكاة الاهتزازات الزلزالية تحت منزل جار له—كان خصماً قانونياً وفق المصادر—مما قد يجعلها أقدم حالة مسجلة لمحاكاة زلزال اصطناعي (Dragoni, 2005; Downey, 1946). وإنها لمصادفة جديرة بالحفظ أن يُنسب أيضاً أول محاكاة للزلازل إلى معماري واحد من أكثر المباني تعرضاً للاختبار الزلزالي في التاريخ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

زرت *Cretto* سنة 2008، وأدهشني سكونه الغريب.[18] وعند السير في ممراته البيضاء الضيقة—التي لا يكاد بعضها يتسع لمرور شخصين—يمر المرء في ما هو، في جوهره، قبر جماعي. وترتفع الجدران إلى مستوى الصدر أو الكتف، فتحيط بالسائر في متاهة من البياض المطلق. لا صوت، ولا ظل إلا قليلاً، ولا مرجع بصري وراء الخرسانة ذاتها والسماء من فوقها. والتجربة معمارية وجنائزية معاً، مجردة وشديدة التحديد: تحت القدمين تقع بلدة كاملة، مختومة وصامتة. لا يمثل *Cretto* الفقد؛ بل إنه هو الفقد وقد مُنح شكلاً مادياً (Forty, 2013).



(a) جيبلّينا قبل الزلزال





(b) جيبلّينا المدمرة



(c) عمل Creto لبوري

شكل 16.16: جيبلّينا مدمرة ومدفونة في الخرسانة

كان مصير الناجين يتطلب أكثر من نصب تذكاري. فعلى بعد عشرين كيلومتراً، في موقع مستوٍ على السهل أدناه، كان مقرراً إنشاء مستوطنة بديلة—جيبلّينا نوفا—من الصفر، الشكل 16.17a. وكان عمدة البلدة الجديدة لودوفيكو كورّاو، وهو محام وسياسي وراعٍ شغوف للفنون، يرى في الكارثة فرصة مستبعدة: إمكانية بناء مدينة تكون، منذ أساساتها، عملاً فنياً شاملاً (Badami, 2012). ودعا كورّاو كوكبة استثنائية من المعماريين والفنانين والمصممين الإيطاليين والدوليين للمساهمة في البلدة الجديدة، فحوّل ما كان يمكن أن يكون تمريناً روتينياً في الإسكان الاجتماعي إلى واحدة من أجرأ تجارب دمج العمران والفن المعاصر التي جُربت في أي مكان خلال القرن العشرين. ومن الذين أسهموا بمبانٍ أو منشآت حضرية أو منحوتات عامة أوزفالد ماتياس أونغرز، وفرانكو بوريني، وبيترو كونساغرا، ولودوفيكو كواروني، وفيتوريو غريغوتي، وأليساندرو مندیني، وميمو بالادينو (Venezia, 1989). أما الهيكل المدني الذي ربط هذه الإسهامات فكان

[18] وكانت هذه الزيارة إلى جيبلّينا بالفعل ما أثار أول مرة اهتمامي بكتابة هذا الفصل، كما أشرت في المقدمة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1990) *Sistema delle Piazze* لفرانكو بوريني ولورا تيرميس، الشكل 16.17b—وهو تسلسل من ثلاث ساحات عامة مترابطة يحيط بها رواق من حجر الطوف على مستويين، مرصوف بالرخام وحجر الحمم، ويخترقه مجرى صغير يغذي سلسلة من النوافير، وصُمم ليعمل مفصلاً اجتماعياً بين الأحياء السكنية وإطاراً نصبياً للأعمال الفنية الموزعة في أنحاء البلدة. وإجمالاً ترك أكثر من ثمانين معمارياً وفناناً بصمتهم في جيبلّينا نوفا، وصارت البلدة—من حيث النية على الأقل—متحفاً مفتوحاً للتصميم الحداثي المتأخر وما بعد الحداثي.



a) لبيترو كونساغرا *Porta del Belice*)



b) فرانكو بوريني ولورا تيرميس، *Sistema delle Piazze*





c) لبيترو *Snake*) كونساغرا



d) لبيترو كونساغرا *Teatro Frontale*)

شكل 16.17: جيبلّينا نوفا

ومن اللافت والملائم أن الشكل 16.17c يعرض منحوتة منسوبة إلى بيترو كونساغرا، أحد الفنانين الصقليي المولد الذين أسهموا بأوسع صورة في مشروع كورّاو للمتحف المفتوح؛ وهي تقدم شكلاً أنبوبياً متموجاً من معدن معتّق تدعو مورفولوجيته الملتفة—سواء بقصد التصميم أو بمنطق الشكل المجرد الذي يجد صداه الخاص—إلى مقارنته بالأشكال الأفعوانية التي نوقشت في هذا الفصل كله بوصفها حوامل عابرة للثقافات للقوة الزلزالية والجوفية. ولعل كونساغرا، وهو تجريدي ملتزم من المدرسة الإيطالية بعد الحرب، كان سيرفض قراءة أسطورية صريحة (فقد كان ماركسياً متحمساً)؛ ومع ذلك يصعب رد اجتماع منحوتة أفعوانية في بلدة أعيد بناؤها بعد زلزال كارثي، وفي منطقة شُفرت عنفها الجيولوجي في الأرض نفسها تحت *Cretto*، إلى محض المصادفة.

ولعل Teatro Frontale لبيترو كونساغرا، الشكل 16.17d، (بدأ سنة 1984 ولم يكتمل قط) هو النصب الأكثر تعبيراً عن يوتوبيا جيبلّينا نوفا التي لم تتحقق: إذ تصوره النحات «منحوتة حية» لا مسرحاً تقليدياً، ويقف صف عقوده الخرسانية الشاهقة—وحديد التسليح ما يزال مكشوفاً لسماء صقلية—مرثية غير مقصودة لطموحات إعادة الإعمار بعد الزلزال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن التجربة لم تخلُ من إخفاقات عميقة ومفيدة[19]. فمع كل طموحها الثقافي، عاش كثير من سكان جيبلّينا نوفا—ولا سيما المسنين—البلدة مكاناً شديد التغريب (Musolino, 2017). وكانت جيبلّينا القديمة بلدة تل كثيفة متاهية من النوع الشائع في صقلية: شوارع لا يكاد عرضها يتجاوز مترين، ومنازل متراصة، وجيران لا يفصل بينهم إلا جدار أو درج مشترك، وحياة عامة تُمارس في ساحات ملائمة للمحادثة لا للاستعراض. أما البلدة الجديدة فانتشرت على سهل مستوٍ في مخطط متفرق منخفض الكثافة، بشوارع عريضة ودوارات نصبّية ومشاهد نحتية لا صلة لها بنسيج العمران الصقلي التقليدي (Badami, 2012). وكانت المباني لافتة أجساماً منفردة، لكنها أخفقت في توليد الاحتواء المكاني والألفة الاجتماعية اللذين نظما الحياة اليومية في البلدة الأصلية. ولم يعد السكان الأكبر سناً قادرين على الاهتداء أو السير إلى جيرانهم أو إعادة إنتاج عادات العمر وطقوسه. وتحدث كثيرون عن البلدة الجديدة باعتبارها مكان منفى لا عودة. لقد مُنح المجتمع عمارة، لا المدينة التي فقدها.

وهكذا تقف جيبلّينا أشد دراسات الحالة إدهاشاً بصرياً، ولعلها أكثرها إفادة، عند تقاطع علم الزلازل والعمارة والعمران. ويمثل *Cretto* نصباً لا بديل له للفقد؛ أما جيبلّينا نوفا فدرس تحذيري في الفجوة بين الرؤية المعمارية والحياة الاجتماعية. وهما معاً يشكلان أكثر تأملات الزلزال والبيئة المبنية تركيزاً في أي مكان في العالم.

16.7 الفن

16.7.1 الفن الصخري وآثار الصدوع

يربط مثالان مقنعان صور الزلازل مباشرة بالمنشآت الجيولوجية النشطة، ويوضحان معاً مدى الأدلة المتاحة لهذا النوع من الحجاج—من الملاحظة الجيولوجية إلى التفسير الثقافي.

ففي سييرا دي سان فرانسيسكو في باخا كاليفورنيا، يحفظ الموقع المعروف باسم *Cueva de la Serpiente* (كهف الأفعى) جدارية بطول يقارب ثمانية أمتار تصور أفعى كبيرة ذات قرون تحيط بها قرابة خمسين شخصية بشرية وحيوانية، الشكل 16.18. ولاحظ الترتيب البصري المتأرجح للشخصيات البشرية والحيوانية حول الأفعى ذات القرون في المركز، بما يوحي بحركة جانبية ديناميكية عبر اللوحة. والتكوين غير ساكن: فترتيب الشخصيات يخلق إيقاعاً بصرياً متأرجحاً، كأن الأفعى تنسج طريقها ديناميكياً عبر اللوحة، وتضم العالم البشري والحيواني إلى حركتها. وأمام الكهف مباشرة ينحرف المجرى الجاف فجأة شرقاً قبل أن يستأنف مساره شمالاً—وهو شذوذ تصريفي يتفق مع صدع انزلاقي مضربي ذي اتجاه شرقي–غربي يزيح قناة المجرى. ولا يثبت تزامن الصورة والجيولوجيا علاقة سببية بالطبع؛ لكنه يثير سؤال ما إذا كان الذين اختاروا هذا الموقع ورسموا هذا الجدار قد أدركوا، بمفاهيمهم الخاصة، أن الأرض هنا تتحرك على نحو مختلف عن الأرض في غيره.

والمثال الثاني هو *Chumash Painted Cave* في جبال سانتا ينز شمال سانتا باربرا، الشكل 16.19، ويقع

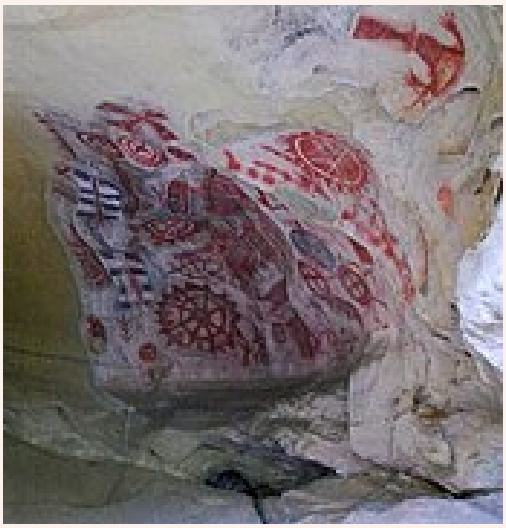
[19] يقدم مصير *Sassi* في ماتيرا مقابلاً مفيداً لمأساة جيبلّينا المزدوجة. فقد أُخليت بمرسوم حكومي في خمسينيات القرن العشرين بسبب الفقر والظروف غير الصحية—إذ جعل كتاب كارلو ليفي 1945 (*Cristo si è fermato ad Eboli*) المساكن الكهفية مثالاً لبؤس جنوب إيطاليا—لكن المستوطنة القديمة المنحوتة في الصخر لم تُهدم، بل هُجرت ببساطة. وسمح قانون سنة 1986 بإعادة شغلها، ثم جاء اعتراف اليونسكو سنة 1993، وأصبحت *Sassi* اليوم حياً حضرياً مزدهراً من جديد، وإن أثقلته السياحة. فحيث مُحيت جيبلّينا وأعيد اختراعها، أُفرغت ماتيرا واستُعيدت: نجا النسيج الأصلي، ومعه إمكانية العودة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 16.18: جدارية كويفا دي لا سيربيينتي، سييرا دي سان فرانسيسكو، باخا كاليفورنيا.

قريباً من صدع أرويو باريدا النشط. وقد فسر بعض الباحثين الرسوم التصويرية في الموقع—وهي أشكال معقدة متشابكة، وأنماط شعاعية، وهيئات توحي هندستها بالحركة لا بالسكون—بوصفها استجابات ثقافية محتملة لنشاط زلزالي محسوس، مع أن هذا التفسير ما يزال موضع نقاش بين علماء الآثار، إذ يربط كثير منهم الصور بدلاً من ذلك بتجربة رؤيوية شامانية.



شكل 16.19: رسوم تصويرية في كهف تشوماش المرسوم، جبال سانتا ينز، كاليفورنيا.

ولا يلزم أن يكون التفسيران متعارضين. ففي إطار كوني تُفهم فيه الزلازل والحالات الرؤيوية معاً بوصفها تجليات لقوة جوفية، لا يُرسم تمييز كبير بين التجربتين. وما يمكن قوله بثقة أكبر هو أنه من المستبعد أن يكون الموقع قد اختير اعتباطاً. فموضعه داخل مشهد طبيعي نشط تكتونياً يوحي بأن للمكان نفسه أهمية معترفاً بها، حتى وإن عُبّر عن تلك المعرفة بمفاهيم رمزية أو كونية تختلف كثيراً عن مفاهيم علوم الأرض الحديثة.

وعند جمع هذه الأمثلة بغيرها من الأمثلة المناقشة في هذا الفصل، يظهر نمط أوسع. فكثيراً ما تولد المشاهد الطبيعية المعرضة للزلازل أساطير الأفعى، وهي صلة قد لا يصعب فهمها. فالأفعى مخلوق جوفي ديناميكي قادر على الظهور المفاجئ وإطلاق قوة مدمرة، ويتحرك حركة ملتوية جانبية تذكر بحركة تمزق الصدوع أو انتشار الموجات الزلزالية في الأرض غير المتماسكة. ومن الأفعى ذات القرون في باخا كاليفورنيا إلى *sisiutl*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ذي الرأسين في شمال غرب المحيط الهادئ، يظهر الشكل مراراً استعارةً عابرة للثقافات لقوى حقيقية ومتكررة ويصعب تفسيرها بغير ذلك.

وإلى جانب الأفعى ذاتها، كثيراً ما تضع أساطير الزلازل الأمريكية الأحداث الزلزالية ضمن سرديات كونية للدمار والتجدد الدوريين. ويجد تقليد الأزتك المتعلق بعصور العالم المتعاقبة، التي تنتهي كل منها بكارثة، نظائر سردية لافتة في تقاليد أمريكا الوسطى. وتظهر أفكار شبيهة في أنحاء أخرى من العالم؛ ويقدم مفهوم *yonaoshi* الياباني («تقويم العالم») أحد هذه الأمثلة، وسيُناقش في القسم التالي.

16.7.2 الرسم

وجدت الزلازل تعبيراً في الفنون البصرية، حيث حاول الرسامون تمثيل العنف المادي للحدث والاستجابة الإنسانية للكارثة معاً. وتتأرجح التمثيلات الفنية بين تقليدين: *peinture de genre*، الذي يركز على حياة الناس اليومية في مواجهة الكارثة، و*peinture d'histoire*، الذي يرفع الحدث إلى مستوى تاريخي ورمزي أوسع.

ومن الأمثلة البارزة في القرن التاسع عشر عمل ليوبولد روبير، الذي رسم مشاهد استلهمها من أعقاب زلزال في نابولي نحو سنة 1830. ولا يقتصر التركيز على الدمار نفسه، بل يشمل الدراما الإنسانية التي تتكشف في المشهد الحضري المدمر—عمارة مهدمة، وسكاناً مهجرين، وكرباً عاطفياً—بما يعكس افتتان الرومانسية الأوسع بالكارثة والجليل، الشكل 16.20a.

وفي أمريكا اللاتينية تناول فرناندو بوتيرو الموضوع صراحة في *Terremoto en Popayán*، مستلهماً الزلزال المدمر سنة 1983 الذي ضرب المدينة الكولومبية التاريخية. ويحول تفسير بوتيرو الكارثة إلى سرد بصري قوي، يجمع شخصياته الحجمية المميزة بمشاهد الدمار الحضري، الشكل 16.20b.

وقد شددت النقاشات العلمية على الدور المزدوج للكارثة حدثاً تاريخياً وموضوعاً جمالياً معاً. فتتبعت سيلفي فورمان تطور صور الزلازل من مشاهد النوع إلى الرسم التاريخي، من جان بيير سان أورس إلى ليوبولد روبير Wuhrmann, 1994. واستكشف ميشيل ريبون «جماليات الكارثة»، محتجاً بأن للكوارث مثل الزلازل مكاناً مهماً في تاريخ التمثيل الفني لأنها تواجه الفنانين بحدود النظام والاستقرار والسيطرة البشرية Ribon, 1999.

16.7.3 مجموعة كوزاك

تحظى المجموعة الخاصة ليان كوزاك (Kozak, Moreira **and** Oldroyd, 2005) بأهمية كبيرة. فقد جمع عالم الأرض التشيكي في المعهد الجيوفيزيائي للأكاديمية التشيكية للعلوم، على مدى أربعة عقود، واحدة من أكبر سلاسل العالم من صور الكوارث الطبيعية السابقة للتصوير الفوتوغرافي: أكثر من 2,300 مادة تغطي الزلازل والثورات البركانية وأمواج التسونامي. وأُهديت مجموعة فرعية من 875 شريحة إلى مركز أبحاث هندسة الزلازل بجامعة كاليفورنيا في بيركلي، ورقمنها موظفو مكتبة NISEE-PEER وأتيحت على الإنترنت؛ لكن تلك البوابة لم تعد متاحة للعامة.

وتضم المجموعة صوراً لا حصر لها لزلزال لشبونة سنة 1755 (Keller, 1998; Kozak, Moreira **and** Oldroyd, 2005)، وزلزال نابولي سنة 1830 (كما صوره ليوبولد روبير)، وعدداً كبيراً من مطبوعات *namazu-e* (Giacomoni, 2005). وأكثر صورها المنشورة يسراً هو المجلد الذي شارك في تأليفه مع عالم الجيوفيزياء

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) ليوبولد روبير، *Napolitaine pleurant sur les ruines de sa maison après un tremblement de terre* (نحو 1830)



(b) فرناندو بوتيرو، *Ter-remoto en Popayán* (1999)

شكل 16.20: استجابتان تصويريتان للكارثة الزلزالية

فلاديمير تشيرماك (Kozák **and** Cermák, 2010)، والذي يستعين بالمجموعة ليقدم نسخاً كاملة الصفحة من نقوش نادرة وخرائط قديمة ورسوم تخطيطية، ترافق كل منها مادة عن الخلفية الجيوفيزيائية والتاريخية للحدث ومصدر الصورة. وتشمل الزلازل المعروضة زلازل بازل (1356)، والقسطنطينية (1762)، وسان فرانسيسكو (1868 و1906)، إلى جانب ثورات بركانية وأمواج تسونامي تمتد من القرن الرابع عشر إلى القرن التاسع عشر. ويربط العمل تاريخ العلم بتاريخ الفن، موثقاً كيف رصدت مجتمعات ما قبل الحداثة الكارثة الزلزالية وسجلتها وفسرتها قبل ظهور التصوير الفوتوغرافي.

16.7.4 مجموعة أميليو

كان الزلزال أيضاً موضوع مجموعة خاصة مهمة وفريدة من الفن الحديث (Fondazione) (*Terrae Motus* Amelio, 1987). فبعد الزلزال الذي ضرب إيربينيا وبازيليكاتا في 23 نوفمبر 1980، دعا تاجر الفن المعاصر النابولي لوتشيو أميليو (1931–1994)—وكان مقتنعاً بأن قوة الفن وحدها يمكن أن تقود إلى الولادة من جديد—فنانين مشهورين دولياً إلى تقديم أعمال تستجيب للكارثة. وتأسست مؤسسة أميليو رسمياً في نوفمبر 1982 لتمنح المشروع أساساً مؤسسياً، ونمت المجموعة لتضم أكثر من 70 لوحة ومنحوتة لأكثر من 50 فناناً إيطالياً ودولياً، من بينهم جوزيف بويز وآندي وارهول وكيث هارينغ وروبرت مابلثورب وساي تومبلي وغيرارد ريختر وأنسلم كيفر وكريستيان بولتانسكي وميمو بالادينو ونينو لونغوباردي.

توضح ثلاثة أعمال مدى الاستجابات الفنية التي استثارها أميليو. ومن أشهرها *Fate presto* لوارهول، الشكل 16.21a، وهي إعادة تفسير بفن البوب للصفحة الأولى من صحيفة نابولي *Il Mattino* المنشورة في الأيام التالية للزلزال مباشرة. وأسهم جوزيف بويز بعمل 1981 (*Terremoto in Palazzo*)، وهو تركيب جُمّع من أدوات حرفية استعيدت شخصياً من قرى دمرها الزلزال—طاولة خياط، ومقعد إسكافي، ورف صانع براميل—وقد نُزعت من سياقاتها ونُثرت بينها شظايا زجاج، وحُشرت أوانٍ فخارية بين الحائط والأثاث، ووُضعت بيضة واحدة في اتزان حرج، استحضاراً للهشاشة والتفكك اللذين خلفتهما الكارثة. واستجاب روبرت مابلثورب بخماسية من خمس مطبوعات جيلاتين فضي كبيرة (*Denis Speight with Thorns*، و*Jack with Crown*، و*Skull and Crossbones*، و*Jill Chapman* و1983، *Dennis Speight with Flowers*)، نُظمت

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) آندي وارهول: *Fate presto*



(b) أنسلم كيفر- *Et la terre trem-ble encore, d'avoir vu la fuite des géants*



(c) روبرت مابلثورب: خماسية Terrae Motus

شكل 16.21: إسهامات مختارة (وارهول ومابلثورب وكيفر) في مجموعة أميليو

حول رموز آلام المسيح؛ وتصور اللوحة المركزية قاعدة جمجمة وعظمتين متقاطعتين عند مدخل كنيسة سانتا ماريا ديللي أنيمي ديل بورغاتوريو آد أركو الباروكية في نابولي، وقد التُقطت خلال إقامة الفنان في نابولي، الشكل 16.21c[20]. أما عمل أنسلم كيفر *Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des géants*[21] فيحول معركة واترلو إلى استعارة لكارثة زلزالية: إذ يفتح الطين النضيج المطبق مباشرة على القماش جرحاً كبيراً عبر السطح المرسوم، تقطعه علامات سوداء وكتابات شعرية متجولة، فيدمج الرسم بمادة الأرض ذاتها، الشكل 16.21b.

عُرضت المجموعة أول مرة في دير مؤهل في نابولي سنة 1984، ثم عُرضت في القصر الكبير بباريس سنة 1987، مما منح المشروع اعترافاً دولياً. وأوصى أميليو بالمجموعة للدولة الإيطالية؛ ومنذ نوفمبر 1992 وهي معروضة عرضاً دائماً في Grande Galleria بقصر ريجيا دي كازيرتا العائد إلى القرن الثامن عشر[22]،

[20] لا تكبّر الصورة كثيراً، فهذا مابلثورب في النهاية!

[21] للوحة أخرى لكيفر، راجع الصفحة 618.

[22] لم يكن اختيار الموقع الدائم لمجموعة *Terrae Motus* في ريجيا دي كازيرتا مصادفة، بل كان نتيجة قرار متعمد ومشحون عاطفياً اتخذه أميليو نفسه. فقبل وفاته سنة 1994، زار أميليو أسقف كازيرتا آنذاك، رافاييل نوغارو، مرتين؛ رافقه في الأولى المشرف جيان ماركو ياكوبيتي، وجاء مرة وحده. وطلب من نوغارو توقيع وثيقة يتعهد فيها بالتزامه الشخصي، بصفته سلطة أخلاقية عامة، بضمان التركيب الدائم للمجموعة في الريجيا. وكان السبب الذي ذكره أميليو صريحاً: فقد قال للأسقف إن نابولي سرقت منه بالفعل كل شيء من دون أي امتنان، وإن قراره توريث المجموعة لكازيرتا لم ينبع من حقد أو رغبة في الانتقام، بل من خيبة عميقة في مدينته الأصلية التي لم تعترف بما يكفي بإسهامه الثقافي، مع أنه أمضى عقوداً يحول صالته في بيازا دي مارتيري إلى مركز للفن المعاصر الدولي. وقد وصف الأسقف نوغارو، وهو يروي هذه اللقاءات في رسالة مفتوحة في أغسطس 2009 عند ختام خدمته الرعوية، أميليو بأنه يحمل في داخله حزناً عميقاً لم يُحل بسبب هذا الافتقار إلى الاعتراف. وتوفي أميليو في 2 يوليو 1994، ورُكبت المجموعة رسمياً في الريجيا في وقت لاحق من العام نفسه وفقاً لوصيته التي ربطت المجموعة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث تُعرض الأعمال بالتناوب داخل الشقق الملكية، واضعة طاقة الفن المعاصر في حوار مباشر مع العظمة الباروكية للقصر البوربوني.

16.8 الموسيقى

وجدت الكوارث الطبيعية، ومنها الزلازل، تعبيراً لها في المؤلفات الموسيقية أيضاً. ومن أقدم الأمثلة البارزة أنطوان بروميل (نحو 1460–نحو 1520)، الذي ألّف القداس الشهير *Missa Et ecce terrae motus* («وإذا بالأرض قد تزلزلت»)، وكثيراً ما يسمى «قداس الزلزال». والعنوان مستمد من رواية الإنجيل للزلزال الذي رافق موت المسيح؛ ويتميز العمل بنسيجه متعدد الأصوات ذي الاثني عشر صوتاً، وهو من أكثر أعمال عصر النهضة طموحاً (Cumming, 2001).

ويصور يوهان سباستيان باخ الزلزال نفسه تصويراً تعبيرياً في كل من *آلام المسيح بحسب القديس يوحنا* (1724) و*آلام المسيح بحسب القديس متّى*[23] (1729)، محولاً ارتجاف الأرض العنيف إلى صيغة أوركسترالية وكورالية من خلال التوتر الهارموني والتوزيع الدرامي.

وبالمثل يختتم جوزيف هايدن *كلمات المسيح السبع الأخيرة على الصليب* (النسخة الأوركسترالية، 1785) بحركة تحمل صراحة عنوان *Il Terremoto*، مستحضراً زلزال الإنجيل بقوة ديناميكية مفاجئة (Webster, 2001).

وقد درس لا غورس دور الزلازل في الدراماتورجيا الموسيقية في عهد لويس الرابع عشر (La Gorce, 1996)، موثقاً كيف استخدم المؤلفون ومصممو المسرح المؤثرات الموسيقية لنقل الدمار الزلزالي إلى جمهور البلاط.

16.9 التصوير السينمائي

وجدت الزلازل تمثيلاً في السينما الوثائقية، حيث يستطيع اجتماع الشهادة البصرية ومقابلات الناجين والمواد الأرشيفية في الفيلم أن ينقل جوانب من الكارثة تظل مجردة في الروايات العلمية. والواقع أن أحد أقدم الأفلام الوثائقية المعروفة عن أي كارثة طبيعية هو *The Messina Disaster* (1909)، الذي أنتجته شركة تشينيز الإيطالية في أعقاب زلزال 1908 مباشرة—وهو الأشد فتكاً في التاريخ الأوروبي المسجل. واللافت أن النقاد المعاصرين أشادوا به تحديداً لأنه عرض الناجين لا الأنقاض، مدركين أن قوة السينما المميزة تكمن في قدرتها على توثيق المعاناة الإنسانية لا الدمار المادي وحده.

قانونياً بقصر فانفيتيلي. ولم ينته الأمر عند ذلك: ففي السنوات التالية لوفاة أميليو، حاول أفراد من أسرة أميليو وفاعلون ثقافيون نابوليون مراراً إخراج *Terrae Motus* من كازيرتا ونقلها إلى مبنى في نابولي. وعارض نوغارو هذه المحاولات علناً، مؤكداً مجدداً القوة القانونية للوصية وما سماه دَين الامتنان الثقافي والأخلاقي الذي تدين به مدينة كازيرتا للهبة. ويكشف النزاع توتراً يسري في تاريخ المجموعة كله: فمع أن الزلزال الذي ألهمها ضرب المناطق الداخلية من كامبانيا وكان أميليو نفسه نابولياً، انتهت رحلة المجموعة لا في نابولي بل في قصر ملكي بوربوني على بعد ثلاثين كيلومتراً شمالاً، وتحديداً لأن منشئها شعر بأن نابولي خذلته. عملي المفضل[23]

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وقد أصبحت الذاكرة الثقافية لزلزال 1908 نفسها موضوعاً وثائقياً: إذ يبحث فيلم جون ديكي *Messina: City Without Memory?* (2008) كيف ترك الدمار الكامل للتراث المعماري للمدينة إياها من دون الهوية التاريخية المرئية التي تمتلكها معظم المدن الإيطالية، وهو غياب ما يزال محسوساً بعد قرن.

وفي وقت أقرب وثّق المخرج الإيراني كيانوش عياري زلزال بام سنة 2003، وهو من أشد الأحداث الزلزالية تدميراً في تاريخ إيران الحديث. ونال فيلمه اعترافاً دولياً، من ضمنه جائزة روما للفيلم الوثائقي، ويقف سجلاً تاريخياً وتأملاً في الصدمة الجماعية والقدرة على الصمود معاً.

خاتمة فنية

ومن الإسهامات الأحدث والأكثر طموحاً فلسفياً في الاشتباك الوثائقي مع الكارثة الزلزالية والبيئة المبنية فيلم *Architecton* (Kossakovsky, 2024)، الذي كتبه وأخرجه المخرج الروسي فيكتور كوساكوفسكي. والفيلم تأمل يكاد يخلو من الكلمات في الحجر والخرسانة بوصفهما المادتين المؤسستين للحضارة، وهو مبني حول مشروع منظر طبيعي للمعماري الإيطالي ميكيلي دي لوكي ومصور بلقطات جوية استثنائية بالطائرات المسيّرة.

وتتنقل رحلة كوساكوفسكي بين مواقع البناء القديم والدمار الحديث على نحو يخاطب مباشرة شواغل هذا الفصل: أنقاض معبد بعلبك في لبنان (ص. 42)—ومنها الصخرة الضخمة الغامضة غير المكتملة، المسماة حجر *المرأة الحامل*، التي قُطعت من المحجر ولم تُنقل قط، وهي ندبة في المشهد الطبيعي تثير الأسئلة نفسها التي لا جواب لها عن الطموح البشري والزمن الجيولوجي التي يثيرها *Cretto* لبوري—وأنقاض المدن التركية التي دمرها زلزال فبراير 2023 الكارثي، والدمار الذي أحدثته الحرب في أوكرانيا، والأهم لهذا الفصل، جيبلّينا نوفا ذاتها، مصورة من أعلى بوصفها متحف النحت الحداثي المتأخر المفتوح الذي بناه كورّاو من أنقاض البلدة التلية الأصلية. ويتأمل الفيلم أيضاً الجمال الأولي للعقود الحجرية البسيطة والأشكال المقببة (قارن الفصلين 31 و**??**)، التي يقدم المخرج منطقها الإنشائي—حل القوة بالهندسة المحضة (قارن الفصل 8)—لا بوصفه إنجازاً تقنياً فحسب، بل نوعاً من الحكمة الحضارية التي هجرها البناء بالخرسانة والفولاذ إلى حد بعيد.

والحجة الكامنة في *Architecton*، التي يعبر عنها دي لوكي في حوار الفيلم القليل، هي أن تدمير الزلازل والحرب والاستخراج الصناعي لا ينفصل عن سؤال أعمق عن كيف نبني ولماذا: «حين نصمم شيئاً»، كما يلاحظ، «فنحن نصمم سلوك الناس». ويمنح ذلك السؤال—وهو أيضاً، في سجل آخر، السؤال الذي يطرحه كل تقليد مدروس في هذا الفصل—*Architecton* مكانة بين أكثر التأملات السينمائية نفاذاً في العلاقة بين الكارثة والبيئة المبنية. وبالنسبة إلى تاريخ للتحليل الإنشائي—وهو تخصص وُلد من إصرار الإنسان على فهم لماذا تقف الأشياء ولماذا تسقط—يقدم الفيلم تأملاً فنياً ختامياً ملائماً بوجه خاص. فهو يذكرنا بأن الأنقاض نفسها تظل تطالب بالتفسير حتى بعد فهم ميكانيكا الاستقرار والانهيار.

16.10 الخلاصة

تشكل المجالات الثمانية المستعرضة في هذا الفصل—الأسطورة والدين والفلسفة والأدب والعمارة والفن والموسيقى والسينما—تأملاً ممتداً في سؤال واحد: ماذا يعني أن تثبت الأرض تحت أقدامنا أنها لا يُعتمد عليها؟

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تنسب أقدم الإجابات الفعل إلى كائن: سمكة سلور تتحرك، أو أفعى تتلوى، أو عملاق مهزوم يتقلب تحت الجبل. ويطور الدين هذا المنعكس إلى بنية رسمية، فيُدرج الزلزال ضمن نظام أخلاقي ويطالب باستجابة جماعية. ثم تُخضع الفلسفة ذلك المنعكس للفحص النقدي—وهي عملية تبلغ ذروتها في نقاش لشبونة، حيث يرسم غضب فولتير، وشبه سوسيولوجيا روسو لقابلية الضرر، وطبيعية كانط معاً الانتقال الحاسم: يتوقف الزلزال عن كونه مشكلة لاهوتية في المقام الأول ويصبح مشكلة علمية. ويسجل الأدب والفن هذا الانتقال بحساسية خاصة: فالمسافة بين *Poème* فولتير—التي لم تستطع وصف لشبونة دون مواجهة الله—ومرثية كوازيمودو لمسّينا، التي يغيب الله عنها تماماً، هي المسافة التي قطعها قرنان من البحث الطبيعي.

ولا يوحد هذه المجالات موضوع مشترك فحسب، بل مأزق مشترك. فكل ثقافة عاشت مع الزلازل اضطرت إلى الإجابة عن السؤال نفسه، وتؤدي كل إجابة العمل الأساسي نفسه: تحول الرعب إلى معنى. والسرد الأسطوري، والإطار اللاهوتي، والحجة الفلسفية، والنصب المعماري الذي يختم بلدة كاملة بالخرسانة—ليست بدائل متعاقبة يحل بعضها محل بعض، بل طبقات متعاقبة من استجابة بشرية مستمرة لاكتشاف أن الأرض ليست الأساس المستقر الذي نحتاج إليها أن تكونه.

افترض رفض ديراك الواثق، المقتبس في افتتاح §16.2، أن الفهم الحديث جعل التفسيرات الأسطورية واللاهوتية للكارثة متقادمة. لكن أدلة هذا الفصل توحي بغير ذلك. فقد أزاح التفسير العلمي سمكة السلور والأفعى والعملاق السجين، لكنه لم يُزل المنعكس التفسيري نفسه—أي الإصرار على أن الحدث الاستثنائي لا بد أن يمتلك سبباً فيزيائياً فحسب، بل فاعلاً وقصداً ومعنى. وهاجر ذلك المنعكس بدلاً من ذلك إلى مجالات أخرى تظل فيها الملاحظة مجتزأة والتفسير غير يقيني. ولا يوجد أحد أبرز تعبيراته الحديثة تحت الأرض، بل في السماء.

16.11 خاتمة: من نامازو إلى روزويل

لم تنشأ الأساطير المدروسة في هذا الفصل من الجهل وحده. بل نشأت من التقاء تجربة لا يمكن إنكارها بسبب غير مرئي. تحركت الأرض، وحيث تعذرت مشاهدة الآلية زود الخيال الحدث بفاعل: سمكة سلور عملاقة مثبتة تحت حجر مقدس في يابان إيدو (§16.2.1)؛ أو أفعى في مواضع أخرى، أو عملاقاً مسجوناً، أو إلهاً غاضباً، أو قوة كونية تحررت مؤقتاً من قيدها. وأزاحت المعرفة العلمية هذه العوامل المحددة في النهاية، لكنها لم تُزل الدافع الإنساني الذي خلقها.

ولم يختف ذلك الدافع في العالم التقني الحديث؛ بل هاجر إلى مجالات أخرى تظل فيها الملاحظة مجتزأة والتفسيرات غير يقينية، وولّد في طريقه أدبه وفنه وسينماه الخاصة، تماماً كما فعل الزلزال في الأقسام السابقة. ومن أبرز تعبيراته—والأيسر في تتبع نسبه الأسطوري—الاعتقاد الدائم بأن الأضواء والأجسام غير المفسرة المبلغ عنها في السماء دليل على ذكاء زائر.

والتوازي مع نامازو أقرب مما يبدو أول وهلة. فلم يحتج نامازو إلى مؤمن بعينه، بل إلى اسم وضريح وتقليد من المطبوعات الخشبية ليصبح عنصراً ثابتاً في المخيلة الشعبية (§16.2.1). ولم يحتج حادث مزعوم قرب روزويل في نيومكسيكو في يوليو 1947 إلى أكثر من ذلك بكثير كي يصبح الأسطورة المؤسسة لعلم الأجسام الطائرة المجهولة الشعبي الحديث. ولم تفعل عقود من البيانات الرسمية والتحقيقات والسجلات التي رفعت عنها السرية إلا قليلاً مدهشاً لإزاحته. وكما نجا تقليد نامازو من كل إخفاق لكاشيما أو إيبيسو في تفسير زلزال

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بعينه، تنجو أسطورة روزويل من التفسيرات المقدمة لها—لأنها، بوصفها أسطورة، لم تُبن قط بحيث يمكن دحضها. بل بُنيت لتشغل في الخيال مكاناً لم تستطع الملاحظة وحدها ملأه.

تطورت المفردات، لكن السؤال الكامن لم يتغير. فالظاهرة الثقافية التي طال نقاشها تحت تسمية جسم طائر مجهول، أو UFO، تُبحث الآن تحت التسمية الرسمية الأوسع *ظاهرة شاذة مجهولة*، أو UAP. وفي الاستعمال العلمي الرسمي تكون UAP ملاحظة لا يمكن بعد تعريفها بأنها طائرة أو ظاهرة طبيعية معروفة؛ فالتسمية تصف الحالة الراهنة لمعرفة الراصد لا أصل الظاهرة ذاتها (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). ولذلك لا تعني مجهولة أنها غير *قابلة للتفسير*، فضلاً عن أن تعني قادمة من خارج *الأرض*.

ويسهل طمس هذا التمييز حين تبدو الملاحظة منتهكة للتوقعات الفيزيائية العادية. فقد يبدو جسم ما متحركاً بلا قصور ذاتي، أو متسارعاً بما يفوق قدرة الطائرات المعروفة، أو مختفياً على الفور. لكن الانتهاك الظاهر للفيزياء قد لا ينشأ في الجسم بل في شروط الرصد: مسافة أو مقياس غير يقينيين، أو منظور قسري، أو اختلاف المنظر، أو حركة منصة المستشعر، أو ظروف جوية، أو آثار آلية أو ناتجة عن ضغط الفيديو، أو أخطاء في تقدير السرعة، أو غياب البيانات الوصفية اللازمة لإعادة بناء الحدث. وخلصت دراسة ناسا المستقلة إلى أن تحليل كثير من تقارير UAP تعوقه مستشعرات سيئة المعايرة، وغياب القياسات المتعددة، وفقدان البيانات الوصفية للمستشعرات، وقصور بيانات خط الأساس. وأظهر فحصها لتسجيل «GoFast» المعروف أن انطباع الحركة الاستثنائية قد ينشأ إلى حد بعيد من سرعة طائرة الرصد وتأثير اختلاف المنظر (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023)؛ وقد أعاد مكتب حل الشذوذ في جميع المجالات منذ ذلك الحين فحص الحالة نفسها بمزيد من التفصيل (All-domain Anomaly Resolution Office, 2024; All-domain Anomaly Resolution Office, 2025). وهذا، على مقياس أصغر كثيراً، هو الانتقال نفسه الذي فرضه زلزال لشبونة على أوروبا القرن الثامن عشر (§16.4.4): فحدث قُرئ أولاً بحثاً عن معناه، ثم أُخضع بدلاً من ذلك لإعادة البناء والقياس والأجهزة. وفي مثل هذه الحالات يكون الغموض حقيقياً، لكن مصدره قد يكون عدم كفاية الأدلة لا عجز القانون الفيزيائي.

ولا يثبت شيء من هذا أن الحياة غير موجودة في مواضع أخرى من الكون، ولا يقتضي رد كل ملاحظة غير مألوفة بوصفها تافهة. فالعلم يبدأ بالشذوذ ويتقدم بأخذه مأخذ الجد. لكنه يتطلب أيضاً أن يظل التفسير متناسباً مع الأدلة. ولم تجد دراسة ناسا دليلاً علمياً حاسماً على أن لتقارير UAP القائمة أصلاً خارج الأرض (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). ولذلك يكون العجز عن تعريف حدث بداية بحث، لا خاتمة تقول إن ذكاءً من خارج الأرض كشف عن نفسه.

ولا يلزم أن تكون الظاهرة نفسها أسطورية كي يصبح السرد المبني حولها أسطورة. وقد ساق كارل يونغ هذه الحجة في أواخر خمسينيات القرن العشرين، واصفاً الصحون الطائرة بأنها أسطورة حديثة لأشياء تُرى في السماء (Jung, 1959)—قبل سنوات من تصلب روزويل في أسطورة شعبية، وقبل عقود من أن يصبح UAP اختصاراً رسمياً. فقد ملأت الأسطورة القديمة المناطق المتعذرة المنال تحت الأرض بكائنات قوية تفسر حركاتها ارتجاف الأرض؛ ويملأ السرد الحديث آفاق السماء المتعذرة المنال بكائنات متفوقة تقنياً تفسر نياتها الأضواء والصور والآثار الملتبسة. ولم تعد مفرداته لاهوتية بل تقنية: مركبات فضائية تحل محل العربات السماوية، ودفع متقدم يحل محل القوة الإلهية، وسرية حكومية تحل محل مجالس الآلهة الخفية. وتظل البنية الكامنة واحدة. يُنسب الحدث غير المفسر إلى فاعل؛ ويُمنح الفاعل ذكاءً وغرضاً؛ ويُدمج غياب الدليل الحاسم في السرد بدلاً من احتسابه ضده.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لا يطالبنا العلم بإطفاء الدهشة؛ بل يطالبنا بتهذيبها. ولذلك فإن الدرس الدائم للتقاليد المستعرضة في هذا الفصل ليس أن البشر آمنوا ذات مرة بأشياء حمقاء ثم نجوا منها الآن. بل إن المسافة بين الملاحظة والتفسير أرض خصبة دائماً للأسطورة. وقد أفسحت سمكة السلور التي نامت يوماً تحت ضريح كاشيما مكانها، في المخيلة الشعبية، لزوار يأتون من وراء روزويل؛ والدافع الذي آوى إحداهما يأوي الأخرى الآن. وفي الحالتين يكون الواجب الأول للعقل واحداً: أن يحفظ الغموض من دون تحويله قبل الأوان إلى فاعلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



La Caduta dei Giganti

سقوط العمالقة[a]، 1532–1535. لوحة جدارية، قاعة العمالقة، قصر تي، مانتوفا.

[a] لا علاقة له بالزلازل ☹

مراجع الجزء الأول: التاريخ

.*ABAQUS User's Manual* (1978). Hibbitt, Karlsson **and** Sorensen. Providence, RI
Abdel Haleem, M. A. S. (2004). *The Qur'an: A New Translation*. Oxford World's Classics. .Oxford: Oxford University Press
Abe, Y. (2000). "Namazu-e no ue no Amaterasu". **in***Shiso*: Amaterasu above the catfish .picture prints. Tokyo, **pages** 25–52
Accademia del Cimento (1667). *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*. Original Italian edition; English translation by W.E. Knowles Middleton, *The .First Scientific Society*, 1971. Florence: Giunti
Ackerman, J. S. (1949). "*ARS Sine Scientia Nihil EST*. Gothic Theory of Architecture at the .Cathedral of Milan". **in***The Art Bulletin*: 31.2, **pages** 84–111
Administration, F. H. (1969). *Silver Bridge Collapse Report*. techreport FHWA-RD-69-1. Investigation into the failure of the Silver Bridge, Point Pleasant, West Virginia. U.S. .Department of Transportation
Aimond, F. (1936). "Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travail-lant sans flexion". **in***Publications, International Association for Bridge and Structural .Engineering (IABSE)*: 4
Al-Bīrūnī, A. R. (1910). *The Chronology of Ancient Nations*. **bytranslator**C. E. Sachau. An English version of the Arabic text of the Athār-ul-bākiya of Albīrūnī. London: W. H. .Allen
Alassi, S. (**march** 2019). *Jacob Bernoulli's Role in the History of Elasticity: From a Discussion with a Craftsman to the Discovery of the Elasticity Rules*. Presentation at the History of .Mathematics Seminar, Mathematical Institute, University of Oxford
From the Mechanics of Jacob Bernoulli to Digital History of Science. Infrastruc-" .(2020) – .ture, Tools, and Methods". phdthesis. University of Basel
Alberti, L. B. (1485). *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*. Nicolaus Laurentii, .Alamanus
On the Art of Building in Ten Books. **bytranslator**J. Rykwert **and** N. Leach. MIT .(1988) – .Press
Alberti, L. B. **and** G. Tiraboschi (1804). *Della pittura e della statua di Leonbatista Alberti*. .**volume** 34. Società tip. de'Classici italiani
Alexander, K. D., R. Mark **and** J. F. Abel (1977). "The structural behavior of medieval ribbed .vaulting". **in***Journal of the society of architectural historians*: 36.4, **pages** 241–251
Alexandria, H. of (1851). *The Pneumatics of Hero of Alexandria*. **bytranslator**B. Woodcroft. .From the original Greek. London: Taylor Walton **and** Maberly
All-domain Anomaly Resolution Office (**may** 2024). *Effect of Forced Perspective and Par-.allax View on UAP Observations*. Information Paper. U.S. Department of Defense
Case: "Go Fast": Case Resolution. Case Resolution Report. U.S. .(06 **february** 2025) – .Department of Defense

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Andrade, E. N. D. C. (1950). “Wilkins Lecture-Robert Hooke”. **in***Proceedings of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences*: 137.887, **pages** 153–187.

Anonymous (**august** 1724). “Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum”. **in***Acta Eruditorum*: 43. Unsigned item (author not stated)., **page** 366.

Antuña Bernardo, J. (2003). “Las estructuras de edificación de Eduardo Torroja Miret”. .phdthesis. *Universidad Politécnica de Madrid; Escuela Técnica Superior de Arquitectura*

Ap, L. **and** N. G. Faia (2018). “Form Finding Techniques of Branched Construction Developed by Frei Otto”. **in***Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*: 59.1, **pages** 60–67.

Archimedes (-250). *De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)*. c. 250 BCE. English translation in *The Works of Archimedes*, ed. T. L. Heath, Cambridge University Press, 1897.

Archimedes **and** T. L. Heath (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.

Argyris, J. H. **and** S. Kelsey (1960). *Energy theorems and structural analysis*. **volume** 60. Springer.

Aristotle (2000). *Mechanica*. **byeditor**M. J. T. Lewis. Translated and introduced by Michael J. T. Lewis. Traditional attribution to Aristotle; authorship disputed. Oxford: Oxford University Press.

Arnold, D. (2003). *The Encyclopedia of Ancient Egyptian Architecture*. Princeton University Press.

Babbage, C. (1864). *Passages from the Life of a Philosopher*. London: Longman, Green, Longman, Roberts, **and** Green.

Backus, J. (1957). *The FORTRAN Automatic Coding System*. techreport. New York: IBM.

Bacon, F. (2000). *Novum Organum*. Cambridge University Press.

Badami, A. (2012). “L’investimento in arte e cultura per fondare una città e generare una comunità a Gibellina. Intervista a Ludovico Corrao”. **in***Archivio di Studi Urbani e Regionali*: 105, **pages** 66–86.

Bag, A. (2003). “Aryabhata’s Contributions to Mathematics and Astronomy”. **in***Indian Journal of History of Science*: 38.2, **pages** 123–135.

Baker, W. F. (1992). “Energy-based design of lateral systems”. **in***Structural Engineering International*: 2.2, **pages** 99–102.

Baker, W. F. **and** A. McRobie, **editors** (2025). *The Geometry of Equilibrium: James Clerk Maxwell and 21st-Century Structural Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, **page** 322.

Baker, W. F., O. Skidmore **andothers** (2013). “Structural possibilities”. **in***The tall buildings reference book*: Routledge, **pages** 229–240.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Baker, W. F. **andothers** (2015). “Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies”. **in***Engineering Journal American Institute of Steel Construction*: 52.3, **pages** 203–217.

Balasubramaniam, R. (2000). “The Corrosion Resistance of the Iron Pillar of Delhi”. **in***Current Science*: 79.4, **pages** 45–54.

Banū Mūsā ibn Shākir (850). *The Book of Ingenious Devices*. Arabic. Original Arabic manuscript, Baghdad. English translation in Donald R. Hill (ed. and trans.), *The Book of Ingenious Devices*, Dordrecht: Reidel, 1979. Baghdad: House of Wisdom.

Bardini, G. **and** G. M. Gianella (2014). “On the Evolution of the Idea of Curvature, from Newton to Gauss’ Theorema Egregium”. **in***Applied Mathematical Sciences*: 8.167, **pages** 8361–8376.

Barnes, J. (1984). *The Complete Works of Aristotle, Volume One: The Revised Oxford Translation*. **volume** 1. Princeton University Press.

Barrallo, J., S. Sanchez-Beitia **and** P. Onati (2005). “Mathematical Models of Gothic Structures”. en. **in***Renaissance Banff: Mathemetics, Music, Art, Culture*: **page** 8.

Bartholomew, A. (1840). *Specifications for Practical Architecture: Preceded by an Essay on the Decline of Excellence in the Structure and in the Science of Modern English Buildings: with the Proposal of Remedies for Those Defects*. J. Williams.

Bartlett, C. (2014). “The design of the Great Pyramid of Khufu”. **in***Nexus Network Journal*: 16.2, **pages** 299–311.

Barzilai, S., **editor** (1909). *Scilla e Cariddi: Pubblicazione dell’Associazione della Stampa Periodica Italiana a beneficio del Patronato Regina Elena per gli orfani del terremoto*. Contributions by Giovanni Verga, Luigi Capuana, Arthur Conan Doyle, Benedetto Croce, Antonio Fogazzaro and others. Published in aid of earthquake orphans following the Messina disaster of 28 December 1908. Roma: Tipografia Roma di E. Armani & W. Stein, **page** 159.

Bažant, Ž. (1976). “Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete”. **in***Journal of Engng. Mech., ASCE*: 102.2, **pages** 331–344.

Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal”. **in***J. of Engineering Mechanics, ASCE*: 110.4, **pages** 518–535.” (1984) –

Bažant, Z. P. **and** Y. Zhou (2002). “Why did the world trade center collapse?—Simple analysis”. **in***Journal of Engineering Mechanics*: 128.1, **pages** 2–6.

Beeckman, I. (1939). *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634*. **byeditor**C. de Waard. 4 vols., 1939–1953. La Haye: Martinus Nijhoff.

Beghini, L. **andothers** (2014). “Connecting architecture and engineering through structural topology”. **in***Engineering Structures*: 59, **pages** 716–726.

Behnia, M. A. (2021). “Sustainability and hydraulic design in ancient Persian qanats”. **in***Journal of Hydraulic Engineering*: 147.3.

Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. german. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Benedetti, G. B. (1585). *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. Original Latin text. Turin: Heirs of Melchior Sessa.

Benouville, L. (1891). *Note sur l'effondrement de la voûte du chœur de la cathédrale de Beauvais (1284)*. Unpublished manuscript / report. Referenced in 19th-century architectural structural studies.

Benvenuto, E. (1991a). *An Introduction to the History of Structural Mechanics; Part I: Statics and Resistance of Solids*. Springer-Verlag.

1991b). *An introduction to the History of Structural Mechanics; Part II: Vaulted structures and Elastic Systems*. Springler-Verlag.) –

Bergsjö, C. **and** M. Pettersson (2016). *A Simulation of the Millau Viaduct*. techreport. KTH, Royal Institute of Technology in Stockholm.

Berlyn, P. **and** C. Fowler (1851). *The Crystal Palace: Its Architectural History and Constructive Marvels*. London: James Gilbert.

Bernoulli, J. (**december** 1694). "Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae". **in***Acta Eruditorum*: Bernoulli's published reply to Christiaan Huygens's critique of the elastica, **pages** 580–584.

Varia Posthuma. **byeditor**N. I. Bernoulli. Posthumous mathematical works edited (1744). – by Nicolaus (I) Bernoulli. Basel: H.A. Gosse & Soc.

Bernoulli, Daniel (1726). "1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142". **in***Die Werke*: 3, **pages** 119–135.

Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. Opus (1738). – *academicum ab auctore, dum Petropoli ageret, congestum*. Latin. With engraved title vignette and 12 folding plates. Argentorati: Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, **page** 304.

Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque" (1744). – legem inter se observantibus extensi una cum solutione problematum quorundam novorum eo pertinentium". **in***Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*: 3. Originally written in 1728; published in the 1744 Bologna edition, **pages** 57–84.

Bernoulli, Jakob (1677–1705). *Meditationes*. Manuscript. Scientific diary manuscript, 367 pages, 287 entries. Available digitally at Bernoulli-Euler Online (BEOL). Basel University Library.

1690a). "Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda **june**) – spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum". **in***Acta Eruditorum*: Contains the famous elastica challenge problem concerning the bending of elastic beams, presented in cipher, **pages** 288–290.

1690b). "Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)". **may**) – **in***Acta Eruditorum*: Short challenge notice; see also a follow-up item in the same year on p. 360., **pages** 218–220.

Dialogue with a Craftsman. *Didactic exchange preceding the elastica challenge*. (1691). – In *Acta Eruditorum*, Leipzig. Often cited as an introductory "dialogue" attached to

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Bernoulli's early announcements on the elastica (1691–1694). No separate standalone edition is known.

Bernoulli, Jakob (1692). *Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*. BirkhauserMed. CLXX; Ref. UB: L Ia 3. Die Werke von Jakob Bernoulli.

– (1694 **june**). "Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus". **in***Acta Eruditorum*: Includes Bernoulli's solution of the elastica and the "Golden Theorem"; reprinted in *Opera* (1744), pp. 576–600., **pages** 262–276.

– (1744a). "Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, vol 1". **in***Geneve: Cramer-Philibert*) – (1744b). *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Latin **and** French. **byeditor**G. Cramer.) – 2 **volumes**. Posthumous collected works, excluding *Ars Conjectandi*. Contains *Varia posthuma* and biography by J.J. Battier (1705). Geneva: sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert.

– (1855). "Letter to G. W. Leibniz, December 1687". **in***Die Mathematischen Werke von Jakob Bernoulli*: **byeditor**C. I. Gerhardt. **volume** 3. Originally written in 1687; first published in this 1855 edition. Leipzig: B. G. Teubner, **pages** 1–5.

Bernoulli, Johann (**june** 1696). "Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur". **in***Acta Eruditorum*: 15. Announcement of the brachistochrone (curve of fastest descent) problem, **pages** 269–271.

Bernoulli, Johann (1691a). *Integral Calculus. Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque; conseriptae in usum Ill. Marchionis Hopitalii, cure auctor Parisiis ageret annis*. In Opera III.

– (1691b). "Letter to Leibniz". **in***Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*: **byeditor**Spiess, Otto. **volume** 1. Basel: Birkhäuser.

– (1691c). "Solutio problematis funicularii". **in***Acta Eruditorum*: **pages** 274–276 **june**) – (1697a). "Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona". **in***Acta Eruditorum*: Solution to the brachistochrone problem, showing the curve of fastest descent is a cycloid, **pages** 269–271.

– (1697b). *Programma [extending the brachistochrone challenge]*. Extension of **january**) – the brachistochrone challenge deadline to Easter 1697. Groningen.

– (1713). *Opera Omnia*. Collected works including contributions to calculus and mechanics. Lausanne **and** Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.

– (1725). "Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717". **in***Nouvelle Mécanique ou Statique*: **byeditor**P. Varignon. **volume** 2. Contains Johann Bernoulli's 1717 letter on virtual velocities. Paris: Claude Jombert. **chapter** Section IX, **pages** 174–176.

Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.

Billington, D. (1979). *Robert Maillart's Bridges; The art of Engineering*. Princeton University Press.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Billington, D. (1983a). *Structural Studies*. techreport. Department of Civil Engineering, Princeton University.

– (1983b). *The Tower and the Bridge*. Princepton University Press.

– (1984a). *Structures and the Urban Environment*. techreport. Lecture notes, CE 262.) Department of Civil Engineering, Princeton University.

– (1984b). *Structures and the Urban Environment*. techreport. Catalogue and Commentary) on the slides. Department of Civil Engineering, Princeton University.

Billington, D. **and** R. Mark, **editors** (1970). *Civil Engineering–history, Heritage, and the Humanities: Background Papers from the First National Conference on Civil Engineering–History, Heritage and the Humanities*. Department of Civil Engineering, Princeton University.

Billington, D., R. Mark **and** J. Abel, **editors** (1972). *The Maillart Papers: From the Second National Conference on Civil Engineering: History, Heritage and the Humanities: Commemorating the Hundredth Anniversary of the Birth of Robert Maillart*. Department of Civil Engineering, Princeton University.

Blaikie, P. **andothers** (1994). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. London: Routledge.

Blasjo, V. (2017). *Transcendental curves in the Leibnizian calculus*. Academic Press.

Boller, G. **and** P. D'Acunto (2021). "Structural design via form finding: Comparing Frei Otto, Heinz Isler and Sergio Musmeci". **in***History of Construction Cultures*: **pages** 431–438.

Boller, G. **and** J. Schwartz (2020). "Modelling the form. Heinz Isler, Frei Otto and their approaches to form-finding". **in***Proceedings of Seventh Conf. Constr. Hist. Soc.,(3-5 April 2020, Cambridge, UK)*: **pages** 565–76.

Bony, J. (1983). *French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries*.

Bos, H. J. M. (1974). "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus". **in***Archive for history of exact sciences*: 14.1, **pages** 1–90.

Bourdais, J. (1881). *Projet de phare monumental pour Paris, élévation*. Original drawing, Musée d'Orsay, Paris.

Boyer, C. B. **and** U. C. Merzbach (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Brackenridge, J. B. (1992). *The critical role of curvature in Newton's developing dynamics*.

Brand, D. **and** H. Nicholson (2013). "Learning from Lisbon: Contemporary cities in the aftermath of natural disasters". **in***Approaches to Disaster Management-Examining the Implications of Hazards, Emergencies and Disasters*: IntechOpen.

Branner, R. (1962). *Le Maitre de la cathédrale de Beauvais*. **volume** II, **pages** 77–92.

– (1997) "The Collapse of the Tower and Choir at Beauvais Cathedral". **in***The Engineering of Medieval Cathedrals*: **byeditor**R. Mark **and** P. Mellars. Ashgate, **pages** 141–158.

Bravais, A. (1850). "Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace". **in***Journal de l'École Polytechnique*: 19, **pages** 1–128.

– (1866). *Etudes cristallographiques*. Gauthier-Villars.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Brew, J. S. (2007). “Computational Analysis of Heinz Isler’s Shell Structures”. **in***Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*: .Venice, Italy, **pages** 1–8

Broad, W. J. (2006). *The Oracle: Ancient Delphi and the Science Behind Its Lost Secrets*. .Penguin Books

Brodini, A. (2013). “Le coperture a grande luce nell’opera di Sergio Musmeci”. **in***La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*: .**byeditor**P. Desideri **andothers**. U. Allemandi, **pages** 253–262

.Brownbridge, A. (1986). *Ancient Chinese Bridge Architecture*. Asian Historical Press

Brühwiler, E. (2010). “Eminent Structural Engineer: Christian Menn—Bridge Designer .and Builder”. **in***Structural Engineering International*: 20.4, **pages** 470–472

Bukowski, J. (2008). “Christiaan Huygens and the Problem of the Hanging Chain”. **in***The .*College Mathematics Journal*: 39.1, **pages** 2–11

Buridan, J. (1971). *John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo*. **byeditor**J. .Hubert. Latin text. Paris: Vrin

John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle’s Physics. **byeditor**M..(1991) – .Clagett. Latin text with English translation. Madison: University of Wisconsin Press

Bush, V. (1931). “The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equa- .tions”. **in***Journal of the American Society of Mechanical Engineers*: 53, **pages** 107–116

Butzer, K. W. (1976). “Early Hydraulic Civilization in Egypt: A Study in Cultural Ecology”. .**in***University of Chicago Press*: 11, **pages** 123–145

Cannone, M. **and** S. Friedlander (2003). “Navier: blow-up and collapse”. **in***Notices of the .*AMS*: 50.1, **pages** 7–13

Capecchi, D., G. Ruta **and** P. Trovalusci (2010). “From classical to Voigt’s molecular models .in elasticity”. **in***Archive for history of exact sciences*: 64.5, **pages** 525–559

Carnot, L. (1783). *Essai sur les machines en général*. First edition. Published anonymously as “par un officier du Corps Royal du Génie.” Second edition with author’s name: Dijon: [.Defay; Paris: Nyon, 1786. Dijon: [s.n

Principes fondamentaux de l’équilibre et du mouvement. Substantially revised .(1803) – .and expanded version of the *Essai sur les machines en général* (1783). Paris: Deterville

Castigliano, A. (1879). *Théorie de l’équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. .**volume** 1. AF Negro

Cauchy, A. L. (1822). “Recherches sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques”. **in***Bulletin de la Société Philomatique .de Paris*: **pages** 9–13

Recherches sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides,“ .(1823) – élastiques ou non élastiques”. **in***Exercices de Mathématiques*: **volume** 2. Paris: De Bure .Frères, **pages** 42–56

Exercices de mathématiques. **volume** 2. Contains key papers on elasticity theory. .(1827) – .Paris: De Bure Frères

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Cauchy, A.-L. (1828). “Sur les équations qui expriment les conditions d’équilibre ou les lois du mouvement intérieur d’un corps solide, élastique ou non élastique”. **in***Exercises .de Mathematiques*: **volume** 3. De Bure Frères, **pages** 160–187
Sur l’équilibre et le mouvement d’un système de points matériels sollicités“ .(1829) –
par des forces d’attraction ou de répulsion mutuelle”. **in***Exercices de Mathématiques*: .**volume** 4. Paris: De Bure Frères, **pages** 129–139
.*Oeuvres Complètes de Cauchy*. Gauthier-Villars .(1841) –
Caus, S. de (1615). *Les Raisons des Forces Mouvantes avec Diverses Machines tant Utilles que Plaisantes*. Treatise on hydraulics and mechanics; introduced the term “Travail” .(work) for force times displacement. Second edition Paris, 1624. Frankfurt: Jan Norton
Charle, C. (2004). “Le scandale de Panama: Une affaire d’État à la fin du XIXe siècle”. .**in***Revue Historique*: 312.4, **pages** 847–872
Charlton, T. M. (1982). *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. .Cambridge: Cambridge University Press
.Châtelet, É. du (1740). *Institutions de Physique*. Paris: Prault
Chen, P. W. **and** L. E. Robertson (1972). “Human perception thresholds of horizontal .motion”. **in***Journal of the structural division*: 98.8, **pages** 1681–1695
Child, J. (1920). *The Early Manuscripts of Leibniz*. Translations of various latin manuscripts .of Leibniz. Chicago, London: The Open Court Publishing Company, **page** 238
.Chilton, J. **and** H. Isler (2000). *The architecture of Heinz isler*. Thomas Telford
.Ching, F. D. (2011). *A visual dictionary of architecture*. John Wiley & Sons
Chiorino, C. **and** C. M. Olmo (2010). *Pier Luigi Nervi: l’architecture comme défi*. Silvana .Editoriale
Cité de l’architecture & du patrimoine (**april** 2015). *La Cité radieuse: 1945-1952, Marseille, Le Corbusier*. french. techreport. Museum educational resource produced for the .Éduthèque platform. Paris: Cité de l’architecture & du patrimoine, **page** 12
Clagett, M. (1964). “Nicole Oresme and Medieval scientific thought”. **in***Proceedings of .the American Philosophical Society*: 108.4, **pages** 298–309
*Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Two: Calendars, Clocks, and .(1995) –
.*Astronomy*. American Philosophical Society
Ancient Egyptian Science, Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics. Philadelphia: .(1999) –
.American Philosophical Society
Clapeyron, B.-P.-E. (1834). “Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur”. **in***Journal de .l’École Polytechnique*: 14.23. Work completed 1833; published 1834, **pages** 153–190
Clapeyron, B. (1857). “Calcul d’une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés”. **in***Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l’Académie .des Sciences*: 45, **pages** 1076–1080
Clark, E. **and** R. Stephenson (1850). *The Britannia and Conway Tubular Bridges: With General Inquiries on Beams and on the Properties of Materials Used in Construction*. .**volume** 2. London: Day, Son **and** John Weale

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Clausius, R. (1850). “Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen”. **in***Annalen der Physik*: 155.3, **pages** 368–397.

Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen“ .(1854) – .Wärmetheorie”. **in***Annalen der Physik*: 169.12, **pages** 481–506

The Mechanical Theory of Heat. **bytranslator**T. A. Hirst. 2nd. Translation of *Die* .(1879) – .*mechanische Wärmetheorie*. London: Macmillan

.Clebsch, A. (1862a). *Theorie der elasticität fester körper*. BG Teubner

1862b). *Theorie der Elasticität fester Körper*. Posthumously edited by Gustav Kirchhoff.) – .Leipzig: B.G. Teubner

Théorie de l’élasticité des corps solides. **byeditor**B. de Saint-Venant. Traduit .(1866) – de l’allemand et annoté avec des additions par M. Barré de Saint-Venant. Paris: Mallet-.Bachelier

Clough, R. W. (1960). “The finite element method in plane stress analysis”. **in***Proceedings .of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*

The stress distribution of Norfork Dam. techreport. California Univ Berkeley .(1962) – .Institute of Engineering Research

Early history of the finite element method from the view point of a pioneer”.“ .(2004) – .**in***International journal for numerical methods in engineering*: 60.1, **pages** 283–287

Clough, R. W. **and** E. L. Wilson (1999). “Early finite element research at Berkeley”. **in***Fifth .US National Conference on Computational Mechanics*: **pages** 1–35

.Clough, R. **and** J Penzien (1975). *of Structures*. McGraw-Hill

Clough, R. **and** E. Wilson (1962). “Stress analysis of a gravity dam by the finite element method”. **in***Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*: Laboratorio .Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal

.Coe, M. D. (2005). *The Maya*. Thames & Hudson

Cohen, I. B. (2002). “Newton’s concepts of force and mass, with notes on the Laws of .Motion”. **in***The Cambridge Companion to Newton*: **byeditor**I. Cohen **and** G. Smith .*Introduction to Newton’s “Principia”*. Harvard University Press .(2013) –

Coleman, B. D. **and** W. Noll (1963). “The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity”. **in***Archive for Rational Mechanics and Analysis*: 13.1, .**pages** 167–178

.Como, M. (2013). *Statics of historic masonry constructions*. **volume** 1. Springer

Coolidge, J. L. (1952). “The unsatisfactory story of curvature”. **in***The American Mathemat- .ical Monthly*: 59.6, **pages** 375–379

.Copernicus, N. (1995). *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*. Prometheus Books

Corazzi, R. (2012). “La curva “lossodromica” e la spina pesce”. **in***DISEGNARECON*: .**pages** 85–92

Corbusier, L. (1954). *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally .applicable to architecture and mechanics*. **volume** 1. Harvard University Press

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.Corbusier, L. (1955). *Le Modulor 2*. Paris: Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui
Corbusier, L. **and** P. Jeanneret (1929). "Les cinq points d'une architecture nouvelle". french. **in***Œuvres complètes 1910–1929*: **byeditor**W. Boesiger. First delivered as a lecture at the Weissenhof Siedlung, Stuttgart, in 1927; reprinted in later editions of the Œuvre .complète. Erlenbach-Zurich: Les Éditions d'Architecture
Corporation, S. R. (1951). *UNIVAC I System Description*. techreport. New York: Sperry .Rand
Coulomb, C (1773a). "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture". **in***Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences*: Foundational work on earth .pressure and slope stability, **pages** 343–382
Coulomb, C. (1773b). "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*". **in***mémoires de l'académie Royale des Sciences*: .7, **pages** 343–382
1773c). "Mémoires de mathématique et de physique". **in***Academie Royale des Sciences*:) – .7
Courant, R (1943). "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and .vibrations". **in***Bulletin of the American Mathematical Society*: 49, **pages** 1–23
Cross, H. (1932). "Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments". **in***Transactions of the American Society of Civil Engineers*: 96.1. *Includes all subsequent .discussions*, **pages** 1–78
Analysis of flow in networks of conduits or conductors. techreport. University of .(1936) – ... Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering
Cross, H. **and** N. D. Morgan (1932). *Continuous frames of reinforced concrete*. J. Wiley & .Sons, Incorporated
Crotti, F. (1888). *La Teoria dell'Elasticità ne' suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*. Milan: Ulrico Hoepli.
Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.
.Culmann, K. (1866). *Die Graphische Statik*. Meyer **and** Zeller, Zürich
Cumming, J. E. (2001). "Brumel, Antoine". **in***The New Grove Dictionary of Music and Musicians*: **byeditor**S. Sadie. 2 **edition**. **volume** 4. London: Macmillan, **pages** 485–490.
.Curatola, G. **and** G. Scarcia (2003). *Persepolis: The Great Stairway*. Getty Publications
Currà, E. **and** M. Russo (2018). "Reinforced concrete in Italy through the works of two generations of engineers: Mario and Giorgio Baroni". **in***6th International Congress on Construction History (6ICCH 2018):"Building Knowledge, Constructing Histories*: .**pages** 9–13
.Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España
.*Codex Atlanticus*. Pinacota Ambrosania, Milan .(1505) –
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, .[2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D’Alembert, J. l. R. (1747). “Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration”. **in***Histoire de l’Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin*: 3, **pages** 214–219.

.Daley, S. (2013). “A Star Architect Leaves Some Clients Fuming”. **in***The New York Times*

Daniels, P. T. **and** W. Bright, **editors** (1996). *The World’s Writing Systems*. New York: Oxford University Press.

Davis, M. (2018). *The universal computer: The road from Leibniz to Turing*. AK Peters/CRC Press.

De Belidor, B. (1729). *Architecture hydraulique ou l’Art de conduire, d’élever et de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie*. C. Jombert.

De Boer, J. Z. **and** D. T. Sanders (2005). *Earthquakes in Human History: The Far-Reaching Effects of Seismic Disruptions*. Princeton University Press.

De Honnecourt, V. (1858). *Album de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle: manuscrit publié en fac-simile, annoté, précédé de considérations sur la renaissance de l’art français au XIXe siècle et suivi d’un glossaire*. Imprimerie Imperiale.

(2006) – *The Medieval Sketchbook of Villard de Honnecourt*. **byeditor**T. Bowie. Reprints the 1959 Indiana University Press edition (introduction and captions by Theodore Bowie), using plates from R. Willis’s 1859 English facsimile, which in turn reproduces the engraved plates of the 1858 Lassus & Darcel edition (De Honnecourt, 1858). Dover Publications.

De l’Orme, P. (1561). *Nouvelles inventions pour bien bastir et a petits fraiz*. french. Illustrated treatise presenting geometric and constructive rules for economical building, including proportional design methods. Paris: Federic Morel.

Deakin, R. (2007). “Catenary Curve”. **in**Technical paper on the mathematical derivation of the catenary.

DeJong, M. J. (2009). “Seismic assessment strategies for masonry structures”. phdthesis. Massachusetts Institute of Technology.

Descartes, R. (1637a). *Discours de la méthode*. Originally published with *La Géométrie*, *La Dioptrique*, and *Les Météores*. Leiden: Jan Maire.

1897a) – *Oeuvres de Descartes*. **byeditor**C. Adam **and** P. Tannery. 11 vols., 1897–1913.) Paris: Léopold Cerf; later Vrin/CNRS reprints.

Descartes, R. (1898). *Oeuvres de Descartes*. **volume** 2: *Correspondance, mars 1638 – décembre 1639*. **byeditor**C. Adam **and** P. Tannery. Paris: Leopold Cerf.

.Descartes, R. (1927). *Selections*. C. Scribner’s sons

.Descartes, R. (1637b). *La Géométrie*. Leiden: Jean Maire

(1644) – *Principia Philosophiae*. English title: Principles of Philosophy. Part II contains the laws of motion and conservation principles. Amsterdam: Ludovicus Elzevirius.

1897b) – *Correspondance de René Descartes*. **byeditor**C. Adam **and** P. Tannery.) **volume** 2. Œuvres de Descartes. Letter to Marin Mersenne, 11 October 1638, pp. 542–544. Paris: Léopold Cerf.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Desideri, P. **andothers** (2013). *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. U. Allemandi.

Devlin, K. (2011). *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*. New York: Walker & Company, **page** 192.

Diderot, D. **and** J. l. R. d'Alembert (1751). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. First volume published 1751; final volume 1772. Paris: Briasson, David **and** Le Breton, Durand.

Dirac, P. A. M. (1963). "The Evolution of the Physicist's Picture of Nature". **in***Scientific American*: 208.5. Based on a 1958 lecture; includes Dirac's comments on religion and primitive explanations of nature, **pages** 45–53.

Downey, G. (1946). "Byzantine Architects, their Training and Methods". **in***Byzantion*: 18, **pages** 99–118.

Dragicevic, P. **and** Y. Jansen (2012). *List of Physical Visualizations*. Last accessed 2022-03-30.

Dragoni, M. (2005). *Terrae motus. La sismologia da Eratostene allo tsunami di Sumatra*. Frontiere. Torino: UTET Libreria. 394 **pagetotals**.

Drake, S. (1970). *The Genesis of Fluid Mechanics 1640–1780*. **volume** 6. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag.

A further reappraisal of impetus theory: Buridan, Benedetti, and Galileo"." (1976) – **in***Studies in History and Philosophy of Science Part A*: 7.4, **pages** 319–336.

Dreyfuss, H. (1960). *The Measure of Man: Human Factors in Design*. New York: Whitney Library of Design.

Dugas, R. (1988). *A history of mechanics*. Courier Corporation.

Dugas, R. (1955). *A History of Mechanics*. Dover Publications.

Duhem, P. (1891). *Hysteresis dans les phénomènes capillaires. Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides*. Paris: Gauthier-Villars.

Introduction à la mécanique chimique. Paris: Carré. (1893) –

Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale. **volume** 2. Paris: Gau-thier-Villars. (1911) –

d'Alembert, J (1761). "Démonstration du principe de la composition des forces". **in***Opuscules mathématiques*: 1, **pages** 169–179.

Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces". **in***Opuscules mathématiques*: 6, **pages** 360–370." (1773) –

D'Ayala, D. **and** E Tomasoni (2008). "The structural behaviour of masonry vaults: Limit state analysis with finite friction". **in***Structural Analysis of Historic Construction: Preserving Safety and Significance, Two Volume Set*: CRC Press, **pages** 67–82.

Eagar, T. W. **and** C. Musso (2001). "Why did the World Trade Center collapse? Science, engineering, and speculation". **in***Jom*: 53.12, **pages** 8–11.

Eckert, J. P. **and** J. W. Mauchly (1946). *Description of the ENIAC and the ENIAC Project*. techreport. Philadelphia: University of Pennsylvania.

Einstein, A. (1935). "Emmy Noether". **in***The New York Times*: Obituary letter to the editor.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Einstein, A. (1954). *Ideas and Opinions*. Originally compiled from Mein Weltbild (1934), translated by Sonja Bargmann. Includes essay "On the 300th Anniversary of Galileo's Death." New York: Crown Publishers.

Elizalde, R. R. (2025). "Beauvais Cathedral: The Ambition, Collapse and Legacy of Gothic Engineering". **in***Heritage*: 8.6, **page** 203.

Engesser, F. (1889). "Über den Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit". **in***Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*: 33, **pages** 927–928.

Eshelby, J. (1970). "Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics". **in***Inelastic Behavior of Solids*: **byeditor**M. Kanninen **andothers**. New York, N.Y.: McGraw-Hill, **pages** 77–115.

Espion, B. (2016). "Pioneering hypar thin shell concrete roofs in the 1930s". **in***Beton-und Stahlbetonbau*: 111.3, **pages** 159–165.

Établissements Eiffel, C. des (19th Century). *Historical Works and Projects of the Eiffel Company*. French. Founded by Gustave Eiffel in 1866, famous for the Eiffel Tower and other engineering achievements.

Euclid **and** T. L. Heath (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications.

Euler, L. (1728). "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*". **in***Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*: 3, **pages** 64–77.

(1732) – "*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*". **in***Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*: **pages** 70–84.

(1741) – "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". **in***Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*: 8, **pages** 128–140.

(1744a) – "Additamentum I: De curvis elasticis". **in***Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*: **byeditor**C. Carathéodory. **volume** 24. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series I. Reprint of the 1744 Lausanne and Geneva edition with editorial notes. Basel: Birkhäuser, **pages** 231–308.

(1744b) – *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Euler's definitive formulation of the elastica, building on the earlier work of Jakob Bernoulli and Daniel Bernoulli. Lausanne **and** Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, **pages** 245–297.

(1748) – *Introductio in analysin infinitorum*. 2 volumes. Eneström Index E101–E102. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet.

(1757a) – "Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides". **in***Opera Omnia*: **volume** 12. Series 2. Basel: Orell Füssli, **pages** 92–132.

(1757b) – *Principes généraux du mouvement des fluides*. **volume** 11. Presented 1755; published 1757, **pages** 274–315.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Euler, L. (1759). “Sur la force des colonnes”. **in***Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin*: 13. Eneström number E238. Original French version of Euler’s classic column .buckling paper., **pages** 252–282

De motu rectilineo tremulo linearum”. **in***Novi Commentarii Academiae Scien-“ .(1760) – *tiarum Petropolitanae*: 6. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 315–347, .**pages** 208–242

*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte “ .(1771) – *flesibilium quam elasticorum*”. **in***Novi commentarii academiae scientiarum Petropoli- .*tanae*: **pages** 381–413

De formulis differentialibus, quas frustra hactenus quaesivit geometria“ .(1780) – flexionum et tensionum”. **in***Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*: .Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 559–586, **pages** 36–61

.De oscillationibus annulorum elasticorum”. **in***Opera Postuma*: **pages** 129–131“ .(1862) –

.Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press

Felippa, C. A. (2001). “A historical outline of matrix structural analysis: a play in three .acts”. **in***Computers & Structures*: 79.14, **pages** 1313–1324

Fernández Casado, C. (1980). *Historia del puente en España: Puentes romanos*. Madrid: .Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

.Ferrers, N. M., **editor** (1871). *Mathematical Papers of George Green*. London: Macmillan

Fishman, R. (1982). *Urban Utopias in the Twentieth Century: Ebenezer Howard, Frank .Lloyd Wright, Le Corbusier*. MIT press

Fletcher, R. (2004). *The cross and the crescent: the dramatic story of the earliest encounters .between Christians and Muslims*. Penguin UK

Florensky, P. (1996). *Beyond Vision: Essays on the Perception of Art*. **bytranslator**W. .Salmond. London: Reaktion Books

Fondazione Amelio (1987). *Terrae Motus: Naples, Tremblement de Terre*. italian, french. Exhibition catalogue, Grand Palais, Paris, 28 March – 11 May 1987. Naples: Guida, .**page** 302

Forty, A. (2013). “Happy Ghost of a Possible City: Il Cretto, Gibellina”. **in***AA Files*: 66, .**pages** 101–108

Foundation, P. S. (2001). *Python Language Reference, Version 2.0*. Python 2.0 release .documentation

.Fourier, J.-B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot

Fourier, J. (1798). “Mémoire sur la Statique, Contenant la Démonstration du Principe des Vitesses Virtuelles”. **in***Journal de l’École Polytechnique*: 5. Reprinted in *Œuvres de .Fourier*, ed. G. Darboux, Gauthier-Villars, Paris, 1888–1890, **pages** 20–60

Fraser, C. G. (1991). “Mathematical technique and physical conception in Euler’s investi- .gation of the elastica”. **in***Centaurus*: 34.3, **pages** 211–246

Freedberg, D. (2003). *The eye of the lynx: Galileo, his friends, and the beginnings of modern .natural history*. University of Chicago Press

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Galerkin, B. G. (1915). “Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods .and plates”. **in***Vestnik inzhenerov i tekhnikov*: 19.7, **pages** 897–908
Galilei, G. (1594). *Le mecaniche*. **byeditor**A. Favaro. **volume** 2. Edizione Nazionale; cite .“Della vite”, p. 185 for the “quanto si guadagna di forza ...” passage. Firenze: Barbera
– .*Il Saggiatore*. The Assayer. Rome: Giacomo Mascardi .(1623)
– *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican*”.” .(1632) Originally published by Elzevir, The Neterlands, 1638. Translation by Stillman Drake .and Foreword by Albert Einstein. University of California press
– *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. English .(1638) .translation: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Leiden: Elzevir
Galilei, G. **and** S. Drake (1990). “Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from .Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)”. **in***New York: Anchor Books*
Gallagher, R. (1964). *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*. AGAR-Dograph 69. Report to the 14th Meeting, Structures and Materials Panel, AGARD, NATO. .Oxford: Pergamon Press
– .*Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J .(1975)
Gauthey, E.-M. (1813). *Œuvres de M. Gauthey: Traité de la construction des ponts*. .**volume** 2. Firmin Didot
.Gautier, H. (1765). *Traité des ponts*. **volume** 1. Veuve Duchesne
Gehry, F., M. Lloyd **and** D. Shelden (2020). “Empowering design: Gehry partners, Gehry technologies and architect-led industry change”. **in***Architectural Design*: 90.2, .**pages** 14–23
George, A. R. (1993). *House Most High: The Temples of Ancient Mesopotamia*. Winona .Lake, IN: Eisenbrauns
.Germain, S. (1821). *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques*. Paris: Courcier
Giacomoni, P., **editor** (2005). *La Terra Trema*. Kozach Collection. Rovereto: Museo Arte .Moderna e Contemporanea
Gillings, R. J. (2019). “Mathematics in the Time of the Pharaohs”. **in***Mathematics*: Chapman .**and** Hall/CRC, **pages** 9–17
Giorgio Martini, F. di (ca. 1480). *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*. .Manuscript treatise on architecture, engineering, and military art, written ca. 1478–1490
Girard, A. (1634). “Notes et annotations (sur les cordes pendantes)”. French. **in***Les Oeuvres mathématiques*: Marginal annotation by Girard in Stevin’s posthumous work. Leiden: .Bonaventure & Abraham Elzevier
Girard, P.-S. (1798). *Traité analytique de la résistance des solides*. One of the earliest systematic treatments of structural mechanics, providing illustrative diagrams of Galileo’s .and Mariotte’s theories. Paris: Imprimerie de la République
.Gleick, J. (2016). *Time Travel: A History*. Pantheon

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Goldberg, J. E. (1934). “Wind stresses by slope deflection and converging approximations”. in *transactions of the American Society of Civil Engineers*: 99.1, pages 962–975.

Goodman, R. E. (1999). *Karl Terzaghi: The Engineer as Artist*. Contains a detailed account of the Terzaghi–Fillunger dispute and its historical context. Reston, VA: ASCE Press.

Goss, V. G. A. (2009). “The history of the planar elastica: insights into mechanics and scientific method”. in *Science & Education*: 18.8, pages 1057–1082.

Graczykowski, C. and T. Lewiński (2010). “Michell cantilevers constructed within a half strip. Tabulation of selected benchmark results”. in *Structural and Multidisciplinary Optimization*: 42.6, pages 869–877.

Graham, A. (1978). *The Mohist Canon*. Cambridge University Press.

Graham, H. D. and N. Diamond (2004). *The rise of American research universities: Elites and challengers in the postwar era*. JHU Press.

Grant, E. (1977). *Physical science in the middle ages*. Cambridge University Press.

Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840*. 3 volumes. Excellent on the French school. Basel: Birkhäuser.

Gravesande, W. J. (1722). *Essai d’une nouvelle theorie sur le choc des corps, fondee sur l’experience*. Also issued in the *Journal litteraire de La Haye*, tome XII, pp. 1–54 (1722). La Haye: T. Johnson.

Greco, C. (2008). *Pier Luigi Nervi: dai primi brevetti al palazzo delle esposizioni di Torino 1917-1948*. Quart Verlag.

Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Reprinted in *Mathematical Papers of George Green*, edited by N. M. Ferrers, London: Macmillan, 1871. Nottingham: T. Wheelhouse.

On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two“ .(1837) – Non-Crystallized Media”. in *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*: 7, pages 1–24.

1839a). “On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of) – Two Non-Crystallized Media”. in *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*: 7, pages 1–24.

1839b). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two) – Non-Crystallized Media”. in *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*: 7, pages 1–24.

On the Propagation of Light in Crystallized Media”. in *Transactions of the*“ .(1842) – *Cambridge Philosophical Society*: 7, pages 121–140.

Guidoboni, E. and J.-P. Poirier (2004). *Quand la Terre Tremblait*. Paris: Odile Jacob.

Hall, A. R. (1951). *Robert Hooke and horology*.

Halpern, A., D. Billington and S. Adriaenssens (2013). “The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi”. in *Proceedings of IASS Annual Symposia*: International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), pages 1–7.

Hardy, A. (2007). *The Indian Temple: Architecture and Engineering*. Oxford University Press.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Harvey, W. (1628). *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*. An Anatomical Exercise on the Motion of the Heart and Blood in Living Beings. Frankfurt: Guilielmi Fitzeri.

Hassan Fangary, A. A. (2010). "Graphics analysis of gothic vaults". M.S. Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya.

Haytham, I. al (1989). *The Optics of Ibn al-Haytham: Books I–III on Direct Vision*. **bytranslator** A. I. Sabra. **volume** 40. Studies of the Warburg Institute. London: Warburg Institute.

Herodotus (1921). *The Persian Wars*. **bytranslator** A. D. Godley. **volume** 2. Loeb Classical Library 118. Book IV.87–88 (Darius' bridge over the Bosporus, built by Mandrocles of Samos). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Heyman, J. (1998a). *Structural analysis; A historical approach*. Cambridge University Press.

Heyman, J. (1966). "The stone skeleton". **in** *International Journal of Solids and Structures*: 2.2, **pages** 249–279.

Beauvais cathedral". **in** *Transactions of the Newcomen Society*: 40.1," (1967) – **pages** 15–35.

The Masonry Arch. Ellis Horwood Series in Engineering Science. Chichester: (1982) – Ellis Horwood.

The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture. en. Cam- (1997) – bridge University Press.

1998b). *Structural Analysis; A Historical Approach*. Cambridge University Press) – Truesdell and the History of the Theory of Structures". **in** *Essays on the History*" (2003) – *of Mechanics*: Springer, **pages** 9–20.

Heyman, J. **and** G Poleni (1988). "Poleni's problem." **in** *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*: 84.4, **pages** 737–759.

Heyman, J. **andothers** (1992). "How to design a cathedral: some fragments of the history of structural engineering." **in** *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Civil Engineering*: Thomas Telford-ICE Virtual Library, **pages** 24–29.

Hill, D. R. (2019). *Islamic science and engineering*. Edinburgh University Press.

Hodge, A. T. (1992). *Roman Aqueducts and Water Supply*. Duckworth.

Hogendijk, I (1994). "Pure mathematics in Islamic civilization". **in** *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*: 1, **pages** 70–79.

Homer (1924). *The Iliad*. **bytranslator** A. T. Murray. **volume** 170. Loeb Classical Library. 2 vols. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Hon, G. **and** Y. Zik (2009). "Kepler's optical part of astronomy (1604): Introducing the ecliptic instrument". **in** *Perspectives on Science*: 17.3, **pages** 307–345.

Honigmann, C. **and** D. P. Billington (2003). "Conceptual design for the Sunniberg Bridge". **in** *Journal of Bridge Engineering*: 8.3, **pages** 122–130.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Hooke, R. (1665). *Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon*. Royal Society .of London. London: Jo. Martyn **and** Ja. Allestry

A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments. Imprint dated 1676; .(1676) – .actually published October 1675. London: John Martyn

Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing .(1678) – .*Bodies*. London: John Martyn

The Posthumous Works of Robert Hooke. **byeditor**R. Waller. The decipherment .(1705) – of the arch anagram appears in Waller's prefatory "Life of Dr. Robert Hooke". London: .Sam. Smith **and** Benj. Walford

Houlsby, G. T. (2014). "John Wallis and the numerical analysis of structures". **in***Nexus .Network Journal*: 16.1, **pages** 207–217

structural engineering, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1859. Oxford English .Dictionary

structural engineer, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1867. Oxford English .Dictionary

Hrennikoff, A. (1941). "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method". .**in***Journal of Applied Mechanics*: 8, **pages** 169–175

Huerta, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas: Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional .de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera

Structural Design in the Work of Gaudí". **in***Architectural Science Review*: 49.4," .(2006) – .**pages** 324–339

The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-" .(2009) – Duc to Heyman". **in***Proceedings of the Third International Congress on Construction .History*

Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet"." .(2018) – **in***Building Knowledge, Constructing Histories*: **byeditor**I. Wouters **andothers**. Proceedings of the 6th International Congress on Construction History (6ICCH), Brussels, Bel- .gium, July 9–13, 2018. London: CRC Press/Balkema, **pages** 773–780

Huff, D. (2005). "From Median to Achaemenian palace architecture". **in***Iranica Antiqua*: .40, **pages** 371–395

.Huxtable, A. L. (2017). *Pier Luigi Nervi*. Pickle Partners Publishing

Huygens, C (1673). "1673 Horologium oscillatorium". **in***Sive de Motu Pendulorum ad .(*Horologia Aptato Demonstrationes Geometrical (*Paris: AF Muguet

Huygens, C. (16 **november** 1691). *Lettre à G.W. Leibniz*. french. **byeditor**J. B. Jr. In *Oeuvres .complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye

Lettre à G.W. Leibniz. french. **byeditor**J. B. Jr. In *Oeuvres complètes* .(24 **august** 1694) – .*de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye

1888a). "Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691". **in***Oeuvres Complêtes*) – *de Christiaan Huygens*: **byeditor**D. B. de Haan **andothers**. **volume** 10. Letter dated .1 September 1691. The Hague: Martinus Nijhoff, **pages** 127–134

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Huygens, C. (1888b). *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*. Correspondance .1638-1656. Société Hollandaise des Sciences; Martinus Nijhoff, **pages** 35–40
The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations. Iowa State University .(1986) – .Press
Iacovou, P. (2024). "The construction of Casa Malaparte as living images". **in***Journal of .(*Architecture/ Architectural History* (*Taylor & Francis
Inwood, S. (2002). *The Man Who Knew Too Much: The Strange and Inventive Life of Robert .*Hooke, 1635–1703*. London: Macmillan
Irons, B. M. (1966). "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Meth- .ods". **in***AIAA Journal*: 4.11, **pages** 2035–2037
Istituto Geografico De Agostini, **editor** (1956). *Leonardo da Vinci*. Memorial edition arising from the 1938 Leonardo Exposition in Milan. New York: Reynal & Company. .**pagetotals** 518
.Jacobovici, S. **and** J. Cameron (2006). *The Exodus Decoded*. History Channel documentary .(*Jakob Bernoulli* (nodate
James, J. (1982). *Chartres: The Masons Who Built a Legend*. London: Routledge & Kegan .Paul
Jammer, M. (1957). *Concepts of Force*. Reprinted by Dover Books on Physics. Harvard .University Press
Jeremias, J. (1965). *Theophanie: Die Geschichte einer alttestamentlichen Gattung*. german. .Neukirchen-Vluyn: Neukirchener Verlag, **page** 181
Jones, B., A. Sereni **and** M. Ricci (2010). "Building Brunelleschi's Dome: A Practical Method- ology Verified by Experiment". **in***Journal of the Society of Architectural Historians*: 69.1, .**pages** 39–61
Jung, C. G. (1959). *Flying Saucers: A Modern Myth of Things Seen in the Skies*. .**bytranslator**R. F. C. Hull. London: Routledge & Kegan Paul
.Kant, I. (2023). *Metaphysical foundations of natural science*. Newcomb Livraria Press
Kaplan, R. (2000). *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*. Oxford University .Press
Kästner, A. G. (1786). *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. 4. Auflage. Göttingen: .Keyser
Keller, S. (1998). "Sections and Views: Visual Representation in Eighteenth-Century Earth- .quake Studies". **in***British Journal for the History of Science*: 31, **pages** 129–159
.Kennedy, E. S. (1971). "Al-Biruni's Masudic canon". **in***Al-Abhath*: 24.1-4, **pages** 59–81
Kepler, J. (1609). *Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis*. Prague: Typographia .Jonae Rosini
.*Joannis Kepleri Astronomi Opera Omnia*. **byeditor**H. Zimmer. Francofurti .(1855) – .Khan, F. R. (1965). "Design of high-rise buildings". **in***ASCE Symposium on Steel, Chicago*

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Khāzinī, A. al-Rahman al (2001). *The Balance of Wisdom*. **byeditor**A. S. Hamdan. Originally written in 1121 CE. Cairo: Dar al-Fikr al-Arabi.

Kim, R. D. Y. (2016). "Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses". Thesis. Kansas State University.

Kimmelman, M. (29 **april** 2020). *https://www.nytimes.com/2020/04/29/arts/design/new-york-virtual-tour-virus.htmlThe Hidden Feats That Built New York's Towering Skyscrapers*. Critic's Notebook. Published Apr. 29, 2020; updated May 4, 2020.

King, R. (2010). *Brunelleschi's Dome: The story of the great cathedral in florence*. Random House.

Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.

Kirchhoff, G. (1859). "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". **in***Journal für die reine und angewandte Mathematik*: 40, **pages** 51–88.

Kleinert, A. (**december** 2015). "Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler". **in***Prace Komisji Historii Nauki PAU*: IVX, **pages** 13–35.

Kleist, H. v. (1810). "Das Erdbeben in Chili". **in***Erzählungen*: **volume** 1. Written c. 1806; first published 1807 under the title *Jeronimo und Josephe*. Berlin: Realschulbuchhandlung, **pages** 1–62.

Kossakovsky, V. (2024). *Architecton*.

Kozák, J. **and** V. Cermák (2010). *The Illustrated History of Natural Disasters*. Dordrecht: Springer, **page** 231.

Kozak, J., V. Moreira **and** D. Oldroyd (2005). *Iconography of the 1755 Lisbon Earthquake*. Prague: Academia.

Kramer, S. N. (1963). *The Sumerians: Their History, Culture, and Character*. Chicago: University of Chicago Press.

Krinsky, C. H. (1967). "Seventy-eight Vitruvius manuscripts". **in***Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*: 30.1, **pages** 36–70.

Kron, G. (1944). "Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures". **in***Journal of the Franklin Institute*: 238.6, **pages** 399–442.

Kurrer, K.-E. (2003). "The development of the deformation method". **in***Essays on the History of Mechanics*: Springer, **pages** 57–87.

Kurrer, K. (2008). *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn.

La Gorce, J. d. (1996). "Tempêtes et Tremblements de Terre dans l'Opéra Français sous le Règne de Louis XIV". **in***Le Mouvement en Musique à l'Epoque Baroque*: **byeditor**H. Lacombe. Metz: Editions Serpenoise, **pages** 171–188.

Lagrange, J.-L. (1788). *Mécanique Analytique*. Foundational work reformulating mechanics using variational principles. Paris: Veuve Desaint.

Sur le principe des vitesses virtuelles". **in***Journal de l'École polytechnique*: 2.5." .(1798) –Prairial an VI (May–Jun 1798)., **pages** 115–118.

Lamé, G **and** B Clapeyron (1831). "Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes". **in***Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences*: 4, **pages** 463–562.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris: .Bachelier

Lamé, G. **and** B. P. E. Clapeyron (1833). "Mémoire sur la solidification par refroidissement .d'un globe liquide". **in***Annales de chimie et de physique*: 47, **pages** 250–256

.Larsen, O. P. (2007). *Reciprocal frame architecture*. Routledge

Le Corbusier (1931). *Towards a new architecture*. Republished in 2013. Courier Corpora- .tion

Lehner, M. (1997). *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Thames & .Hudson

Leibniz, G. W. (1684). "Demonstratio generalis corporum solidorum resistentiam in flexu determinandi". **in***Acta Eruditorum*: Leibniz addresses the bending resistance of solid .bodies, comparing inextensional and extensional theories., **pages** 334–336

1686a). "Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii". latin. **in***Acta Erudi-* **march)** – *torum*: English title: A Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others .Concerning a Natural Law, **pages** 161–163

1686b). "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum". **in***Acta*) – .*Eruditorum*: 1686.VI, **pages** 292–300

Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit," .(1690) – .responsio". **in***Acta eruditorum*: **pages** 358–360

1691a). "De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni **june)** – adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos". **in***Acta Eruditorum*: .**pages** 277–281

1691b). *Description of the Stepped Reckoner*. Contemporary account of Leibniz's cal-) – .culating machine

24 **july** 1691c). "Letter to Christiaan Huygens". **in***Sämtliche Schriften und Briefe*:) – **volume** III, 5. Akademie-Ausgabe. Letter discussing Johann Bernoulli's catenary so- .lution and the quadrature of the hyperbola. Berlin: Akademie Verlag

02 **march** 1691d). "Letter to Huygens". **in***Sämtliche Schriften und Briefe*: **byeditor**Preussis-) – che Akademie der Wissenschaften. **volume** 5. Reihe III: Mathematischer, naturwis- senschaftlicher und technischer Briefwechsel. Akademie-Ausgabe III, 5. Berlin: Akademie .Verlag, **pages** 58–64

1691e). "On the curve formed by a heavy flexible cord". **in***Acta Eruditorum*: **june)** – .Discusses plans to study the bending of beams and bows in future correspondence

Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du .(1710) – *mal*. The only major philosophical work published by Leibniz in his lifetime. *Printing .and the Mind of Man*, no. 177. Amsterdam: Isaac Troyel

Historia et origo calculi differentialis (1714)". **in***Leibniz GW Mathematische*" .(1858) – .*Schriften. In*: 7, **pages** 392–410

Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690". **in***Oeuvres complètes de*" .(1901) – *Christiaan Huygens*: **byeditor**Société Hollandaise des Sciences. **volume** 9. The Hague: .Martinus Nijhoff

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.Leibniz, G. W. (1923). *Samtliche Schriften und Briefe. Philosophische Schriften. Vols. 1-3 .Philosophical Papers and Letters*. D. Reidel .(1969) –
Leibniz, G. W. **and** L. E. Loemker (1956). *Philosophical Papers and Letters*. **byeditor**L. E. .Loemker. Chicago: University of Chicago Press
.Lemoine, B. (2002). *The Eiffel Tower*. New York: Princeton Architectural Press
León-Portilla, M. (1963). *Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind*. Translated from the Spanish by Jack Emory Davis. Norman: University of Oklahoma .Press
Levien, R. (2008). "The elastica: a mathematical history". **in***Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*: Text reproduced with author's .permission
Levy, S. (1953). "Structural analysis and influence coefficients for delta wings". **in***Journal .of the Aeronautical Sciences*: 20.7, **pages** 449–454
Lieberkühn, C. G. (1758). *Die Lissabonner: ein bürgerliches Trauerspiel*. Bound with *Die .Insel der Pucklichten, ein Lustspiel*. First edition. [Halle]: Carl Gottfried Meyer
Ligorio, P. (2005). *Libro di diversi terremoti*. **byeditor**E. Guidoboni. Edizione Nazionale delle Opere di Pirro Ligorio, Libri delle antichità, Torino 28. Critical edition of the manuscript (Archivio di Stato di Torino, cod. Ja.II.15), written 1570–71 during the Ferrara earthquake sequence. Introduction in Italian and English. Roma: De Luca Editori .d'Arte
Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. .Crown
.Llunji, M. (2022). *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*. Msproject
Londe, P. (1987). "The Malpasset dam failure". **in***Engineering Geology*: 24.1-4, .**pages** 295–329
López, G. (2006). "Poleni's Manuscripts about the Dome of Saint Peter's". **in***Proceedings .of the Second International Congress on Construction History*: 2
.Lori, T. (2009). *Pier Luigi Nervi*. Motta Architectura
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4 **edition**. .Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press
Lovelace, A. (1843). "Notes by the Translator". **in***Sketch of the Analytical Engine Invented .by Charles Babbage*: **byeditor**L. F. Menabrea. London: Richard **and** John Edward Taylor
Lucretius, T. C. (1995). *De Rerum Natura*. **bytranslator**A. M. Esolen. Baltimore: Johns .Hopkins University Press
Ludwin, R. S. **and** G. Smits (2007). "Folklore and Earthquakes: Native American Oral Traditions from Cascadia Compared with Written Traditions from Japan". **in***Myth and .Geology*: **byeditor**L. Piccardi **and** W. B. Masse. London: Geological Society, **pages** 67–94
MacDonald, W. L. (1982). *The Architecture of the Roman Empire, Volume II: An Urban .Appraisal*. Yale University Press
Mahmoodi, P **andothers** (1987). "Performance of viscoelastic dampers in world trade .center towers". **in***Dynamics of structures*: ASCE, **pages** 632–644

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.Maier, G. (2007). Private Communication
Maney, G. A. (1915). “Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New .Method of Solution”. **in***Studies in Engineering*: University of Minnesota
Maor, E. (2001). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of .the Computer*
Mark, R. (1978). “Structural experimentation in Gothic architecture: Large-scale experimentation brought Gothic cathedrals to a level of technical elegance unsurpassed until .the last century”. **in***American Scientist*: 66.5, **pages** 542–550
Mark, R., J. F. Abel **and** K. O’Neill (1973). “Photoelastic and finite-element analysis of a .quadripartite vault”. **in***Experimental Mechanics*: 13.8, **pages** 322–329
Mark, R. **and** R. A. Prentke (1968). “Model analysis of Gothic structure”. **in***The Journal of .the Society of Architectural Historians*: 27.1, **pages** 44–48
Markowsky, G. (1992). “Misconceptions about the golden ratio”. **in***The College Mathe- .matics Journal*: 23.1, **pages** 2–19
Marmo, F. **andothers** (2019). “On the form of the Musmeci’s bridge over the Basento river”. .**in***Engineering Structures*: 191, **pages** 658–673
Marmontel, J.-F. (1777). *Les Incas, ou La destruction de l’empire du Pérou*. 2 **volumes**. .2 vols. First edition. Paris: Lacombe
Marshack, A. (1972). *The Roots of Civilization: The Cognitive Beginnings of Man’s First .Art, Symbol and Notation*. New York: McGraw-Hill
.*MATLAB User’s Guide* (1984). The MathWorks. Natick, MA
Maxwell, J. (1864a). “On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces”. **in***Philosophical .Magazine*: 27, **pages** 250–261
1864b). “On reciprocal figures and diagrams of forces”. **in***The London, Edinburgh, and*) – .*Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*: 27.182, **pages** 250–261
1864c). “On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames”. **in***The Lon-*) – *don, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*: 27.182, .**pages** 294–299
.*The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*... **volume** 2. University Press .(1890) –
McCullough, D. (1972). *The Great Bridge: The Epic Story of the Building of the Brooklyn .Bridge*. New York: Simon & Schuster
McDonough, J. K. (2016). “Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years”. .**in***Philosophical Review*: 125.1, **pages** 1–34
McQuaid, M. (1993). *Santiago Calatrava : structure and expression*. New York, N.Y: Mu- .seum of Modern Art
.Menn, C. (1990). *Prestressed concrete bridges*. Springer Science & Business Media
The place of aesthetics in bridge design”. **in***Structural engineering international*:“ .(1996) – .6.2, **pages** 93–95
Menninger, K. (2013). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. .Courier Corporation

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Michell, A. G. M. (1904). “LVIII. The limits of economy of material in frame-structures”. **in***The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*: 8.47, **pages** 589–597.

Michell, G. (1989). *The Stepwells of India*. Mapin Publishing.

Mieroop, M. Van de (2024). *A history of the ancient Near East ca. 3000-323 BC*. John Wiley & Sons.

Miller, D. M. (2017). “The Parallelogram Rule from Pseudo-Aristotle to Newton”. **in***Archive for History of Exact Sciences*: 71.2, **pages** 157–191.

Miller, G. A. (1916). *Historical introduction to mathematical literature*. Macmillan.

Miyata, N. **and** M. Takada, **editors** (1995). *Namazu-e: Jishin to Nihon Bunka*. Tokyo: Sato-funi Shuppan.

Mohr, C. O. (1868). “Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen”. german. **in***Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover*: 14. [Contributions to the Theory of Timber and Iron Constructions], **pages** 20–52, 397–400.

(1874) – *Lehrbuch der Mechanik*. F. Vieweg.

1882a). “Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszus-) – tandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeit-slehre”. german. **in***Der Civilingenieur*: 28.2, **pages** 113–156.

1882b). “Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszu-) – standes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeit-slehre”. **in***Der Civilingenieur*: 28, **pages** 113–156, 193–235.

Mohr, O. (1892). “Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen”. german. **in***Der Civilingenieur*: 38. [The Calculation of Trusses with Rigid Joint Connections], **pages** 577–594.

Moody, E. A. (1951). “Galileo and Avempace: The Dynamics of the Leaning Tower Experiment (I)”. **in***Journal of the History of Ideas*: **pages** 163–193.

Moorey, P. R. S. (1999). *Ancient Mesopotamian materials and industries: the archaeological evidence*. Eisenbrauns.

Morandi, R. **and** F. Piccarreta (1972). “Roof structure of the new hangars by the International Fiumicino Airport (Rome): design, model tests”. **in***IABSE congress report*: International Association for Bridge **and** Structural Engineering.

Moseley, H. (1843). *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. John Weale.

Mozi (2013). *The Mozi: A Complete Translation*. **bytranslator**I. Johnston. Originally compiled in the 5th century BCE. Hong Kong: The Chinese University Press.

Müller-Breslau, H. F. B. (1886). *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit*. german. [The Newer Methods of Strength of Materials and Statics of Building Structures, Based on the Law of Virtual Displacements and the Theorems on Strain Energy]. Leipzig: Baumgärtner.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Müller-Breslau, H. F. B. (1887). *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. german. 1 **edition**. **volume** 1. [Graphical Statics of Building Structures]. Systematic treatment of influence lines. Leipzig: Baumgärtner.

Murray, S. (1989). *Beauvais Cathedral: architecture of transcendence*. Princeton University Press.

(1998). "Notre-Dame of Paris and the anticipation of Gothic". **in***The Art Bulletin*: 80.2, **pages** 229–253.

Musolino, M. (2017). "L'arte traumatica. Gibellina e la risemantizzazione delle sue rovine". **in***Meridiana*: 88, **pages** 157–178.

Musschenbroek, P. van (1739). *Elementa Physicae Conscripta in usus Academicos*. Latin. Includes early experimental studies on the tensile strength of materials. Lugduni Batavorum: Petrum vander Eyk.

Napier, J. (1614). *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Edinburgh: Andrew Hart.

NASA (1968). *NASTRAN User's Manual*. techreport. Washington, D.C.: National Aeronautics **and** Space Administration.

NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team (**september** 2023). *Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team Report*. techreport. Washington, DC: National Aeronautics **and** Space Administration.

National Institute of Standards and Technology (NIST) (**september** 2005). *Final Report on the Collapse of the World Trade Center Towers: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster*. NCSTAR 1. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards **and** Technology.

Naveh, J. (1987). *Early History of the Alphabet: An Introduction to West Semitic Epigraphy and Palaeography*. 2nd. Jerusalem: Magnes Press.

Navier, C (1821). "Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques". **in***Bulletin de la Société Philomatique de Paris*: **pages** 177–181.

(1823). *Rapport à Monsieur le Ministre de l'Intérieur sur le projet d'un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées*. Report on the proposed suspension bridge at the Champs-Élysées, highlighting the intersection of engineering, mathematics, and architectural aesthetics. Paris: Imprimerie Royale.

(1826). *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. First edition. Second edition published in 2 volumes, 1833-1838. Paris: Carilian-Gœury.

1827a). "Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides) – élastiques". **in***Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*: 7, **pages** 375–393.

1827b). "Mémoire sur les lois du mouvement des fluides". **in***Mémoires de l'Académie*) – *des sciences de l'Institut de France*: 6. Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822, **pages** 389–440.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Navier, C (1830). *Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*. 2 **edition**. Augmentée d'une notice sur le pont des Invalides. Paris: Carilian-Gœury.

– (1833). *Résumé des Leçons Données sur L Application de la mécanique a L'etablissement des constructions et des machines*. 2nd edition.

– (1864). *Résumé des leçons données a l'École des ponts et chaussées [...]. Troisième édition avec des notes et des appendices, par M. Barré de Saint-Venant*.

Needham, J. (1959). *Science and Civilization in China*. Cambridge University Press.

Nelli, G. B. **and** A. Ceccherelli (1753). *Discorsi di architettura del senatore Giovan Batista Nelli con la vita del medesimo dedicata all'illustriss. signore Bindo Simone Peruzzi e due ragionamenti sopra le cupole di Alessandro Cecchini architetto*. per gli eredi Paperini.

Nemore, J. de (1250). *Liber de Ratione Ponderis*. 13th century. Critical edition by E. A. Moody and M. Clagett in *The Medieval Science of Weights*, University of Wisconsin Press, 1952.

Nervi, P. (2018). *Aesthetics and Technology in Building: The Twenty-first-century Edition*. Translated from the Italian by Robert Einaudi. University of Illinois Press.

Nervi, P. L. (1956a). *Structures*. F. W. Dodge Corporation.

– (1956b). *Structures*. Translated from the Italian *Costruire correttamente* by Giuseppina and Mario Salvadori. F.W. Dodge Corporation.

– (1963). *Buildings, projects, structures, 1953-1963*. Praeger.

Nervi, P. L., G. Neri **andothers** (2014). *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*. CittàStudi Edizioni.

Neufert, E. (1970). *Architects' Data*. **bytranslator**R. Herz. First English translation of *Bauentwurfslehre* (1936). London: Lockwood.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. **volume** 9. Courier Corporation.

– (2012). *A history of ancient mathematical astronomy*. **volume** 1. Springer Science & Business Media.

Newmark, N. M. (1959). "A method of computation for structural dynamics". **in***Journal of the engineering mechanics division*: 85.3, **pages** 67–94.

Newton, I. (1680). *Index Chemicus*. The Chimistry of Isaac Newton Project, Indiana University Digital Library Program.

– (1687). *Mathematical principles of natural philosophy*. English & Latin Version.

– (1704). *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. First edition. London: Sam. Smith **and** Benj. Walford.

– (1717). *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Dover Publications, 1952.

– (1736). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*. **bytranslator**J. Colson. Originally written in 1671. London: Henry Woodfall.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Newton, I. (1960). “Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676”. **in***The Correspondence of Isaac Newton*: **byeditor**H. W. Turnbull. **volume** 2. 1676–1687. Cambridge: .Cambridge University Press. **chapter** 187, **pages** 110–161

Nikolinakou, M. A. **and** A. J. Tallon (2006). “New Research in Early Gothic Flying Buttresses”. en. **in***Proc. Second Intern. Congress Construction History, Cambridge*: .**pages** 2347–2361

Nikolinakou, M.-K., A. J. Tallon **and** J. A. Ochsendorf (2005). “Structure and form of early Gothic flying buttresses”. **in***Revue Européenne de Génie Civil*: 9.9-10, .**pages** 1191–1217

Noether, E. (1918). “Invariante Variationsprobleme”. **in***Nachrichten von der Gesellschaft .der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*: **pages** 235–257

Noll, W. (1958). “A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous .Media”. **in***Archive for Rational Mechanics and Analysis*: 2.1, **pages** 197–226

NRC-ML19312B609 (2019). *Official Transcript of Proceedings; NextEra Energy Seabrook, LLC Seabrook Station, Unit 1; Docket Number: 50-443-LA-2;ASLBP Number:17-953- .02-LA-BD01*. Newburyport, Massachusetts

Nur, A. **and** D. Burgess (2008). *Apocalypse: earthquakes, archaeology, and the wrath of .God*. Princeton University Press

Oates, J. (1990). *Babylon*. See Chapter 2 for building materials and construction practice. .London: Thames **and** Hudson

Ochsendorf, J. A. (2002). “Collapse of masonry structures”. Thesis. University of Cam- .bridge

Oikonomou, A. (2022). “The Use of Geometrical Tracing, Module and Proportions in Design and Construction, from Antiquity to the 18th Century”. **in***International Journal .of Architectural Heritage*: 16.10, **pages** 1567–1587

Oldfather, W., C. Ellis **and** D. M. Brown (1933). “Leonhard Euler’s elastic curves”. **in***Isis*: 20.1. Translation of *De curvis elasticis*, Additamentum I to *Methodus inveniendi lineas .curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, **pages** 72–160

Oppenheim, A. L. (1977). *Ancient Mesopotamia: Portrait of a Dead Civilization*. University .of Chicago Press

.Oresme, N. (1351). *De configurationibus qualitatum et motuum*

Otto, F., R. Trostel **and** F. K. Schleyer (1973). *Tensile structures; design, structure, and .calculati on of buildings of cables, nets, and membranes*. MIT Press

Oughtred, W. (1632). *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*. London: .Augustine Mathewes

Our history (2026). Institutional history: origin in 1908; name adopted in 1922. The .Institution of Structural Engineers

.Palladio, A. (1570). *I quattro libri dell’architettura*. Domenico di Franceschi

Palomo, M. (2017). “Describing Reality: Bernoulli’s Challenge of the Catenary Curve and its Mathematical Description by Leibniz and Huygens”. **in***Leibniz and the Dialogue Between Sciences, Philosophy and Engineering, 1646–2016. New Historical and Epistemological .Insights*: **page** 334

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Panofsky, E. (1945). “An Explanation of Stornaloco’s Formula”. **in***The Art Bulletin*: 27.1, **pages** 61–64.

Paranjape, M. R. (2011). “‘Natural Supernaturalism?’The Tagore–Gandhi Debate on the Bihar Earthquake”. **in***The Journal of Hindu Studies*: 4.2, **pages** 176–204.

Pardies, I. G. (1710). *La statique ou la science des forces mouvantes*. S. Mabre-Cramoisy.

Parent, A. (1713). *Essais et recherches de mathématique et de physique, dans lesquels on traite de l’utilité des différentes sciences, et principalement de la mécanique, par rapport aux arts et métiers*. 3 volumes. Paris: Jean Anisson.

Parkinson, R. B. (1999). *Cracking Codes: The Rosetta Stone and Decipherment*. Berkeley: University of California Press.

Pascal, B. (1645). *La Machine Arithmetique*. Pamphlet describing Pascal’s mechanical calculator. Paris.

Pearson, K **(august** 1905). “On the Stability of Masonry Dams”. **in***Engineering*: **page** 171.

Pearson, K. **andothers** (1907). *An experimental study of the stress in Masonry Dams*. (techreport. Technical Series, V. Drapers Company Research Memoirs (Technical Series).

Pedreschi, R. (2008). “Form, force and structure: a brief history”. **in***Architectural Design*: 78.2, **pages** 12–19.

Peiffer, J. (2006). “Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann”. **in***Journal Électronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]*: 2.1b, Article–1.

Perga, A. of (1896). *Treatise on Conic Sections*. **bytranslator**T. L. Heath. Greek text with English translation. Cambridge: Cambridge University Press.

Peripatetic School (circa 4th century BCE). *Mechanical Problems*. Traditionally attributed to Aristotle, though likely compiled by later members of the Peripatetic school. Problem 3 possibly reflects the thought of Archytas of Tarentum.

Perret, A. (1952). *Contribution à une théorie de l’architecture*. Paris: Cercle d’études architecturales.

Perronet, J.-R. (1782). *La construcción de puentes en el siglo XVIII*. Spanish translation. Reverte.

(1788–1782) – *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d’Orléans et autres*. 2 vols. with 67 engraved plates. Available at https://archive.org/details/chepfl-lipr-axd-20-01. Paris: Imprimerie Royale.

Petroski, H. (1997). “Engineering: Santiago Calatrava”. **in***American Scientist*: 85.2, **pages** 114–118.

Philoponus, J. (1993). *Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5*. **byeditor**R. Sorabji **and** C. Wildberg. **bytranslator**C. Wildberg. Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth.

Piccardi, L. (2007). “The AD60 Denizli Basin Earthquake and the Apparition of Archangel Michael at Colossae”. **in***Myth and Geology*: **byeditor**L. Piccardi **and** W. B. Masse. London: Geological Society, **pages** 95–105.

Picon, A. (1988). “Navier and the introduction of suspension bridges in France”. **in***Construction History*: 4, **pages** 21–34.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.Pierrefeu, F. de **and** L. Corbusier (1942). *La maison des hommes*. Plon
Piola, G. (1833). “La meccanica de’ corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle .variazioni”. **in***Opuscoli Matematici e Fisici di Diversi Autori*: 1, **pages** 201–236
Pisano, R., J. Coopersmith **and** M. Peake (2021). *Essay on Machines in General (1786)*. .**volume** 47. Springer
Pizzigoni, A. (2015). “Brunelleschi’s Bricks”. **in***Journal of the International Association .for Shell and Spatial Structures*: 56.2, **pages** 137–148
Plato (350 BC). *Laws*. Composed ca. 350 BCE. Online editio. Tufts University: Perseus .Digital Library
.Pliny the Elder (1906). *Naturalis Historia*. **byeditor**K. Mayhoff. Leipzig: Teubner .Poincaré, H. (1905). *Science and hypothesis*. London: Walter Scott Publishing CO., LTD
Poisson, S. D. (1829). “Mémoire sur l’équilibre et le mouvement des corps élastiques”. .**in***Mémoires de l’Académie des Sciences*: 8, **pages** 357–570
Poisson, S. D. (1831). “Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élas- .tiques”. **in***Mémoires de l’Académie Royale des Sciences*: 10, **pages** 549–605
Poleni, G. (1748). *Memorie Istoriche Della Gran Cvpola Del Tempio Vaticano, E De’Danni .Di Essa, E De’Ristoramenti Loro, Divise In Libri Cinqve*. Nella Stamperia del seminario
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava’s bridge in Seville*. MIT .Press
Pope, T. (1811). *A Treatise on Bridge Architecture: In which the Superior Advantages of the Flying Pendent Lever Bridge are Fully Proved; with an Historical Account and Description of Different Bridges Erected in Various Parts of the World, from an Early .Period, Down to the Present Time*. Alexander Niven
.Popovic, O. (1996). “Reciprocal frame structures”. phdthesis. University of Nottingham
Popovic Larsen, O. (2014). “Reciprocal frame (RF) structures: real and exploratory”. .**in***Nexus Network Journal*: 16.1, **pages** 119–134
Povoledo, E. (2023). “A High-Maintenance Relationship for 637 Years, but Milan’s Duomo .Is Still Adored”. **in***The New York Times*
Powell, G. (2008). “Structural analysis: Are we relying too much on computers? Part 1: The .problem”. **in***Structure Magazine*: **pages** 50–52
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier .(formerly Dover). New York: McGraw-Hill
Pugnale, A. **and** M. Sassone (2014). “Structural reciprocity: critical overview and promising .research/design issues”. **in***Nexus Network Journal*: 16.1, **pages** 9–35
Quasimodo, S. (1958). “Al padre”. **in***La terra impareggiabile*: Written for the 90th birth- day of Gaetano Quasimodo and the 50th anniversary of the Messina earthquake of .28 December 1908. English title: *To My Father*. Milano: Mondadori
.Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin **and** Company .Rankine, W. J. M. (1862). *A Manual of Civil Engineering*. London: Charles Griffin
.Rasch, B. **and** F. Otto (1996). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John .Wiley & Sons

Rega, G. (2013). “Mechanics and Architecture: Nervi’s Creative Knowledge Versus The Unsolved Contemporary Complexity”. **in***Journal of the International Association for .*Shell and Spatial Structures*: 54.2-3, **pages** 243–252

Renn, J., P. Damerow **and** P. McLaughlin (2002). “Aristotle, Archimedes, Euclid, and the origin of mechanics: The perspective of historical epistemology”. **in***Symposium .*Arquımedes, edited by José Luis Montesinos Sirera*: **pages** 43–59

.Ribon, M. (1999). *Esthetique de la Catastrophe*. Editions Kime

Rice, J. (1968). “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain .Concentration by Notches and Cracks”. **in***J. Applied Mechanics*: 35, **pages** 379–386

Richards, E. G. (1998). *Mapping Time: The Calendar and Its History*. Oxford University .Press

Richardson, L. (**february** 1911). “The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam”. **in***Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A.: .*210, **pages** 307–357

Ritz, W. (1909). “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der .mathematischen Physik.” **in***Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*

Robertson, L. E. (2017). *The Structure of Design: An Engineer’s Extraordinary Life in .Architecture*. The Monacelli Press, LLC

Robins, G. **and** C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Transcription, translation, and commentary on EA 10057–10058. London: British .Museum Press

Robson, E. (2001). “Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton .322”. **in***Historia Mathematica*: 28.3, **pages** 167–206

Words and Pictures: New Light on Plimpton 322”. **in***American Mathematical*“ .(2002) – .*Monthly*: 109.2, **pages** 105–120

Roebling, W. A. (1877). *Report of the Chief Engineer of the New York and Brooklyn Bridge. .*Annual report to the directors of the New York Bridge Company

Rousseau, J.-J. (1967). “Lettre à M. de Voltaire [sur la Providence]”. **in***Correspondance complète de Jean-Jacques Rousseau*: **byeditor**R. A. Leigh. **volume** 4. Written 18 August 1756. .Also known as *Lettre sur la Providence*. Genève: Institut et Musée Voltaire, **pages** 37–50

.Sader, H. (2019). *The Phoenicians: A History*. Princeton: Princeton University Press

Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855a). “Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l’équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s’exerçant simultanément”. **in***Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences de .l’Institut Impérial de France*: 14. Presented 1853; published 1855, **pages** 233–560

Mémoire sur l’établissement des équations des mouvements intérieurs opérés“ .(1864) – dans les corps solides ductiles au delà des limites où l’élasticité pourrait les ramener à .leur premier état”. **in***Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*: 70, **pages** 473–480

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855b). *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*. **volume** 14, **pages** 233–560.

Saint-Venant, B. de (1855c). "Mémoire sur la flexion des prismes rectangulaires". French. **in***Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*: 14. Reprinted in *Mémoires de Mécanique*, Paris: Gauthier-Villars, 1883, **pages** 233–560.

Salençon, J. (2018). "The Emergence of the Principle of Virtual Velocities". **in***Virtual Work Approach to Mechanical Modeling*. London: ISTE Press – Elsevier. **chapter** 1, **pages** 1–18.

Salencon, J. (**march** 2017). *Equilibrium and Forces: from Aristotle to Lagrange*.

Saliklis, E. **and** J. Parker (2014). "The Maney-Goldberg Method: An Iterative Method Lost in the Mists of Time". **in***Proceedings of the IASS-SLTE 2014 Symposium "Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints"*: **byeditor**R. Brasil **and** R. Pauletti. IASS. Brasilia, Brazil.

Saouma, V. E. **and** C. Barton (**april** 1994). "Fractals, Fractures and Size Effects in Concrete". **in***Journal of Engineering Mechanics of the American Society of Civil Engineers*: 120.4, **pages** 835–854.

Saouma, V. E. **and** G. Fava (2006). "On Fractals and Size Effects". **in***International Journal of Fracture*: 137, **pages** 231–249.

Saouma, V. E., D. Natekar **and** E. Hansen (2003). "Cohesive Stresses and Size Effects in Elasto-Plastic and Quasi-Brittle Materials". **in***International Journal of Fracture*: 119, **pages** 287–298.

Saouma, V. E. **and** L. Perotti (2004). *Constitutive Model for Alkali Aggregate Reaction*. techreport. Bienne, Switzerland: Report No. 2, Submitted to the Swiss Federal Agency of Water **and** Geology.

Saxony, A. of (1988). *Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis*. **byeditor**A. Maier. Critical Latin edition. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Schmaltz, T. M. (2003). "Cartesian causation: body–body interaction, motion, and eternal truths". **in***Studies in History and Philosophy of Science Part A*: 34.4, **pages** 737–762.

Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform*. Austin: University of Texas Press.

Schrama, W. (2021). "A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames". **in***TU Delft, Civil Engineering*: Bachelor Thesis.

Seabrook, J. (**november** 2001). "The Tower Builder". **in***New Yorker*: 36.

Sebregondi, G. C. **and** R. Schofield (2016). "First Principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral". **in***Architectural history*: 59, **pages** 63–122.

Seidel, P. L. (1873). *Ueber ein verfahren, die gleichungen, auf welche die methode der kleinsten quadrate führt, sowie lineäre gleichungen überhaupt, durch successive annäherung aufzulösen*. **volume** 11. Verlag d. Akad.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Serlio, S. (1996). *Sebastiano Serlio on Architecture, Volume I*. **byeditor**V. H. Veen **and** P. .Hicks. Yale University Press
Serrano, I. M. **and** B. D. Suceavă (2017). “A Medieval Mystery: Nicole Oresme’s Concept of Curvitas”. **in***The Best Writing on Mathematics 2016*: Princeton University Press, .**pages** 238–248
Shakespeare, W. (1597). *Romeo and Juliet*. First published in 1597; numerous modern .editions available
.Sharer, R. J. **and** L. P. Traxler (2006). *The Ancient Maya*. 6th. Stanford University Press
Shelby, L. (1972). “The Geometrical Knowledge of Mediaeval Master Masons”. **in***Specu- .lum*: 47.3, **pages** 395–421
Shelden, D. R. (2002). “Digital surface representation and the constructibility of Gehry’s .architecture”. phdthesis. Massachusetts Institute of Technology
.Shukla, D. (1993). *Vaastu Shastra: Principles of Ancient Architecture*. Institute of Indology
.Smith, M. E. (1996). *The Aztecs*. Blackwell Publishing
Smits, G. (2006). “Shaking Up Japan: Edo Society and the 1855 Catfish Picture Prints”. .**in***Journal of Social History*: 39.4, **pages** 1045–1078
Southwell, R. V. (1935). “Stress-calculation in frameworks by the method of” systematic relaxation of constraints”—I and II”. **in***Proceedings of the Royal Society of London. Series .A-Mathematical and Physical Sciences*: 151.872, **pages** 56–95
Spinoza, B. d. (1670). *Tractatus Theologico-Politicus*. Published under the pseudonym “Operibus Posthumis”; quoted from the translation of R. H. M. Elwes (1883), Preface. .Hamburg: Henricum Künraht
Stevin, S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst*. English translation: *The Principal Works of Simon Stevin*, ed. E. J. Dijksterhuis, C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, .1955. Leiden: Christoffel Plantijn
The Principal Works of Simon Stevin. **byeditor**D. J. Struik. **volume** 5 vol- .(1966–1955) – umes. Mathematics, Engineering, Navigation, Fortification, Optics, Architecture, Music. .Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger
Les oeuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard. chez Bonaventure .(1987) – .& Abraham Elsevier, imprimeurs ordinaires de l’Université
Strang, G. **and** G. J. Fix (1973). “An analysis of the finite element method(Book- An analysis of the finite element method.)” **in***Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1973. 318 .p*
.Straub, H. (1952). *A History of Civil Engineering*. London: Leonard Hill
Sugimoto, K. (2008). “Earthquake-Resistant Design in Japanese Pagodas: A Historical .Perspective”. **in***Journal of Japanese Architecture*: 12.3, **pages** 45–67
Sullivan, L. (**march** 1896). “The tall office building artistically considered”. **in***Lippincott’s .Monthly Magazine*
Sundaram, M. **and** G. K. Ananthasuresh (2009). *Gustave Eiffel and his Optimal Structures*. .**volume** 14. 9. Indian Academy of Sciences, **pages** 846–855

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Swanson, J. A. (1971). *ANSYS Engineering Analysis System*. techreport. Pittsburgh: Swanson Analysis Systems.

Szabó, I. (1977). *Geschichte der mechanischen Principien*. In German; comprehensive history. Basel: Birkhäuser.

Thacker, B. **andothers** (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. techreport LA-14167. Los Alamos National Laboratory.

The Baltimore Sun (1979). "Pier Luigi Nervi, famed architect, dies in Italy". **in***Proquest Historical Newspapers*.

The Economist (**july** 2025). "How the Gulf's rulers want to harness the power of science". **in***The Economist*: 449.9311. Accessed: 2025-01-12, **pages** 20–23.

The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments (1611). Authorized King James Version. London: Robert Barker, Printer to the King.

Thomson, W. (1848). "On an Absolute Thermometric Scale Founded on Carnot's Theory of the Motive Power of Heat". **in***Philosophical Magazine*: 33, **pages** 313–317.

– (1851). "On the Dynamical Theory of Heat, with Numerical Results Deduced from Mr Joule's Equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault's Observations on Steam". **in***Transactions of the Royal Society of Edinburgh*: 20, **pages** 261–288.

Thomson, W. L. K. (1855). "On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter". **in***Philosophical Magazine*: 5, **pages** 4–27.

Thrall, A., D. Billington **and** K. Bréa (2012). "The Maria Pia Bridge: A major work of structural art". **in***Engineering structures*: 40, **pages** 479–486.

Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. New York, U.S.A: McGraw-Hill.

Timoshenko, S. **and** J. Goodier (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw Hill.

Timoshenko, S. P. **and** J. M. Gere (1976). *Mechanics of Materials (Strength of Materials)*. **3 edition**. New York: McGraw-Hill.

Todhunter, I. **and** K. Pearson (1893). *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*. Two volumes, Edited and completed by Pearson, K. Cambridge University Press.

Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy's almagest*. Princeton University Press.

Torricelli, E. (1644). *Opera geometrica*. latin. Contains *De sphaera et solidis sphaeralibus*, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, and *De dimensione parabolae*. Florence: Amadoro Massa & Lorenzo de Landis.

Torroja, E. (1962a). "Hipódromo de la Zarzuela". **in***Informes de la Construcción*: 14.137, **pages** 19–38.

– (1962b). *The Structures of Architecture*. University of California Press.

– (2008). "Razón y ser de los tipos estructurales". **in** .

Torroja, E. **and** E. T. Miret (1958). *The structures of Eduardo Torroja: an autobiography of engineering accomplishment*. FW Dodge Corporation.

Torroja, E., J.-J. Polivka **and** M. Polivka (1958). *Philosophy of structures*. Univ of California Press.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Truesdell, C (1960). *The Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies 1638-1788: Introduction to Vol. X and XI of Leonhardi Euleri Opera Omnia*. This is the the definitive print source for Euler's works. Publication began in 1911, growing to scores of volumes comprising nearly all .of Euler's works. Birkhäuser **and** the Euler Commission of Switzerland .Truesdell, C. (1968). *Essays in the History of Mechanics*. Springer .History of classical mechanics". **in***Naturwissenschaften*: 63.2, **pages** 53–62" .(1976) – Truesdell, C. **and** W. Noll (1965). "The Non-Linear Field Theories of Mechanics". **in***Handbuch der Physik*: **byeditor**S. Flügge. **volume** III/3. Berlin: Springer .Turnbull, S. (2003). *Japanese Castles 1540-1640*. Osprey Publishing Turner, M. J. **andothers** (1956). "Stiffness and deflection analysis of complex structures". .**in***journal of the Aeronautical Sciences*: 23.9, **pages** 805–823 Turner, M. (1959). *The direct stiffness method of structural analysis*. techreport. Technische .Hockschule, Aachen, Germany Van Musschenbroek, P. (1729). *Physicae experimentales, et geometricae, de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine terrae, cohaerentia corporum firmorum dissertationes: ut et ephemerides meteorologicae Ultrajectinae*. apud .Samuelem Luchtmans Varignon, P. (1725). *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MD-.CLXXXVII*. **volume** 2. chez Claude Jombert Vashy, A. (1892). "Sur les Lois de Similitude en Physique". **in***Annales Télégraphiques*: 19, .**pages** 25–28 Venezia, F. (1989). "Base: A Museum: Homage to Gibellina Vecchia, 1985: Gibellina Nuova, .Sicily". **in***Perspecta*: 25, **pages** 202–215 Vergilius Maro, P. (2008). *The Aeneid*. **bytranslator**C. Day Lewis. **withintroduction**J. Griffin. Oxford World's Classics. Translation first published: London, Hogarth Press, 1952. .Oxford: Oxford University Press Vesalius, A. (1998–2009). *On the Fabric of the Human Body: A Translation of De Humani Corporis Fabrica Libri Septem*. **bytranslator**W. F. Richardson **and** J. B. Carman. **volume** 5 .volumes. English translation of the 1543 edition. San Francisco: Norman Publishing .Vignola, G. B. da (1969). *Canon of the Five Orders of Architecture*. Dover Publications Vinci, L. da (1881). *Les Manuscrits de Léonard de Vinci*. Manuscripts A–M, c. 1490–1519. .Paris: Institut de France .*The Notebooks of Leonardo da Vinci*. New York: Reynal & Hitchcock .(1938) – Viola, E., L. Panzacchi **and** F. Tornabene (2004). "Structural Analysis of Historical Masonry Arches". en. **in***Restoration, International Conference of Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application*: Cesena, Italy, .**pages** 7–11 Viollet-le-Duc, E.-E. (1854). *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au .XVIe siècle*. **volume** 1. Bance *Discourses on Architecture*. Translated from the French by Benjamin Bucknall. .(1875) – .Boston: Ticknor **and** Company

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Virlogeux, M. (2001). “Bridges with multiple cable-stayed spans”. **in***Structural Engineering International*: 11.1, **pages** 61–82.

Virlogeux, M. **andothers** (2005). “Millau Viaduct, France”. **in***Structural Engineering International*: 15.1, **pages** 4–7.

Vitalis, L. (**september** 2021). *Pier Luigi Nervi, l’architecture biomimétique avant la lettre ?* Rapport de recherche hal-03359251. MAP – Modèles et simulations pour l’Architecture et le Patrimoine.

Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.

Vitruvius **and** M. H. Morgan (1914). *The Ten Books on Architecture*. Harvard University Press.

Voigt, W. (1898). *Die fundamentalen Eigenschaften der Krystalle*. *243 pp*.

Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner.

Voltaire [Arouet, F.-M. (1759). *Candide, ou l’Optimisme, traduit de l’allemand de Mr. le Docteur Ralph*. Published without author’s name or place of publication. First edition; priority of the Cramer Geneva printing (299 pp.) established by Gagnebin (1952) and confirmed by Wade and Barber. *Printing and the Mind of Man*, no. 204. [Genève]: [Gabriel Cramer], **page** 299.

Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien”.“ .(2009) – **in***Œuvres complètes de Voltaire*: **byeditor**D. Adams **and** H. T. Mason. **volume** 45A. Written December 1755; first authorised edition Geneva: Cramer, 1756. 180 lines. Oxford: Voltaire Foundation, **pages** 315–360.

Wagner, D. L. (1983). *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Collection of essays covering each of the seven liberal arts and their historical development. Bloomington: Indiana University Press.

Wakamizu, S. (2003). *Namazu wa Odoru*. Tokyo: Bungeisha.

Wallis, J. (1670). *Mechanica, sive de Motu Tractatus Geometricus*. London: Guliemi Godbid.

Wassell, S. R. (2008). “Andrea Palladio (1508-1580)”. **in***Nexus Network Journal*: 10, **pages** 213–226.

Webster, J. (2001). “Haydn’s *Seven Last Words*: An Introduction”. **in***The New Grove Dictionary of Music and Musicians*: **byeditor**S. Sadie. 2 **edition**. **volume** 11. London: Macmillan, **pages** 171–173.

Weidman, P. (2009). “Modified shape of the Eiffel Tower determined for an atmospheric boundary-layer wind profile”. **in***Physics of Fluids*: 21.6, **page** 067102.

Westfall, R. S. (1980). *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.

Whiteside, D. T. (1969). *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume V: 1683–1684*. Editor and commentary by Derek T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press.

Wilkes, M. V. (1951). “The EDSAC”. **in***Journal of the British Institution of Radio Engineers*: 11, **pages** 327–331.

Willis, R. (1842). “On the Construction of the Vaults of the Middle Ages”. **in***Transactions of the Royal Institute of British Architects, I*.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Willis, R. (1910). *On the construction of the vaults of the Middle Ages*. Royal Institute of .British Architects
Wilson, E. L. (1969). *SAP: A General Structural Analysis Program*. techreport. Berkeley: .University of California, Berkeley
Wilson, E. (1960). "Matrix Analysis of Nonlinear Structures". **in***Proceedings of 2nd ASCE .Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa*
Wilson, E. **and** R. Clough (1962). "Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis". **in***Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*: Laboratorio Nacional .de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal
Winchurch, M. E. (2007). *The Art of Thin Shell Design: A Comparison of Eduardo Torroja and Pier Luigi Nervi*. Undergraduate Thesis in the Department of Civil and Environmen- .tal Engineering
Winkler, E. (1875). *Theorie der Brücken. Aeussere Kräfte gerader Träger*. german. 2 **edition**. Vorträge über Brückenbau 1. [Theory of Bridges: External Forces on Straight Beams]. .Wien: Carl Gerold's Sohn
Wisner, B. **andothers** (2004). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disas- .ters*. 2 **edition**. London: Routledge
Wittkower, R. (1944). "Principles of Palladio's Architecture". **in***Journal of the Warburg .and Courtauld Institutes*: 7.1, **pages** 102–122
Wolfe, M. I. **and** R. Mark (1976). "The collapse of the vaults of Beauvais Cathedral in 1284". .**in***Speculum*: 51.3, **pages** 462–476
Wolfram, S. (1988). *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Redwood .City, CA: Addison-Wesley
Wuhrmann, S. (1994). "Le Tremblement de Terre entre Peinture de Genre et Peinture .d'Histoire". **in***Art + Architecture en Suisse*: 45.4, **pages** 330–339
.Wulff, H. E. (1968). "The Qanats of Iran". **in***Scientific American*: 218.4, **pages** 94–105
Young, T. (1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. .**volume** 1. Lecture XXXIX, p. 463. London: Joseph Johnson
.Zammattio, C. (1980). *Leonardo the Scientist*. McGraw-Hill
Zienkiewicz, O. (1967). *The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics*. First. .McGraw-Hill, London
Zienkiewicz, O. **and** Y. K. Cheung (1964). "Buttress Dams on Complex Rock Foundations". .**in***Water Power*: 16, **page** 193
.Stresses in Buttress Dams". **in***Water Power*: 17, **page** 69" .(1965) –
Zienkiewicz, O. **and** R. Taylor (2000). *The finite element method: Solid mechanics*. .**volume** 2. Butterworth-heinemann
Zixuan, C., C. Jixun **and** Z. Zhigang (2018). "Curvature and Its Application in Huygens Isochronous Pendulum". **in***2018 IEEE International Conference of Safety Produce In- .formatization (IICSPI)*: IEEE, **pages** 661–666

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

محتويات الأجزاء II–IV (التحليل)

محتويات الأجزاء II–IV (التحليل) 661
قائمة الأشكال: الأجزاء II–IV (التحليل) 697
قائمة الجداول: الأجزاء II–IV (التحليل) 713
قائمة الأمثلة: الأجزاء II–IV (التحليل) 717
قائمة النقاط الرئيسة: الأجزاء II–IV (التحليل) 724
17 مقدمة 727
17.1 الصورة الكبرى 727
17.1.1 العمارة 728
17.1.2 الهندسة الإنشائية 728
17.1.2.1 التصميم الإنشائي 729
17.1.2.2 التحليل 730
17.1.2.3 تقييم السلامة 731
17.1.3 التخصصات المدمجة في التحليل الإنشائي 731
17.2 العناصر: القوى الداخلية الأساسية 732
17.3 عناصر نقل الأحمال 732
17.4 أنواع المنشآت 733
17.5 تحول الأدوات الهندسية 738
17.6 مقررات الهندسة الإنشائية 739
18 الأحمال 740
18.1 مقدمة 740
18.2 تصنيف الأحمال 741
18.2.1 الأحمال الرأسية 741
18.2.2 الأحمال الجانبية 741
18.2.2.1 الرياح 741
18.2.2.2 الزلازل 745
18.2.3 الأحمال الهيدروستاتيكية وضغط التربة 747
18.2.3.1 مثال 18.1: حمل هيدروستاتيكي 748
18.2.4 حمل الصدم 748
18.2.5 الأحمال الثانوية 749
18.2.6 الأحمال الحرارية 750
18.2.6.1 مثال 18.2: التمدد والإجهاد الحراريان 750
18.3 اعتبارات خاصة بالأحمال 751
18.3.1 إسقاط الأحمال 751
18.3.2 مواضع الأحمال 752
18.3.3 توليفات الأحمال 752
18.3.4 مسار الحمل 753
18.3.5 المساحات التابعة 757

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18.3.5.1 مثال 18.3: المساحات التابعة 758
18.3.6 الاستجابة الإنشائية 758
19 ردود الأفعال **760**
19.1 مقدمة 760
19.1.1 أنواع المساند 761
19.1.2 الاتزان 762
19.1.3 معادلات الشروط 763
19.1.4 التحديد الاستاتيكي 764
19.1.5 عدم الاستقرار الهندسي 765
19.1.6 مخططات الجسم الحر 765
19.2 أمثلة 766
19.2.1 مثال 19.1: حمل هيدروستاتيكي 766
19.2.2 مثال 19.2: انتقال الأحمال 767
19.2.3 مثال 19.3: كمرة بسيطة الارتكاز 768
19.2.4 مثال 19.4: حمل مكافئ للقطع المكافئ 768
19.2.5 مثال 19.5: كمرة ذات ثلاثة بحور 769
19.2.6 مثال 19.6: إطار جملوني ذو ثلاثة مفاصل 770
19.2.7 مثال 19.7: مساند مائلة 772
19.2.8 مثال 19.8: منشأ شبكي 773
19.2.9 مثال 19.9: اتزان طائرة 774
19.2.10 مثال 19.10: بارجة ضخمة 775
19.2.11 مثال 19.11: رانكين: اتزان جسم طافٍ، برهان هيدروستاتيكي 778
19.2.12 مثال 19.12: قصر الرياضة؛ نيرفي 780
20 الجمالونات **784**
20.1 مقدمة 784
20.1.1 الافتراضات 784
20.1.2 اصطلاح الإشارة 785
20.1.3 التحديد والاستقرار 785
20.2 طرائق التحليل 787
20.2.1 طريقة العقد 787
20.2.1.1 مثال 20.1: تحليل جمالون بطريقة العقد 788
20.2.1.2 مثال 20.2: جمالون ثلاثي الأبعاد 791
20.3 طريقة المقاطع 794
20.3.1 طريقة المقاطع 794
20.3.2 مثال 20.3: طريقة المقاطع 795
20.4 طريقة العقد والمصفوفة 795
20.4.1 مثال 20.4: جمالون بسيط بطريقة العقد والمصفوفة 797
20.4.2 مثال 20.5: جمالون معقد بطريقة العقد والمصفوفة 799
21 القوى الداخلية في عناصر الانحناء **803**
21.1 مقدمة 803
21.1.1 النهج الهندسي: من الإجهادات إلى القوى الداخلية 803

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21.1.2 القوى الداخلية للكمرات المستقيمة والمنحنية في بعدين وثلاثة أبعاد 804
21.1.3 لماذا يكتسب ذلك أهمية؟ 806
21.1.4 اصطلاحات الإشارة في التصميم 806
21.2 علاقات الحمل والقص والعزم 808
21.2.1 الصيغة التفاضلية 808
21.2.2 الصيغة التكاملية 809
21.3 أمثلة 810
21.3.1 مثال 21.1: كمرة ذات حمل مائل 810
21.3.2 مثال 21.2: إطار مائل 812
21.3.3 مثال 21.3: إطار تحت حمل هيدروستاتيكي 814
21.3.4 مثال 21.4: حمل متغير خطياً 816
21.3.5 مثال 21.5: إطار ذو سقف مائل 817
21.3.6 مثال 21.6: إطار تبادلي 817
21.3.7 مثال 21.7: إطار ثلاثي الأبعاد 821

22 الانحرافات؛ المنحنى المرن **826**
22.1 مقدمة 826
22.2 المعادلة التفاضلية 827
22.2.1 مثال 22.1: التكامل المزدوج 828
22.2.2 مثال 22.2: الانحراف الأقصى 829
22.2.3 مثال 22.3: الشكل الأمثل للزلاجة 830
22.2.4 مثال 22.4: كمرة طافية 830
22.3 الانحناء 833
22.3.1 مثال 22.5: عجلة الدراجة 835
22.3.2 مثال 22.6: صلابة نابض حلزوني 841
22.3.3 علاقة الانحناء–الانفعال 842
22.3.3.1 مثال 22.7: مفتاح ثنائي المعدن 843
22.3.4 طريقة مساحة الانحناء (مساحة العزم) 844
22.3.4.1 اصطلاح الإشارة 844
22.3.4.2 المبرهنة الأولى لمساحة الانحناء 844
22.3.4.3 المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء 846
22.3.4.3.1 مثال 22.8: مساحة الانحناء، كمرة كابولية 847
22.3.4.3.2 مثال 22.9: العزم–الانحناء، كمرة بسيطة الارتكاز 847
22.3.4.4 الانحراف الأقصى 848
22.3.4.4.1 مثال 22.10: الانحراف الأقصى 849
22.3.4.5 علاقة الحرارة–الانحناء 850
22.3.4.5.1 مثال 22.11: إطار خاضع لحمل حراري 850
22.3.4.6 مثال 22.12: طول اللدونة 853
22.3.4.7 الحمل المرن/الكمرات المرافقة 854
22.3.4.7.1 مثال 22.13: كمرة مرافقة؛ حمل مركز 855
22.3.4.7.2 مثال 22.14: كمرة مرافقة؛ متغير I 856

23 القص واللي **859**

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

23.1 تشوه القص (المستعرض) 859
23.1.1 القص، عنصر متناهي الصغر 859
23.1.1.1 مثال 23.1: انحراف كمرة كابولية 860
23.1.2 توزيع القص؛ $\tau(y)$ 860
23.1.3 معامل القص 861
23.1.4 عامل القص 862
23.1.5 تشوه القص v_s، تيموشينكو 863
23.2 تشوهات اللي 864
23.2.1 لي سان فينان أو اللي المنتظم 864
23.2.2 لي فلاسوف أو اللي غير المنتظم 865
23.2.2.1 مثال 23.2: اللي غير المنتظم لمقطع على شكل I 870

24 الشغل الافتراضي التكميلي **874**
24.1 مقدمة 874
24.2 اشتقاق مبسط لمبدأ الشغل الافتراضي التكميلي 875
24.2.1 الاشتقاق 875
24.2.2 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل f_{ij}, f_{ji} 877
24.2.3 الشغل الافتراضي الخارجي $\delta\overline{W}^*$ 878
24.2.4 الشغل الافتراضي الداخلي $\delta\overline{U}^*$ 879
24.3 أمثلة 880
24.3.1 مثال 24.1: كمرة 880
24.3.2 مثال 24.2: إطار؛ الانحرافات 881
24.3.3 مثال 24.3: إطار؛ الدوران 883
24.3.4 مثال 24.4: ركيزة انحنائية 884
24.3.5 مثال 24.5: كمرة كابولية مدعومة بكابل 885
24.3.6 مثال 24.6: تشوهات اللي والانحناء 886
24.3.7 مثال 24.7: تشوها الانحناء والقص في كمرة 888
24.3.8 مثال 24.8: التأثيرات الحرارية في كمرة 889
24.3.9 مثال 24.9: خط أنابيب 890
24.3.10 مثال 24.10: جملون؛ بسيط 891
24.3.11 مثال 24.11: جملون؛ معقد 892
24.3.12 مثال 24.12: جملون بتحدب ابتدائي 893
24.3.13 مثال 24.13: جملون بإجهادات ثانوية 894
24.3.14 مثال 24.14: حلقة دائرية 896
24.3.15 مثال 24.15: نابض 898

25 طريقة المرونة **901**
25.1 مقدمة 901
25.2 طريقة القوى/المرونة 907
25.2.1 أمثلة 908
25.2.1.1 مثال 25.1: كمرة ذات قضيب ربط 908
25.2.1.2 مثال 25.2: تحليل إطار مبنى فولاذي 909

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

25.2.1.3 مثال 25.3: جملون ذو قوة زائدة واحدة 913
25.2.1.4 مثال 25.4: جملون ذو قوتين زائدتين 915
25.2.1.5 مثال 25.5: جملون تحت حمل حراري 917
25.2.1.6 مثال 25.6: كمرة مسندة على نابض 919
25.2.1.7 مثال 25.7: الدعامة الملكية 920
25.2.1.8 مثال 25.8: مصفوفة المرونة؛ كمرة منحنية 922
25.3 معادلات العزوم الثلاثة 925
25.3.1 مثال 25.9: كمرة مستمرة 928
25.3.2 مثال 25.10: كمرة مستمرة 928

26 القوى بدلالة الإزاحات **931**
26.1 مقدمة 931
26.1.1 اصطلاح الإشارة 932
26.1.2 طرق التحليل 932
26.2 التشوهات المحورية 933
26.3 الانحناء 933
26.3.1 المعادلة التفاضلية 933
26.3.2 قوى الأطراف العقدية للانفعالات الابتدائية 937
26.3.3 القوى العقدية المكافئة للعناصر الانحنائية 938
26.3.3.1 لأحمال الموزعة بانتظام 938
26.3.3.2 لأحمال المركزة 939

27 الصلابة بالحساب اليدوي **941**
27.1 مقدمة 941
27.2 الميل والانحراف؛ الحل المباشر 941
27.2.1 أمثلة 943
27.2.1.1 مثال 27.1: كمرة كابولية 943
27.2.1.2 مثال 27.2: كمرة مستمرة 944
27.2.1.3 مثال 27.3: كمرة ذات بحرين 945
27.2.1.4 مثال 27.4: كمرة ذات بحرين وإزاحة ابتدائية 947
27.2.1.5 مثال 27.5: إطار 948
27.2.1.6 مثال 27.6: عبّارة صندوقية 950
27.3 توزيع العزوم 952
27.3.1 مقدمة 952
27.3.1.1 مثال 27.7: كمرة مستمرة 955
27.4 الميل والانحراف؛ توزيع العزوم؛ غاوس–سايدل 957
27.4.1 مثال 27.8: الميل والانحراف/توزيع العزوم/غاوس–سايدل 957

28 خطوط التأثير **959**
28.1 مقدمة 959
28.2 الإجراء 959
28.2.1 مثال 28.1: خطوط التأثير لكمرة بسيطة الارتكاز 960
28.2.2 مثال 28.2: كمرة بسيطة الارتكاز ذات جزأين بارزين 962

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28.3 مبدأ مولر–برسلاو 963
28.3.1 الاشتقاق 963
28.3.1.1 مثال 28.3: مولر–برسلاو؛ خط تأثير القص 964
28.3.1.2 مثال 28.4: مولر–برسلاو؛ خط تأثير العزم 965
29 التحليل المرن من الرتبة الثانية **966**
29.1 مقدمة 966
29.2 إزاحات كبيرة ومنشآت مستقرة 967
29.2.1 مثال 29.1: عدم الاستقرار الهندسي 967
29.2.2 مثال 29.2: تأثير الحمل المحوري في التشوه الانحنائي 968
29.2.3 مثال 29.3: الانحراف الكبير لكمرة كابولية 970
29.3 إزاحات صغيرة ومنشآت غير مستقرة 974
29.3.1 قضبان صلبة متقطعة 974
29.3.1.1 نظام قضيب واحد 974
29.3.1.1.1 مثال 29.4: انبعاج عمودين صلبين مفصليين 976
29.3.2 الأنظمة المستمرة 978
29.3.2.1 أحمال انبعاج أويلر 978
29.3.2.1.1 مثال 29.5: انبعاج عمود مفصلي الطرفين 980
29.3.2.1.2 مثال 29.6: انبعاج عمود مثبت الطرفين 980
29.3.2.1.3 مثال 29.7: انبعاج عمود مثبت–مفصلي 982
29.3.2.1.4 مثال 29.8: عمود ذو مساند مرنة 983
29.3.2.1.5 مثال 29.9: الانبعاج المقيد 985
29.3.2.1.6 مثال 29.10: برج مياه 986
29.3.2.2 التناظر مع الاهتزاز الحر 988
29.3.2.3 معاملات الطول الفعّال K 989
29.3.2.4 الأعمدة غير المرنة 992
30 منشآت الكابلات **995**
30.1 مقدمة 995
30.2 الأحمال المركزة 996
30.2.1 مثال 30.1: كابل حبلي 996
30.2.2 مثال 30.2: كابل حبلي مائل 998
30.2.3 مثال 30.3: عربة معلقة بكابلين 999
30.3 الأحمال الموزعة 1000
30.3.1 معادلة الاتزان 1000
30.3.2 qdx؛ حمل عرضي؛ قطع مكافئ 1001
30.3.2.1 الهندسة 1001
30.3.2.2 القوى الداخلية 1006
30.3.2.3 الاستطالة المرنة 1007
30.3.2.4 الجساءة المحورية المكافئة 1010
30.3.2.5 حالة خاصة: وتر أفقي 1011
30.3.2.5.1 مثال 30.4: هندسة كابل مائل 1012
30.3.2.5.2 مثال 30.5: قوى كابل مائل 1013

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.3.2.5.3 مثال 30.6: برج مشدود بكابلات تثبيت 1014
30.3.2.5.4 مثال 30.7: جسر معلّق 1015
30.3.2.5.5 مثال 30.8: كابل غير قابل للاستطالة؛ درجة الحرارة . . . 1016
30.3.2.5.6 مثال 30.9: كابل قابل للاستطالة؛ الترخيم 1017
30.3.2.5.7 مثال 30.10: كابل قابل للاستطالة؛ تأثير حراري 1017
30.3.2.5.8 مثال 30.11: كابل قابل للاستطالة؛ الشد المسبق 1019
30.3.3 qds؛ المنحنى السلسلي 1019
30.3.3.1 الهندسة 1019
30.3.3.2 القوى 1021
30.3.3.3 منحنى سلسلي ذو وتر مائل 1022
30.3.3.3.1 مثال 30.12: ترخيم كابل مائل 1023
30.3.3.3.2 مثال 30.13: كابل تعليق خط حافلة كهربائية 1024
30.3.4 مقارنة الحلين المكافئ والسلسلي 1026
30.3.4.1 مثال 30.14: المنحنى السلسلي مقابل القطع المكافئ 1027

31 الأقواس والكمرات المنحنية 1029
31.1 الأقواس الدائرية 1030
31.1.1 الأقواس الدائرية ثلاثية المفاصل 1030
31.1.1.1 مبرهنة إيدي 1031
31.1.1.2 أمثلة 1031
31.1.1.2.1 مثال 31.1: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي؛ حل تحليلي 1031
31.1.1.2.2 مثال 31.2: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي 1033
31.1.1.2.3 مثال 31.3: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل منتظم 1035
31.1.2 الأقواس الدائرية ثنائية المفاصل 1037
31.1.3 قوس دائري عديم المفاصل 1037
31.1.3.1 مثال 31.4: قوس دائري عديم المفاصل 1037
31.1.4 الحل العام 1045
31.1.4.1 الاشتقاق 1045
31.1.4.1.1 مركز الثقل 1045
31.1.4.1.2 الاشتقاق 1047
31.1.4.1.3 التحقق 1051
31.1.5 حلول باستعمال Mathematica 1052
31.2 الشكل الأمثل للقوس 1052
31.2.1 مثال 31.5: القوس المثالي 1053
31.3 الأقواس المكافئة 1053
31.3.1 أمثلة 1053
31.3.1.1 مثال 31.6: قوس مكافئ ثلاثي المفاصل 1054
31.3.1.2 مثال 31.7: قوس مكافئ ثنائي المفاصل متغير المقطع 1054
31.3.2 قوس مثبت تحت حمل متناظر 1058
31.3.2.1 مثال 31.8: قوس مكافئ عديم المفاصل 1060
31.3.3 آثار هبوط الأساسات وتغير الحرارة 1063
31.3.3.1 مثال 31.9: حمل حراري على قوس مكافئ 1066

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31.4 الكمرات المنحنية 1066
31.4.1 جائز قوسي 1066
31.4.1.1 مثال 31.10: جائز قوسي 1067
31.4.2 المنشآت الحلزونية 1069
31.4.2.1 الهندسة 1069
31.4.2.2 الاتزان 1070
31.4.2.2.1 مثال 31.11: قوس حلزوني؛ حمل نقطي 1072

32 البلاطات **1075**
32.1 نظرية البلاطات السميكة: رايسنر–ميندلن 1075
32.1.1 العلاقات الحركية 1075
32.1.2 العلاقات التأسيسية 1077
32.1.3 الاتزان 1078
32.2 نظرية البلاطات الرقيقة: كيرشهوف 1080
32.2.0.1 مثال 32.1: تمثيل البلاطة الرقيقة مقارنة بالبلاطة السميكة 1080
32.2.1 العلاقات الأساسية 1081
32.2.2 المعادلة التفاضلية 1082
32.2.3 الإجهادات 1082
32.2.3.1 مثال 32.2: استرجاع الإجهادات من محصلات عزوم البلاطة 1084
32.2.3.2 مثال 32.3: بلاطة مربعة بسيطة الاستناد تحت ضغط منتظم 1084
32.2.3.3 مثال 32.4: حساسية انحراف البلاطة للسماكة 1085
32.2.4 البلاطات الدائرية 1086
32.2.4.1 مثال 32.5: بلاطة دائرية مثبتة تحت ضغط منتظم 1089
32.2.5 الصياغة التغايرية 1090
32.3 الخلاصة 1091

33 القشريات **1094**
33.1 النظرية العامة 1094
33.1.1 التعريفات 1094
33.1.2 الافتراضات 1097
33.1.3 علاقات القوة–الإزاحة 1099
33.1.3.1 الاتزان 1099
33.1.3.2 المجموعة الكاملة لمعادلات الاتزان 1106
33.1.3.3 التوافق 1106
33.1.3.4 الخلاصة 1111
33.1.3.5 الإجهاد–الانفعال–القوى 1111
33.1.3.5.1 الإجهاد–الانفعال 1111
33.1.3.5.2 الإجهاد–القوى 1113
33.1.3.6 العبارات النهائية (القوى بدلالة الإزاحات) 1113
33.1.4 التبسيطات 1116
33.1.4.1 القشريات الضحلة 1116
33.1.4.1.1 Assumptions 1116

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Application of assumptions 33.1.4.1.2
1116
1118 معادلة الكمرة العميقة 33.1.4.1.3
1119 معادلة البلاطة 33.1.4.1.4
1120 معادلة القشريات الضحلة 33.1.4.1.5
1120 نظرية الغشاء33.1.4.2
1120 Assumptions 33.1.4.2.1
1121 Theory 33.1.4.2.2
1121 Classification 33.1.4.2.3
1122 Specialization 33.1.4.2.4
1124 33.2 تحليل قشرة برميلية مفردة (قشرة أسطوانية دائرية)
1124 مقدمة33.2.1
1125 نظرية الغشاء33.2.2
1125 محصلات الإجهاد33.2.2.1
1129 الأخطاء 33.2.2.1.1
1130 التصحيح 33.2.2.1.2
1131 الإزاحات33.2.2.2
1134 نظرية القشريات الضحلة33.2.3
1134 معادلات الاتزان33.2.3.1
1135 الصياغة33.2.3.2
1137 الحل الخاص للحمل المنتظم 33.2.3.2.1
1138 مقارنة نظرية الغشاء بنظرية القشرة الضحلة 33.2.3.2.2
1141 مثال 33.1: مقارنة الغشاء والقشرة الضحلة 33.2.3.2.3
1141 الحل العام33.2.3.3
1142 الإزاحة w 33.2.3.3.1
1144 M_ϕ 33.2.3.3.2
1145 الحدود الأخرى؛ الإجراء 33.2.3.3.3
1148 33.3 القشريات غير المحددة استاتيكياً
1148 الكمرة الحافية33.3.1
1149 الكمرات الحافية الرأسية33.3.1.1
1151 الكمرات الحافية الأفقية33.3.1.2
1152 الكمرة الحافية سابقة الإجهاد33.3.2
1153 مثال 33.2: تصميم قشرة أسطوانية33.3.2.1
1163 شفرة MATLAB®ومثال عددي33.3.3
1165 **34 الديناميكا الإنشائية الأولى**
1166 34.1 الأسس الفلسفية
1166 34.2 متى يلزم التحليل الديناميكي؟
1167 34.3 المبادئ الأساسية
1167 مبدأ دالمبير والاتزان الديناميكي34.3.1
1167 المهتز أحادي درجة الحرية34.3.2
1168 التردد الطبيعي والدور34.3.3

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.3.3.1 مثال 34.1: حساب ω_n و T_n و f_n لنظام أحادي الحرية 1168
34.3.4 التخميد ونسبته 1169
34.4 الاهتزاز الحر 1170
34.4.1 الاهتزاز الحر غير المخمد 1170
34.4.2 الاهتزاز الحر المخمد 1171
34.4.3 التناقص اللوغاريتمي 1171
34.4.3.1 مثال 34.2: تقدير التخميد من التناقص اللوغاريتمي 1172
34.5 الاهتزاز القسري: الإثارة التوافقية 1173
34.5.1 الاستجابة التوافقية غير المخمدة 1173
34.5.2 الاستجابة التوافقية المخمدة 1174
34.5.2.1 مثال 34.3: الاستجابة التوافقية: التضخيم والطور 1174
34.6 الاستجابة لحمل عام 1175
34.6.1 استجابة النبضة والنبضة الوحدية 1175
34.6.1.1 مثال 34.4: استجابة نبضة وحدية لنظام مخمد أحادي الحرية 1176
34.6.2 تكامل دوهاميل 1177
34.6.2.1 مثال 34.5: حمل خطوة مفاجئ: معامل تضخيم ديناميكي مقداره 2 . . 1177
34.6.2.2 مثال 34.6: حمل نبضة مستطيلة وطيف الصدمة 1178
34.6.3 تحليل فوريه والاستجابة الترددية 1180
34.6.3.1 مثال 34.7: الاستجابة الترددية لقوة آلة دورية ذات مركبتين توافقيتين 1181
34.7 إثارة المساند والاستجابة الزلزالية 1182
34.7.1 معادلة الحركة لإثارة القاعدة 1182
34.7.2 أطياف الاستجابة 1183
34.7.2.1 مثال 34.8: التصميم الزلزالي لإطار من طابق واحد باستعمال طيف الاستجابة 1184
34.8 الأنظمة متعددة درجات الحرية 1185
34.8.1 معادلات الحركة 1185
34.8.2 الاهتزاز الحر غير المخمد: الأنماط الطبيعية 1185
34.8.3 التحليل النمطي 1186
34.8.4 المشاركة النمطية في الاستجابة الزلزالية 1187
34.8.4.1 مثال 34.9: التحليل النمطي لمبنى قص ثلاثي درجات الحرية تحت حمل زلزالي 1187
34.9 الأنظمة المستمرة 1189
34.9.1 الاهتزاز المحوري للقضبان 1189
34.9.2 الاهتزاز المستعرض للكمرات 1190
34.9.2.1 مثال 34.10: التردد الطبيعي لجسر مشاة فولاذي وفحص رنين المشاة . 1190
34.10 الديناميكا اللاخطية 1192
34.10.1 مصادر اللاخطية 1192
34.10.2 تخلفية وتبديد الطاقة 1192
34.10.2.1 مثال 34.11: التخميد اللزج المكافئ من حلقة تخلفية ثنائية الخط . . 1192
34.10.3 مطيلية وتصميم السعة 1194
34.10.3.1 مثال 34.12: طلب المطيلية وخفض القوة لإطار خرساني مسلح 1195
34.11 اعتبارات عملية 1196

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.11.1 التخميد في المنشآت الحقيقية . . . 1196
34.11.2 تفاعل التربة والمنشأ . . . 1196
34.11.3 مخمدات الكتلة الموالفة . . . 1196
34.11.4 مثال 34.13: تصميم مخمد كتلة موالف لمبنى عالٍ . . . 1197
34.11.5 العزل القاعدي . . . 1198
34.11.6 مثال 34.14: تصميم مبنى مستشفى معزول قاعدياً . . . 1198
34.12 ملاحظات ختامية . . . 1200
34.12.1 تحذير مهني بشأن طرائق طيف الاستجابة . . . 1200
34.12.2 ملاحظة أخيرة: حدود النظرية الخطية . . . 1200

35 عناصر التصميم الإنشائي **1201**
35.1 مقدمة . . . 1201
35.1.1 التحليل والتصميم: عملية تكرارية . . . 1201
35.1.2 السلامة . . . 1201
35.2 تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD) . . . 1204
35.2.1 مثال 35.1: تصميم الانحناء بطريقة ASD . . . 1204
35.3 تصميم معاملات الحمل والمقاومة (LRFD) . . . 1205
35.4 أمثلة لأكواد تصميم قائمة على LRFD . . . 1207
35.4.1 تطبيق: المقاومة اللدنة لمقاطع كمرات الخرسانة المسلحة . . . 1208
35.4.1.1 مثال 35.2: المقاومة القصوى: مراجعة . . . 1212
35.4.1.2 مثال 35.3: المقاومة القصوى: التصميم الأول . . . 1213
35.4.1.3 مثال 35.4: المقاومة القصوى: التصميم الثاني . . . 1214
35.4.1.4 مثال 35.5: التحليل الدقيق . . . 1215
35.4.2 تطبيق: المقاومة اللدنة لأعمدة الخرسانة المسلحة . . . 1217
35.4.2.1 مثال 35.6: عمود خرسانة مسلحة مع معرفة c . . . 1221
35.4.2.2 مثال 35.7: عمود خرسانة مسلحة مع معرفة e . . . 1223
35.4.3 الخرسانة سابقة الإجهاد . . . 1226
35.4.3.1 مثال 35.8: دراسة حالة: جسر وولنت لين . . . 1226
35.5 الهندسة القائمة على الأداء (PBE) . . . 1230

36 تصميم قوس غير محدد سكونياً **1232**
36.1 مثال 36.1: تصميم قوس غير محدد سكونياً . . . 1232
36.2 مثال 36.2: التغيرات الحرارية في قوس . . . 1238

37 حلول فيرمي (التحليل التقريبي) **1241**
37.1 القوى الداخلية . . . 1241
37.1.1 الأشكال المنحرفة ونقاط الانعطاف . . . 1241
37.1.2 عزوم الكمرة بدلالة صلابة المساند . . . 1244
37.1.3 طرائق التحليل . . . 1244
37.1.3.1 الأحمال الرأسية . . . 1247
37.1.3.2 الأحمال الأفقية . . . 1250
37.1.3.2.1 طريقة البوابة . . . 1250
37.1.3.2.1.1 مثال 37.1: طريقة البوابة: مبنى قصير . . . 1251

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

37.1.3.2.1.2 مثال 37.2: حل ماتلاب 1263
37.1.3.2.2 طريقة الكابولي 1264
37.1.3.2.2.1 مثال 37.3: طريقة الكابولي: مبنى شاهق 1265
37.2 الاستجابة الإنشائية 1266
37.2.1 النظام الفرعي للنواة 1266
37.2.1.1 مثال 37.4: النظام الفرعي للنواة 1267
37.2.2 جدار القص 1268
37.2.2.1 مثال 37.5: جدار قص خرساني 1268
37.2.3 جدار القص الجملوني 1270
37.2.3.1 مثال 37.6: جدار قص جملوني 1270
37.2.4 الانحرافات الجانبية 1272
37.2.4.1 الجدار القصير 1272
37.2.4.2 الجدار الطويل 1272
37.2.4.3 الجدران والجوائز الرابطة 1273
37.2.4.4 الإطارات 1274
37.2.4.4.1 مثال 37.7: التقدير التقريبي للانحراف العرضي لمبنى . . 1276

38 التصاميم الأولية **1280**
38.1 مثال 38.1: مطار دالاس 1280
38.2 مثال 38.2: برج إيفل 1287
38.3 مثال 38.3: مخازن ماجازيني جنرالي 1294
38.4 مثال 38.4: جسر جورج واشنطن 1298
38.5 مثال 38.5: تصميم قوس ذي مفصلين 1305
38.6 مثال 38.6: التغيرات الحرارية في قوس 1313
38.7 مثال 38.7: قوس قطعي مع تغير قاطع الزاوية لـ I 1315

39 مقدمة إلى طريقة الصلابة المباشرة **1320**
39.1 لماذا التحليل الإنشائي بالمصفوفات؟ 1320
39.2 مثالية المنشأ 1321
39.3 اصطلاح الإشارة 1323
39.4 نظم الإحداثيات 1324
39.5 المرونة مقابل الصلابة 1324
39.6 درجات الحرية 1325
39.7 عدم التحديد الاستاتيكي مقابل عدم التحديد الحركي 1327
39.8 التحليل والميكانيكا الإنشائية: مسألة قيم حدية 1328

40 مصفوفات صلابة العناصر $\mathbf{k}^{(e)}$ **1331**
40.1 تعريف حد الصلابة 1331
40.2 عنصر الجمالون 1332
40.3 كمرة أويلر–برنولي 1333
40.4 عنصر إطار ثنائي الأبعاد (عنصر كمرة–عمود) 1333
40.5 عنصر الشبكة الإنشائية 1334
40.6 عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد 1334

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

40.7 كمرة تيموشينكو 1337
40.7.1 التشوه الإضافي 1337
40.7.2 تعديل مصفوفة صلابة العنصر 1338
40.8 التواء فلاسوف 1341

41 طريقة الصلابة؛ 1: المنشآت المتعامدة **1344**
41.1 مقدمة 1344
41.2 النظرية 1345
41.2.1 إعادة النظر في طريقة المرونة 1345
41.2.2 طريقة الصلابة المباشرة 1346
41.2.3 من العنصر إلى المنشأ 1347
41.3 أمثلة 1347
41.3.1 مثال 41.1: كمرة متعامدة 1347
41.3.2 مثال 41.2: إطار متعامد 1350
41.3.3 مثال 41.3: شبكة إنشائية 1357
41.3.4 مثال 41.4: إطار هجين 1361
41.3.5 مثال 41.5: شبكة إنشائية هجينة 1365

42 مصفوفات التحويل **1371**
42.1 مقدمة 1371
42.2 بعض الأسس النظرية 1372
42.2.1 العلاقة بين $[\mathbf{k}^e]$ و$[\mathbf{K}^e]$ 1372
42.2.2 جيوب تمام الاتجاه 1373
42.3 مصفوفات التحويل للعناصر القضيبية 1375
42.3.1 حالات ثنائية الأبعاد 1376
42.3.1.1 إطار ثنائي الأبعاد 1376
42.3.1.2 شبكة إنشائية 1377
42.3.1.3 كمرة فلاسوف 1378
42.3.1.4 جمالون ثنائي الأبعاد 1378
42.3.2 إطار ثلاثي الأبعاد 1379
42.3.3 دورانات أويلر 1380
42.3.4 فتل محور العنصر 1382
42.3.5 جمالون ثلاثي الأبعاد 1383

43 طريقة الصلابة المباشرة **1385**
43.1 الأهداف 1385
43.2 النظرية 1385
43.3 التقطيع 1388
43.3.1 درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة 1388
43.3.2 تقطيع المنشأ 1388
43.4 التنفيذ الحاسوبي 1389
43.4.1 الشروط الحدية ومصفوفة `[id]` 1389
43.4.2 متجه **LM** 1391

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43.4.3 تجميع مصفوفة الصلابة العامة 1392
43.4.4 الإجراء خطوة بخطوة 1392
43.5 أمثلة 1394
43.5.1 مثال 43.1: إطار 1394
43.5.1.1 تمهيدات 1394
43.5.2 مثال 43.3: جمالون 1405

44 الخصائص الرياضية لمصفوفة الصلابة؛ مسائل حسابية 1409
44.1 المصفوفات سيئة التكييف 1409
44.1.1 القيم الذاتية 1409
44.1.1.1 التفسير الفيزيائي للقيم الذاتية 1412
44.1.2 رقم الشرط 1414
44.1.3 مصفوفات الصلابة سيئة التكييف 1415
44.1.3.1 مثال 44.1: مصفوفة سيئة التكييف 1418
44.2 اعتبارات عددية 1419
44.2.1 العكس مقارنةً بالتحليل 1419
44.2.2 ترقيم العقد 1419

45 موضوعات خاصة 1423
45.1 التكثيف وتقسيم المنشأ 1423
45.2 معادلات الاتزان والحركة 1424
45.2.1 مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$ 1424
45.2.1.1 الاشتقاق 1424
45.2.1.2 محدد استاتيكياً 1424
45.2.1.2.1 مثال 45.1: مصفوفة اتزان جمالون محدد استاتيكياً . . . 1425
45.2.1.2.2 مثال 45.2: مصفوفة اتزان كمرة 1426
45.2.1.3 غير محدد استاتيكياً 1427
45.2.1.3.1 مثال 45.3: مصفوفة اتزان جمالون غير محدد استاتيكياً . 1428
45.2.1.4 تحديد القوى الزائدة 1429
45.2.1.4.1 مثال 45.4: اختيار القوى الزائدة 1429
45.2.1.5 عدم الاستقرار الحركي 1432
45.2.2 مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$ 1432
45.2.2.1 مثال 45.5: مصفوفة الحركة: مثال جمالون 1433
45.2.3 العلاقة بين مصفوفتَي الاتزان والحركة 1434
45.2.3.1 محدد استاتيكياً 1434
45.2.3.2 غير محدد استاتيكياً 1435
45.3 العلاقات الحركية من معكوس مصفوفة الاتزان 1435
45.4 علاقات الصلابة والمرونة 1436
45.4.1 من الصلابة إلى المرونة 1436
45.4.1.1 مثال 45.6: مصفوفة المرونة 1437
45.4.2 من المرونة إلى الصلابة 1438
45.4.2.1 مثال 45.7: من المرونة إلى الصلابة 1439
45.4.2.2 مثال 45.8: مصفوفة صلابة عنصر منحنٍ 1440

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.4.3 الثنائية بين طريقتي المرونة والصلابة 1442
45.5 منهج التحويل المتطابق لاستخراج K 1442
45.5.1 مثال 45.9: التحويل المتطابق 1444
45.5.2 مثال 45.10: التحويل المتطابق لإطار 1446
45.6 عناصر خاصة 1448
45.6.1 الإزاحة الصلبة 1448
45.6.2 الكمرات شبه الصلبة 1450
45.6.3 المقاطع المتغيرة 1455
45.7 مصادر الانجراف الجانبي في الإطارات المقاومة للعزوم 1458

46 حساب التغايرات في الميكانيكا: إطار أويلر–لاغرانج 1471
46.1 مقدمة 1471
46.2 أويلر 1472
46.2.1 تمهيدات 1472
46.2.2 الصيغة التفاضلية لـ $\delta\Pi$ 1474
46.2.3 معادلة أويلر 1475
46.2.4 $\delta\Pi$ 1476
46.2.5 ملاحظات 1476
46.2.6 الشروط الحدية 1477
46.2.6.1 مثال 46.1: أويلر: عضو محوري 1478
46.2.6.2 مثال 46.2: أويلر: الانحناء 1481
46.3 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية 1481
46.4 هاملتون 1484
46.4.1 الديناميكا؛ أويلر/لاغرانج 1484
46.4.1.1 نظام متقطع 1484
46.4.1.2 نظام متصل 1486
46.4.2 مثال 46.3: هاملتون 1488
46.5 مبدأ هو–واشيزو التغايري العام 1491
46.6 مخططات "شبه تونتي" 1495
46.6.1 مبدأ دالمبير 1495
46.6.2 معادلات هاملتون 1495
46.6.3 معادلات لاغرانج 1496

47 المبادئ التغايرية ومبادئ الطاقة في التحليل الإنشائي 1500
47.1 مقدمة 1500
47.1.1 الديناميكا الحرارية 1501
47.1.2 العلاقات الأساسية 1501
47.1.3 تعريفات 1502
47.1.4 الكميات الحقيقية 1502
47.1.5 العبارات الافتراضية 1504
47.1.6 ملاحظات 1505
47.1.6.1 الشغل الداخلي وطاقة الانفعال 1505

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.1.6.2 استقلال الشغل الخارجي عن المسار . . . 1506
47.1.7 تطبيقات على عناصر أحادية البعد . . . 1507
47.1.7.1 الطاقة المتممة المرنة الخطية U^* . . . 1507
47.1.7.2 الطاقة المرنة الخطية U . . . 1507
47.1.7.3 طاقة الانفعال الافتراضية المتممة δU^* . . . 1508
47.1.7.4 طاقة الانفعال الافتراضية δU . . . 1510
47.1.8 ملخص الشغل الافتراضي والشغل الافتراضي المتمم . . . 1511
47.2 المناهج . . . 1513
47.3 الشغل الافتراضي . . . 1514
47.3.1 مبدأ الشغل الافتراضي المتمم (PCVW) . . . 1514
47.3.1.1 الاشتقاق . . . 1514
47.3.1.2 مثال 47.1: مبدأ الشغل الافتراضي المتمم؛ كمرة كابولية متدرجة . . . 1517
47.3.2 مثال 47.2: قوس نصف دائري ثلاثي المفاصل . . . 1518
47.3.3 مبدأ الشغل الافتراضي (PVW) . . . 1519
47.3.3.1 الاشتقاق . . . 1519
47.3.3.2 مثال 47.3: مبدأ الشغل الافتراضي؛ كمرة كابولية متدرجة . . . 1521
47.4 مبادئ الطاقة الكامنة . . . 1523
47.4.1 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية (PTPE) . . . 1523
47.4.1.1 الاشتقاق . . . 1523
47.4.1.2 مثال 47.4: مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ نابض وكتلة . . . 1525
47.4.1.3 مثال 47.5: مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ كمرة مثبتة ذات I متغير . . . 1525
47.4.2 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية المتممة (PTCPE) . . . 1526
47.5 مبرهنتا كاستيليانو . . . 1526
47.5.1 المبرهنة الأولى . . . 1526
47.5.1.1 مثال 47.6: جملون مرن لاخطي . . . 1528
47.5.2 المبرهنة الثانية . . . 1529
47.5.2.1 مثال 47.7: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ كمرة كابولية . . . 1530
47.5.2.2 مثال 47.8: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة كمرة موزعة الحمل بانتظام 1531
47.5.2.3 مثال 47.9: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ جملون لاخطي . . . 1531
47.5.2.4 مثال 47.10: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة نابض . . . 1531
47.6 طريقة رايلي–ريتز . . . 1532
47.6.1 الاشتقاق . . . 1532
47.6.1.1 مثال 47.11: رايلي–ريتز؛ كمرة بسيطة الارتكاز موزعة الحمل بانتظام . 1533
47.6.1.2 مثال 47.12: الطرائق التغايرية . . . 1534
47.7 الملخص . . . 1541

48 دوال الاستيفاء **1544**
48.1 مقدمة . . . 1544
48.1.1 خصائص دوال الشكل . . . 1544
48.1.2 مثلث باسكال . . . 1545
48.1.3 أنظمة الإحداثيات . . . 1546

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

48.1.3.1 الإحداثيات الديكارتية 1546
48.1.3.2 الإحداثيات الطبيعية 1546
48.1.3.3 الإحداثيات المثلثية 1548
48.1.4 الاستمرارية 1551
48.2 دوال الشكل 1551
48.2.1 الصياغة المباشرة 1551
48.2.1.1 عنصر جمالون خطي 1551
48.2.1.2 التعميم 1552
48.2.1.3 عنصر المثلث ثابت الانفعال 1553
48.2.1.4 العنصر المستطيل ثنائي الخطية 1554
48.2.1.5 عنصر متوازي المستطيلات ثلاثي الخطية 1556
48.2.2 دوال الاستيفاء اللاغرانجية 1557
48.2.2.1 العناصر الرباعية 1557
48.2.2.2 المثلثات 1558
48.2.2.3 عنصر جمالون تربيعي 1559
48.2.2.4 الكمرة 1560
48.2.3 دوال الاستيفاء الهرميتية 1563
48.2.3.1 إعادة اشتقاق دوال شكل الكمرة 1564
48.2.3.2 العناصر الرباعية 1565
48.2.3.2.1 العنصر الرباعي الخطي (q4) 1565
48.2.3.2.2 العناصر الرباعية التربيعية 1566
48.2.3.2.2.1 عنصر سيرنديبتي (q8) 1567
48.2.3.2.2.2 العنصر اللاغرانجي (q9) 1567
48.2.3.3 العنصر المتغير (الهرمي) 1570
48.2.3.4 العنصر المثلثي (T6) 1572

49 صياغة العناصر الخطية **1574**
49.1 مقدمة 1574
49.2 العنصر المحدد 1575
49.2.1 مقدمة 1575
49.2.2 علاقات الانفعال–الإزاحة 1575
49.2.2.1 الأعضاء المحورية 1575
49.2.2.2 أعضاء الانحناء 1576
49.2.3 الإزاحات والانفعالات الافتراضية 1576
49.2.4 صياغة مصفوفة صلابة العنصر 1576
49.2.5 استرجاع الإجهادات 1578
49.3 تطبيقات 1578
49.3.1 عنصر الجمالون 1578
49.3.2 عنصر الانحناء 1579
49.4 المتطلبات العامة للعنصر 1579
49.5 خطأ التجزئة ومعدل التقارب 1581
49.6 طبيعة الحد الأدنى لحلول الطاقة الكامنة الدنيا 1582

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49.7 الاتزان والتوافق في الحل 1583
50 العناصر متساوية المعلمات **1585**
50.1 مقدمة 1585
50.2 صياغة العنصر 1587
50.2.1 عنصر القضيب 1587
50.2.2 العنصر الرباعي (q4): صياغة مفصلة 1589
50.2.3 العناصر المثلثية 1592
50.2.3.1 مثلث T3 1592
50.2.3.2 مثلث T6 1594
50.2.4 مثال 50.1: المؤثرات اليعقوبية 1595
50.3 التكامل العددي 1596
50.3.1 نيوتن–كوتس 1597
50.3.2 تربيع غاوس–ليجاندر 1598
50.3.2.1 متعدد حدود ليجاندر 1600
50.3.2.2 تربيع غاوس–ليجاندر عند $n = 2$ 1600
50.3.3 المناطق المستطيلة والمنشورية 1600
50.3.4 المناطق المثلثية 1601
50.4 استرجاع الإجهادات: الإجهادات العقدية 1601
50.5 الأحمال العقدية المكافئة 1603
50.5.1 حمل الجاذبية 1604
50.5.2 حمل الشد السطحي 1605
50.5.3 الانفعالات والإجهادات الابتدائية؛ الحمل الحراري 1606
50.5.4 رتبة التكامل 1607
50.5.4.1 لتكامل الكامل 1607
50.5.4.2 لتكامل المخفَّض 1608
50.5.4.3 لتكامل المخفَّض الانتقائي 1609
50.6 القص الطفيلي والعناصر غير المتوافقة 1610
50.6.1 Q4: المشكلة 1610
50.6.2 Q6: الحل 1611
50.6.3 Qm6: تحسينات إضافية 1611
50.7 درجات الحرية الدورانية 1612
51 طرائق البواقي الموزونة **1614**
51.1 مقدمة 1614
51.2 الصياغة العامة 1615
51.2.1 المؤثرات التفاضلية 1615
51.2.1.1 مثال 51.1: التحقق من التناظر والتعريف الموجب لعضو محوري أحادي البعد 1615
51.2.2 صياغة البواقي 1616
51.3 طرائق البواقي الموزونة 1618
51.3.1 طريقة المطابقة النقطية 1618
51.3.2 طريقة المطابقة على المجالات الجزئية 1618

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51.3.3 طريقة المربعات الصغرى 1618
51.3.4 طريقة غالركين 1618
51.3.4.1 مثال 51.2: اهتزاز وتر 1619
51.4 تطبيق طريقة غالركين على مسائل المرونة ثلاثية الأبعاد 1620
51.4.1 اشتقاق الصيغة الضعيفة 1621
51.4.2 التقطيع بالعناصر المحدودة 1623
51.4.2.1 مثال 51.3: مصفوفة صلابة عنصر كمرة 1624
51.4.2.2 مثال 51.4: انتقال الحرارة 1626

52 الديناميكا الثانية **1630**
52.1 مقدمة 1631
52.2 مثالية الإطارات للتحليل الديناميكي 1631
52.2.1 الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية 1631
52.2.2 النمذجة 1632
52.2.2.1 مثال 52.1: محاكاة مونت كارلو للاستجابة المرنة الخطية لمبنى تحت حمل جانبي 1635
52.3 صياغة المسألة 1636
52.3.1 الصياغة التغايرية 1636
52.3.2 تمثيل الكتلة 1638
52.3.3 التخميد 1639
52.3.3.1 مثال 52.2: معايرة معاملات تخميد رايلي لمبنى قصي 1640
52.3.3.2 مثال 52.3: خط أساس تحليلي: الاهتزاز الحر من شروط ابتدائية عامة 1641
52.3.4 تقنية عددية: طرائق أويلر 1642
52.3.4.1 مثال 52.4: طريقة أويلر 1643
52.4 تقطيع الزمن 1643
52.4.1 الطرائق الضمنية 1645
52.4.1.1 طريقة نيومارك 1645
52.4.1.1.1 الاشتقاق 1645
52.4.1.1.2 طريقة نيومارك β الضمنية 1646
52.4.1.2 طريقة هيلبر–هيوز–تايلور 1647
52.4.2 التكامل الزمني الصريح 1649
52.4.2.1 الأنظمة الخطية 1650
52.4.2.2 الأنظمة غير الخطية 1652
52.5 الطرائق العددية للتحليل الديناميكي 1653
52.5.1 طريقة الفرق المركزي 1653
52.5.2 مثال 52.5: خطوة استقرار الفرق المركزي 1653
52.5.3 طريقة نيومارك–بيتا 1654
52.5.4 التراكب النمطي مقابل التكامل المباشر 1654
52.6 الأنظمة المستمرة 1655
52.6.1 الاهتزاز المحوري للقضبان 1655
52.6.1.1 مثال 52.6: سرعة الموجة والترددات المحورية الطبيعية لقضيب شد فولاذي 1655

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.6.2 الاهتزاز العرضي للكمرات 1657
52.7 الديناميكا غير الخطية 1657
52.7.1 مصادر اللاخطية 1658
52.7.2 المطيلية وتصميم السعة 1658
52.8 اعتبارات عملية 1658
52.8.1 التخميد في المنشآت الحقيقية 1658
52.8.2 تفاعل التربة والمنشأ 1658
52.8.3 مخمدات الكتلة المضبوطة 1659
52.8.4 العزل القاعدي 1659
52.9 الخلاصة 1659

53 مقدمة **1662**
53.1 مقدمة 1662
53.1.1 مصادر اللاخطية 1662
53.1.2 لماذا نستخدم التحليل اللاخطي؟ 1664
53.2 أنواع التحليل الإنشائي اللاخطي 1665
53.3 تزايد الحمل والإزاحة 1667
53.4 السلامة 1668
53.4.1 مصطلحات 1668
53.4.2 السلامة & الأحمال 1669
53.5 مدونات التصميم 1670
53.5.1 مقدمة 1670
53.5.2 التطور: العصور القديمة 1671
53.5.2.1 بلاد الرافدين: حمورابي 1671
53.5.2.2 روما: فيتروفيوس 1671
53.5.3 العصر الحديث 1672
53.5.3.1 تصميم الإجهادات المسموح بها، ASD 1673
53.5.3.2 تصميم معاملات الحمل والمقاومة، LRFD 1673
53.5.3.3 هندسة الزلازل القائمة على الأداء 1674
53.5.4 ملخص 1675

54 اللدونة I: الألياف & الوسط المتصل (لتحليل العناصر المحدودة) **1678**
54.1 مقدمة 1678
54.2 شروط الخضوع اللدن 1679
54.2.1 نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي 1679
54.2.2 نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي 1681
54.3 المشاهدات المختبرية 1682
54.3.1 المعادن 1682
54.3.2 الخرسانة 1684
54.4 أوجه الفشل المجهرية 1684
54.4.1 الروابط الكيميائية 1684
54.4.2 الفشل المطيل والهش 1685
54.4.3 الانخلاع 1685

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

54.5 أسس اللدونة 1686
54.5.1 مقدمة 1686
54.5.2 معامل المرونة المماسي 1687
54.5.2.1 لاشتقاق المعمم 1688
54.5.2.1.1 دالة الخضوع؛ نموذج التصلد متساوي الخواص 1688
54.5.2.1.2 قاعدة الجريان 1688
54.5.2.1.2.1 شروط Kuhn-Tucker 1689
54.5.2.1.3 شرط الاتساق 1690
54.5.2.1.4 المعامل المماسي 1690
54.5.2.2 لمعامل المماسي؛ اشتقاق هندسي 1691
54.5.2.3 مثال 54.1: المعامل المماسي 1692

55 اللدونة II؛ المقاطع: 1695
55.1 مقدمة 1695
55.2 الإطار النظري: الافتراضات والنتائج الرئيسة 1695
55.3 العزم–الانحناء؛ $M-\Phi$ 1697
55.3.1 بدءًا من علاقة العزم–الانحناء 1698
55.3.1.1 مثال 55.1: تحليل لاخطي للمقطع؛ تحليلي 1698
55.3.2 بدءًا من علاقة الإجهاد–الانفعال 1701
55.3.2.1 مثال 55.2: الطبقات؛ الفولاذ 1702
55.3.2.2 مثال 55.3: طبقي؛ الخرسانة/ACI 1706
55.4 تعميم علاقة العزم–الانحناء 1709
55.4.1 النهج التحليلي 1709
55.4.1.1 مثال 55.4: العزم–الانحناء لمقطع I من الخرسانة المسلحة 1711
55.4.1.2 مخطط التفاعل $M-N$ 1716
55.4.2 النهج العددي 1717

56 اللدونة III؛ المنشأ: خطوط الخضوع 1721
56.1 مقدمة 1722
56.2 العناصر الخطية (الجوائز، الإطارات) 1723
56.2.1 النهج الحركي؛ الحد الأعلى 1723
56.2.1.1 مثال 56.1: جائز مثبت؛ حمل مركزي 1726
56.2.1.2 مثال 56.2: جائز مثبت؛ حمل لامركزي 1726
56.2.1.3 مثال 56.3: جائز مستمر 1726
56.2.1.4 مثال 56.4: إطار متعامد 1727
56.2.1.5 مثال 56.5: إطار مائل 1727
56.2.2 السكونيات؛ الحد الأدنى 1729
56.2.2.1 مثال 56.6: كابولي مسنود I 1731
56.2.2.2 مثال 56.7: كابولي مسنود II 1732
56.2.2.3 مثال 56.8: جائز مثبت 1732
56.2.2.4 مثال 56.9: إطار مائل 1733
56.3 العناصر المستوية (البلاطات) 1738
56.3.1 السكونيات: الحد الأدنى 1739

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.3.1.1مثال 56.10: بلاطة مربعة 1739
56.3.2 الحركيات: الحد الأعلى 1740
56.3.2.1مثال 56.11: بلاطة مستطيلة 1742
56.4 تحليل الدفع 1743
56.5 أوجه التشابه بين تحليل الحد الأدنى و 1744
56.5.1 تحليل الدفع 1744
56.5.2 اللدونة المركزة 1747

57 ميكانيكا الضرر **1750**
57.1 مخطط مقترح بواسطة ChatGPT 1750
57.1.1 الدوافع والأسس الفيزيائية (~1.5 صفحة) 1750
57.2 الإطار الديناميكي الحراري (~2 صفحتان) 1750
57.3 الضرر القياسي متساوي الخواص: نموذج مازار (~4 صفحات) 1750
57.4 عدم التناظر بين الشد والضغط والتأثير أحادي الجانب (~2 صفحتان) 1750
57.5 اقتران الضرر واللدونة (~2 صفحتان) 1751
57.6 التنظيم والموضوعية بالنسبة إلى الشبكة (~3 صفحات) 1751
57.7 التطبيق على عناصر الجوائز والأعمدة (~3 صفحات) 1751
57.8 تحديد المعلمات ودليل عملي (~1.5 صفحة) 1751
57.9 ملاحظات ببليوغرافية وقراءات إضافية (~0.5 صفحة) 1751

58 التحليل غير الخطي؛ المادة **1752**
58.1 إيجاد الجذور عدديًا 1752
58.1.1 طرائق Newton 1753
58.1.1.1مقدمة 1753
58.1.1.2متسلسلة Taylor والخطْيَنة 1753
58.1.1.2.1 مثال 58.1: طريقة Newton؛ قياسية 1756
58.1.1.3لتقارب وتقدير الخطأ 1758
58.1.1.4ملاحظات ختامية 1758
58.1.1.4.1 مثال 58.2: طريقة Newton؛ متجه 1759
58.1.2 طريقة القاطع 1759
58.1.3 الطريقة الصريحة 1760
58.2 العلاقة بميكانيكا المنشآت؛ الطريقة الضمنية 1762
58.3 طرائق التكامل 1762
58.3.1 التحكم بالحمل 1764
58.3.1.1طريقة Newton-Raphson/الصلابة المماسية 1764
58.3.1.2طريقة Newton-Raphson المعدلة 1766
58.3.1.3طريقة Newton بالقاطع 1768
58.3.1.4معايير التقارب 1769
58.3.1.5جدول موجز 1770
58.3.2 التحكم بالإزاحة 1771

59 التحليل غير الخطي؛ الهندسي **1775**
59.1 مصفوفة الصلابة الهندسية 1775

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

59.1.1 الاشتقاق 1776
59.1.1.1 الصيغة الضعيفة 1776
59.1.1.2 الانفعال 1776
59.1.1.3 طاقة الانفعال الداخلية 1777
59.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ 1777
59.1.2 عدم الاستقرار المرن؛ تحليل التشعب 1778
59.1.2.1 مثال 59.1: انبعاج عمود 1779
59.1.2.2 مثال 59.2: انبعاج إطار؛ حل Matlab 1781
59.1.2.3 مثال 59.3: انبعاج إطار؛ حل Mathematica 1784
59.1.2.4 مثال 59.4: أثر الحمل المحوري في التشوه الانحنائي 1785
59.2 التحليل الصريح التزايدي 1788
59.2.1 مثال 59.5: الانحراف الكبير لكمرة كابولية 1790
59.3 إعادة النظر في $P-\Delta$ 1793
59.3.1 مثال 59.6: حمل الانبعاج من دون $\mathbf{K}_{geom}$ 1794

60 التحليل غير الخطي؛ صياغة العنصر **1798**
60.1 مقدمة 1799
60.2 عنصر الجمالون 1799
60.2.1 نظام الإحداثيات لعنصر جمالون 2D 1800
60.2.2 تحديد الحالة 1801
60.3 صيغ عناصر الكمرة-العمود 1801
60.3.1 عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة 1802
60.3.1.1 نظام الإحداثيات في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة 1804
60.3.1.2 تحديد الحالة 1805
60.3.1.3 الخطأ "الخفي" 1808
60.3.1.4 التحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على الصلابة 1808
60.4 المقطع الطبقي/الليفي 1812
60.4.1 عنصر كمرة-عمود 2D بطريقة المرونة 1815
60.4.1.1 نظام الإحداثيات في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة 1818
60.4.1.2 تحديد الحالة 1820
60.4.1.2.1 من دون تكرار على مستوى العنصر 1820
60.4.1.2.2 مع حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر 1822
60.4.1.3 التحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة 1827
60.4.1.3.1 من دون تكرار على مستوى العنصر 1827
60.4.1.3.2 مع حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر 1831
60.4.2 العناصر القائمة على الصلابة مقابل العناصر القائمة على المرونة 1834
60.5 صياغة العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري 1839
60.5.1 نظام الإحداثيات في العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري 1840
60.5.2 تحديد حالة العنصر 1840
60.6 عنصر مقطعي ذو طول صفري 1843
60.6.1 مصفوفة الصلابة 1843
60.6.2 نظام الإحداثيات 1844

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.6.3 تحديد حالة العنصر 1845
60.7 التكامل العددي 1847
60.8 قوة العنصر 1847

61 النماذج التأسيسية للدونة الموزعة والمجمعة **1848**
61.1 مقدمة 1849
61.1.1 المرونة الحرارية الخطية 1849
61.1.2 النماذج الاستدلالية 1850
61.2 الدونة الموزعة 1852
61.2.1 نماذج الفولاذ 1852
61.2.1.1 مقدمة 1852
61.2.1.2 نموذج ثنائي الخطية ذي تصلد متساوي الخواص 1852
61.2.1.2.1 علاقة الإجهاد–الانفعال 1852
61.2.1.2.2 تحديد النموذج ثنائي الخطية 1854
61.2.1.3 نموذج Menegotto-Pinto 1854
61.2.2 نماذج الخرسانة 1862
61.2.2.1 تأثير الحصر 1862
61.2.2.2 نموذج Kent وPark المعدل 1863
61.2.2.2.1 علاقة الإجهاد–الانفعال 1863
61.2.2.2.2 تحديد نموذج Kent وPark المعدل 1870
61.2.3 نموذج ضرر متباين الخواص مع الضرر الفعال واستعادة الصلابة 1873
61.2.3.1 النموذج التأسيسي 1873
61.2.3.2 صياغة متعددة الألياف أحادية المحور 1875
61.2.3.3 تحديد نموذج الضرر متباين الخواص 1876
61.2.3.3.1 تحميل الشد: 1876
61.2.3.3.2 تحميل الضغط: 1877
61.2.3.4 نموذج ضرر متباين الخواص مع انفعالات دائمة 1884
61.2.3.4.1 المخطط العددي أحادي المحور 1884
61.2.4 انزلاق الترابط 1888
61.2.5 عنصر مقطعي ذو طول صفري 1889
61.3 الدونة المجمعة 1892
61.3.1 الطول اللدن 1893
61.3.1.1 المواضع المحتملة للمفاصل اللدنة 1893
61.3.1.2 التشوه الناتج من الانحناء ($\Delta(\phi)$) 1894
61.3.1.3 عزم العطالة الفعال للخرسانة المسلحة والانحناء 1895
61.3.1.4 التشوه بدلالة أطوال المفاصل اللدنة 1896
61.3.1.4.1 الخرسانة المسلحة 1896
61.3.1.4.2 الفولاذ 1900
61.3.1.5 مثال 61.1: مفصل لدن في عمود فولاذي 1902
61.3.2 نموذج فشل القص (مادة حالة الحد) 1902
61.3.2.1 مقدمة 1902
61.3.2.2 نموذج حالة حد القص 1903

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.3.3 نماذج Ibarra للتباطؤ المتضمنة تبديد الطاقة . . . 1906
61.3.3.1 نماذج التباطؤ . . . 1910
61.3.3.1.1 النموذج الموجه نحو الذروة . . . 1911
61.3.3.1.2 نموذج التخصر . . . 1912
61.3.3.2 أنماط تدهور المقاومة . . . 1917
61.3.3.2.1 نمط تدهور المقاومة الأساسية . . . 1919
61.3.3.2.2 نمط تدهور المقاومة بعد التغطية . . . 1921
61.3.3.2.3 نمط تدهور صلابة التفريغ . . . 1922
61.3.3.2.4 نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل . . . 1924
61.3.3.3 الخلاصة . . . 1925
61.3.4 نموذج Ghannoum . . . 1925
61.3.4.1 منحنى العمود الفقري . . . 1925
61.3.4.2 السلوك الدوري . . . 1925

62 علم وفن نمذجة العناصر المحددة 1929
62.1 مقدمة . . . 1929
62.1.1 التحقق من شبكة/تحليل العناصر المحددة . . . 1932
62.1.2 مفاهيم التحقق والتصديق على النموذج . . . 1933
62.2 إنشاء الشبكة . . . 1934
62.2.1 العناصر الكبيرة . . . 1934
62.2.1.1 مثال 62.1: نمذجة العمود . . . 1939
62.2.1.2 مثال 62.2: نمذجة الكمرة . . . 1940
62.2.2 المقطع العرضي . . . 1940
62.2.3 “اختر وثبّت” . . . 1941
62.2.4 ملاحظات ختامية . . . 1941
62.3 تحديد معاملات التدهور . . . 1942
62.3.1 المعايرة . . . 1943
62.3.1.1 تحديد المعاملات . . . 1943
62.3.2 قاعدة بيانات معاملات النمذجة . . . 1943
62.3.2.1 Peer/Berry . . . 1943
62.3.2.1.1 خصائص العمود . . . 1943
62.3.2.1.2 ملخص مقاومات الانحناء . . . 1948
62.3.2.1.3 مثال . . . 1949
62.3.2.2 Stanford/Lignos . . . 1949
62.3.2.3 UTSA/Ghannoum . . . 1951
62.3.2.4 العناصر المحددة المتصلة/Dolati . . . 1951
62.3.2.5 ACI-437-A . . . 1951

فاصل: من التحليل الأمامي إلى تحديد المعلمات 1952

63 البيانات والشكوك: تحليل عدم اليقين والحساسية 1954
63.1 مقدمة . . . 1954
63.2 جودة البيانات ومصادر الشك . . . 1955
63.3 تكميم عدم اليقين وتحليله . . . 1955

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63.3.1 توصيف عدم اليقين في المدخلات 1956
63.3.1.1 أنواع عدم اليقين 1956
63.3.1.2 التمثيل الرياضي 1957
63.3.2 الاعتماد وأخذ العينات المترابطة 1957
63.3.2.1 التغاير والارتباط 1957
63.3.2.1.0.1 مثال 63.1: مصفوفة الارتباط 1957
63.3.2.2 التغاير المكاني 1958
63.3.2.3 التغاير الزمني 1959
63.3.2.4 توليد عينات مترابطة 1959
63.3.3 نشر عدم اليقين 1960
63.3.3.1 محاكاة مونت كارلو (MCS) 1960
63.3.3.2 أخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق (LHS) 1960
63.3.3.2.0.1 مثال 63.2: المكعب اللاتيني الفائق: مثال محلول بمتغيرين 1963
63.3.3.3 بدائل تقريبية وبدائل بديلة لأخذ العينات المباشر 1964
63.3.3.3.1 طريقة تقدير النقاط (PEM) 1964
63.3.3.3.1.1 مثال 63.3: مثال على طريقة تقدير النقاط 1965
63.3.3.3.2 واحد في كل مرة (تقدير الفروق المحدودة بسلسلة Taylor، TSFD) 1965
63.3.3.3.2.1 مثال 63.4: مثال على طريقة الفروق المحدودة بسلسلة Taylor 1966
63.3.3.3.3 توسع الفوضى متعدد الحدود (PCE) 1967
63.3.3.3.3.1 مثال 63.5: توسع الفوضى متعدد الحدود 1967
63.3.4 تفسير عدم اليقين في المخرجات 1968
63.4 تحليل الحساسية 1969
63.4.1 طريقة Morris 1969
63.4.1.1 مثال 63.6: طريقة Morris 1973
63.4.2 مؤشرات Sobol للحساسية القائمة على التباين 1974
63.4.2.1 مؤشرات الرتبة الأولى 1974
63.4.2.2 مؤشرات التفاعل والأثر الكلي 1975
63.4.2.3 التفسير 1975
63.4.2.4 الحساب والتكلفة 1975
63.4.2.5 العلاقة بفرز Morris 1975
63.4.3 مقارنة طرائق النشر والحساسية 1976
63.4.4 تحديد المتغيرات العشوائية المهمة 1976
63.4.4.1 مثال 63.7: طريقة Morris؛ تحديد المتغيرات المهمة 1977
63.4.5 مخططات الإعصار 1981
63.5 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات 1982

64 القرارات: طرائق تعيين المعاملات **1984**
64.1 تعيين المعاملات بوصفه مسألة عكسية 1984
64.2 التطبيقات وإطار القرار 1986

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

64.2.1 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات . . . 1986
64.2.2 إطار القرار: أي طريقة ومتى؟ . . . 1986
64.3 جودة البيانات والحصانة . . . 1986
64.3.1 مصادر تلوث البيانات . . . 1986
64.3.2 تقدير التوافق الحصين: RANSAC . . . 1987
64.3.2.1 الخوارزمية . . . 1987
64.4 خوارزمية Levenberg–Marquardt . . . 1990
64.4.1 نهج النمذجة واختيار النموذج . . . 1991
64.4.2 المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة . . . 1991
64.4.3 خطوة تحديث Levenberg–Marquardt وحدس الخوارزمية . . . 1991
64.4.4 مثال 64.1: ملاءمة نموذج قطع زائد لاخطي . . . 1992
64.4.5 التحجيم والحدود والتنظيم . . . 1994
64.4.6 قابلية التعيين . . . 1995
64.4.6.1 تقريب عدم اليقين المحلي . . . 1995
64.4.7 عدم تطابق النموذج . . . 1996
64.5 تعيين المعاملات البايزي . . . 1996
64.5.1 تعيين المعاملات البايزي: الإعداد . . . 1997
64.5.2 تقدير MAP والتقديرات النقطية . . . 1997
64.5.3 أخذ العينات اللاحق وMCMC للمعاملات . . . 1998
64.5.4 مثال 64.2: انحدار بايزي بأساس تربيعي وأخذ عينات Metropolis–Hastings . . . 1998
64.5.5 مثال محلول: الاستدلال البايزي لمعاملات التدهور . . . 1999
64.5.6 متى يُستخدم التعيين البايزي . . . 1999
64.6 خوارزمية Levenberg–Marquardt عملياً . . . 2000
64.6.1 ممارسة المربعات الصغرى . . . 2002
64.6.1.1 برنامج MATLAB لتعيين المعاملات: الوصف . . . 2002
64.7 سير العمل الهجين وأفضل الممارسات . . . 2009
64.7.1 المعايرة والتحقق . . . 2009
64.7.2 التطبيقات الإنشائية . . . 2009
64.7.3 إطار قرار سير العمل . . . 2010
64.8 الجسر إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء . . . 2010

65 فاصل **2014**
65.1 قيود التصميم بمعاملات الأحمال والمقاومة (LRFD) . . . 2014
65.2 لماذا ننتقل إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)؟ . . . 2015
65.3 المكونات الأربعة لـPBEE . . . 2015
65.4 بنية الكتاب . . . 2016

66 تحليل الخطر **2017**
66.1 مقدمة . . . 2018
66.2 علاقة التكرار . . . 2018
66.3 نموذج التوهين . . . 2020
66.3.1 الأساسيات . . . 2020
66.3.2 Boore وJoyner و1997) Fumel) . . . 2021

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

66.3.3 التقييم البارامتري 2022
66.4 تحليل الخطر الزلزالي الحتمي 2024
66.5 تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي 2025
66.6 زمن الوقوع 2026
66.7 منحنيات الخطر الزلزالي 2027
66.8 خرائط الخطر الزلزالي 2029
66.9 تفكيك الخطر الزلزالي 2029
66.10 أطياف الاستجابة المستهدفة 2030
66.11 محاكاة الحركة الأرضية العشوائية 2034
66.11.1 نموذج Rezaeian و(r-d Der Kiureghian) 2035
66.11.2 نموذج Yamamoto و(y-b Baker) 2036
66.12 دوال إثارة زمن التحمل 2038
66.12.1 الجيل الأول من ETEFs 2038
66.12.2 الجيل الثاني من ETEFs 2039
66.12.3 الجيل الثالث من ETEFs 2040
66.12.4 الجيل الرابع من ETEFs 2040
66.12.5 الجيل الخامس من ETEFs 2041
66.13 مثال 66.1: تحليل الخطر الزلزالي 2043

67 تحليل الخطر الزلزالي II **2048**
67.1 مقدمة 2048
67.2 المعدل السنوي للتجاوز 2049
67.3 منحنى الخطر 2050
67.4 تحليل الخطر الزلزالي الهندسي (ESRA) 2051
67.4.1 مثال 67.1: حسابات فترة العودة 2052
67.5 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) بوصفه SHA + ESRA 2052

68 التحليل الإنشائي **2055**
68.1 مقدمة 2056
68.2 تعريفات أساسية 2057
68.3 السعة والطلب 2058
68.3.1 علاقات الطلب بالسعة 2058
68.3.2 طرائق تقدير الطلب 2058
68.3.3 مبادئ تصميم السعة 2059
68.4 طرائق التحليل الزلزالي 2060
68.4.1 تحليل الدفع (POA) 2060
68.4.1.1 مثال 68.1: مثال على منحنى الطلب 2065
68.4.1.2 مثال 68.2: تحليل الدفع؛ مثال عملي 2066
68.4.2 التحليل الديناميكي المتزايد (IDA) 2095
68.4.3 تحليل الشرائح المتعددة (MSA) 2097
68.4.4 تحليل السحابة (CLA) 2099
68.4.5 تحليل زمن التحمل (ETA) 2100
68.4.6 الخلاصة 2102

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68.5 ما التالي؟ 2104
69 تحليل الضرر **2106**
69.1 مقدمة 2107
69.2 الحالات الحدية 2108
69.2.1 التسلسل الهرمي للحالات الحدية 2108
69.2.2 الإطار الاحتمالي 2108
69.2.3 التطبيق في إطار PBEE 2109
69.2.4 المعايرة والتحقق 2109
69.2.5 اعتبارات متعددة الأهداف 2109
69.2.6 الارتباط بمؤشرات الضرر 2110
69.3 مؤشرات الضرر 2110
69.3.1 مؤشرات الضرر ومعايير الأداء 2110
69.3.2 الانتقال إلى التقييم الاحتمالي للضرر 2111
69.3.3 التمثيل الاحتمالي للضرر 2112
69.3.4 مقاييس الضرر ومعلمات الطلب الهندسي (EDP) 2113
69.3.5 chap:trustregion في تقييم الضرر 2113
69.3.6 مقاييس الضرر الكمية 2113
69.4 الأداء 2115
69.4.1 إطار الهندسة القائمة على الأداء 2115
69.4.2 مستويات الأداء ومعايير القبول 2117
69.4.3 دمج الحالات الحدية ومؤشرات الضرر ومستويات الأداء 2118
69.5 الانتقال إلى منحنيات الهشاشة وتقييم المخاطر 2119
70 تحليل الخسائر **2121**
71 التقييم الاحتمالي للمخاطر (PBEE ⊇)[24] **2124**
71.1 نماذج فكرية جديدة: هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) 2125
71.1.1 قيود تصميم معامل الحمل والمقاومة (LRFD) 2125
71.1.2 الجزء I: أهداف أداء صريحة 2125
71.1.2.1 الطريقة 2125
71.1.2.2 قيود PBEE-1 2126
71.1.2.3 التصميم مقابل التحليل 2127
71.1.3 الجزء II: التحديد المباشر للنتائج الوظيفية والاقتصادية كمياً: 2127
71.1.3.1 مقدمة 2127
71.1.3.2 الإطار العام 2128
71.1.3.3 الفروق بين PBEE 1 و PBEE 2 2130
71.1.4 إجراء تطبيق PBEE 2130
71.2 من الاستجابة إلى الضرر: منحنيات الهشاشة 2133
71.2.1 الأسس والتعريفات 2133
71.2.2 تطوير منحنيات الهشاشة 2134
71.2.3 التمثيلات الرياضية 2135
71.2.4 الدالة المستمرة مقابل المصفوفة المنفصلة 2135

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71.3 الدور في إطار PBEE 2138
71.4 مثال 71.1: مثال كامل على PBEE 2138
71.5 المحطات التاريخية والوثائق التأسيسية 2143

الملاحق

الجزء الأول: مواد مرجعية أساسية

A الوحدات **2146**
A.1 وحدات النظام الدولي 2146
A.2 البادئات والمضاعفات المترية 2147
A.3 الوحدات ومعاملات التحويل 2147
A.4 ملخص القوة والطول والشغل والإجهاد في الوحدات المترية المختلفة 2148
A.5 تحويل الكميات الفيزيائية من الوحدات المترية إلى الوحدات الإمبراطورية 2148

B الأحمال والتصميم القائم على المعطيات التجريبية **2149**
B.1 الأحمال الميتة 2149
B.2 أحمال الرياح 2150
B.2.1 مثال B.1: حمل الرياح 2151
B.3 الزلازل 2152
B.3.1 مثال B.2: حمل زلزالي على إطار 2160
B.3.2 مثال B.3: حمل زلزالي على مبنى شاهق 2161
B.4 أحمال الجسور 2162
B.5 تركيبات الأحمال 2162
B.6 تخفيض الحمل الحي 2163
B.6.1 مثال B.4: تخفيض الحمل الحي I 2163
B.6.2 مثال B.5: تخفيض الحمل الحي II 2164
B.7 موضع الحمل 2164

C المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة **2166**
C.1 ملخص المعادلات التفاضلية الحاكمة 2166
C.2 الحلول 2167
C.3 الاستقرار I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2167
C.4 الاستقرار II: $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2169
C.5 كمرة على أساس مرن: $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ 2169

D الأقواس المرنة؛ تحليلات متقدمة **2171**
D.1 مقدمة 2171
D.2 القوس الدائري ثلاثي المفاصل 2172
D.2.1 إجراءات التحليل 2173
D.2.2 الحمل المركز 2173
D.2.3 الوزن الذاتي 2180

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.2.4 الحمل الموزع بانتظام 2184
D.2.4.1 الانحراف 2186
D.2.5 التحقق من القوس الدائري ثلاثي المفاصل 2186
D.2.6 الخلاصة 2188
D.3 القوس الدائري ثنائي المفاصل 2188
D.3.1 إجراءات التحليل 2189
D.3.2 الحمل المركز 2189
D.3.3 الوزن الذاتي 2200
D.3.4 الحمل الموزع بانتظام 2207
D.3.5 التحقق من القوس الدائري ثنائي المفاصل 2211
D.3.6 الخلاصة 2213
D.4 القوس الدائري عديم المفاصل 2213
D.4.1 إجراءات التحليل 2213
D.4.2 الحمل المركز 2214
D.4.3 الوزن الذاتي 2228
D.4.4 الحمل الموزع بانتظام 2236
D.4.5 التحقق من القوس الدائري عديم المفاصل 2241
D.4.6 الخلاصة 2242
D.5 الخلاصة 2243

الجزء الثاني: جداول التحليل والتصميم الإنشائي

E جداول تحليل القشريات الأسطوانية **2245**

F تصميم أسقف القشريات البرميلية **2258**

G مجموعة بيانات جسر ألاميو **2287**

H الأيقونات المعرِّفة: التجزئة البصرية **2291**
H.1 مقدمة إلى الأيقونات المعرِّفة 2291
H.2 خوارزميات توليد الأيقونات المعرِّفة 2292
H.3 مقارنة تطبيقَي GitHub وStack Exchange 2294
H.4 التنفيذ في MATLAB 2294
H.5 مقاطع الشيفرة الأساسية 2297
H.6 استعمال البرنامج 2298
H.7 المزايا والتطبيقات 2298
H.8 الخلاصة 2299

الجزء الثالث: تطبيقات الشيفرات

I شيفرات MATLAB® وMathematica **2300**
I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods 2301
I.1.1 Statics matrix of a truss B 2302
I.1.2 St louis arch shape 2305
I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica 2306

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2317 Collapse of masonry arches I.1.4
2317 Main I.1.5
2329 Large deflection of a beam I.1.6
2335 Part II: Structural Design and Analysis I.2
2335 Design of cylindrical shells I.2.1
2349 Approximate frame analysis; cantilever method I.2.2
2363 Non uniform torsion I.2.3
2366 Orthogonal frame I.2.4
2370 Hybrid orthogonal frame I.2.5
2375 Frame; hard-wired I.2.6
2380 Direct stiffness method; frame I.2.7
2380 Main code I.2.8
2393 Stiffness matrix of non-prismatic members I.2.9
2401 Isostatic lines I.2.10
2407 Evolutionary design I.2.11
2407 Main I.2.12
2414 Column interaction diagram I.2.13
2418 Variational methods; mathematica I.2.14
Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to I.2.15
2429 lateral load
2432 Isoparametric elements I.2.16
2444 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior I.3
2444 Incremental plasticity I.3.1
2449 Constitutive models I.3.2
2449 Bilinear model I.3.3
2453 Hardening I.3.4
2457 Hysteresis I.3.5
2476 Modified giuffre monegotto pinto I.3.6
2481 Modified kent park I.3.7
2486 Ibarra I.3.8
2486 Hysteresis I.3.8.1
2506 Hysteresis pinch I.3.8.2
2528 Limit state shear I.3.9
2550 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification I.4
2550 Parameter Identification Program I.4.1
2550 Main Program and Core Orchestration I.4.2
2560 Data I/O and Spreadsheet Integration I.4.3
2573 Optimization Workflow and Auxiliary Functions I.4.4
2587 Part V: Numerical and Statistical Foundations I.5
2587 Levenberg-Marquardt I.5.1
2588 Numerical techniques I.5.2
2588 FFT and butterworth filters I.5.3

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2591 . . . . . Singular value decomposition I.5.4
2593 . . . . . Preconditioning I.5.5
2596 . . . . . (Random Sampling Consensus (RANSAC I.5.6
2601 . . . . . Latin Hypercube I.5.7
2606 . . . . . Bayesian regression with a quadratic basis I.5.8
2613 . . . . . Markov chain Monte Carlo Simulation I.5.9
2615 . . . . . Part VI: Optimization and Parameter Fitting I.6
2615 . . . . . Levenberg-Marquardt I.6.1
2615 . . . . . Custom Implementation I.6.2
2619 . . . . . Using Built-in Function I.6.3
2622 . . . . . Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty I.7
2622 . . . . . Seismic hazard analysis I.7.1
2625 . . . . . Performance Based Earthquake Engineering I.7.2
2630 . . . . . Part VIII: Utility I.8
2630 . . . . . Identicon I.8.1

2638 J أمثلة باستخدام Mathcad

الجزء الرابع: طرائق عددية وإحصائية

2804 K ترشيح السجلات الزلزالية (تحويلات فوريه السريعة)
2805 . . . . . K.1 كيفية حساب تحويل فوريه

2809 L مراجعة في الجبر الخطي
2809 . . . . . L.1 المصفوفات
2809 . . . . . L.1.1 تعريفات
2811 . . . . . L.1.2 العمليات الأولية على المصفوفات
2812 . . . . . L.1.3 المحددات
2813 . . . . . L.1.4 العكس
2813 . . . . . L.2 حل المعادلات الخطية
2813 . . . . . L.2.1 الاستراتيجيات
2814 . . . . . L.2.2 التحليل
2814 . . . . . L.2.2.1 حذف غاوس
2814 . . . . . L.2.2.2 حذف غاوس–جوردان
2815 . . . . . L.2.2.3 تحليل **LU**
2817 . . . . . L.2.2.4 تحليل تشولسكي
2818 . . . . . L.2.2.5 تحليل القيم المفردة
2820 . . . . . L.2.2.6 تحليل QR
2820 . . . . . L.2.3 الطرائق غير المباشرة
2820 . . . . . L.2.3.1 غاوس–سايدل
2821 . . . . . L.3 خصائص المصفوفات والتحسينات الحسابية
2821 . . . . . L.3.1 التفرد والرتبة
2822 . . . . . L.3.2 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية
2823 . . . . . L.3.3 عدد التكييف

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.3.4 التكييف المسبق 2823
L.3.4.1 التكييف المسبق الأيسر 2824
L.3.4.2 التكييف المسبق الأيمن 2825
L.4 أمثلة 2825
L.4.1 مثال L.1: حذف غاوس 2826
L.4.2 مثال L.2: حذف غاوس–جوردان 2827
L.4.3 مثال L.3: تحليل **lu** 2828
L.4.4 مثال L.4: تحليل تشوليسكي 2829
L.4.5 مثال L.5: غاوس–سايدل 2830
L.4.6 مثال L.6: غاوس–سايدل 2831
L.4.7 مثال L.7: تحليل القيم المفردة 2831
L.4.8 مثال L.8: التهيئة المسبقة 2832

M الاحتمالات والإحصاء **2835**
M.1 مقدمة في الاحتمالات والإحصاء 2835
M.2 المفاهيم الأساسية في الاحتمالات 2835
M.2.1 التحليل الحتمي مقابل التحليل الاحتمالي 2835
M.2.2 التعريف 2836
M.2.3 الاحتمال الشرطي 2837
M.2.4 أنواع المتغيرات العشوائية 2837
M.3 الأدوات الإحصائية للتحليل الاحتمالي 2838
M.3.1 دالة التوزيع التراكمي 2839
M.3.2 فترة الثقة 2840
M.4 المقاييس الإحصائية 2841
M.4.1 العزوم ومقاييس النزعة المركزية 2841
M.4.2 العلاقات بين المتغيرات 2843
M.5 التوزيعات 2844
M.5.1 التوزيعات أحادية المتغير 2844
M.5.1.1 مقارنة 2847
M.5.2 التوزيعات ثنائية المتغير 2849

N مؤشر الموثوقية **2852**

الجزء الخامس: النظرية المتقدمة والتحسين الأمثل

O مدخل إلى ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه **2857**
O.1 مقدمة 2857
O.1.1 الترميز 2857
O.1.2 الموترات 2860
O.1.2.1 العمليات 2860
O.1.2.2 دوران المحاور 2861
O.1.2.3 تحويل الموترات 2863
O.1.2.4 القيم الرئيسة للموترات المتناظرة من الرتبة الثانية 2864

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

O.1.3 التفسير الفيزيائي لثوابت الإجهاد . . . 2865
O.2 الحقول المتجهة؛ ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه . . . 2866
O.2.1 القوى . . . 2866
O.2.2 موتر إجهاد كوشي . . . 2867
O.2.2.1 موترات الإجهاد الهيدروستاتيكي والانحرافي . . . 2869
O.2.2.2 التمثيل الهندسي لحالات الإجهاد . . . 2869
O.2.3 علم الحركة . . . 2870
O.2.3.1 الموضع والإزاحة . . . 2870
O.2.3.2 الانفعالات . . . 2871
O.3 القوانين الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة . . . 2873
O.3.1 قوانين الحفظ . . . 2873
O.3.2 التدفقات . . . 2874
O.3.3 حفظ الكتلة؛ معادلة الاستمرارية . . . 2875
O.3.4 حفظ كمية الحركة؛ معادلة الحركة . . . 2875
O.3.5 حفظ الطاقة؛ المبدأ الأول للديناميكا الحرارية . . . 2878
O.4 المعادلات التأسيسية . . . 2879
O.4.1 الحالة العامة ثلاثية الأبعاد (3D) . . . 2880
O.4.2 حالة تساوي الخواص المستعرض . . . 2881
O.4.3 حالات خاصة ثنائية الأبعاد (2D) . . . 2882
O.5 ملاحظات ظاهرية . . . 2883
O.5.1 اختبارات التحكم في الحمل والإزاحة والانفعال . . . 2883
O.5.2 استجابة الفولاذ والخرسانة قبل الذروة وبعدها . . . 2884
O.6 تمركز التشوه . . . 2885
O.6.1 الدليل التجريبي . . . 2885
O.6.1.1 مخطط σ-COD، نموذج هيلربورغ . . . 2885
O.7 الشروط الحدية . . . 2888
O.8 مخطط تونتي . . . 2889
O.9 مفهوم القوة الداخلية . . . 2889

P تحية تقدير إلى ويسترغارد 2892
P.1 حقل الإجهاد عند رأس الشق . . . 2892
P.1.1 دالة آيري للإجهاد . . . 2892
P.1.2 الحل . . . 2895
P.2 تفاعل المائع والمنشأ . . . 2899

Q طريقتا نطاق الثقة وليفنبرغ–ماركوارت 2913
Q.1 نطاق الثقة . . . 2914
Q.2 الخوارزمية . . . 2917
Q.3 صياغة MATLAB® . . . 2918
Q.4 التصور الآني . . . 2920

R تمهيد في حساب المتجهات 2922
R.1 تعريفات أساسية . . . 2922

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

R.1.1 الاشتقاق بالنسبة إلى كمية قياسية 2922
R.1.1.1 مثال R.1: مماس منحنى 2924
R.1.2 التباعد 2924
R.1.2.1 المتجه 2924
R.1.2.1.1 مثال R.2: تباعد متجه 2926
R.1.2.2 موتر من الرتبة الثانية 2926
R.1.3 التدرج 2927
R.1.3.1 الحقل القياسي 2927
R.1.3.1.1 مثال R.3: تدرج حقل قياسي I 2927
R.1.3.1.2 مثال R.4: تدرج حقل قياسي ii 2928
R.1.3.2 الحقل المتجهي 2929
R.1.3.2.1 مثال R.5: تدرج حقل متجهي 2930
R.2 مبرهنات التكامل 2930
R.2.1 تكامل متجه 2930
R.2.2 التكامل الخطي 2931
R.2.3 التكامل بالتجزئة 2931
R.2.4 غاوس؛ مبرهنة التباعد 2931
R.2.4.1 مثال R.6: التفسير الفيزيائي لمبرهنة التباعد 2932
R.2.5 مبرهنة ستوكس 2933
R.2.6 غرين؛ مبرهنة التدرج 2933
مراجع الأجزاء الثاني–الرابع 2934

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأشكال: الأجزاء II–IV (التحليل)

17.1 التحليل الإنشائي؛ الصورة الكبرى 727
17.2 أنواع القوى في العناصر الإنشائية أحادية البعد 732
17.3 الجوانب الأساسية للأنظمة الكبلية 733
17.4 الجوانب الأساسية للعقود 734
17.5 أنواع الجمالونات 734
17.6 تنويعات في ترتيبات الأعمدة والكمرات 735
17.7 أنواع مختلفة من الكمرات 735
17.8 الأشكال الأساسية للإطارات 736
17.9 أمثلة لمنشآت مدعومة بالهواء 737
17.10 الأشكال الأساسية للقشريات 737
17.11 تسلسل مقررات الهندسة الإنشائية 739

18.1 خريطة الثلوج في الولايات المتحدة 742
18.2 مقطع جناح هوائي ومعادلة برنولي 743
18.3 خريطة الرياح في الولايات المتحدة 744
18.4 تأثير حمل الرياح في المنشآت 744
18.5 الخريطة الزلزالية للولايات المتحدة 745
18.6 أحمال التربة والأحمال الهيدروستاتيكية على المنشآت 747
18.7 إسقاط الأحمال 751
18.8 وضع الأحمال لتعظيم العزوم 752
18.9 انتقال الأحمال في مباني الخرسانة المسلحة 755
18.10 الفعل أحادي الاتجاه أو ثنائي الاتجاه في البلاطات 755
18.11 آليات انتقال الأحمال في الكاتدرائيات القوطية والعقود الضحلة 756
18.12 مفهوم المساحات التابعة لتحميل العناصر الإنشائية 757
18.13 دورة أحمال المنشأ، (Lin **and** Stotesbury, 1981) 759

19.1 أمثلة لشروط الحدود وردود الأفعال 761
19.2 اتزان العزوم، من ليوناردو (Da Vinci, 1490 PDF) إلى كالدر 763
19.3 ردود الأفعال عند مسند متحرك مائل 764
19.4 درجة عدم التحديد الاستاتيكي 764
19.5 ردود أفعال متلاقية 765
19.6 مخططات الجسم الحر لكمرة معرضة لأحمال مختلفة 766

20.1 جمالون غير محدد استاتيكياً 787
20.2 العلاقة بين القوى والأطوال 788
20.3 تمثيل القوى بالأسهم 788
20.4 طريقة العقد والمصفوفة: مخططات الجسم الحر للعقد 797
20.5 جمالون معقد محدد استاتيكياً 797

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21.1 الإجهادات الداخلية 804
21.2 القوى الداخلية في الكمرات المستقيمة والمنحنية 805
21.3 القوى الداخلية 807
21.4 اصطلاحات إشارة القص والعزم في التصميم 807
21.5 اصطلاحات الإشارة في التصميم 807
21.6 مخطط الجسم الحر لجزء متناهي الصغر من كمرة 808
21.7 تغيرات الحمل والقص والعزم 810

22.1 الانحناء والانفعالات 834
22.2 اصطلاح الإشارة في طريقة مساحة الانحناء لانحناءين متعاكسين للكمرة 845
22.3 طرائق مساحة الانحناء 845
22.4 الانحراف الأقصى باستخدام طريقة مساحة العزم 849
22.5 الكمرات المرافقة 855

23.1 تشوه القص النقي 859
23.2 عنصر متناهي الصغر خاضع لإجهاد قص 860
23.3 إجهاد القص ومعامله 862
23.4 علاقات دوران اللي 865
23.5 سبب حدوث الالتواء 866
23.6 اللي غير المنتظم (مقتبس من (McGuire **and** Winter, 1968)) 867
23.7 كمرة على شكل I خاضعة للي 869

24.1 القوى الافتراضية والحقيقية في منشأ عام 875
24.2 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل 878

25.1 منشأ من ثلاثة كابلات غير محدد استاتيكياً 903
25.2 كمرة كابولية مسندة 904
25.3 مسألة توضيحية لطريقة المرونة 906
25.4 توضيح طريقة المرونة لمجهولين 907
25.5 أمثلة لمنشآت مستوحاة من الدعامة الملكية 922
25.6 اشتقاق معادلة العزوم الثلاثة 926
25.7 حدود الحمل في معادلة العزوم الثلاثة 928

26.1 اصطلاح الإشارة لطريقة الصلابة 932
26.2 صياغة مسألة الانحناء لاشتقاق حدود الصلابة 934

27.1 مثال توضيحي لطريقة الميل والانحراف 942
27.2 المفاهيم الأساسية لتوزيع العزوم 952

28.1 مبدأ مولر–برسلاو 964

29.1 استقرار قضيب صلب 975
29.2 استقرار قضيب صلب ذي عيب ابتدائي 976
29.3 كمرة–عمود بسيطة الارتكاز؛ جزء تفاضلي؛ تأثير القوة المحورية P 978

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

29.4 منظومة ديناميكية ذات درجتي حرية 989
29.5 الأطوال الفعّالة للكمرات والإطارات 990
29.6 الأطوال الفعّالة للأعمدة في إطارات متعددة البحور والطوابق 991
29.7 مخطط المحاذاة للوصلات شبه المرنة (American Institute of Steel Construction, 2016) 991
29.8 الانبعاج غير المرن 993
29.9 انبعاج أويلر ومنحنى الأعمدة لمجلس أبحاث الاستقرار الإنشائي 993

30.1 التحقق من نظرية الكابل 998
30.2 هندسة الكابل: الحالة الأولى 1001
30.3 هندسة الكابل: الحالة الثانية 1003
30.4 هندسة كابل مائل خاضع لحمل عرضي أفقي منتظم 1009
30.5 جساءة الكابل 1009
30.6 نظاما إحداثيات مرجعيان بديلان للمنحنى السلسلي 1021
30.7 منحنى سلسلي ذو وتر مائل، (Cella, 1999) 1022
30.8 مقارنة الحلين السلسلي والمكافئ 1027

31.1 القوى المقاومة للعزم في القوس أو النظام المعلّق مقارنةً بكمرة، (Lin **and** Stotesbury, 1981) 1030
31.2 اتزان قوس ثلاثي المفاصل 1031
31.3 قوس ثنائي المفاصل والتناظر مع كمرة مثبتة الطرفين (Lin **and** Stotesbury, 1981) 1037
31.4 مركز ثقل صنجة 1046
31.5 اتزان صنجة متناهية في الصغر 1047
31.6 القوس المكافئ الأمثل تحت حمل منتظم 1052
31.7 قوس مكافئ عديم المفاصل؛ مخطط الجسم الحر 1058
31.8 أثر الهبوط الابتدائي وتغير درجة الحرارة 1063
31.9 السلم الحلزوني في متحف اللوفر بباريس وكاتدرائية ساغرادا فاميليا في برشلونة . . . 1069
31.10هندسة منشأ منحني في الفراغ 1070
31.11مخطط الجسم الحر لمنشأ منحني في الفراغ 1071

32.1 الإزاحات والإجهادات في البلاطة 1076
32.2 القوى الداخلية 1078
32.3 توزيع الإجهادات 1083
32.4 اتزان عنصر متناهي الصغر من بلاطة دائرية 1087

33.1 عنصر قشري تفاضلي وهندسته وإجهاداته ومحصلاتها 1095
33.2 حركة العنصر التفاضلي 1096
33.3 اتزان عنصر قشري تفاضلي 1098
33.4 عنصر قشري تفاضلي، محصلة الإجهاد V_x 1102
33.5 عنصر قشري تفاضلي والانحناءات الرئيسة 1103
33.6 العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة 1107

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.7 العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة؛ انفعال القص الناجم عن زيادة طول الأضلاع الموجبة 1109
33.8 العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة؛ الدوران 1109
33.9 السطح الأوسط للعنصر التفاضلي 1112
33.10 تصنيف القشريات 1121
33.11 أمثلة لقشريات يكون فيها افتراض الغشاء صالحاً في معظم المجال 1122
33.12 مخططات الجسم الحر لعنصرين متناهيي الصغر من سطح زائد وقبة 1122
33.13 مخطط الجسم الحر لعنصر متناهي الصغر من قشرة دائرية 1125
33.14 توزيع محصلات الإجهاد في قشرة دائرية كاملة بسيطة الاستناد 1128
33.15 آثار الحواف 1130
33.16 الحمل الخطي التصحيحي المطبق على القشرة الدائرية 1131
33.17 تمثيل سلسلة الجيب 1131
33.18 التناظر بين قشرة غير محددة استاتيكياً ونظام كمرات 1148
33.19 قشريات دائرية مستندة إلى مسند مرن 1149

34.1 مهتز مثالي أحادي درجة الحرية 1168
34.2 منحنيات مفاهيمية للتضخيم الديناميكي لمهتز مخمد أحادي الحرية تحت قوة توافقية . 1175
34.3 طيف استجابة التسارع S_a بدلالة الدور الطبيعي T_n لعدة نسب تخميد. 1183
34.4 أشكال الأنماط الثلاثة الأولى لكمرة بسيطة الاستناد 1186
34.5 حلقة تخلفية مرنة–لدنة ثنائية الخط تحت حمل دوري متناظر. 1193

35.1 التفاعل التكراري بين المعماري والمهندس الإنشائي 1202
35.2 الطلب والقدرة في كمرة 1202
35.3 السلامة 1203
35.4 دالتا التوزيع الاحتمالي لـ C و D 1205
35.5 احتمال الفشل بدلالة β 1207
35.6 تحليل الحالة الحدية لمقطع خرسانة مسلحة متشقق 1208
35.7 كتلة إجهاد ويتني 1210
35.8 مخططا الجسم الحر والتفاعل للعمود 1217
35.9 الجسم الحر للعمود في الحالة المتوازنة 1218

37.1 دورانات الزوايا المتوافقة 1242
37.2 انحراف كمرة بسيطة 1242
37.3 انحراف إطار بوابي ذي أعمدة صلبة تحت حمل رأسي 1243
37.4 انحراف إطار بوابي تحت حمل رأسي 1243
37.5 مثال لإطار بوابي تحت حمل جانبي 1244
37.6 الشكل المنحرف ومخطط العزم لإطار بوابي تحت حمل جانبي 1245
37.7 انحرافات الكمرة بدلالة صلابة المساند 1246
37.8 إطار تحت حمل رأسي: المواضع التقريبية لنقاط الانعطاف 1247
37.9 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية: عزوم الجسر 1248
37.10 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية: القوى المحورية للأعمدة 1249
37.11 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية 1250

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

37.12 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال جانبية: قص الأعمدة 1251
37.13 التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال جانبية: عزم الجسر 1252
37.14 تشوه القص في مبنى قصير، (Lin and Stotesbury, 1981) 1272
37.15 تشوه الانحناء في مبنى عال، (Lin and Stotesbury, 1981) 1273
37.16 انحراف منشأة مبنى مؤلفة من جدارين نحيلين وجوائز رابطة، (Lin and Stotesbury, 1981) 1273
37.17 تشوه إطار عرضي واحد، (Lin and Stotesbury, 1981) 1274
37.18 انحراف القص والانحناء لنظام فرعي من إطار صلد، (Lin and Stotesbury, 1981) 1275
37.19 انحراف التمايل الجانبي الناتج من حمل رأسي غير متناظر، (Lin and Stotesbury, 1981) 1276

39.1 الانفعال المعتمد على الزمن: الزحف والانكماش 1322
39.2 الأحمال الحرارية على المبنى 1322
39.3 اصطلاح الإشارة في التصميم والتحليل، انظر الشكل 26.1 1323
39.4 القوى الداخلية للعنصر ودرجات حريته المحلية 1324
39.5 الإزاحات المستقلة 1325
39.6 نظاما الإحداثيات ودرجات الحرية المحلية والعامة 1326
39.7 درجتا عدم التحديد الاستاتيكي والحركي 1328
39.8 مسألة قيم حدية 1329

40.1 تعريف حد الصلابة K_{ij} 1331
40.2 معاملات الصلابة لأنواع مختلفة من العناصر 1332
40.3 درجات حرية عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد 1334
40.4 حدود الصلابة المنفردة في عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد 1337
40.5 تشوه القص الطفيلي الناتج من الإزاحات المفروضة 1339
40.6 القوى والإزاحات الطرفية لعنصر التواء مع تقييد الالتواء القطاعي 1342

41.1 مثال كمرة للمقارنة بين طريقتي المرونة والصلابة 1345
41.2 مثال كمرة لتحديد درجة عدم التحديد الحركي 1346

42.1 مصفوفتا صلابة العنصر المحلية $(\mathbf{k}^e)$ والعامة $(\mathbf{K}^e)$ 1371
42.2 مصفوفة التحويل لعنصر كمرة–عمود ثنائي الأبعاد 1372
42.3 تحويل اعتباطي لمتجه ثلاثي الأبعاد 1374
42.4 دوران عنصر إطار ثنائي الأبعاد حول Z (أو z) 1376
42.5 دوران عنصر الشبكة الإنشائية 1377
42.6 مصفوفة التحويل لكمرة فلاسوف 1378
42.7 دوران جمالون ثنائي الأبعاد 1379
42.8 دوران ثلاثي الأبعاد مختزل 1380
42.9 الحالة الخاصة لتحويل عنصر رأسي ثلاثي الأبعاد 1381
42.10 دوران ثلاثي الأبعاد مركب 1382

43.1 درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة 1388
43.2 مثال على تقطيع منشأ 1389
43.3 مثال على تحديد مصفوفة [ID] 1390

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43.4 أمثلة على إسناد قيم **LM** 1391
43.5 عملية تجميع مصفوفة الصلابة العامة 1392

44.1 تحويل الإزاحات إلى قوى 1410
44.2 تحويل دائرة إزاحة الوحدة إلى قطع ناقص للقوى، (Gavin, 2012). 1411
44.3 مسألة اختبار القيم الذاتية 1413
44.4 تجميع عناصر ينتج مصفوفة **K** سيئة التكييف 1415
44.5 المصفوفات سيئة التكييف بدلالة K_1 K_2 1416
44.6 أهمية ترقيم العقد 1420
44.7 متطلبات تخزين مصفوفة صلابة المنشأ 1421

45.1 حركة عنصر جمالون 1433
45.2 عنصر مستقر ومحدد استاتيكياً 1437
45.3 كمرة ذات إزاحة صلبة 1448
45.4 مخطط الجسم الحر لكمرة ذات إزاحة صلبة 1449
45.5 كمرات ذات وصلات مرنة وصلبة وشبه صلبة 1451
45.6 تشوهات كمرة شبه صلبة 1452
45.7 المعامل $\overline{K}_{22}$ للوصلات شبه المرنة 1455
45.8 مقتطفات من دليل ثوابت الإطارات (Portland Cement Association, 1947) 1456
45.9 كمرة ذات مقطع متغير 1457
45.10مقطع ذو عمق متغير خطياً؛ دراسة بارامترية 1458
45.11مقطع ذو عمق متغير قطعياً مكافئاً؛ دراسة بارامترية 1459

46.1 مؤثرا التغاير والتفاضل 1473
46.2 أمثلة على الشروط الحدية الأساسية والطبيعية 1478
46.3 مخطط تونتي لطريقة الطاقة الكامنة الكلية 1484
46.4 مخطط تونتي لهو–واشيزو، (Červenka, 1994) 1495
46.5 مخططات تونتي للاغرانج وهاملتون ودالمبير 1497

47.1 تعريف الشد السطحي 1502
47.2 كثافتا طاقة الانفعال وطاقة الانفعال المتممة 1503
47.3 الطاقة الكامنة 1504
47.4 تأثير تاريخ التحميل في U وW_i 1505
47.5 مخططان توضيحيان لمبدأي الشغل الافتراضي والمتمم 1514
47.6 التصغير في الميكانيكا الكمية والكلاسيكية 1524
47.7 ملخص الطرائق التغايرية 1541
47.8 ازدواج المبادئ التغايرية 1542

48.1 نظام الإحداثيات الطبيعية على خط مستقيم 1547
48.2 نظام الإحداثيات الطبيعية للمثلث 1548
48.3 التكامل على مثلث 1550
48.4 عنصر محدد محوري 1551

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

48.5 عنصر المثلث ثابت الانفعال 1553
48.6 عنصر مستطيل ثنائي الخطية 1555
48.7 دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد الأربع 1556
48.8 عنصر صلد مستطيل ثلاثي الخطية 1557
48.9 دوال الشكل للعنصر المثلثي الخطي ذي العقد الثلاث 1559
48.10عنصر قضيب تربيعي ذو ثلاث عقد 1559
48.11عنصر محدد للانحناء 1560
48.12دوال الشكل لانحناء عنصر كمرة منتظم 1562
48.13عنصر متساوي المعلمات ذو أربع عقد 1565
48.14العنصران الرباعيان التربيعيان من نوع سيرنديبتي ولاغرانج 1566
48.15مثلثا باسكال للعناصر الرباعية والمثلثية 1567
48.16عنصر محدد تربيعي متساوي المعلمات من نوع سيرنديبتي: العنصر العام والأب 1567
48.17دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد الثماني 1568
48.18دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد التسع 1571
48.19ترقيم العقد في العناصر متساوية المعلمات 1571
48.20دوال الشكل للعنصر المثلثي التربيعي ذي العقد الست 1572

49.1 الاكتمال والتوافق 1580
49.2 تقارب h وp وr 1581
49.3 استمرارية الإجهاد بين العناصر 1583
49.4 استمرارية الانفعال بين العناصر 1583

50.1 تحويل ثنائي الأبعاد لبعض العناصر 1586
50.2 العنصر الحقيقي والعنصر الأب 1586
50.3 العناصر المتساوية والفوقية والتحتية المعلمات 1587
50.4 عنصر تفاضلي في نظام إحداثيات منحنية 1591
50.5 حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين 1591
50.6 عنصر ذو يعقوبيات قد تصبح مفردة 1592
50.7 التكامل العددي بطريقة نيوتن–كوتس 1597
50.8 تكامل غاوس–ليجاندر على سطح 1601
50.9 التكامل العددي على مثلث 1601
50.10الاستقراء من نقاط غاوس لعنصر رباعي ذي أربع عقد (Felippa, 1999) 1602
50.11تحميل الجاذبية 1604
50.12حمل الشد السطحي في العناصر متساوية المعلمات 1605
50.13حمل الشد السطحي في عناصر متساوية المعلمات متجاورة 1606
50.14أنماط الإزاحة المستقلة لعنصر ثنائي الخطية 1609
50.15أنماط الساعة الرملية في عنصر تربيعي ناقص التكامل 1609
50.16عنصر مستطيل ثنائي الخطية خاضع للانحناء؛ العنصر ثنائي الخطية والهندسة الصحيحة 1610
50.17الإزاحات المرتبطة بالأنماط غير المتوافقة لعنصر Q6 1611
50.18إزاحات الحواف الناتجة من درجات حرية الثقب 1612

52.1 الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية 1632

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.2 تقليل الإزاحات غير المقيدة عند إهمال الصلابة المحورية . . . 1633
52.3 نمذجة مبنى للحمل الزلزالي . . . 1633
52.4 مخطط الجسم الحر لعقدة . . . 1634
52.5 التخميد المتناسب مع الكتلة والصلابة . . . 1640
52.6 طريقتا أويلر الأمامية والخلفية . . . 1644

53.1 اللاخطية الهندسية: مثال على الانحراف الكبير (B)، 29.2.3 . . . 1663
53.2 اللاخطية المادية: نماذج الألياف (D) . . . 1664
53.3 اللاخطية المادية: استجابة المقطع (D) . . . 1664
53.4 التحليل الخطي مقابل التحليل اللاخطي . . . 1665
53.5 أنواع التحليل الإنشائي . . . 1666
53.6 منحنى الحمل–الانحراف ومجالات الاستجابة المختلفة . . . 1669
53.7 مدونات التصميم في العصور القديمة . . . 1671
53.8 *Beton-Reglement f ur Eisenbetonbau* . . . 1672
53.9 أمثلة لمدونات التصميم الحديثة . . . 1673
53.10مستويات الأداء . . . 1675
53.11مقارنة أطر التصميم المختلفة . . . 1676

54.1 تعريف سطح الخضوع . . . 1679
54.2 نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي . . . 1680
54.3 سطوح خضوع تعتمد على الضغط . . . 1681
54.4 نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي . . . 1683
54.5 الإجهاد–الانفعال للمعادن؛ تأثير Bauschinger . . . 1683
54.6 الشقوق المجهرية في الخرسانة . . . 1684
54.7 الروابط الكيميائية . . . 1685
54.8 الروابط المطيلة والهشة . . . 1685
54.9 الانخلاع . . . 1686
54.10استجابة الإجهاد–الانفعال المرنة–اللدنة . . . 1687
54.11نماذج التصلد . . . 1688

55.1 مقطع عرضي اعتباطي لتحديد $M - \Phi$ . . . 1709
55.2 إجراء تزايدي لتحديد $M - \Phi$ تحليليًا . . . 1710
55.3 مخططا العزم–الانحناء والعزم–القوة المحورية (التفاعل) . . . 1716
55.4 تقسيم مقطع عرضي إلى طبقات . . . 1717
55.5 نهج تزايدي لتحديد $M - \Phi$ عدديًا . . . 1719

56.1 خطوط الخضوع في البلاطات . . . 1739
56.2 تحديد خطوط الخضوع في البلاطات المستطيلة . . . 1741
56.3 حل الحد الأدنى السكوني مقابل تحليل الدفع . . . 1744

58.1 طريقة Newton . . . 1754
58.2 مخطط التكامل الصريح . . . 1761
58.3 شرح طريقة Newton للتحكم بالحمل . . . 1764

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.4 طريقة Newton-Raphson للتحكم بالحمل 1766
58.5 طريقة Newton-Raphson المعدلة، المماس الابتدائي 1767
58.6 طريقة القاطع التزايدي، أو quasi-Newton 1768
58.7 طريقة Newton؛ التحكم بالحمل في مقابل التحكم بالإزاحة 1771
58.8 طريقة Newton؛ التحكم بالإزاحة، قارن بالشكل 58.3 1772
58.9 طريقة Newton-Raphson؛ التحكم بالإزاحة 1773

59.1 مستويات التحليل الإنشائي 1788
59.2 النهج الصريح التزايدي للاخطية الهندسية 1789
59.3 تحديد حمل الانبعاج من دون مصفوفة الصلابة الهندسية 1794

60.1 نظام الإحداثيات لجمالون 2D 1801
60.2 القوى الداخلية والإزاحات المقابلة لطريقة 2D القائمة على الصلابة 1805
60.3 تحديد الحالة للطريقة القائمة على الصلابة 1807
60.4 مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على الصلابة 1809
60.5 المقاطع الليفية - توزيع مقاطع التحكم وتقسيم المقطع إلى ألياف 1813
60.6 توزيع الإجهاد اللاخطي في المقطع العرضي 1814
60.7 عنصر إطار 2D من دون أنماط الجسم الصلب 1815
60.8 اصطلاح الإشارة لقوة المقطع 1816
60.9 القوى الداخلية والإزاحات المقابلة لطريقة 2D القائمة على المرونة 1819
60.10العلاقة بين وجود أنماط الجسم الصلب وغيابها 1819
60.11تحديد الحالة للطريقة القائمة على المرونة من دون تكرار العنصر 1821
60.12تحديد الحالة (Taucer, Spacone **and** Filippou, 1991a) 1824
60.13تحديد حالتي العنصر والمقطع 1825
60.14مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة من دون تكرار العنصر 1836
60.15مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة مع تكرار العنصر . . . 1837
60.16مقارنة الصياغة القائمة على الصلابة مقابل الصياغة القائمة على المرونة 1838
60.17عنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذو طول صفري 1839
60.18مخطط انسيابي لعنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي طول صفري لتحديد حالة العنصر . . . 1841
60.19عنصر مقطعي ذو طول صفري، الاتزان 1843
60.20نظام الإحداثيات لعنصر مقطعي ذي طول صفري 1844
60.21مخطط انسيابي للعنصر المقطعي ذي الطول الصفري 1846

61.1 نماذج الدونة المجمعة والموزعة 1849
61.2 نماذج التباطؤ 1851
61.3 مقارنة معامل المماس؛ الدونة مقابل Menegotto-Pinto 1853
61.4 تحديد النموذج ثنائي الخطية 1854
61.5 مقارنة نماذج الحمل الدوري العكسي: الدونة مقابل Menegotto-Pinto 1855
61.6 نماذج Menegotto Pinto للفولاذ (Menegotto **and** Pinto, 1973) 1856
61.7 التحديد (1) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1858
61.8 التحديد (2) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1859
61.9 التحديد (3) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين 1860

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.10 التحديد (4) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين . 1861
61.11 تأثير الحصر في مقاومة الخرسانة (Richart, Brandtzæg **and** Brown, 1928) . . . 1862
61.12 مقاومة الخرسانة المحصورة مقابل غير المحصورة في الضغط (Mander, Priestley **and** Park, 1988) 1863
61.13 دور الكانات في توفير حصر الخرسانة 1863
61.14 نموذج مادة الخرسانة في الضغط 1865
61.15 نموذج مادة الخرسانة تحت التحميل الدوري في الضغط 1867
61.16 نموذج مادة الخرسانة تحت التحميل الدوري في الشد 1869
61.17 التحديد (1) لنموذج Kent وPark المعدل 1871
61.18 التحديد (2) لنموذج Kent وPark المعدل 1872
61.19 الشقوق الناتجة من الضغط والشد والشد والضغط 1874
61.20 منحنى الانفعال–الإجهاد لنموذج الضرر متباين الخواص من دون انفعال دائم 1880
61.21 التحديد (1) لنموذج الضرر متباين الخواص 1881
61.22 التحديد (2) لنموذج الضرر متباين الخواص 1882
61.23 التحديد (3) لنموذج الضرر متباين الخواص 1883
61.24 منحنى الانفعال–الإجهاد لنموذج الضرر متباين الخواص ذي الانفعال الدائم 1887
61.25 نموذج الانزلاق 1888
61.26 نموذج ترابط مبسط 1890
61.27 منحنى انزلاق الترابط 1890
61.28 موضع المحور المحايد 1892
61.29 تحديد المناطق اللدنة 1893
61.30 ترخيم التشوه الانحنائي لعنصر 1894
61.31 عزم العطالة الفعال في الخرسانة المسلحة 1895
61.32 مواضع الأطوال اللدنة (Park **and** Paulay, 1991) 1897
61.33 إزاحة طرف كمرة كابولية من الخرسانة المسلحة بافتراض الدونة المجمعة 1898
61.34 إزاحة طرف كمرة كابولية فولاذية بافتراض الدونة المجمعة 1900
61.35 نموذج دونة مجمعة مع فشل القص 1903
61.36 فشل قص حالة الحد 1904
61.37 استجابة نابض القص 1905
61.38 استجابة عمود حالة الحد 1905
61.39 استجابات حالة الحد المنفردة 1906
61.40 دورة تباطؤ ممثلة 1907
61.41 فقد المقاومة بسبب تليين الانفعال 1908
61.42 تدهور المقاومة تحت التحميل الدوري العكسي 1908
61.43 العمود الفقري لنموذج التباطؤ 1909
61.44 منحنى العمود الفقري للانحناء (Ghannoum, 2020) 1910
61.45 النموذجان الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر 1911
61.46 الدورة الأساسية للنموذج الموجه نحو الذروة 1912
61.47 انعكاس الحمل وتحديث الحالة المستهدفة 1912
61.48 تاريخ حمل دوري متزايد يتبع النموذج الموجه نحو الذروة 1913
61.49 الدورة الأساسية لنموذج التخصر 1914
61.50 تحديد نقطة الانكسار 1914

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.51 تحديد نقطة الانكسار الأولى 1916
61.52 تحديث نقطة الانكسار 1916
61.53 إعادة التحميل بعد نقطة الانكسار 1917
61.54 تاريخ تحميل دوري متزايد يتبع نموذج التخصر 1918
61.55 نتائج المختبر الإنشائي في UCSD (Ibarra, 2004) 1918
61.56 نمط تدهور المقاومة الأساسية 1920
61.57 نمط تدهور المقاومة بعد التغطية 1921
61.58 نمط تدهور صلابة التفريغ 1923
61.59 انقطاع التفريغ 1923
61.60 نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل 1924
61.61 منحنى العمود الفقري (Ghorbani **andothers**, 2022) 1926
61.62 نموذج تباطؤ قائم على spline تكعيبي (Suselo, 2021) 1927

62.1 عملية العناصر المحددة (مستوحاة من Bathe, 1996) 1930
62.2 تعقيد النموذج الموزع بانتظام 1931
62.3 مخاطر التحليل الخطي مقارنة بالتحليل اللاخطي 1931
62.4 العناصر المحددة للتحليل اللاخطي للإطارات 1935
62.5 وصلة نهاية العمود 1935
62.6 عناصر الكمرة أو العمود 1937
62.7 وصلات العمود–الكمرة 1938
62.8 نمذجة المقطع العرضي إلى طبقات 1941
62.9 نموذج كابولي مثالي لكمرة–عمود خرسانية مسلحة (Haselton **andothers**, 2016) 1944
62.10 أنواع الحصر (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) 1944
62.11 واجهة المستخدم الرسومية لقاعدة بيانات الأداء الإنشائي Peer (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) 1945

63.1 مقارنة بين MCS وLHS 1962
63.2 مثال لمسار واحد من أجل $k = 2$. 1970
63.3 نقاط متراكبة أو متكتلة تقاربياً من مسارات Morris مختلفة. 1971
63.4 متغير عشوائي ودالة توزيعه التراكمي (CDF). 1972
63.5 استجابة دورية لمتغير عشوائي x_i. قد تفشل أحجام الخطوات الثابتة في اكتشاف التغيرات الدورية. 1972
63.6 مقارنة بين طريقتي المسار (أ) والنقاط الشعاعية (ب) من أجل $k = 3$ متغيرات عشوائية في فضاء الكميات الفائق. 1973
63.7 التهيئة وما بعد التهيئة في إجراء الفرز المعدل بالنقاط الشعاعية 1977
63.8 مثال على ترتيب الحساسية (Gakuhari, 2021) 1981
63.9 يحدد تحليل الحساسية المعاملات المرشحة؛ ويحدد تعيين المعاملات القيم التي تدعمها المشاهدات 1982

64.1 مبدأ نهج تعيين النظام: تحسين تكراري للمعاملات لتقليل عدم التطابق بين النموذج والبيانات 1985
64.2 مثال توضيحي للانحدار الخطي باستخدام RANSAC 1988
64.3 تطبيق RANSAC على تدهور الخرسانة: دراسة حالة (Gakuhari, 2021) 1989

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

64.4 مخطط تدفق إجراء تعيين المعاملات 2001
64.5 واجهة مستخدم رسومية لدالة بواقي واحدة وخمسة متغيرات. انظر الشكل 64.7 لمثال أشمل. 2002
64.6 ملف بيانات الإدخال لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية بطريقة Levenberg–Marquardt 2004
64.7 لوحة معلومات لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية بطريقة Levenberg–Marquardt: 12 هدفاً متنبأ به و8 متغيرات. 2007
64.8 تكامل توصيف الموقع، وتطوير النموذج، وعدم اليقين، وتعيين المعاملات، والتحليل الإنشائي، وتقييم الهشاشة 2011

65.1 المكونات الأربعة لـPBEE 2016

66.1 قانون تكرار Gutenberg-Richter (المحدود) 2019
66.2 تصنيف المصادر الزلزالية 2020
66.3 تصنيف المسافات من الموقع إلى المصدر 2023
66.4 دراسة بارامترية لـ GMPE 2023
66.5 تحليل الخطر الزلزالي الحتمي 2024
66.6 تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي 2026
66.7 نموذج Poisson الاحتمالي 2027
66.8 عينة من منحنيات الخطر الزلزالي المتوسطة والكسرية 2028
66.9 عينات من خرائط الخطر الأمريكية 2030
66.10عينات من مخططات التفكيك الزلزالي لجامعة Colorado Boulder 2031
66.11مقارنة أطياف استجابة مختلفة 2031
66.12مقارنة اختيار الحركة الأرضية وتحجيمها لـIBPA وSBPA وTBPA 2033
66.13عينة من ETEF 2039
66.14قيمة CAV لـETA40lc01 مقابل القيمة المستهدفة 2041
66.15الطاقة الهستيرية لـETA20kd01 مقابل القيمة المستهدفة 2042

67.1 منحنى الخطر. يوضح المخطط الأيسر مفهوم فترات العودة، بينما يبين المخطط الأيمن منحنى خطر لموقع معين. 2050
67.2 سطح تحليل الخطر الزلزالي الهندسي 2053
67.3 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA). 2053

68.1 الطبيعة الاحتمالية للسعة والطلب 2058
68.2 منحنى السعة 2061
68.3 الأحمال الجانبية لتحليل الدفع 2062
68.4 موقع الجسر وصورته 2067
68.5 أبعاد الأعمدة والركيزة 2069
68.6 القطاعات العرضية للأعمدة والخازوق 2070
68.7 علاقة الإجهاد-الانفعال للتحميل الرتيب للخرسانة المحصورة وغير المحصورة (Mander, Priestley **and** Park, 1988) 2071
68.8 الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2072
68.9 منحنيات العزم-الانحناء والعزوم اللدنة 2073

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68.10 تحليل طيف الاستجابة (C_S) 2077
68.11 تحليل طيف استجابة الإزاحة 2077
68.12 عناصر مقاومة الزلازل المسموح بها (AASHTO, Seismic, 2011) (ERES) 2079
68.13 نموذج الإجهاد-الانفعال لفولاذ التسليح 2081
68.14 العزم-الانحناء (مقتبس من (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2082
68.15 توزيع العزم على ارتفاع الركيزة 2083
68.16 الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. 4.9-2c 2084
68.17 نموذج Risa 2086
68.18 مخطط التفاعل للأعمدة الثلاثة المطلوبة 2087
68.19 العزوم اللدنة 2088
68.20 تعريف Caltran للخازوق (CALTRANS, 2013) 2090
68.21 النموذج المرن المعدل بعد تشكل المفصل اللدن الأول 2092
68.22 النموذج المرن المعدل بعد تشكل المفصل اللدن الثاني 2093
68.23 آلية الانهيار مع تشكل 4 مفاصل لدنة 2094
68.24 منحنيات مفاهيمية لهشاشة الانهيار قائمة على طريقة IDA 2097
68.25 منحنيات مفاهيمية لهشاشة الانهيار قائمة على طريقة MSA 2099
68.26 توليد دالة السعة القائمة على ETA 2102
68.27 إبراز أربع استراتيجيات مختلفة (Hariri-Ardebili, Saouma **and** Porter, 2016) . . 2104
68.28 التعقيدات النسبية للتحليل الزلزالي 2105

69.1 العلاقات بين DI ومتغيري DV (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) 2114
69.2 PBEE: الصورة الكبرى 2115
69.3 الحد الأدنى الموصى به لأهداف تصميم الأداء الزلزالي للمباني (Porter, 2003) 2118

71.1 وصف مفاهيمي للجيل الأول من PBEE؛ (Whittaker03, Hamburger **and** Mahoney, 2003) 2126
71.2 رسوم توضيحية لمستويات الأداء المنفصلة، (FEMA, 2012) 2126
71.3 المكونات الأربعة لـPBEE 2129
71.4 مقارنة منحنيات الهشاشة الزلزالية وقابلية التأثر والخطر 2134
71.5 العلاقة بين منحنى الهشاشة ومصفوفة احتمال الضرر 2137
71.6 جوانب مختلفة من سطوح الهشاشة الزلزالية 2137

B.1 أثر حمل الرياح في المنشآت (Schueller, 1996) 2150
B.2 ضغط الرياح التصميمي التقريبي للمنشآت العادية 2151
B.3 اهتزازات مبنى 2153
B.4 المناطق الزلزالية في الولايات المتحدة (ICBO, 1994) 2154
B.5 حمل الشاحنة 2162
B.6 وضع الأحمال لتعظيم العزوم 2165

D.1 هندسة القوس الدائري 2172
D.2 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز 2173
D.3 علاقة β بـθ 2175

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.4 مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز 2176
D.5 مخططات القوى الداخلية لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز 2179
D.6 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2180
D.7 مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2181
D.8 مخططات قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2183
D.9 مخططات قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام 2186
D.10 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة 2187
D.11 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة 2187
D.12 SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2187
D.13 SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . 2187
D.14 SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2187
D.15 قوس دائري ثلاثي المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام 2188
D.16 قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر 2188
D.17 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز 2189
D.18 قوس دائري ثنائي المفاصل بعد إزالة الدفع الزائد عند المسند B 2191
D.19 قوس دائري ثنائي المفاصل مع قوة افتراضية مؤثرة 2193
D.20 مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي ثنائي المفاصل تحت حمل مركز 2195
D.21 مخطط الجسم الحر لحساب الانحراف في قوس دائري ثنائي المفاصل 2199
D.22 مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز 2199
D.23 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2200
D.24 مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثنائي المفاصل بعد إزالة الدفع الزائد عند المسند B . . 2201
D.25 مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2204
D.26 مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2207
D.27 مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام 2211
D.28 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة 2211
D.29 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة 2212
D.30 SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2212
D.31 SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي . . 2212
D.32 SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي 2212
D.33 قوس دائري ثنائي المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام 2213
D.34 قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر 2213
D.35 قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز 2214
D.36 قوس دائري عديم المفاصل مع عزم افتراضي عند B 2217
D.37 قوس دائري عديم المفاصل مع عزم افتراضي عند A 2217
D.38 مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي عديم المفاصل تحت حمل مركز 2223
D.39 مخططات قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز 2228
D.40 قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2229
D.41 القوى الداخلية في قوس دائري عديم المفاصل 2233
D.42 مخططات قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2236
D.43 مخططات القوس الدائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام 2241
D.44 قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة 2241

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.45 قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة . . . 2241
D.46 SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2242
D.47 SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي . . 2242
D.48 SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي 2242
D.49 قوس دائري عديم المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام 2242
D.50 قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر 2243

K.1 أمثلة لإشارات رشحت بمرشحات باتروورث 2804
K.2 مقارنة مرشحات باتروورث لقيم مختلفة من n 2806

M.1 ترابط المفاهيم الداخلة في التحليل الاحتمالي (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) 2836
M.2 مفهوم فضاء العينة والأحداث المتنافية (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) . . 2837
M.3 مقارنة المدرجات التكرارية الناتجة من ثلاث مجموعات، في كل منها 100 عينة 2838
M.4 مقارنة المدرجات التكرارية لعدد عينات يتراوح من 1,000 إلى 100,000 2838
M.5 أمثلة لثلاث دوال توزيع مستمرة 2839
M.6 العلاقة بين دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي 2840
M.7 العلاقة بين دالة كثافة احتمالية محدودة ودالة التوزيع التراكمي 2840
M.8 توضيح فترة الثقة 2841
M.9 توضيح المتوسط والوسيط 2841
M.10 توضيح الانحراف المعياري 2842
M.11 توضيح الالتواء والتفرطح 2843
M.12 توضيح معاملات الارتباط 2844
M.13 مقارنة بين دوال التوزيع الاحتمالية (والتراكمية) المختلفة 2849
M.14 التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير 2850
M.15 أثر معامل الارتباط ρ في التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير 2851

N.1 تعريف مؤشر الموثوقية 2852
N.2 احتمال الفشل بدلالة مؤشر الموثوقية β 2855

O.1 تحويل المتجهات 2863
O.2 الاتجاهات الرئيسة لموتر من الرتبة الثانية 2864
O.3 المستوى ثماني السطوح 2866
O.4 القوى السطحية 2867
O.5 كوشي: من رباعي السطوح إلى الإجهاد 2868
O.6 التمثيل الهندسي للإجهاد 2870
O.7 متجهات الموضع والإزاحة 2871
O.8 التدفق عبر المساحة $\mathrm{d}S$ 2874
O.9 اتزان الإجهادات في الإحداثيات الديكارتية 2877
O.10 لوحة من محاضرة هوك عن النوابض 2880
O.11 أنماط التحكم في الاختبار 2883
O.12 منحنيات الإجهاد–الانفعال للمعادن والخرسانة 2884
O.13 الرصد التجريبي للتمركز في عينات خرسانية محملة أحاديًا 2885
O.14 نموذج هيلربورغ للشق الوهمي 2886

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

O.15 نماذج تليّن انفعال الخرسانة 2887
O.16 مكونات مخطط تونتي (Felippa, 2000) 2889
O.17 مخطط تونتي لميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه 2890
O.18 القوى الداخلية بدلالة الإجهادات 2891

P.1 شق في صفيحة لانهائية 2895
P.2 أنماط إزاحة الشق المستقلة 2900
P.3 الضغوط على السد الناتجة من الفعل الديناميكي للماء (Westergaard, 1933) 2906
P.4 التوزيع التقريبي للضغوط (Westergaard, 1933) 2908
P.5 جسم الماء الذي يمكن اعتباره متحركاً مع السد (Westergaard, 1933) 2911
P.6 الكتلة المركزة لكل وحدة مساحة بدلالة الارتفاع 2912

Q.1 خوارزمية نطاق الثقة 2915
Q.2 مخطط انسيابي لإجراء تعيين المعاملات 2920
Q.3 واجهة المستخدم الرسومية لتعيين معاملات تفاعل القلويات مع الركام (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021) 2921

R.1 اشتقاق متجه الموضع $\mathbf{p}$ 2923
R.2 انحناء منحنى 2923
R.3 حقل متجهي يعبر منطقة صلبة 2924
R.4 التدفق عبر المساحة dA 2925
R.5 عنصر متناهي الصغر لحساب التباعد 2925
R.6 تدرج متجه 2930

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الجداول: الأجزاء II–IV (التحليل)

18.1 معاملات التمدد الحراري 750

20.1 التحديد الاستاتيكي واستقرار الجمالونات 786
20.2 معادلات الاتزان المنطبقة على الجمالونات 786

22.1 التناظر بين مجموعتي العلاقات 854
22.2 شروط الحدود للكمرة المرافقة 854

25.1 حدود الحمل للحمل المركز والحمل المنتظم 928

26.1 مقارنة طريقتي الصلابة والمرونة 931
26.2 مقارنة تحليلي الصلابة والمرونة 932
26.3 القوى العقدية المكافئة للأحمال البسيطة 936

29.1 الشروط الحدية الأساسية والطبيعية للأعمدة 980

32.1 مقارنة المعادلات الحاكمة في المرونة وانحناء البلاطات (Wilkey **and** Wunderlich, 1994) 1092

33.1 ملخص المعادلات والمجاهيل في القشريات الرقيقة 1100
33.2 الإسهامات المنفردة في معادلات اتزان القشريات الرقيقة 1100
33.3 ملخص المعادلات الرئيسة الحاكمة للقشريات الرقيقة 1115
33.4 افتراضات ومعادلات حاكمة للمنشآت الغشائية 1123
33.5 مقارنة توزيعات محصلات إجهاد الغشاء تحت أحمال مختلفة 1127
33.6 مقارنة حلي الغشاء والقشرة الضحلة للحمل المنتظم 1140
33.7 معاملات القشرة (ϕ مقاسة من التاج) 1146

35.1 القيم المستهدفة لمؤشر الموثوقية 1206

37.1 مقارنة بين النظام الفرعي للنواة وجدار القص وجدار القص الجملوني 1271

39.1 درجتا عدم التحديد الاستاتيكي والحركي 1328
39.2 الشروط الحدية الأساسية والطبيعية 1329

42.1 تحويلات العناصر الخطية ثلاثية الأبعاد 1380

43.1 تقطيع المنشآت 1388

44.1 تأثير المصفوفات سيئة التكييف 1417

45.1 تعريف قوى العناصر الداخلية في مصفوفة الاتزان 1425
45.2 شروط التحديد الاستاتيكي وعدم الاستقرار الحركي 1432

46.1 الدواليات في المرونة الخطية 1492
46.2 مقارنة بين صياغتَي الطاقة الكامنة الكلية وهو–واشيزو 1494

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.1 ملخص معادلات الشغل الافتراضي والمتمم والطاقة الكامنة والمتممة 1512
47.2 المساران البديلان لمبدأ الشغل الافتراضي ومبدئه المتمم 1513

48.1 تفسير دوال الشكل بدلالة سلاسل متعددات الحدود في بعد واحد وبعدين 1545
48.2 حدود متعددات الحدود في صيغ العناصر المختلفة في بعد واحد وبعدين 1546
48.3 خصائص دوال الشكل لعنصر الكمرة 1563
48.4 دوال الشكل ومشتقاتها الطبيعية للعنصر q8 1568
48.5 الإحداثيات العقدية الطبيعية للعنصر q9 1569
48.6 دوال الشكل للعناصر ذات العدد المتغير من العقد 1571
48.7 دوال الشكل ومشتقاتها للعنصر T6 1572

50.1 أوزان صيغ تربيع نيوتن–كوتس 1598
50.2 نقاط التكامل وأوزان تربيع غاوس على المجال $[-1, 1]$ 1599
50.3 إحداثيات وأوزان التكامل العددي على مثلث 1601
50.4 الإحداثيات الطبيعية لعقد العنصر الرباعي ثنائي الخطية 1602
50.5 التكامل العددي الكامل والمخفَّض للعناصر الرباعية 1608
50.6 الإزاحات والانفعالات ثنائية الخطية والدقيقة 1610

52.1 شروط الاستقرار للطرائق المختلفة 1646
52.2 نسب تخميد ممثلة لفئات مختلفة من المنشآت 1659

53.1 تصنيف مستويات التحليل الإنشائي 1666
53.2 الترابط بين مستويات التحليل المختلفة 1667

56.1 مقارنة النهجين الحركي والسكوني لتحليل الحمل الحدي 1723
56.2 مقارنة تحليل الحد الأدنى وتحليل الدفع 1746
56.3 اللدونة المركزة وتحليل الحد الأدنى 1748

58.1 التناظر بين طريقة quasi-Newton في الرياضيات والتحليل الضمني في ميكانيكا المنشآت 1763
58.2 تنويعات طريقة Newton-Raphson 1767
58.3 مقارنة خوارزميات التحكم بالحمل في التحليل اللاخطي 1770

60.1 تحديد الحالة متعدد المستويات 1806
60.2 مقارنة العناصر القائمة على المرونة بالعناصر القائمة على الصلابة 1835

61.1 خصائص المرونة والمقاومة للخرسانة المحصورة مقابل غير المحصورة 1866
61.2 معامل المماس 1910

62.1 وصلات الأعمدة 1936
62.2 توافق الوصلة–العنصر 1936
62.3 خيارات نمذجة "اختر وثبّت" 1941
62.4 قياس التدهور 1942
62.5 خصائص المادة 1945

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.6 تصنيف المقطع العرضي 1945
62.7 أكواد نمط الفشل 1946
62.8 هندسة العمود 1946
62.9 تفاصيل الحصر 1946
62.10 تفاصيل الحصر 1947
62.11 ملخص اختبارات الأعمدة المستطيلة المسلحة (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) 1948
62.12 نتائج دراسة المعايرة لـ 30 اختباراً تجريبياً (Haselton **andothers,** 2008) 1950

63.1 المصطلحات المعتمدة في هذا الكتاب لتكميم عدم اليقين وتحليل عدم اليقين 1956
63.2 أوصاف نوعية توضيحية لمقدار معامل ارتباط Pearson 1958
63.3 مقارنة بين MCS وLHS 1961
63.4 مقارنة طرائق نشر عدم اليقين والحساسية 1976
63.5 الأدوار المتميزة والمتكاملة لتحليل الحساسية وتعيين المعاملات 1982

64.1 مدخلات تكوين تمثيلية في `Log.xlsx` 2004
64.2 الدوال الرئيسية في برنامج تعيين المعاملات 2008
64.3 الدوال المساعدة الخاصة التي يستخدمها قارئ جدول البيانات وطبقة التجميع 2008
64.4 الحقول الرئيسية لبنية التكوين `S` 2008
64.5 متغيرات مختارة لزمن التشغيل في `ParIdentification.m` 2008

66.1 المعاملات المعتمدة على الفترة لنموذج Boore, Joyner **and** Fumal, 1997 2022
66.2 تقدير V_S استناداً إلى صنف الموقع 2022

68.1 مقارنة تحليل الدفع بالتحليل الزلزالي 2064
68.2 طيف استجابة التصميم لمنشآت مدخل NJ 2068
68.3 التحليلات المتتابعة لتحليل الدفع 2075
68.4 خصائص الإجهاد لقضبان فولاذ التسليح (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) 2081
68.5 سعات العزم للمقاطع الثلاثة المختلفة ضمن نطاق من القوى المحورية 2087
68.6 نتائج التحليل؛ بلا مفاصل 2091
68.7 ضبط القص المؤدي إلى تشكل المفصل الأول 2092
68.8 نتائج التحليل؛ مفصل واحد 2092
68.9 ضبط القص المؤدي إلى المفصل الثاني 2093
68.10 نتائج التحليل؛ مفصلان 2093
68.11 ضبط القص المؤدي إلى المفصلين الثالث والرابع 2094
68.12 مجموع القوى والعزوم والإزاحات عند الفشل 2095
68.13 مقارنة طرائق التحليل الإنشائي الزلزالي 2104

69.1 نسب الانجراف المسموح بها بين الطوابق (IDR) لمستويات أداء مختلفة وفق ASCE 41-17 2118
69.2 عتبات مؤشر الضرر والحالات الإنشائية المقابلة 2119
69.3 عتبات نسبة الطلب إلى السعة (DCR) وفق FEMA 356 2119

71.1 نطاق ضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية لمستويات أداء مستهدفة مختلفة للمباني (الجدول FEMA-356, 2000) (C1-2) 2127

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71.2 مقارنة بين PBEE 1 وPBEE 2 2131
71.3 مقارنة تمثيلات الهشاشة المستمرة والمنفصلة 2137
71.4 الوثائق الأساسية في التطور التاريخي لهندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE). . . . 2143

B.1 الوزن الحجمي للمواد 2149
B.2 متوسط الحمل الميت الإجمالي في المباني 2149
B.3 أوزان مواد البناء 2155
B.4 الحد الأدنى للأحمال الحية الموزعة بانتظام (ICBO, 1994) 2156
B.5 تغير سرعة الرياح فوق سطح الأرض 2156
B.6 معاملات C_e لأحمال الرياح (ICBO, 1994) 2156
B.7 معاملات ضغط الرياح C_q (ICBO, 1994) 2157
B.8 معاملات الأهمية لأحمال الرياح والزلازل (ICBO, 1994) 2157
B.9 ضغط الرياح التصميمي التقريبي p للمنشآت العادية المقاومة للرياح 2158
B.10 معاملات Z للمناطق الزلزالية المختلفة UBC1994 2158
B.11 معاملات الموقع S للأحمال الزلزالية (ICBO, 1994) 2158
B.12 قائمة جزئية لقيم R_W للأنظمة الإنشائية (ICBO, 1994) 2159

G.1 إحداثيات عقد جسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2288
G.2 خصائص عناصر جسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2289
G.3 الشروط الحدية لجسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2290
G.4 تركيبات أحمال جسر ألاميو (Pollalis, 1999) 2290

L.1 طرائق حل المعادلات الخطية 2814
L.2 التكييف المسبق؛ مقارنة بين الأيسر والأيمن 2824
L.3 مقارنة التكييف المسبق للمصفوفة بتحليل القيم المفردة (SVD) 2826

N.1 قيم مختارة للمنشآت الفولاذية والخرسانية 2854
N.2 موثوقية المنشآت الفولاذية والخرسانية 2854

O.1 أنظمة الترميز 2858
O.2 تمثيلات الانفعال 2871
O.3 أمثلة للشروط الحدية في التحليل الإنشائي 2889

P.1 النتائج العددية المقابلة للدور $T = \frac{4}{3}$ ثانية 2906

R.1 أوجه التشابه بين مؤثرات الضرب والاشتقاق 2922

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة الأمثلة: الأجزاء II–IV (التحليل)

18.1 حمل هيدروستاتيكي 748
18.2 التمدد والإجهاد الحراريان 750
18.3 المساحات التابعة 758
19.1 حمل هيدروستاتيكي 766
19.2 انتقال الأحمال 767
19.3 كمرة بسيطة الارتكاز 768
19.4 حمل مكافئ للقطع المكافئ 768
19.5 كمرة ذات ثلاثة بحور 769
19.6 إطار جملوني ذو ثلاثة مفاصل 770
19.7 مساند مائلة 772
19.8 منشأ شبكي 773
19.9 اتزان طائرة 774
19.10 بارجة ضخمة 775
19.11 وانكين: اتزان جسم طافٍ، برهان هيدروستاتيكي 778
19.12 قصر الرياضة؛ نيرفي 780
20.1 تحليل جمالون بطريقة العقد 788
20.2 جمالون ثلاثي الأبعاد 791
20.3 طريقة المقاطع 795
20.4 جمالون بسيط بطريقة العقد والمصفوفة 797
20.5 جمالون معقد بطريقة العقد والمصفوفة 799
21.1 كمرة ذات حمل مائل 810
21.2 إطار مائل 812
21.3 إطار تحت حمل هيدروستاتيكي 814
21.4 حمل متغير خطياً 816
21.5 إطار ذو سقف مائل 817
21.6 إطار تبادلي 817
21.7 إطار ثلاثي الأبعاد 821
22.1 التكامل المزدوج 828
22.2 الانحراف الأقصى 829
22.3 الشكل الأمثل للزلاجة 830
22.4 كمرة طافية 830
22.5 عجلة الدراجة 835
22.6 صلابة نابض حلزوني 841
22.7 مفتاح ثنائي المعدن 843
22.8 مساحة الانحناء، كمرة كابولية 847
22.9 العزم–الانحناء، كمرة بسيطة الارتكاز 847
22.10 الانحراف الأقصى 849
22.11 إطار خاضع لحمل حراري 850
22.12 طول اللدونة 853
22.13 كمرة مرافقة؛ حمل مركز 855

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22.14كمرة مرافقة؛ I متغير 856
23.1انحراف كمرة كابولية 860
23.2اللي غير المنتظم لمقطع على شكل I 870
24.1كمرة 880
24.2إطار؛ الانحرافات 881
24.3إطار؛ الدوران 883
24.4ركيزة انحنائية 884
24.5كمرة كابولية مدعومة بكابل 885
24.6تشوهات اللي والانحناء 886
24.7تشوها الانحناء والقص في كمرة 888
24.8التأثيرات الحرارية في كمرة 889
24.9خط أنابيب 890
24.10جملون؛ بسيط 891
24.11جملون؛ معقد 892
24.12جملون بتحدب ابتدائي 893
24.13جملون بإجهادات ثانوية 894
24.14حلقة دائرية 896
24.15نابض 898
25.1كمرة ذات قضيب ربط 908
25.2تحليل إطار مبنى فولاذي 909
25.3جملون ذو قوة زائدة واحدة 913
25.4جملون ذو قوتين زائدتين 915
25.5جملون تحت حمل حراري 917
25.6كمرة مسندة على نابض 919
25.7الدعامة الملكية 920
25.8مصفوفة المرونة؛ كمرة منحنية 922
25.9كمرة مستمرة 928
25.10كمرة مستمرة 928
27.1كمرة كابولية 943
27.2كمرة مستمرة 944
27.3كمرة ذات بحرين 945
27.4كمرة ذات بحرين وإزاحة ابتدائية 947
27.5إطار 948
27.6عبّارة صندوقية 950
27.7كمرة مستمرة 955
27.8الميل والانحراف/توزيع العزوم/غاوس–سايدل 957
28.1خطوط التأثير لكمرة بسيطة الارتكاز 960
28.2كمرة بسيطة الارتكاز ذات جزأين بارزين 962
28.3مولر–برسلاو؛ خط تأثير القص 964
28.4مولر–برسلاو؛ خط تأثير العزم 965
29.1عدم الاستقرار الهندسي 967

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

29.2 تأثير الحمل المحوري في التشوه الانحنائي 968
29.3 الانحراف الكبير لكمرة كابولية 970
29.4 انبعاج عمودين صلبين مفصليين 976
29.5 انبعاج عمود مفصلي الطرفين 980
29.6 انبعاج عمود مثبت الطرفين 980
29.7 انبعاج عمود مثبت–مفصلي 982
29.8 عمود ذو مساند مرنة 983
29.9 الانبعاج المقيد 985
29.10 برج مياه 986
30.1 كابل حبلي 996
30.2 كابل حبلي مائل 998
30.3 عربة معلقة بكابلين 999
30.4 هندسة كابل مائل 1012
30.5 قوى كابل مائل 1013
30.6 برج مشدود بكابلات تثبيت 1014
30.7 جسر معلّق 1015
30.8 كابل غير قابل للاستطالة؛ درجة الحرارة 1016
30.9 كابل قابل للاستطالة؛ الترخيم 1017
30.10 كابل قابل للاستطالة؛ تأثير حراري 1017
30.11 كابل قابل للاستطالة؛ الشد المسبق 1019
30.12 ترخيم كابل مائل 1023
30.13 كابل تعليق خط حافلة كهربائية 1024
30.14 المنحنى السلسلي مقابل القطع المكافئ 1027
31.1 قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي؛ حل تحليلي 1031
31.2 قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي 1033
31.3 قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل منتظم 1035
31.4 قوس دائري عديم المفاصل 1037
31.5 القوس المثالي 1053
31.6 قوس مكافئ ثلاثي المفاصل 1054
31.7 قوس مكافئ ثنائي المفاصل متغير المقطع 1054
31.8 قوس مكافئ عديم المفاصل 1060
31.9 حمل حراري على قوس مكافئ 1066
31.10 جائز قوسي 1067
31.11 قوس حلزوني؛ حمل نقطي 1072
32.1 تمثيل البلاطة الرقيقة مقارنة بالبلاطة السميكة 1080
32.2 استرجاع الإجهادات من محصلات عزوم البلاطة 1084
32.3 بلاطة مربعة بسيطة الاستناد تحت ضغط منتظم 1084
32.4 حساسية انحراف البلاطة للسماكة 1085
32.5 بلاطة دائرية مثبتة تحت ضغط منتظم 1089
33.1 مقارنة الغشاء والقشرة الضحلة 1141
33.2 تصميم قشرة أسطوانية 1153
34.1 حساب ω_n وT_n وf_n لنظام أحادي الحرية 1168

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.2 تقدير التخميد من التناقص اللوغاريتمي . . . 1172
34.3 الاستجابة التوافقية: التضخيم والطور . . . 1174
34.4 استجابة نبضة وحدية لنظام مخمد أحادي الحرية . . . 1176
34.5 حمل خطوة مفاجئ: معامل تضخيم ديناميكي مقداره 2 . . . 1177
34.6 حمل نبضة مستطيلة وطيف الصدمة . . . 1178
34.7 الاستجابة الترددية لقوة آلة دورية ذات مركبتين توافقيتين . . . 1181
34.8 التصميم الزلزالي لإطار من طابق واحد باستعمال طيف الاستجابة . . . 1184
34.9 التحليل النمطي لمبنى قص ثلاثي درجات الحرية تحت حمل زلزالي . . . 1187
34.10 التردد الطبيعي لجسر مشاة فولاذي وفحص رنين المشاة . . . 1190
34.11 تخميد اللزج المكافئ من حلقة تخلفية ثنائية الخط . . . 1192
34.12 قلب المطيلية وخفض القوة لإطار خرساني مسلح . . . 1195
34.13 تصميم مخمد كتلة موالف لمبنى عالٍ . . . 1197
34.14 تصميم مبنى مستشفى معزول قاعدياً . . . 1198
35.1 تصميم الانحناء بطريقة ASD . . . 1204
35.2 المقاومة القصوى: مراجعة . . . 1212
35.3 المقاومة القصوى: التصميم الأول . . . 1213
35.4 المقاومة القصوى: التصميم الثاني . . . 1214
35.5 التحليل الدقيق . . . 1215
35.6 عمود خرسانة مسلحة مع معرفة c . . . 1221
35.7 عمود خرسانة مسلحة مع معرفة e . . . 1223
35.8 دراسة حالة: جسر وولنت لين . . . 1226
36.1 تصميم قوس غير محدد سكونياً . . . 1232
36.2 التغيرات الحرارية في قوس . . . 1238
37.1 طريقة البوابة: مبنى قصير . . . 1251
37.2 حل ماتلاب . . . 1263
37.3 طريقة الكابولي: مبنى شاهق . . . 1265
37.4 النظام الفرعي للنواة . . . 1267
37.5 جدار قص خرساني . . . 1268
37.6 جدار قص جملوني . . . 1270
37.7 التقدير التقريبي للانحراف العرضي لمبنى . . . 1276
38.1 مطار دالاس . . . 1280
38.2 برج إيفل . . . 1287
38.3 مخازن ماجازيني جنرالي . . . 1294
38.4 جسر جورج واشنطن . . . 1298
38.5 تصميم قوس ذي مفصلين . . . 1305
38.6 التغيرات الحرارية في قوس . . . 1313
38.7 قوس قطعي مع تغير قاطع الزاوية لـ I . . . 1315
41.1 كمرة متعامدة . . . 1347
41.2 إطار متعامد . . . 1350
41.3 شبكة إنشائية . . . 1357
41.4 إطار هجين . . . 1361
41.5 شبكة إنشائية هجينة . . . 1365

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43.1 إطار 1394
43.2 كمرة 1399
43.3 جمالون 1405
44.1 مصفوفة سيئة التكييف 1418
45.1 مصفوفة اتزان جمالون محدد استاتيكياً 1425
45.2 مصفوفة اتزان كمرة 1426
45.3 مصفوفة اتزان جمالون غير محدد استاتيكياً 1428
45.4 اختيار القوى الزائدة 1429
45.5 مصفوفة الحركة: مثال جمالون 1433
45.6 مصفوفة المرونة 1437
45.7 من المرونة إلى الصلابة 1439
45.8 مصفوفة صلابة عنصر منحنٍ 1440
45.9 التحويل المتطابق 1444
45.10 التحويل المتطابق لإطار 1446
46.1 أويلر: عضو محوري 1478
46.2 أويلر: الانحناء 1481
46.3 هاملتون 1488
47.1 مبدأ الشغل الافتراضي المتمم؛ كمرة كابولية متدرجة 1517
47.2 قوس نصف دائري ثلاثي المفاصل 1518
47.3 مبدأ الشغل الافتراضي؛ كمرة كابولية متدرجة 1521
47.4 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ نابض وكتلة 1525
47.5 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ كمرة مثبتة ذات I متغير 1525
47.6 جملون مرن لاخطي 1528
47.7 مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ كمرة كابولية 1530
47.8 مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة كمرة موزعة الحمل بانتظام 1531
47.9 مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ جملون لاخطي 1531
47.10 مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة نابض 1531
47.11 طريقة مايلي–ريتز؛ كمرة بسيطة الارتكاز موزعة الحمل بانتظام 1533
47.12 طرائق التغايرية 1534
50.1 المؤثرات اليعقوبية 1595
51.1 التحقق من التناظر والتعريف الموجب لعضو محوري أحادي البعد 1615
51.2 اهتزاز وتر 1619
51.3 مصفوفة صلابة عنصر كمرة 1624
51.4 انتقال الحرارة 1626
52.1 محاكاة مونت كارلو للاستجابة المرنة الخطية لمبنى تحت حمل جانبي 1635
52.2 معايرة معاملات تخميد رايلي لمبنى قصي 1640
52.3 خط أساس تحليلي: الاهتزاز الحر من شروط ابتدائية عامة 1641
52.4 طريقة أويلر 1643
52.5 خطوة استقرار الفرق المركزي 1653
52.6 سرعة الموجة والترددات المحورية الطبيعية لقضيب شد فولاذي 1655
54.1 المعامل المماسي 1692

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

55.1تحليل لاخطي للمقطع؛ تحليلي 1698
55.2الطبقات؛ الفولاذ 1702
55.3طبقي؛ الخرسانة/ACI 1706
55.4العزم–الانحناء لمقطع I من الخرسانة المسلحة 1711
56.1جائز مثبت؛ حمل مركزي 1726
56.2جائز مثبت؛ حمل لامركزي 1726
56.3جائز مستمر 1726
56.4إطار متعامد 1727
56.5إطار مائل 1727
56.6كابولي مسنود I 1731
56.7كابولي مسنود II 1732
56.8جائز مثبت 1732
56.9إطار مائل 1733
56.10بلاطة مربعة 1739
56.11بلاطة مستطيلة 1742
58.1طريقة Newton؛ قياسية 1756
58.2طريقة Newton؛ متجه 1759
59.1انبعاج عمود 1779
59.2انبعاج إطار؛ حل Matlab 1781
59.3انبعاج إطار؛ حل Mathematica 1784
59.4أثر الحمل المحوري في التشوه الانحنائي 1785
59.5الانحراف الكبير لكمرة كابولية 1790
59.6حمل الانبعاج من دون $\mathbf{K}_{geom}$ 1794
61.1مفصل لدن في عمود فولاذي 1902
62.1نمذجة العمود 1939
62.2نمذجة الكمرة 1940
63.1مصفوفة الارتباط 1957
63.2المكعب اللاتيني الفائق: مثال محلول بمتغيرين 1963
63.3مثال على طريقة تقدير النقاط 1965
63.4مثال على طريقة الفروق المحدودة بسلسلة Taylor 1966
63.5توسع الفوضى متعدد الحدود 1967
63.6طريقة Morris 1973
63.7طريقة Morris؛ تحديد المتغيرات المهمة 1977
64.1ملاءمة نموذج قطع زائد لاخطي 1992
64.2انحدار بايزي بأساس تربيعي وأخذ عينات Metropolis–Hastings 1998
66.1تحليل الخطر الزلزالي 2043
67.1حسابات فترة العودة 2052
68.1مثال على منحنى الطلب 2065
68.2تحليل الدفع؛ مثال عملي 2066
71.1مثال كامل على PBEE 2138
B.1 حمل الرياح 2151
B.2 حمل زلزالي على إطار 2160

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

B.3 حمل زلزالي على مبنى شاهق 2161
B.4 تخفيض الحمل الحي I 2163
B.5 تخفيض الحمل الحي II 2164
K.1 تحويل فوريه السريع 2808
L.1 حذف غاوس 2826
L.2 حذف غاوس–جوردان 2827
L.3 تحليل **lu** 2828
L.4 تحليل تشوليسكي 2829
L.5 غاوس–سايدل 2830
L.6 غاوس–سايدل 2831
L.7 تحليل القيم المفردة 2831
L.8 التهيئة المسبقة 2832
N.1 مؤشر الموثوقية 2854
R.1 مماس منحنى 2924
R.2 تباعد متجه 2926
R.3 تدرج حقل قياسي I 2927
R.4 تدرج حقل قياسي ii 2928
R.5 تدرج حقل متجهي 2930
R.6 التفسير الفيزيائي لمبرهنة التباعد 2932

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قائمة النقاط الرئيسة: الأجزاء II–IV (التحليل)

17.1 متطلبات التحليل الإنشائي . . . 730
17.2 متطلبات التصميم الإنشائي . . . 731
18.1 شرط إجراء التحليل الديناميكي . . . 746
19.1 معادلات الاتزان . . . 762
19.2 مخطط الجسم الحر . . . 765
21.1 القوى الداخلية في المنشآت . . . 805
21.2 القص؛ الصيغة التفاضلية . . . 808
21.3 العزم؛ الصيغة التفاضلية . . . 809
21.4 القص؛ الصيغة التكاملية . . . 809
21.5 العزم؛ الصيغة التكاملية . . . 809
22.1 المعادلة التفاضلية الحاكمة للانحناء . . . 827
22.2 قضية؛ المبرهنة الأولى لمساحة الانحناء . . . 846
22.3 قضية؛ المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء . . . 846
23.1 تشوه القص . . . 864
23.2 اللي المنتظم وغير المنتظم . . . 868
24.1 القانون الأول للديناميكا الحرارية . . . 876
24.2 مبدأ الشغل الافتراضي (التكميلي) . . . 877
24.3 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل . . . 878
25.1 معادلات المرونة . . . 907
26.1 علاقات القوة–الإزاحة في الكمرة . . . 936
27.1 طريقة الميل والانحراف . . . 943
27.2 توزيع العزوم . . . 954
27.3 توزيع العزوم والميل والانحراف وغاوس–سايدل . . . 957
28.1 خط التأثير . . . 959
28.2 مبدأ مولر–برسلاو . . . 964
30.1 مبرهنة الكابل العامة . . . 997
31.1 مبرهنة إيدي . . . 1031
39.1 درجة الحرية . . . 1325
39.2 درجات حرية العناصر المختلفة . . . 1326
40.1 القوى الداخلية لأنواع العناصر المختلفة . . . 1332
43.1 جوهر طريقة الصلابة المباشرة . . . 1386
44.1 القيم الذاتية لمصفوفة الصلابة . . . 1412
44.2 خصائص مصفوفة صلابة العنصر . . . 1412
44.3 رقم الشرط . . . 1414
44.4 الدقة وسوء التكييف . . . 1417
45.1 علاقة الصلابة والمرونة . . . 1437
45.2 علاقة المرونة والصلابة . . . 1439
45.3 التحويل المتطابق . . . 1443
46.1 مبدأ هاملتون . . . 1485

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.1ينص القانون الأول للديناميكا الحرارية على أن 1501
47.2مبدأ الشغل الافتراضي المتمم 1517
47.3مبدأ الإزاحة الافتراضية 1520
47.4مبدأ القيمة الساكنة للطاقة الكامنة 1524
47.5مبرهنة كاستيليانو الأولى 1527
47.6مبرهنة كاستيليانو الثانية 1530
49.1مصفوفة الصلابة وقوى العنصر 1577
49.2معيار التقارب 1580
56.1مبرهنة الحد الأعلى 1723
56.2مبرهنة الحد الأدنى 1729
62.1دور دراسات العناصر المحددة 1932

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القسم II

مقدمة: الأساسيات والطرائق التحليلية

يقدم هذا المجلد ما قد يكون المعالجة الشاملة الوحيدة للتحليل الإنشائي التي تمتد من المبادئ الأساسية إلى الطرائق الحاسوبية والاحتمالية المتقدمة ضمن إطار موحد واحد. وقد أوليتُ، مع استخدام ترميز متسق ونهج فلسفي مترابط في العمل كله، أهمية كبيرة للأسس النظرية الصارمة، إدراكاً مني أن الفهم العميق للمبادئ الكامنة—لا مجرد المهارة الإجرائية—ضروري للحكم الهندسي السليم ولتطبيق الطرائق بثقة على مسائل تتجاوز ما يصادف في الكتب الدراسية. وهذا ليس عملاً للمهندس هيّاب القلب القانع بمعالجة سطحية؛ فهو يتطلب انخراطاً فكرياً حقيقياً ويكافئه.

ومن الطرائق الكلاسيكية مروراً بمبادئ الطاقة والتحليل الإنشائي بالمصفوفات والعناصر المحددة والتحليل اللاخطي، وصولاً إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء، يبين هذا العمل أن الإتقان الحقيقي للتحليل الإنشائي يقوم على بصيرة نظرية تتجاوز أي أداة حاسوبية أو كود تصميم بعينه.

ينشئ المهندسون أشياء لم توجد بعد. ولا يمكنك أن تبحث في كتاب عما ستفعله. فماذا تفعل؟ تعود إلى النظرية. وهي تتيح لك الاستفادة من كل ما أُنجز من قبل وتركيب شيء جديد، وتمكنك من رؤية أشياء وإقامة روابط لن يراها أحد غيرك.

ينبغي لهذا الجيل من طلاب الهندسة، بوجه خاص، أن يتقن النظرية. ففي الوقت الحاضر يشكل إجراء الحسابات جزءاً كبيراً من عمل المهندس. لكنني أعتقد أن الذكاء الاصطناعي سينقلنا قريباً إلى عصر ما بعد الحساب، حيث يُنجز كل شيء آلياً. وفي ذلك العصر سيبرز حقاً المهندس ذو التعليم النظري العميق.

Baker, 2023 William Baker: Structural Engineer and Problem Solver

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

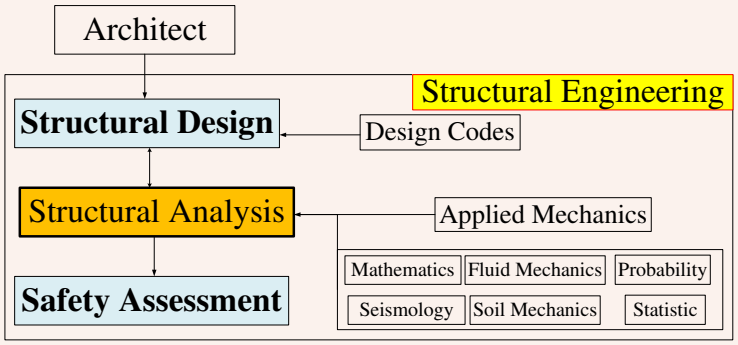
17 مقدمة

ملخص

يقدم هذا الفصل التمهيدي للكتاب الثاني نظرة شاملة إلى مبادئه وتطبيقاته والأدوار المتميزة للمهنيين في صناعة البناء. ويعرض أولاً منظوراً واسعاً للتحليل الإنشائي، ممهداً لاستكشاف الموضوع بعمق أكبر لاحقاً. كما يحدد مسؤوليات المعماريين ووجهات نظرهم بالمقارنة مع المهندسين الإنشائيين. ويُكرس لب الفصل للجوانب الأساسية للهندسة الإنشائية، ومنها التصميم والتحليل وتقييم السلامة. ويمتد النقاش إلى التخصصات المختلفة المترابطة مع التحليل الإنشائي، مؤكداً طبيعة المجال متعددة التخصصات. ويقدم قسم مهم من الفصل مفهوم القوى الداخلية، مقترحاً استخدامها بديلاً مبسطاً من حسابات الإجهاد في بعض السياقات. ويسهّل هذا النهج فهماً أكثر حدسية لكيفية إدارة القوى داخل المنشأ. ثم يستكشف الفصل أنواعاً مختلفة من عناصر نقل الحمل—مثل الكمرات والأعمدة والجمالونات—وأدوارها في توزيع الأحمال في أنحاء المنشأ. ويختتم الفصل أخيراً بدراسة مختلف أنواع المنشآت، من أبسطها إلى أعقدها.

17.1 الصورة الكبرى 727
17.1.1 العمارة 728
17.1.2 الهندسة الإنشائية 728
17.1.3 التخصصات المدمجة في التحليل الإنشائي 731
17.2 العناصر: القوى الداخلية الأساسية 732
17.3 عناصر نقل الأحمال 732
17.4 أنواع المنشآت 733
17.5 تحول الأدوات الهندسية 738
17.6 مقررات الهندسة الإنشائية 739

17.1 الصورة الكبرى



شكل 17.1: التحليل الإنشائي؛ الصورة الكبرى

1 تركز الهندسة الإنشائية، أولاً، على واحدة (أو أكثر) من المهام الآتية، الشكل 17.1:

التصميم لمنشآت em جديدة (سواء كانت مبنى أو طائرة أو غواصة).

التحليل لمنشآت em جديدة (مبانٍ أو طائرات أو غواصات أو غيرها أيضاً).

تقييم السلامة لأي منشأ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17.1.1 العمارة

2 تشمل العمارة فن تصميم المباني وغيرها من المنشآت المادية وإنشائها وعلمه. وهي تتجاوز مجرد البناء لتشمل اعتبارات الجمال والوظيفة والسياق الثقافي والاستدامة البيئية.

3 المعماريون مهنيون مدربون في تصميم المنشآت وتخطيطها، ويعملون عن قرب مع العملاء لتحويل احتياجاتهم ورغباتهم إلى تصاميم معمارية ملموسة.

4 تتضمن العمارة إنشاء فضاءات لا تؤدي أغراضاً عملية فحسب، بل تثير المشاعر وتلهم وتسهم في البيئة المبنية بطرائق ذات معنى.

5 وهي مجال متعدد التخصصات يستمد من مبادئ الهندسة والفن وعلم الاجتماع وعلم النفس والعلوم البيئية لإنشاء منشآت جميلة وظيفية معاً. وتؤدي العمارة دوراً مهماً في تشكيل مدننا ومجتمعاتنا، وتعكس القيم الثقافية والتقدم التقني والطموحات الاجتماعية.

6 يؤكد المعماريون النهج الكلي في التصميم لا النهج القائم على العناصر. ففي عملية التصميم يتصورون مخططاً مكانياً شكلياً بوصفه منظومة كاملة. وهم اختصاصيون عامون.

7 يجب أن يحترم التصميم المعماري قيوداً مختلفة، هي في أساسها القيود نفسها التي وضعها فيتروفيوس قبل ألفي سنة (§6.3.1).

الوظيفة: أثر المنشأ المعتمد في الأغراض التي أُنشئ من أجلها.

الجماليات: كثيراً ما يفرض المعماري اهتماماته الجمالية على المهندس. وقد يضع ذلك بدوره قيوداً شديدة على النظام الإنشائي.

الاقتصاد: ينبغي تذكر أن أكبر مكونين في المنشأ هما العمل والمواد. أما كلفة التصميم فضئيلة نسبياً.

8 اكتسب مصطلح «العمارة» اعترافاً واسعاً في عصر النهضة مع تجدد الاهتمام بالعمارة الكلاسيكية وظهور أساليب ونظريات معمارية جديدة. وأدى معماريون مثل أندريا بالاديو وليون باتيستا ألبيرتي وفيليبو برونليسكي أدواراً حاسمة في تشكيل الخطاب المعماري وترسيخ العمارة مهنة محترمة (الفصل 15).

17.1.2 الهندسة الإنشائية

9 الهندسة الإنشائية فرع لا من الهندسة المدنية وحدها[1]، بل من الهندسة الميكانيكية والبحرية وهندسة الفضاء أيضاً، ويتناول تصميم المنشآت وتحليلها.

10 يتحمل المهندسون الإنشائيون مسؤولية ضمان سلامة المنشآت واستقرارها وقدرتها على تحمل الأحمال والقوى التي قد تتعرض لها خلال عمرها.

11 ويتمثل الدور الأساسي للمهندس الإنشائي في تصميم منشآت تستطيع حمل وزنها الذاتي والأحمال التي قد تتعرض لها بفعل العوامل البيئية.

12 ويجب عليه مراعاة عوامل مختلفة، منها المواد المستخدمة، وكودات البناء واللوائح (حين تنطبق)، والظروف البيئية، والاستخدام المقصود للمنشأ.

[1] تاريخياً لم يوجد إلا نوعان من الهندسة: العسكرية والمدنية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13 كما نوقش في §11.2، لم يظهر مصطلح «الهندسة الإنشائية» إلا في منتصف القرن التاسع عشر امتداداً طبيعياً لمجال الميكانيكا الذي كان ينضج آنذاك (وكان يركز على العناصر الإنشائية المنفردة). بل يمكن القول إن التحليل الإنشائي ليس سوى ميكانيكا مطبقة على منظومات من العناصر.

14 وكان لدينا تاريخياً «بناؤون» أولاً (مثل إمحوتب للأهرامات وبرونليسكي لقبة فلورنسا).

17.1.2.1 التصميم الإنشائي

15 هذه إحدى المهمتين الرئيسيتين اللتين يضطلع بهما المهندسون الإنشائيون.

16 يصمم المهندسون، انطلاقاً من الرسومات المعمارية (سواء لمبنى أو سيارة) والتحليل اللاحق، العناصر الإنشائية لمشروع المبنى أو البنية التحتية كي تحمل الأحمال بأمان. ويشمل ذلك اختيار المواد الملائمة (مثل الخرسانة أو الفولاذ أو الخشب أو المواد المركبة)، وتحديد أبعاد العناصر الإنشائية وهندستها (مثل الكمرات والأعمدة والبلاطات والأساسات)، وتفصيل الوصلات بين هذه العناصر. ولاحظ أن هذه عملية تكرارية كما نوقش في §35.1.1.

17 ولمزيد كبير من التبصر في العلاقة بين المعماريين والمهندسين الإنشائيين، يُحال القارئ إلى الفصل 15.

18 يجب أن يمتثل التصميم الإنشائي لـem كودات التصميم القائمة. ويُبحث ذلك أكثر في §35.

19 توجد مستويات مختلفة للتصميم الإنشائي:

التصميم المفاهيمي: تتضمن هذه المرحلة الأولى توليد أفكار ومفاهيم للمنشأ استناداً إلى متطلبات المشروع وظروف الموقع والاعتبارات المعمارية. ويتعاون المهندسون والمعماريون على تطوير مفهوم تصميم أساسي يحدد شكل المنشأ ووظيفته وتخطيطه العام.

التصميم الأولي: يجري المهندسون في هذه المرحلة تحليلات وحسابات أولية لتقييم جدوى التصميم المفاهيمي. وقد يجرون تحليلات إنشائية تقريبية لتقدير الأحمال واختيار الأنظمة الإنشائية المحتملة وتحديد أحجام أولية للعناصر. والهدف تطوير فهم أكثر تفصيلاً للمتطلبات الإنشائية وتحديد أي تحديات تصميم رئيسية.

التصميم التفصيلي: ينقح المهندسون التصميم في هذه المرحلة استناداً إلى تحليلات وحسابات أكثر تفصيلاً. ويحددون الأبعاد والمواد والوصلات الدقيقة لجميع العناصر الإنشائية، ومنها الكمرات والأعمدة والبلاطات والأساسات. وتُعد رسومات ومخططات ومواصفات تفصيلية لنقل متطلبات التصميم إلى المقاولين وفرق البناء.

تصميم التنفيذ: يركز هذا المستوى من التصميم على إعداد المنشأ للبناء. ويطور المهندسون خطط التنفيذ وتسلسلاته، ومنها أنظمة الدعم المؤقتة والقوالب والتدعيم، لضمان تنفيذ التصميم بأمان وكفاءة في موقع البناء. كما يعالجون اعتبارات مرتبطة بالتنفيذ، مثل توافر المواد ولوجستيات الموقع والجدولة.

التقييم والتدعيم: عندما تتطلب منشآت قائمة تقييماً أو تأهيلاً، قد يجري المهندسون تصاميم للتقييم والتدعيم. ويتضمن ذلك فحص المنشأ وتقييم حالته وتحديد أوجه القصور أو الضعف، ووضع استراتيجيات تدعيم لتقوية المنشأ أو ترقيته كي يفي بمعايير السلامة ومتطلبات الأداء الراهنة.

تمثل مستويات التصميم الإنشائي هذه تقدماً من وضع المفهوم إلى التنفيذ، مع ازدياد مستوى التفصيل

والتنقيح في كل مرحلة. ويُعد التعاون الفعال بين المعماريين والمهندسين والمقاولين وغيرهم من أصحاب المصلحة ضرورياً لضمان نتيجة ناجحة في كل مستوى من مستويات التصميم.

17.1.2.2 التحليل

للسياق التاريخي، انظر §11.8

20 مع أن التحليل هو تحديداً موضوع هذا الكتاب، فإنه ليس غاية في ذاته قط؛ بل خطوة أساسية لتصميم منشأ جديد أو تقييم سلامة منشأ قائم.

21 وقد يتراوح التحليل من الحساب اليدوي المجرد (كما يُبحث في الكتاب الثاني)، مروراً بالمحاكاة الحاسوبية (الكتاب الثالث)، إلى التحليل اللاخطي المعقد (الكتاب الرابع).

22 ومن وجهة نظر ميكانيكية،

تعريف 17.1: متطلبات التحليل الإنشائي

يجب أن تحقق جميع حلول التحليل الإنشائي

1. الاستاتيكا (الاتزان)
2. العلاقة التكوينية (علاقات الإجهاد–الانفعال أو القوة–الإزاحة)
3. الحركيات (توافق الإزاحة أو علاقات الانفعال–الإزاحة)

23 في عملية التصميم الإنشائي تُعطى مجموعة من القوى وأبعاد عنصر إنشائي (كمرة أو عمود أو بلاطة)، ثم، بالنسبة إلى

المنشآت الفولاذية/الخشبية يُختار المقطع الملائم.

الخرسانة المسلحة: تُحدد أبعاد العنصر والتسليح الداخلي (عدد قضبان التسليح وأحجامها).

24 التصميم في المنشآت الجديدة عملية تكرارية بين التحليل والتصميم. فيوضع أولاً تصميم أولي باستخدام قواعد تقريبية (يعرفها أفضل المهندسين ذوو الخبرة التصميمية)، ثم يُحلل ويعاد تصميمه، الفصل 35.

25 وبعد عملية التصميم (التي تعالج المقاومة)[2]، يجب بعد ذلك التحقق من

الأداء الخدمي: الانحرافات وعروض الشقوق تحت الحمل المطبق، ومقارنتها بالقيم المقبولة المحددة في كود التصميم.

الفشل: ومقارنة حمل الفشل بالحمل المطبق مضروباً في معاملات الأمان المناسبة.

إذا تبين أن التصميم غير مقبول، وجب تعديله وإعادة تحليله.

26 وخلاصة القول إن التحليل مطلوب دائماً.

[2] لاحظ أنه بالنسبة إلى الطائرات التي تحلق فوق المحيط، يُفحص الأداء الخدمي (القدرة على تحمل الشقوق) أولاً، ثم المقاومة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 17.2: متطلبات التصميم الإنشائي

يجب أن يحقق التصميم الإنشائي:

1. المقاومة ($\sigma < \sigma_f$)
2. الصلابة (تشوهات «صغيرة»)
3. الاستقرار (الانبعاج والتشقق)

27 ومن اللافت أن تورّوخا (§15.4.6) عد الحسابات فكرة لاحقة، لا تلزم إلا لتقييم قابلية التصميم للتنفيذ.

17.1.2.3 تقييم السلامة

28 هذه مهمة حديثة نسبياً للمهندسين الإنشائيين. وهي تنبع من تقادم المنشآت والحاجة إلى إعادة تقييم سلامتها الإنشائية.

29 يخطئ بعض المهندسين في تقييم السلامة بالامتثال لكود التصميم السائد[3].

30 وهذه الخطوة، دون استثناء، من أعقد خطوات التحليل، لأننا بخلاف التصميم (المرن الخطي) لم نعد نستطيع في تقييم السلامة افتراض استجابة خطية (ربما بسبب تشقق واسع أو تشوه غير عكوس)، ويجب أن يكون التحليل لاخطياً.

17.1.3 التخصصات المدمجة في التحليل الإنشائي

31 يضم التحليل الإنشائي، بوصفه تخصصاً، مبادئ من تخصصات متعددة. وقد يكون بعضها بديهياً (الميكانيكا) وبعضها أقل وضوحاً:

الميكانيكا (ميكانيكا الأجسام الصلبة) هي فهم العناصر المفردة المعرضة للمؤثرات. أما التحليل الإنشائي فيتناول تجميعاً من العناصر، تحكم كلاً منها المعادلات الأساسية ذات الصلة في الميكانيكا.

الرياضيات مع أن حساب التفاضل والتكامل لمتغير واحد حاضر في كل مكان، فإن حساب المتغيرات المتعددة (حساب المتجهات)، والجبر الخطي (الطرائق الحاسوبية في الكتاب الثالث)، والمعادلات التفاضلية، وطرائق التغاير، كلها ضرورية.

ميكانيكا الموائع مثل معادلة برنولي لحمل الرياح، وهي عامل مهم.

ميكانيكا التربة ضرورية لتحديد نوع المساند الإنشائية.

علم الزلازل أساسي لتوفير تسارع حركة الأرض للتحليل الزلزالي.

الاحتمالات (والإحصاء) أدوات مهمة في تقييم سلامة المنشآت. وتعتمد دالة توزيع احتمال المقاومة (PDF) على تحليل إحصائي للاختبارات المختبرية، بينما يعتمد الطلب على دالة توزيع احتمال الأحمال المرجح وقوعها.

[3] فعلى سبيل المثال، حين تبين أن مبنى الاحتواء النووي في سيبروك يعاني تشققاً واسعاً بسبب تفاعلات الركام القلوي، اكتفت هيئة التنظيم النووي بأن «عدّل» مالك المنشأ كود التصميم القديم ACI-318 لتقييم السلامة!

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17.2 العناصر: القوى الداخلية الأساسية

32 ليست القوى الداخلية والإجهادات سوى مفاهيم مفيدة صنعها الإنسان. فالانفعالات وحدها قابلة للقياس الفيزيائي. ويمكن ربطها بالإجهادات بواسطة معامل يونغ، ثم تكاملها على المقطع العرضي لتعريف قوى المحور والقص والانحناء واللي الداخلية (§).

33 أسمي القوى الآتية قوى داخلية أساسية:

المحورية N: الكابلات وعناصر الجمالونات والعقود والأغشية والقشريات

الانحناء M: الكمرات والإطارات والشبكات والبلاطات

اللي T: الشبكات والإطارات ثلاثية الأبعاد

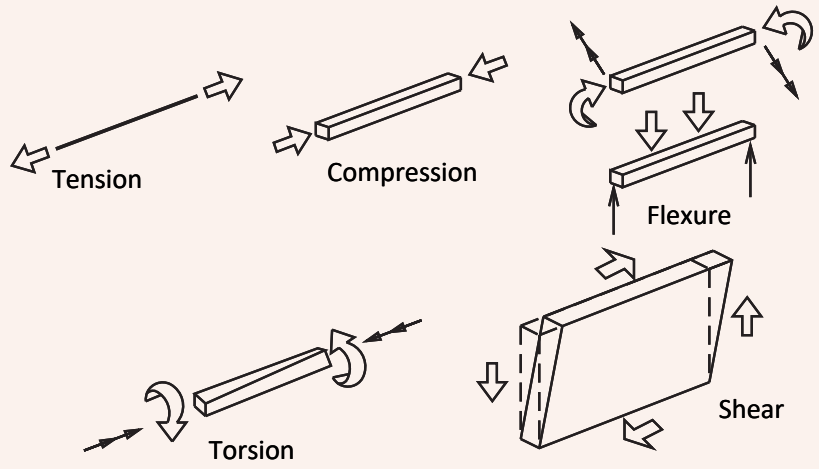
القص V: الإطارات والشبكات وجدران القص.

34 وفي الواقع، قد تجتمع عدة من هذه القوى الداخلية بحسب نوع المنشأ §17.4.

17.3 عناصر نقل الأحمال

35 ينبغي تذكّر أن المنشأ يتشوه تحت الحمل، وأننا نستطيع قياس الانفعال. ثم نربط الانفعال بالإجهادات بافتراض المرونة (مع أن الإجهادات لا يمكن قياسها بحد *ذاتها*)، وبعد ذلك نستعيض، توخياً للبساطة، عن الإجهادات بقيمها التكاملية، §O.9.

36 ومن ثم توجد أربع قوى داخلية أساسية، الشكل 17.2.



شكل 17.2: أنواع القوى في العناصر الإنشائية أحادية البعد

المحورية: الكابلات وعناصر الجمالونات والعقود والأغشية والقشريات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الانحناء: الكمرات والإطارات والشبكات والبلاطات
اللي: الشبكات والإطارات ثلاثية الأبعاد
القص: الإطارات والشبكات وجدران القص.

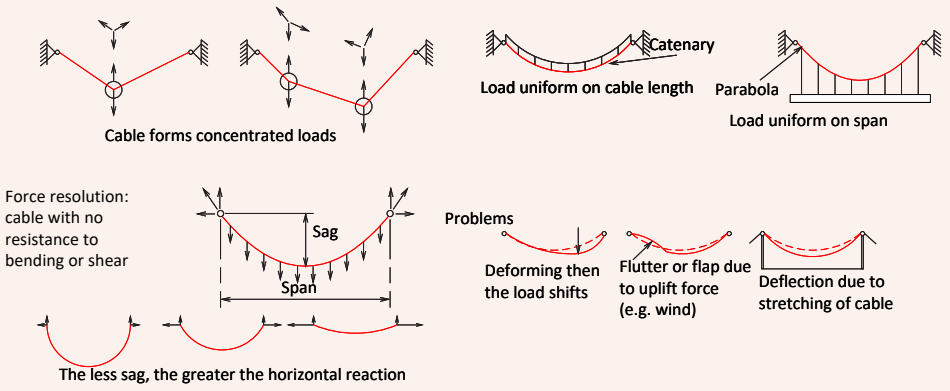
37 لاحظ أن القوى الداخلية المختلفة تتعايش في ترتيبات متعددة تبعاً لنوع العنصر، §39.4.

17.4 أنواع المنشآت

38 يمكن تصنيف المنشآت على النحو الآتي:

منشآت الشد والضغط: لا تقاوم إلا الشد أو الضغط، من دون قص أو انحناء أو لي.

الكابلات (شد فقط): تجعل مقاومة الكابلات الفولاذية العالية، مقترنة بكفاءة الشد البسيط، منها عناصر إنشائية مثالية لعبور المسافات الكبيرة، كما في الجسور والأسقف الطبقية، الشكل 17.3.



شكل 17.3: الجوانب الأساسية للأنظمة الكبلية

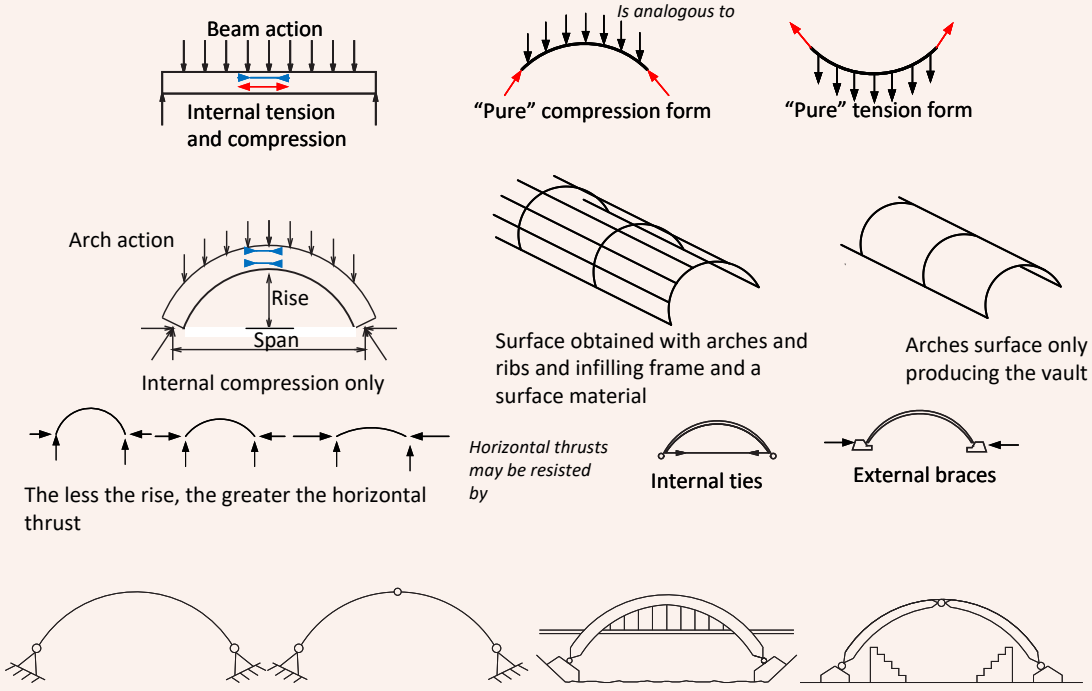
العقود (ضغط في الغالب): العقد «منشأ كبلي مقلوب». نسعى في العقد إلى تقليل الانحناء ونقل الحمل بالقوى المحورية وحدها. وتستعمل العقود في الأسقف والجسور ذات البحور الكبيرة، الشكل 17.4.

الجمالونات تتألف من عناصر موصولة بمفاصل، ولذلك لا تنقل إلا القوى المحورية (الشد والضغط). وتوصل العناصر بموصلات مشقوقة أو ملولبة أو بواسطة صفائح *الوصل*. غير أن تفاصيل التنفيذ قد تولد *إجهادات ثانوية* بسبب الوصلات الصلبة نسبياً. وتستعمل الجمالونات في الجوائز الثانوية والأسقف والجسور وأبراج الكهرباء، الشكل 17.5.

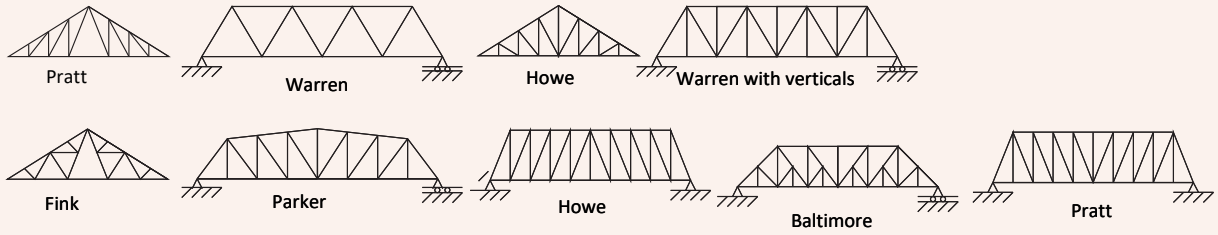
الأعمدة والكمرات: تتكون أساساً من عمود حامل ترتكز عليه «كمرة»، الشكلان 17.6 و17.7.

الكمرات: تقاوم القص والانحناء، وأحياناً القوى المحورية. تذكّر أن العلاقة $\sigma = \frac{Mc}{I}$ لا تنطبق إلا على *الكمرات الضحلة*، أي عندما لا تقل نسبة البحر إلى العمق عن خمسة. وبينما تكون كمرات الخرسانة

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

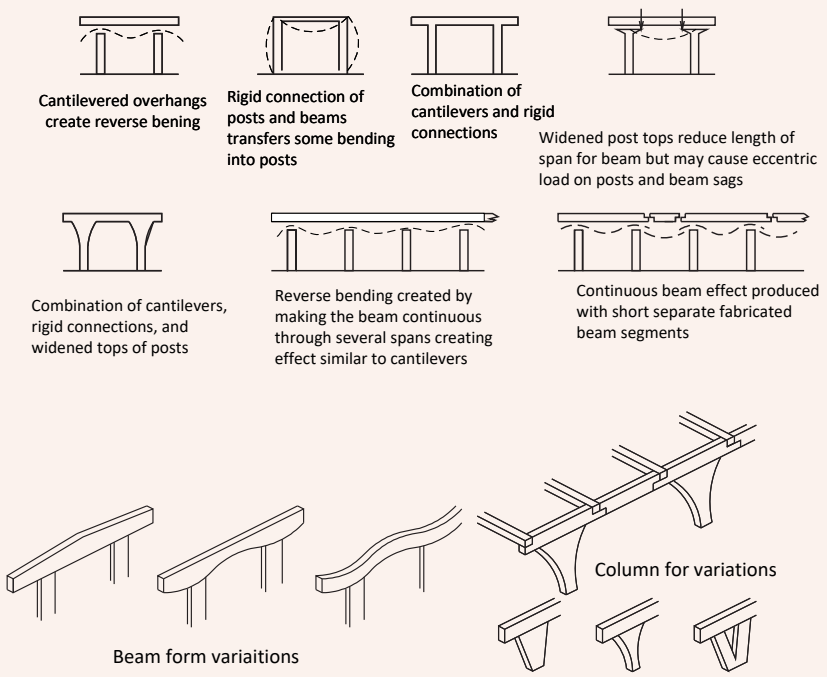


شكل 17.4: الجوانب الأساسية للعقود

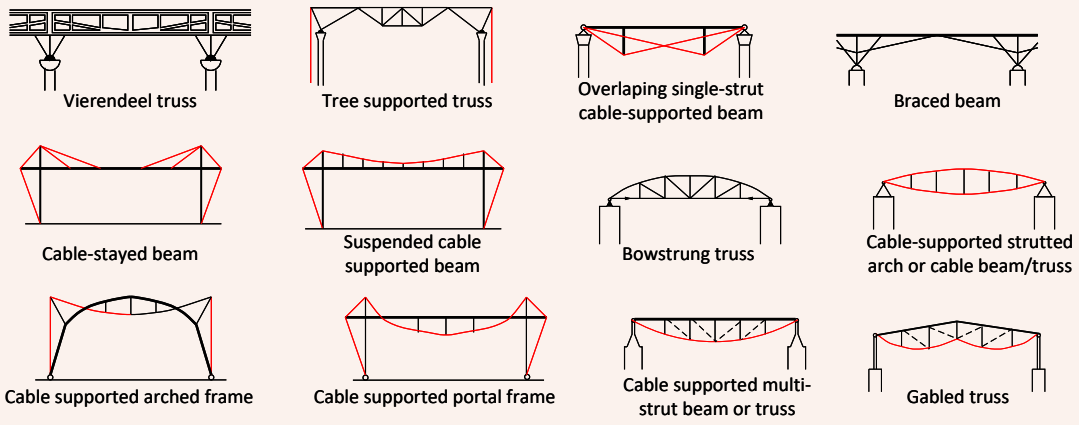


شكل 17.5: أنواع الجمالونات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 17.6: تنويعات في ترتيبات الأعمدة والكمرات

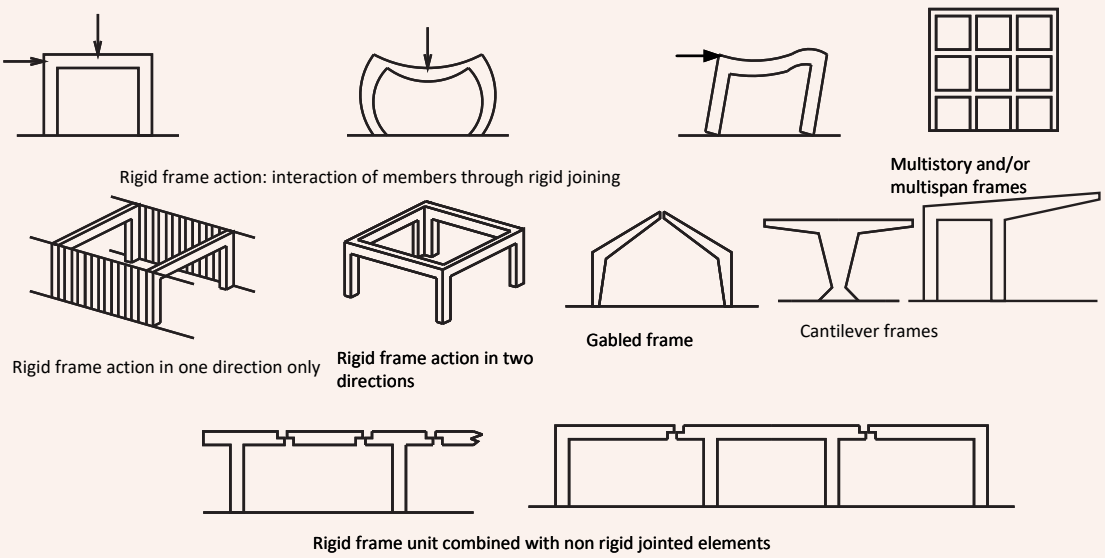


شكل 17.7: أنواع مختلفة من الكمرات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المسلحة مستطيلة أو على شكل T في الغالب، تكون الكمرات الفولاذية عادة على شكل I (وقد تنبعج أجنحتها العليا إن لم تدعّم جيداً، ولذلك نحتاج إلى مقويات).

الإطارات: يكون الحمل في مستوى المنشأ. وتظهر فيها قوى محورية وقص وانحناء (حول محور واحد في المنشآت ثنائية الأبعاد، وحول محورين في المنشآت ثلاثية الأبعاد)، وكذلك اللي في المنشآت ثلاثية الأبعاد وحدها. ويتكون الإطار من عنصر أفقي واحد على الأقل (كمرة) موصول بصلابة بعناصر رأسية[4]. ويمكن أن تكون للعناصر الرأسية شروط حدية مختلفة، تحكمها عادة ظروف التربة. وتستعمل الإطارات على نطاق واسع في المنازل والمباني، الشكل 17.8.



شكل 17.8: الأشكال الأساسية للإطارات

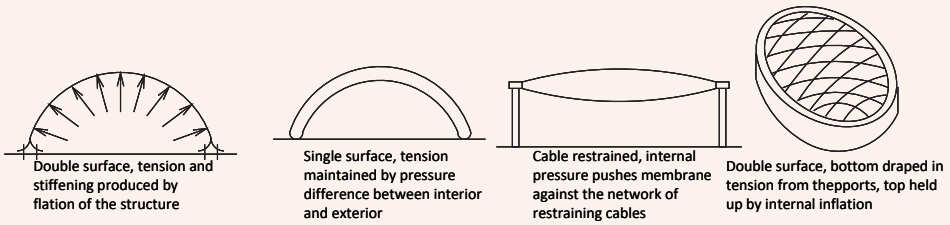
الشبكات والبلاطات: يكون الحمل عمودياً على مستوى المنشأ، وتقاوم الانحناء والقص واللي. تتقاطع الكمرات في الشبكة بزوايا قائمة، فينتشر الحمل في اتجاهين. وتضيف الوصلات الصلبة بين الكمرات صلابة ناتجة من مقاومة العناصر للي. ويمكن أيضاً جعل الشبكات منحرفة لزيادة كفاءتها حين لا تكون نسبة أبعادها قريبة من الواحد. أما البلاطات فهي منشآت مستوية صلبة ثنائية الأبعاد تنقل الأحمال الرأسية إلى مساندها، وتستعمل في الغالب *لبلاطات الطوابق*. وتمثل *البلاطات المطوية* اجتماع فعل الكمرة العرضي والطولي، وتستعمل في الأسقف ذات البحور الكبيرة. وقد يكون طي البلاطة دائرياً بدلاً من أن يكون طولياً. وتستعمل البلاطات المطوية أساساً كأسقف طويلة البحر، غير أنها قد تستعمل أيضاً جدراناً رأسية تحمل الأحمال الرأسية والأفقية معاً.

الأغشية: منشآت ثلاثية الأبعاد مؤلفة من سطح مرن ثنائي الأبعاد لا يقاوم إلا الشد. تحملها الكابلات عادة، وتستعمل للخيام والأسقف طويلة البحر، الشكل 17.9.

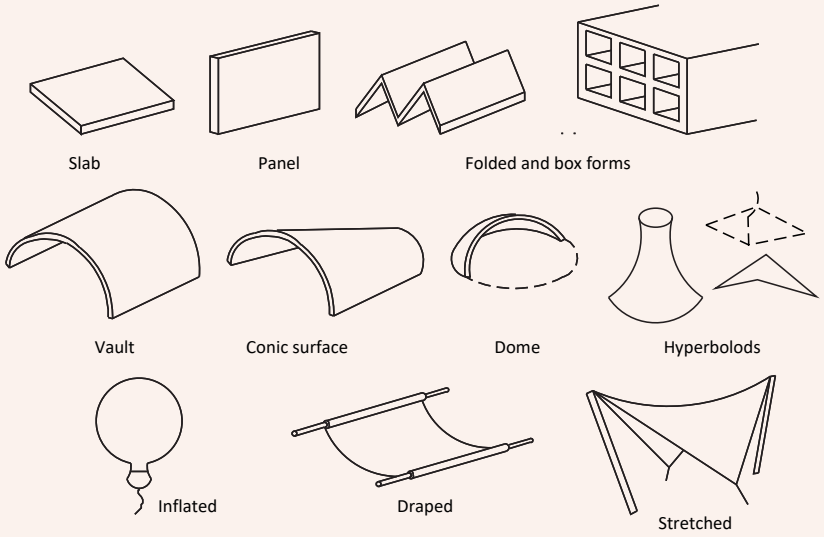
القشريات: منشآت ثلاثية الأبعاد مؤلفة من سطح منحن ثنائي الأبعاد، ويشكّل سطحها عادة بحيث ينقل إجهادات ضغط محورية وحدها، الشكل 17.10. وتصنف القشريات بحسب تقوسها.

[4] كانت منشآت **العمود والعتب** سلف المنشآت الإطارية؛ فالعمود عنصر رأسي يوضع عليه العتب ارتكازاً بسيطاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 17.9: أمثلة لمنشآت مدعومة بالهواء



شكل 17.10: الأشكال الأساسية للقشريات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17.5 تحول الأدوات الهندسية

39 بوصفي أستاذاً، كان عليّ أن أدرك أننا نعيش في عالم متطور ينبغي أن نتكيف معه قبل طلابنا.

40 لقد استخدم جميع الطلاب تقريباً الحاسوب منذ المرحلة المتوسطة أو الثانوية، إن لم يكن قبل ذلك للألعاب.

41 ولم تعد معظم البرامج الحاسوبية تحتاج إلى أدلة استعمال، ولا تفرض منحنيات تعلم شديدة الانحدار. ولكي يكتسب البرنامج ثقة الجمهور ودعمه، ينبغي أن يكون بسيطاً وأنيقاً وبديهياً وقابلاً للتوسع. وقد أثر ذلك في المجالات الآتية:

الكتابة أحدثت الحواسيب ثورة في مهارات الكتابة مع تزايد انتشار معالجة النصوص. ولم يعد الطلاب:

- يكتسبون جودة الخط اليدوي، أي تقنية الكتابة باليد باستعمال أداة للكتابة؛
- يفكرون ملياً قبل تدوين الأفكار، إذ أصبح النسخ والحذف واللصق بالغ السهولة.

وبدلاً من ذلك يستعملون:

- معالجات النصوص من نمط WYSIWYG، مثل Word؛
- أنظمة إعداد الوثائق ذات وسوم النص الصريح، مثل LaTeX، وهي شبيهة بـ HTML؛
- برمجيات للتحقق من الحسابات الرياضية واعتمادها وتوثيقها وإعادة استعمالها، مثل Math-cad.[5]

الحساب تطور هو الآخر تطوراً كبيراً. ففي الماضي استخدمنا المعداد والمسطرة الحاسبة، وكانت لدينا القدرة على:

- إجراء الحساب الذهني، أي العمليات الحسابية باستخدام العقل وحده، مثل 3×78؛
- تكوين إحساس بالأعداد، مثل $3200 \times 400 = 1,280,000$؛
- إجراء هويات مثلثية وعمليات تفاضل وتكامل بسيطة، مثل $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ أو $\int \frac{1}{x} dx$.

أما اليوم فنعتمد، اعتماداً يكاد يكون أعمى، على الآلات الحاسبة القابلة للبرمجة وExcel وMatlab وMathematica وMaple وMathcad.

لغات البرمجة تطورت من Basic وPascal وFortran 90 وFortran 2018 إلى C وC++ وPerl وPython، ولا شك أنني أغفلت لغات كثيرة.

الرسم الهندسي تطور كذلك من طاولات الرسم و«المخططات الزرقاء» إلى AutoCAD وSolidWorks ونمذجة معلومات البناء (BIM) وREVIT وغيرها.

42 وبعبارة موجزة، ينبغي أن نتوقع مزيداً من الابتكار في المستقبل القريب، وربما يغذيه الذكاء الاصطناعي.

[5] كان متوقعاً من طلابي تقديم جميع واجباتهم باستخدام Mathcad. ومع أنه واسع الاستعمال في الصناعة، فمن المؤسف أن عدداً كبيراً من الزملاء يتحفظون عن فرض برنامج آخر على الطلاب تعلمه!

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43 وهذا يثير سؤالاً: هل ما زلنا حقاً بحاجة إلى تدريس بعض مواد هذا الكتاب لمهندسي المستقبل؟

17.6 مقررات الهندسة الإنشائية

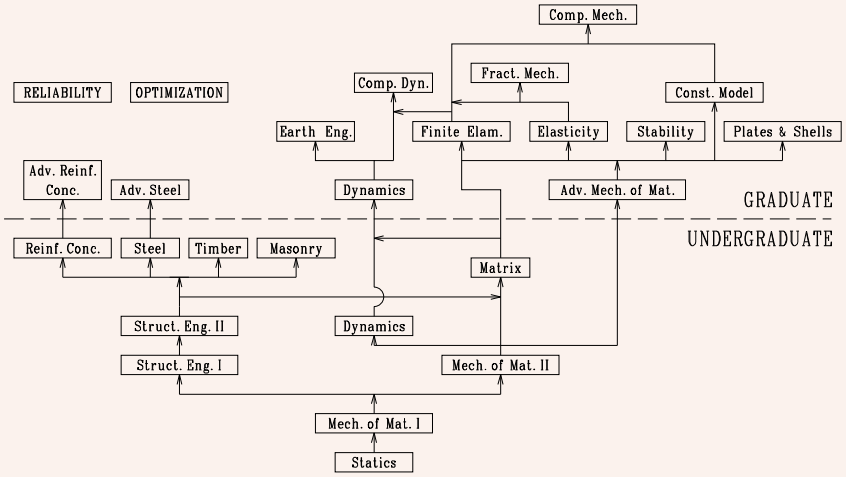
44 يمكن تناول تعليم الهندسة الإنشائية من إحدى وجهتي النظر الآتيتين:

المعمارية: البدء بالتصميم العام، ثم الانتقال إلى التحليل التفصيلي.

التعليمية: اتباع مقاربة عنصرّية لا كلية، تركز على العناصر الإنشائية المفردة ولا تركز دائماً على النظام بكامله.

وسيسعى مقرر CVEN3525 إلى تحقيق توازن بين المقاربتين.

45 وليس هذا إلا المقرر الثالث في سلسلة طويلة من المقررات التي يمكن دراستها في الهندسة الإنشائية، الشكل 17.11.



شكل 17.11: تسلسل مقررات الهندسة الإنشائية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18 الأحمال

ملخص

يمثل هذا الفصل مدخلاً أساسياً إلى مفهوم الأحمال، وهي من مقومات التحليل الإنشائي.

وبدلاً من النهج التقليدي في الكتب الدراسية، القائم على المعادلات التجريبية والجداول المطولة، يقدم هذا الفصل تصنيفاً شاملاً ومناقشة مفصلة لمختلف أنواع الأحمال. ويشمل التصنيف الأحمال الرأسية، كالأحمال الميتة والحية، والأحمال الجانبية، ومنها الرياح والزلازل. ويولى اهتمام خاص لاشتقاق معادلات الضغط الديناميكي للرياح ولمناقشة سلوك الأحمال في ظروف مختلفة.

ومع ذلك، تعرض المقاربات التجريبية للأحمال في الملحق B.

ويقدم الفصل أيضاً موضوعات أقل تداولاً، كأحمال الصدم والأحمال الثانوية، وهي ضرورية لفهم كامل نطاق التحديات في التحليل الإنشائي. ومن خلال تفصيل خصائص كل نوع من الأحمال وآثاره، يضع الفصل أساساً متيناً لمواصلة استكشاف سلوك المنشآت تحت تأثير هذه القوى.

18.1 مقدمة 740
18.2 تصنيف الأحمال 741
18.2.1 الأحمال الرأسية 741
18.2.2 الأحمال الجانبية 741
18.2.3 الأحمال الهيدروستاتيكية وضغط التربة 747
18.2.4 حمل الصدم 748
18.2.5 الأحمال الثانوية 749
18.2.6 الأحمال الحرارية 750
18.3 اعتبارات خاصة بالأحمال 751
18.3.1 إسقاط الأحمال 751
18.3.2 مواضع الأحمال 752
18.3.3 توليفات الأحمال 752
18.3.4 مسار الحمل 753
18.3.5 المساحات التابعة 757
18.3.6 الاستجابة الإنشائية 758

18.1 مقدمة

1 لولا الأحمال لما كانت ثمة حاجة إلى التحليل الإنشائي. فالأحمال هي المؤثرات الأساسية التي تجهد المنشأ، وفهمها أمر جوهري. والغاية الأساسية من المنشأ، في الواقع، هي نقل حمل من النقطة A إلى النقطة B.

2 ولذلك يكون هذا عادة أول فصل عددي في أي كتاب للتحليل الإنشائي. وهو يتناول موضوعين رئيسيين: (أ) أنواع الأحمال والمسائل المرتبطة بها؛ و(ب) المعادلات التجريبية المستندة إلى الأكواد لتحديد أحمال الرياح والزلازل.

3 وفي رأيي، قد تكون هذه المعادلات التجريبية مربكة في كتاب تقوم سائر موضوعاته على الفيزياء والميكانيكا وتنشأ من اشتقاق منطقي. لذلك قسمت معالجة الأحمال إلى جزأين: يركز هذا الفصل على تصنيف الأحمال والمسائل ذات الصلة، في حين تعرض جميع الطرائق المستندة إلى الأكواد في الملحق B.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18.2 تصنيف الأحمال

4 لمعالجة مفصلة للأحمال، راجع «الكود الموحد للبناء» (ICBO, 1994)، (UBC)، و«الأحمال التصميمية الدنيا للمباني والمنشآت الأخرى» (ASCE/SEI 7-16, 2017).

18.2.1 الأحمال الرأسية

5 الأحمال الرأسية في المنشأ هي القوى المتجهة إلى أسفل بفعل الجاذبية.

6 وتنتمي هذه الأحمال إلى إحدى فئتين:

الأحمال الميتة:

7 هي أحمال دائمة ناشئة من وزن المنشأ نفسه، بما في ذلك الجدران والطوابق والأسقف والمعدات الثابتة الدائمة. والأحمال الميتة ساكنة ويمكن التنبؤ بها، إذ تبقى ثابتة مع الزمن.

8 ويجب في عملية التصميم تقدير الأحمال الميتة والتحقق منها في نهاية كل دورة تصميم، مما يجعل عملية التصميم *تكرارية*.

الأحمال الحية:

9 هي أحمال متغيرة يسببها استعمال المنشأ، كالأشخاص والأثاث والمركبات والمعدات المتحركة. ويمكن أن تتغير شدتها ومواضعها، ولذلك يصعب التنبؤ بها مقارنة بالأحمال الميتة.

10 وفي التحليل ينبغي وضع هذه الأحمال بحيث تعظّم آثارها، كالقص والعزم.

11 ويستعمل نهج إحصائي لتحديد حمل ساكن موزع بانتظام يعادل وزن أكبر تجمع محتمل للشاغلين. ويعرّف ICBO, 1994 وASCE/SEI 7-16, 2017 هذه الأحمال أيضاً.

حمل الثلج

12 تتباين أحمال الثلج على الأسقف تبايناً كبيراً تبعاً *للموقع الجغرافي* و*الارتفاع*. وتتراوح بين 20 و45 رطلاً لكل قدم مربع، الشكل 18.1.

18.2.2 الأحمال الجانبية

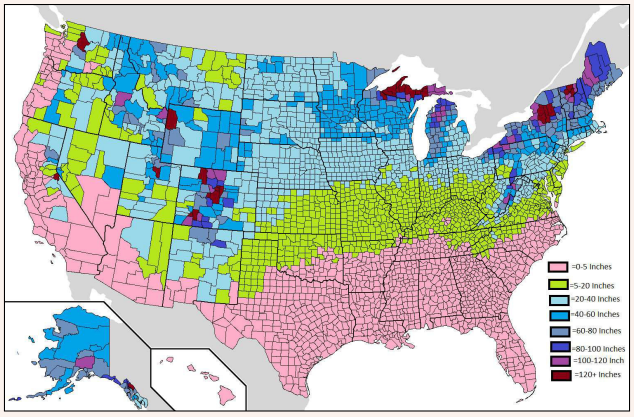
18.2.2.1 الرياح

13 حمل الرياح على المنشأ هو القوة التي تسلطها الرياح على مساحة سطح مبنى أو منشأ آخر. وتنشأ هذه القوة من حركة جزيئات الهواء، وقد تتغير شدتها واتجاهها تبعاً لسرعة الرياح واتجاهها وشكل المبنى وارتفاعه وموقعه الجغرافي وخشونة سطحه وصلابته.

14 وتكتسب أحمال الرياح أهمية خاصة في *المباني الشاهقة*[1].

[1] الاعتبار التصميمي الأساسي في المباني فائقة الارتفاع هو *الانجراف* المفرط الذي تسببه الأحمال الجانبية، أي الرياح وربما الزلازل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 18.1: خريطة الثلوج في الولايات المتحدة

15 لنشتق أولاً معادلة *الضغط الديناميكي*، التي اشتقها دانيال برنولي أول مرة. وهي تنشأ من مبدأي الطاقة الحركية وكتلة المائع. تعطى الطاقة الحركية (KE) لجسم بالعلاقة

$$KE = \frac{1}{2}mV^2$$

حيث m الكتلة وV السرعة.

ولمائع كثافته ρ، يمكن التعبير عن كتلة m لحجم ΔV كما يأتي:

$$m = \rho \Delta V$$

وباستعمال علاقة الكتلة السابقة، تكون الطاقة الحركية لحجم المائع:

$$KE = \frac{1}{2}(\rho \Delta V)V^2$$

ثم نحصل على الطاقة الحركية لكل وحدة حجم بالقسمة على ΔV:

$$\frac{KE}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{18.1}$$

وتمثل هذه الكمية الضغط الديناميكي للمائع، أي الطاقة الحركية لكل وحدة حجم الناشئة من حركة المائع.

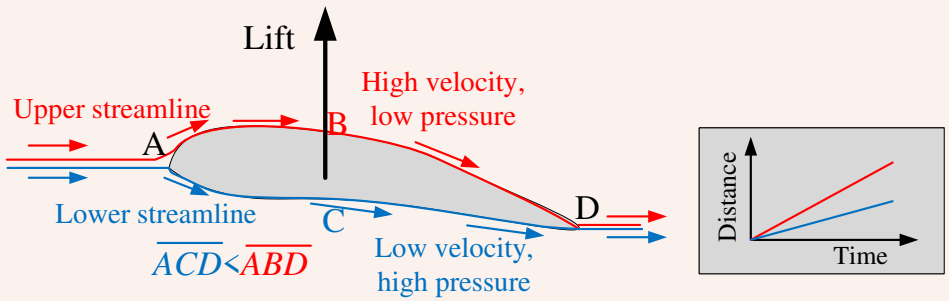
وحدة الضغط الديناميكي q هي الباسكال (Pa)، وهي أيضاً وحدة الطاقة الحركية لكل وحدة حجم:

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

ومن ثم فإن الضغط الديناميكي صورة من صور كثافة الطاقة.

16 إذا أخذنا مقطع جناح هوائي ، الشكل 18.2، وجب أن يكون الجريان أسرع فوق جزئه العلوي المنحني منه تحت جزئه السفلي. ويؤدي ذلك إلى انخفاض الضغط الساكن فوق الجناح مقارنة بما تحته، وينتج الرفع من فرق الضغط هذا.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 18.2: مقطع جناح هوائي ومعادلة برنولي

17 بالتعويض للهواء في المعادلة 18.1، تكون كثافة كتلة الهواء ρ مساوية لوزنه مقسوماً على تسارع الجاذبية $g = 32.2$ قدم/ثانية^2. وعند سطح البحر ودرجة حرارة 15^oم (59^oف)، يزن الهواء 0.0765 رطلاً/قدم^3، مما يعطي الضغط

$$q_s = \frac{1}{2}\frac{(0.0765)\text{lb/ft}^3}{(32.2)\text{ft/sec}^2}\left(\frac{(5280)\text{ft/mile}}{(3600)\text{sec/hr}}V\right)^2 \tag{18.2}$$

أو[2]

$$q_s = 0.00256V^2$$

حيث V أقصى سرعة للرياح بالميل في الساعة، وq_s بوحدة رطل/قدم مربع. ويمكن الحصول على V من خرائط الرياح (في الولايات المتحدة $70 \le V \le 110$)، الشكل 18.3.

18 عندما تصطدم الرياح بمبنى، يتعين عليها الانحراف حوله لأنه يشكل عائقاً. ويمكن تحليل سلوكها حول المبنى إلى المكونات الأساسية الآتية، الشكل 18.4:

الجانب المواجه للرياح: تتباطأ الرياح حين تصطدم بواجهة المبنى، فيتراكم الضغط وتنشأ منطقة ضغط مرتفع على هذا الجانب.

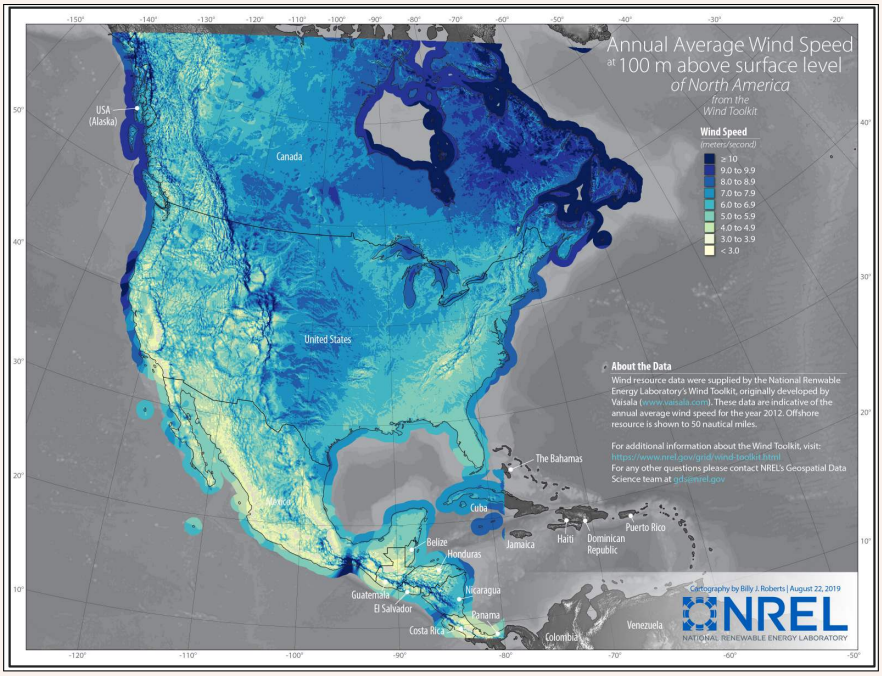
الجريان فوق المبنى وحوله: تجري الرياح بعد ذلك فوق المبنى وحول جانبيه. وتزداد سرعتها عند مرورها فوق السطح وحول الحواف بسبب تضيق مساحة الجريان المتاحة لها، على نحو يشبه تسارع الماء في الجزء الضيق من المجرى. ووفق مبدأ برنولي، ينخفض ضغط المائع، وهو الهواء هنا، حين تزداد سرعته.

الجانب المحجوب عن الرياح: بعد عبور الرياح قمة المبنى واتجاهها نزولاً نحو الجانب المحجوب، تتمدد وتتباطأ. ويولد هذا الانتقال نمط جريان معقداً يتصف بالاضطراب والدوامات.

19 وتسهم عدة عوامل في توليد الشفط على الجانب المحجوب عن الرياح:

عدم اكتمال استعادة الضغط: مع أن الرياح تتباطأ بعد تجاوز قمة المبنى، فإن الضغط لا يستعيد تماماً قيمته المحيطة. ويؤدي اختلاط تيارات الرياح القادمة من اتجاهات مختلفة، فوق السطح وحول الجانبين، إلى اضطراب يقلل فاعلية استعادة الضغط.

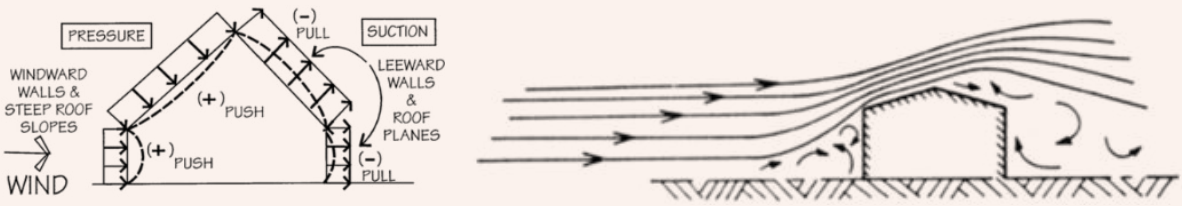
[2] من المؤسف أن معظم كتب التحليل الإنشائي تعرض هذه المعادلة من غير اشتقاق، مما قد يترك لدى القارئ انطباعاً بأنها تجريبية محضة.



شكل 18.3: خريطة الرياح في الولايات المتحدة

انفصال الجريان: تميل الرياح، حين تجري فوق المبنى ثم إلى أسفل جانبه المحجوب، إلى الانفصال عن السطح بسبب تدرج الضغط المعاكس، أي الانتقال من ضغط منخفض عند القمة إلى ضغط أعلى قرب الأرض. وينشئ هذا الانفصال منطقة ضغط منخفض ملاصقة للجانب المحجوب.

الدوامات والتيارات الدوامية: قد يولد انفصال الجريان وتفاعل تيارات الرياح دوامات حول زوايا المبنى وحوافه. وتكون كتل الهواء الدوارة هذه مناطق ضغط منخفض، فتسهم في أثر الضغط السالب، أي الشفط، على الجانب المحجوب.



شكل 18.4: تأثير حمل الرياح في المنشآت

20 من المهم في المباني الشاهقة تمثيل توزيع ضغط الرياح تمثيلاً صحيحاً. ويمكن التعبير عن سرعة الرياح $V(z)$ بدلالة الارتفاع z بمعادلة قانون القوة (ASCE/SEI 7-16, 2017):

$$V(z) = V_{\text{ref}} \left(\frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^{\alpha}$$

حيث:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- $V(z)$ سرعة الرياح عند الارتفاع z،
- V_{ref} سرعة الرياح المرجعية عند الارتفاع المرجعي z_{ref}،
- α أس يعتمد على طبيعة التضاريس.

ويمكن بعد ذلك جمع هذه المعادلة مع المعادلة 18.1 للحصول على توزيع الضغط.

21 ترد تفاصيل المنهج التجريبي لتحليل المنشآت المعرضة لأحمال الرياح في §B.2.

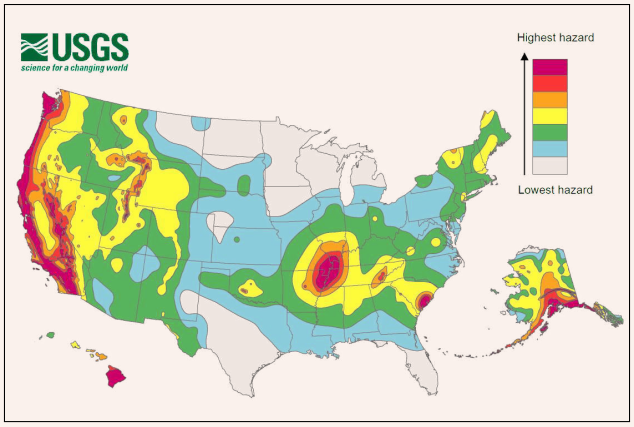
18.2.2.2 الزلازل

22 يختص علم الزلازل بدراسة وقوع الزلازل وتواترها ومقاديرها في منطقة محددة، وهو أمر أساسي لتحديد الخطر الزلزالي المرتبط بموقع بعينه، الشكل 18.5. ومن العوامل المؤثرة في النشاط الزلزالي:

الصفائح التكتونية: حركات الصفائح التكتونية وتفاعلاتها هي الأسباب الرئيسية للزلازل.

البيانات التاريخية للزلازل: تساعد سجلات الزلازل الماضية على توقع احتمالات الزلازل المقبلة ومواقعها ومقاديرها المحتملة.

مناطق الصدوع: تؤثر الصدوع النشطة تأثيراً كبيراً في النشاط الزلزالي المحلي بحسب خصائصها.



شكل 18.5: الخريطة الزلزالية للولايات المتحدة

23 تتصف حركة الأرض أثناء الزلزال بما يأتي:

التسارع: معدل تغير السرعة مع الزمن، ويستعمل أقصى تسارع أرضي (PGA) مقياساً لشدة الزلزال.

السرعة: سرعة موجة القص V_s معامل حاسم في علم الزلازل لتقييم سلوك التربة أثناء الزلازل.

24 يعتمد التردد الطبيعي للمنشأ على كتلته وصلابته، ويمكن تحديده بسهولة لنظام بسيط ذي درجة حرية واحدة.

25 لنأخذ كتلة m موصولة بنابض صلابته k، من دون قوى خارجية. تعطى معادلة الاتزان الديناميكي بـ:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبافتراض حل على الصورة $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$:

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

وبالتعويض في معادلة الاتزان:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos(\omega t + \phi) = 0$$

وللحلول غير التافهة ($A \neq 0$):

$$-m\omega^2 + k = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

ومن ثم يكون التردد الطبيعي f:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

26 نستخلص مما سبق معياراً لتحديد الحالات التي تستدعي تحليلاً ديناميكياً[3].

تعريف 18.1: شرط إجراء التحليل الديناميكي

يلزم التحليل الديناميكي إذا كان التردد الطبيعي الأساسي للمنشأ قريباً من تردد الأحمال الديناميكية، مثل الترددات الغالبة لحركة الأرض في الزلازل.

27 وامتداداً للمعادلة السابقة، للمبنى ترددات طبيعية يميل إلى الاهتزاز عندها. فإذا وافق تردد حركة الأرض التردد الطبيعي للمبنى، أي حدث الرنين، فقد يتعرض المبنى لاهتزازات مضخمة قد تسبب أضراراً.

28 تظهر الأحمال الزلزالية في المباني أساساً على هيئة قوى جانبية.

29 وتنشأ هذه القوى من محاولة المبنى مقاومة الحركة التي تفرضها الأرض. ويزداد توزيع القوى الجانبية عادة مع الارتفاع بسبب ازدياد أثر ذراع العزم كلما صعدنا في المبنى.

30 وتولد القوى الجانبية قوى قص وعزوم انحناء في العناصر الإنشائية للمبنى. وتتعرض الطوابق السفلى من مبنى متعدد الطوابق عادة لأكبر قوى القص لأنها تحمل أحمال جميع الطوابق التي تعلوها.

31 وإذا لم تتوزع كتلة المبنى وصلابته توزيعاً متناظراً، أو لم تكن اهتزازات الأرض منتظمة، فقد تنشأ أيضاً قوى ليّ دورانية. ويمكن لهذه القوى أن تلوي المبنى، فتولد توزيعات معقدة للإجهادات وربما أضراراً جسيمة.

32 لجميع المنشآت قدر من التخميد، أي القدرة على تبديد الطاقة. ويساعد التخميد أثناء الزلزال على خفض شدة الاهتزازات، ومن ثم تقليل الإجهادات والتشوهات في المبنى.

33 وأخيراً، تصمم المباني وفق معايير التصميم المقاوم للزلازل كي تتعامل بفاعلية مع الأحمال الزلزالية. وتساعد هذه المعايير على ضمان تحمل المنشآت للزلازل من دون خسائر كبيرة في الأرواح أو انهيار. ومن

[3] وضع هذا التعريف الصريح لأن كثيراً من الطلاب والمهندسين يجدون صعوبة في تقديم تفسير منطقي لموعد ضرورة التحليل الديناميكي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

استراتيجيات التصميم الأساسية استعمال مواد تتحمل تشوهات كبيرة، والتصميم على المطيلية، أي القدرة على التشوه من دون كسر، وإدخال عناصر كجدران القص والإطارات المقاومة للعزوم وعوازل القواعد.

34 وستعرض جميع هذه الموضوعات بتفصيل أكبر كثيراً في الفصول 34 و69 و66.

18.2.3 الأحمال الهيدروستاتيكية وضغط التربة

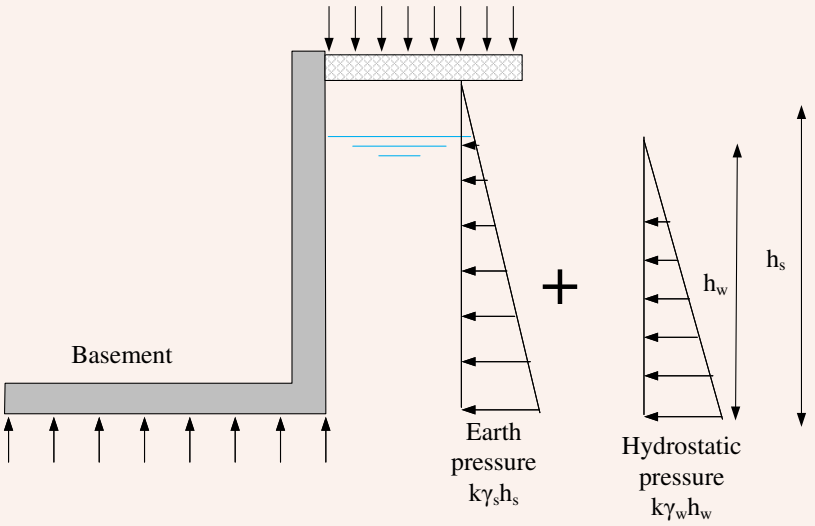
35 يجب أن تقاوم المنشآت الواقعة تحت سطح الأرض ضغط التربة الجانبي.

$$q = K\gamma h$$

حيث γ كثافة التربة، و$K = \frac{1-\sin\Phi}{1+\sin\Phi}$ معامل الضغط، وh الارتفاع.

36 بالنسبة إلى الرمل والحصى، $\gamma = 120\ \text{lb/ ft}^3$ و$\Phi \approx 30°$.

37 وإذا كان المنشأ مغموراً جزئياً، وجب أن يقاوم أيضاً ضغط الماء الهيدروستاتيكي، الشكل 18.6.



شكل 18.6: أحمال التربة والأحمال الهيدروستاتيكية على المنشآت

$$q = \gamma_W h$$

حيث $\gamma_W = 62.4\ \text{lbs/ft}^3$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18.2.3.1 مثال 18.1: حمل هيدروستاتيكي

يقع قبو مبنى على عمق 12 قدماً تحت منسوب الأرض، وتقع المياه الجوفية على عمق 9 أقدام. ما سماكة البلاطة الخرسانية اللازمة لمعادلة قوة الرفع الهيدروستاتيكية تماماً؟

يجب موازنة الضغط الهيدروستاتيكي بالضغط الناتج من وزن الخرسانة. وبما أن $p = \gamma h$، نساوي الضغطين ونحل لإيجاد h، وهو ارتفاع البلاطة الخرسانية: $\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{الماء}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{الخرسانة}} \Rightarrow h =$

$$\frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq$$ 15.0 بوصة

18.2.4 حمل الصدم

38 أحمال الصدم هي قوى تؤثر في المنشأ مدة وجيزة جداً ولكن بشدة كبيرة. وقد تنجم من مصادر متعددة، كسقوط الأجسام أو اصطدام المركبات أو الانفجارات.

39 والسمة الأساسية لهذه الأحمال أنها قوى عالية الطاقة تعمل في مدد قصيرة، فتسبب الإجهاد والاهتزاز وربما الضرر الإنشائي.

40 واشتقاق قوى الصدم مباشر نسبياً.

41 ينص حفظ كمية الحركة على أن مجموع كمية الحركة قبل الصدم يجب أن يساوي مجموعها بعده، ما لم تؤثر في النظام قوى خارجية. ويمكن التعبير عن هذا المبدأ بالعلاقة:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

حيث:

m_1, m_2	كتلتا الجسمين المتصادمين
v_1, v_2	سرعتا الجسمين قبل التصادم
v_1', v_2'	سرعتا الجسمين بعد التصادم

42 تحفظ الطاقة الحركية أيضاً في التصادمات المرنة. غير أن معظم التصادمات التي تشمل المنشآت غير مرنة، أي إن جزءاً من الطاقة الحركية يتحول إلى صور أخرى من الطاقة، كالحرارة، أو يستهلك في تشويه الأجسام.

43 تعطى الطاقة الحركية قبل الصدم وبعده بالعلاقة:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + E_{\text{loss}}$$

حيث E_{loss} الطاقة المفقودة بسبب التشوه غير المرن والحرارة وغيرهما.

44 لتحديد قوة الصدم F، يمكن استعمال مبرهنة الدفع وكمية الحركة، التي تربط قوة الصدم بتغير كمية الحركة ومدة الصدم Δt:

$$F = ma \Rightarrow F \simeq m\frac{\Delta v}{\delta t}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث:

m	كتلة الجسم
Δv	التغير في السرعة
Δt	مدة الصدم

45 لتحديد قوة صدم كتلة تسقط من ارتفاع h، نساوي الطاقة الحركية المكتسبة بطاقة الوضع المفقودة[4]:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

وعند اصطدام الجسم بالسطح تتناقص سرعته حتى الصفر. وبافتراض أن الصدم يستغرق Δt ثانية، تكون قوة الصدم المتوسطة F:

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

18.2.5 الأحمال الثانوية

46 الأحمال الثانوية في المنشآت هي الأحمال التي تنشأ من سلوك المنشأ نفسه لا من مصادر خارجية. ويجب أخذها في الحسبان في التحليل الإنشائي لأنها قد تؤثر تأثيراً كبيراً في سلامة المنشأ وأدائه. وفيما يأتي بعض النقاط الأساسية المتعلقة بها.

47 تنشأ الأحمال الثانوية عادة من استجابة المنشأ للأحمال الأولية، أو من تغير درجات الحرارة، أو من عوامل بيئية أخرى. وعلى خلاف الأحمال الأولية، كالأحمال الميتة (وزن المنشأ نفسه) والأحمال الحية (أحمال الاستعمال والإشغال)، لا تطبق الأحمال الثانوية مباشرة في الغالب.

48 ومن أنواع الأحمال الثانوية:

الأحمال الحرارية: تنجم من تغير درجات الحرارة الذي يسبب تمدد المواد أو انكماشها. فقد تولد، مثلاً، إجهادات في بلاطة خرسانية بسبب فرق الحرارة بين سطحيها العلوي والسفلي.

أحمال الهبوط: تحدث حين يهبط جزء من المنشأ أكثر من أجزاء أخرى نتيجة انضغاط غير متساو للتربة أو عوامل أخرى، فتتولد إجهادات داخل المنشأ.

مراحل التنفيذ: قد تولد الأحمال المؤقتة وتسلسلات العمل أثناء التنفيذ آثاراً ثانوية بسبب الإضافة التدريجية للعناصر الإنشائية وعمليات البناء.

آثار اللامركزية: اللامركزية هي انحراف خط عمل الحمل المطبق عن مركز مساحة العنصر الإنشائي. وقد تولد عزوماً وقوى إضافية يجب أخذها في الحسبان في التحليل الإنشائي.

آثار P–Delta: تنشأ آثار P–Delta من الفعل المشترك للأحمال المحورية (P) والأحمال الجانبية، كالرياح أو الزلازل، وما تسببه من تشوه (Delta) في المنشأ. ومع تشوه المنشأ يتغير توزيع القوى، فتظهر قوى داخلية إضافية لم تكن موجودة في الحالة الساكنة.

اللاخطية الهندسية: تنشأ حين تصبح إزاحات العناصر الإنشائية كبيرة، فيغدو السلوك لاخطياً. وتكتسب أهمية خاصة في المنشآت ذات التشوهات الكبيرة أو العناصر النحيلة.

[4] كما اكتشف غاليليو، لا تعتمد سرعة الأجسام الساقطة من برج بيزا على «كتلها».

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزحف والانكماش: تتشوه مواد كالخرسانة مع الزمن تحت الحمل المستمر (الزحف)، وينقص حجمها (الانكماش)، مما قد يولد إجهادات داخلية إضافية.

49 يجب على المهندسين مراعاة الأحمال الثانوية في التصميم لضمان السلامة الإنشائية وقابلية الخدمة. ففي تصميم الجسور، مثلاً، ينبغي مراعاة الآثار الثانوية الناشئة من تقوس السطح أو التمدد الحراري لتجنب الفشل الإنشائي أو التشوه المفرط.

50 وغالباً ما يتطلب تحليل الأحمال الثانوية تقنيات نمذجة متقدمة تراعي خصائص المواد وتغيرات الهندسة والتفاعل بين أجزاء المنشأ المختلفة. وتستعمل طرائق العناصر المحددة المتقدمة عادة للتنبؤ باستجابة المنشآت للأحمال الثانوية.

18.2.6 الأحمال الحرارية

51 إذا سخن عنصر بانتظام، أو برد، من دون تقييد، فإنه يتمدد، أو ينكمش. ويعطى هذا التمدد بالعلاقة

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

حيث α معامل التمدد الحراري، الجدول 18.1.

	α ($^{\circ F}$/)
الفولاذ	6.5×10^{-6}
الخرسانة	5.5×10^{-6}

جدول 18.1: معاملات التمدد الحراري

52 وإذا قيد العنصر ومنع من التمدد، تولد فيه إجهاد ضاغط $\sigma = E\alpha\Delta T$.

53 ولتجنب الإجهادات المفرطة الناشئة من الأحمال الحرارية، تستعمل *فواصل التمدد* في الجسور والمباني.

18.2.6.1 مثال 18.2: التمدد والإجهاد الحراريان

(Schueller, 1996) يحد مبنى منخفض الارتفاع من أحد جوانبه جدار حامل من مباني الطوب الطيني طوله 100 قدم ($\alpha = 3.6 \times 10^{-6}$ بوصة/بوصة/^{o}ف، $E = 2,400,000$ رطل/بوصة مربعة). أنشئ المبنى عند درجة حرارة 60°ف، ويقع في الجزء الشمالي من الولايات المتحدة، حيث تتراوح درجة الحرارة بين -20° و+120°ف.

1. بافتراض أن الجدار يستطيع الحركة بحرية من دون تقييد من الجدران المتعامدة والأساسات، يعطى تمدده وانكماشه في الصيف والشتاء بالعلاقتين:

$$\Delta L^{\text{الصيف}} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F (120 - 60)^o F (100) \text{ ft}(12) \text{ in/ft} = 0.26 \text{ in} \quad (18.3)$$

$$\Delta L^{\text{الشتاء}} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F (-20 - 60)^o F (100) \text{ ft}(12) \text{ in/ft} = -0.35 \text{ in} \quad (18.4)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. نفترض الآن، على نحو محافظ، أن الحركة الحرة لا يمكن أن تحدث ($\Delta L = 0$)، ومن ثم يكون الإجهاد الناتج: $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = E\frac{\alpha \Delta T L}{L} = E\alpha\Delta T$

$$\sigma_{\text{الصيف}} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6\times10^{-6})\ \text{in/ in/}^oF(120-60)^oF \quad (18.5)$$

$$= 518\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}\ \text{شد} \quad (18.6)$$

$$\sigma_{\text{الشتاء}} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6\times10^{-6})\ \text{in/ in/}^oF(-20-60)^oF \quad (18.7)$$

$$= -691\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}\ \text{ضغط} \quad (18.8)$$

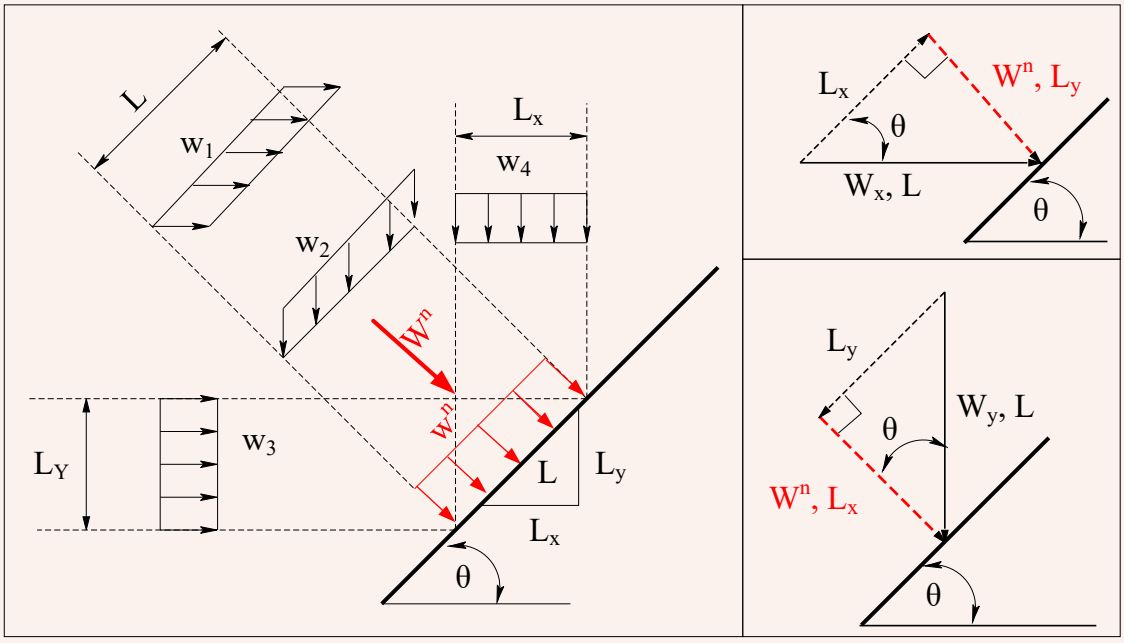
لاحظ أن إجهادات الشد تتجاوز مقاومة مباني الطوب، ولذلك سيحدث التشقق.

18.3 اعتبارات خاصة بالأحمال

18.3.1 إسقاط الأحمال

54 مع أن إسقاط حمل على سطح مائل ليس إلا تطبيقاً بسيطاً لعلم المثلثات، فإن الطلاب كثيراً ما يجدون فيه صعوبة.

55 ويوضح الشكل 18.7 ذلك على أفضل وجه. حيث



شكل 18.7: إسقاط الأحمال

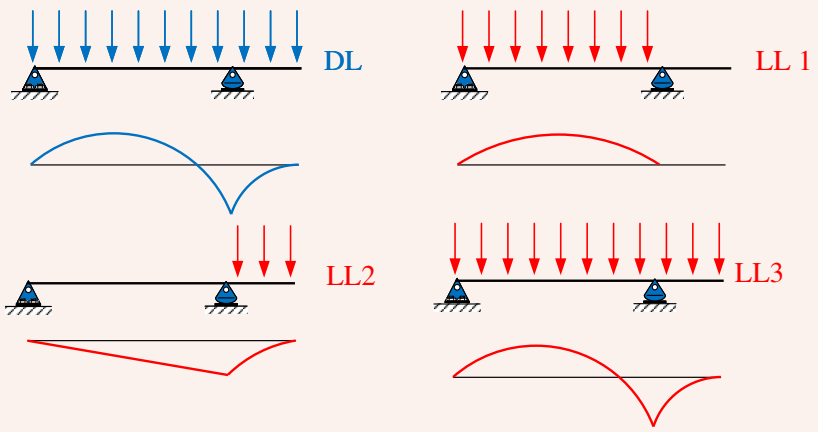
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قوة القصور الجانبية x	$W_1^x = w_1^x L;$	$W^n = W_1^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L} = w_1^x \frac{L_y}{L}$
الوزن الذاتي y	$W_2^y = w_2^y L;$	$W^n = W_2^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L} = w_2^y \frac{L_x}{L}$
حمل الرياح	$W_3^x = w_3^x L_y;$	$W^n = W_3^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L} = w_3^x \frac{L_y^2}{L^2}$
حمل الثلج	$W_4^y = w_4^y L_x;$	$W^n = W_4^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L} = w_4^y \frac{L_x^2}{L^2}$

18.3.2 مواضع الأحمال

56 الحمل الميت وحده ثابت. أما الحمل الحي فقد يطبق أو لا يطبق على جزء معين من المنشأ. ولذلك يجب النظر في ترتيب مواضع الأحمال الذي يولد أكبر قوى داخلية، أي العزم الموجب أو السالب والقص، في المواضع المختلفة.

57 يوضح الشكل 18.8 المواضع الثلاثة الممكنة للحمل الحي على كمرة بسيطة. يعظّم LL1 العزم الموجب عند منتصف الكمرة، في حين يعظّم LL3 العزم السالب عند المسند الأيمن.



شكل 18.8: وضع الأحمال لتعظيم العزوم

58 ومن ثم فإن وضع الأحمال الحية اعتبار حاسم يؤثر مباشرة في سلامة المنشأ واستقراره وأدائه.

59 وينبغي للقارئ أيضاً مراجعة الفصل 28، الذي يتناول خطوط *التأثير*؛ وهي رسوم تبين كيف تتغير الاستجابة، كقوة القص أو عزم الانحناء أو رد الفعل، عند نقطة محددة في المنشأ حين يتحرك حمل وحدي عبره.

18.3.3 توليفات الأحمال

60 تمثل توليفات الأحمال في الهندسة الإنشائية جانباً حاسماً من عملية التصميم، يضمن سلامة المباني والمنشآت وكفاءتها في مختلف حالات التحميل. ويتطلب ذلك تحليل آثار أنواع متعددة من الأحمال حين تعمل معاً، لا كل منها على حدة، للتأكد من قدرة المنشأ على تحمل آثار أحمال متزامنة من دون فشل.

61 والهدف الأول من توليفات الأحمال هو ضمان السلامة الإنشائية. فمن خلال النظر إلى أنواع متعددة من الأحمال معاً، يستطيع المهندسون تصميم منشآت تتحمل ظروفاً قصوى، كوقوع أحمال الرياح والزلازل في وقت واحد، أو اجتماع الأحمال الميتة والحية. ويساعد ذلك على منع فشل إنشائي قد يؤدي إلى أضرار مادية أو إصابات أو وفيات.

62 كما تتيح توليفات الأحمال تصميم منشآت اقتصادية من دون إفراط في التصميم. فبفهم تفاعل الأحمال المختلفة، يستطيع المهندسون تحسين استعمال المواد واختيار الحلول الأقل كلفة التي تظل مستوفية لمتطلبات السلامة. وبذلك تنخفض الكلفة الإجمالية للتنفيذ مع الحفاظ على السلامة الإنشائية.

63 وتساعد توليفات الأحمال المهندسين على توقع سلوك المنشآت في سيناريوهات نادرة ولكنها ممكنة، كتزامن تساقط كثيف للثلوج مع رياح قوية، أو اكتمال أحمال الإشغال أثناء زلزال. وهذا أمر بالغ الأهمية عند تصميم منشآت في مناطق معرضة لتحديات بيئية محددة.

64 والتصميم لتوليفات مختلفة لا يجعل المنشآت آمنة في الظروف الآنية فحسب، بل يجعلها أيضاً قادرة على تحمل التغيرات والإجهادات طوال دورة حياتها. ويسهم ذلك في إطالة عمر المنشأ وزيادة متانته، ولا سيما في المباني العامة والبنية التحتية.

65 وكثيراً ما تؤدي المنشآت أغراضاً متعددة، ويجب أن تستوعب أنواعاً مختلفة من الأحمال طوال مدة استعمالها. فقد يحتاج مبنى متعدد الاستعمالات، مثلاً، إلى استيعاب أنواع مختلفة من الإشغال أو المعدات أو أوزان التخزين. وتضمن توليفات الأحمال قدرة المنشأ على التكيف مع هذه المتطلبات المتنوعة من دون المساس بالسلامة.

66 ومن توليفات الأحمال الشائعة:

- الحمل الميت + الحمل الحي
- الحمل الميت + حمل الرياح
- الحمل الميت + الحمل الزلزالي
- الحمل الميت + حمل الثلج
- الحمل الحي + حمل الرياح، كما في منشآت الملاعب حيث قد يتزامن الإشغال مع الرياح

67 تمثل الأحمال الحية التي تحددها الأكواد أقصى الأحمال الممكنة.

68 واحتمال وقوع جميع هذه الأحمال في وقت واحد ضئيل. لذلك تسمح أكواد البناء بتخفيضات معينة عند جمع أحمال بعينها.

69 راجع §B.5 لمزيد من التفاصيل.

18.3.4 مسار الحمل

70 مفهوم مسار الحمل أساسي في الهندسة الإنشائية والتصميم والتحليل.

71 ويتطلب فهم مسار الحمل تتبع الطريق الذي تسلكه الأحمال من نقاط تطبيقها، مروراً بمختلف العناصر الإنشائية، حتى تنتقل بأمان إلى الأرض.

72 يجب أن يكون مسار الحمل مستمراً؛ أي يجب أن توجد، ابتداء من نقطة تطبيق الحمل، سلسلة واضحة غير منقطعة من العناصر الإنشائية تنقله إلى الأساس، ثم إلى التربة تحته. وقد يؤدي أي انقطاع في المسار إلى فشل إنشائي.

73 وينبغي مثالياً أن يكون مسار الحمل مباشراً وقصيراً قدر الإمكان. فقد تؤدي المسارات المتعرجة أو الملتوية إلى زيادة القوى في مناطق بعينها، فتولد تركّزات إجهاد تضعف السلامة الإنشائية. وتساعد المسارات المباشرة على توزيع الأحمال بانتظام أكبر وتقليل احتمال الفشل.

74 ويضمن تعدد مسارات الحمل بقاء مسارات بديلة تحمل الحمل إذا فشل أحدها. وبعبارة أخرى، ينبغي أن يكون المنشأ غير محدد *استاتيكياً*.

75 ويضمن التوزيع الصحيح للأحمال عدم تحميل عنصر أو وصلة مفردة فوق طاقتها. ويتطلب ذلك تصميم النظام الإنشائي بحيث تنتشر الأحمال بانتظام قدر الإمكان على عناصر إنشائية متعددة، مما يقلل خطر الفشل الموضعي.

76 يستطيع مسار الحمل المتين تحمل قدر من التغيرات أو حالات الفشل غير المتوقعة من دون انهيار كارثي، بما في ذلك القدرة على تحمل زيادة مفاجئة في الحمل أو ضرر يصيب جزءاً من المنشأ. وترتبط متانة المسار ارتباطاً وثيقاً بتعدده وبالمقاومة والمطيلية الكليتين للمواد المستعملة.

77 ومن الضروري في المنشآت المعقدة أن يتبع مسار الحمل تسلسلاً هرمياً للصلابة، بحيث تحمل العناصر الأشد صلابة معظم الأحمال. ويساعد ذلك على ضبط انتقال الأحمال عبر المنشأ، ويمنع تعريض العناصر الأضعف أو الأكثر مرونة لإجهاد مفرط.

78 وينبغي أن تكون تشوهات جميع مكونات مسار الحمل متوافقة؛ أي أن تتشوه بطريقة لا تخل بسلامة المكونات المجاورة. وهذا التوافق ضروري للحفاظ على الاستقرار العام للمنشأ تحت الحمل.

79 يتحقق مسار الحمل في المنشأ من خلال «تسلسل هرمي» من عناصر الانحناء البسيطة، التي تتصل بعد ذلك بالأعمدة، الشكل 18.9. أو يتحقق بالبلاطات ثنائية الاتجاه كما في الشكل 18.10.

80 إذا ارتكزت بلاطة ارتكازاً بسيطاً على أربعة مساند خطية، فقد يكون فعلها في اتجاه واحد أو اتجاهين إذا كانت النسبة a/b أكبر من اثنين أو أصغر منه، على الترتيب، الشكل 18.10.

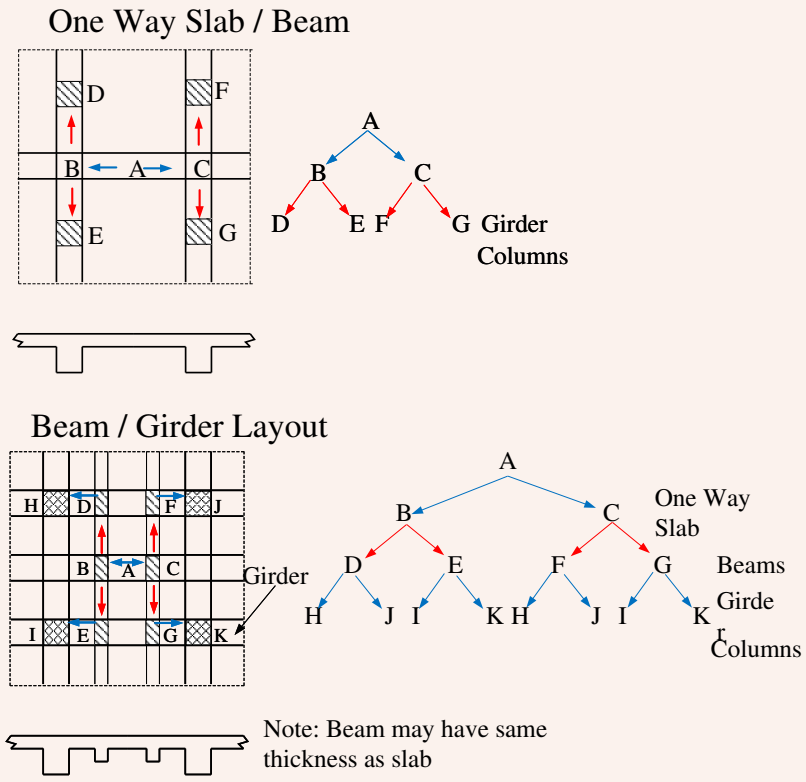
81 مع أننا سنركز على تصميم مقطع من الخرسانة المسلحة أو الفولاذ، يجب أن نتذكر ما يأتي:

1. المقطع جزء من كمرة أو جائز رئيسي.
2. الكمرة أو الجائز جزء في الواقع من منشأ ثلاثي الأبعاد، ينتقل فيه الحمل من أي نقطة إلى الأساس عبر واحد من أشكال إنشائية متعددة.

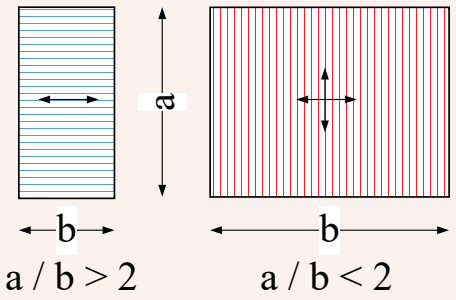
82 كان بناؤو الكاتدرائيات القديمة، الفصل 4 والشكل 4.7، يفهمون آليات انتقال الأحمال فهماً راسخاً يثير الإعجاب، كما يوضح الشكل 18.11a. ويعتمد النظام الإنشائي للكاتدرائية القوطية على تفاعل عدة عناصر أساسية تضمن معاً الاستقرار، مع إتاحة فضاءات مفتوحة كبيرة ونوافذ واسعة:

1. تعمل **القبوات المضلعة** على حمل السقف بتوجيه الأحمال على خطوط محددة سلفاً، هي الأضلاع،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 18.9: انتقال الأحمال في مباني الخرسانة المسلحة

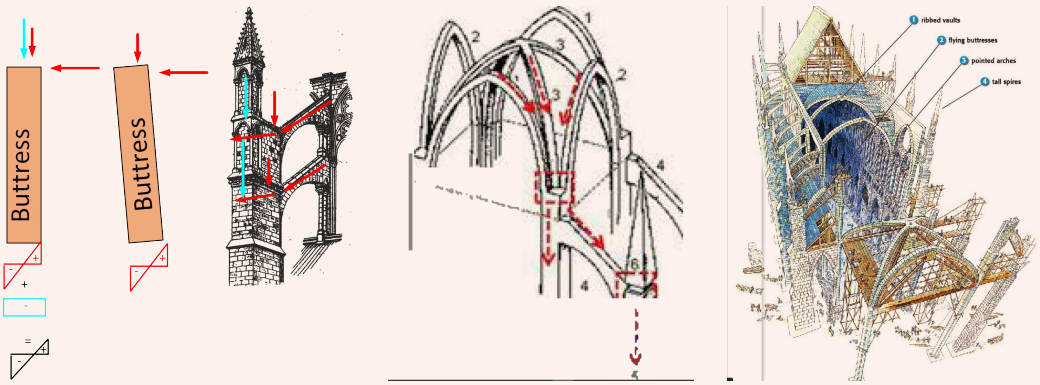


شكل 18.10: الفعل أحادي الاتجاه أو ثنائي الاتجاه في البلاطات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التي تنقل القوى إلى الأعمدة والدعامات. ويقلل هذا النهج الهيكلي كتلة القبو ويركز الأحمال في نقاط معينة.

2. تؤدي **الدعامات الطائرة** دوراً حاسماً في مقاومة الدفع الأفقي الذي تولده القبوات. ويزداد هذا الدفع كلما ازدادت القبوات تدبباً وابتعدت عن الشكل نصف الدائري. وتنقل الدعامات الطائرة هذه القوى الجانبية بعيداً عن الجدران الرئيسية إلى دعامات خارجية، مما يسمح بفتح الجدران لنوافذ زجاجية ملونة كبيرة مع الحفاظ على الاستقرار.
3. تمثل **العقود المدببة** ابتكاراً معمارياً وإنشائياً معاً. فهي تقلل إنشائياً الدفع الأفقي مقارنة بالعقود نصف الدائرية، وتتيح منشآت أعلى وأكثر نحافة. وهي تحدد معمارياً الطابع الجمالي القوطي وتتيح إدخال فتحات نوافذ كبيرة تزيد الضوء الداخلي.
4. تؤدي **الأبراج والمآذن**، التي تقع غالباً فوق الدعامات أو عند تقاطع الكاتدرائية، غرضين. فهي أولاً تنقل الأحمال الرأسية مباشرة إلى الأرض عبر دعامات ضخمة. ويوفر وزنها ثانياً قوى ضغط مثبتة تعاكس إجهادات الشد التي تنشأ في الدعامات الطائرة والعقود تحت الأحمال الجانبية. ويشبه أثر التثبيت هذا من حيث المبدأ الأبراج المثقلة في الجسور العقدية، مثل جسر ألكسندر الثالث في باريس، الشكل 18.11d، حيث تحمل الدعامات الضخمة تحت الأرض الدفع الجانبي، وتقلل إضافة الأبراج إجهادات الشد الناشئة من الانحناء المتولد.



(a) كاتدرائية قوطية (b) انتقال الأحمال (c) الإجهادات عند قاعدة الدعامة



(d) جسر ألكسندر الثالث

شكل 18.11: آليات انتقال الأحمال في الكاتدرائيات القوطية والعقود الضحلة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18.3.5 المساحات التابعة

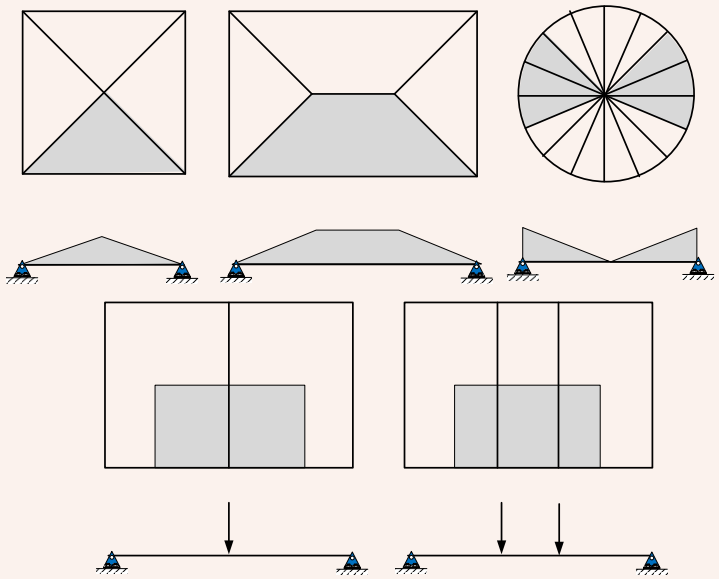
83 نحتاج كثيراً إلى طريقة مبسطة لإسناد الحمل المرتبط بعنصر إنشائي من دون إجراء تحليل معقد. وهنا نستخدم مفهوم *المساحة التابعة*.

84 تعرّف المساحة التابعة بأنها منطقة المنشأ التي تنقل أحمالها، الميتة والحية وأحمال الثلج وغيرها، إلى عنصر إنشائي محدد. وتحد هذه المنطقة عادة نقاط المنتصف أو خطوط المنتصف بين العناصر الإنشائية المتجاورة، أو حدود المنشأ نفسه. وينطبق المفهوم عموماً على العناصر المختلفة كما يأتي، الشكل 18.12:

الكمرات: المساحة التابعة للكمرة هي مساحة الطابق أو السقف التي تنقل حملها إليها. وفي كمرة تحمل بلاطة أحادية الاتجاه، تحسب المساحة التابعة غالباً بضرب عرض البلاطة بين مركزي الكمرتين المتجاورتين في بحر الكمرة.

الأعمدة: المساحة التابعة للعمود هي مساحة الطابق التي يحملها. وتحدد بتقسيم الطابق إلى مناطق وفق نقاط المنتصف بين الأعمدة؛ فيحمل كل عمود المساحة المحيطة به حتى المنتصف بينه وبين الأعمدة المجاورة.

بلاطات الطوابق: في حالة بلاطة تحمل الأحمال مباشرة، كما في المباني السكنية، قد تكون المساحة التابعة هي مساحة الطابق بأكملها إذا امتدت البلاطة من جدار إلى جدار.



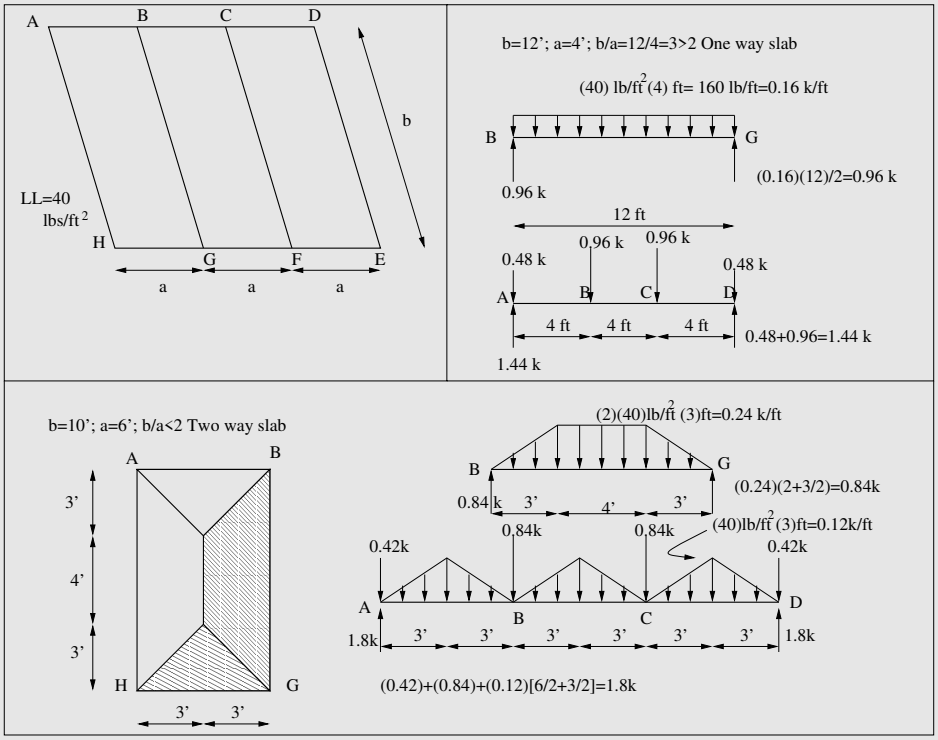
شكل 18.12: مفهوم المساحات التابعة لتحميل العناصر الإنشائية

85 يماثل تحديد المساحات التابعة في البلاطات تعيين خطوط الخضوع المقابلة، الشكل 56.1.

86 يرد مثال لحساب المساحة التابعة في §19.2.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18.3.5.1 مثال 18.3: المساحات التابعة



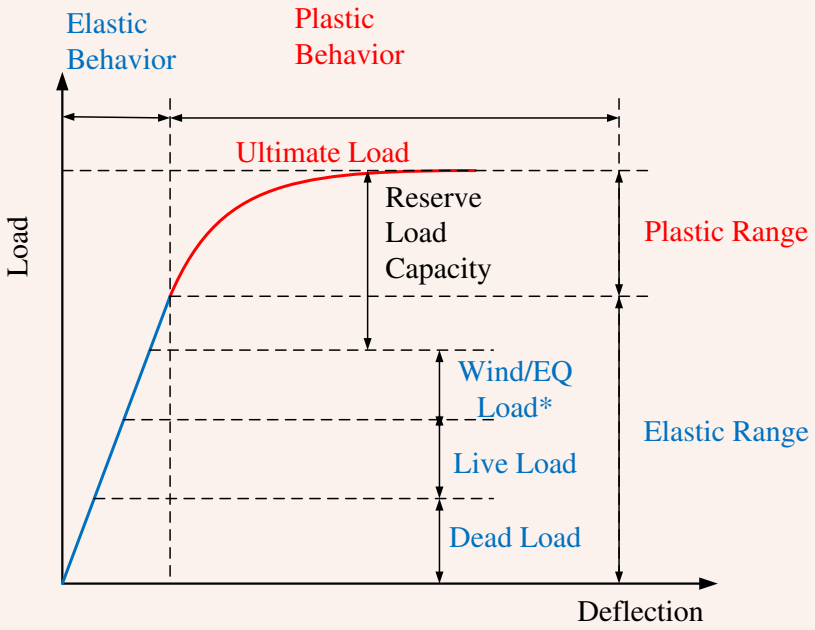
18.3.6 الاستجابة الإنشائية

87 نختتم هذا الفصل بدراسة دور كل نوع من الأحمال في الاستجابة الإنشائية، الشكل 18.13.

88 ينبغي لأحمال الخدمة، التي تشمل عادة الأحمال الميتة والحية، أن تبقي الاستجابة الإنشائية ضمن المجال المرن الخطي بوضوح. وتظل للمنشأ قدرة احتياطية كبيرة قبل بلوغ الاستجابة غير المرنة أو حمل الفشل في نهاية المطاف.

89 ويجوز، تحت الأحمال غير المعتادة كالرياح الشديدة أو النشاط الزلزالي، الاقتراب من الاستجابة اللدنة.

90 ولا ينبغي تجاوز المجال اللدن إلا في ظروف استثنائية، كما في زلزال قوي. وقد يؤدي ذلك بالفعل إلى ضرر دائم، لكن المنشأ يبقى قائماً وتنقذ الأرواح. وسيعرض هذا لاحقاً ضمن *هندسة الزلازل القائمة على الأداء*، الفصل 70.



شكل 18.13: دورة أحمال المنشأ، (Lin **and** Stotesbury, 1981)



أطلس فارنيزي العملاق أطلس يحمل الكرة السماوية؛ تمثيل قوي للأحمال وتوزيع القوى

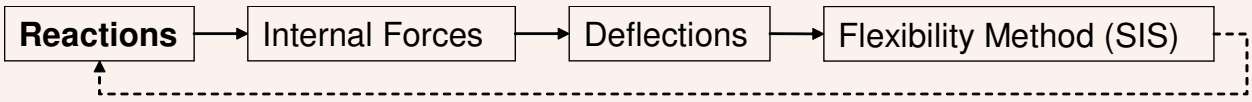
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

19 ردود الأفعال

ملخص

تشكل ردود الأفعال الحلقة الأخيرة في مسار الحمل، ولذلك تترتب عليها آثار مهمة في تصميم الأساسات. كما أن تحديدها قد يبسّط حساب القوى الداخلية، وهو موضوع الفصل التالي. ولا يقوم هذا الفصل على قدر كبير من الميكانيكا، عدا معادلات الاتزان التي يجب تكييفها بعناية مع المنشأ المدروس. يتناول القسم الأول عدة موضوعات تبدو غير مترابطة، لكنها تقدم مجتمعة أفكاراً حاسمة تسهّل تحديد ردود الأفعال. ثم يعرض القسم الثاني أمثلة متنوعة تتدرج في التعقيد لتوضيح هذه المفاهيم عملياً. وأخيراً، كما يبين الرسم الآتي، يمثل تحديد ردود الأفعال الخطوة الأولى في حل المنشآت غير المحددة استاتيكياً بطريقة المرونة.

19.1 مقدمة 760
19.1.1 أنواع المساند 761
19.1.2 الاتزان 762
19.1.3 معادلات الشروط 763
19.1.4 التحديد الاستاتيكي 764
19.1.5 عدم الاستقرار الهندسي 765
19.1.6 مخططات الجسم الحر 765
19.2 أمثلة 766
19.2.1 مثال 19.1: حمل هيدروستاتيكي 766
19.2.2 مثال 19.2: انتقال الأحمال . . . 767
19.2.3 مثال 19.3: كمرة بسيطة الارتكاز 768
19.2.4 مثال 19.4: حمل مكافئ للقطع المكافئ 768
19.2.5 مثال 19.5: كمرة ذات ثلاثة بحور 769
19.2.6 مثال 19.6: إطار جملوني ذو ثلاثة مفاصل 770
19.2.7 مثال 19.7: مساند مائلة 772
19.2.8 مثال 19.8: منشأ شبكي 773
19.2.9 مثال 19.9: اتزان طائرة 774
19.2.10 مثال 19.10: بارجة ضخمة . . . 775
19.2.11 مثال 19.11: رانكين: اتزان جسم طافٍ، برهان هيدروستاتيكي . . . 778
19.2.12 مثال 19.12: قصر الرياضة؛ نيرفي 780



19.1 مقدمة

1 مع أن القوة تعد من المفاهيم الأساسية والأولية في الفيزياء، فإن معناها لم يفهم حقاً على امتداد التاريخ، الفصل 14.

2 توجد ثلاثة أنواع من القوى:

الأحمال كميات متجهة خارجية تؤثر في المنشأ، إما مركزة وإما موزعة. وهي قوى أو عزوم، ويعرضها الفصل 18 بالتفصيل.

ردود الأفعال هي القوى التي تسلطها المساند على المنشأ المحمل. وتكون مجهولة عموماً، ويجب تحديدها قبل حساب القوى الداخلية. ويشيع الفهم الخاطئ أن قانون نيوتن الثالث، لكل فعل رد فعل *مساو له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه*، يحقق اتزان قوتين: الفعل ورد الفعل المتساويين والمتعاكسين. لكن القانون يقول في الواقع إنه إذا سلط الجسم A قوة F_a على الجسم B، فإن الجسم B يسلط قوة F_b

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مساوية ومعاكسة على الجسم A. ولا يتحقق اتزان لأن F_a وF_b تؤثران في جسمين مختلفين: إحداهما في A والأخرى في B.

القوى الداخلية هي القوى المؤثرة في المقاطع الداخلية للمنشأ واللازمة لإبقاء أي جزء منه في حالة اتزان. وسيعرضها الفصل 21.

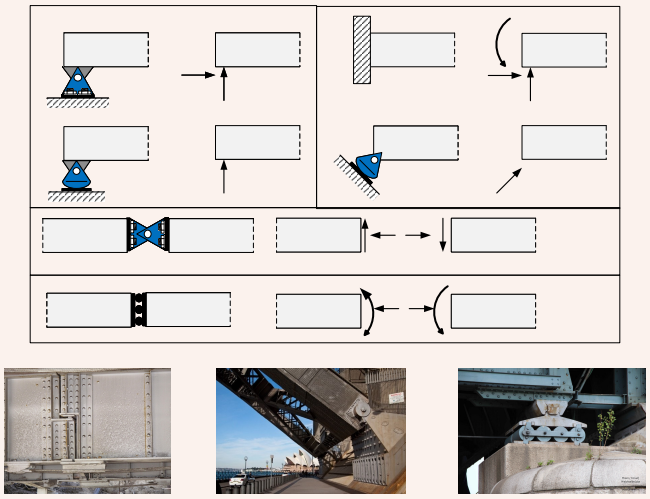
19.1.1 أنواع المساند

من الأسهل غالباً في تحليل المنشآت بالحساب اليدوي البدء بتحديد ردود الأفعال، وإن لم يكن ذلك ضرورياً دائماً.

وبعد تحديد ردود الأفعال تحسب القوى الداخلية، ثم تحسب التشوهات، أي الإزاحات والدورانات، أخيراً[1].

وردود الأفعال ضرورية لتحديد أحمال الأساسات.

وتختلف شروط الإسناد بحسب نوع المنشأ، الشكل 19.1.



شكل 19.1: أمثلة لشروط الحدود وردود الأفعال

المسند المتحرك: يقيد اتجاهاً واحداً فقط في منشأ ثنائي الأبعاد، وقد يقيد اتجاهاً أو اتجاهين في منشأ ثلاثي الأبعاد، وهو يسمح بالدوران.

المفصل: يسمح بالدوران ولا يسمح بالإزاحات. وتوجد مفاصل تسمح بالانتقال الرأسي ولا تسمح بالدوران.

المسند المثبت: يمنع الدوران والإزاحات في جميع الاتجاهات.

وهذه هي المساند الشائعة، مع إمكان وجود توليفات أخرى كثيرة في المنشآت ثلاثية الأبعاد.

[1] هذا هو تسلسل العمليات في طريقة المرونة الملائمة للحساب اليدوي. أما في طريقة الصلابة فنحدد الإزاحات أولاً، ثم القوى الداخلية وردود الأفعال، وهي الأنسب للتطبيق الحاسوبي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

19.1.2 الاتزان

تحدد ردود الأفعال من معادلات الاتزان الساكن المناسبة.

يجب أن يساوي مجموع القوى والعزوم صفراً في نظام ساكن[2].

توجد ست معادلات اتزان مستقلة في نظام إحداثي ديكارتي ثلاثي الأبعاد:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = \Sigma F_y = \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = \Sigma M_y = \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

ولا تنطبق جميع المعادلات على كل المنشآت. وفيما يأتي معادلات الاتزان لكل نوع من المنشآت:

تعريف 19.1: معادلات الاتزان

نوع المنشأ	المعادلات					
	القوى			العزوم		
	x	y	z	x	y	z
كمرة بلا قوة محورية		ΣF_y				ΣM_z
شبكة			ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	
جمالون أو إطار ثلاثي الأبعاد	ΣF_x	ΣF_y	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	ΣM_z
مجموعة بديلة						
كمرات بلا قوة محورية	ΣM_z^B ; ΣM_z^A					
جمالون أو إطار أو كمرة ثنائية الأبعاد ΣM_z^C ΣM_z^B ΣM_z^A	ΣF_x	ΣM_z^B	ΣM_z^A			

يجوز في حساب ردود الأفعال اختزال الحمل الخارجي المطبق إلى قوة مكافئة؛ أما لحساب القوى الداخلية، أي القص والعزم، فيجب استعمال توزيع الحمل الفعلي.

ويمكن جمع العزوم حول أي نقطة اختيارية.

تمثل القوى بمتجهات، والعزوم أيضاً كميات متجهة تمثل بسهم منحن أو بمتجه ذي رأسين.

ويفضل دائماً التحقق من الحسابات بمعادلة اتزان أخرى.

- قبل كتابة معادلة اتزان:

1. اختر اعتباطياً الاتجاه **الموجب**؛

[2] في النظام الديناميكي $\Sigma F = ma$، حيث m الكتلة وa التسارع.

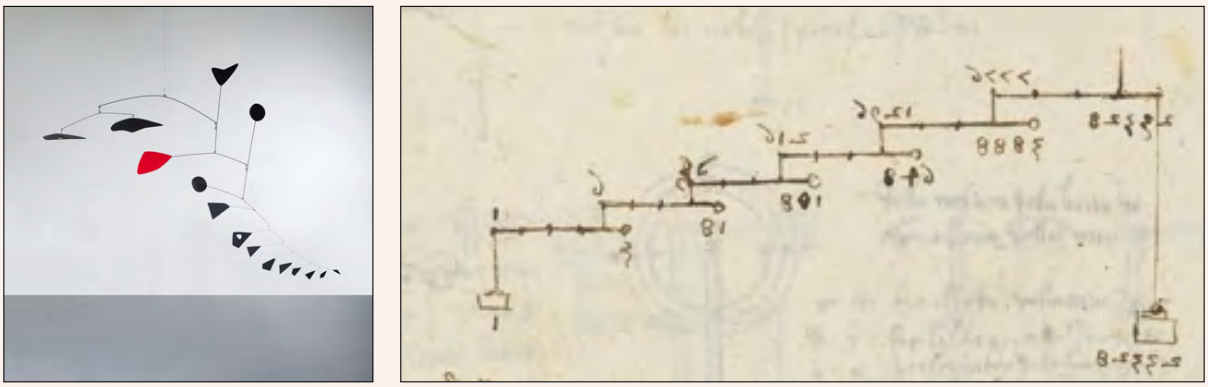
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. افترض اتجاهاً للكميات المجهولة؛
3. اجعل الطرف الأيمن للمعادلة صفراً.

فإذا كانت قيمة رد الفعل سالبة، كان اتجاهه معاكساً للاتجاه المفترض.

- يساوي مجموع القوى الخارجية مجموع القوى الداخلية في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، ومن ثم تساوي محصلة القوى والعزوم صفراً.

15 درس ليوناردو اتزان العزوم (Da Vinci, 1490) (الورقة 94)، كما جسده ألكسندر كالدر في منحوتاته المتحركة الشهيرة، الشكل 19.2.



شكل 19.2: اتزان العزوم، من ليوناردو (Da Vinci, 1490) إلى كالدر

16 وعلى سبيل الاستطراد، وكما سبق في §6.6.7، يشيع الاعتقاد الخاطئ بأن قانون نيوتن الثالث «لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومعاكس له في الاتجاه» يحقق اتزان قوتين هما الفعل ورد الفعل. لكنه يقول في الواقع إنه إذا سلط الجسم A قوة F_a على الجسم B، فإن B يسلط قوة F_b مساوية ومعاكسة على A. ولا يتحقق اتزان لأن القوتين تؤثران في جسمين مختلفين: إحداهما في A والأخرى في B (Cohen, 2002).

17 ولنتذكر مبرهنة فاريغنون ، §14.5.14: *يساوي مجموع عزوم عدة قوى متلاقية حول نقطة عزم محصلة تلك القوى؛ وبصيغة مكافئة، يساوي عزم قوة حول نقطة مجموع عزوم مركباتها.*

19.1.3 معادلات الشروط

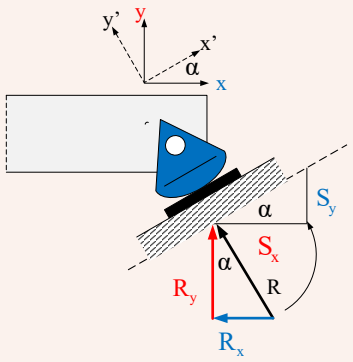
18 إذا كان في المنشأ مفصل داخلي، قد يصل بين منشأين فرعيين أو أكثر، فإنه يوفر معادلة إضافية ($\Sigma M = 0$ عند المفصل) يمكن استثمارها في تحديد ردود الأفعال.

19 وكثيراً ما تستعمل هذه المعادلات في الجمالونات، حيث تكون كل وصلة مفصلية، لتحديد ردود الأفعال.

20 عند مسند متحرك مائل ذي الإسقاطين الأفقي والرأسي S_x وS_y، تكون مركبتا رد الفعل R كما في الشكل 19.3:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{S_y}{S_x}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 19.3: ردود الأفعال عند مسند متحرك مائل

19.1.4 التحديد الاستاتيكي

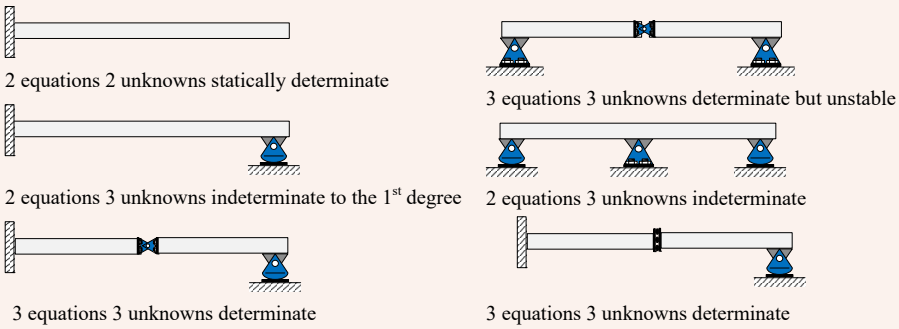
للسياق التاريخي، انظر §11.4.6

21 تعتمد ردود الأفعال في المنشآت المحددة استاتيكياً على الهندسة وشروط الحدود والأحمال وحدها.

22 وتستعمل المؤلفات غير الأنجلوسكسونية المصطلحين الأكثر أناقة *متساوي الاستاتيكية* و*فائق الاستاتيكية* للدلالة على المنشآت المحددة وغير المحددة استاتيكياً، على الترتيب.

23 وإذا تعذر تحديد ردود الأفعال من معادلات الاتزان الساكن وحدها، ومعادلات الشروط إن وجدت، قيل إن المنشأ غير محدد استاتيكياً، أو فائق الاستاتيكية.

24 تساوي درجة عدم التحديد الاستاتيكي الفرق بين عدد ردود الأفعال وعدد معادلات الاتزان، الشكل 19.4.



شكل 19.4: درجة عدم التحديد الاستاتيكي

25 يؤدي فشل مسند واحد في نظام محدد استاتيكياً إلى انهيار المنشأ. ولذلك يكون المنشأ غير المحدد استاتيكياً أكثر أماناً من المنشأ المحدد استاتيكياً.

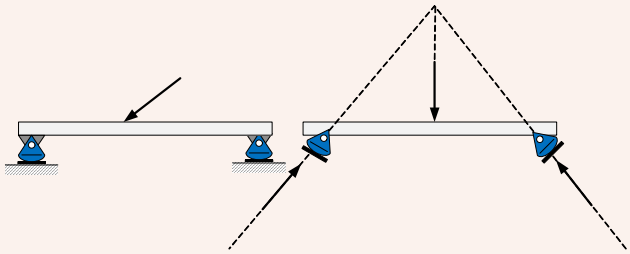
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26 وتعتمد ردود الأفعال في المنشآت غير المحددة استاتيكياً أيضاً على خصائص المواد، مثل معامل يونغ أو معامل القص، وعلى مقاطع العناصر، مثل الطول والمساحة وعزم العطالة.

19.1.5 عدم الاستقرار الهندسي

27 يحدث عدم الاستقرار الهندسي إذا:

1. كانت جميع ردود *الأفعال متوازية*، وطبق على المنشأ حمل غير مواز لها؛
2. كانت جميع ردود *الأفعال* متلاقية، كما في الشكل 19.5؛



شكل 19.5: ردود أفعال متلاقية

3. كان عدد ردود الأفعال *أصغر* من عدد معادلات الاتزان، أي وجدت *آلية* في المنشأ.

28 ويمكن إظهار ذلك رياضياً إذا كان محدد معادلات الاتزان صفراً، أو كانت المعادلات مترابطة.

19.1.6 مخططات الجسم الحر

تعريف 19.2: مخطط الجسم الحر

مخطط الجسم الحر رسم يبين المقدار النسبي والاتجاه لجميع القوى والعزوم المؤثرة في جسم في حالة معينة. وهو مخطط لا رسم بمقياس.

29 يتكون مخطط الجسم الحر من:

1. صورة مبسطة للجسم؛
2. قوى تمثل بأسهم مستقيمة تشير إلى اتجاه فعلها في الجسم، وعزوم تمثل بمنحنيات ذات رأس سهم أو بمتجهات ذات رأسين يشيران إلى اتجاه فعلها؛
3. نظام إحداثي مرجعي واحد أو أكثر؛
4. ردود أفعال للقوى المطبقة تمثل، بحسب الاصطلاح وإن لم يلتزم به دائماً، بعلامات قصيرة تقطع ساق المتجه.

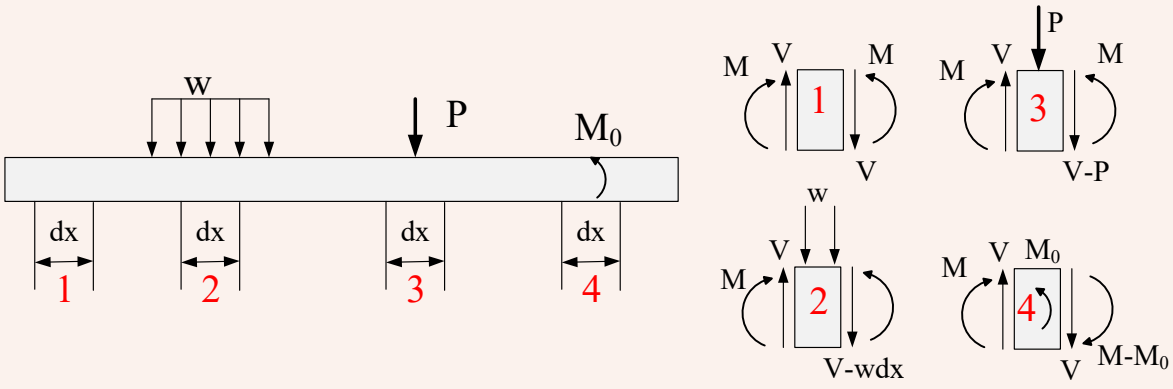
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 يعتمد عدد القوى والعزوم الممثلة على المسألة المحددة والافتراضات المعتمدة.

31 ويجب أن تتزن جميع القوى والعزوم فتكون محصلتها صفراً.

32 لا يمثل مخطط الجسم الحر بالضرورة جسماً فيزيائياً كاملاً؛ إذ يمكن اختيار أجزاء منه للتحليل. ويسمح ذلك بحساب القوى الداخلية بعد إظهارها كأنها قوى خارجية، ويمكن تكرار القطع لحسابها عند مواضع مختلفة داخل الجسم.

33 يبين الشكل 19.6 مخططات الجسم الحر لكمرة معرضة لأنواع مختلفة من الأحمال.



شكل 19.6: مخططات الجسم الحر لكمرة معرضة لأحمال مختلفة

34 ترسم مخططات الجسم الحر في معظم المسائل على الشكل غير المتشوه؛ أما في بعض المسائل التي تنطوي على لاخطية هندسية فيجب رسمها على أساس الشكل المتشوه، §29، ولا سيما إذا حدث عدم استقرار، §19.1.5.

19.2 أمثلة

19.2.1 مثال 19.1: حمل هيدروستاتيكي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

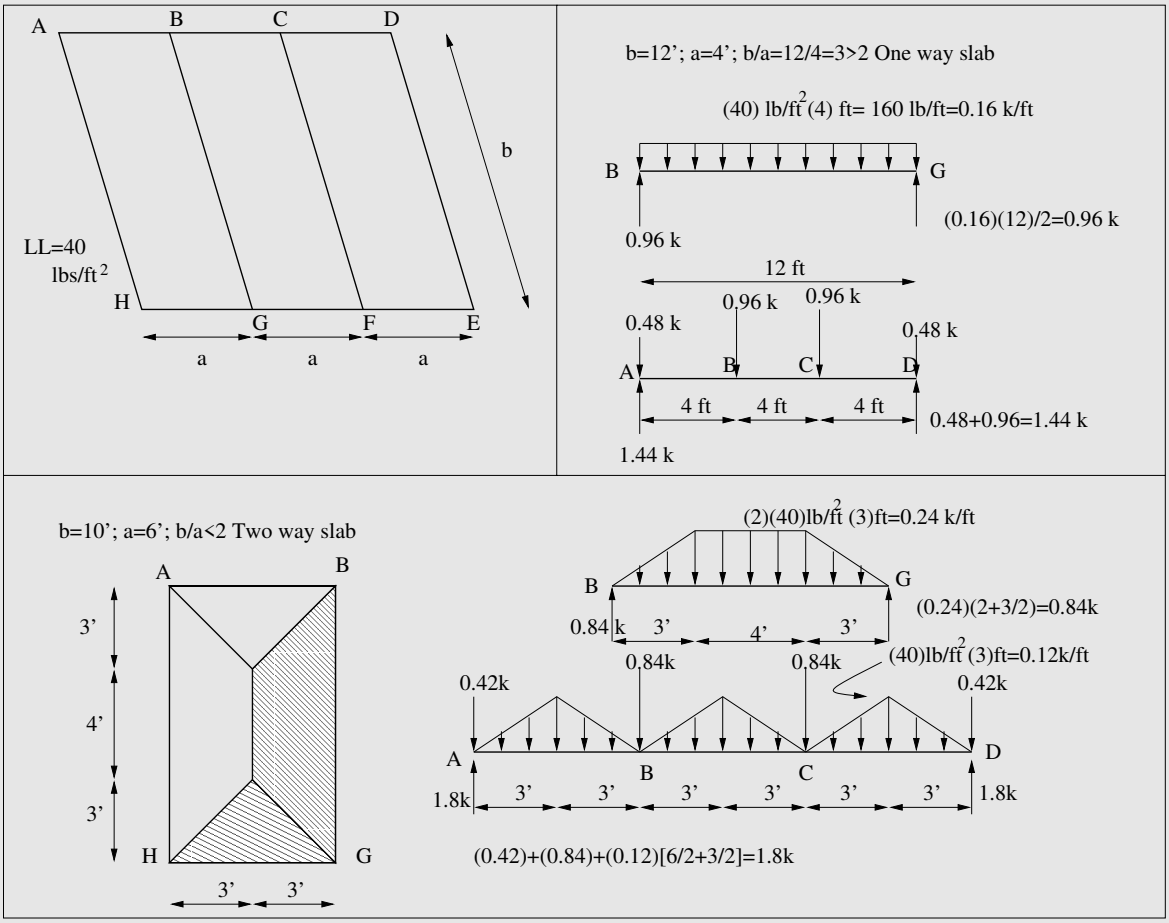
يقع قبو مبنى على عمق 12 قدماً تحت منسوب الأرض، وتقع المياه الجوفية على عمق 9 أقدام. ما سماكة البلاطة الخرسانية اللازمة لمعادلة قوة الرفع الهيدروستاتيكية تماماً؟ يجب موازنة الضغط الهيدروستاتيكي بالضغط الناتج من وزن الخرسانة. وبما أن $p = \gamma h$، نساوي الضغطين ونحل لإيجاد h، وهو ارتفاع البلاطة الخرسانية:

$$\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{الماء}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{الخرسانة}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq \boxed{15.0\ \text{بوصة}}$$

19.2.2 مثال 19.2: انتقال الأحمال

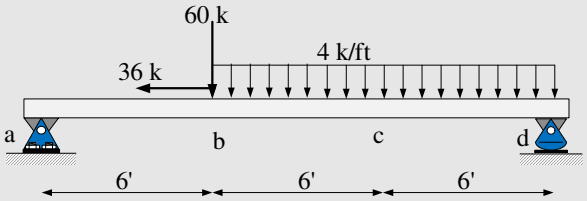
يقدم الشكل الآتي مثالاً بسيطاً مكتمل العناصر على انتقال الأحمال.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

19.2.3 مثال 19.3: كمرة بسيطة الارتكاز

حدد ردود أفعال الكمرة البسيطة الارتكاز الآتية.



للكمرة ثلاثة ردود أفعال، ولدينا ثلاث معادلات للاتزان الساكن، ومن ثم فهي محددة استاتيكياً.

$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow \quad & R_{ax} - 36\text{k} = 0 \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow \quad & R_{ay} + R_{dy} - 60\text{k} - (4)\ \text{k/ft}(12)\ \text{ft} = 0 \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^c = 0; \Rightarrow \quad & 12R_{ay} - 6R_{dy} - (60)(6) = 0
\end{aligned}
$$

أو

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 36 \\ 108 \\ 360 \end{Bmatrix}
\Rightarrow
\begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 36\ \text{k} \\ 56\ \text{k} \\ 52\ \text{k} \end{Bmatrix}
$$

وكان يمكن، بدلاً من ذلك، استعمال مجموعة أخرى من المعادلات:

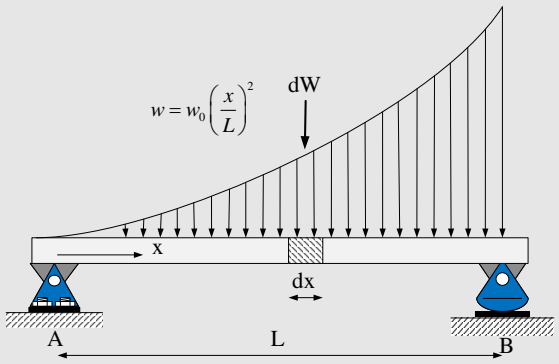
$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^a = 0; \quad (60)(6) + (48)(12) - (R_{dy})(18) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{dy} = 52\ \text{k} \uparrow \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^d = 0; \quad (R_{ay})(18) - (60)(12) - (48)(6) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{ay} = 56\ \text{k} \uparrow
\end{aligned}
$$

التحقق:

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; 56 + 52 - 60 - 48 = 0 \checkmark$$

19.2.4 مثال 19.4: حمل مكافئ للقطع المكافئ

حدد ردود أفعال كمرة بسيطة الارتكاز طولها L، معرضة لحمل يتبع قطعاً مكافئاً $w = w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لدينا مجهولان ومعادلتان للاتزان، ΣF_y وΣM. ونبدأ بحكمة بالثانية لأنها تعطينا مباشرة رد الفعل عند B. وبأخذ عنصر متناهي الصغر طوله dx ووزنه dW وعزمه dM:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^A = 0; \int_{x=0}^{x=L} \underbrace{\underbrace{\underbrace{w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2}_{w}\, dx}_{dW} \times x}_{dM} - (R_B)(L) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{L} w_0 \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} w_0 L$$

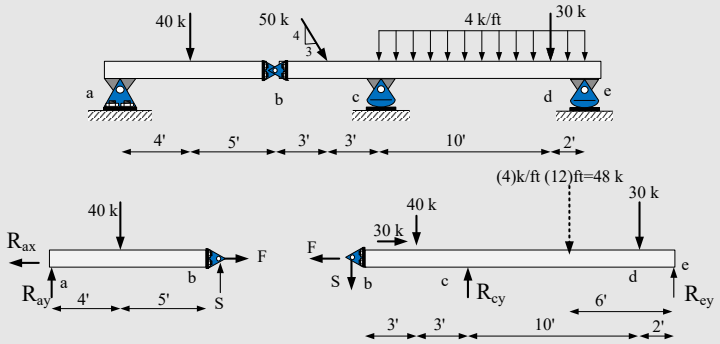
وبعد تحديد R_B، نحسب R_A من

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; R_A + \underbrace{\frac{1}{4} w_0 L}_{R_b} - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{w_0}{L^2}\frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} w_0 L = \frac{1}{12} w_0 L$$

19.2.5 مثال 19.5: كمرة ذات ثلاثة بحور

حدد ردود أفعال الكمرة الآتية ذات البحور الثلاثة.



لدينا أربعة مجاهيل $(R_{ax}, R_{ay}, R_{cy}, R_{ey})$، وثلاث معادلات اتزان ومعادلة شرط واحدة $(\Sigma M_b = 0)$، ومن ثم فالمنشأ محدد *استاتيكياً*. ومع وجود طرائق كثيرة صحيحة لحساب هذه المجاهيل الأربعة، فإن بعضها *أبسط* من غيره. وفي هذه الحالة، أسهل ما يمكن هو فصل المنشأ إلى منشأين فرعيين وفحص مخطط الجسم الحر لكل منهما على حدة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بعزل الجزء ab:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^b = 0; (9)(R_{ay}) - (40)(5) = 0 \quad \Rightarrow R_{Ay} = 22.2\text{k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^a = 0; (40)(4) - (S)(9) = 0 \quad \Rightarrow S = 17.7\text{k} \uparrow$$
$$\Sigma F_x = 0; \quad \Rightarrow R_{ax} = 30\text{k} \leftarrow$$

وبعزل الجزء be:

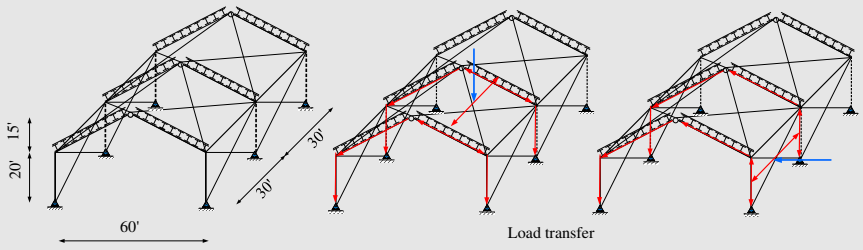
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^e = 0;$$
$$-(17.7)(18) - (40)(15) - (4)(12)(6) - (30)(2) + R_{cy}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{cy} = \frac{1,266.6}{12} = 105.6\text{k} \uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^c = 0;$$
$$-(17.7)(6) - (40)(3) + (4)(12)(6) + (30)(10) - R_{ey}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{ey} = \frac{361.8}{12} = 30.15\text{k} \uparrow$$

التحقق:

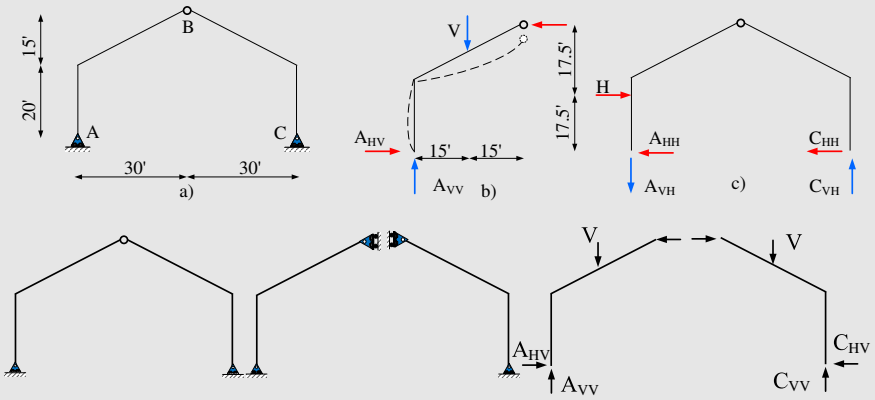
$$\Sigma F_y = 0; \uparrow; 22.2 - 40 - 40 + 105.6 - 4(12) - 30 + 30.15 = -0.050 \simeq 0. \checkmark$$

19.2.6 مثال 19.6: إطار جملوني ذو ثلاثة مفاصل

لإطارات جملونية ثلاثية المفاصل متباعدة *30* قدماً *بين المراكز*، حدد مركبات ردود الأفعال الناشئة من: 1) حمل ميت *للسقف* مقداره *psf* 20 من مساحة السقف؛ 2) حمل *ثلج* مقداره *psf* 30 من الإسقاط الأفقي؛ 3) حمل رياح مقداره *psf* 15 من الإسقاط الرأسي. وحدد *القيم التصميمية الحرجة* لردود الأفعال الرأسية والأفقية.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



بسبب التناظر، لا ينقل المفصل قوة رأسية تحت حملي الثلج والحمل الميت، ولذلك يكفي النظر إلى الجانب الأيسر أو الأيمن من الإطار.

الأحمال النقطية المكافئة:

1. *الحمل الميت للسقف* على جانب واحد من الإطار:

$$DL = (20)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}\left(\sqrt{30^2+15^2}\right)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 20.2\ \text{k}\downarrow$$

2. حمل *الثلج* على جانب واحد من الإطار:

$$SL = (30)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(30)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 27.\ \text{k}\downarrow$$

3. حمل *الرياح* على الإطار، مع إهمال الشفط:

$$WL = (15)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(20+15)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 15.75\ \text{k}\rightarrow$$

توجد أربعة ردود أفعال وثلاث معادلات اتزان ومعادلة شرط واحدة ⇒ والمنشأ محدد *استاتيكياً*. وبدلاً من ذلك، لا يوجد بسبب *التناظر* قص عند المفصل C، فيكون للمنشأ الفرعي ردّا فعل عند المسند ورد فعل أفقي عند المفصل.

تحدد العلاقة بين رد الفعل الأفقي A_{HV} والرأسي A_{VV} عند A، الناشئين من حمل رأسي مركزي، بأخذ *العزم* حول المفصل *(b)*:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B &=& 0; & 15V-30A_{VV}+35A_{HV} &=& 0 \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y &=& 0; & A_{VV}-V &=& 0; \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} A_{HV} &=& \frac{15A_{VV}}{35} \\ &=& .429A_{VV} \end{array}$$

وبالتعويض عن الحمل الميت للسقف وحمل الثلج نحصل على

$$\begin{array}{rcll} A_{VV}^{DL} = C_{VV}^{DL} &=& & 20.2\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{DL} = C_{HV}^{DL} &=& (.429)(20.2) & =8.66\ \text{k}\rightarrow \\ A_{VV}^{SL} = C_{VV}^{SL} &=& & 27.\ \text{k}\uparrow \\ A_{HV}^{SL} = C_{HV}^{SL} &=& (.429)(27.) & =11.58\ \text{k}\rightarrow \end{array}$$

وتحدد ردود الأفعال الناشئة من حمل الرياح القادم من اليسار كما يأتي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. يحدد رد *الفعل الرأسي* عند A بالنظر إلى المنشأ كله وأخذ العزم حول C، الحالة (c):

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^C = 0; (15.75)(\frac{20+15}{2}) - 60A_{VH} = 0 \qquad \Rightarrow A_{VH} = 4.60\text{k}\ \uparrow$$

A_{VH} هو رد الفعل الرأسي عند A الناشئ من الحمل الأفقي[a]. ومن اتزان القوى في اتجاه y، نحصل على $B_{VH} = -A_{VH} = -4.60\ \downarrow$، مع ملاحظة أن حمل الرياح لا يملك مركبة رأسية.

2. يحدد رد *الفعل الأفقي* عند B بالنظر إلى المنشأ الفرعي الأيمن وأخذ العزم حول المفصل الداخلي عند B:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = 0; 35C_{HH} - (4.6)(30) = 0 \qquad \Rightarrow C_{HH} = 3.95\text{k}\ \leftarrow$$

3. يحدد رد *الفعل الأفقي* عند A بالنظر إلى المنشأ كله وجمع القوى في اتجاه x:

$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; \quad 15.75 - 3.95 - A_{HH} = 0 \quad \Rightarrow A_{HH} = 11.80\ \text{k}\ \leftarrow$$

ولاحظ أن A يحمل معظم الحمل الأفقي.

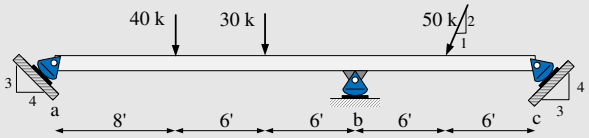
وأخيراً، يجب تصميم المساند لأشد توليفة معقولة من ردود الأفعال:

$$\begin{aligned} H &= 8.66\ \text{k} + 11.58\ \text{k} + 11.8\ \text{k} &&= 32.04\ \text{k} \\ V &= 20.2\ \text{k} + 27.0\ \text{k} + 4.60\ \text{k} &&= 51.8\ \text{k} \end{aligned}$$

[a] يستعمل ترميز الدليلين على نطاق واسع في التحليل الإنشائي؛ إذ يدل X_{yz} عادة على الكمية X عند y الناشئة من الفعل z.

19.2.7 مثال 19.7: مساند مائلة

يبين الآتي مثالاً لكمرة ذات مساند مائلة.



نحدد مبدئياً خمسة ردود أفعال، لكن لدينا معادلتان للشروط، واحدة عند كل مسند مائل، ولذلك نحصل مع معادلات الاتزان الثلاث على نظام محدد استاتيكياً.

$$\begin{aligned} &(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^b = 0; \\ &(R_{ay})(20) - (40)(12) - (30)(6) + (44.72)(6) - (R_{cy})(12) = 0 \\ &\Rightarrow 20R_{ay} = 12R_{cy} + 391.68 \end{aligned}$$

$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; \frac{3}{4}R_{ay} - 22.36 - \frac{4}{3}R_{cy} = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.5625R_{ay} - 16.77$$

وبحل المعادلتين:

$$\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ 0.5625 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 391.68 \\ 16.77 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.37\text{k}\ \uparrow \\ -8.69\text{k}\ \downarrow \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تكون المركبتان الأفقيتان لردي الفعل عند a وc:

$$R_{ax} = \frac{3}{4}14.37 \quad = 10.78 \text{ k} \rightarrow$$
$$R_{cx} = \frac{4}{3}8.69 \quad = -11.59 \text{ k} \rightarrow$$

وأخيراً نحسب R_{by}:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^a = 0;$$
$$(40)(8) + (30)(14) - (R_{by})(20) + (44.72)(26) + (8.69)(32) = 0$$
$$\Rightarrow R_{by} = 109.04\text{k} \uparrow$$

ونتحقق من النتائج:

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; 14.37 - 40 - 30 + 109.04 - 44.72 - 8.69 \quad = 0 \checkmark$$
$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; 10.78 - 22.36 + 11.59 \quad = 0 \checkmark$$

19.2.8 مثال 19.8: منشأ شبكي

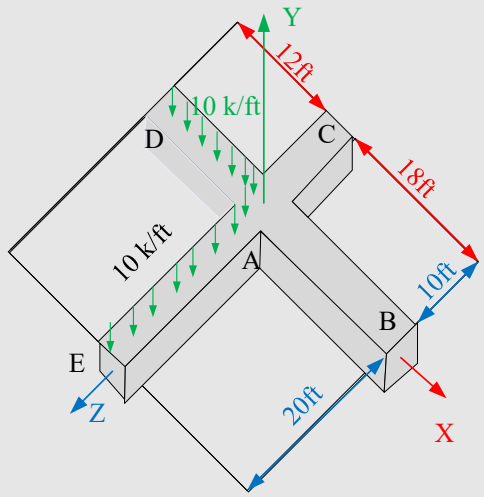
يتصل المنشأ الشبكي المستوي الآتي اتصالاً صلباً عند المساند الأربعة B وC وD وE. ومن الواضح أنه غير محدد استاتيكياً من الدرجة التاسعة $(4\times3-3)$. وكما سنرى لاحقاً، فهو غير محدد حركياً من الدرجة الثالثة، إذ توجد ثلاث إزاحات مجهولة عند A.

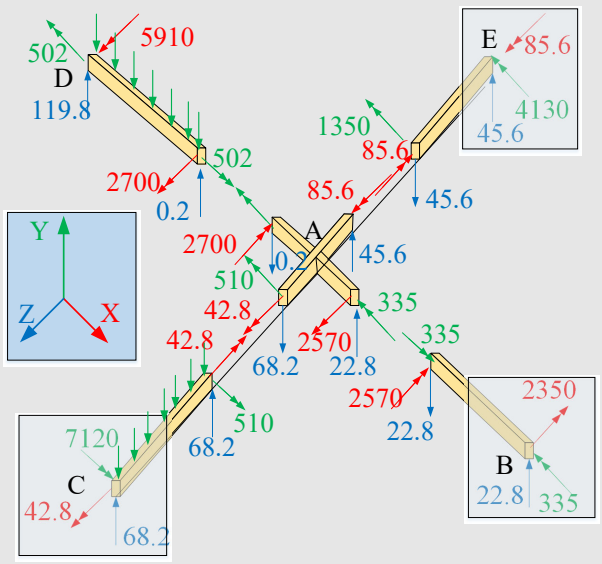
يحلل أولاً بطريقة الصلابة، وتحدد ردود الأفعال عند B وC وE. وعندئذ يصبح الجزء الباقي محدداً استاتيكياً، إذ لا يبقى إلا ثلاثة ردود أفعال خارجية، ويمكن من الاستاتيكا البسيطة، أي معادلات الاتزان الثلاث ΣM_x وΣF_y وΣM_z، تحديد ردود الأفعال عند D والقوى الداخلية.

وليس من الضروري البدء بتحديد ردود الأفعال عند D؛ إذ يمكن الانطلاق من أي ثلاثة مساند نحو المركز، ثم «السير» إلى D. وبعد ذلك تتحقق النتائج بالاستاتيكا مع الاكتفاء بالأحمال وردود الأفعال الخارجية.

ويبرز هذا التمرين قيمة رسم مخططات الجسم الحر بصورة صحيحة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

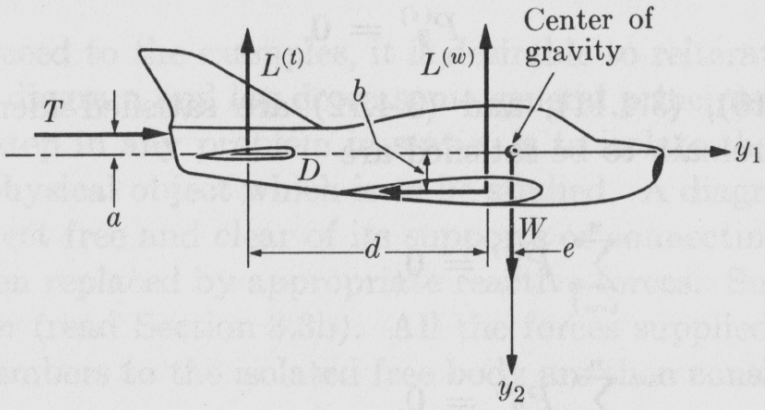




19.2.9 مثال 19.9: اتزان طائرة

عن Statics of deformable solids
Bisplinghoff, Mar **and** Pian, 1965 نريد حساب القوى اللازمة للمحافظة على اتزان طائرة في طيران أفقي منتظم.

وفيما يأتي مخطط مبسط للجسم الحر للطائرة ذات الوزن W. ويفترض أن مقاومة الهواء D معلومة عند سرعة الطيران.
ونريد حساب قوة الرفع على الجناح $L^{(w)}$، وقوة الرفع على الذيل $L^{(t)}$، ودفع المحرك T اللازم للطيران الأفقي المنتظم.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهذه بوضوح مسألة اتزان ساكن.

$$\rightarrow \Sigma F_{y1} = 0; \Rightarrow T - D = 0$$
$$\uparrow \Sigma F_{y2} = 0; \Rightarrow -L^{(w)} - L^{(t)} + W = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^a = 0 \Rightarrow Ta + Db + L^{(t)}(d+e) + L^{(w)}e = 0$$

أو

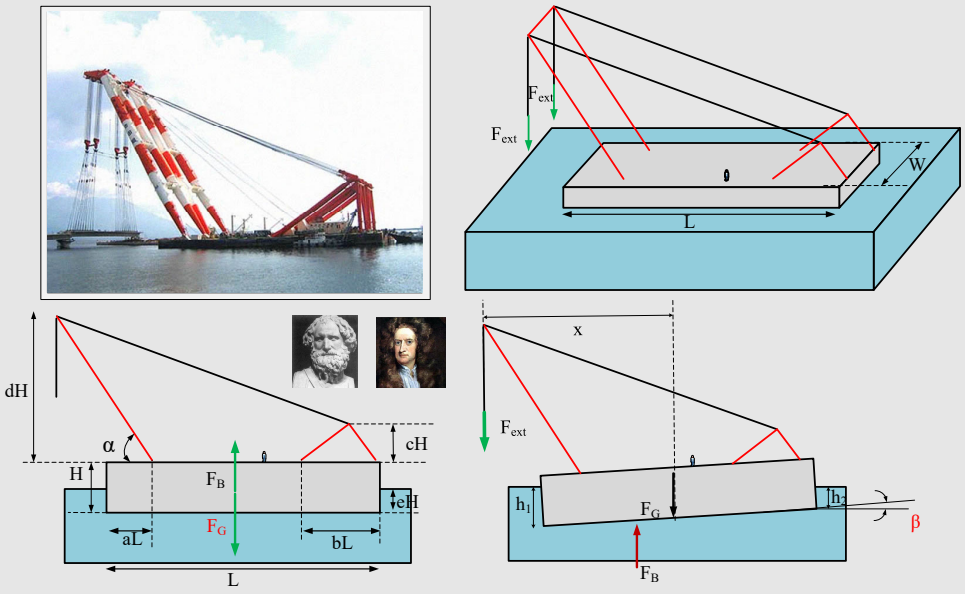
$$T = D$$
$$L^{(t)} = -\frac{D(a+b) + We}{d}$$
$$L^{(w)} = W + \frac{D(a+b) + We}{d}$$

ونلاحظ أن المحافظة على الاتزان تتطلب قوة متجهة إلى أسفل عند الذيل.

19.2.10 مثال 19.10: بارجة ضخمة

حدد أبعاد «بارجة ضخمة»[a] لرفع حمل $2F_{ext}$. تبين أدناه خصائص البارجة، حيث L وH وW وW طولها وارتفاعها وعرضها ووزنها، وF_G وF_B قوتا الثقل والطفو. افترض أن مركز الثقل يقع عند $L/2$ و$W/2$ و$H/2$، وأن المعاملات a, b, c, d, e معلومة.

الجزء الأول افترض أن البارجة صلبة.

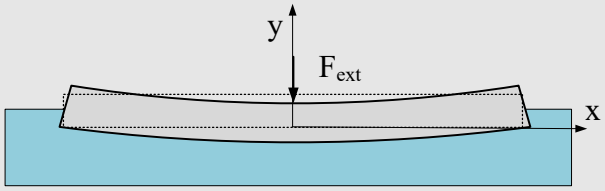


1. بافتراض عدم وجود حمل خارجي، احسب e، وهو الجزء المغمور من ارتفاع البارجة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. عند وجود قوة خارجية F_{ext}:
   (a) ارسم مخططاً واضحاً للجسم الحر؛
   (b) اكتب المعادلات المنطبقة واحسب h_1 وh_2 وβ؛
   (c) حدد أقصى قوة F_{max} يمكن رفعها قبل أن تغمر المياه مؤخرة البارجة.

الجزء الثاني افترض أن البارجة مرنة، وأن $F_{ext} \gg F_G$ وتطبق عند $L/2$. اشتق المعادلة التفاضلية الحاكمة بدلالة الإزاحة الرأسية y وحمل الطفو المنتظم q_B.

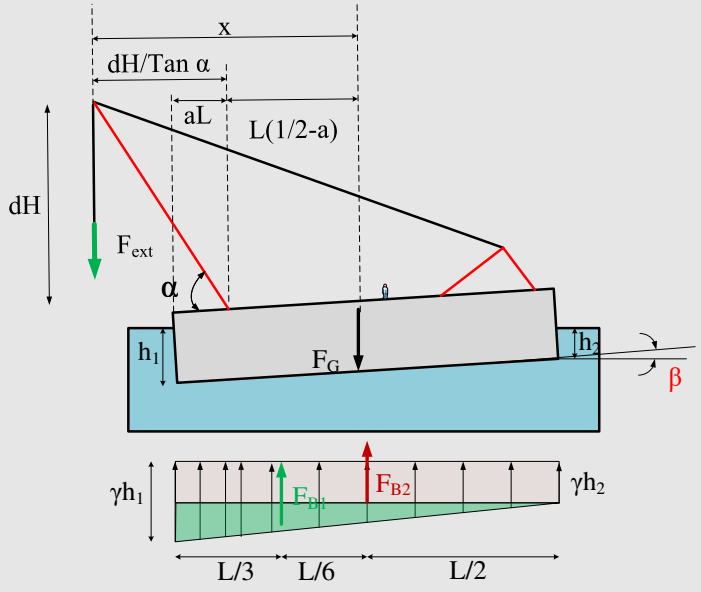


الجزء الأول البارجة الصلبة

1. وفق قانون أرخميدس، يساوي وزن البارجة وزن الماء المزاح:

$$F_G = \gamma.W.L.eH \Rightarrow e = \frac{F_G}{\gamma.W.L.W}$$

2. عند وجود قوة خارجية F_{ext}:
   (a) مخطط الجسم الحر:



   (b) اكتب المعادلات المنطبقة:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- قوى الطفو:

$$F_B = F_{B1} + F_{B2}$$
$$F_{B1} = \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2}$$
$$F_{B2} = \gamma h_2 WL$$

- الهندسة:

$$x = \frac{dH}{\tan}\alpha + L\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

- جمع العزوم حول المركز:

$$F_{ext}x - F_{B1}\frac{L}{6} = 0$$
$$F_{B1} = \frac{6F_{ext}x}{L}$$
$$\gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} = \underbrace{\frac{6F_{ext}}{L}\left[\frac{dH}{\tan\alpha} + L\left(\frac{1}{2} - a\right)\right]}_{A}$$

- جمع القوى الرأسية:

$$F_{B1} + F_{B2} - F_G - F_{ext} = 0$$
$$F_{B2} = F_G + F_{ext} - F_{B1}$$
$$\gamma h_2 WL = F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}$$
$$h_2 = \frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL}$$

- احسب h_1:

$$\gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} = A$$
$$h_1 = \frac{2A}{\gamma WL} - h2$$

- احسب β:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{h_1 - h_2}{L}\right)$$

(c) لكي تبدأ البارجة في الارتفاع، يكون $h_2 = 0$، أو

$$\frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} = 0 \Rightarrow F_{ext} = \frac{F_G}{6x/L - 1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجزء الثاني البارجة المرنة

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M}{EI}\\
\frac{d^2M}{dx^2} &= q\\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{q}{EI}\\
q &= -\gamma W y\\
\frac{d^4y}{dx^4} &= -\frac{\gamma W y}{EI}\\
k^2 &= \frac{\gamma W}{4EI}\\
\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y &= 0
\end{aligned}$$

وهي المعادلة نفسها لكمرة على أساس مرن. ويكون حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الرابعة على الصورة $y = e^{\alpha x}$، مما يعطي

$$\begin{cases} \dfrac{d^4}{dx^4} - \alpha^4 y = 0\\ \dfrac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 = -4k^4\\ \alpha^2 = \pm 2ik^2\\ \alpha = \pm\sqrt{\pm 2i}k\\ \quad = \pm(1 \pm i)k \end{cases}$$

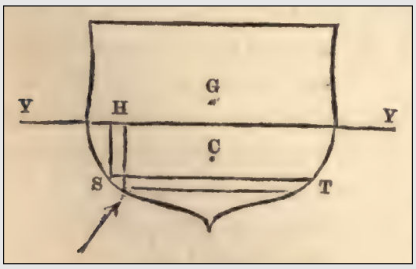
أو

$$y = e^{kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

[a] استلهمت المسألة من قراءة هذا المقال.

19.2.11 مثال 19.11: رانكين: اتزان جسم طافٍ، برهان هيدروستاتيكي

يتبع هذا المثال برهان رانكين الكلاسيكي على أن محصلة فعل سائل في جسم طافٍ قوة رأسية متجهة إلى أعلى، تساوي وزن السائل المزاح، ويمر خط عملها بمركز حجم السائل المزاح، أي مركز الطفو. (Rankine, 1858, Art. 120)



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجسم الطافي، رانكين، المادة 120. ليكن YY السطح الحر الأفقي للسائل. خذ جزءاً مستوياً صغيراً من السطح المغمور مساحته S، يقع مركزه على عمق رأسي x تحت YY. تكون شدة الضغط الهيدروستاتيكي عند ذلك العمق

$$p = wx,$$

حيث w وزن وحدة الحجم من السائل. ومن ثم يكون الضغط الكلي المؤثر في S مساوياً pS وعمودياً على السطح. ولتكن α الزاوية بين المساحة المستوية S والسطح الحر الأفقي، أو، بصورة مكافئة، الزاوية بين اتجاه الضغط والرأسي.

- **الإسقاطات.** الإسقاط الأفقي للمساحة المائلة S هو

$$S_h = S\cos\alpha,$$

وإسقاطها الرأسي على مستوى رأسي عمودي على محور منشور أفقي هو

$$S_v = S\sin\alpha.$$

- **المركبات الأفقية.** بتحليل الضغط pS إلى مركبات، تكون المركبة الأفقية المؤثرة في S:

$$dF_H = pS_v = (wx)(S\sin\alpha).$$

يبين رانكين أنه يقابل كل عنصر سطحي S عنصر آخر له الإسقاط الرأسي نفسه وعلى العمق نفسه، فيولد مركبة أفقية مساوية ومعاكسة. ولذلك، بالجمع على السطح المغمور كله:

$$\sum dF_H = 0,$$

ولا تكون لمحصلة فعل المائع مركبة أفقية.

- **المركبة الرأسية والسائل المزاح.** المركبة الرأسية للضغط على S هي

$$dF_V = pS_h = (wx)(S\cos\alpha).$$

تمثل الكمية $x\,(S\cos\alpha)$ حجم عمود منشوري رأسي من السائل قائم على الإسقاط الأفقي لـS، ويمتد من السطح الحر إلى العمق x. ويعطي ضرب هذا الحجم في w وزن السائل في ذلك المنشور. ومن ثم فإن

$$dF_V = w\,x\,S\cos\alpha$$

قوة متجهة إلى أعلى، مساوية ومعاكسة لوزن السائل الذي يزيحه ذلك الجزء المنشوري من الجسم.

- **محصلة الطفو وخط عملها.** يعطي جمع المركبات الرأسية لجميع عناصر السطح المغمور محصلة واحدة متجهة إلى أعلى:

$$F_B = wV,$$

حيث V الحجم المزاح الكلي. ولأن كل مساهمة عنصرية تمر بمركز عمودها المنشوري، فإن المحصلة تمر بمركز الحجم المزاح، ويرمز إليه بـC، وهو مركز الطفو.

- **شروط الاتزان.** ليكن W وزن الجسم الطافي، وخط عمله ماراً بمركز ثقله G. يتطلب الاتزان

$$W = wV \qquad \text{و} \qquad G \text{ و} C \text{ يقعان على الخط الرأسي نفسه.}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

صياغة تكاملية حديثة، إضافة. مع أن رانكين يثبت النتيجة بالتحليل الهندسي، فإن الصياغة الحديثة لميكانيكا الأوساط المتصلة تقود مباشرة إلى النتيجة نفسها. حقل الضغط الهيدروستاتيكي هو $p = wz$، حيث z العمق الرأسي تحت السطح الحر. وتكون محصلة القوة التي يسلطها المائع على الجسم

$$\mathbf{F} = \iint_{\partial V} p\,\mathbf{n}\,dS,$$

حيث $\mathbf{n}$ متجه الوحدة العمودي إلى الخارج على السطح المبتل. وبتطبيق مبرهنة التباعد، §R.1.2، على المركبة الرأسية:

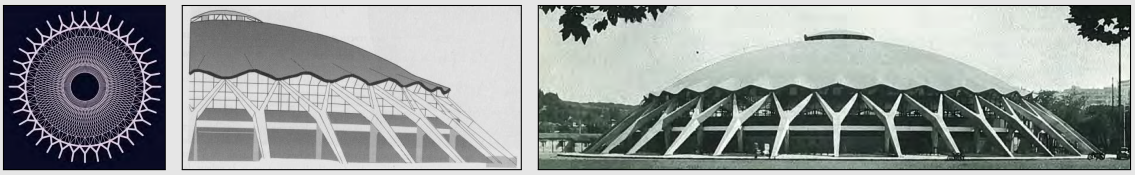
$$F_z = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}\,dV = \iiint_V w\,dV = wV,$$

فتكون محصلة القوة الهيدروستاتيكية رأسية ومتجهة إلى أعلى ومساوية لوزن المائع المزاح. ويمر خط عملها بمركز الحجم V، مطابقاً مركز الطفو لدى رانكين.

19.2.12 مثال 19.12: قصر الرياضة؛ نيرفي

مقتبس من
Howard, 1966 و
Voldoire **and** Bamberger, 2008 و
Schodek **and** Bechthold, 2014.

Structure: An Architect's Approach
Mécanique des structures
Structures

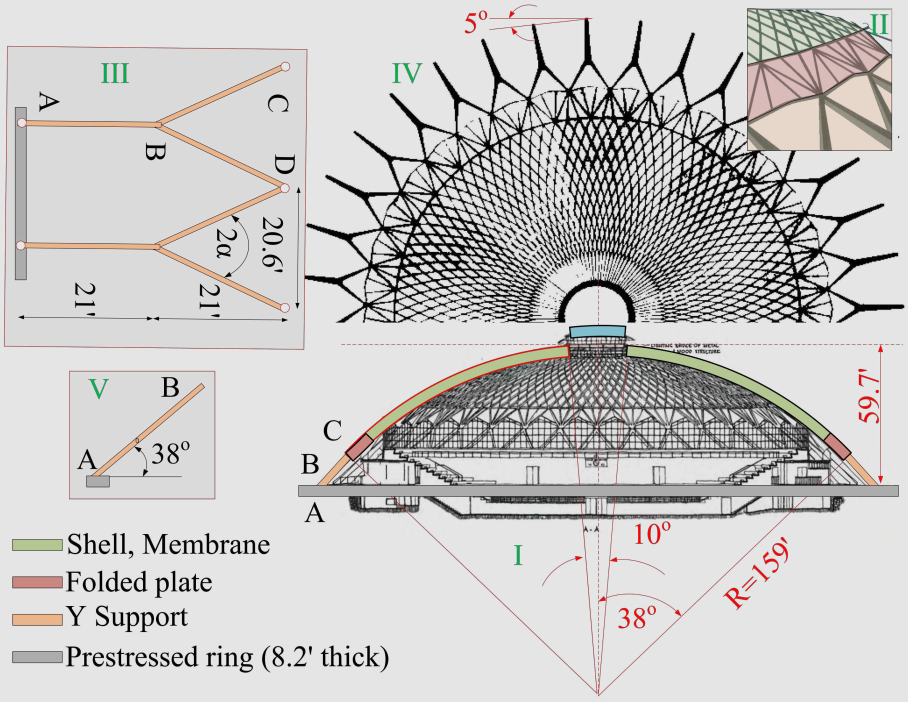


صمم بيير لويجي نيرفي قصر *الرياضة* الشهير[a]، ونفذه عام 1958 لدورة الألعاب الأولمبية في روما سنة 1960. وقد كان منشأ باهراً بجماله وبراعته التقنية وطريقة تنفيذه. ووفاء لمبدأ سوليفان الموجه، يحتفي التصميم حقاً بفكرة «الشكل يتبع الوظيفة».

الهندسة

للمنشأ قبة كروية، وهي قشرية غشائية بعزوم وقص أصغريين، ترتكز بانتظام على بلاطات مطوية صلبة انحنائياً، تنقل بدورها الحمل المنتظم إلى 36 مسنداً على شكل Y. وتنقل هذه المساند الحمل إلى حلقة محيطية مسبقة الإجهاد عند القاعدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الأحمال

يحدد وزن القبة[b] من متوسط الوزن لكل قدم مربع. وبأخذ القشرة والأضلاع معاً، ووزن الخرسانة 150 رطلاً/قدم^3، نحصل على 61 رطلاً/قدم^2؛ ومع إضافة عزل الفيرميكوليت وغطاء السقف يصبح الحمل الميت الكلي 80 رطلاً/قدم^2. ويؤخذ وزن سقف القبيبة 40 رطلاً/قدم^2.

تعطى مساحة المنطقة الكروية بين دائرتي عرض بالصيغة $\pi R^2(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)$، حيث ϕ_1 زاوية البعد القطبي، أي الزاوية المقاسة نزولاً من القطب الشمالي أو قمة القبة.

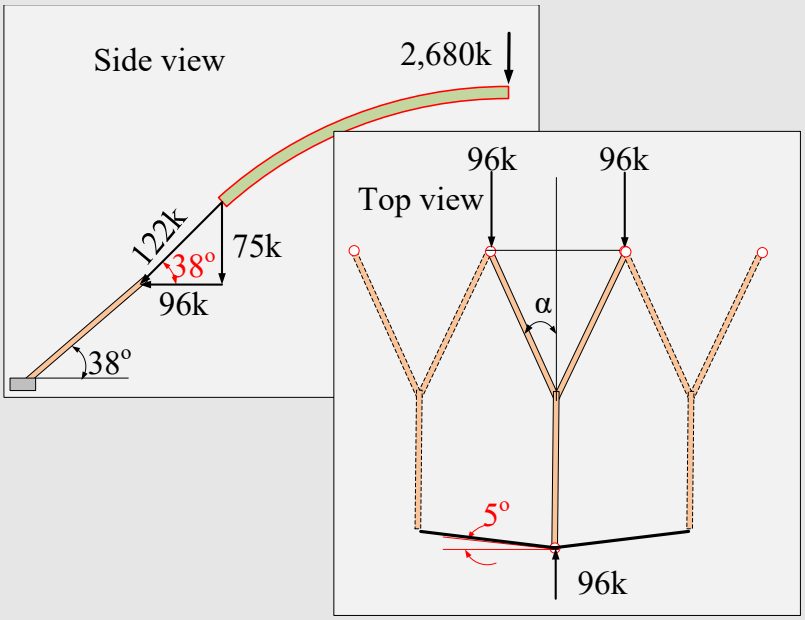
$$\begin{array}{lrcl} \text{القبيبة} & 2\pi(159)^2(\cos 0° - \cos 5°)(40)\ \text{psf} & = & 25\ \text{k} \\ \text{القشرة} & 2\pi(159)^2(\cos 5° - \cos 38°)(80)\ \text{psf} & = & 2,655\ \text{k} \end{array}$$

ومن ثم يكون الوزن الكلي 2,680 kips.

القوى

تحمل كل دعامة $N_{AB} = 2,655/36 \simeq 75$ kips، وفق مخططات الجسم الحر الآتية:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



وتكون القوى المناظرة عند قمة المسند Y:

$$N_{AB} = \frac{75}{\sin 38^\circ} = 122 \text{ k}; \quad N_{AB}^{\text{hor}} = \frac{75}{\tan 38^\circ} = 96 \text{ k}$$

ومن الهندسة:

$$\tan \alpha = \frac{20.6}{21} \Rightarrow \alpha = 26^\circ$$

ومن ثم تكون القوة المحورية في BC:

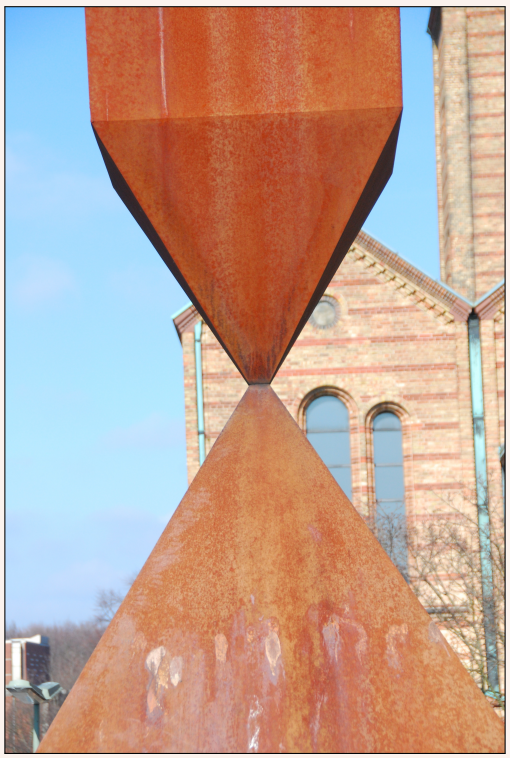
$$N_{BC} = \frac{122}{2} \frac{1}{\cos 26^\circ} = 68 \text{ k}$$

وتكون قوة سبق الإجهاد N_p اللازمة لمعادلة المركبة الأفقية:

$$N_p = \frac{N_{AB}^{\text{hor}}}{2 \sin 5^\circ} = 550 \text{ k}$$

[a] كنت ألعب كرة اليد في هذه المنشأة الأيقونية حين كنت في المدرسة الثانوية، ولذلك تربطني بها صلة شخصية جداً.
[b] نقرب القوى في هذه المسألة إلى أقرب kip.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



المسلة المكسورة، بارنيت نيومان، برلين (2009)

تتحدى الحدس وتؤكد الاتزان الإنشائي، على نحو يشبه ضمان ردود الأفعال في الهندسة للاستقرار بمعاكسة الأحمال المطبقة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

20 الجمالونات

ملخص

يقدم هذا الفصل دراسة مفصلة لتحليل الجمالونات، تبدأ بالافتراضات الأساسية واصطلاحات الإشارة وتعريفي عدم التحديد الاستاتيكي الداخلي والخارجي. والمعادلات الحاكمة ليست سوى معادلات الاتزان الساكن. ثم ينتقل العرض إلى ثلاث طرائق تحليلية رئيسية: طريقة العقد، وطريقة المقاطع، وطريقة مصفوفية. وتشرح كل طريقة شرحاً شاملاً في خطوات متتابعة، مع أمثلة توضيحية تعزز الوضوح وتيسر الفهم العملي.

20.1 مقدمة 784
20.1.1 الافتراضات 784
20.1.2 اصطلاح الإشارة 785
20.1.3 التحديد والاستقرار 785
20.2 طرائق التحليل 787
20.2.1 طريقة العقد 787
20.3 طريقة المقاطع 794
20.3.1 طريقة المقاطع 794
20.3.2 مثال 20.3: طريقة المقاطع . . . 795
20.4 طريقة العقد والمصفوفة 795
20.4.1 مثال 20.4: جمالون بسيط بطريقة العقد والمصفوفة 797
20.4.2 مثال 20.5: جمالون معقد بطريقة العقد والمصفوفة 799

20.1 مقدمة

1 الجمالون منشأ مؤلف من عناصر، مستقيمة عادة، مرتبة في مثلثات مترابطة. وتتصل العناصر عند نهاياتها بعقد تعد مفصلية، أي وصلات شبيهة بالمفاصل لا تنقل العزوم، مما يجعل الجمالون يسلك سلوكاً ميكانيكياً محدداً.

2 يبين الشكل 17.5 أنواع الجمالونات.

20.1.1 الافتراضات

3 تفترض الوصلات بين عناصر الجمالون مفصلية، أي إن العناصر تتصل على نحو لا يسمح إلا بنقل القوى المحورية، شدّاً أو ضغطاً، ولا تنقل العزوم. ويتيح هذا الافتراض تحليل كل عقدة بوصفها نقطة في نظام قوى ثنائي الأبعاد، يجب أن يكون مجموع القوى في كل اتجاه عندها صفراً.

4 ويفترض أن عناصر الجمالون لا تحمل إلا قوى على امتداد محاورها؛ فكل عنصر إما مضغوط وإما مشدود، من دون قوى انحناء. ويبسط ذلك التحليل كثيراً بتقليل مؤثرات الإجهاد المدروسة في كل عنصر.

5 ويفترض أن الأحمال، أي القوى وردود الأفعال، تطبق عند عقد الجمالون وحدها. وهذا الافتراض حاسم لأنه يمنع عزوم الانحناء في العناصر، اتساقاً مع افتراض القوى المحورية وحدها.

6 وعلى الرغم من نمذجة العقد كمفاصل لنقل القوى، فإنها تفترض صلبة في أبعادها الذاتية؛ فلا يحدث فيها تشوه، وتبقى العلاقات الزاوية بين العناصر المتصلة ثابتة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7 يهمل وزن عناصر الجمالون في كثير من التحليلات مقارنة بالأحمال التي تحملها، مما يبسط الحساب. غير أن أوزان العناصر قد تكون مهمة عملياً، ولا سيما عند البحور الكبيرة أو استعمال مواد ثقيلة، وعندئذ يجب أخذها في الحسبان.

8 وتتجلى فاعلية الجمالونات كمنشآت حاملة في انتشار استعمالها في الجسور والأسقف وغيرها من الأشكال الإنشائية التي تتطلب بحوراً كبيرة.

9 يمكن تصور الجمالون من حيث المبدأ كمرة ضخمة تمتد بين مسندين، وهو تشبيه يبسط فهم عمله. فالجمالون، مثل الكمرة، ينقل الأحمال المطبقة على أعلاه إلى المساند عند طرفيه. لكنه، بخلاف الكمرة المصمتة، يحقق ذلك بكفاءة مادية أكبر كثيراً باستعمال ترتيبات مثلثية مترابطة. وتوزع هذه المثلثات القوى في المنشأ كله، فتقلل الوزن وتعظم المقاومة.

10 تكون الأوتار العليا للجمالون مضغوطة عموماً، وهي العناصر الأفقية أو المائلة في أعلاه والممتدة من طرف إلى آخر.

11 وعلى العكس، تتعرض الأوتار السفلى للشد، وهي العناصر الواقعة في أسفل الجمالون والموازية للأوتار العليا.

12 وقد تتعرض العناصر القطرية للشد أو الضغط تبعاً لاتجاهها وهندسة الجمالون العامة. وتؤدي هذه الأقطار دوراً حاسماً في نقل الأحمال بين الأوتار العليا والسفلى وفي المحافظة على السلامة الإنشائية. ويتوقف اتجاه القوة في العنصر القطري ومقدارها على توزيع الأحمال ونوع الجمالون. ففي جمالون برات التقليدي، مثلاً، تحمل العناصر الرأسية الضغط، بينما تحمل العناصر القطرية الشد.

20.1.2 اصطلاح الإشارة

13 الشد موجب والضغط سالب. وتمثل القوى المحورية في الجمالون كقوى مؤثرة في العقد.

14 المعادلات الأساسية:

الإجهاد والقوة: $\sigma = \dfrac{P}{A}$

الإجهاد والانفعال: $\sigma = E\varepsilon$

القوة والإزاحة: $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$

الاتزان: $\Sigma \mathbf{F} = 0$

20.1.3 التحديد والاستقرار

15 يعد الجمالون محدداً استاتيكياً إذا أمكن حساب القوى الداخلية في عناصره باستعمال معادلات الاتزان الساكن وحدها. وفي الجمالونات المستوية، تنص هذه المعادلات على أن مجموع القوى في الاتجاهين الأفقي والرأسي، ومجموع العزوم حول أي نقطة، يساوي صفراً.

16 إذا كان m عدد العناصر، وr عدد ردود الأفعال، وj عدد العقد، كان لدينا $m + r$ مجهولاً، و$2j$ أو $3j$ معادلة استاتيكية، في بعدين أو ثلاثة عند كل عقدة. فإذا لم تكف معادلات الاستاتيكا كانت المسألة غير محددة، وإذا زاد عدد المعادلات كان الجمالون غير مستقر، الجدول 20.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17 وقد يكون الجمالون محدداً أو غير محدد استاتيكياً من الخارج بالنسبة إلى ردود الأفعال، أي إذا زاد عددها على 3 في البعدين أو 6 في الأبعاد الثلاثة.

18 وقد يكون محدداً أو غير محدد من الداخل، الجدول 20.1.

	ثنائي الأبعاد	ثلاثي الأبعاد
	عدم التحديد الاستاتيكي	
خارجي	$r > 3$	$r > 6$
داخلي	$m + r > 2j$	$m + r > 3j$
غير مستقر	$m + r < 2j$	$m + r < 3j$

جدول 20.1: التحديد الاستاتيكي واستقرار الجمالونات

19 إذا كان $m < 2j - 3$ في البعدين، لم يكن الجمالون مستقراً داخلياً، ولا يبقى جسماً صلباً بعد فصله عن مسانده. لكنه يكون صلباً حين يتصل بها.

20 تحدد ردود الأفعال بمعادلات الاتزان المناسبة المبينة في التعريف 19.1، الصفحة 19.1.2. ويلخص الجدول 20.2 معادلات الاتزان المنطبقة.

جدول 20.2: معادلات الاتزان المنطبقة على الجمالونات

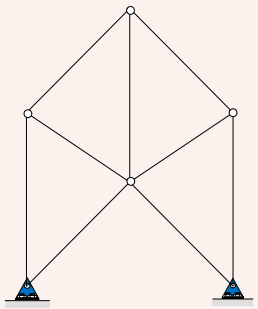
	ردود الأفعال	اتزان العقد
ثنائي الأبعاد	$\Sigma F_X,\ \Sigma F_Y,\ \Sigma M_Z,$	$\Sigma F_X,\ \Sigma F_Y$
ثلاثي الأبعاد	$\Sigma F_X,\ \Sigma F_Y,\ \Sigma F_Z,$ $\Sigma M_X,\ \Sigma M_Y,\ \Sigma M_Z$	$\Sigma F_X,\ \Sigma F_Y,\ \Sigma F_Z$

21 للجمالون في الشكل 20.1 أربعة ردود أفعال، ولذلك فهو غير محدد خارجياً. كما أن له ست عقد ($j = 6$) وأربعة ردود أفعال ($R = 4$) وتسعة عناصر ($m = 9$). ومن ثم يوجد $m + R = 9 + 4 = 13$ مجهولاً و$2 \times j = 2 \times 6 = 12$ معادلة اتزان، ولذلك فهو أيضاً غير محدد استاتيكياً من الداخل.

22 توجد ثلاث طرائق لتحليل الجمالونات المحددة استاتيكياً:

1. طريقة العقد؛
2. طريقة المقاطع؛
3. الطريقة المصفوفية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 20.1: جمالون غير محدد استاتيكياً

20.2 طرائق التحليل

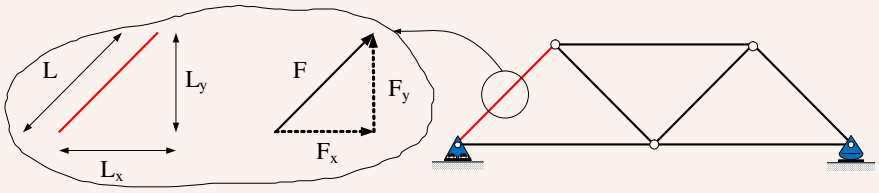
20.2.1 طريقة العقد

23 تحلل طريقة *العقد* كل عقدة في الجمالون لتحديد القوى المحورية الداخلية في عناصره. وخطواتها:

1. تحقق مما إذا كان المنشأ محدداً استاتيكياً؛
2. احسب جميع ردود الأفعال؛
3. ارسم مخططاً للجسم الحر يبين جميع أحمال العقد، بما فيها ردود الأفعال؛
4. طبق عند كل عقدة، بدءاً بالعقد المحملة، معادلات الاتزان المناسبة: ΣF_x وΣF_y في البعدين؛ وΣF_x وΣF_y وΣF_z في الأبعاد الثلاثة؛
5. لأن عناصر الجمالون لا تحمل إلا قوى محورية، يجب أن تقع القوة المحصلة ($\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$) على محور العنصر، الشكل 20.2:
$$\frac{F}{L} = \frac{F_x}{L_x} = \frac{F_y}{L_y}$$
6. يفضل عادة البدء بحساب ردود الأفعال؛
7. ثم انتقل إلى عقدة لا يوجد عندها أكثر من قوتين مجهولتين، وغالباً ما تكون عند حدود الجمالون؛
8. طبق معادلات الاتزان الساكن على كل عقدة؛
9. حل المعادلات لإيجاد القوى في العناصر المتصلة، حيث تدل القيم الموجبة على الشد والسالبة على الضغط؛
10. تتبع دائماً مركبتي قوة العنصر x وy، أي F_x وF_y، فقد تحتاج إليهما لاحقاً عند اتزان القوى في عقدة أخرى يتصل بها العنصر، الشكل 20.2.
11. انتقل إلى العقدة التالية وكرر العملية حتى تحدد قوى جميع العناصر.

وتكون هذه الطريقة فعالة بصورة خاصة للجمالونات الصغيرة أو حين يلزم الحصول على معلومات مفصلة عن كل عنصر.

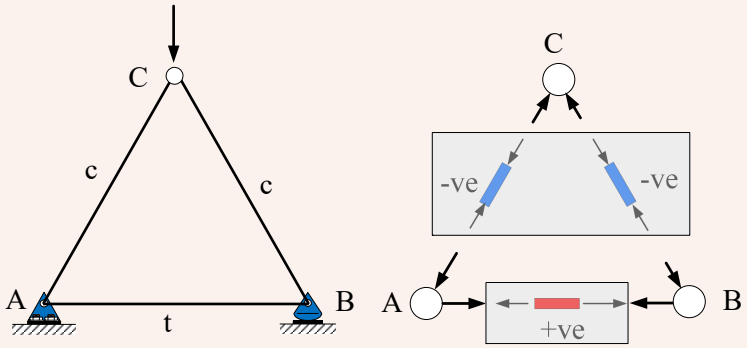
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 20.2: العلاقة بين القوى والأطوال

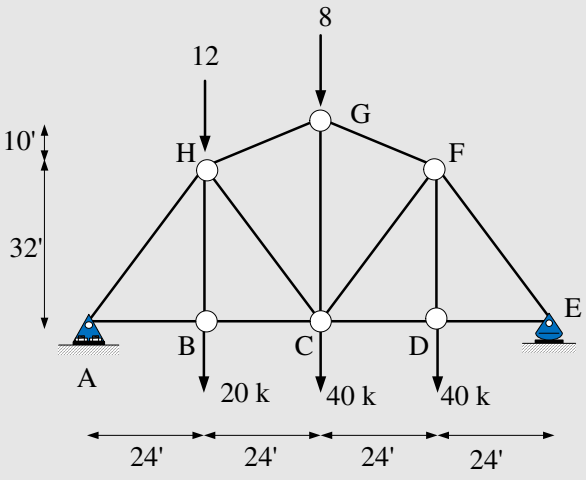
24 لا يوجد في تحليل الجمالونات اصطلاح إشارة مطلق؛ بل يفترض أن العنصر في شد أو ضغط. فإذا ظهرت القوة سالبة بعد التحليل، دل ذلك على خطأ الافتراض وأن العنصر في الضغط بدلاً من الشد، أو العكس.

25 تمثل القوى الداخلية في مخطط الجسم الحر بأسهم تؤثر في العقد، لا كقوى طرفية على العنصر نفسه. ففي الشد يشير السهم بعيداً من العقدة، وفي الضغط يشير نحوها، الشكل 20.3.



شكل 20.3: تمثيل القوى بالأسهم

20.2.1.1 مثال 20.1: تحليل جمالون بطريقة العقد



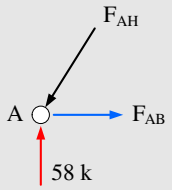
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. $R = 3$ و$m = 13$ و$2j = 16$، ومن ثم $m + R = 2j$ ✓.
2. احسب ردود الأفعال:

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^E = 0; \quad &\Rightarrow \quad (20+12)(3)(24) + (40+8)(2)(24) + (40)(24) \\
&\quad -R_{A_y}(4)(24) = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 58 \text{ kip } \uparrow \\
(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad 20 + 12 + 40 + 8 + 40 - 58 - R_{E_y} = 0 \\
&\Rightarrow \quad R_{E_y} = 62 \text{ kip } \uparrow
\end{aligned}
$$

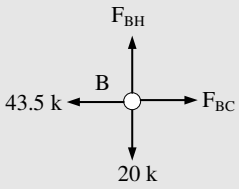
3. افحص كل عقدة على حدة:

العقدة A: من الواضح أن AH مضغوط وAB مشدود.



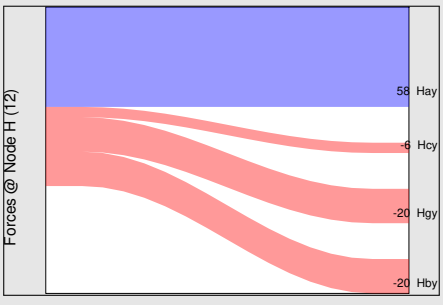
$$
\begin{aligned}
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_y} + 58 = 0 \\
&\quad F_{AH} = \tfrac{l}{l_y}(F_{AH_y}) \\
&\quad l_y = 32; l = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \\
&\Rightarrow \quad F_{AH} = \tfrac{40}{32}(58) = 72.5 \text{ kip C} \\
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_x} + F_{AB} = 0 \\
&\quad F_{AB} = \tfrac{L_x}{L_y}(F_{AH_y}) = \tfrac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

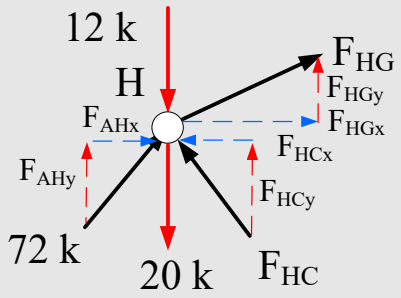
العقدة B:



$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BC} = 43.5 \text{ kip T} \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BH} = 20 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

العقدة H:





الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إضافة إلى مخطط الجسم الحر، يوضح الرسم الأيمن «مسار الحمل» عند العقدة H[a]، أي «جريان» القوى الرأسية عند العقدة H.

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{AH_x} - F_{HC_x} + F_{HG_x} = 0$$
$$\Rightarrow 43.5 - \frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) + \frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{AH_y} + F_{HC_y} - 12 + F_{HG_y} - 20 = 0$$
$$\Rightarrow 58 + \frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) - 12 + \frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) - 20 = 0$$

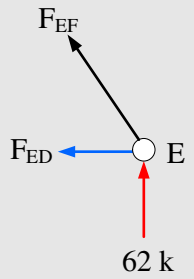
ويمكن كتابة ذلك على نحو ملائم في الصورة:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.921 \\ -0.8 & -0.385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.5 \\ 26.0 \end{Bmatrix}$$

ويعطي الحل $F_{HC} = -7.5$ و$F_{HG} = -52$، مما يعني أن افتراضنا في مخطط الجسم الحر للعقدة H كان خاطئاً، وتكون النتيجة النهائية:

$$F_{HC} = 7.5 \text{ kip T}$$
$$F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

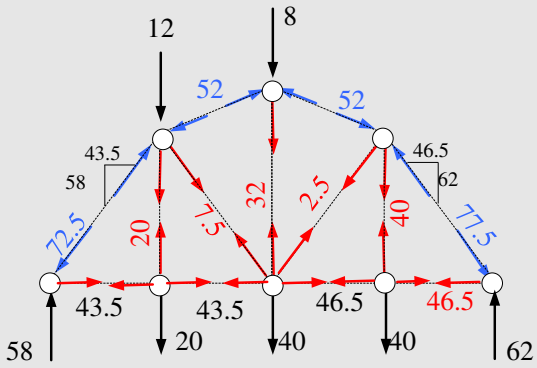
العقدة E:



$$\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{EF_y} = 62 \Rightarrow F_{EF} = \frac{\sqrt{24^2+32^2}}{32}(62) = 77.5 \text{ kip C}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{ED} = F_{EF_x} \Rightarrow F_{ED} = \frac{24}{32}(F_{EF_y}) = \frac{24}{32}(62) = 46.5 \text{ kip T}$$

تلخص نتائج التحليل في الشكل الآتي:

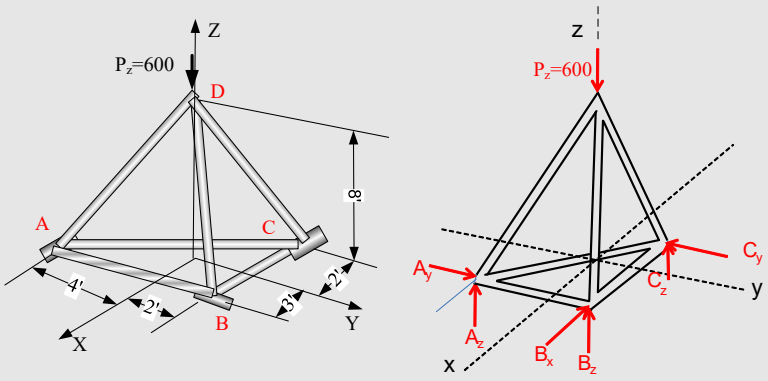
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ويمكن التحقق من الحسابات بفحص اتزان القوى عند عقدة لم تستعمل من قبل، مثل D.

[a] يسمى هذا مخططاً غرَينياً.

20.2.1.2 مثال 20.2: جمالون ثلاثي الأبعاد



$A(3,-4,0)$ و$B(3,2,0)$ و$C(-2,2,0)$ و$D(0,0,8)$. لا توجد ردود أفعال في اتجاهي x أو y، فالمنشأ على الجليد ولا يوجد حمل جانبي.

الإجراء

احسب بالتتابع:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. ردود الأفعال:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{AB} = 0 &\Rightarrow C_z\checkmark\\ \Sigma M_{CB} = 0 &\Rightarrow A_z\checkmark\\ \Sigma F_z = 0 &\Rightarrow B_z = 40.0\checkmark\\ \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow B_x\checkmark\\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow A_y\checkmark; C_y\checkmark\end{aligned}$$

2. العقدة B:

$$\begin{aligned}&L_{BD}\\ \Sigma F_z = 0; &\Rightarrow F_{BD}\checkmark\\ &F^x_{BD}\\ &F^y_{BD}\\ \Sigma F_x = 0; &\Rightarrow F_{BA}\checkmark\end{aligned}$$

3. العقدة A:

$$\begin{aligned}&\alpha\checkmark\\ &L_{AD}\checkmark\\ \Sigma F_z = 0; &F_{AD}\checkmark\\ \Sigma F_x = 0; &F_{AC}\checkmark\end{aligned}$$

4. العقدة C:

$$\begin{aligned}&F^Z_{CD}\checkmark\\ \Sigma F_Z = 0 &\Rightarrow F_{CD}\checkmark\end{aligned}$$

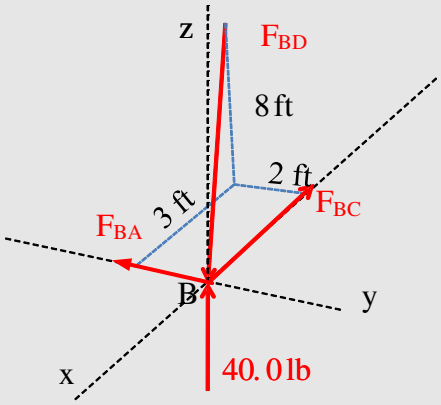
الحل

1. بالنظر إلى مخطط الجسم الحر للجمالون كله:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{AB} = 0; C_z(5) - 600(3) = 0 &\Rightarrow C_z = 360\\ \Sigma M_{CB} = 0; 600(2) - A_z(6) = 0 &\Rightarrow A_z = 200\\ \Sigma F_z = 0; B_z + 200 + 360 - 600 = 0 &\Rightarrow B_z = 40.0\\ \Sigma F_x = 0; B_x = 0\\ \Sigma F_y = 0; A_y - C_y = 0\\ \Sigma M_z = 0; A_y(3) + C_y(2) = 0; &\Rightarrow A_y = C_y = 0\end{aligned}$$

2. العقدة B:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



Joint B

$$L_{BD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{77}} F_{BD} + 40 = 0; \Rightarrow F_{BD} = 43.87 \text{(lbf (C}$$

$$\Sigma F_x = 0; F_{BD}^x - F_{BC} = 0$$

$$F_{BD}^x = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{3}{\sqrt{77}}(43.87)$$

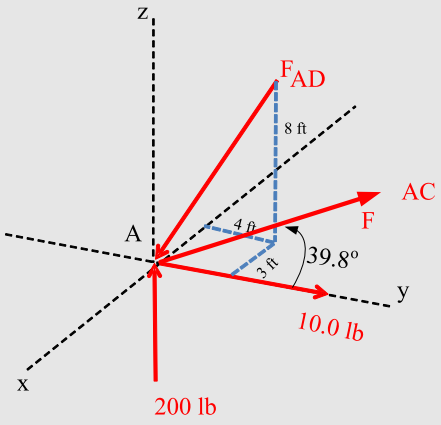
$$F_{BC} = 15.0 \text{(lbf (T}$$

$$\Sigma F_y = 0; F_{BD}^y - F_{BA} = 0$$

$$F_{BD}^y = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{2}{\sqrt{77}}(43.87)$$

$$F_{BA} = 10.0 \text{(lbf (T}$$

3. العقدة A:



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\tan(\alpha) = \frac{L_x}{L_y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = 39.8\,\text{deg}$$

$$L_{AD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{89}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{89}} F_{AD} + 200 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 236\text{(lbf (C}$$

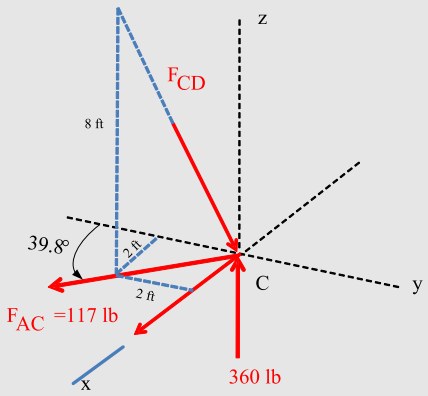
$$\Sigma F_x = 0; F_{AD}^X - F_{AC}^X = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{89}}(235.9) - F_{AC}\sin(39.8°) = 0 \Rightarrow F_{AC} = 117\text{(lbf (T}$$

التحقق:

$$\Sigma F_y = 0 F_{AC}^Y - F_{AD}^Y + 10 = 0$$

$$117.2\cos(39.81^o) - \frac{4}{\sqrt{89}}(235.9) + 10.0 = 0 \checkmark$$

4. العقدة C:



$$\Sigma F_Z = 0; F_{CD}^Z + 360 = 0$$

$$\frac{-8}{\sqrt{72}} F_{CD} + 360 = 0$$

$$F_{CD} = 382\text{(lbf (C}$$

20.3 طريقة المقاطع

20.3.1 طريقة المقاطع

26 تقدم طريقة *المقاطع* وسيلة أسرع لإيجاد القوى في عناصر محددة، وهي مفيدة خاصة في الجمالونات الكبيرة. وتتضمن:

1. حساب ردود الأفعال عند مساند الجمالون من اتزانه العام؛

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

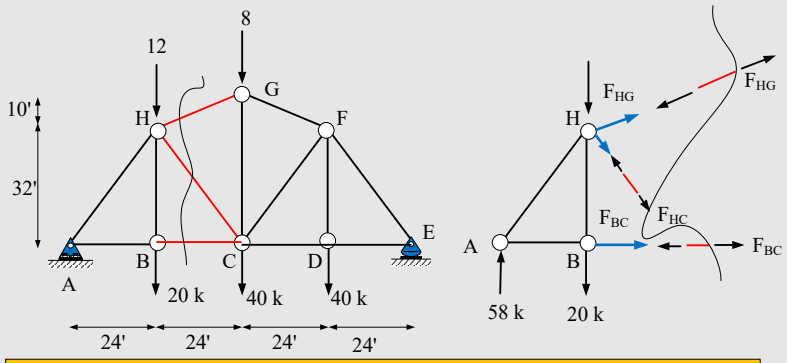
2. اختيار مقطع يقطع ما لا يزيد على ثلاثة عناصر ذات قوى مجهولة، ويقسم الجمالون إلى جزأين؛
3. تحليل أحد الجزأين، مع التحقق من كونه محدداً استاتيكياً؛
4. تطبيق معادلات الاتزان على المقطع؛
5. حل المعادلات لتحديد القوى في العناصر التي قطعها المقطع.

27 يتيح جمع العزوم حول نقطة معينة، تكون عادة تقاطع عنصرين مقطوعين، تحديد قوة العنصر الآخر.

28 ويستعمل جمع القوى عادة لتحديد القوى في العناصر المائلة.

20.3.2 مثال 20.3: طريقة المقاطع

نريد في هذه المسألة تحديد F_{BC} وF_{HG} في المثال السابق. وبعد القطع عبر العناصر HG وHC وBC، نبدأ بجمع العزوم حول H.



Cut through the members, but in drawing FBD, remove them and just show nodal forces

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^H = 0 \Rightarrow R_{A_y}(24) - F_{BC}(32) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip, T}$$

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^C = 0;$$

$$\Rightarrow (58)(24)(2) - (20+12)(24) - F_{HG_x}(32) - F_{HG_y}(24) = 0$$

$$2784 - 768 - (32)(F_{HG})\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} - (24)(F_{HG})\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = 0$$

$$2,000 - (29.5)F_{HG} - (9.2)F_{HG} = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

20.4 طريقة العقد والمصفوفة

29 ليست هذه في جوهرها إلا طريقة العقد موسعة ومصوغة في صورة مصفوفية. وببساطة، نكتب جميع معادلات الاتزان عند جميع العقد، ثم نصوغها في صورة مصفوفة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 ولذلك نريد تحديد مصفوفة الاستاتيكا $\mathcal{B}$ التي تربط متجه جميع القوى العقدية للجمالون $\{\mathbf{P}\}$، في الإحداثيات العامة، بجميع القوى المجهولة، أي القوى الداخلية للعناصر في أنظمة إحداثياتها المحلية وردود الأفعال الخارجية للمنشأ، §45.2.1.2.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{FF} & \mathcal{B}_{FR} \\ \mathcal{B}_{RF} & \mathcal{B}_{RR} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} + \underbrace{\{P\}}_{\mathbf{P}} = 0$$

أو

القوى الداخلية - القوى الخارجية = 0

ويمكن تصور $\mathcal{B}$، أي مصفوفة الاستاتيكا، على أنها «نظام فيزيائي»، و$\mathbf{F}$ «استجابة»، و$\mathbf{P}$ «دالة إثارة».

31 تلخص الطريقة كما يأتي:

1. اختر نظام إحداثيات؛
2. رقم العقد والعناصر كل منها على حدة؛
3. افترض:
   (a) جميع قوى العناصر موجبة، أي شد؛
   (b) جميع ردود الأفعال موجبة.
4. احسب جيوب تمام الاتجاه عند كل عقدة j ولكل عنصر e، الشكل 20.4a:

$$\alpha_j^e = \frac{L_x}{L}$$
$$\beta_j^e = \frac{L_y}{L}$$

للعنصر e الذي يصل العقدة i بالعقدة j، يكون $\alpha_i^e = -\alpha_j^e$ و$\beta_i^e = -\beta_j^e$. وتحتوي المصفوفة $[B]$ على $2j$ صفاً و$m + r$ عموداً. ولا يمكن عكسها إلا إذا كانت مربعة، أي $2j = m + r$ وكان الجمالون محدداً استاتيكياً.
5. اكتب معادلتي الاتزان عند كل عقدة j بدلالة المجاهيل، أي قوى العناصر وردود الأفعال:

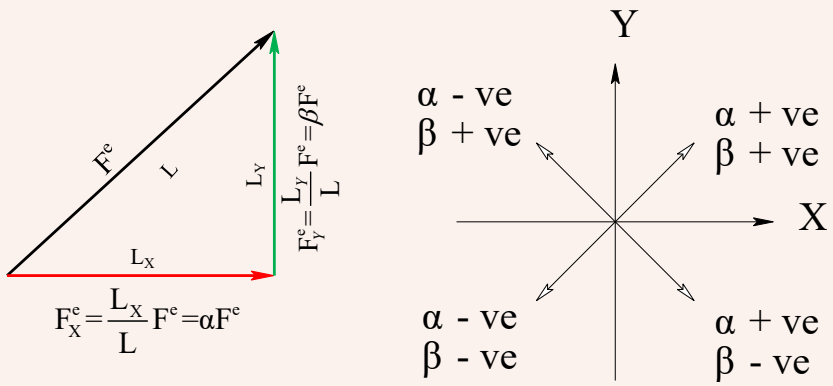
$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\text{عدد العناصر}} \alpha_j^e F_e + R_{x_j} + P_{x_j} = 0$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\text{عدد العناصر}} \beta_j^e F_e + R_{y_j} + P_{y_j} = 0$$

6. اعكس المصفوفة لحساب $\{F\}$ و$\{R\}$.

يرد تطبيق برمجي بلغة MATLAB®في §I.1.1.

32 ميزة هذه الطريقة أنه بعد عكس المصفوفة $[\mathcal{B}]$ يمكن إعادة تحليل المنشأ نفسه بسهولة لحالات تحميل مختلفة. ومع أكواد التصميم الجديدة التي تضرب الأحمال الميتة والحية بمعاملات منفصلة، الفصل 35، توفر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

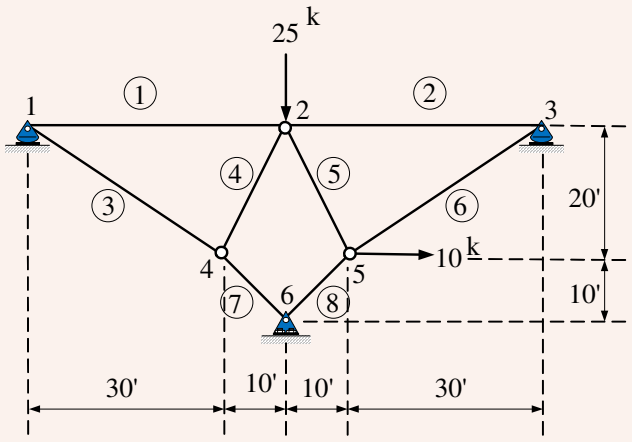


(a) جيوب تمام الاتجاه (b) قوى العقدة

شكل 20.4: طريقة العقد والمصفوفة: مخططات الجسم الحر للعقد

الطريقة جهداً كبيراً في إعادة التحليل. وعلاوة على ذلك، حين تحدد الإزاحات بطريقة القوة الافتراضية، الفصل 24، يمكن إجراء التحليلين، للحمل الحقيقي وللحمل الوحدي الافتراضي، بسهولة.

33 وقد تكون هذه الطريقة الوحيدة الملائمة لتحليل جمالونات محددة استاتيكياً تعجز الطريقتان السابقتان عن حلها، الشكل 20.5.

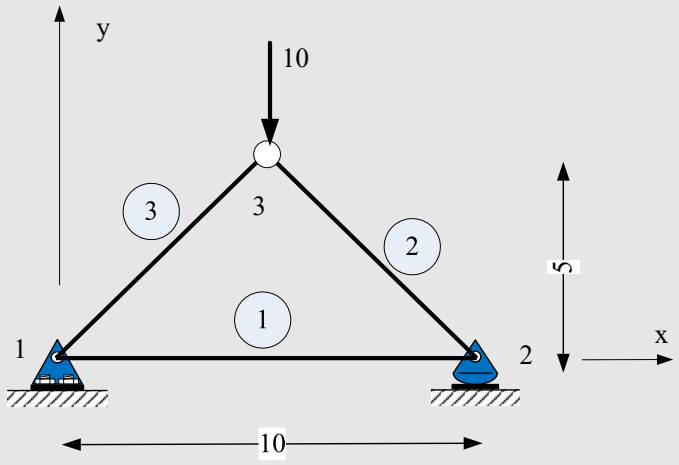


شكل 20.5: جمالون معقد محدد استاتيكياً

20.4.1 مثال 20.4: جمالون بسيط بطريقة العقد والمصفوفة

حدد جميع قوى العناصر في الجمالون الآتي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



1. نحدد أولاً جيوب تمام الاتجاه:

العنصر	العقد	α	β	α	β
1	2-1	العقدة 1		العقدة 2	
		$\alpha_1^1 = 1$	$\beta_1^1 = 0$	$\alpha_2^1 = -1$	$\beta_2^1 = 0$
2	3-2	العقدة 2		العقدة 3	
		$\alpha_2^2 = -.7071$	$\beta_2^2 = .707$	$\alpha_3^2 = .707$	$\beta_3^2 = -.707$
3	1-3	العقدة 3		العقدة 1	
		$\alpha_3^3 = -.707$	$\beta_3^3 = -.707$	$\alpha_1^3 = .707$	$\beta_1^3 = .707$

2. نكتب بعد ذلك معادلات الاتزان:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & R_{1x} & R_{1y} & R_{2y} \end{matrix} \\
\text{العقدة1} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \alpha_1^3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} \beta_1^1 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{العقدة2} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} \beta_2^1 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{العقدة3} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} 0 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{Bmatrix}}_{\{F\}}
+
\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}}_{\{P\}}
= 0
$$

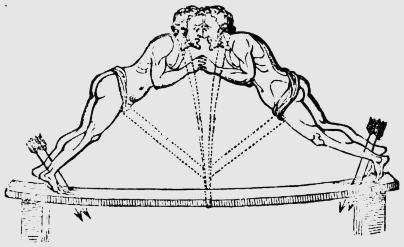
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

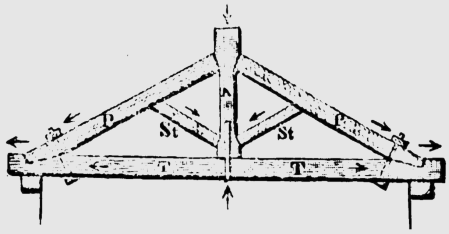
أو

$$\begin{array}{ll} & \\ \text{العقدة1} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{العقدة2} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{العقدة3} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & .707 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .707 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .707 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & .707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{[\mathcal{B}]} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\}}_{\{F\}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{array}\right\}}_{\{P\}} = 0$$

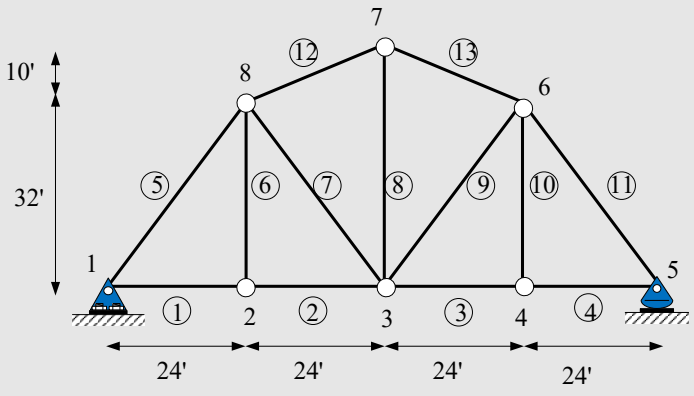
وبعكس $[\mathcal{B}]$ نحصل من $F = -[\mathcal{B}]^{-1}P$ على

$$\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5 \\ -7.07 \\ -7.07 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{array}\right\}$$





20.4.2 مثال 20.5: جمالون معقد بطريقة العقد والمصفوفة



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. حدد جيوب تمام الاتجاه:

$$\frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$
$$\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{10}{26} = 0.38$$
$$\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{24}{26} = 0.92$$

2. شكّل المصفوفة $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc}
 & \\
\#1 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#2 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#3 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#4 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#5 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#6 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#7 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#8 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y
\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & & & & .6 & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & .8 & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & 1 & & & & -.6 & & .6 & & & & & & & \\
 & & & & & & .8 & 1 & .8 & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & & -.6 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & .8 & & & & & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & -.6 & & .6 & & -.92 & & & \\
 & & & & & & & & -.8 & -1 & -.8 & & .38 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -.92 & .92 & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & -.38 & -.38 & & & \\
\hline
 & & & & -.6 & & .6 & & & & & .92 & & & & \\
 & & & & -.8 & -1 & -.8 & & & & & .38 & & & &
\end{array}\right]}_{[\mathbf{B}]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{5_y} \end{array}\right\}}_{?}
+
\underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12 \end{array}\right\}}_{\checkmark}
= 0$$

3. اعكس المصفوفة باستعمال *Mathematica*:

```
                                                
```

```
                                                
```



أنسلم كيفر، داعات (1990)

تعكس العناصر الصلبة المترابطة، مجازياً، كفاءة الجمالونات في توزيع القوى بالتثليث، بما يضمن المقاومة والاستقرار معاً.

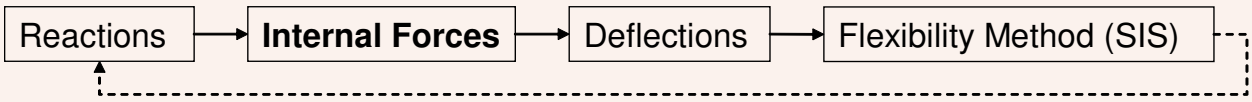
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21 القوى الداخلية في عناصر الانحناء

ملخص

يعيد هذا الفصل تناول العلاقة الأساسية بين الطلب الخارجي والقدرة الداخلية في الأنظمة الإنشائية ويؤكدها، وهي فكرة محورية كثيراً ما تهمل، إن لم تغب تماماً، في كتب التحليل الإنشائي المعتادة. ولذلك اختير له عمداً عنوان «القوى الداخلية»، خروجاً على العنوان التقليدي الرتيب نوعاً ما، «مخططات القص والعزم». يبدأ الفصل بالعلاقات بين الإجهادات والقوى الداخلية الناتجة، ثم يحدد القوى الداخلية ذات الصلة بكل منشأ، وبعد ذلك يشتق علاقات الحمل والقص والعزم. ويختتم بسلسلة من الأمثلة المتدرجة في التعقيد.

21.1 مقدمة 803
21.1.1 النهج الهندسي: من الإجهادات إلى القوى الداخلية 803
21.1.2 القوى الداخلية للكمرات المستقيمة والمنحنية في بعدين وثلاثة أبعاد 804
21.1.3 لماذا يكتسب ذلك أهمية؟ 806
21.1.4 اصطلاحات الإشارة في التصميم . 806
21.2 علاقات الحمل والقص والعزم 808
21.2.1 الصيغة التفاضلية 808
21.2.2 الصيغة التكاملية 809
21.3 أمثلة 810
21.3.1 مثال 21.1: كمرة ذات حمل مائل . 810
21.3.2 مثال 21.2: إطار مائل 812
21.3.3 مثال 21.3: إطار تحت حمل هيدروستاتيكي 814
21.3.4 مثال 21.4: حمل متغير خطياً . . 816
21.3.5 مثال 21.5: إطار ذو سقف مائل . 817
21.3.6 مثال 21.6: إطار تبادلي 817
21.3.7 مثال 21.7: إطار ثلاثي الأبعاد . . 821



21.1 مقدمة

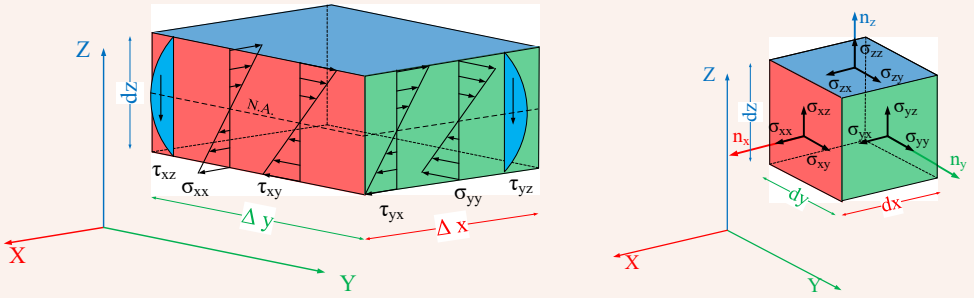
21.1.1 النهج الهندسي: من الإجهادات إلى القوى الداخلية

1 تعرّف الإجهادات، §O.2.2، عند نقطة متناهية الصغر، الشكل 21.1a، ويكون توزيعها خطياً عادة، كما في الشكل 21.1b لبلاطة سماكتها t.

2 أما القوى الداخلية فليست كيانات فيزيائية يمكن رصدها مباشرة؛ فما نسجله ونرصده فعلياً هو الانفعالات. وتولد هذه بدورها إجهادات لا يمكن قياسها مباشرة أيضاً. ولا يمكن حل سوى مسائل محدودة وبسيطة تحليلياً على أساس الإجهادات وحدها، كما في دالة إيري للإجهاد أو التحويل المطابق. أما عددياً، فسنستعمل عناصر محددة متصلة يعبر فيها عن الحل بدلالة الإجهادات، ثم تكامل هذه الإجهادات لحساب القوى الداخلية المناظرة، اللازمة للتحقق من استيفاء متطلبات الأكواد.

3 ولتيسير التحليل في الحالات المعقدة، أي في جميع المسائل تقريباً، نقدم مفهوم القوة الداخلية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) توزيع الإجهاد عبر بلاطة

(a) الإجهادات الداخلية عند نقطة متناهية الصغر

شكل 21.1: الإجهادات الداخلية

4 فالقوى الداخلية تجريد مفاهيمي لفهم آثار الإجهادات على مساحة معينة. وهي رياضياً تكاملات توزيعات الإجهاد على مساحات محددة.

5 وتعرّف القوى كمحصّلات:

القوى المحورية
$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz$$

$$N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz;\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz;\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz$$

العزوم
$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz$$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz;\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz;\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

القص
$$\mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz$$

$$V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz;\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz$$

6 وتستعمل هذه بدورها قوى داخلية في توليفات مختلفة تبعاً لنوع العنصر الإنشائي.

21.1.2 القوى الداخلية للكمرات المستقيمة والمنحنية في بعدين وثلاثة أبعاد

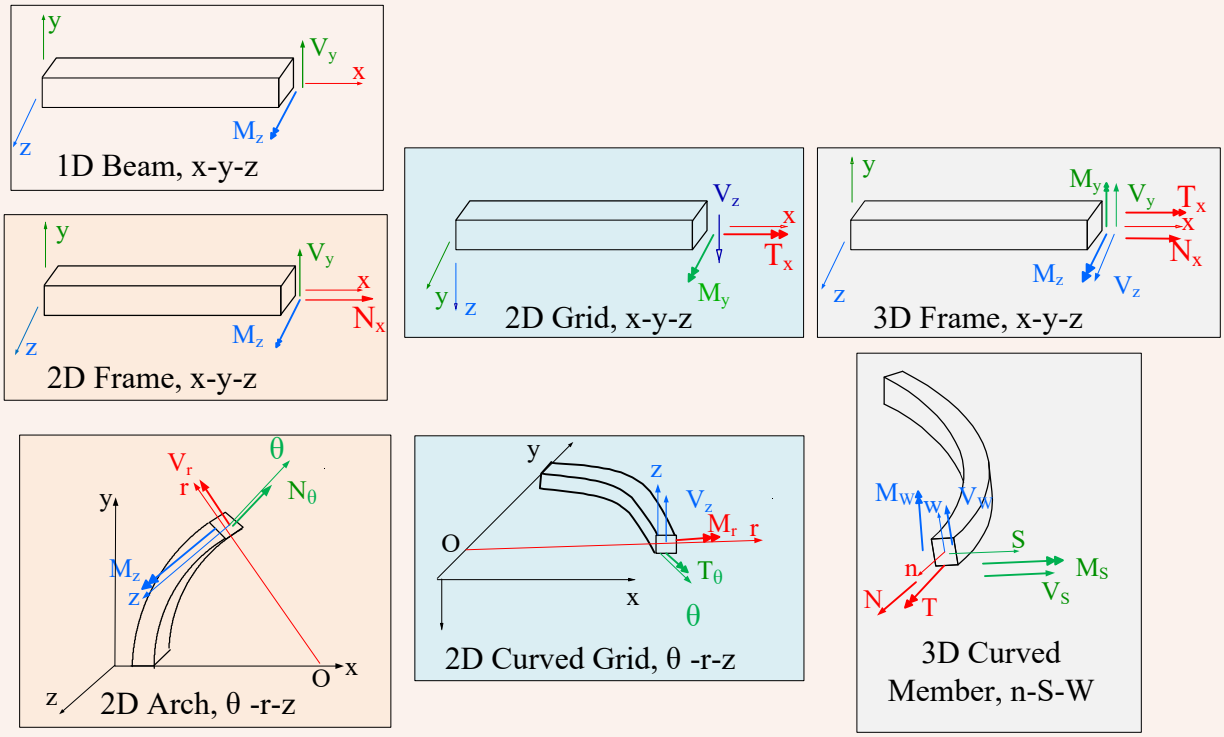
7 تختلف مجموعة القوى التي نتعامل معها بحسب نوع المنشأ، الشكل 21.2. ولاحظ أن العزوم تمثل بمتجهات مزدوجة الرأس بدلاً من الأسهم المنحنية، كما في مثال §19.2.8.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8 جرى العرف على افتراض امتداد العنصر على المحور x، وعلى ترميز القوة المحورية والقص بـN وV، واللي والعزم بـT وM.

9 وفي الاصطلاح، تسمى القوة المحورية على امتداد x القوة الناظمية ويرمز إليها بـN، بينما تسمى القوتان الأخريان قوى القص V. وبالمثل يكون العزم حول x هو اللي T، والعزمان الآخران عزمي انحناء M.

10 وعند دراسة القوى الداخلية في ثلاثة أبعاد، من المهم تحديد اتجاه كل قوة ومستوى عملها بوضوح، مثل V_x وV_y وM_z.[1]



شكل 21.2: القوى الداخلية في الكمرات المستقيمة والمنحنية

11 ترد المصطلحات المنطبقة أدناه:

[1] سنستعمل في البلاطات والقشريات دليلين سفليين، الشكلان 32.4 و33.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 21.1: القوى الداخلية في المنشآت

ديكارتية							قطبية						
	القوى			العزوم				القوى			العزوم		
	x	y	z	x	y	z		r	θ	z	r	θ	z
كمرة		V_y				M_z	عقد	V_r	N_θ				M_z
إطار ثنائي الأبعاد	N_x	V_y				M_z							
شبكة			V_z	T_x	M_y		كمرة منحنية			V_z	M_r	T_θ	
إطار ثلاثي الأبعاد	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z							

	القوى			العزوم		
	n	s	w	n	s	w
منحنٍ ثلاثي الأبعاد	N_n	V_s	V_w	T_n	M_s	M_w

21.1.3 لماذا يكتسب ذلك أهمية؟

12 نتناول في الهندسة الإنشائية مفهومي الطلب والقدرة. وفي سياق هذا الفصل، يشير «الطلب» إلى القوى المحورية وقوى القص والعزوم المطبقة خارجياً. أما «القدرة» فهي قدرة العنصر الإنشائي على توليد توزيع داخلي للإجهاد. ويجب أن تكون تكاملات هذه الإجهادات الداخلية مساوية للطلب في المقدار ومعاكسة له في الاتجاه.

13 يوضح الشكل 21.3 ذلك، إذ يولد حمل خارجي عزماً على امتداد العنصر. وبأخذ الجزء الأيسر من الكمرة مخططاً للجسم الحر، يجب استيفاء ثلاث معادلات للاتزان، وهي جمع:

1. القوى في الاتجاه الرأسي y: $V = R_a - qx$؛
2. القوى في الاتجاه المحوري x: $C = T$؛
3. العزوم: $M_{ext} = M_{int} = Cd$.

14 لا تكتسب القوى الداخلية، كما عرّفت هنا، معناها التصميمي إلا عند الرجوع إلى علاقة الإجهاد والانفعال للمادة. ووفق افتراض أويلر–برنولي ببقاء المقطع المستوي مستوياً[2]، يكون توزيع الانفعال خطياً. ثم تحدد الإجهادات المناظرة لأي علاقة بين الإجهاد والانفعال، وهذا التوزيع هو الذي يولد C وT وM_{int}.

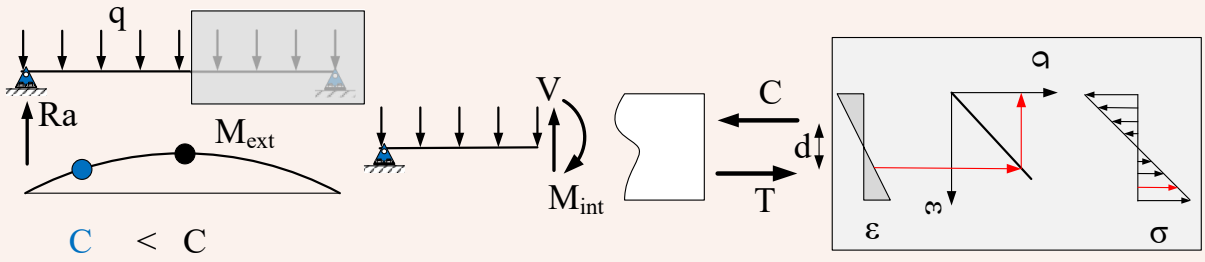
15 شرط الاتزان بين القدرة والطلب مبدأ أساسي تقوم عليه جميع أكواد التصميم، الفصل 35.

21.1.4 اصطلاحات الإشارة في التصميم

16 قبل إعادة اشتقاق علاقات القص والعزم، لنعرف اعتباطياً اصطلاحاً للإشارة.

[2] ما دامت نسبة البحر إلى الارتفاع أكبر من نحو 8.

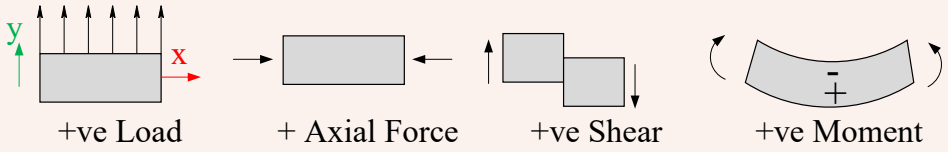
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 21.3: القوى الداخلية

17 الاصطلاح المعتمد هنا هو الشائع لأغراض التصميم[3].

18 بالرجوع إلى الشكل 21.5:



شكل 21.4: اصطلاحات إشارة القص والعزم في التصميم

شكل 21.5: اصطلاحات الإشارة في التصميم

الحمل موجب على امتداد المحور المحلي y للكمرة، بافتراض نظام يميني، أي موجب إلى أعلى.

المحوري: الشد موجب.

الانحناء: العزم الموجب هو الذي يولد شداً في الألياف السفلى وضغطاً في العليا. وبصيغة بديلة، ترسم العزوم على جانب الضغط، وهو أمر مفيد في الإطارات.

القص: قوة القص الموجبة هي المتجهة «إلى أعلى» على وجه سالب، أو «إلى أسفل» على وجه موجب. وبصيغة بديلة، يسبب زوج من قوى القص الموجبة دوراناً في اتجاه عقارب الساعة.

اللي: الاتجاه الموجب معاكس لاتجاه عقارب الساعة.

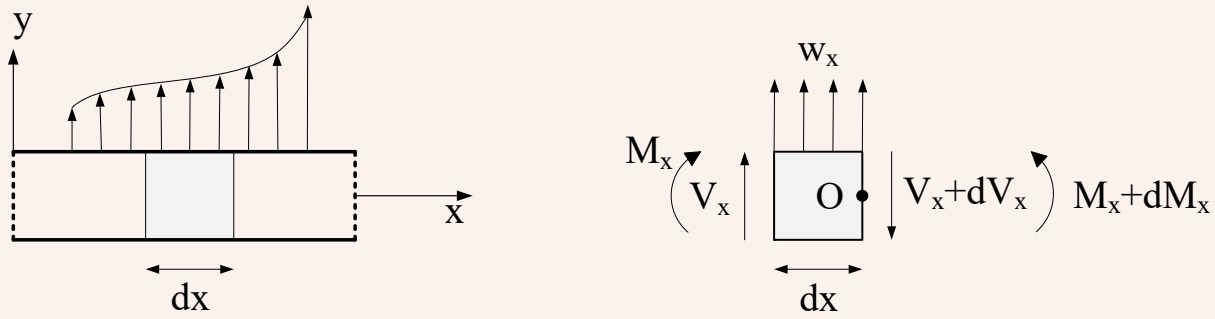
19 يفضل في جميع التحليلات ثلاثية الأبعاد استعمال متجهات مزدوجة الرأس، لا أسهماً منحنية. وتعرّف القوى والعزوم، بما فيها اللي، بالنسبة إلى نظام إحداثي يميني.

[3] سنستعمل لاحقاً اصطلاحاً مختلفاً في مقررات التحليل المتقدمة، §26.1.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21.2 علاقات الحمل والقص والعزم

20 لنعد اشتقاق العلاقات الأساسية بين الحمل والقص والعزم. خذ طولاً متناهي الصغر $\mathrm{d}x$ من كمرة معرضة لحمل موجب[4] $w(x)$، الشكل 21.6. ويجب أن يكون هذا الجزء المتناهي الصغر في حالة اتزان أيضاً.



شكل 21.6: مخطط الجسم الحر لجزء متناهي الصغر من كمرة

21 لا توجد قوى محورية[5]، ولذلك لا يلزم إلا استيفاء معادلتي الاتزان $\Sigma F_y = 0$ و$\Sigma M_z = 0$.

22 ولأن $\mathrm{d}x$ متناهٍ في الصغر، يمكن إهمال التغير الصغير في الحمل على امتداده، فنفترض ثبات $w(x)$ على $\mathrm{d}x$.

23 وللدلالة على حدوث تغير صغير في القص والعزم على طول العنصر $\mathrm{d}x$، نضيف الكميتين التفاضليتين $\mathrm{d}V_x$ و$\mathrm{d}M_x$ إلى V_x وM_x على الوجه الأيمن.

21.2.1 الصيغة التفاضلية

24 بأخذ معادلة الاتزان الأولى:

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_x + w_x \mathrm{d}x - (V_x + \mathrm{d}V_x) = 0$$

أو

تعريف 21.2: القص؛ الصيغة التفاضلية

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = w(x)$$

يساوي ميل منحنى القص عند أي نقطة على محور العنصر قيمة منحنى الحمل عند تلك النقطة.

[4] ينبغي في هذا الاشتقاق، كما في سائر الاشتقاقات، افتراض جميع الكميات موجبة.
[5] ستدخل القوى المحورية في المعادلة التفاضلية الحاكمة للانبعاج، أي معادلة أويلر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

25 وبالمثل:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_x + V_x \mathrm{d}x - w_x \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}x}{2} - (M_x + \mathrm{d}M_x) = 0$$

وبإهمال الحد $\mathrm{d}x^2$ تبسط إلى:

تعريف 21.3: العزم؛ الصيغة التفاضلية

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V(x)$$

يساوي ميل منحنى العزم عند أي نقطة على محور العنصر قيمة القص عند تلك النقطة.

21.2.2 الصيغة التكاملية

26 الصيغ البديلة للمعادلتين السابقتين:

$$V = \int w(x)\mathrm{d}x$$

أو

تعريف 21.4: القص؛ الصيغة التكاملية

$$\Delta V_{21} = V_{x_2} - V_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\mathrm{d}x$$

يساوي التغير في القص بين 1 و2، أي ΔV_{1-2}، المساحة تحت منحنى الحمل بين x_1 وx_2.

وبالمثل:

$$M = \int V(x)\mathrm{d}x$$

أو

تعريف 21.5: العزم؛ الصيغة التكاملية

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\mathrm{d}x$$

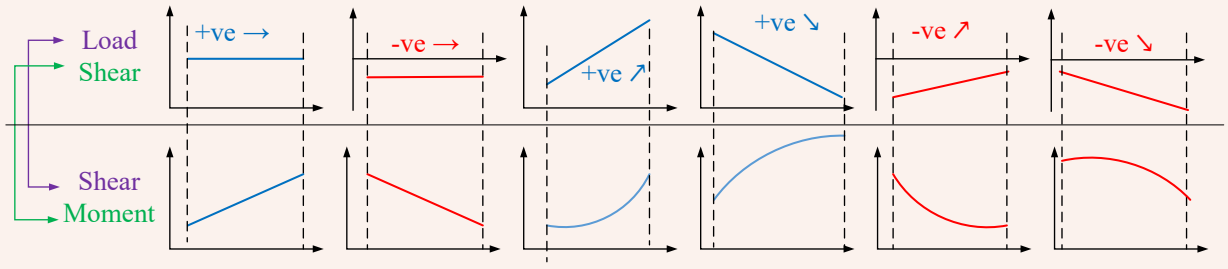
يساوي التغير في العزم بين 1 و2، أي ΔM_{21}، المساحة تحت منحنى القص بين x_1 وx_2.

27 ولا نزال بحاجة إلى V_1 وM_1 لتحديد V_2 وM_2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28 وستحدد لاحقاً، في الفصل 9، علاقات مماثلة بين التقوس $\frac{M}{EI}$ والدوران θ، المعادلة 22.16.

29 يبين الشكل 21.7 تغير القص والعزم على امتداد كمرة تحت أحمال مختلفة، ويمكن استعماله دليلاً لرسم مخططات القص والعزم.



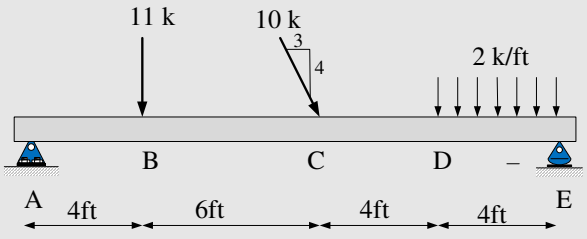
شكل 21.7: تغيرات الحمل والقص والعزم

30 يجب في التصميم غالباً دراسة توليفات مختلفة للأحمال. ولكل توليفة ينبغي رسم مخططي القص والعزم، ثم استعمال غلاف العزوم لأغراض التصميم.

21.3 أمثلة

31 فيما يأتي أمثلة توضيحية اختيرت بعناية لإبراز بعض تعقيدات العملية الدقيقة، أو لتقديم طرائق بديلة لتحديد مخططات القص والعزم. تجرى الحسابات أحياناً منفصلة عن الرسم، وتظهر أحياناً أخرى داخل مخططات الجسم الحر نفسها.

21.3.1 مثال 21.1: كمرة ذات حمل مائل



ردود الأفعال تحدد من معادلات الاتزان:

$$(\leftarrow) \Sigma F_x = 0; \Rightarrow -R_{A_x} + 6 = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 6 \text{ k}$$
$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (11)(4) + (8)(10) + (4)(2)(14+2) - R_{F_y}(18) = 0$$
$$\Rightarrow R_{F_y} = 14 \text{ k}$$
$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - 11 - 8 - (4)(2) + 14 = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 13 \text{ k}$$

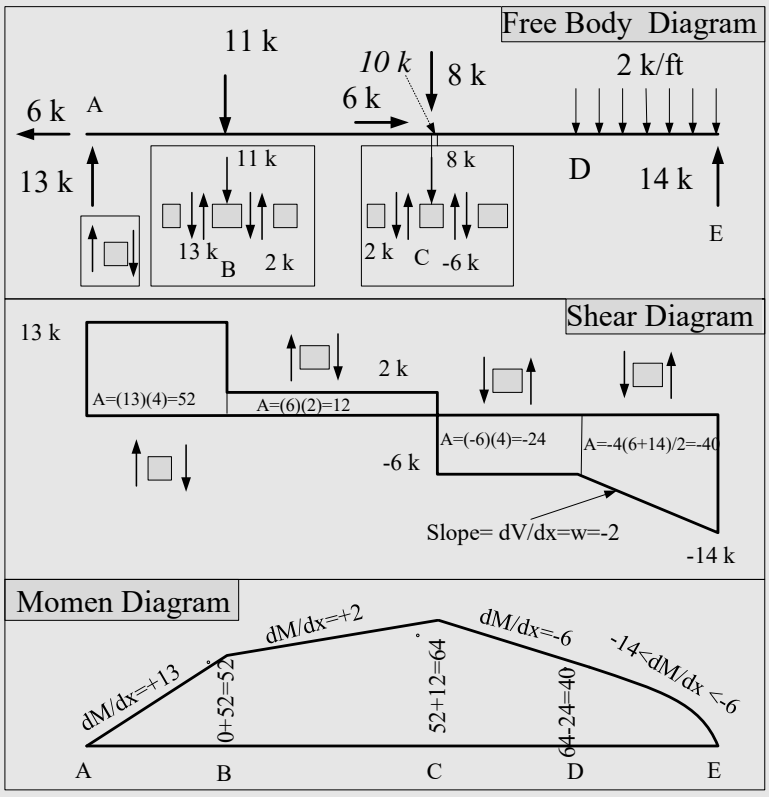
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القص يحدد بعد ذلك:

1. عند A يساوي القص رد الفعل ويكون موجباً؛
2. عند B ينخفض القص، بسبب الحمل السالب، بمقدار $11\ \text{k}$ إلى $2\ \text{k}$؛
3. عند C ينخفض مرة أخرى بمقدار $8\ \text{k}$ إلى $-6\ \text{k}$؛
4. يبقى ثابتاً حتى D، ثم ينخفض بميل سالب ثابت، لأن الحمل منتظم وسالب، بمقدار $2\ \text{k}$ لكل قدم طولي حتى $-14\ \text{k}$؛
5. وللتحقق، فإن $-14\ \text{k}$ هو أيضاً رد الفعل الذي حدد سابقاً عند F.

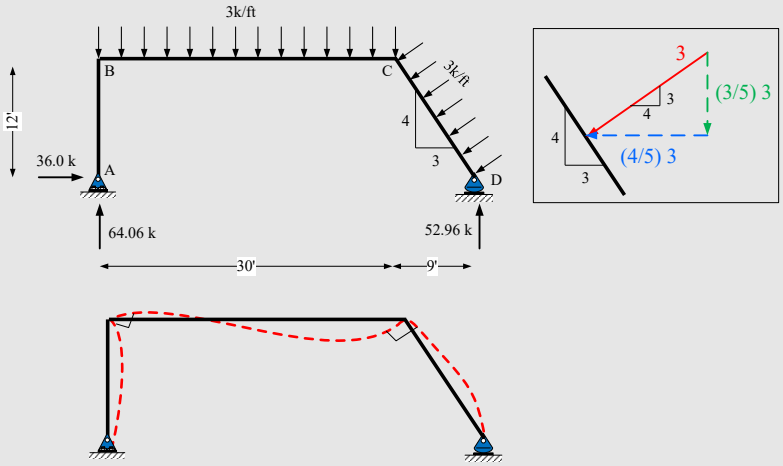
العزم يحدد أخيراً:

1. العزم عند A صفر، لأن المسند مفصلي؛
2. يساوي تغير العزم بين A وB المساحة تحت مخطط القص المناظر: $\Delta M_{B-A} = (13)(4) = 52$؛
3. وهكذا.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21.3.2 مثال 21.2: إطار مائل



ردود الأفعال تحدد أولاً:

$$(\leftarrow \quad) \Sigma F_x = 0; \Rightarrow R_{A_x} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)\,(15)}_{\text{الحمل}} = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_x} = 36 \text{ k}$$

$$(+\circlearrowleft) \Sigma M_A = 0; \Rightarrow (3)(30)(\frac{30}{2}) + \underbrace{\frac{3}{5}(3)(15)\left(30 + \frac{9}{2}\right)}_{CD_Y} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)(15)\frac{12}{2}}_{CD_X}$$

$$-39R_{D_y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} = 52.96 \text{ k}$$

$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - (3)(30) - \frac{3}{5}(3)(15) + 52.96 = 0$$

$$\Rightarrow R_{A_y} = 64.06 \text{ k}$$

نعزل كل عنصر ونرسم مخطط جسمه الحر لكل مركبة من مركبات القوة.

القص:

1. يكون القص على $A - B$ ثابتاً، ويساوي رد الفعل الأفقي عند A، وهو سالب وفق اصطلاح الإشارة المعرف سابقاً: $V_A = -36$ k؛
2. عند B في العنصر $B - C$، يجب أن يساوي القص القوة الرأسية المنتقلة عبر $A - B$، وهي رد الفعل الرأسي عند A: $V_B = 64.06$؛
3. لأن $B - C$ معرض لحمل منتظم سالب، يكون ميل القص عليه -3، ويعطى بدلالة x المقاسة من B إلى C بالعلاقة:

$$V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x$$

4. نحصل على القص على $C - D$ بتحليل رد الفعل الرأسي عند D إلى مركبتيه المحورية والقصية. ومن ثم يكون القص عند D مساوياً $\frac{3}{5}52.96 = 31.78$ k وسالباً. ووفق اصطلاح إشارة الحمل، يجب أن يساوي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ميل القص 3− على $C-D$. ولذلك يحقق القص عند C العلاقة $V_c - \frac{5}{3}9(3) = -31.78$، أو $V_c = 13.22$.
وتكون معادلة القص، عندما يمتد x من C إلى D:

$$V = 13.22 - 3x$$

5. نتحقق من الحسابات بفحص اتزان العقدة C:

$$(\leftarrow \quad) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}(42.37) + \frac{4}{5}(13.22) = 25.42 + 10.58 = 36 \checkmark$$
$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(42.37) - \frac{3}{5}(13.22) = 33.90 - 7.93 = 25.97 \checkmark$$

العزم:

1. على $A-B$ يكون العزم صفراً عند A لوجود مفصل، ويساوي ميله القص. ولذلك يكون عند B: $M_B = (-36)(12) = -432$ k.ft؛
2. على $B-C$ يكون العزم:

$$\begin{aligned} M_{B-C} =& M_B + \int_0^x V_{B-C}(x)\mathrm{d}x = -432 + \int_0^x (64.06 - 3x)\mathrm{d}x \\ =& -432 + 64.06x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

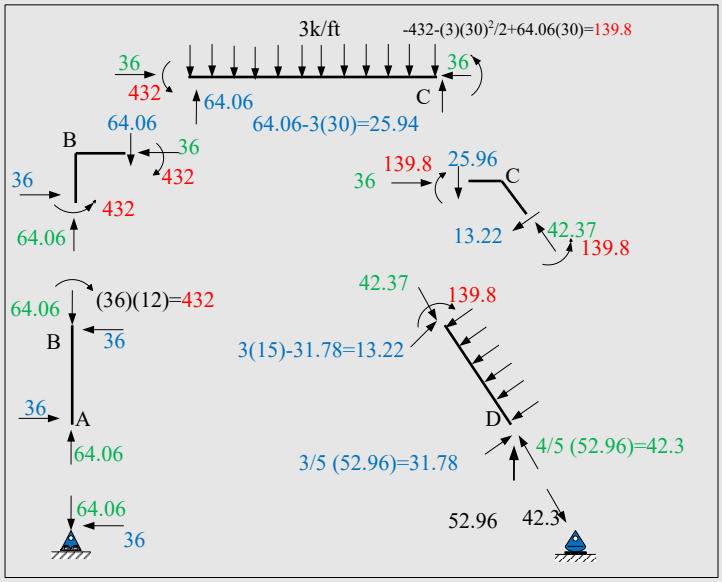
وهو قطع مكافئ. وبالتعويض عن $x = 30$، نحصل عند العقدة C على $M_C = -432 + 64.06(30) - 3\frac{30^2}{2} = 139.8$ k.ft.

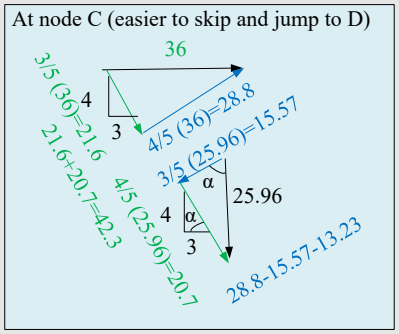
3. إذا لزم تحديد أكبر عزم على $B-C$، فإن $\frac{\mathrm{d}M_{B-C}}{\mathrm{d}x} = 0$ عند النقطة التي يكون فيها $V_{B-C} = 0$، أي $V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{64.06}{3} = 21.35$ ft. وبعبارة أخرى، يقع أكبر عزم حيث يساوي القص صفراً. ومن ثم $M_{B-C}^{\max} = -432 + 64.06(21.35) - 3\frac{(21.35)^2}{2} = -432 + 1,367.7 - 683.7 = -251.98$ k.ft.
4. وأخيراً، يتغير العزم على $C-D$ تربيعياً لأن القص خطي؛ فيزداد أولاً مع القص الموجب، ثم ينقص مع القص السالب. ويعطى العزم على $C-D$ بـ:

$$\begin{aligned} M_{C-D} = M_C + \int_0^x V_{C-D}(x)\mathrm{d}x = 139.8 + \int_0^x (13.22 - 3x)\mathrm{d}x \\ = 139.8 + 13.22x - 3\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

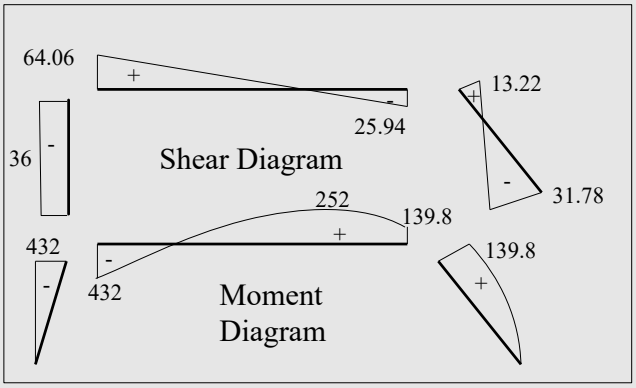
وهو قطع مكافئ. وبالتعويض عن $x = 15$، نحصل عند العقدة C على $M_C = 139.8 + 13.22(15) - 3\frac{15^2}{2} = 139.8 + 198.3 - 337.5 = 0 \checkmark$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.





$\cos \alpha = 3/5 = N/25.96$
$N = (25.96)(3)/(5) = 15.57$

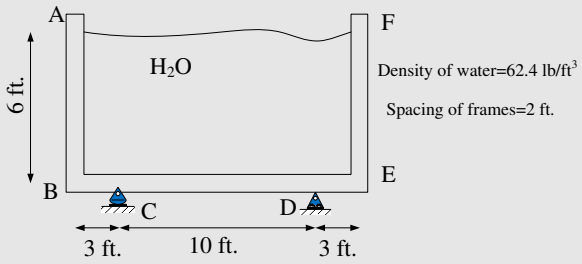


21.3.3 مثال 21.3: إطار تحت حمل هيدروستاتيكي

يمثل الإطار الآتي الدعامة الإنشائية لمجرى مائي. وبافتراض تباعد الإطارات قدمين على امتداد المجرى، نريد:

1. تحديد جميع أفعال نهايات العناصر الداخلية؛
2. رسم مخططي القص والعزم؛
3. تعيين أكبر عزوم الانحناء الداخلية وحسابها؛
4. بيان مواضع التسليح إذا كان الإطار من الخرسانة المسلحة.

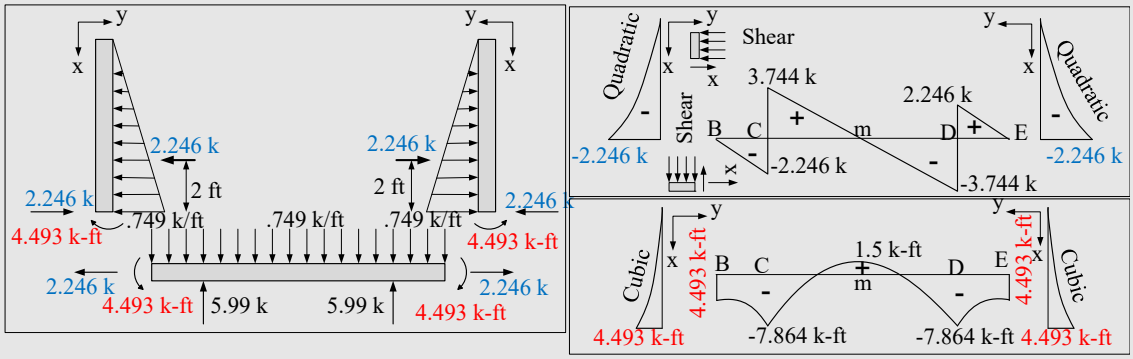
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



يولد الضغط الهيدروستاتيكي قوى جانبية على العناصر الرأسية، ويمكن معاملتها ككابول مثبت عند طرفه السفلي. والضغط خطي ويعطى بـ $p = \gamma h$. ولأن كل إطار يحمل شريحة عرضها قدمان من المجرى، تكون معادلة w، بوحدة رطل/قدم:

$$w = (2)(62.4)(h) = 124.8h \text{ lbs/ft}$$

وعند القاعدة $w = (124.8)(6) = 749 \text{ lbs/ft} = .749 \text{ k/ft}$. ولاحظ أن هذا يمثل الضغط الجانبي على الجدران الطرفية، وكذلك الحمل المنتظم على العناصر الأفقية.



أفعال النهايات

1. قوة القاعدة عند B هي $F_{Bx} = (.749)\frac{6}{2} = 2.246 \text{ k}$؛
2. عزم القاعدة عند B هو $M_B = (2.246)\frac{6}{3} = 4.493 \text{ k.ft}$؛
3. قوتا النهاية عند B للعنصر $B - E$ متساويتان ومتعاكستان؛
4. رد الفعل عند C هو $R_{Cy} = (.749)\frac{16}{2} = 5.99 \text{ k}$.

قوى القص 1. سبق تحديد قوة القص عند القاعدة B وكانت 2.246 k. ووفق اتجاه محوري $y - x$ فهي قص سالب؛

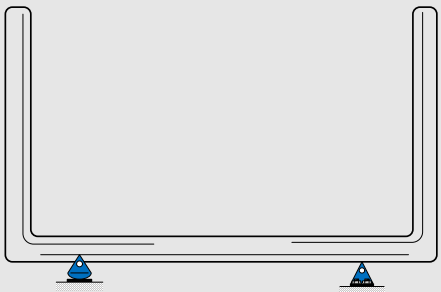
2. القص الرأسي عند B صفر، مع إهمال وزن $A - B$؛
3. القص إلى يسار C هو $V = 0 + (-.749)(3) = -2.246 \text{ k}$؛
4. القص إلى يمين C هو $V = -2.246 + 5.99 = 3.744 \text{ k}$.

مخططات العزم 1. عند القاعدة B: $M = 4.493 \text{ k.ft}$ كما حدد أعلاه؛

2. عند المسند C: $M_c = -4.493 + (-.749)(3)(\frac{3}{2}) = -7.864 \text{ k.ft}$؛
3. أكبر عزم هو $M_{\max} = -7.864 + (.749)(5)(\frac{5}{2}) = 1.50 \text{ k.ft}$.

التصميم: يوضع التسليح على امتداد الألياف المشدودة، أي على جانب العزم السالب[a]. ويوضح الشكل تخطيطياً موضع تسليح الانحناء[b].

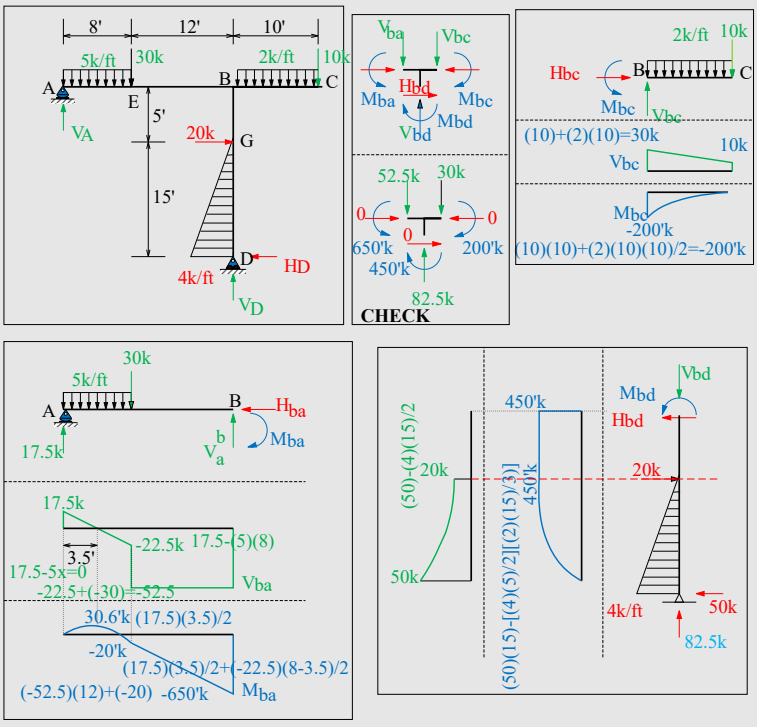
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



[a] لذلك يكون اصطلاح إشارة عزوم التصميم في معظم الدول الأوروبية معاكساً للاصطلاح الشائع في الولايات المتحدة؛ إذ يوضع التسليح حيث يكون العزم «موجباً».
[b] يتألف تسليح القص من سلسلة من الكانات الرأسية.

21.3.4 مثال 21.4: حمل متغير خطياً

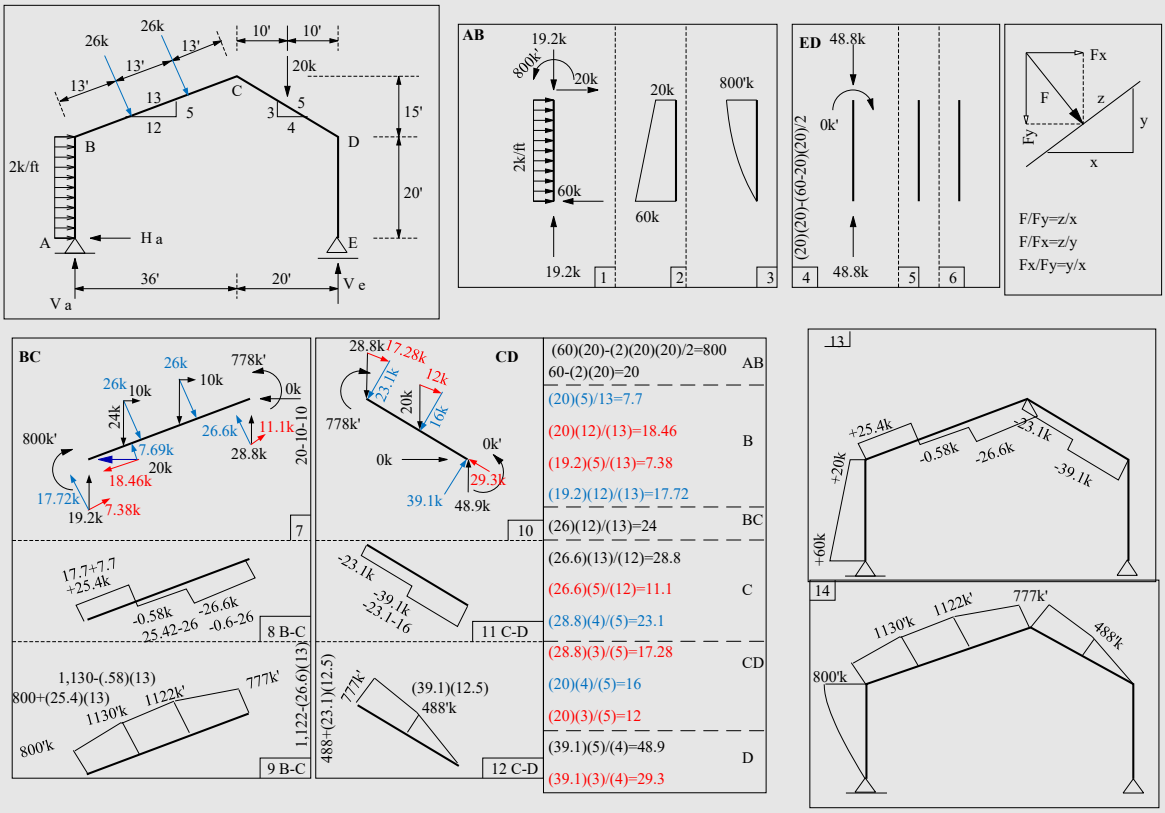
لم تورد تفاصيل الحسابات في هذا المثال، لكن يمكن تحديد مخططي القص والعزم بسهولة خطوة خطوة.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21.3.5 مثال 21.5: إطار ذو سقف مائل

لم تورد تفاصيل الحسابات في هذا المثال، لكن يمكن تحديد مخططي القص والعزم بسهولة خطوة خطوة.

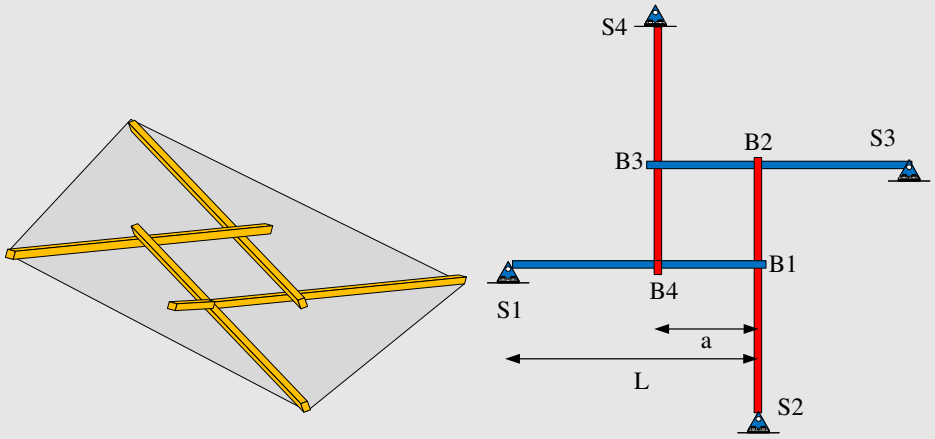


21.3.6 مثال 21.6: إطار تبادلي

نع لوقنم يتآلا عطقملا Schrama, 2021 “*A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames*”.

يتكون الإطار التبادلي البسيط، §15.5.3، من أربع كمرات؛ ترتكز كل كمرة عند أحد طرفيها على مسند محيطي مفصلي (S1 وS2 وS3 وS4)، وعند طرفها الآخر على كمرة أخرى (B1 وB2 وB3 وB4). ويعمل الاتصال بين الكمرات كمسند، ويتوقف نوعه على الوصلة المستعملة. وتحمل كل كمرة كمرة أخرى عند موضع ما على امتدادها. وتسمى المسافة بين الكمرة المحمولة والحاملة طول *التعشيق*. وسنسمي الكمرة التي تعمل مسنداً الكمرة المجاورة، والتي تسلط الحمل الكمرة السابقة. يبين أدناه الإطار المستعمل في التحليل بطول تعشيق a.

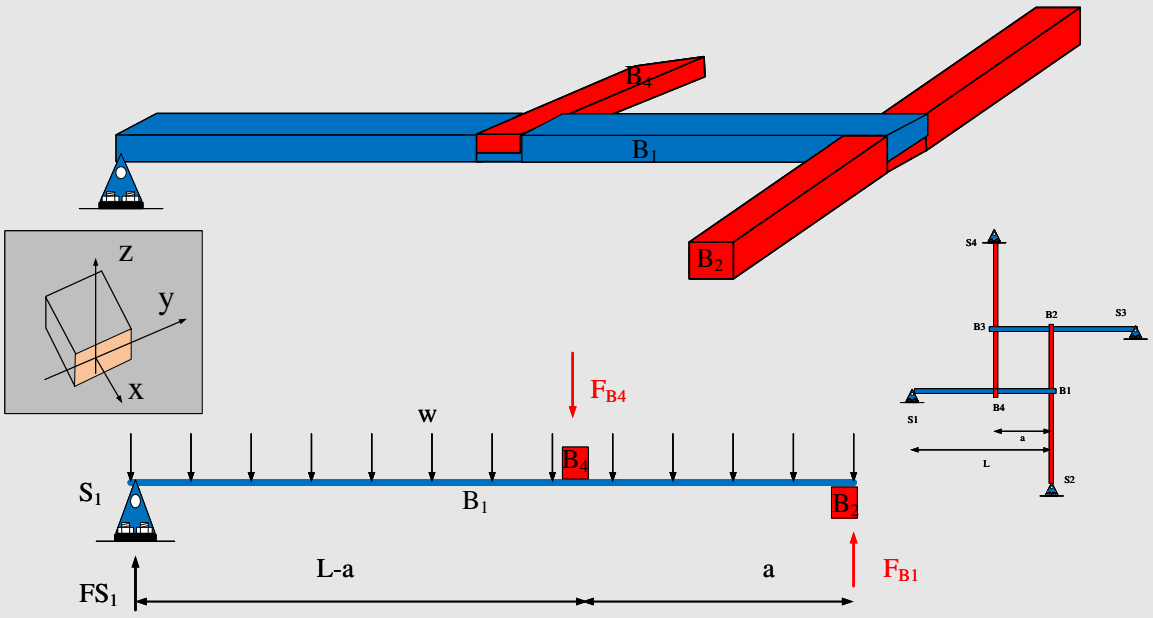
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الوصلات المفصلية

سنحلل الإطار بالتراكب، أي من دون وصلات صلبة محززة. ويفترض تعرض الكمرات لحمل موزع بانتظام w، مع حمل نقطي F على بعد a من نهاية الكمرة تسلطه الكمرة السابقة. ولأن الكمرات مفصلية، يرتكز طرفا كل منها على مسند مفصلي، ويمكن تمثيل كمرة واحدة من وحدة الإطار ككمرة بسيطة الارتكاز.

ردود الأفعال



بسبب التناظر، تساوي ردود الأفعال الرأسية الحمل الموزع مقسوماً على عدد المساند:

$$4wL - 4FS = 0 \Rightarrow F_{S1} = wL$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث FS مجموع ردود الأفعال الأربعة. وبسبب الوصلة المفصلية عند B1، يرتكز طرف الكمرة على مسند مفصلي لا يحمل عزم انحناء، فيكون العزم عند $B2$ صفراً. ومن هذا الشرط نحصل على F_{B4} بأخذ العزم حول B:

$$\left.\begin{aligned} F_{S1}L - F_{B4}a - wL\frac{L}{2} &= 0 \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} F_{B4} = \frac{wL^2}{2a}$$

ثم بجمع القوى الرأسية:

$$\left.\begin{aligned} F_{S1} + F_{B1} - wL - F_{B4} &= 0 \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} F_{B1} = F_{B4} = \frac{wL^2}{2a} = F$$

وهذا غير مستغرب، لأن رد الفعل الرأسي F_{S1} يصبح الحمل النقطي F على الكمرة المجاورة. وبسبب التناظر والاتزان الرأسي الكلي، لا بد أن يتساوى F_{S1} وF.

القوى الداخلية

تشتق القوى الداخلية في المقاطع مباشرة من الاتزان. عند B4:

$$\left.\begin{aligned} M_{\max} &= F_{S1}(L-a) - w\frac{(L-a)^2}{2} \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} M_{\max} = \frac{L^2 - a^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{lft}} &= F_{S1} - w(L-a) \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} V_{\text{lft}} = wa$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{rgt}} &= F_{B1} - wa \\ F_{B1} &= \frac{wL^2}{2a} \end{aligned}\right\} V_{\text{rgt}} = w\frac{L^2 - 2a^2}{2a}$$

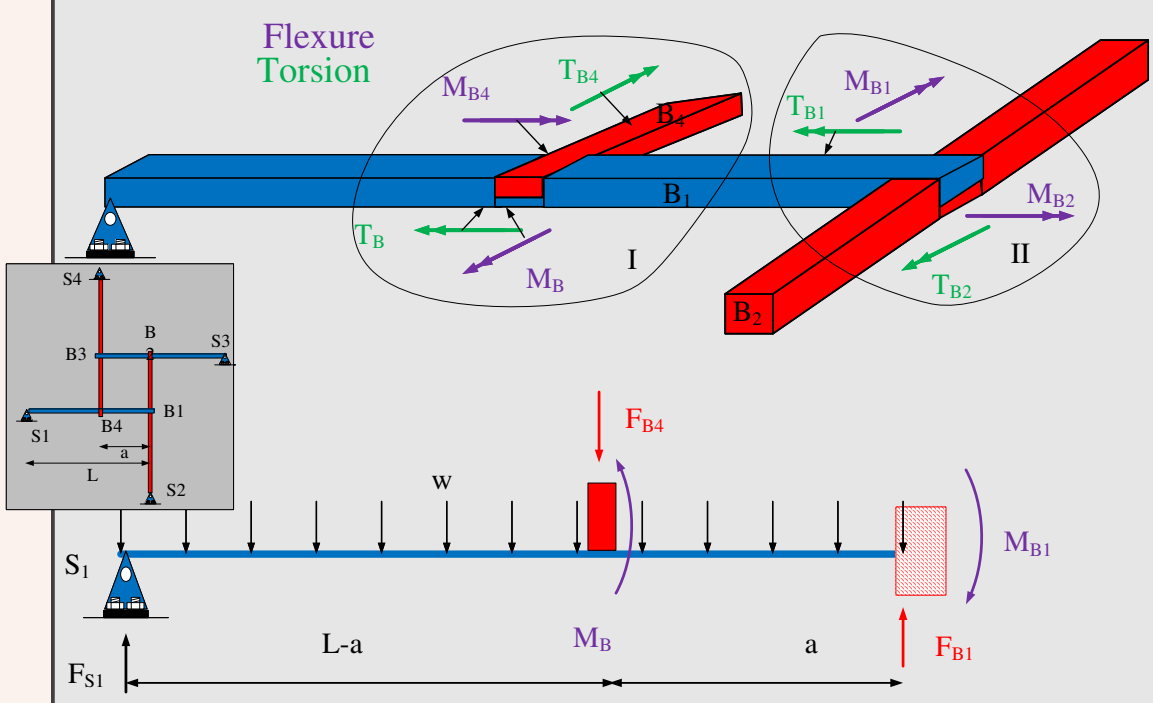
الوصلات المثبتة

يسلك الإطار التبادلي سلوكاً مختلفاً حين تكون الوصلات بين الكمرات مثبتة بواسطة الحزوز؛ إذ يمكنها حمل عزوم الانحناء، فتولد أحمال انحناء ولي معاً. ولذلك توجد عزوم انحناء في جميع الوصلات.

ندرس أولاً أثر عزم الانحناء M_y حول المحور y. يولد هذا العزم عزم لي M_x في الكمرة المجاورة، ويتوقف توزيعه على نوع المسند المحيطي والوصلة. وفي هذا الإطار ذي المساند المفصلية، ينتقل عزم اللي كاملاً إلى الوصلة التالية، فيولد عزم انحناء M_y في كل كمرة عند تقاطعها مع الكمرة السابقة. وتضم كل وصلة M_y وM_x معاً، وتولد M_x وM_y في الكمرة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

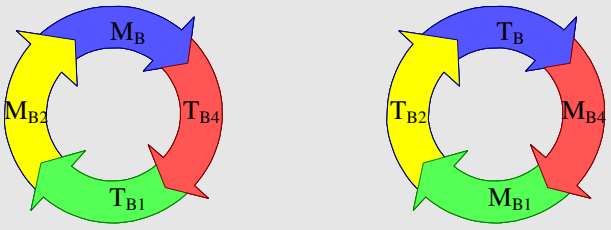
المجاورة.



وبالنظر إلى القوى الرأسية وحدها، يبقى $F_{B1} = F_{B4}$، لكن مقدارهما غير معلوم. وفي هذه المسألة ينتقل اللي في عنصر كعزم انحناء إلى العنصر الحامل، والعكس. وتلخص العلاقات كما يأتي:

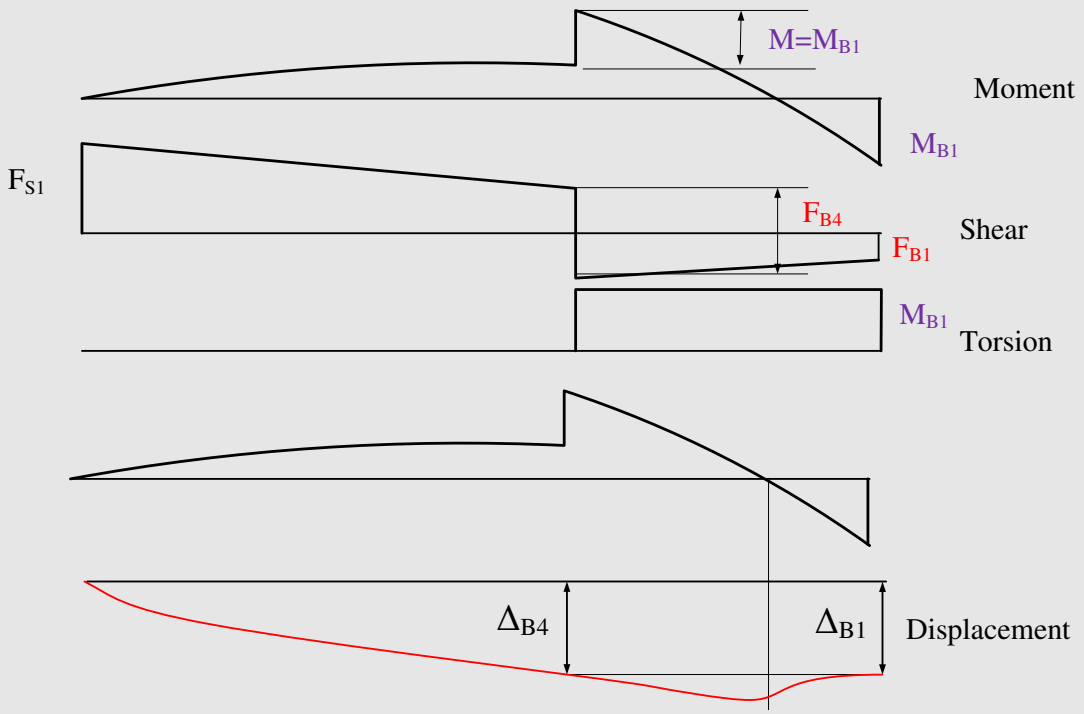
$$\underbrace{I \Rightarrow \begin{cases} M_B = T_{B4} \\ T_B = M_{B4} \end{cases}; \quad II \Rightarrow \begin{cases} T_{B1} = M_{B2} \\ M_{B1} = T_{B2} \end{cases};}_{\text{الاستاتيكا}} \quad \underbrace{\begin{cases} T_{B4} = T_{B1} \\ M_{B4} = M_{B1} \\ M_{B2} = M_B \\ T_{B2} = T_B \\ F_{B4} = F_{B1} \end{cases}}_{\text{التناظر}}$$

أو



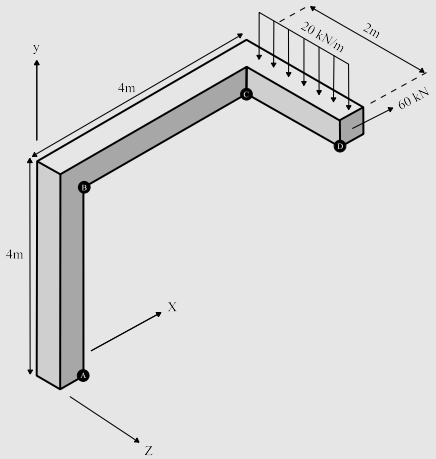
ولا تتقاطع المجموعتان؛ لذلك لا يمكن إثبات أن $M_B = M_{B1}$، وتبقى المجاهيل F_{B1}، M_B، M_{B1}. وتكون مخططات القوى الداخلية في النهاية:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لكن التناظر يعطي $\Delta_{B1} = \Delta_{B4}$، ويجب أن يكون الميل عند B1 وB4 صفراً. ويمكن تطبيق مبرهنات مساحة العزم لإكمال الحل.

21.3.7 مثال 21.7: إطار ثلاثي الأبعاد



1. للإطار ستة ردود أفعال عند المسند، ثلاث قوى وثلاثة عزوم، ولدينا ست معادلات اتزان؛ ولذلك فهو محدد استاتيكياً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. لكل عنصر القوى الداخلية الآتية، معرفة بالنسبة إلى *نظام الإحداثيات المحلي* $x' - y' - z'$ لكل عنصر، بحيث يكون x على امتداد العنصر:

العنصر	القوى الداخلية					
العنصر	محورية	قص		عزم		لي
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
$C-D$		✓	✓	✓	✓	
$B-C$	✓		✓	✓	✓	✓
$A-B$	✓	✓		✓	✓	✓

3. في هذه المسألة، يسهل تحديد القوى الداخلية عند نهاية كل عنصر، بدءاً بالعنصر $C-D$، بدلاً من البدء بردود الأفعال. ونعتمد مؤقتاً اصطلاح إشارة متوافقاً مع أنظمة الإحداثيات المحلية.

C-D

$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^C_{y'} = (20)(2) = +40\text{kN}$$
$$\Sigma F_{z'} = 0 \Rightarrow V^C_{z'} = +60\text{kN}$$
$$\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^C_{y'} = -(60)(2) = -120\text{kN.m}$$
$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^C_{z'} = (20)(2)\frac{2}{2} = +40\text{kN.m}$$

B-C

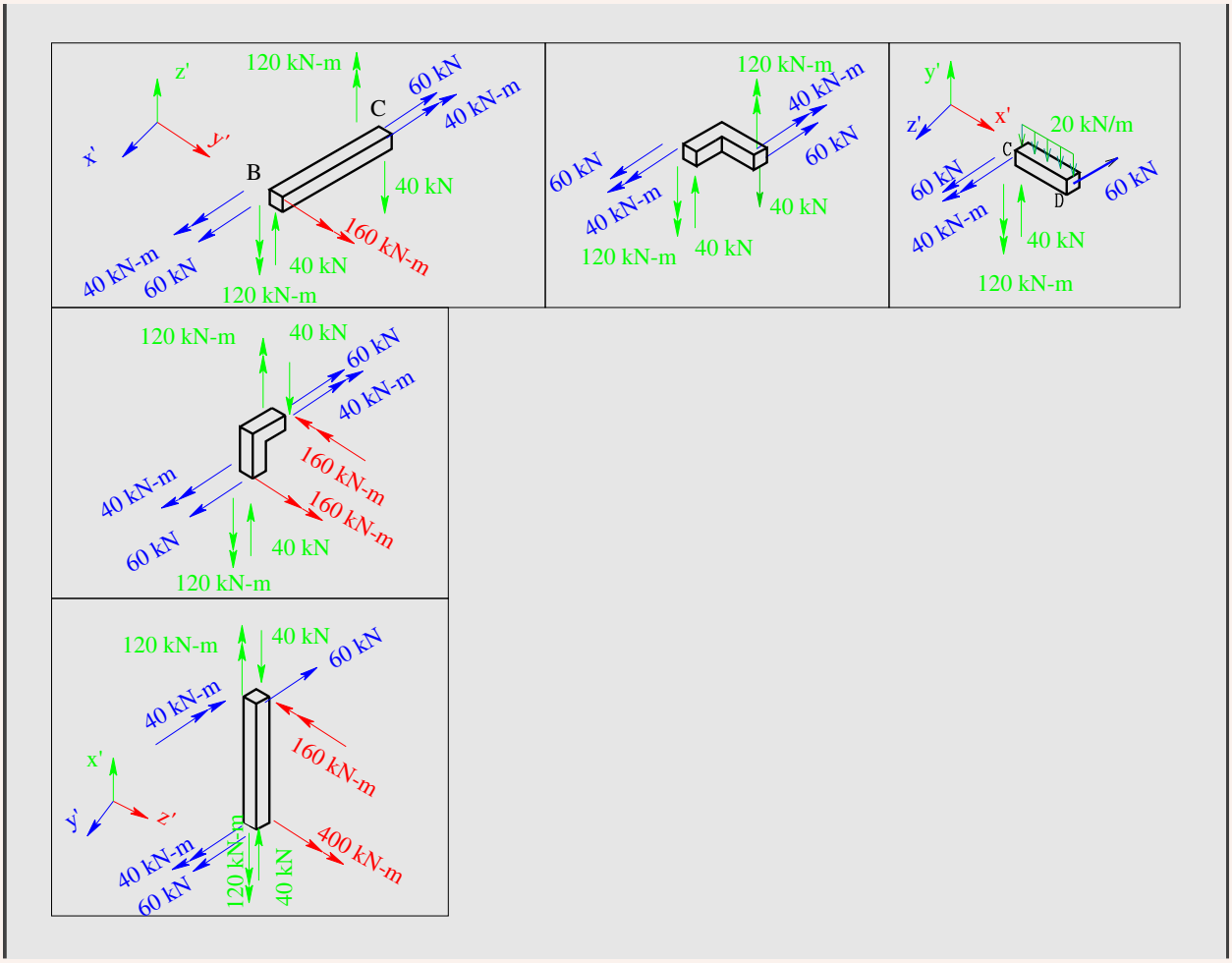
$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N^B_{x'} = V^C_{z'} = -60\text{kN}$$
$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^B_{y'} = V^C_{y'} = +40\text{kN}$$
$$\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^B_{y'} = M^C_{y'} = -120\text{kN.m}$$
$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^B_{z'} = V'^C_{y}(4) = (40)(4) = +160\text{kN.m}$$
$$\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T^B_{x'} = -M^C_{z'} = -40\text{kN.m}$$

A-B

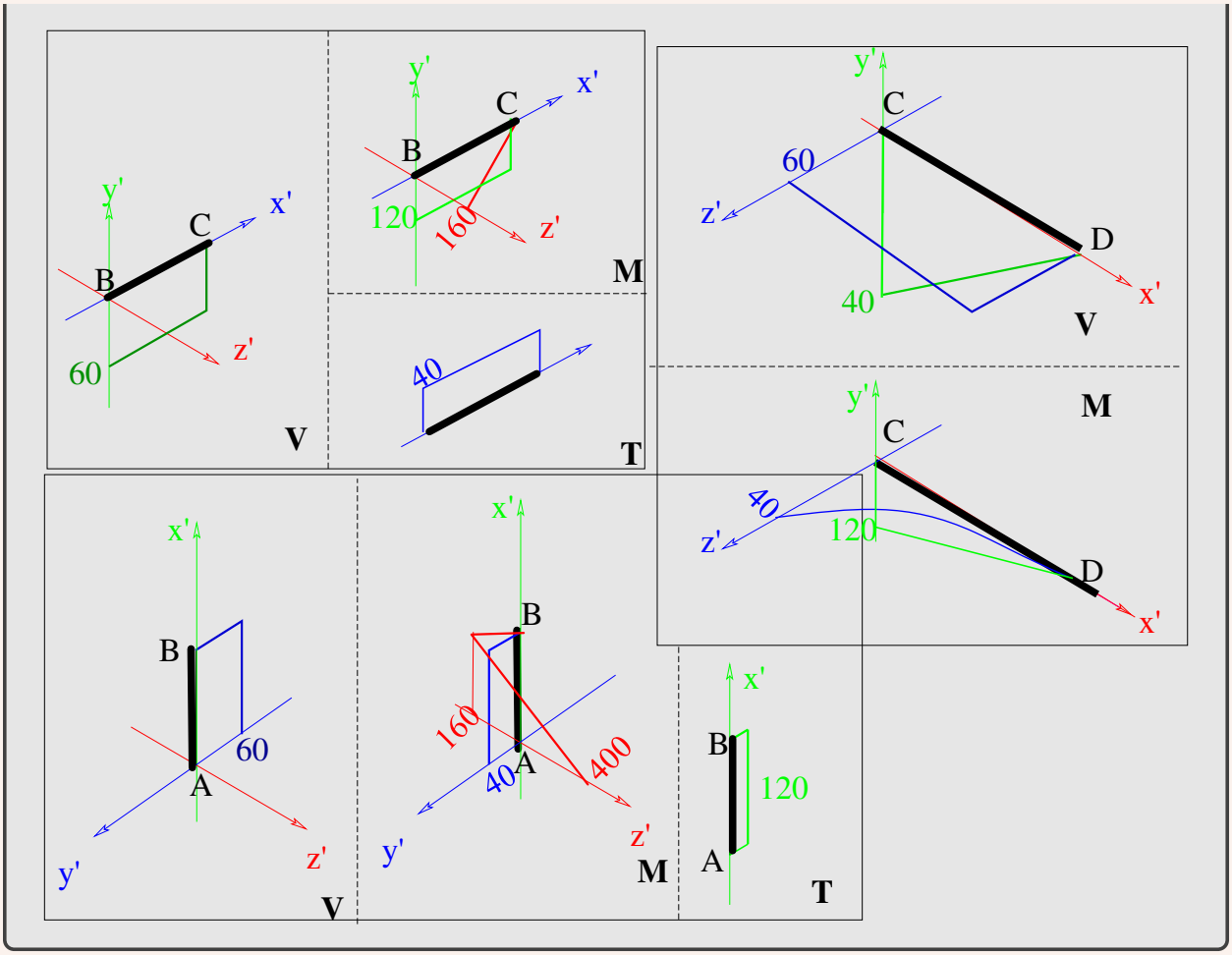
$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow N^A_{x'} = V^B_{y'} = +40\text{kN}$$
$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow V^A_{y'} = N^B_{x'} = +60\text{kN}$$
$$\Sigma M_{y'} = 0 \Rightarrow M^A_{y'} = T^B_{x'} = +40\text{kN.m}$$
$$\Sigma M_{z'} = 0 \Rightarrow M^A_{z'} = M^B_{z'} + N^B_{x'}(4) = 160 + (60)(4) = +400\text{kN.m}$$
$$\Sigma T_{x'} = 0 \Rightarrow T^A_{x'} = M^B_{y'} = -120\text{kN.m}$$

يوضح هذا المثال بجلاء التفاعل بين القوى المحورية N والقص V، وكذلك بين العزوم M واللي T.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



جسر شيلون (1969)، مونو–بيغيه، سويسرا

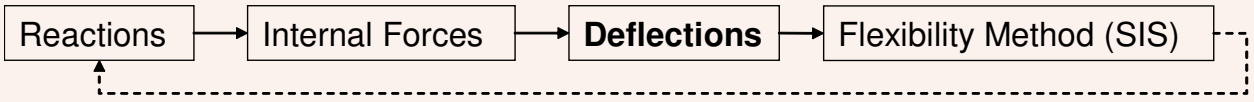
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22 الانحرافات؛ المنحنى المرن

ملخص

يتناول هذا الفصل انحراف العناصر الخاضعة للانحناء، إما باستخدام المعادلة التفاضلية الحاكمة وإما باستخدام علاقة الانفعال–الانحناء المرتبطة بها. ويقود النهج الثاني إلى طريقة مساحة الانحناء، التي تتضمن طريقة الكمرة المرافقة بوصفها حالة خاصة. وتُعرض مسائل بدرجات متفاوتة من التعقيد التحليلي.

22.1 مقدمة 826
22.2 المعادلة التفاضلية 827
22.2.1 مثال 22.1: التكامل المزدوج . . . 828
22.2.2 مثال 22.2: الانحراف الأقصى . . 829
22.2.3 مثال 22.3: الشكل الأمثل للزلاجة 830
22.2.4 مثال 22.4: كمرة طافية 830
22.3 الانحناء 833
22.3.1 مثال 22.5: عجلة الدراجة 835
22.3.2 مثال 22.6: صلابة نابض حلزوني 841
22.3.3 علاقة الانحناء–الانفعال 842
22.3.4 طريقة مساحة الانحناء (مساحة العزم) 844



22.1 مقدمة

1 يُعد تحديد الانحرافات جزءًا أساسيًا من التحليل الإنشائي. وتضع جميع الأكواد حدًا للانحراف المسموح به (للحد من الاهتزاز والتصادم وغيرهما من الآثار غير المرغوبة). كما يؤدي حساب الانحراف دورًا مهمًا في تحليل المنشآت غير المحددة استاتيكيًا بطريقة القوى (التي يتناولها الفصل 25).

2 يجب تحديد انحرافات المنشآت لتحقيق متطلبات قابلية الخدمة، أي حصر الانحرافات تحت أحمال *الخدمة* ضمن قيم مقبولة (مثل $\frac{\Delta}{L} \leq 360$).

3 يبحث هذا الفصل انحرافات المنشآت استنادًا إلى اعتبارات هندسية. وسنقدم لاحقًا طريقة أقوى تستند إلى اعتبارات الطاقة (الفصل 24).

4 وفي كلتا الحالتين، يمثل حساب الانحراف خطوة حاسمة في طريقة القوى لتحليل المنشآت غير المحددة استاتيكيًا.

5 سنعرض طريقتين مترابطتين:

- استخدام المعادلة التفاضلية الحاكمة للكمرات عن طريق التكامل.
- استخدام علاقة العزم–الانحناء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22.2 المعادلة التفاضلية

6 في الحالة المرنة:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\\ \sigma &= -\frac{M(x)y}{I}\end{aligned}\right\} \varepsilon = -\frac{M(x)y}{EI}$$

وبدمج هذه المعادلة الأخيرة مع المعادلة 22.15 نحصل على

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{22.1}$$

7 نشتق مرتين

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2\frac{M(x)}{EI}}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

8 ولكن لدينا أيضًا علاقات العزم–قوة القص التي حُددت في الفصل السابق

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dx} &= w(x)\\ \frac{dM(x)}{dx} &= V(x)\end{aligned}\right\} \frac{d^2M(x)}{dx^2} = w(x)$$

وبالتعويض

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

يمكن تعميم هذه المعادلة كما يأتي

تعريف 22.1: المعادلة التفاضلية الحاكمة للانحناء

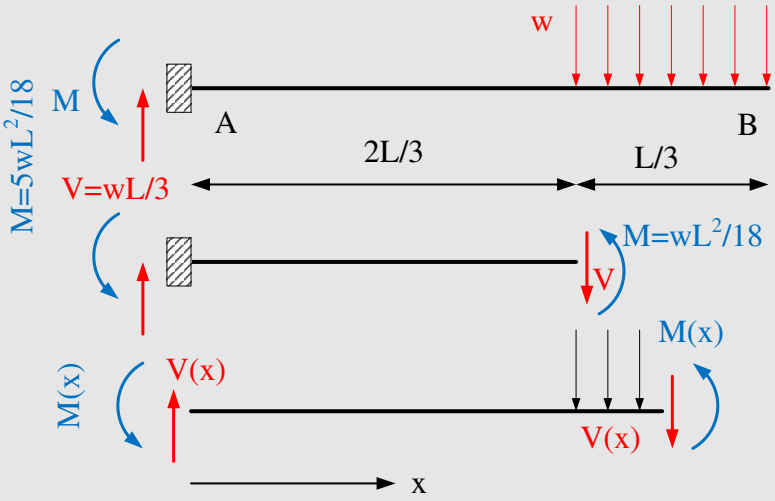
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \quad \text{أو} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI} \tag{22.2}$$

هذه هي المعادلة التفاضلية الأساسية للكمرات. وسنشتق لاحقًا معادلات مماثلة للكابلات وللكمرات–الأعمدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22.2.1 مثال 22.1: التكامل المزدوج

نريد حساب الانحراف عند B للكمرة الكابولية الآتية



عند: $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. معادلة العزم

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2$$

2. التكامل مرة واحدة

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x + C_1$$

ولكن عند $x = 0$ يكون $\frac{dy}{dx} = 0$، ومن ثم $\Rightarrow C_1 = 0$

3. التكامل مرتين

$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5wL^2}{36}x^2 + C_2$$

ومرة أخرى، عند $x = 0$ يكون $y = 0$، ومن ثم $\Rightarrow C_2 = 0$

عند: $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. معادلة العزم

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2 - w(x - \frac{2L}{3})(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2})$$

2. التكامل مرة واحدة

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x - \frac{w}{6}(x - \frac{2L}{3})^3 + C_3$$

بتطبيق شرط الحد عند $x = \frac{2L}{3}$، يجب أن تساوي $\frac{dy}{dx}$ القيمة القادمة من اليسار، $\Rightarrow C_3 = 0$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. التكامل مرتين

$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5}{36}wL^2x^2 - \frac{w}{24}(x - \frac{2L}{3})^4 + C_4$$

وباتباع الحجة نفسها أعلاه، يكون $C_4 = 0$

وبالتعويض عن $x = L$ نحصل على

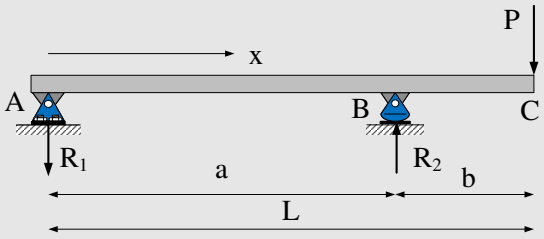
$$y = \frac{163}{1944}\frac{wL^4}{EI}$$

22.2.2 مثال 22.2: الانحراف الأقصى

نريد تحديد الانحراف الأقصى للكمرة المجاورة. ردود الأفعال

$$sigmccw_z^B = 0; \Rightarrow aR_1 - bP = 0 \Rightarrow edR_1 = \frac{b}{a}P$$

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow aR_2 - PL = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{L}{a}P$$



المعادلة التفاضلية

$$EIy'' = -\frac{b}{a}Px + \frac{L}{a}P < x - a >$$

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a}P < x - a >^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{b}{6a}Px^3 + \frac{L}{6a}P < x - a >^3 + C_1x + C_2$$

نطبق شروط الحدود: عند $x = 0$ يكون $y = 0$، ومن ثم $C_2 = 0$؛ وعند $x = a$ يكون $y = 0$، ولذلك $0 = -[b/(6a)]Pa^3 + aC_1$ أو $C_1 = (ab/6)P$. الميل تحت الحمل (لاحظ أن $x = a + b = L$)

$$\begin{aligned} EIy' &= -\frac{b}{2a}P(a+b)^2 + \frac{a+b}{2a}Pb^2 + \frac{ab}{6}P \\ &= -\frac{b}{2a}P(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{ab^2 + b^3}{2a}P + \frac{ab}{6}P \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{6}b(2L + b)P \end{aligned}$$

الانحراف تحت الحمل P:

$$\begin{aligned} EIy &= -\frac{b}{6a}P(a+b)^3 + \frac{a+b}{6a}Pb^3 + \frac{ab}{6}P(a+b) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{3}Lb^2P \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يحدث الانحراف الأقصى بين الركيزتين حيث $y' = 0$.

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a} < x - a >^2 + \frac{ab}{6}P$$

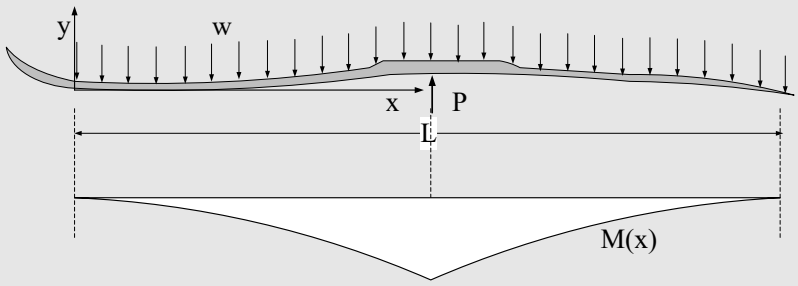
عند $y' = 0$ لا يكون الحد $x - a >$, موجودًا، ومن ثم $0 = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{ab}{6}P$؛ وبحلها نحصل على $x = \frac{1}{\sqrt{3}}a$، ولذلك يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} EIy_{max} &= -\frac{b}{6a}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^3 + \frac{ab}{6}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{a^2b}{9\sqrt{3}}P \end{aligned}$$

22.2.3 مثال 22.3: الشكل الأمثل للزلاجة

نريد تحديد شكل زلاجة بحيث تكون القوة المتولدة أسفلها موزعة بانتظام عند تطبيق قوة P.

يمكن تمثيل المسألة بالشكل الآتي، و



يجب تحقيق

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

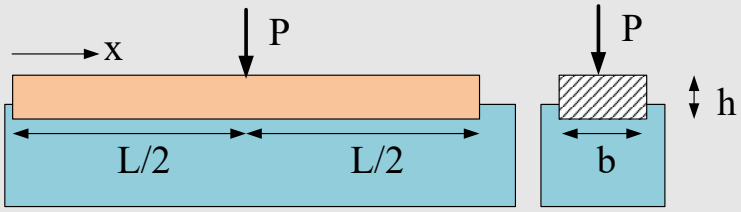
حيث $M(x) = wx^2/2$ و$w = P/L$، وشروط الحدود هي $y = 0$ عند $x = 0$ وعند $x = L$.

22.2.4 مثال 22.4: كمرة طافية

نع لوقنم يتآلا مسقلا Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

تطفو على الماء كمرة من خشب الصنوبر عرضها $b = 20$ cm وطولها $l = 10$m وارتفاعها $h = 10$ cm، وتخضع لقوة مركزة $P = 50$ kgf. كثافة الصنوبر $\gamma = 0.6$ gf/cm^3 ومعامل مرونته $E \simeq 10^5$ kgf/cm^2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



1. يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الحاكمة بالشكل

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$

حيث $q(x)$ وزن الماء المزاح (قانون أرخميدس) لكل وحدة طول.

$$w(x) = -\gamma y(x)$$

2. بإدخال

$$4k^4 = \frac{b\gamma}{EI} = \frac{3\gamma}{Eh^3}$$

يمكن تبسيط المعادلة التفاضلية الحاكمة إلى

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0 \tag{22.3}$$

وهي أيضًا المعادلة التفاضلية لكمرة على *أساس* مرن.

3. يكون الحل على الصورة

$$y(x) = A\cosh(kx)\cos(kx) + \frac{1}{2}B\left(\cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}C\sinh(kx)\sin(kx) + \frac{1}{4}D\left(\cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$

4. يمكن إعادة كتابته كما يأتي

$$y = y_0Y_1(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_2(kx) + \frac{M_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_3(kx) + \frac{V_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_4(kx)$$

حيث تمثل y_0, y_0', M_0 وN_0 الإزاحة والدوران والعزم والقص عند $x = 0$. ومن ثم

$$N_0 = 0; \qquad M_0 = 0$$

5. يتبقى تحديد y_0 وy_0' عند $x = L/2$ بحيث $y_0' = 0$ و$N = P/2$

6. باستخدام الجدول الآتي

n	$Y_n(kx)$	$Y_n'(kx)$	$Y_n''(kx)$	$Y_n'''(kx)$	$Y_n^{IV}(kx)$
1	$\cosh(kx)\cos(kx)$	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_1$
2	$\frac{1}{2}\left(cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	$\frac{1}{2}\sinh(kx)\sin(kx)$	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	$\frac{1}{4}\left(cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نحصل على

$$\frac{1}{k}y' = -4y_0 Y_4(kx) + y'_0 \frac{1}{k} Y_1(kx)$$
$$\frac{1}{k}y'' = -4y_0 Y_3(kx) + y'_0 \frac{4}{k} Y_4(kx)$$
$$\frac{1}{k}y''' = -4y_0 Y_2(kx) + y'_0 \frac{4}{k} Y_3(kx)$$

7. تُعبِّر شروط الحدود كما يأتي[a]

$$-4y_0 Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) + y'_0 \frac{1}{k} Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0$$
$$-4y_0 Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) + y'_0 \frac{4}{k} Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) = \frac{P}{2EIk^3}$$

8. عند $x = 0$ نحصل على

$$y_0 = \frac{P}{8EIk^3} \frac{-Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$
$$\frac{y'_0}{k} = \frac{P}{8EIk^3} \frac{-4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

9. ومن ثم تكون الإزاحة والميل

$$y = -P_0 \left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) Y_2(kx) Y_1(kx) \right]$$
$$y'' = 4P_0 k^2 \left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) Y_3(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4(kx) \right]$$

حيث

$$P_0 = \frac{P}{8EIk^3} \frac{1}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

10. بالتعويض بالقيم العددية

$$k^4 = 3 \times 10^{-11} \Rightarrow k = 2.34 \times 10^{-3} \text{cm}^{-1} \Rightarrow \frac{kl}{2} = 1.17$$

وكذلك

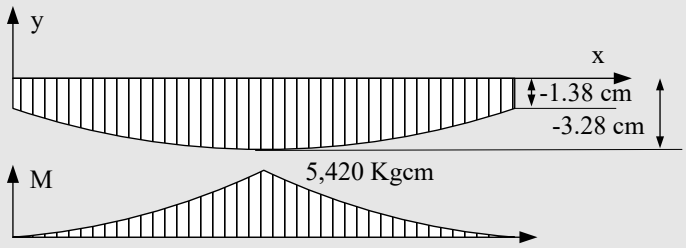
$$Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0.689$$
$$Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) = 1.097$$

11. تكون الإجابة النهائية

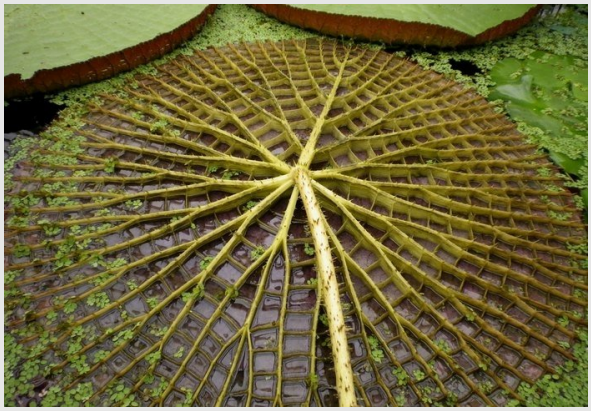
$$P_0 = 0.0401P$$
$$y(x) = -0.0401P \left[0.689Y_1(kx) - 1.058Y_2(kx)\right] \text{cm}$$
$$M(x) = 146.2P \left[0.689Y_3(kx) + 1.058Y_4(kx)\right] \text{kgfcm}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12. يظل الحل صالحًا ما دام السطح العلوي الكامل للكمرة فوق الماء.



يمكن توسيع الحل نفسه ليشمل البلاطات، وإن كان ذلك أكثر صعوبة بكثير. لكن الطبيعة أدركت بالفعل أن ورقة *Victoria-Regia* (أكبر ورقة نبات في العالم) يجب أن تكون مقوّاة على نحو ملائم لمقاومة العزوم الكبيرة مع بقائها طافية.



وهذا يذكّر القارئ، بالمناسبة، بما يسمى *العمارة المتفرعة* المستوحاة بدورها من الأشجار.

[a] تذكّر أن $V = EI\frac{d^3y}{dx^3}$

22.3 الانحناء

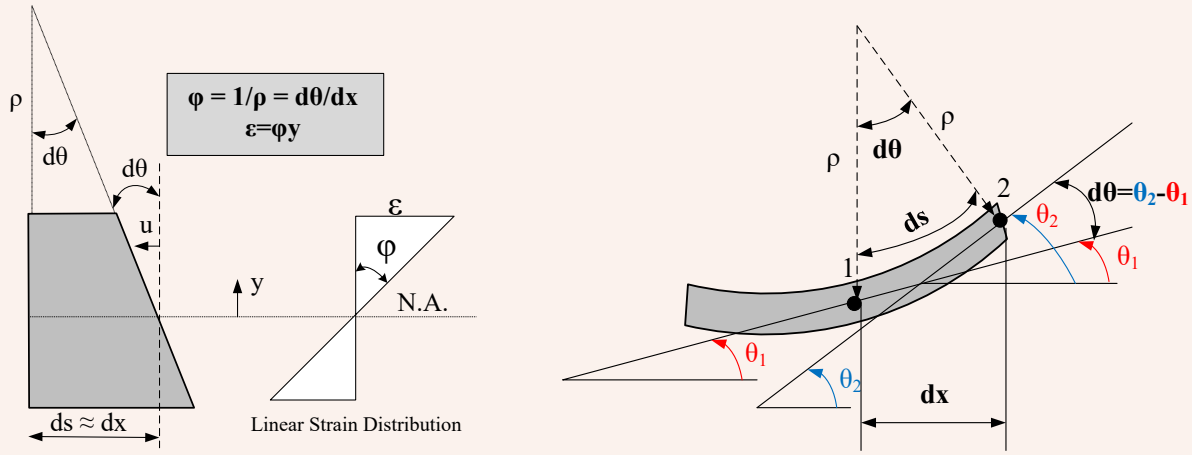
9 يُعد الانحناء، الشكل 22.1a، مفهومًا بالغ الأهمية في الانثناء (وكثيرًا ما يغفله الطلاب). سنشتق أولًا علاقته الدقيقة، ثم نبسّطها.

التعبير الدقيق

10 نبدأ بالاشتقاق العام لتعبير الانحناء، الشكل 22.1a، ونعرّف أولًا الانحناء ϕ كما يأتي

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{ds}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) علاقة الانحناء–الانفعال (a) تعريف الانحناء

شكل 22.1: الانحناء والانفعالات

من الهندسة، $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$؛ وإذا عرّفنا $t = \frac{dy}{dx}$ نحصل على $\theta = \tan^{-1} t$. وبتطبيق قاعدة السلسلة على ϕ نحصل على

$$\phi = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{22.4}$$

يمكن إعادة كتابة ds كما يأتي

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ t &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \quad ds = \sqrt{1+t^2}\,dx \tag{22.5}$$

11 بعد ذلك، بدمج المعادلتين 22.4 و22.5 نحصل على

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}dx} \\ \theta &= \tan^{-1} t \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{dx} \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \quad \phi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12 ومن ثم يرتبط الميل θ والانحناء ϕ ونصف قطر الانحناء ρ بالإزاحة y عند نقطة x على طول عنصر انحنائي بالعلاقة

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{22.6}$$

التعبير التقريبي

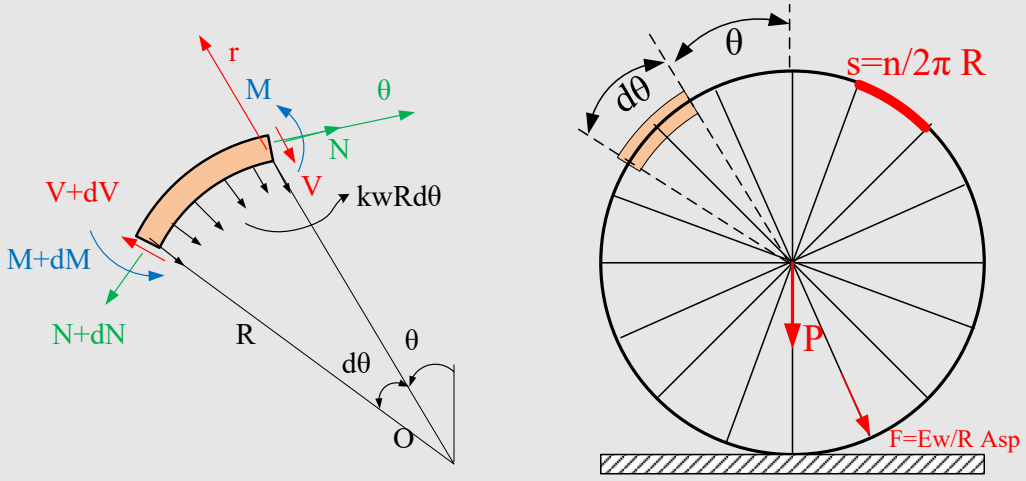
13 إذا كانت الإزاحات صغيرة جدًا، أي $\frac{dy}{dx} << 1$، فعندئذ تُختزل المعادلة 22.6 إلى:

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{22.7}$$

22.3.1 مثال 22.5: عجلة الدراجة

Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis. نع لوقنم يتآلا مسقلا

نريد تحديد القوى في الأسلاك الشعاعية بدلالة اتجاهها θ.[a]



1. الأسلاك الشعاعية متقاربة بما يكفي لافتراض أن الطوق الخارجي مستند إليها باستمرار. ومن ثم، ولجميع الأغراض العملية، لدينا كمرة دائرية على أساس مرن.
2. الطول التابع لكل سلك شعاعي هو $n/2\pi R$. كذلك يحمل كل سلك قوة تتناسب مع إزاحته الشعاعية w وتساوي $F = Ew/RA_{sp}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. ومن ثم تكون القوة لكل وحدة طول من الطوق

$$\underbrace{\frac{EwA_{sp}}{R}}_{\text{القوة لكل سلك}} \quad \underbrace{\frac{n}{2\pi R}}_{\text{الطول التابع لكل سلك}} = kw_s$$

4. لذلك يكون ثابت النابض

$$k = \frac{EA_s n}{2\pi R^2}$$

5. نكتب معادلات الاتزان الثلاث

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = N + kRw_s$$
$$\Sigma F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} + V = 0$$
$$\Sigma_z^O = 0 \Rightarrow R\frac{dN}{d\theta} + \frac{dM}{d\theta} = 0$$

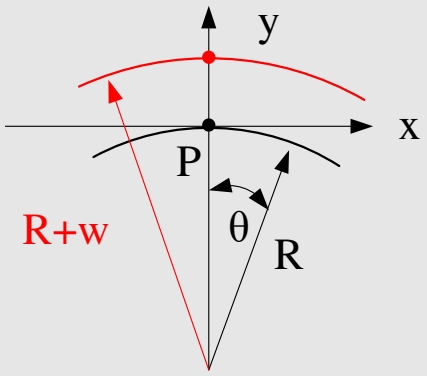
6. بحذف V وN

$$kR^2\frac{dw}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} + \frac{d^3M}{d\theta^3}$$

7. يرتبط تغير الانحناء $\Delta(1/\rho)$ بالعزم

$$M = EI\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

8. بعد ذلك نحتاج إلى اشتقاق تعبير لتغير الانحناء (الطريقة مقدمة من الأستاذ ف. فيرنيري).



قبل التشوه يكون الانحناء عند P هو $\kappa = \frac{1}{R}$، وبعد التشوه يصبح نصف القطر $R + w$. نبحث أولًا عن تقريب لقوس المنحنى المتشوه

$$x^2 + (y - (R + w))^2 = R^2 \tag{22.8}$$

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R} - \left(1 + \frac{w}{R}\right)\right)^2 = 1 \tag{22.9}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نعرّف $\xi = x/R$ و$\eta = y/R$ و$\zeta = w/R$

$$\xi^2 + \big(\eta + (1+\zeta)\big)^2 = 1$$
$$\xi^2 - \eta^2 - 2\eta - 2\eta\zeta + 1 + 2\zeta + \zeta^2 = 1$$

بإهمال الحدود من الرتب العليا (η^2 و$\eta\zeta$ وζ^2 لأنها جميعًا صغيرة جدًا مقارنة بالواحد) وبإعادة الترتيب

$$\xi^2 - 2\eta + 2\zeta = 0$$
$$\eta = \frac{\xi^2}{2} + \zeta$$
$$y = \frac{x^2}{2R} + w \quad \text{تقريب قطع مكافئ مناسب لقوس دائري}$$

نستبدل الآن x بـ$R\theta$

$$y = \frac{x^2}{2R} + w \simeq \frac{1}{2R}(R\theta)^2 + w \simeq \frac{R_0 + w}{2}\theta^2 + w$$

يُعطى الانحناء بالعلاقة

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}$$
$$= \frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}$$

ومن ثم يُعطى تغير الانحناء بالعلاقة

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}\right) = -\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$$

ومن ثم، عندما تكون الإزاحة الموجبة w متجهة بعيدًا عن مركز الدائرة، يتناقص انحناء الحلقة. ويتكون تغير الانحناء في هذا التعبير من مركبتين: يمثل الحد الأول w/R^2 تغير الانحناء الناتج من التمدد البسيط للحلقة، أما الحد الثاني $\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$، الذي يساوي d^2w/ds^2، فيمثل تغير الانحناء المعتاد في قضيب مستقيم.

9. بالتعويض عن M تكون المعادلة التفاضلية الحاكمة النهائية

$$\frac{d^5w}{d\theta^5} + 2\frac{d^3w}{d\theta^3} + a^2\frac{dw}{d\theta} = 0$$

حيث

$$a^2 = \frac{R^4k}{EI} + 1$$

10. يكون حل هذه المعادلة التفاضلية على الصورة

$$w = C_0 + C_1\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + C_2\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + C_3\cosh\alpha\theta + C_4\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta$$

حيث

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}; \qquad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11. بالتعويض:

$$M = -\frac{EI}{R^2}\left(C_0 - 2\alpha\beta C_1 \sinh\alpha\theta \sin\beta\theta + 2\alpha\beta C_2 \cosh\alpha\theta \cos\beta\theta\right)$$
$$V = 2\alpha\beta\frac{EI}{R^3}\left[(\alpha C_1 - \beta C_2)\cosh\alpha\theta \sin\beta\theta + (\beta C_1 - \alpha C_2)\sinh\alpha\theta \cos\beta\theta\right]$$

12. نلاحظ أنه لما كان الطوق يتشوه تماثليًا بالنسبة إلى المحور الرأسي، وجب أن تكون w دالة زوجية (أي لا تتغير بتغير إشارة θ). ولذلك يجب أن يكون C_3 وC_4 مساويين للصفر.

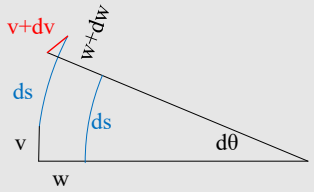
13. شروط الحدود

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\theta} &= 0; \quad \theta = \pi\\ V &= -\frac{P}{2}; \quad \theta = \pi\\ \int_0^\pi w d\theta &= 0\end{aligned}$$

14. يعني الشرط الأخير أن النقطتين العليا والسفلى تظلان على استقامة رأسية تحت الحمل. وبالفعل، إذا نظرنا إلى قطعة متناهية الصغر من الطوق قبل التشوه وبعده، يكون شرط عدم القابلية للاستطالة

$$dv + wd\theta = 0 \Rightarrow v = -\int wd\theta$$

حيث v الإزاحة المماسية على طول القوس.



15. نطبق شروط الحدود الثلاثة

$$\begin{aligned}&C_1\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right]\\ &\quad + C_2\left[\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&= 0 &&(22.10)\\ &C_1\left[\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right]\\ &\quad - C_2\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&= -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta} &&(22.11)\\ &C_0\pi + \frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right)\\ &\quad + \frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi - \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) &&= 0 &&(22.12)\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16. نحل لإيجاد الثوابت

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{PR^3}{2\pi a^2 EI} \\
C_1 &= -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)} \\
C_2 &= \frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)}\pi \\
&\quad + \frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right) \\
&\quad + \frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi - \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) = 0
\end{aligned}
$$

17. التعبيران النهائيان لـ w و M

$$w(\theta) = \frac{PR^3}{4\alpha\beta EI}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi a^2} - A\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + B\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta\right) \tag{22.13}$$

$$M(\theta) = -\frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\pi a^2} + A\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + B\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right) \tag{22.14}$$

حيث

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)} \\
B &= \frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi + \sin^2\beta\pi\right)}
\end{aligned}
$$

18. تكون القوة في السلك الشعاعي

$$P_r(\theta) = \frac{EA_{sp}}{R}w(\theta)$$

19. **تطبيق عددي.** نأخذ عجلة بالخواص الآتية، مع افتراض تساوي معاملي المرونة للطوق والأسلاك الشعاعية:

الكمية	الرمز	القيمة
عدد الأسلاك الشعاعية	n	36
نصف قطر الطوق	R	31.2 cm
مساحة مقطع السلك الشعاعي	A_{sp}	$^{2}0.22$ cm
عزم قصور الطوق	I	$^{4}0.3$ cm

من المعادلتين (4) و(9)، مع ملاحظة اختزال E:

$$a^2 = \frac{A_{sp}\,n\,R^2}{2\pi I} + 1 = \frac{0.22\cdot 36\cdot 31.2^2}{2\pi\cdot 0.3} + 1 = 577.7, \qquad a = 24.04$$

من المعادلة (10):

$$\alpha = \sqrt{\frac{24.04-1}{2}} = 3.395, \qquad \beta = \sqrt{\frac{24.04+1}{2}} = 3.539$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عند $\theta = \pi$ تحقق الدوال الزائدية $\sinh \alpha\pi \approx \cosh \alpha\pi \approx \frac{1}{2}e^{10.66}$, بينما تكون قيم الدوال المثلثية $\sin \beta\pi = -0.992$ و$\cos \beta\pi = +0.1223$. وبالتعويض في تعبيري A وB:

$$A = -0.245\, e^{-10.66}, \qquad B = +0.326\, e^{-10.66}$$

يصبح التعبيران (22.13)–(22.14)، لحمل مطبق P (بوحدة kgf):

$$M(\theta) = P\left(-0.00855 + 3.80\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta - 5.05\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta\right) \ \text{kgf cm}$$

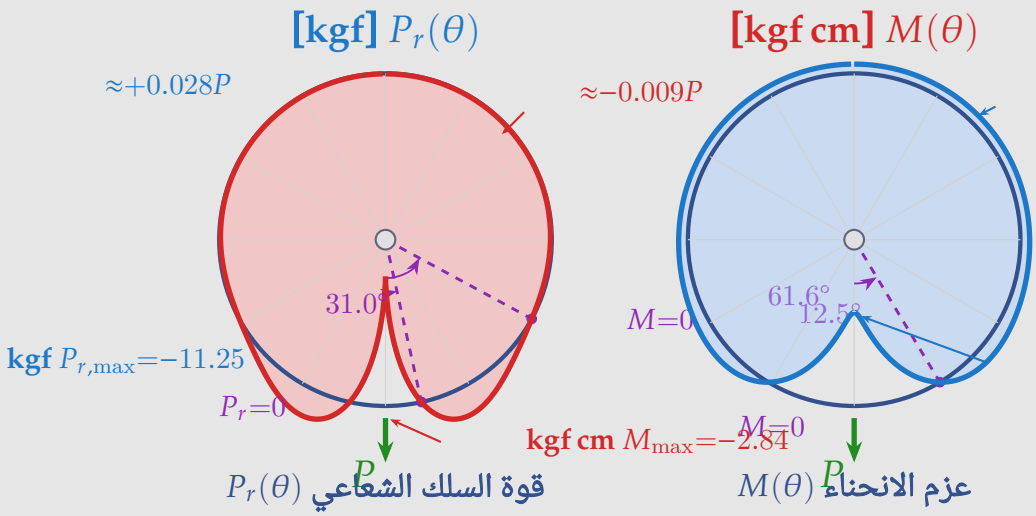
$$P_r(\theta) = P\left(\ \ 0.0278 + 0.514\, e^{-10.66} \cosh \alpha\theta \cos \beta\theta + 0.683\, e^{-10.66} \sinh \alpha\theta \sin \beta\theta\right) \ \text{kgf}$$

يؤدي العامل $e^{-10.66}$ إلى تضاؤل كل من M وP_r بسرعة شديدة بعيدًا عن نقطة الحمل $\theta = \pi$؛ وحتى عند زوايا لا تبتعد عن π إلا قليلًا تصبح الحدود المتذبذبة مهملة، ويكون $M \approx -0.00855\,P$ و$P_r \approx 0.0278\,P$ على معظم الطوق.

عند $P = 40$ kgf تكون القيم القصوى عند نقطة الحمل

$$M_{\max} = 88 \ \text{kgf cm}, \qquad P_{r,\max} = 11.2 \ \text{kgf}$$

يبين الشكل أدناه توزيعي عزم الانحناء وقوة السلك الشعاعي حول العجلة.



ملاحظة: عزم الانحناء $M(\theta)$ وقوة السلك الشعاعي $P_r(\theta)$ حول العجلة ($P = 40$ kgf، $n = 36$، $R = 31.2$ cm). تشير أنصاف الأقطار المتقطعة إلى مواضع انعدام القيمة، وتُقاس الزوايا من اتجاه الحمل. بعيدًا عن الحمل: $M_\infty = -PR/(2\pi a^2) \approx -0.009P$ kgf cm.

20. **تأثير الشد المسبق للأسلاك الشعاعية.** يعامل التحليل أعلاه الأسلاك الشعاعية بوصفها وسطًا مرنًا سلبيًا، ولا يأخذ في الحسبان الشد المسبق الابتدائي T_0 الذي يُدخل أثناء تجميع العجلة وضبط استقامتها. وفي الخدمة لا تتحمل الأسلاك إلا الشد؛ فإذا ارتخى سلك لم يعد يقدم مقاومة مرنة، مما يبطل نموذج الأساس المستمر. وتمثل الكمية $P_{r,\max}$ المحسوبة أعلاه أقصى نقصان في قوة السلك بسبب الحمل المطبق. ولكي تظل العجلة سليمة إنشائيًا تحت الحمل P، يجب أن يحقق الشد المسبق عند التجميع

$$T_0 > P_{r,\max}$$

وبعبارة أخرى، يجب أن يحتفظ كل سلك شعاعي بشد متبق موجب بعد تطبيق الحمل. وفي المثال العددي يتطلب ذلك $T_0 > 11.2$ kgf لكل سلك. تُضبط عجلات السباق النموذجية على شد مقداره 80–120 kgf لكل سلك، مما يوفر هامشًا مريحًا.

حل هذه المسألة أول مرة Joukowsky, 1948 [b].

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

[a] مسألة مهداة إلى كارولين سعوما
[b] يُعرف نيكولاي ييغوروفيتش جوكوفسكي (1847–1921)، أستاذ الميكانيكا في مدرسة موسكو التقنية، بوصفه أبا الطيران الروسي وصاحب مبرهنة كوتا–جوكوفسكي للرفع. وقد سبق حله لعجلة الدراجة بوصفها حلقة على أساس مرن عمل Feodossiev, 1977 بعقود عدة، وانتقل عبر مدرسة موسكو للميكانيكا.

22.3.2 مثال 22.6: صلابة نابض حلزوني

نريد اشتقاق صلابة نابض حلزوني k، علمًا بأن النابض مكوّن من لفات سلكية.

يتشوه النابض الحلزوني المصنوع من سلك قطره d والملفوف بقطر متوسط D أساسًا بالقص عند تطبيق قوة محورية F. وعند تطبيق القوة F، يستطيل النابض بإزاحة Δ (أو ΔL) وفق قانون هوك:

$$F = k\delta$$

حيث k صلابة النابض المطلوب اشتقاقها.

اللي في كل لفة عند تطبيق قوة F على النابض، تتعرض كل لفة لتأثير التواء. وفي لفة واحدة تولد هذه القوة عزم ليّ T حول محور اللفة، ويمكن التعبير عنه كما يأتي:

$$T = F \cdot \frac{D}{2}$$

تشوه اللي وزاوية الالتواء لقضيب أسطواني (أو لفة نابض)، يمكن حساب زاوية الالتواء θ الناتجة من عزم اللي T بالعلاقة:

$$\theta = \frac{T \cdot L_{\text{coil}}}{JG}$$

حيث:

- $L_{\text{coil}} = 2\pi D$ طول لفة واحدة (إذ إن كل لفة حلقة دائرية من السلك في جوهرها)،
- $J = \frac{\pi d^4}{32}$ عزم القصور القطبي لمقطع دائري قطره d،
- G معامل القص لمادة النابض.

ومن ثم تصبح زاوية الالتواء للفة الواحدة:

$$\theta = \frac{T \cdot 2\pi D}{\frac{\pi d^4}{32} \cdot G} = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$$

التشوه الكلي للنابض بما أن كل لفة تلتوي بزاوية θ، وعدد اللفات n، فإن زاوية الالتواء الكلية Θ للنابض بأكمله هي:

$$\Theta = n \cdot \theta$$

ترتبط الإزاحة المحورية Δ عند طرف النابض بزاوية الالتواء الكلية بالعلاقة:

$$\Delta = \Theta \cdot \frac{D}{2} = n \cdot \theta \cdot \frac{D}{2}$$

التعويض والتبسيط نعوض $\theta = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$ و $T = F \cdot \frac{D}{2}$:

$$\Delta = n \cdot \frac{32 \cdot F \cdot \frac{D}{2} \cdot D}{d^4 \cdot G} \cdot \frac{D}{2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالتبسيط نحصل على:

$$\Delta = \frac{16FnD^3}{d^4G}$$

اشتقاق الصلابة k من قانون هوك، $F = k\Delta$، نحل لإيجاد k:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{Gd^4}{16nD^3}$$

أو بالصيغة الشائعة:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n}$$

ربط الطول L **بالصلابة** k بما أن $L = n \cdot p$، حيث p خطوة النابض، فيمكن التعبير عن n بدلالة L:

$$n = \frac{L}{p}$$

بالتعويض عن n في معادلة الصلابة:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3\left(\frac{L}{p}\right)} = \frac{Gd^4 \cdot p}{8D^3L}$$

تبين هذه الصيغة النهائية أن الصلابة k تتناسب عكسيًا مع الطول L، إذ:

$$k \propto \frac{1}{L}$$

ومن ثم فإن زيادة طول النابض (بزيادة عدد اللفات) تقلل الصلابة، لأن كل لفة تسهم في التشوه الكلي للنابض تحت الحمل. راجع أيضًا المثال 24.3.15.

22.3.3 علاقة الانحناء–الانفعال

14 يوضح الشكل 22.1b علاقة الانحناء–الانفعال.

15 يسبب $d\theta$ الموجب عند y موجب (الألياف العليا) *تقصيرًا* للألياف العليا مقداره $du = -yd\theta$. وبقسمة الطرفين على dx،

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y\frac{d\theta}{dx}$$

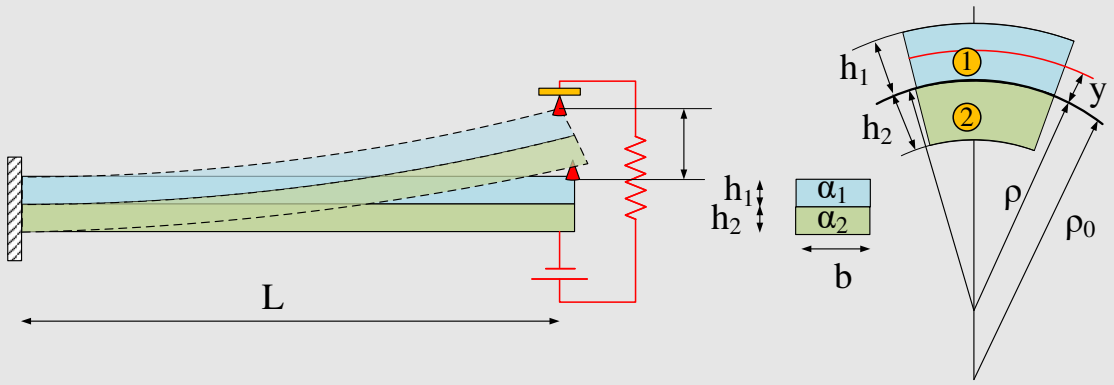
وبدمج ذلك مع المعادلة 22.7، نحصل على العلاقة الأساسية بين الانحناء (ϕ) والمنحنى المرن (أي الإزاحة) (y) والانفعال الطولي (ε).

$$\frac{1}{\rho} = \phi = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{22.15}$$

16 لاحظ أننا لم نفترض حتى الآن أي خواص للمادة؛ أي إنها قد تكون مرنة أو غير مرنة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22.3.3.1 مثال 22.7: مفتاح ثنائي المعدن



كثيرًا ما تُستخدم العناصر ثنائية المعدن مفاتيحَ في منظمات الحرارة لضبط درجة حرارة الغرف. ويتكون العنصر ثنائي المعدن من صفيحتين معدنيتين متصلتين اتصالًا صلبًا ولهما معاملا تمدد حراري مختلفان. وعند التسخين تنحني الصفيحة بسبب اختلاف استطالة مكونيها. فإذا ثُبت أحد الطرفين بإحكام تحرك الطرف الحر الآخر بمقدار Δv. وغالبًا ما يُصنع العنصر منحنيًا بانحناء ابتدائي $\frac{1}{\rho_0}$. نريد تحديد تغير الانحناء، والشرط الذي يجعل الإزاحة عظمى، وقيمة $\Delta_v^{\max}$.

لذلك نأخذ قطعة طولها ds وانحناءها الابتدائي عند سطح الوصل $\frac{1}{\rho_0}$. ويُعطى انفعال ليفة تبعد مسافة y عن الوصل بالعلاقة

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

بطرح الاستطالة الحرارية وضرب الفرق الناتج في معامل المرونة الموافق، يمكن تحديد الإجهاد في ليفة تبعد مسافة y عن الوصل

$$\sigma_1 = E_1\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_1 \Delta T\right] \qquad 0 \le y \le h_1$$
$$\sigma_2 = E_2\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_2 \Delta T\right] \qquad -h_2 \le y \le 0$$

غير أن القوة المحورية والعزم عند مقطع العنصر ثنائي المعدن يجب أن يساويا صفرًا

$$b\int_0^{h_1} \sigma_1 dy + b\int_{-h_2}^{0} \sigma_2 dy = 0$$
$$b\int_0^{h_1} \sigma_1 y dy + b\int_{-h_2}^{0} \sigma_2 y dy = 0$$

بالتعويض عن σ_1 وσ_2 ثم التكامل نحصل على

$$\varepsilon_0(E_1h_1 + E_2h_2) - (\alpha_1E_1h_1 + \alpha_2E_2h_2)\Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) = 0$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) - \frac{1}{2}(E_1\alpha_1h_1^2 - E_2\alpha_2h_2^2)\Delta T + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبحذف ε_0 نجد تغير الانحناء

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{6\Delta T(\alpha_1-\alpha_2)}{\frac{\left(E_1h_1^2-E_2h_2^2\right)^2}{E_1E_2h_1h_2(h_1+h_2)}+4(h_1+h_2)}$$

يتناسب تغير الانحناء مع تغير درجة الحرارة ومع الفرق بين معاملي التمدد الحراري. ويبلغ تغير الانحناء أقصى قيمة عندما تُختار سماكتا الصفيحتين بحيث

$$E_1h_1^2=E_2h_2^2$$

وعندئذ

$$\Delta\kappa=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}$$

بتطبيق المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء يمكننا الآن تحديد الانحراف عند طرف الكمرة الكابولية. ويكون تغير الانحناء ثابتًا على طول الكمرة

$$\begin{aligned}\Delta_V^{\max}&=\Delta\kappa\times L\times\frac{L}{2}\\&=\frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}\frac{L^2}{2}\end{aligned}$$

وبالطبع تعطي المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء النتيجة نفسها التي تعطيها طريقة الشغل الافتراضي

$$\begin{aligned}\Delta_V^{\max}&=\int_o^L\underbrace{(1)(x)}_{\delta\overline{M}}\underbrace{\Delta\kappa}_{M/EI}dx\\&=\frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}\frac{L^2}{2}\end{aligned}$$

22.3.4 طريقة مساحة الانحناء (مساحة العزم)

للسياق التاريخي، انظر §11.4.2

17 إن طريقة *مساحة الانحناء* (التي تسمى كثيرًا، على نحو غير دقيق، طريقة *مساحة العزم*) طريقة هندسية، بخلاف طريقة التكامل المزدوج التحليلية، لإيجاد الإزاحات استنادًا إلى المنحنى المرن. وترتبط بهذه الطريقة مبرهنتان.

22.3.4.1 اصطلاح الإشارة

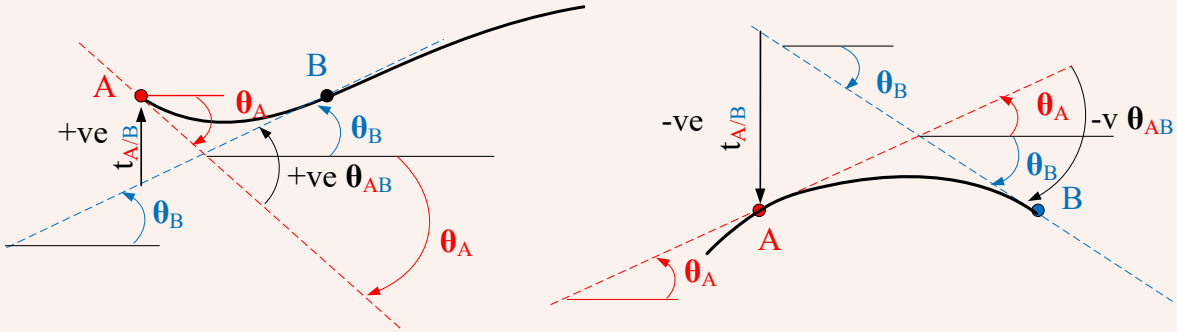
18 يجب توخي عناية خاصة بالإشارات عند تطبيق طريقة مساحة الانحناء. ويوضح الشكل 22.2 هذا الأمر.

22.3.4.2 المبرهنة الأولى لمساحة الانحناء

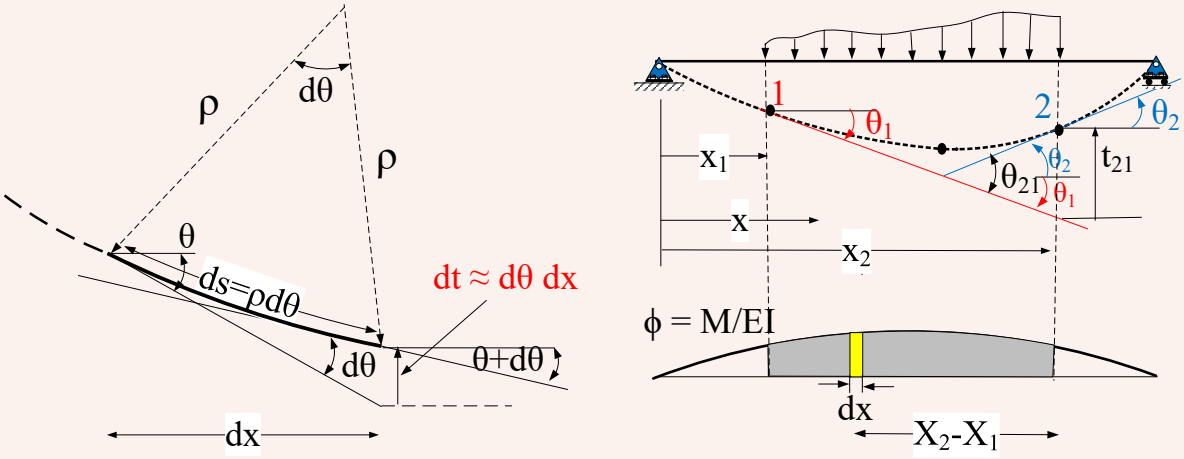
19 بالرجوع إلى الشكل 22.3، ومن المعادلة 22.1 لدينا $\frac{d\theta}{dx}=\frac{M}{EI}$، ويمكن إعادة كتابة ذلك كما يأتي

$$\theta_{21}=\theta_2-\theta_1=\int_{x_1}^{x_2}d\theta=\int_{x_1}^{x_2}\frac{M}{EI}dx=\int_{x_1}^{x_2}\kappa(x)dx \tag{22.16}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 22.2: اصطلاح الإشارة في طريقة مساحة الانحناء لانحناءين متعاكسين للكمرة



شكل 22.3: طرائق مساحة الانحناء

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 22.2: قضية؛ المبرهنة الأولى لمساحة الانحناء

يساوي فرق الميل بين أي مقطعين من عنصر انحنائي محمل مساحة مخطط M/EI بين النقطتين. أو، لكمرة تتعرض للانحناء، يساوي تغير الميل (θ) بين نقطتين على طول الكمرة، النقطة A عند x_A والنقطة B عند x_B، تكامل انحناء الكمرة على القطعة الواقعة بين النقطتين.

لاحظ التشابه مع التعريف 21.4:

$$\Delta V_{21} = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$$

22.3.4.3 المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء

20 بالرجوع مرة أخرى إلى الشكل 22.3، نعرّف t_{21} بأنه المسافة بين النقطة 2 والمماس عند النقطة 1. ولمسافة متناهية الصغر $ds = \rho d\theta$ وإزاحات صغيرة نحصل على

$$\left.\begin{aligned} dt &= d\theta(x_2 - x_1) \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \end{aligned}\right\} dt = \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

أو

$$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

انتبه إلى أن $t_{AB} \neq t_{BA}$. فـt_{AB} هي المسافة بين A والمماس عند B، بينما t_{BA} هي المسافة بين العقدة B والمماس عند A.

تعريف 22.3: قضية؛ المبرهنة الثانية لمساحة الانحناء

يساوي الانحراف المماسي للنقطة 2 من عنصر انحنائي محمل عن مماس منحنى الانحراف عند النقطة 1، أي t_{21}، عزم مساحة مخطط الانحناء بين 1 و2 حول النقطة 2.

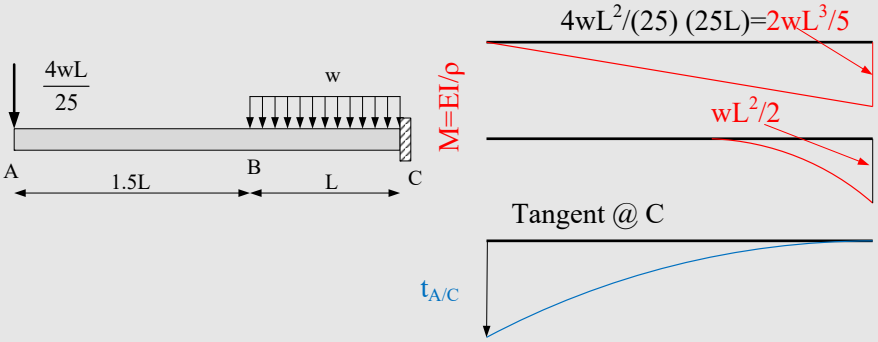
21 لاحظ التشابه مع التعريف 21.5

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)dx \tag{22.17}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22.3.4.3.1 مثال 22.8: مساحة الانحناء، كمرة كابولية

نريد تحديد انحراف النقطة A



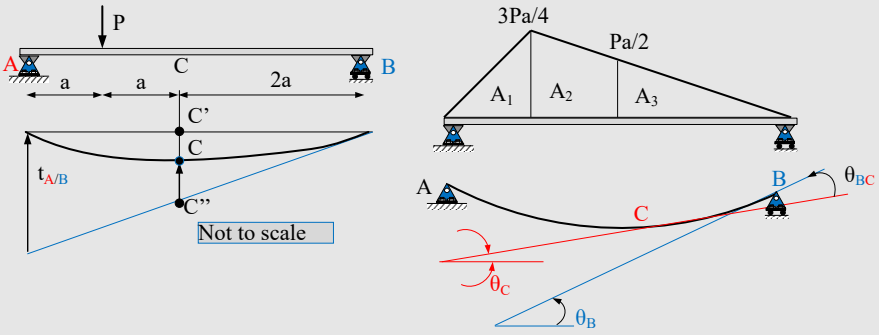
$$EIt_{A/C} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-2wL^2}{5}\right)\left(\frac{5L}{2}\right)}_{\text{المساحة}}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\frac{5L}{2}\right)}_{\text{العزم حول A}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{-wL^2}{2}\right)(L)}_{\text{المساحة}}\underbrace{\left(\frac{9L}{4}\right)}_{\text{العزم حول A}}$$

$$= -\frac{29wL^4}{24}$$

ومن ثم، $\Delta_A = \frac{29wL^4}{24EI}$

22.3.4.3.2 مثال 22.9: العزم–الانحناء، كمرة بسيطة الارتكاز

نريد تحديد Δ_C وθ_C في المثال الآتي



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الانحراف Δ_C يُحدد من $\Delta_C = c'c = c'c" - c"c$، و$c"c = t_{C/B}$، و$c'c" = \frac{t_{A/B}}{2}$ من الهندسة

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)}_{A_1\ \text{العزم}} + \underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{3a}{2}\right)\left(a+\frac{3a}{3}\right)}_{A_2+A_3\ \text{العزم}}\right]$$
$$= \frac{5Pa^3}{2EI}$$

هذه القيمة موجبة، أي فوق المماس من B

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}$$

وهي موجبة، أي فوق المماس من B. وأخيرًا،

$$\Delta_C = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11}{12}\frac{Pa^3}{EI}$$

الدوران θ_C هو

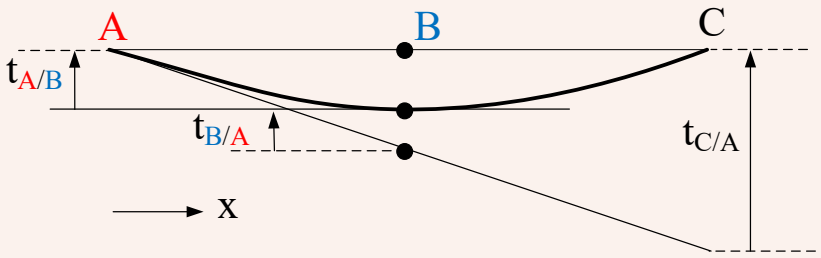
$$\left.\begin{aligned}\theta_C &= \theta_B - \theta_{BC}\\ \theta_{BC} &= A_3\\ \theta_B &= \frac{t_{A/B}}{L}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_C = \frac{5Pa^3}{2EI(4a)} - \left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{Pa^2}{8EI}$$

22.3.4.4 الانحراف الأقصى

22 تكون الإزاحة النسبية لعقدة على طول الكمرة عظمى (أو صغرى) إذا كان $\frac{dy}{dx} = 0$ أو $\theta = 0$. لذلك يمكن تحديد Δ_{max} إذا عُرفت x، الشكل 22.4. ولتحديد x:

1. احسب $t_{C/A}$.
2. $\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L}$
3. $\theta_B = 0$ و$\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B$، ومن ثم $\theta_{AB} = \theta_A$. احسب إذن θ_{AB} بدلالة x باستخدام المبرهنة الأولى.
4. ساوِ بين البندين 2 و3، ثم حل لإيجاد x.

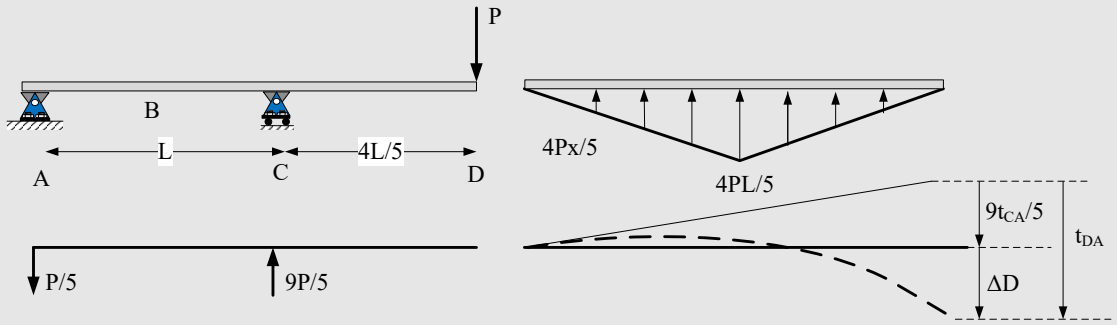
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 22.4: الانحراف الأقصى باستخدام طريقة مساحة العزم

22.3.4.4.1 مثال 22.10: الانحراف الأقصى

نريد تحديد الانحراف عند D والانحراف الأقصى عند B



الانحراف عند D:

$$\Delta_D = t_{D/A} - \frac{9}{5} t_{C/A}$$

$$EIt_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)$$

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$

$$EIt_{D/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)\left(\frac{4L}{5}\right)\left(\frac{8L}{15}\right)$$

$$t_{D/A} = -\frac{234}{375}\frac{PL^3}{EI}$$

بالتعويض نحصل على

$$\Delta_D = -\frac{48}{125}\frac{PL^3}{EI}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الانحراف الأقصى عند B:

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$
$$\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L} = -\frac{2PL^2}{15EI}$$
$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4Px}{5}\right)(x)\right] = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI}$$
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow -\frac{2}{15}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Delta_{max} = \left(\frac{4Px}{5EI}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \Delta_{max} = \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

22.3.4.5 علاقة الحرارة–الانحناء

23 في حالات كثيرة نريد تحديد الانحرافات الانحنائية الناتجة من الأحمال الحرارية، كما في مادة ثنائية ذات معاملي تمدد حراري مختلفين، أو عند اختلاف درجتي حرارة السطحين العلوي والسفلي.

24 بافتراض تغير خطي في درجة الحرارة

السطح العلوي $\Delta_T = \alpha \Delta T_T dx$
السطح السفلي $\Delta_B = \alpha \Delta T_B dx$

25 بعد ذلك، وبالنظر إلى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

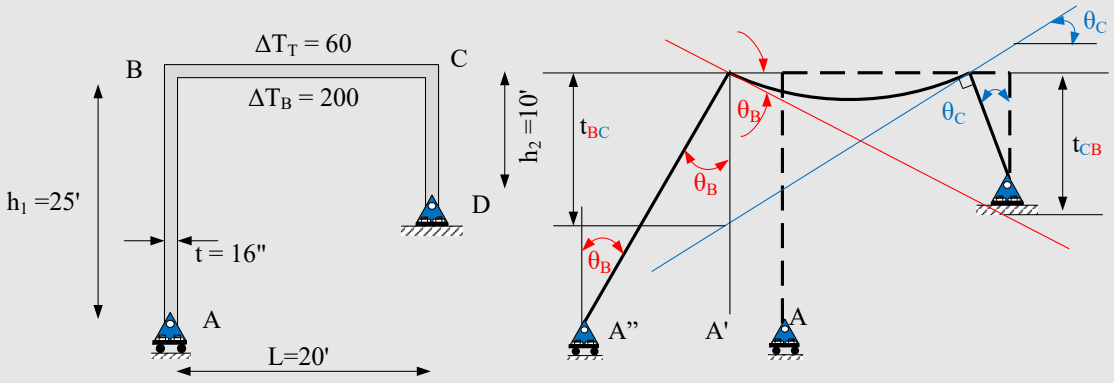
في هذه الحالة يمكن أخذ $\varepsilon = \alpha \Delta T_T$ عند $y = \frac{h}{2}$، أو $\varepsilon = \alpha(T_T - T_B)$ عند $y = h$، ومن ثم

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_T - T_B)}{h}$$

22.3.4.5.1 مثال 22.11: إطار خاضع لحمل حراري

بإهمال التشوه المحوري، نريد حساب الإزاحة عند A للإطار الآتي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



1. نرسم أولًا الشكل المتشوه.
2. ينحني BC، ولذلك $\theta_B = \theta_C \neq 0 \Rightarrow$.
3. وصلتان صلبتان عند B وC، ولا يوجد حمل على AB وCD.
4. الانحراف عند A

$$\Delta_A = AA'' = AA' + A'A''$$
$$AA' = \Delta_B = \Delta_C = |\theta_C| h_2$$
$$A''A' = |\theta_B| h_1$$

5. نحتاج إلى حساب θ_B وθ_C

$$\theta_B = \frac{t_{C/B}}{L}$$
$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \quad \text{أو} \quad \theta_C = \frac{t_{B/C}}{L}$$

6. لتطبيق مبرهنة مساحة الانحناء نحتاج إلى مخطط الانحناء (أو العزم).

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{EI}$$

7. بتطبيق المبرهنة الثانية، نأخذ عزم مساحة الانحناء حول B، ونرمز بـ$\mathcal{A}$ إلى المساحة تحت مخطط الانحناء

$$t_{C/B} = \mathcal{A}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow |\theta_B| = A\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\mathcal{A}}{2} \quad \text{أو} \quad \theta_B = -\frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (سالب)}$$

8.

$$\left.\begin{aligned} \theta_{CB} &= \mathcal{A} \\ \theta_C &= \theta_{CB} + \theta_B \end{aligned}\right\} \theta_C = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (+ve)}$$

9. مما سبق،

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}} &= |\theta_C| h_2 + |\theta_B| h_1 \\ &= \frac{\mathcal{A}}{2} h_2 + \frac{\mathcal{A}}{2} h_1 = \frac{\mathcal{A}}{2}(h_2 + h_1) \\ \mathcal{A} &= \frac{\alpha(T_B - T_T)}{h} L \end{aligned}\right\} \Delta_A = \alpha(T_B - T_T)\frac{L}{h}\left(\frac{1}{2}\right)(h_2 + h_1)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10. بالتعويض

$$\begin{aligned}\Delta_A &= (6.5\times10^{-6})(200-60)\frac{(20)(12)}{(16)}(\frac{1}{2})(10+25)(12)\\ &= 2.87 \text{ in}\end{aligned}$$

11. قيم عددية أخرى:

$$\begin{aligned}\theta_B = \theta_C &= \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha(T_B-T_T)}{h}L\\ &= \frac{1}{2}(6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{(16)}(20)(12)\\ &= .00683rad. = .39^\circ \Rightarrow \frac{dy}{dx} << 1\end{aligned}$$

ملاحظة: $\sin(.00683) = .006829947$ و$\tan(.00683) = .006830106$.

$$\begin{aligned}\frac{M}{EI} &= \frac{1}{\rho} = \alpha\frac{(T_B-T_T)}{h}\\ &= (6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{16} = 5.6875\times10^{-5}\\ \Rightarrow \rho &= \frac{1}{5.6875\times10^{-5}} = 1.758\times10^4 \text{ in} = 1,465 \text{ ft}\end{aligned}$$

12. لإيجاد M نحتاج إلى E وI.

13. $\sigma = \frac{My}{I} = \frac{EI}{\rho}\frac{y}{I} = \frac{Ey}{\rho}$

14. ρ ثابت، ولذلك يقع BC على قوس دائرة. M ثابت، و$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = C \Rightarrow y = C\frac{x^2}{2} + dx + e$.

26 لنستخرج الانحناء من ميل القطع المكافئ ونقارنه بـρ

$$\begin{aligned}y &= \frac{cx^2}{2} + dx + e\\ \frac{dy}{dx} &= cx + d\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= c\end{aligned}$$

عند $x=0$، $y=0$، ومن ثم $e=0$

وعند $x=0$، $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -.00683$، ومن ثم $d = -.00683$

وعند $x = 20$ ft، $\frac{dy}{dx} = \theta_C = .00683$، ومن ثم $c(20) - .00683 = .00683$، أي $c = 6.83\times10^{-4}$. إذن

$$\begin{aligned}y &= 6.83\times10^{-4}\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)\\ \frac{dy}{dx} &= 6.83\times10^{-4}(x-10)\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6.83\times10^{-4}\\ \kappa &= 6.83\times10^{-4}\\ \rho &= \frac{1}{6.83\times10^{-4}} = 1,464 \text{ ft}\end{aligned}$$

كما هو متوقع!

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

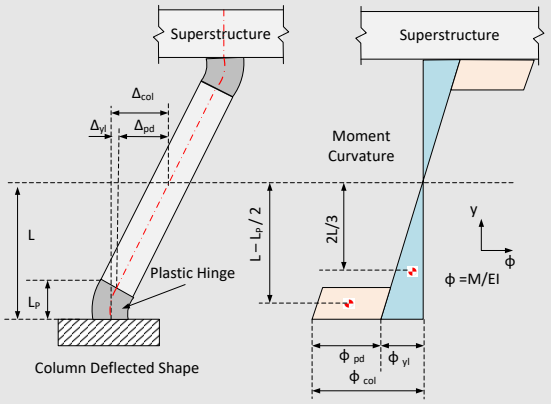
إذا استخدمنا صيغة الانحناء الدقيقة

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6.83\times10^{-4}}{[1+(.00683)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 6.829522\times10^{-4}$$
$$\Rightarrow \rho = 1464.23 \text{ ft} \quad \text{(مقارنة بـ1465ft)}$$

22.3.4.6 مثال 22.12: طول اللدونة

في تحليل الدفع التدريجي، نحتاج إلى تحديد العلاقة بين القوة الجانبية المطبقة والتشوه غير المرن الموافق. ومن المعقول افتراض أن التشوهات اللدنة كلها تحدث عند القاعدة ضمن ما يسمى *المفصل اللدن*.

افترض أن قطر العمود d_c يساوي 7 أقدام، ومقاومة ضغط الخرسانة f'_c تساوي 5,000 psi، والعزم 15,839 k-ft. يمكن تحديد التشوه باستخدام مبرهنة مساحة الانحناء. ومن اللافت أننا نطبق الطريقة على عنصر له انحناءات مرنة وغير مرنة معًا. هذا المثال مأخوذ من الفصل 68.4.1.



الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2

من المبرهنة الأولى نحصل على الدوران

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P$$

ومن المبرهنة الثانية

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld}\frac{L}{2}\right)\times\frac{2}{3}L$$

ومن المعادلة 22.1

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C}$$

بحساب معامل المرونة وعزم القصور

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031(\text{ksi})$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi\times7^4\times12^4}{64} = 2,443,920\text{in})^{\,4})$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأخيرًا نعوض

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3}(50 \times 12) = 2.32\text{inch}$$

22.3.4.7 الحمل المرن/الكمرات المرافقة

للسياق التاريخي، انظر §11.4.2

26 يلخص الجدول 22.1 التناظر بين مبرهنتي مساحة الانحناء والتعريفين التكامليين للقص والعزم اللذين سبقت الإشارة إليهما.

مساحة الانحناء	القوى الداخلية
$\theta_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\rho} dx$	$V_{21} = \int_{x_1}^{x_2} w dx$
$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \theta dx$	$M_{21} = \int_{x_1}^{x_2} V dx$
$1/\rho$	w

جدول 22.1: التناظر بين مجموعتي العلاقات

27 يمكننا إذن تصور كمرة مرافقة، وهي كمرة تخيلية لها أبعاد الكمرة الأصلية نفسها، لكن الحمل عند أي نقطة عليها يساوي الانحناء. وفي هذه "الكمرة" يساوي القص ميل الكمرة الحقيقية، ويساوي العزم إزاحتها.

28 تُحدد شروط الحدود من الجدول 22.2 والشكل 22.5.

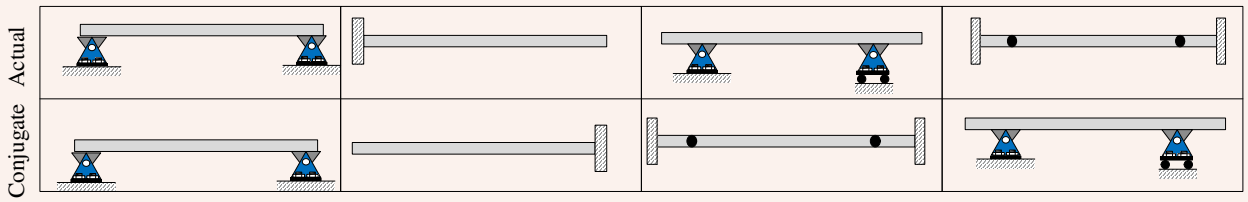
الكمرة المرافقة			الكمرة الحقيقية	
"مفصل"	$M = 0$	$V \neq 0$	$y = 0$	مفصل ؛$\theta \neq 0$
طرف حر	$M = 0$	؛$V = 0$	$y = 0$	طرف مثبت ؛$\theta = 0$
طرف مثبت	$M \neq 0$	؛$V \neq 0$	$y \neq 0$	طرف حر ؛$\theta \neq 0$
ركيزة داخلية	$M \neq 0$	؛$V \neq 0$	$y \neq 0$	مفصل داخلي ؛$\theta \neq 0$
مفصل داخلي	$M = 0$	؛$V \neq 0$	$y = 0$	ركيزة داخلية ؛$\theta \neq 0$

جدول 22.2: شروط الحدود للكمرة المرافقة

29 مع أن طريقة مساحة الانحناء قائمة على أساس واضح، فقد يكون تطبيقها المباشر مربكًا أحيانًا.

30 لاحظ أنه لا يمكن أن يكون لدينا إلا حمل موزع، وأن الحمل موجب للعزم الموجب وسالب للعزم السالب. ويجب رسم مخططي "القص" و"العزم" وفقًا لذلك.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

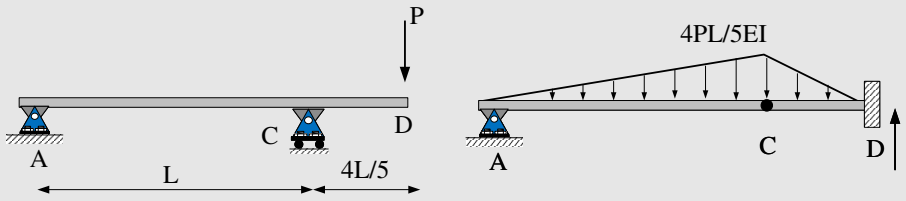


شكل 22.5: الكمرات المرافقة

31 وحدات "الحمل الموزع" w^* هي $\frac{FL}{EI}$ (القوة مضروبة في الطول ومقسومة على EI). ومن ثم تكون وحدات "القص" $w^* \times L$ أو $\frac{FL^2}{EI}$، ووحدات "العزم" $(w^* \times L) \times L$ أو $\frac{FL^3}{EI}$. وبالتذكير بأن وحدات EI هي $FL^{-2}L^4 = FL^2$، نلاحظ أن "القص" يقابل بالفعل دورانًا بالراديان، وأن "العزم" يقابل إزاحة.

22.3.4.7.1 مثال 22.13: كمرة مرافقة؛ حمل مركز

حلّل الكمرة الآتية



في الكمرة المرافقة لدينا ثلاث معادلات اتزان ومعادلة شرط واحدة، ومجموعها يساوي عدد ردود الأفعال.
يقابل الانحراف عند D القص عند D في الكمرة المرافقة.

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^C = 0 \Rightarrow R_A(L) - \left(\frac{4PL}{5EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{2PL^2}{15EI}$$

وهو ميل الكمرة الحقيقية عند A كما حُسب سابقًا.

لنرسم مخطط العزم للكمرة المرافقة عند نقطة تبعد x عن A. من A إلى C

$$M = \frac{P}{EI}\left[\frac{2}{15}L^2x - \left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{2}{15}L^2x - \frac{2}{15}x^3\right)$$

$$= \frac{2P}{15EI}\left(L^2x - x^3\right)$$

تحدث نقطة العزم الأقصى (Δ_{max}) عندما $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2P}{15EI}(L^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 = L^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

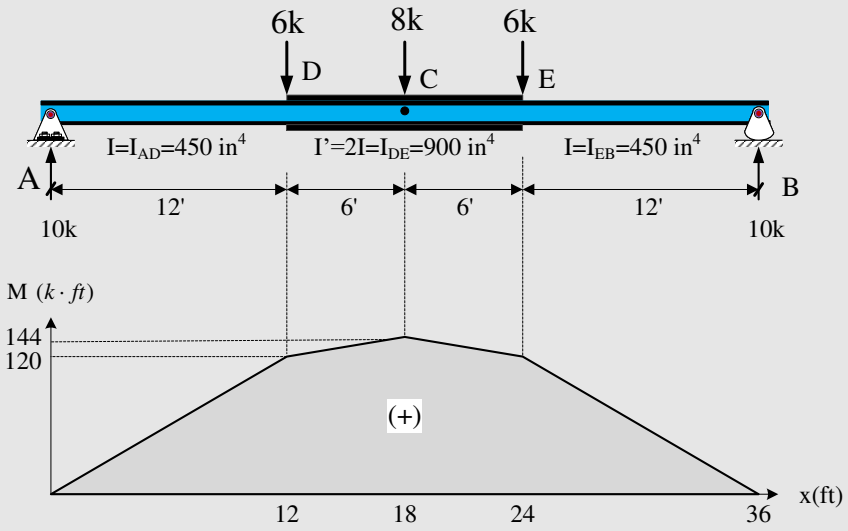
كما حُدد سابقًا

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow M = \frac{2P}{15EI}\left(\frac{L^2 L}{\sqrt{3}} - \frac{L^3}{3\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

كما سبق.

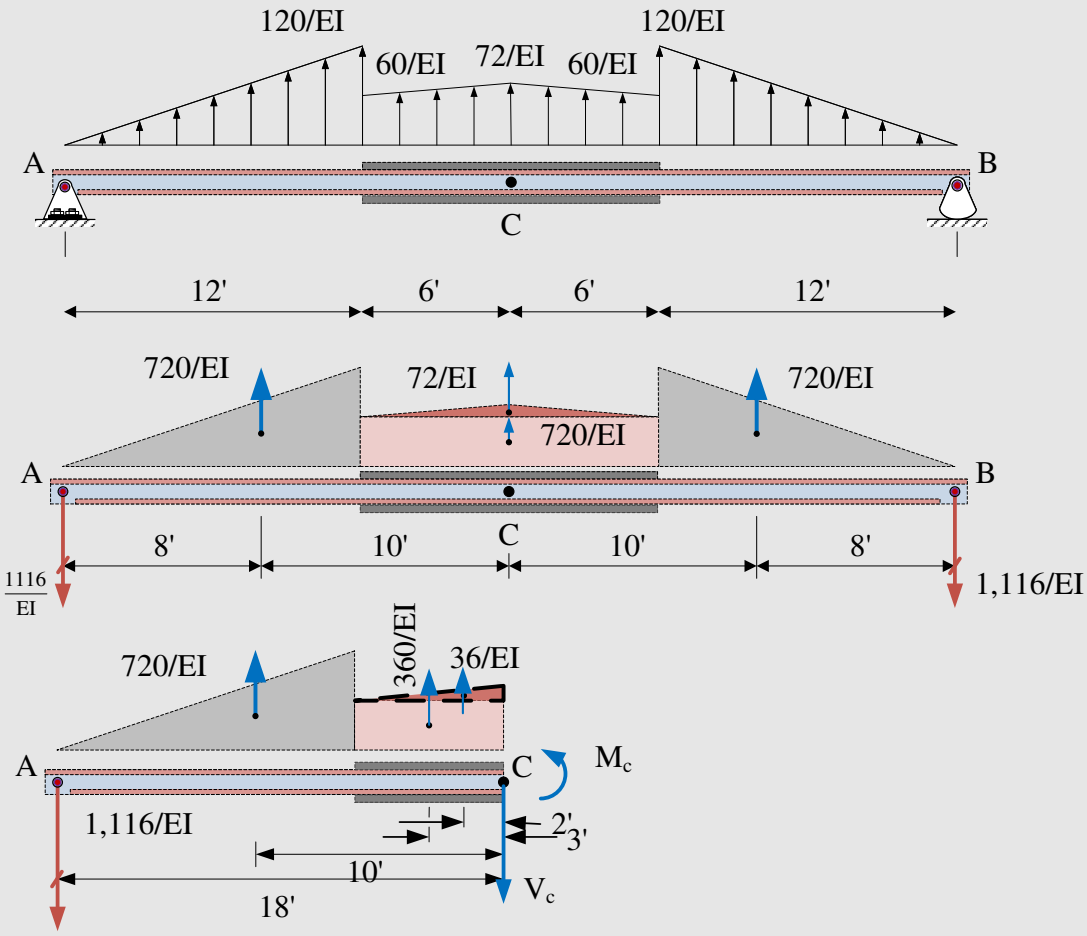
22.3.4.7.2 مثال 22.14: كمرة مرافقة؛ I متغير

حدد الانحراف عند النقطة C للكمرة الآتية



من الملاحظة المباشرة، يساوي رد الفعل عند كل من A وB مقدار 10 k. والحمل المرن على الكمرة المرافقة هو

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



نريد بعد ذلك تحديد العزم الداخلي عند C' في الكمرة المرافقة، ويُستخرج من الاتزان:

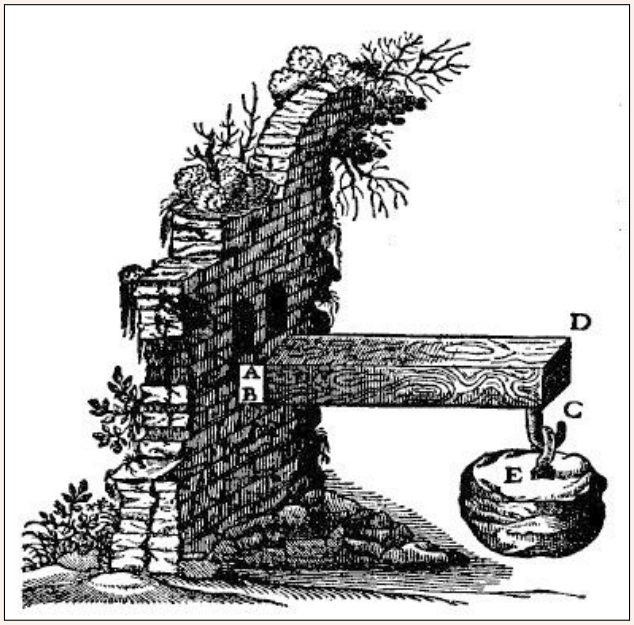
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = -;\ \frac{1,116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3}{EI}$$

بالتعويض

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3(12^3)\text{in}^3/\text{ft}^3}{(29\times10^3)\text{k/in}^2(450)\text{in}^4} = -1.55"$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



رسم غاليليو لكمرة كابولية، من كتاب «مقالات وبراهين رياضية حول علمين جديدين» *(1638)*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

23 القص واللي

ملخص

كثيرًا ما يطغى الانحناء على القص واللي في التحليل الإنشائي. غير أنهما يؤديان دورًا حاسمًا في حالات كثيرة، ويستحقان بلا شك فصلًا في هذا الكتاب. وتتجاوز المعالجة المستوى التمهيدي لتتناول نموذجي تيموشينكو وفلاسوف.

ستكمل بعض المعادلات المشتقة هنا معادلات الفصل 26، تمهيدًا لطرائق الصلابة.

23.1 تشوه القص (المستعرض) 859
23.1.1 القص، عنصر متناهي الصغر . . . 859
23.1.2 توزيع القص؛ $\tau(y)$ 860
23.1.3 معامل القص 861
23.1.4 عامل القص 862
23.1.5 تشوه القص v_s، تيموشينكو . . . 863
23.2 تشوهات اللي 864
23.2.1 لي سان فينان أو اللي المنتظم . . 864
23.2.2 لي فلاسوف أو اللي غير المنتظم . 865

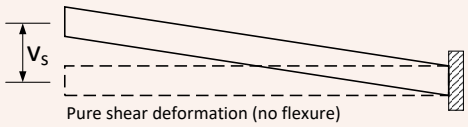
23.1 تشوه القص (المستعرض)

1 تكون تشوهات القص المصاحبة للانحناء، الشكل 23.1، صغيرة عمومًا. لكنها لا تُهمل في الكمرات ذات النسبة الصغيرة بين البحر والعمق. لذلك نميز بين

كمرة برنولي لا يؤخذ فيها تشوه القص في الحسبان، ويبقى المقطع المستوي مستويًا.

كمرة تيموشينكو يؤخذ فيها تشوه القص في الحسبان، فلا يعود فرض المقطع المستوي صالحًا.

وعليه يسعى هذا القسم إلى تحديد تشوه القص وحده (من دون انحناء)، ثم بيان أثره لاحقًا في معاملات الصلابة.



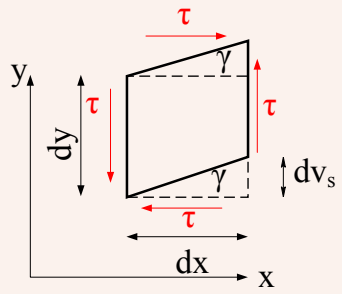
شكل 23.1: تشوه القص النقي

23.1.1 القص، عنصر متناهي الصغر

2 بافتراض مادة مرنة خطيًا وإزاحة صغيرة، أي $\tan\gamma \approx \gamma$، يُعطى انفعال القص في الشكل 23.2 بالعلاقة

$$\tan\gamma \approx \gamma = \underbrace{\frac{dv_s}{dx}}_{\text{الحركة}} = \underbrace{\frac{\tau}{G}}_{\text{الإجهاد–الانفعال}} \tag{23.1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 23.2: عنصر متناهي الصغر خاضع لإجهاد قص

حيث $\frac{dv_s}{dx}$ ميل المحور المتعادل للكمرة بالنسبة إلى الاتجاه الأفقي، ويبقى المقطع الرأسي غير متشوه. ويمثل G معامل القص، وτ إجهاد القص، وv_s *الإزاحة الناتجة من القص*.

23.1.1.1 مثال 23.1: انحراف كمرة كابولية

لنأخذ كمرة كابولية مستطيلة المقطع $b \times h$ خاضعة لحمل مركز P عند طرفها الحر. من مبدأ الشغل الافتراضي التكميلي، ومع ملاحظة أن $\delta M = (1)x$ و$M = Px$ و$\delta\tau = 1$ وأن τ معطاة بالمعادلة 23.3:

$$
\begin{aligned}
(1)\Delta &= \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx}_{\text{الانحناء}} + \underbrace{\int_{Vol} \delta\overline{\tau}\frac{\tau}{G}dVol}_{\text{القص}} \\
&= \int_0^L x\frac{Px}{EI}dx + \frac{1}{G}\int_{-h/2}^{h/2} \underbrace{(1)}_{\delta\tau} \underbrace{\left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}}_{\tau} \underbrace{Lbdy}_{dVol} \\
&= \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\Delta_{flex}} + \underbrace{\frac{6}{5}\frac{PL}{AG}}_{v_s} \\
\Delta &= \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

عند $E/G = 2.5$ (قيمة نموذجية للفولاذ)، $\Delta_{flex}\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)$، $\Delta = EI$.

عند $L = h$ يساوي الانحراف الكلي 1.75 مرة الانحراف الناتج من الانحناء وحده، وعند $L = 10h$ يقل الانحراف الناتج من القص عن 1% من Δ_{felx}.

23.1.2 توزيع القص؛ $\tau(y)$

3 نريد تحديد التوزيع الرأسي لإجهاد القص المستعرض، الشكل 23.3a. وبأخذ قطعة طولها dx مقطوعة على مسافة y من المحور المتعادل، يتطلب الاتزان

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$(+\rightarrow)\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{lft}} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{rgt}} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

بالتعويض عن مقادير الإجهادات:

$$\int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x)y}{I} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x)+dM(x)y}{I} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

بالتبسيط والقسمة على dx وb نحصل على

$$\tau_{xy} = \frac{dM(x)}{dx}\frac{1}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} y b dy$$

ولكن بما أن $V(x) = dM(x)/dx$، فإن توزيع إجهاد القص يُعطى بالعلاقة

$$\tau(xy) = \frac{V(x)}{Ib}\int_y^{y^{\text{top}}} y b dy = \frac{V(x)Q(y)}{Ib} = \frac{VQ(y)}{Ib}$$

حيث V قوة القص، وQ العزم الأول (أو العزم الاستاتيكي) حول المحور المتعادل للجزء من مساحة المقطع الواقع خارج الموضع المراد تحديد إجهاد القص عنده، وI عزم القصور، وb العرض.

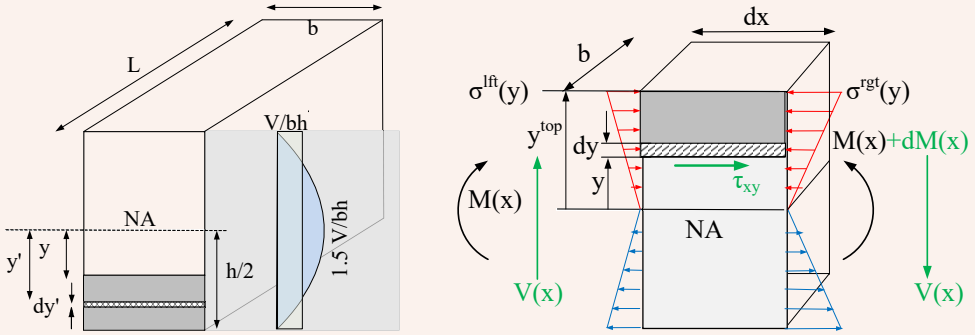
23.1.3 معامل القص

[4] نعرّف معامل القص α_s بأنه نسبة إجهاد القص عند المحور المتعادل $\tau(y=0)$ إلى إجهاد القص المتوسط $(\tau = V/bh)$.

$$\begin{aligned}\tau(y) &= \frac{VQ(y)}{Ib} \qquad (23.2)\\ &= \frac{1}{Ib}\int_y^{h/2} V \underbrace{\underbrace{b dy'}_{dA}\, y'}_{dM} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\\ &= \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (23.3)\end{aligned}$$

- يساوي إجهاد القص صفرًا عند $y = h/2$، ويبلغ أقصى قيمة عند المحور المتعادل حيث $y = 0$ و$\tau_{max} = 1.5\frac{V}{bh}$. ومن ثم $\alpha_s = 1.5$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) معامل القص (a) قطعة طولها dx مقطوعة على مسافة y من المحور المتعادل

شكل 23.3: إجهاد القص ومعامله

23.1.4 عامل القص

5 كما كان لدينا $\sigma = P/A$، فهل يمكن افتراض $\tau = V/A$؟

6 إن قسمة قوة القص V على A، أي $\tau = V/A$ على غرار $\sigma = P/A$، غير صحيحة لأن إجهاد القص غير موزع بانتظام على العمق.

7 نعرّف

$$\tau \overset{\text{def}}{=} V/A_s \Rightarrow A_s \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{\lambda_s} \tag{23.4}$$

حيث A_s مساحة المقطع الفعالة للقص. ونريد تحديد λ_s، أي *عامل القص*.

8 لتحديد λ_s نساوي *طاقة انفعال القص المتوسطة* U

$$U_{aver} = \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s}dx = \lambda_s^? \int_0^L \frac{V^2}{2GA}dx \tag{23.5}$$

بالقيمة *الدقيقة* المحددة من التوزيع الفعلي لإجهاد القص

$$U_{exact} = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma \underbrace{G\gamma}_{\tau} d\Omega = \int_\Omega \frac{\tau^2}{2G}d\Omega = \iiint \frac{\tau^2}{2G}dxdydz \tag{23.6}$$

لاحظ أن Ω تمثل حجمًا في الميكانيكا الإنشائية، وأن Γ (أو $\delta\Omega$) تمثل السطح الموافق.

9 نبدأ بالتعبير الدقيق لإجهاد القص

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib}; \qquad Q(y) = \int_y^{h/2} by'dy' = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 نعوض في المعادلة 23.6 لتحديد طاقة الانفعال الدقيقة.

$$\begin{aligned} U_{exact} &= \int_0^L \left[\int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V^2}{8GI^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy dz \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 y^2}{2} + y^4 \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2} \left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_{-h/2}^{h/2} dx \\ &= \int_0^L \frac{V^2 b h^5}{240 GI^2} dx \end{aligned}$$

11 لمقطع مستطيل $I = bh^3/12$

$$U_{exact} = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V^2}{GA} dx = \underbrace{\frac{6}{5}}_{1.2} \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx$$

12 بالمقارنة مع المعادلة 23.5، نلاحظ أن عامل شكل القص $\lambda_s = 1.2$. ومن ثم

$$\tau = V/A_s; \qquad A_s = \frac{A}{1.2} \tag{23.7}$$

13 لتشوه القص نعتمد إذن $\tau = V/A_s$، ومن المعادلة 23.1 نحصل على

$$\tan\gamma \simeq \gamma = \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_s} = \frac{\lambda_s V}{AG} \tag{23.8}$$

14 لاحظ التناظر مع $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$.

23.1.5 تشوه القص v_s، تيموشينكو

15 سنحدد الآن تشوه القص لكمرة مثبتة عند أحد طرفيها وخاضعة لحمل مركز عند الطرف الآخر، كما في تعريف حد من معاملات الصلابة.

16 من المعادلة 23.8، وبافتراض ثبات V،

$$\int dv_s = \int \frac{V}{GA_s} dx \Rightarrow v_s = \frac{V}{GA_s} x + C_1 \tag{23.9}$$

17 إذا كانت الإزاحة v_s صفرًا عند الطرف المقابل للكمرة، فإن $C_1 = -\frac{V}{GA_s}(x - L)$ و

$$v_s = \frac{V}{GA_s}(x - L) \tag{23.10}$$

18 عند $x = 0$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 23.1: تشوه القص

$$v_s = \frac{V}{GA_s}L \tag{23.11}$$

19 سنعود إلى هذا التعبير في §40.7 ضمن سياق كمرة تيموشينكو.

23.2 تشوهات اللي

20 عند تطبيق اللي على عنصر إنشائي قد تلتوي مقاطعه ويتشوه شكلها خارج مستوياتها أيضًا. فإذا سُمح للعنصر بالالتواء الحر، قاومت عزم اللي المطبق إجهادات قص *سان فينان* وحدها، ويسمى هذا السلوك اللي النقي أو *المنتظم*. أما إذا قُيد العنصر عن الالتواء الحر، فإن مزيجًا من إجهادات قص سان فينان ولي الالتواء يقاوم العزم المطبق، ويسمى ذلك *اللي غير المنتظم* (أو لي فلاسوف).

23.2.1 لي سان فينان أو اللي المنتظم

21 بافتراض مادة مرنة خطيًا وتوزيع خطي للانفعال، ومن ثم للإجهاد، على نصف قطر مقطع دائري خاضع لحمل لي، الشكل 23.4، يكون لدينا:

$$T_{SV} = \underbrace{\underbrace{\int_A \underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}_{\text{الإجهاد}} \underbrace{dA}_{\text{المساحة}}}_{\text{القوة}} \underbrace{\rho}_{\text{الذراع}}}_{\text{عزم اللي}} = \frac{\tau_{max}}{c}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{SV}c}{J} \tag{23.12}$$

لاحظ التناظر بين هذه المعادلة الأخيرة و $\sigma = \frac{Mc}{I_{zz}}$.

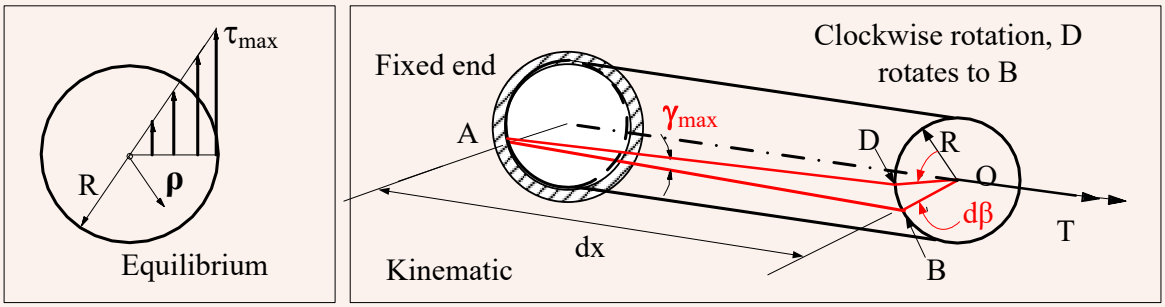
22 إن $\int_A \rho^2 dA$ هو عزم القصور القطبي J، ويسمى أيضًا ثابت لي سان فينان. للمقاطع الدائرية

$$\begin{aligned} J &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \left(2\pi\rho d\rho\right) \\ &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned}$$

وللمقاطع المستطيلة $b \times d$، حيث $b < d$، يُعطى تعبير تقريبي كما يأتي

$$\begin{aligned} J &= kb^3 d \\ k &= \frac{0.3}{1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 23.4: علاقات دوران اللي

أما للمقاطع الأخرى، فكثيرًا ما تكون قيم J مجدولة.

23 لاحظ أن J تقابل I_{xx} حيث x هو المحور الممتد على طول العنصر.

24 بعد اشتقاق علاقة بين اللي وإجهاد القص، نبحث الآن عن علاقة بين اللي ودوران اللي. في الشكل 23.4 نأخذ طول القوس BD

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{max}dx &= d\beta R\\ \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\gamma_{max}}{R}\\ \gamma_{max} &= \frac{\tau_{max}}{G}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\frac{d\beta}{dx} &= \frac{\tau_{max}}{GR}\\ \tau_{max} &= \frac{T_{SV}R}{J}\end{aligned}\right\} \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{T_{SV}}{GJ}$$

25 أخيرًا يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة $\int T_{SV}dx = \int GJd\beta$، فنحصل على:

$$T_{SV} = \frac{GJ}{L}\beta \tag{23.13}$$

لاحظ التشابه بين هذه المعادلة والمعادلة 26.1.

23.2.2 لي فلاسوف أو اللي غير المنتظم

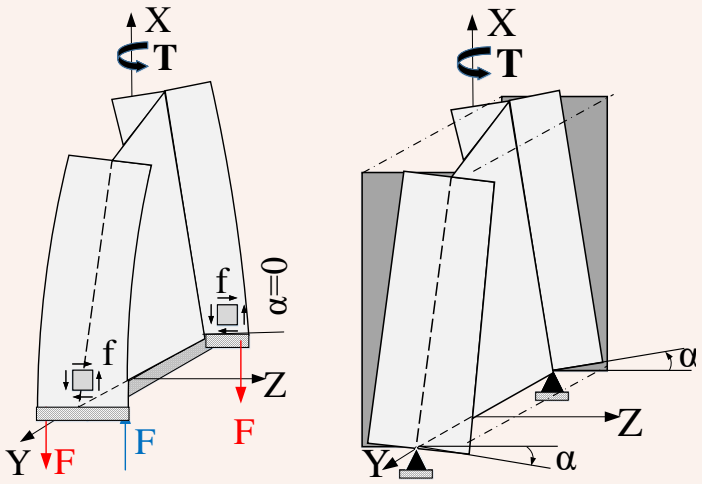
26 تتشوه جميع المقاطع خارج مستوياتها باستثناء المقاطع الدائرية. لذلك قد يغير القيد الطولي توزيع الإجهاد والصلابة على جزء كبير من طول العنصر، وغالبًا على نحو مفيد، لأنه يعيق الالتواء[1].

27 تشمل نظرية اللي لـVlasov, 1961 أثر الالتواء المقيد، الشكل 23.5. وبالمقارنة مع نظرية الكمرات التقليدية، تقدم نظرية فلاسوف كميتين إضافيتين: *ثابت الالتواء* C_w والعزم *الثنائي* B. وثابت الالتواء خاصية للمقطع ومقياس للجهد اللازم لتقليل الالتواء، ووحدته $[L^6]$. ويُعرّف العزم الثنائي كما يأتي

$$B = Md \tag{23.14}$$

[1] الاشتقاق مستند إلى (McGuire **and** Winter, 1968).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) التواء من دون دوران (b) دوران ولي مقيدان

شكل 23.5: سبب حدوث الالتواء

28 تنشأ الحاجة إلى تعريف هذا العزم الجديد من وجود إجهادات عادية مؤثرة في المقطع رغم أن $M_y = M_z = \mathbf{N} = 0$. ومن ثم يقدم درجة حرية لعناصر الكمرات تمثل عزم اللي الناتج من الالتواء المقيد.

29 يتشوه مقطع على شكل I، حر تمامًا عند أحد طرفيه وممنوع من الدوران لا من الالتواء عند الطرف الآخر، كما في الشكل 23.5a. وهذه الحالة مماثلة إنشائيًا، لجميع الأغراض العملية، لعمود حر عند طرفيه لكنه خاضع لعزمي لي متساويين ومتعاكسين.

30 إذا مُنعت القاعدة من الالتواء والدوران معًا اختلف الأمر. إذ تولد الركيزة قوى $\mathbf{F}$ تمنع ميل الشفتين وتثنيهما حول محوريهما القويين مثل كمرة مستطيلة، الشكل 23.5b. وتنتج هذه القوى بدورها قوة قص مستعرضة $\mathbf{H}_f$ في كل شفة، الشكل 23.6a، فتسبب انحناءً حول المحور القوي شبيهًا بانحناء كمرة مستطيلة[2].

31 تمثل القوة المستعرضة في الشفة مضروبة في المسافة بين الشفتين ازدواجًا له اتجاه عزم اللي المقاوم نفسه.

32 يكون تقييد الالتواء مفيدًا عمومًا. فمع أن عزم اللي الكلي ثابت على طول العمود، فإن معدل الدوران يتغير عادة. عند القاعدة، الشكل 23.5b، يجب أن يكون هذا المعدل صفرًا، وتكون المقاومة كلها في عزم الالتواء. ثم يضمحل أثر قيد الطرف ويزداد الالتواء تدريجيًا على طول العمود حتى يصبح، في مقطع بعيد عن القاعدة، مماثلًا عمليًا للي النقي، وعندها يقاوم قص اللي كامل العزم، الشكل 23.6b.

33 يتحلل عزم اللي الكلي إذن إلى مركبتين

$$T = T_{SV} + T_V \tag{23.15}$$

يُستخرج الحد الأول من المعادلة 23.12

$$T_{SV} = GJ\theta = GK\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} \tag{23.16}$$

[2] ينحني الجذع أيضًا، لكن يمكن إهماله بسبب صلابته الصغيرة في اتجاهه الضعيف.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

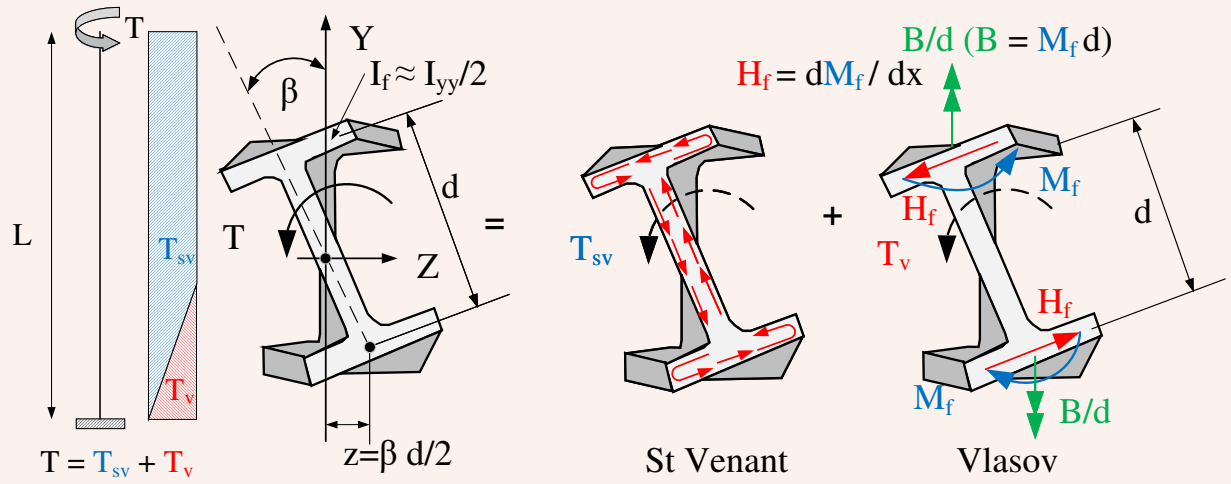
34 أما الحد الثاني فيمكن معالجة كل شفة بوصفها كمرة مستطيلة منحنية حول محورها القوي، وبما أن قوة القص مشتقة العزم

$$\frac{M_f}{EI_f} = -\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d}{2}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{23.17}$$

يكون لدينا

$$H_f = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -EI_f\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}$$

حيث M_f عزم الانحناء في الشفة، وI_f عزم قصور الشفة الواحدة، وz الانحراف المستعرض لمركز كل شفة عند مقطع يبعد x عن القاعدة (وزاوية دوران المقطع هي β)، الشكل 23.6.



شكل 23.6: اللي غير المنتظم (مقتبس من (McGuire **and** Winter, 1968))

35 بإهمال الجذع، يكون I_f نصف عزم قصور المقطع كله حول المحور الضعيف، ومن الشكل 23.6a لدينا

$$I_f = I_{yy}/2$$
$$z = \beta d/2$$
$$H_f = T_V/d$$

بالتعويض

$$T_V = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -E\underbrace{\frac{I_{yy}}{2}\frac{d^2}{2}}_{C_w}\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} \tag{23.18}$$

حيث C_w خاصية للمقطع تسمى *ثابت الالتواء*.

36 بالتعويض بالمعادلتين 23.16 و23.18 في المعادلة 23.15:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 23.2: اللي المنتظم وغير المنتظم

$$T = \underbrace{GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}}_{T_{SV}} - \underbrace{EC_w\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3}}_{T_V} \tag{23.19}$$

37 وبدلًا من ذلك ندخل B، المعرّف بأنه حاصل ضرب M_f في d

$$\left.\begin{aligned} B &= M_f d \\ M_f &= -EI_f z'' \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f z'' d \\ z &= \frac{\beta d}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f \tfrac{d^2}{2}\beta'' \\ I_f &= \tfrac{I_{yy}}{2} \end{aligned}\right\} B = -E\underbrace{I_{yy}\frac{d^2}{4}}_{C_w}\beta''$$

38 ومن ثم يمكن إعادة كتابة المعادلة 23.19 كما يأتي

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} + \frac{dB}{dx}$$

39 لتسهيل تحديد المعادلة التفاضلية الحاكمة، يمكن إعادة كتابة المعادلة 23.19 كما يأتي

$$\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} - p^2\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = -\frac{T}{EC_w}$$

حيث

$$p^2 = \frac{GJ}{EC_w} \tag{23.20}$$

وحلها العام هو

$$\beta = C_1 + C_2 px + C_3\cosh px + C_4\sinh px \tag{23.21}$$

وتُحدد الثوابت بتطبيق شروط الحدود الملائمة المبينة في الشكل 23.7.

كمرة مثبتة عند الطرفين

40 بتطبيق شروط الحدود الآتية،

$$\begin{aligned} &\text{الطرف 1} \quad x = 0, \quad \beta = \beta_1, \quad \beta' = \beta'_1, \\ &\text{الطرف 2} \quad x = L, \quad \beta = \beta_2, \quad \beta' = \beta'_2, \end{aligned} \tag{23.22}$$

نحدد الثوابت الأربعة (Bhatt, 1986)

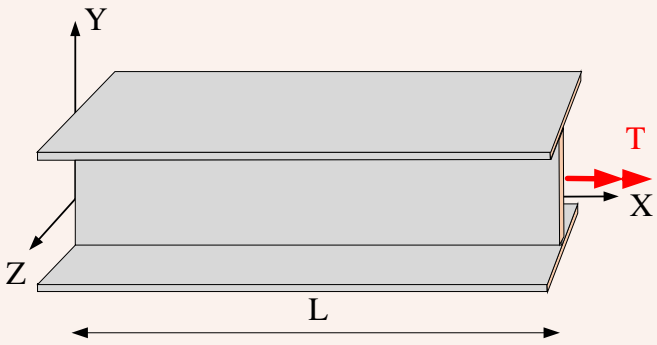
$$C_1 = \frac{(SpL - C + 1)\beta_1 + (1 - C)\beta_2 + p^{-1}(pL - C - S)\beta'_1 + p^{-1}(S - pL)\beta'_2}{D}$$

$$C_2 = \frac{-S\beta_1 + S\beta_2 + p^{-1}(1 - C)\beta'_1 + p^{-1}(1 - C)\beta'_2}{D}$$

$$C_3 = \beta_1 - C_1$$

$$C_4 = p^{-1}\beta'_1 - C_2$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 23.7: كمرة على شكل I خاضعة للي

حيث $D = 2(1 - C) + SpL$ و$S = \sinh pL$ و$C = \cosh pL$. يمكن الآن التعبير عن المعادلة 23.21 بدلالة دوال الشكل

$$\begin{aligned}
\beta &= N_1\beta_1 + N_2\beta_2' + N_3\beta_2 + N_4\beta_2' \\
N_1 &= \frac{(pL - px + \sinh px)S + (1 - C)(1 + \cosh px)}{D} \\
N_2 &= \frac{kx(1 - C) - (CpL - S)(\cosh px - 1) + (SpL + 1 - C)\sinh px}{D} \\
N_3 &= \frac{(C - 1)(\cosh px - 1) - S(\sinh px - px)}{D} \\
N_4 &= \frac{(C - 1)(\sinh px - px) - (S - pL)(\cosh px - 1)}{pD}
\end{aligned}$$

41 عُبّر عن شروط الحدود في المعادلة 23.22 بدلالة الإزاحات. ومن الأفضل التعبير عنها بدلالة عزم اللي $T = GJ\beta' - EC_w\beta'''$، واستخدام العزم الثنائي B بدلًا من عزم الانحناء في الشفة، ويُعرّف كما يأتي

$$B = d\underbrace{EI_f z''}_{M_f} = EC_w\frac{d^2\beta}{dx^2}$$

بحيث يمكن إعادة كتابة المعادلة 23.19 كما يأتي

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} - EC_w\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42 باستخدام المعادلة 23.21 وقيم ثوابت التكامل، يمكن التعبير عن القوى بدلالة إزاحات عقدتي الطرفين.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{GJ}{LD}\left[(\beta_2-\beta_1)SpL-(\beta_1'+\beta_2')(C-1)L\right]\\
B &= \frac{GJ}{D}\left\{(\beta_2-\beta_1)\left[(C-1)\cosh px - S\sinh px\right]\right.\\
&\quad + p^{-1}\left[(S-CpL)\cosh px+(SpL+1-C)\sinh px\right]\beta_1'\\
&\quad \left.+p^{-1}\left[(pL-S)\cosh px+(C-1)\sinh px\right]\beta_2'\right\}
\end{aligned}
$$

كمرة مثبتة عند طرف واحد

43 في هذه الحالة تُعطى شروط الحدود بالعلاقات

$$
\begin{aligned}
&\text{الطرف 1};x=0,\beta=0;\frac{d\beta}{dx}=0\\
&\text{الطرف 2};x=L,\qquad \frac{d^2\beta}{dx^2}=0
\end{aligned}
\tag{23.23}
$$

تنص المجموعة الأولى من الشروط على أن الدوران ومعدل الدوران يساويان صفرًا عند ذلك الطرف. أما الثانية فتنص على انعدام انحناء كل شفة حول محورها القوي (المعادلة 23.17).

44 بتطبيق شروط الحدود هذه على المعادلة 23.21 ومشتقاتها، يكون الحل

$$\beta=\frac{T}{GJ}\left[x+\frac{\sinh p(L-x)-\sinh\ pL}{p\cosh pL}\right] \tag{23.24}$$

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{T}{GJ}\left[1-\frac{\cosh p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.25}$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2}=\frac{T}{GJ}\left[\frac{p\sinh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.26}$$

$$\frac{d^3\beta}{dx^3}=-\frac{T}{GJ}\left[\frac{p^2\cosh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.27}$$

23.2.2.1 مثال 23.2: اللي غير المنتظم لمقطع على شكل I

المثال مأخوذ من McGuire **and** Winter, 1968, example 5.17.

عمود طوله 10 ft ومقطعه W 14 x 74، مثبت لويًا عند أحد طرفيه وحر عند الآخر، ويخضع لعزم لي T مطبق عند الطرف الحر. ارسم زاوية الدوران وتوزيع T بين عزم سان فينان وعزم الالتواء. ونريد أيضًا تحديد الإجهادات الداخلية.

الخواص الفيزيائية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(in x lb/ft)	(in) h	(in) w	(in) t_w	$b_f(in)$	(in) t_f	(^{4}in) I_x	(^{4}in) I_y	(^{4}in) J	C_w
W 14 x 74	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.88	5,990
المستخدم*	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.6	6,000

يرجع الفرق إلى خواص المقطع القديمة المعتمدة في المثال.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{1+0.3} \text{ ,psi } E = 30 \times 10^6$$

عزوم اللي

للتحقق فقط:

$$J = \Sigma \frac{bt^3}{3} = \frac{2 \times 10.07 \times (0.783)^3}{3} + \frac{12.62 \times (0.450)^2}{3} = 3.60 \text{ in}^4 \checkmark$$

$$C_w = \frac{d^2 I_y}{4} = \frac{(14.19 - 0.78)^2 (133.5)}{4} = 6,000 \text{ in}^6 \checkmark$$

باستخدام المعادلات المشتقة سابقًا:

$$\text{Eq. 23.20;} \quad p = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = \sqrt{\frac{E \times 3.6}{2(1+0.3)E \times 6,000}} = \frac{1}{65.9}\left(\frac{1}{\text{in.}}\right)$$

$$GJ = \frac{30 \times 10^6}{2(1+0.3)} \times 3.60 = 41.5 \times 10^6 \text{lbs-in}^2$$

$$\text{Eq. 23.24;} \quad \beta = \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x + \frac{\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right) - \sinh\left(\frac{120}{65.9}\right)}{\frac{1}{65.9}\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right]$$

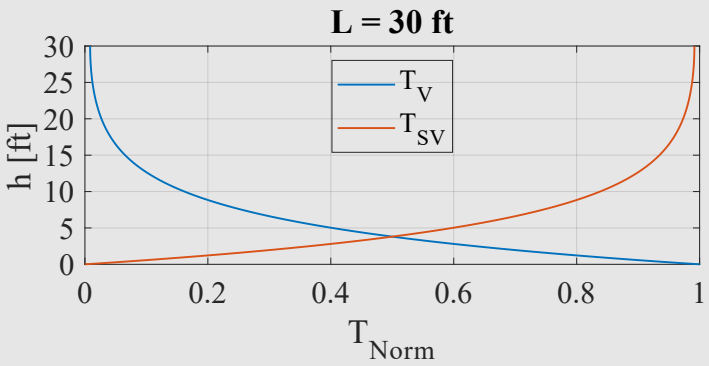
$$= \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x - 62.4 + 20.8 \sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.16 \& 23.25;} \quad T_{SV} = GJ\frac{d\beta}{dx} = T\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[1 - \frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.18 \& 23.26;} \quad T_V = -EC_w\frac{d^3\beta}{dx^3} = T\left[\frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[\frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

إذا كانت القاعدة بسيطة لويًا، فإن $T_{SV} = T$ و$\beta = T_X/GJ = T_x/(41.5 \times 10^6)$.

توضح الأشكال الآتية[a] توزيع اللي المطبع على طول العمود. فعند القاعدة، ولكل الأطوال، يكون $T_V/T = 1$ و$T_{SV}/T = 0$. وكلما ابتعدنا عن القاعدة تناقص أثر القيد، ولا يزول أثره في هذه الحالة إلا عندما $L = 30$ ft. ومن تلك النقطة فصاعدًا يقاوم لي سان فينان كامل عزم اللي.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإجهادات الداخلية

القاعدة : $T_V = T$ ،$T_{SV} = 0$

$$\begin{aligned} 3M_f &= -EI_f \left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_{x=0} & &= -\frac{EI_f d}{2}\left[\frac{d^2\beta}{dx^2}\right]_{x=0} \\ &= -\frac{EI_y d}{4}\left[\frac{Tp}{GJ}\tanh(pL)\right] & &= -\frac{T}{pd}\tanh(pL) \\ &= -T\left(\frac{65.9}{14.19-0.78}\right)\tanh\left(\frac{120}{65.9}\right) & &= -4.65T \end{aligned}$$

بافتراض توزيع خطي

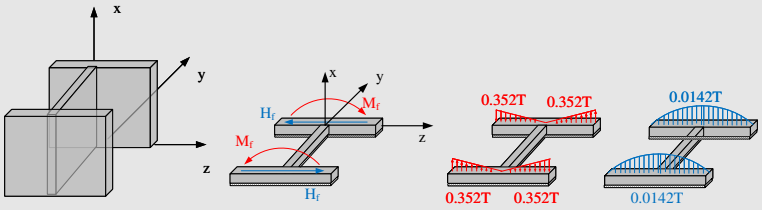
$$\sigma = \pm\frac{M_f}{t_f b_f^2/6} = \pm\frac{6\times 4.65T}{0.783(10.07)^2} = \pm 0.352T$$

القص المستعرض

$$H = \frac{T_V}{d} = \frac{T}{14.19-0.78} = \frac{T}{13.41}$$

بافتراض توزيع قطع مكافئ

$$\tau = \frac{3H}{2b_f t_f} = \frac{1.5T}{13.41(10.07\times 0.783)} = 0.0142T$$



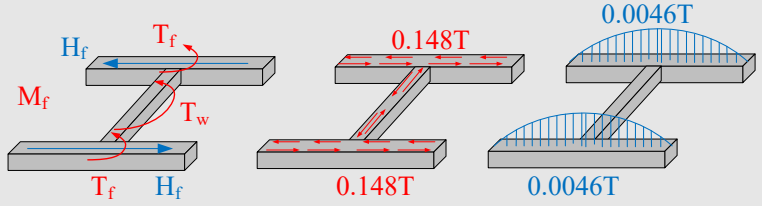
الطرف الحر من تعبيري T_V وT_{SV} يكون $T_{SV} = 0.687T$ و$T_V = 0.32T$.

القص المستعرض

$$\tau = 0.32(0.0142T) = 0.00455T$$

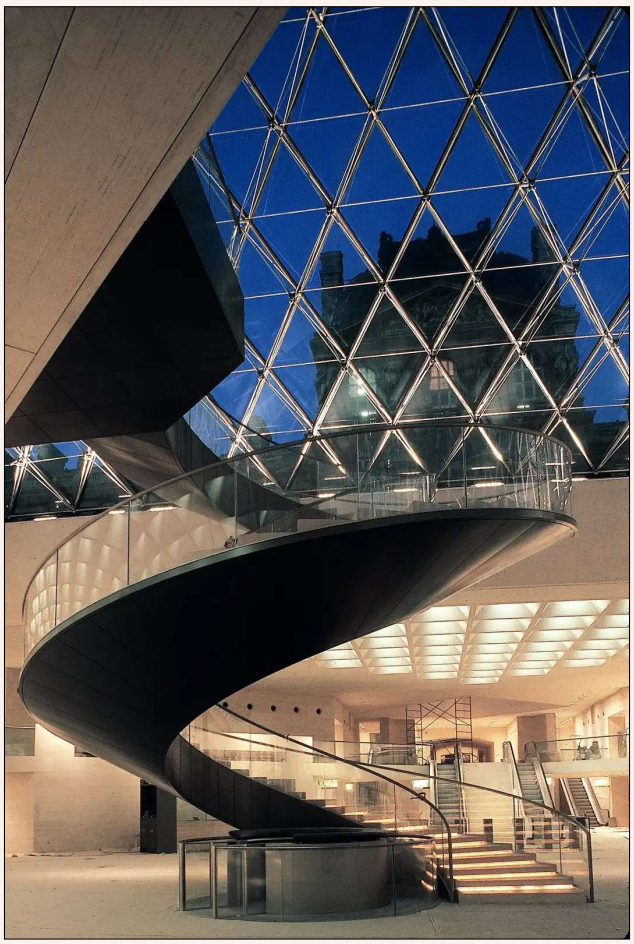
قص اللي

$$\begin{aligned} \tau_{fm} &= \frac{t_f T_{SV}}{J} = \frac{0.783(0.68T)}{3.60} = 0.148T \quad \text{الشفة} \\ \tau_{wm} &= \frac{t_w T_{SV}}{J} = \frac{0.450(0.687T)}{3.60} = 0.085T \quad \text{الجذع} \end{aligned}$$



[a] كود MATLAB®المستخدم في توليدها موجود في §I.2.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



درج متحف اللوفر (آي. إم. باي)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

24 الشغل الافتراضي التكميلي

ملخص

قدم الفصل السابق طرائق هندسية لتحديد الانحرافات، وكانت مقصورة على العناصر الانحنائية. ويتبنى هذا الفصل نهجًا مختلفًا جذريًا، يستند إلى القانون الأول للديناميكا الحرارية وينطبق على جميع أنواع العناصر الإنشائية (انظر الشكل 17.2). ومع أن معظم الكتب الدراسية تسميه غالبًا «طرائق الطاقة»، يستخدم هذا الفصل عنوانًا أدق يتسق مع المعالجة المفصلة للطرائق القائمة على الطاقة في الفصل 47. ويُدعّم الفصل بعدد كبير من الأمثلة، من البسيط إلى شديد التعقيد، لبيان التطبيق العملي لهذه الطرائق.

24.1 مقدمة 874
24.2 اشتقاق مبسط لمبدأ الشغل الافتراضي التكميلي 875
24.2.1 الاشتقاق 875
24.2.2 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل f_{ij}, f_{ji} 877
24.2.3 الشغل الافتراضي الخارجي $\delta\overline{W}^*$ 878
24.2.4 الشغل الافتراضي الداخلي $\delta\overline{U}^*$. 879
24.3 أمثلة 880
24.3.1 مثال 24.1: كمرة 880
24.3.2 مثال 24.2: إطار؛ الانحرافات . . 881
24.3.3 مثال 24.3: إطار؛ الدوران 883
24.3.4 مثال 24.4: ركيزة انحنائية . . . 884
24.3.5 مثال 24.5: كمرة كابولية مدعومة بكابل 885
24.3.6 مثال 24.6: تشوهات اللي والانحناء 886
24.3.7 مثال 24.7: تشوها الانحناء والقص في كمرة 888
24.3.8 مثال 24.8: التأثيرات الحرارية في كمرة 889
24.3.9 مثال 24.9: خط أنابيب 890
24.3.10 مثال 24.10: جملون؛ بسيط . . . 891
24.3.11 مثال 24.11: جملون؛ معقد . . . 892
24.3.12 مثال 24.12: جملون بتحدب ابتدائي 893
24.3.13 مثال 24.13: جملون بإجهادات ثانوية 894
24.3.14 مثال 24.14: حلقة دائرية 896
24.3.15 مثال 24.15: نابض 898



24.1 مقدمة

1 توسع الفصل السابق في طريقة هندسية لحساب الانحرافات، لكنها كانت مقيدة بالعناصر الانحنائية وموجزة إلى حد بعيد.

2 يتناول هذا الفصل نهجًا عامًا يمكن تطبيقه على جميع أنواع المنشآت، ولا يقتصر على الأنظمة الخطية. غير أن الاشتقاق هنا سيكون تمهيديًا، وسيُعرض اشتقاق أكثر منهجية في 47.3.1.

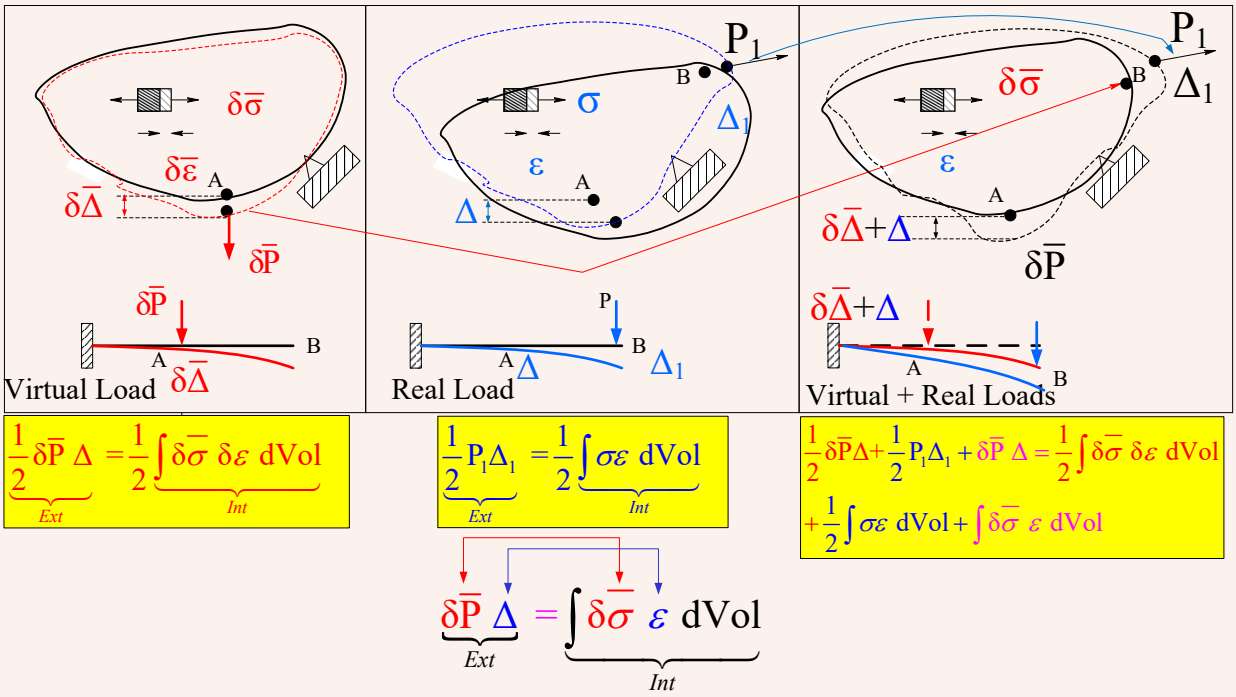
3 ملاحظة بشأن الترميز: يمزج هذا الفصل بين الكميات الحقيقية والافتراضية. وتُميّز الافتراضية بوضع شَرطة علوية عليها وسبقها بالرمز δ، الذي ينبغي ألا يختلط برمز الاشتقاق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

24.2 اشتقاق مبسط لمبدأ الشغل الافتراضي التكميلي

24.2.1 الاشتقاق

4 نشتق المبدأ بالنظر في منشأ وحمل عامين كما في الشكل 24.1. وللتبسيط، نفترض أن هذا المنشأ يولد إجهادات وانفعالات محورية داخلية فقط (σ وε). يخضع المنشأ لنوعين من القوى:



شكل 24.1: القوى الافتراضية والحقيقية في منشأ عام

افتراضية تُطبق عند الموضع A وفي الاتجاه (درجة الحرية) المطلوب حساب الإزاحة أو الدوران فيه. وقيمتها غير مؤثرة، لكنها تؤخذ غالبًا مساوية للواحد. ويجب أن تكون القوى الافتراضية في حالة *اتزان*.

حقيقية تقابل الحمل الخارجي الفعلي المطبق عند B.

يجب أن تحقق الإزاحات الموافقة شروط الحدود.

5 نشتق بعد ذلك تعبيرات *الشغل الافتراضي*، وهو الشغل الذي تؤديه قوة افتراضية خلال إزاحة حقيقية[1]. ويتم ذلك بالتسلسل الآتي:

[1] أو قوى حقيقية خلال إزاحة افتراضية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- تطبيق الحمل الافتراضي وحده عند A (فنحصل على المعادلة 1)[2]
- تطبيق الحمل الافتراضي عند A، ثم الحمل الحقيقي عند B مع بقاء الحمل الافتراضي مؤثرًا.

6 نتوقف هنا عن الاشتقاق للتذكير بما يأتي:

تعريف 24.1: القانون الأول للديناميكا الحرارية

يساوي المعدل الزمني لتغير الطاقة الكلية، أي مجموع الطاقة الحركية K والطاقة الداخلية U، مجموع معدل الشغل الذي تؤديه القوى الخارجية W_e ومعدل تغير المحتوى الحراري H

$$\frac{d}{dt}(K+U) = W_e + H$$

ولنظام أديباتي لا يتبادل الحرارة، وإذا طُبقت الأحمال بطريقة شبه استاتيكية فلا توجد طاقة حركية، تُبسّط العلاقة السابقة إلى:

$$W_e = U$$

7 ببساطة، يجب أن يساوي الشغل الخارجي طاقة الانفعال الداخلية في حالتنا. ومن ثم:

1. عند تطبيق الحمل الافتراضي عند A، يجب أن يساوي الشغل الخارجي طاقة الانفعال الداخلية على الحجم كله، ولذلك:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{\text{الشغل الافتراضي الخارجي}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}} \delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\,\text{dVol}}_{\text{طاقة الانفعال الافتراضية الداخلية}}$$

- ينشأ العامل 1/2 من تطبيق الحمل تدريجيًا وبصورة خطية من الصفر إلى قيمته الكاملة. وتمثل المساحة تحت المنحنى الشغل الخارجي، وبالمثل طاقة الانفعال الداخلية.
- طاقة الانفعال هي الشغل الداخلي، وتُكامل على الحجم.

2. وبالمثل، يعطي تطبيق الحمل الحقيقي عند B

$$\underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{\text{الشغل الحقيقي الخارجي}} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}} \sum \varepsilon\,\text{dVol}}_{\text{طاقة الانفعال الحقيقية الداخلية}}$$

3. نطبق الآن الحمل الافتراضي أولًا، ثم نطبق الحمل الحقيقي الفعلي على النظام المتشوه. وأثناء تطبيق

[2] يمكن أيضًا البدء بتطبيق الحمل الحقيقي وحده عند B، فنحصل على المعادلة 2، ثم تطبيق الحمل الافتراضي. ترتيب الأحمال غير مؤثر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحمل الحقيقي الثاني تظل $\delta\overline{P}$ ثابتة، لكنها تمر بإزاحة إضافية Δ. لذلك يوجد شغل خارجي *إضافي* عند ذلك الموضع مقداره $\delta\overline{P}\Delta$ ويساوي

$$\delta\overline{P}\Delta = \int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}$$

لاحظ غياب العامل 1/2. ومن ثم يصبح الشغل الكلي كما يأتي.

4. بجمع المعادلات 1 و2 و3 نحصل على:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{\text{غير مقترن}} + \underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{B}}^{A} + \overbrace{\underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{مقترن}}}^{A-B} = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\mathrm{dVol} + \frac{1}{2}\int_{\text{Vol}} \sum \varepsilon \mathrm{dVol}}_{\text{غير مقترن}}}^{B} + \overbrace{\underbrace{\int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}}_{\text{مقترن}}}^{A-B}$$

5. بما أن طاقة الانفعال والشغل المبذول يجب أن يكونا متساويين سواء طُبقت الأحمال معًا أم منفصلة، فإن طرح مجموع المعادلتين 2 و1 من المعادلة 4 ثم التعميم يعطي

$$\underbrace{\int_{\text{Vol}} \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}}_{\delta\overline{U}^*} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\delta\overline{W}^*}$$

8 هذه المعادلة الأخيرة هي مفتاح طريقة القوى الافتراضية. يمثل طرفها الأيسر طاقة الانفعال الافتراضية الداخلية $\delta\overline{U}^*$[3]، ويمثل طرفها الأيمن الشغل الافتراضي الخارجي.

9 يمكن صياغة المعادلة الأخيرة كما يأتي:

تعريف 24.2: مبدأ الشغل الافتراضي (التكميلي)

إذا خضع منشأ قابل للتشوه، في حالة اتزان ويحمل مجموعة معينة من الأحمال، لتشوه افتراضي ناتج من فعل إضافي، فإن الشغل الافتراضي الخارجي لمجموعة الأحمال المعطاة يساوي الشغل الافتراضي الداخلي للإجهادات التي تسببها تلك الأحمال.

24.2.2 مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل f_{ij}, f_{ji}

للسياق التاريخي، انظر §11.4.1

[3] نستخدم * لتمييزها من طاقة الانفعال الافتراضية الداخلية $\delta\overline{U}$ الناتجة من طريقة الإزاحات الافتراضية التي ستُعرض لاحقًا.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 تذكّر أن f_{ij} هي الإزاحة عند درجة الحرية i الناتجة من قوة وحدية عند درجة الحرية j.

$$\Delta_i = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x \quad \text{الإزاحة عند درجة الحرية } i \text{ بسبب حمل مركز عند } i$$

$$f_{ij} = \int \delta\overline{M}_i \frac{M_j}{EI} \mathrm{d}x \quad \text{الإزاحة عند درجة الحرية } i \text{ بسبب قوة وحدية عند } j$$

$$f_{ji} = \int \delta\overline{M}_j \frac{M_i}{EI} \mathrm{d}x \quad \text{الإزاحة عند درجة الحرية } j \text{ بسبب قوة وحدية عند } i$$

وبما أن الحملين الافتراضي والحقيقي وحديان، $\delta\overline{M}_i = M_i$ و $\delta\overline{M}_j = M_j$، فإن $f_{ij} = f_{ji}$.

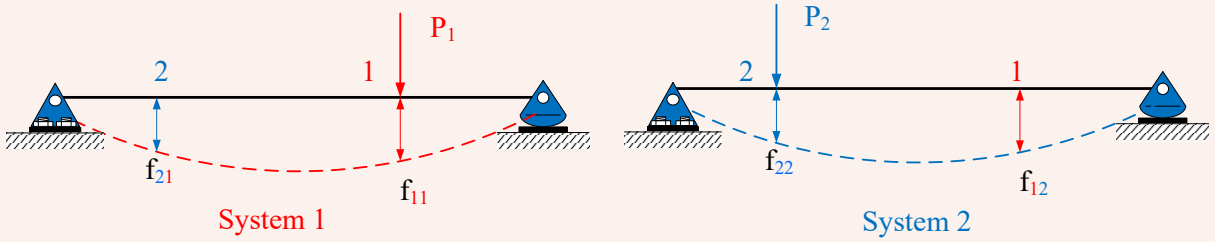
تعريف 24.3: مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل

يساوي مقدار انحراف النقطة A في الاتجاه 1 الناتج من حمل وحدي عند النقطة B في الاتجاه 2 مقدار انحراف النقطة B في الاتجاه 2 الناتج من حمل وحدي مطبق عند A في الاتجاه 1.

$$f_{ij} = f_{ji}$$

وبالتعميم: إذا أثرت مجموعتان من الأحمال في منشأ مرن خطيًا، فإن الشغل الذي تبذله المجموعة الأولى خلال الإزاحات التي تولدها المجموعة الثانية يساوي الشغل الذي تبذله المجموعة الثانية خلال الإزاحات التي تولدها المجموعة الأولى.

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$



شكل 24.2: مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل

24.2.3 الشغل الافتراضي الخارجي $\delta\overline{W}^*$

للسياق التاريخي، انظر §10.3.2.2

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11 الشغل الافتراضي الخارجي لمنشأ خاضع لأحمال مركزة أو عزوم هو

$$\delta\overline{W}^* = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i)\delta\overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n}(\theta_i)\delta\overline{M}_i$$

لاحظ أنه لا يوجد حمل افتراضي موزع. وتذكّر أن جميع الكميات ذات الشرطة العلوية افتراضية، وما عداها حقيقي.

24.2.4 الشغل الافتراضي الداخلي $\delta\overline{U}^*$

12 من المعادلة 5، يكون التعبير العام للشغل الافتراضي الداخلي

$$\delta\overline{U}^* = \int \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}$$

13 للأنظمة المرنة خطيًا ($\sum = E\varepsilon$)، يمكن توسيع ذلك لربطه بالقوى والعزوم.

العناصر المحورية

14 تقود سلسلة من عمليات التعويض إلى

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_{\mathrm{dVol}} \varepsilon(x)\delta\overline{\sigma}(x)d\mathrm{Vol} \\ \delta\overline{\sigma}(x) &= \frac{\delta\overline{P}^{(e)}(x)}{A} \\ \varepsilon(x) &= \frac{P^{(e)}(x)}{AE} \\ dV &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{P}^{(e)}(x)\underbrace{\frac{P^{(e)}(x)}{AE}}_{\Delta} dx \tag{24.1}$$

15 لاحظ أنه لجملون ذي n من العناصر يصبح التعبير السابق

$$\delta\overline{U}^* = \sum_{1}^{n} \delta\overline{P}^{(i)}\frac{P^{(i)}L_i}{A_iE_i}$$

يجب أن نتذكر أن P هي القوة المحورية الناتجة من الحمل الحقيقي، وأن $\delta\overline{P}$ هي القوة المحورية الناتجة من الحمل الافتراضي. وتحدد هذه القوى من تحليل الجملون.

16 لاحظ أن هذه المعادلة مطابقة للمعادلة التي قدمها ماكسويل في §15.5.4.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العناصر الانحنائية

17 باتباع نهج مماثل:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\overline{U}^* &= \int_{\text{Vol}} \varepsilon(x)\, \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}(x)}_{\delta\overline{\sigma}(x)}\, \text{dVol} \\
\delta\overline{\sigma}_x(x) &= \frac{\delta\overline{M}_z(x) y}{I_z} \\
\varepsilon(x) &= \frac{M_z(x) y}{E I_z} \\
d\text{Vol} &= dA\, dx \\
I_z &= \int_A y^2 dA
\end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x) \underbrace{\frac{M(x)}{E I_z}}_{\Phi(x)} dx$$

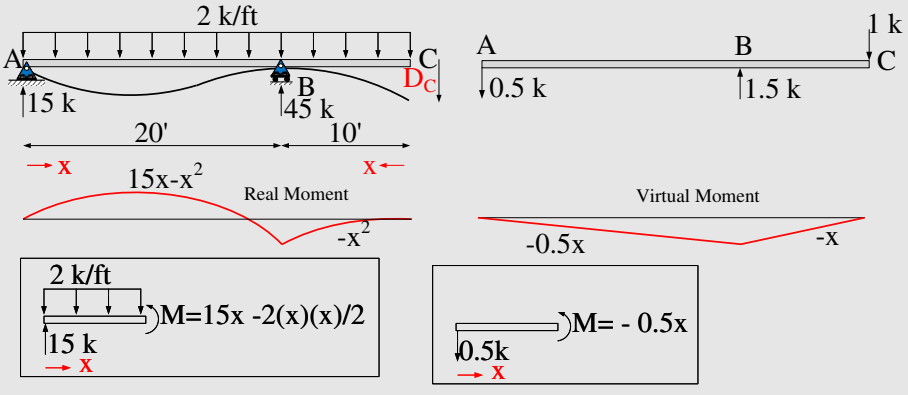
18 تذكّر مرة أخرى أن $M(x)$ مخطط العزم الناتج من الحمل الحقيقي، وأن $\delta\overline{M}(x)$ مخطط العزم الناتج من الحمل الافتراضي.

19 من الواضح أننا سنحتاج إلى *تعبيرات تحليلية* للعزوم.

24.3 أمثلة

24.3.1 مثال 24.1: كمرة

نريد تحديد الانحراف عند النقطة C. $E = 29,000$ ksi و$I = 100$ in^4.



في طريقة القوة الافتراضية نحتاج إلى تعبيرين للعزم، أحدهما ناتج من الحمل الحقيقي والآخر من الحمل الافتراضي الوحدي. وتُلخص عزوم الكمرة الحقيقية والافتراضية أدناه

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر	$x=0$	$M(x)$	$\delta\overline{M}(x)$
AB	A	$15x-x^2$	$-0.5x$
BC	C	$-x^2$	$-x$

بتطبيق مبدأ الشغل الافتراضي نحصل على

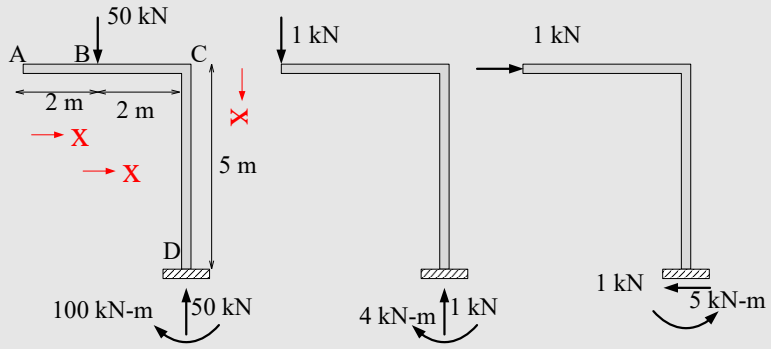
$$\underbrace{\Delta_C \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k(\Delta_C)ft = \int_0^{20}(-0.5x)\frac{(15x-x^2)}{EI}dx + \int_0^{10}(-x)\frac{-x^2}{EI}dx$$
$$= \frac{2,500}{EI}$$

$$(1)k(\Delta_C)\text{ in} = \frac{(2,500)\text{ k}^2 - \text{ ft}^4(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(29,000)\text{ k/ in}^2(100)\text{ in}^4}$$
$$= 1.49\text{ in}$$

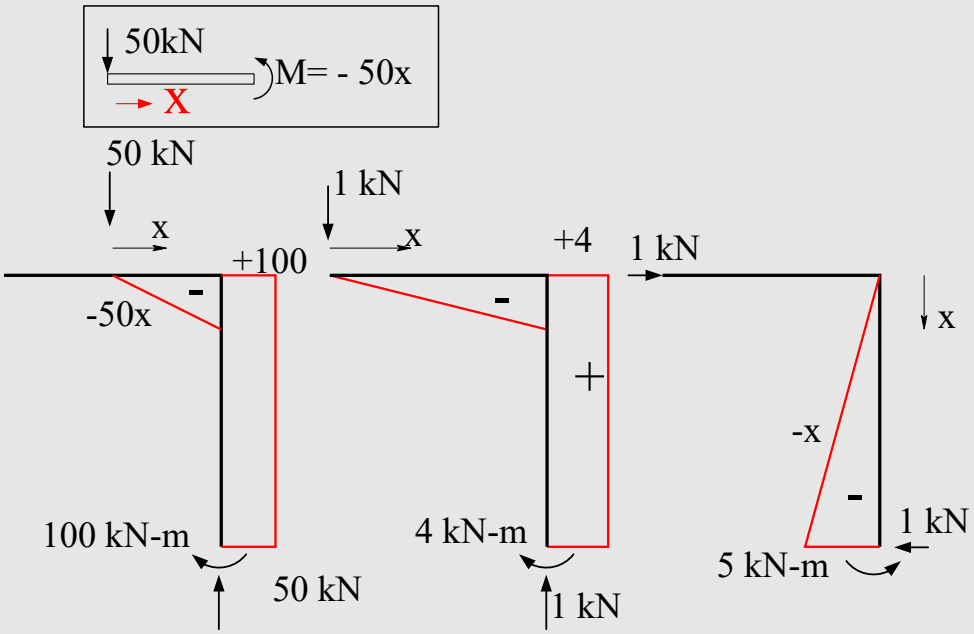
24.3.2 مثال 24.2: إطار؛ الانحرافات

نريد تحديد الانحرافين الرأسي والأفقي عند A للإطار الآتي. $E = 200\times10^6\text{ kN/ m}^2$ و$I = 200\times10^6\text{ mm}^4$.



لتحليل هذا الإطار يجب تحديد تعبيرات تحليلية للعزوم على طول كل عنصر للحمل الحقيقي والحملين الافتراضيين. أحد الحملين الافتراضيين قوة أفقية وحدية عند A، والآخر قوة رأسية وحدية عند A أيضًا. تُبين أدناه مخططات العزوم لمجموعة الأحمال اللازمة التي سنصفها تحليليًا

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



العنصر	$x=0$	M	$\delta\overline{M}_v$	$\delta\overline{M}_h$
AB	A	0	$-x$	0
BC	B	$-50x$	$-2-x$	0
CD	C	100	4	$-x$

الوحدات: kN وm. نعوض الآن

$$\underbrace{\Delta_v \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_v)m &= \int_0^2 (-x)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (-2-x)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (4)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{2,333\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(2,333)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= 0.058\ \text{m} = 5.8\ \text{cm}\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالمثل للإزاحة الأفقية:

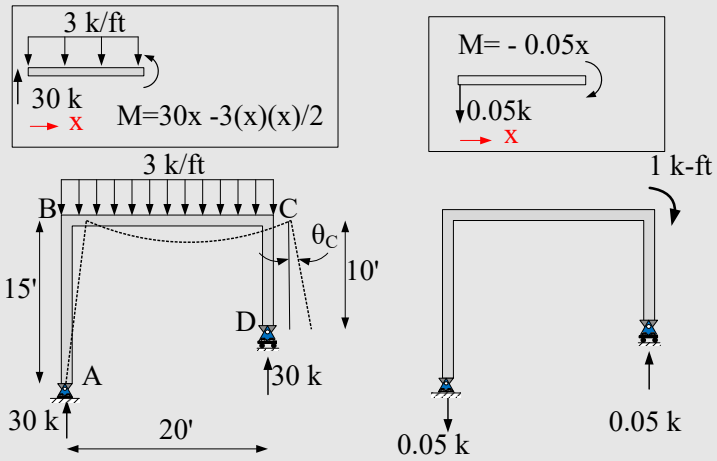
$$\underbrace{\Delta_h \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_h)m &= \int_0^2 (0)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (0)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (-x)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{-1,250\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(-1,250)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= -0.031\ \text{m} = -3.1\ \text{cm}\end{aligned}$$

لاحظ أن الانحراف الأفقي نحو اليسار، أي بعكس اتجاه القوة الافتراضية.

24.3.3 مثال 24.3: إطار؛ الدوران

نريد تحديد دوران العقدة C. $E = 29,000$ ksi و$I = 240$ in^4.



في هذه المسألة تكون القوة الافتراضية عزمًا وحديًا $\delta\overline{M}_e$ مطبقًا عند العقدة C. وينتج منه عزم داخلي $\delta\overline{M}_i$ يُعبر عنه كما يأتي

العنصر	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	$-0.05x$
CD	D	0	0

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يعطي التعويض:

$$\underbrace{\theta_C \delta\overline{M}_e}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

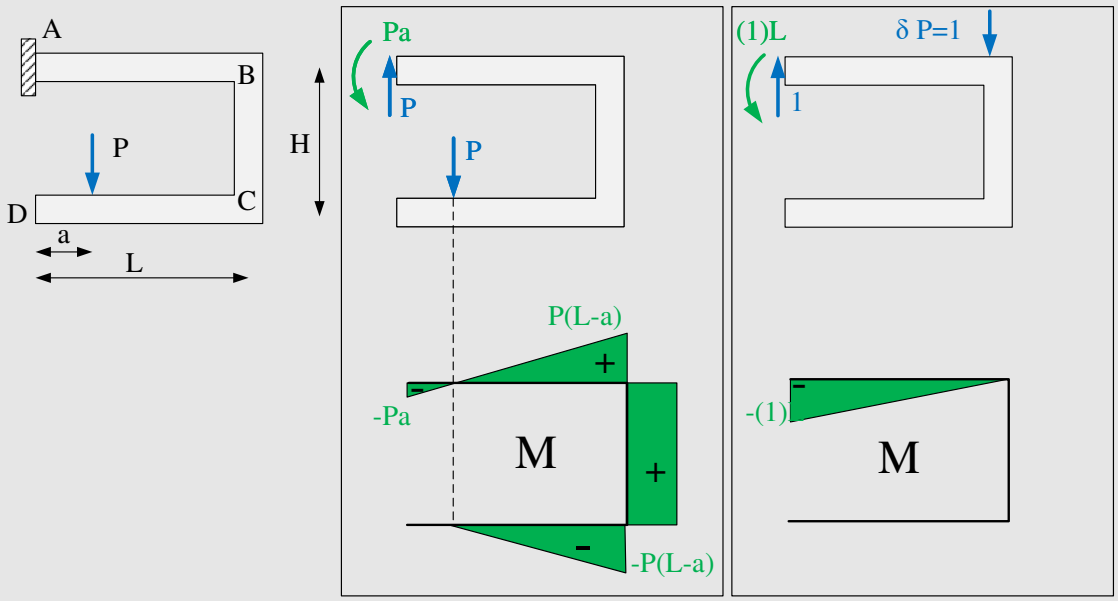
$$(1)k - ft(\theta_C)\text{rad} = \int_0^{20}(-0.05x)\frac{(30x - 1.5x^2)}{EI}dx \quad \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

$$= -\frac{(1,000)k^2\ \text{ft}^2(144)\ \text{in}^2/\ \text{ft}^2}{(29,000)\ \text{k}/\ \text{in}^2(240)\ \text{in}^4}$$

$$= -0.021 \text{ radians}$$

24.3.4 مثال 24.4: ركيزة انحنائية

نريد تحديد a بحيث يكون الانحراف الرأسي عند B صفرًا.



يمكن بسهولة تحديد ردود الأفعال ومخططات العزم الموافقة للقوتين الحقيقية والافتراضية، وهي مبينة في المخططات أعلاه وملخصة أدناه بصيغتها التحليلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر	عند $x=0$	M	$\delta\overline{M}$
DE	D	0	0
EC	E	$0-Px$	
CB	C	$-P(L-a)$	0
BF	B	$P(L-a-x)$	x
FA	F	Px	$L-a+x$

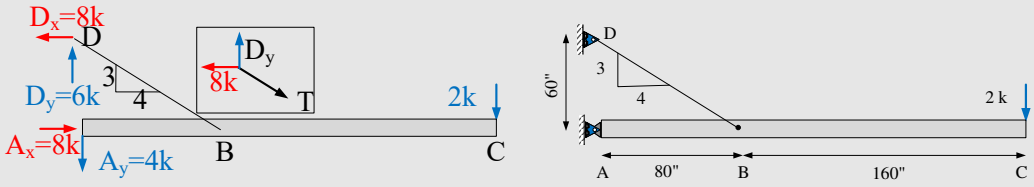
$$\underbrace{\Delta_B \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}*} == \int_L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx$$

$$\Delta_B(1) = \int_0^{L-a} \frac{P(L-a-x)x}{EI}dx + \int_0^{a} \frac{-Px(L-a+x)}{EI}dx$$

$$\Delta_B = \frac{PL^2}{6EI}(L-3a) \Rightarrow a = \frac{L}{3}$$

24.3.5 مثال 24.5: كمرة كابولية مدعومة بكابل

تُسند مظلة مدخل بكابل من الألومنيوم ($E = 10^7$ psi؛ $A = 1$ in^2)، والكمرة من الألومنيوم أيضًا ($E = 10^7$ psi؛ $A = 10$ in^2؛ $I = 171$ in^4). نريد تحديد الإزاحة عند C.



نحسب أولًا القوى المرتبطة بالحمل الحقيقي.

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow D_x(60) - 2(240) = 0 \Rightarrow D_x = 8k$$
$$(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; \Rightarrow -D_x + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 8k$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow -A_y + D_y - 2 = 0$$

لكن الكابل المائل لا يحمل إلا قوى محورية، ومن ثم

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}T - D_y &= 0\\ \frac{4}{5}T - D_x &= 8k\end{aligned}\right\} T = 10k$$

ومن ثم $D_y = 6k$ و$A_y = 4k$. ثم ندرج النتائج مع التعبيرات التحليلية الموافقة للقوى الداخلية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر	عند $x=0$	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	8-	4-	$-4x$	$-2x$
BC	B	0	0	$2x-320$	$x-160$
DB	D	10	5		

من هذين الجدولين

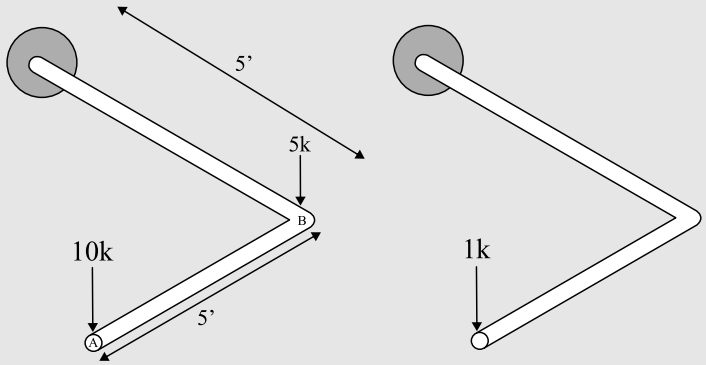
$$\underbrace{\delta\overline{P}\Delta_c}_{\delta W*}=\underbrace{\int_L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx+\int\delta\overline{M}\frac{M}{Ei}dx}_{\delta\overline{U}*}$$

$$\begin{aligned}
(1)\Delta_C &= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{A_cE}dx+\int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{A_bE}dx\\
&\quad+\int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{EI_b}+\int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{EI_b}dx\\
&= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{(1^2\text{in})(10^7\text{psi})}dx+\int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{(10^2\text{in})(10^7\text{psi})}dx\\
&\quad+\int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{(10^7\text{psi})(171^4\text{in})}+\int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{(10^7\text{psi})(171^4\text{in})}dx\\
\Delta_C &= 0.0005+0.0000256+0.0007984+0.001597\\
&= \underbrace{0.000526}_{\text{محوري}}+\underbrace{0.00239}_{\text{انحنائي}}\\
&= 0.0029\text{in}(\downarrow)
\end{aligned}$$

24.3.6 مثال 24.6: تشوهات اللي والانحناء

نريد الآن تحديد الانحراف الرأسي عند A في المنشأ المبين أدناه ($E=30,000$ ksi، $I=144$ in^4، $G=12,000$ ksi، $J=288$ in^4).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



1. في هذه المسألة يوجد تشوها الانحناء واللي معًا. لذلك يجب تحديد توزيعي العزم الداخلي واللي لكل من الحمل الحقيقي والحمل الافتراضي الوحدي.
2. نستخدم بعد ذلك العلاقة الآتية

$$\overbrace{\delta\overline{P}\Delta_A}^{\delta\overline{W}^*} = \overbrace{\underbrace{\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x}_{\text{الانحناء}} + \underbrace{\int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x}_{\text{اللي}}}^{\delta\overline{U}^*}$$

3. تُعطى تعبيرات العزم واللي كما يأتي

العنصر	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$	T	$\delta\overline{T}$
AB	A	$10x$	x	0	0
BC	B	$15x$	x	50	5

4. بالتعويض،

$$\begin{aligned}
\delta\overline{P}\Delta_A &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x + \int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x \\
1\Delta_A &= \int_0^5 x\frac{10x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 x\frac{15x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 (5)\frac{50}{GJ}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1,042)(1,728)}{(30,000)(144)} + \frac{(1,250)(1,728)}{(12,000)(288)} \\
&= \underbrace{0.417}_{\text{الانحناء}} + \underbrace{0.625}_{\text{اللي}} \\
&= 1.04 \text{ in}
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

24.3.7 مثال 24.7: تشوها الانحناء والقص في كمرة

حدد انحراف كمرة كابولية طولها L وخاضعة لقوة طرفية P، مع أخذ تشوهي الانحناء والقص معًا. افترض أن $G = 0.4E$ وأن مقطع الكمرة مربع مصمت.

1. معادلة الشغل الافتراضي هي

$$\underbrace{\delta\overline{P}}_{1}\cdot\Delta = \int_0^L \delta\overline{M}d\phi + \int_0^L \delta\overline{V}\gamma_{xy}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx + \int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x$$

2. يعطي التكامل الأول، عندما $M = Px$ و$\delta\overline{M} = (1)(x)$،

$$\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{P}{EI}\int_0^L x^2 dx$$
$$= PL^3/3EI$$

3. يمثل التكامل الثاني إسهام فعل القص في الشغل الافتراضي الداخلي الكلي، ومن ثم في الإزاحة الكلية.
4. كل من القص الحقيقي V والقص الافتراضي $\delta\overline{V}$ ثابت على طول العنصر، ولذلك

$$\int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{GA}\int_0^L 1(P)\mathrm{d}x = \frac{\lambda PL}{GA}$$

5. بما أن $\lambda = 1.2$ لكمرة مربعة، فإن

$$1\cdot\Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{1.2PL}{GA}$$
$$= \frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{3.6}{0.4A}\right] = red\frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{9}{A}\right]$$

6. لكمرة مربعة أبعادها h

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{و} A = h^2$$

وعندئذ

$$\Delta = \frac{PL}{3E}\left[\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right] = \frac{3PL}{Eh^2}\left[\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right]$$

7. باختيار $L = 20$ ft و$h = 1.5$ ($L/h = 13.3$ft)

$$\Delta = \frac{3PL}{Eh^2}[1.33\left(\frac{20}{1.5}\right)^2 + 1] = \frac{3PL}{Eh^2}(237 + 1)$$

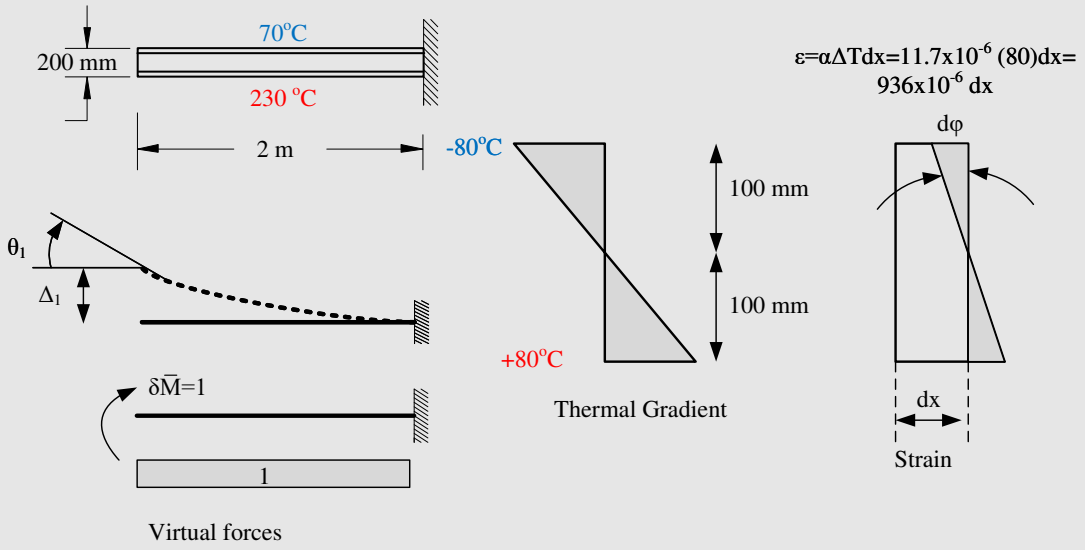
ومن ثم يساوي تشوه الانحناء 237 مرة إزاحة القص. وتبين هذه المقارنة سبب إهمالنا المعتاد لتشوه القص في الكمرات. كلما قصرت الكمرة أو ازداد عمقها، أي كلما انخفضت L/h، تناقص تشوه الانحناء بالنسبة إلى إزاحة القص. وعند $L/h = 5$ ينخفض تشوه الانحناء إلى $1.33(5)^2 = 33$ مرة إزاحة القص.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

24.3.8 مثال 24.8: التأثيرات الحرارية في كمرة

نع لوقنم يتآلا مسقلا White, Gergely **and** Sexmith, 1976 Structural Engineering.

نريد تحديد زاوية الدوران θ_1 عند طرف الكمرة الناتجة من التأثير الحراري في الكمرة الكابولية الآتية.



الكمرة قطاع فولاذي عريض الشفة، طولها 2 m وعمقها 200 mm. وكانت درجة حرارتها المنتظمة الابتدائية 40°C.

1. القوة الافتراضية الخارجية المتوافقة مع الإزاحة الحقيقية المطلوبة θ_1 هي عزم $\delta\overline{M} = 1$ عند طرف الكابولي، فتولد حد شغل خارجي يساوي العزم مضروبًا في الدوران. ونظام القوى الافتراضية الداخلي لهذه الكمرة هو عزم منتظم $\delta\overline{M}_{int} = 1$.
2. ينتج التشوه الداخلي الحقيقي من: (أ) متوسط درجة حرارة الكمرة 150°C، أي أعلى من الدرجة الابتدائية بـ110°C، و(ب) تدرج حراري مقداره 160°C عبر عمق الكمرة.
3. لا يولد الجزء الأول من التأثير الحراري إلا استطالة الكمرة، ولا يدخل معادلة الشغل لأن الحمل الافتراضي لا يولد قوة محورية تقابل تغيرًا محوريًا في طول الكمرة.
4. يولد التأثير الثاني، أي التدرج الحراري، دورانًا $d\phi$ وحد شغل افتراضي داخلي $\int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x$.

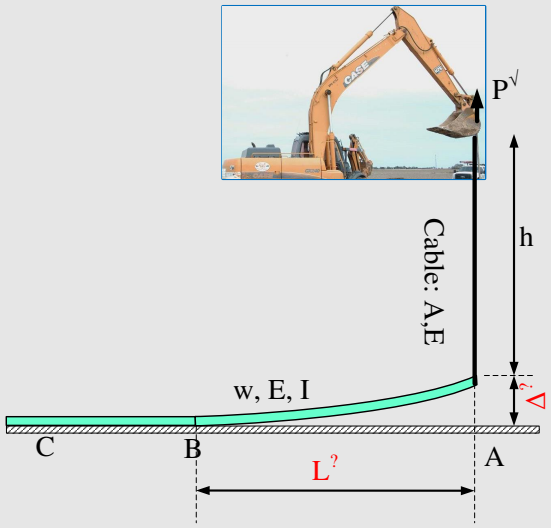
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. نحدد قيمة $d\phi$ من انفعال الليفة القصوى الحراري كما هو مبين أعلاه. ويساوي الدوران الزاوي في الطول $\mathrm{d}x$ انفعال الليفة القصوى الحراري مقسومًا على نصف عمق الكمرة، أي

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_1 &= \int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L (1)\frac{\alpha(T_b - T_t)}{h}\mathrm{d}x \\ &= \frac{(11.7\times 10^{-6})m/m(230-70)^o\mathrm{C}(2)\ \mathrm{m}}{(0.2)\ \mathrm{m}} \\ &= 0.01872 \text{ radians} \end{aligned}$$

6. يبرز هذا المثال النقاط الآتية:
   (a) تكون قيمة θ_1 نفسها لأي شكل من كمرات الفولاذ بعمق 200 mm يقع محور انحنائه المتعادل في منتصف العمق.
   (b) لا ينتج الانحناء إلا من التدرج الحراري، وهو مستقل عن القيم المطلقة لدرجة الحرارة.
   (c) حساب الدورانات بطريقة القوى الافتراضية بسيط ومباشر؛ فالقوة الافتراضية المطبقة عزم يؤثر عند النقطة المطلوب حساب الدوران فيها.
   (d) حُسب التشوه الزاوي الداخلي $d\phi$ لتأثير غير الإجهادات الناتجة من الحمل. ومن الواضح إمكان توسيع طريقة القوى الافتراضية لمعالجة الإزاحات غير المرنة؛ إذ لا نحتاج إلا إلى طريقة لتحديد التشوهات الداخلية غير المرنة.

24.3.9 مثال 24.9: خط أنابيب



افترض أننا مهندسو موقع نمد خط أنابيب وزنه الذاتي w لكل وحدة طول، وعزم قصوره I، ومعامل مرونته E_p، ونسبة بواسون له ν. يقع الطرف BC مستويًا على الأرض، بينما يُرفع الجزء AB مسافة Δ بقوة $P^{\checkmark}$ مطبقة عبر كابل طوله h ومساحته A ومعامل مرونته E_c.

يطلب منا مشغل الرافعة ما يأتي:

1. تحديد طول خط الأنابيب $L^{?}$ المنفصل عن الأرض (AB) بدلالة القوة المعلومة $P^{\checkmark}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. رسم مخططي القص والعزم للجزء المرفوع من خط الأنابيب.
3. حساب إزاحة النقطة A، أي $\Delta^?$، بدلالة P وw وL وh وE وA وI.

الحل كما يأتي:

1. عند B يكون الانحناء صفرًا ($d\theta/dx = 0$)، ومن ثم يكون العزم صفرًا.

$$PL = wL^2/2 \Rightarrow L = 2P/w$$

والركيزة اليمنى عند B مفصل. لاحظ عند نقطة الانفصال:

$$+ve \uparrow \sum F_Y = 0; P - wL + R_B = 0; \Rightarrow R_B = w\left(\frac{2P}{w}\right) - P = P \uparrow$$

توجد بالفعل قوة مفردة مقدارها P.

2. الانحراف مع أخذ $x = 0$ عند A:

$$\delta\overline{P}\Delta_C = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}\mathrm{d}x + \delta\overline{P}^{(e)}\frac{Ph}{AE}$$

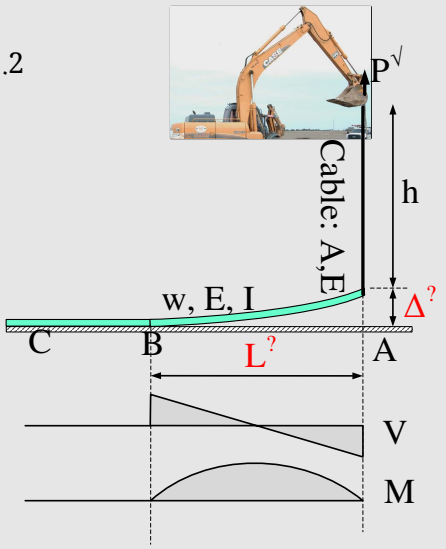
$$M(x) = Px - w\frac{x^2}{2}$$

$$\delta\overline{M}(x) = (1)x$$

$$\delta\overline{P} = 1$$

$$(1)\Delta_C = \int_0^L x\frac{Px - w\frac{x^2}{2}}{EI}\mathrm{d}x + (1)\frac{Ph}{AE}$$

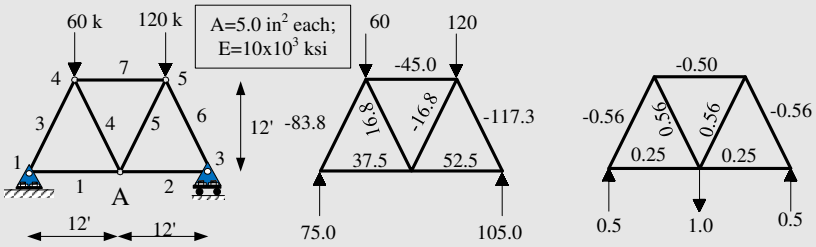
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{Ph}{AE}$$



24.3.10 مثال 24.10: جملون؛ بسيط

نريد تحديد الانحراف عند العقدة A للجملون الآتي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



يلخص الجدول الآتي الحسابات

العنصر	$\delta\overline{P}^{(e)}$ kips	$P^{(e)}$, kips	L, ft	A, in^2	E, ksi	$\delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$
1	0.25+	37.5+	12	5.0	10×10^3	$+22.5\times10^{-4}$
2	0.25+	52.5+	12	5.0	10×10^3	$+31.5\times10^{-4}$
3	0.56-	83.8-	13.42	5.0	10×10^3	$+125.9\times10^{-4}$
4	0.56+	16.8+	13.42	5.0	10×10^3	$+25.3\times10^{-4}$
5	0.56+	16.8-	13.42	5.0	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	0.56-	117.3-	13.42	5.0	10×10^3	$+176.6\times10^{-4}$
7	0.50-	45.0-	12	5.0	10×10^3	$+54.0\times10^{-4}$
						$+410.5\times10^{-4}$

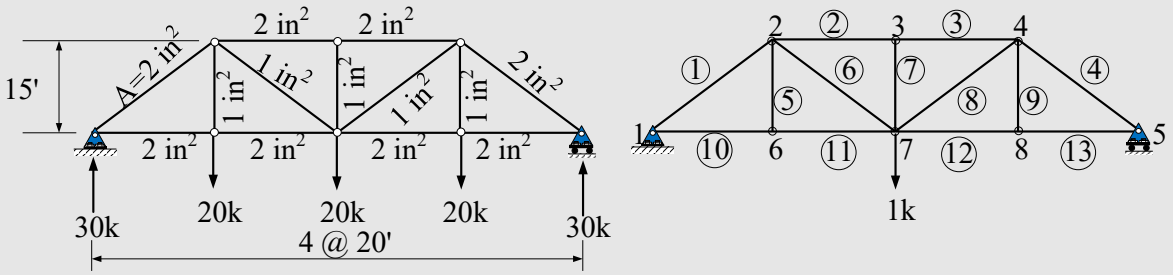
ومن ثم

$$(\delta\overline{P})\ \mathrm{k}(\Delta)\ \mathrm{in} = \sum_{1}^{7} \delta\overline{P}^{(e)}\frac{PL}{AE}$$

$$(1)\ \mathrm{k}(\Delta)\ \mathrm{in} = (410.5\times10^{-4})\frac{\mathrm{k}^2\ \mathrm{ft}}{\mathrm{in}^2\ \mathrm{k}/\ \mathrm{in}^2}(12\ \mathrm{in}/\ \mathrm{ft}) = 0.493\ \mathrm{in}$$

24.3.11 مثال 24.11: جملون؛ معقد

نريد تحديد الانحراف الرأسي للعقدة 7. $E = 30,000$ ksi.



يلزم تحليلان: أحدهما بالحمل الحقيقي، والآخر بحمل رأسي وحدي عند العقدة 7. وتُلخص نتائج التحليلين أدناه. لاحظ الاستفادة من تماثل الحمل والمنشأ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر	A in^2	L ft	$P^{(e)}$ k	$\delta\overline{P}^{(e)}$ k	$\frac{\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2	n	$\frac{n\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2
4 & 1	2	25	50-	0.083-	518.75	2	1,037.5
13 & 10	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
12 & 11	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
9 & 5	1	15	20	0	0	2	0
8 & 6	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693.0
3 &2	2	20	53.3-	1.33-	708.9	2	1,417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
المجموع							4,220.3

$$\underbrace{\Delta\delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

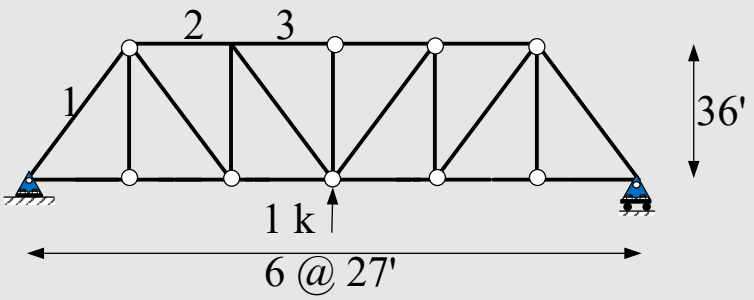
$$= \sum \delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \frac{(4,220.3)\ \text{k}^2\ \text{ft/ in}^2(12)\ \text{in/ft}}{30,000\ \text{ksi}}$$

$$= 1.69\ \text{in}$$

24.3.12 مثال 24.12: جملون بتحدب ابتدائي

يُراد توفير تحدب مقداره 3 in. عند مركز الجملون المبين أدناه، بتصنيع القائمين الطرفيين وعناصر الوتر العلوي بأطوال زائدة. فما مقدار الزيادة المطلوبة في طول كل قائم طرفي وكل لوحة من الوتر العلوي؟



نفترض أولًا زيادة كل قائم طرفي وكل جزء من الوتر العلوي بمقدار 0.1 in.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}$	ΔL	$\delta\overline{P}^{(e)}_{int}\Delta L$
1	0.625+	0.1+	0.0625+
2	0.750+	0.1+	0.0750+
3	1.125+	0.1+	0.1125+
			0.2500+

وهذا يعطي

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (2)(0.250)\ \text{k in} \Rightarrow \Delta = 0.50\ \text{in}$$

بما أن المنشأ خطي ومرن، تكون الزيادة المطلوبة في طول كل جزء

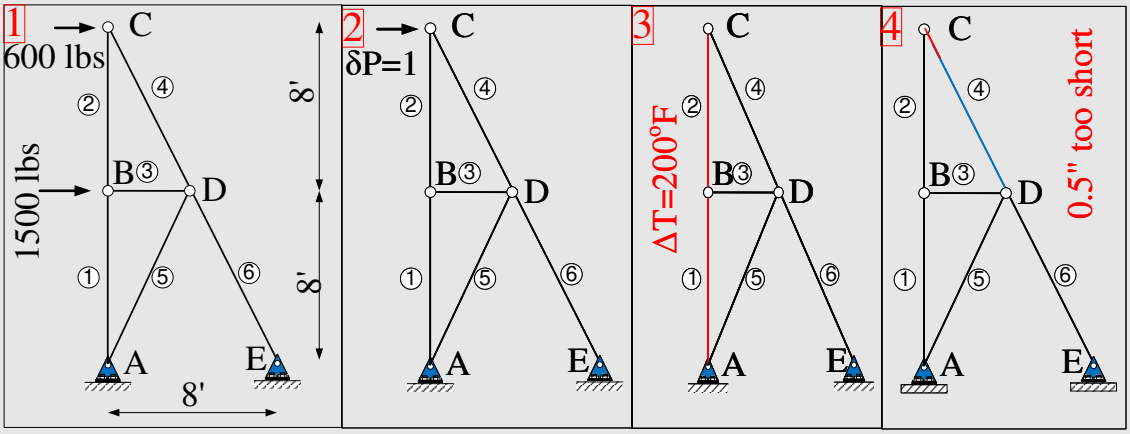
$$\left(\frac{3.0}{0.50}\right)(0.1) = 0.60\ \text{in}$$

إذا استخدمنا القيمة العملية 0.625 in.، يكون التحدب النظري

$$\frac{(6.25)(0.50)}{0.1} = 3.125\ \text{in}$$

24.3.13 مثال 24.13: جملون بإجهادات ثانوية

نريد تحديد الإزاحة الأفقية للعقدة C تحت حالات تحميل مختلفة: (1) القوى؛ (2) ارتفاع درجة الحرارة في عنصرين؛ و(3) خطأ التصنيع. وستُدرج قوى العناصر المحسوبة منفصلة في جداول مناسبة.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القوى الجانبية

العنصر	$\delta\overline{P}$ (lbf)	P (lbf)	L (in)	AE	$\delta\overline{p}\frac{PL}{AE}$
1	2	1,200.0	96.00	AE	AE/230,400
2	2	1,200.0	96.00	AE	AE/230,400
3	0	1,500.0-	48.00	AE	0
4	2.24-	1,341.6-	107.33	AE	AE/322,560
5	0	1,677.0	107.33	AE	0
6	2.24-	3,018.7-	107.33	AE	AE/725,760.0
					AE/1,509,120

ومن ثم $\Delta_C = \frac{1{,}509{,}120\ \text{lb-in}}{AE} \rightarrow$.

الحمل الحراري

العنصر	L (in)	α (F°/1)	ΔT (in)	$\Delta L = \alpha \Delta T L$ (in)	$\delta\overline{P}$ (lbf)	$\delta\overline{P}\Delta L$ (lbf in)
1	96	$^{-6}10$	200	0.0192	2	0.0384
2	96	$^{-6}10$	200	0.0192	2	0.0384
3	48	$^{-6}10$	0	0	0	0
4	107.33	$^{-6}10$	0	0	2.24-	0
5	107.33	$^{-6}10$	0	0	0	0
6	107.33	$^{-6}10$	0	0	2.24-	0
						0.0768

بما أن $\delta\overline{P} = 1$، فإن $\Delta_C = 0.0768\ \text{in} \rightarrow$.

خطأ التصنيع

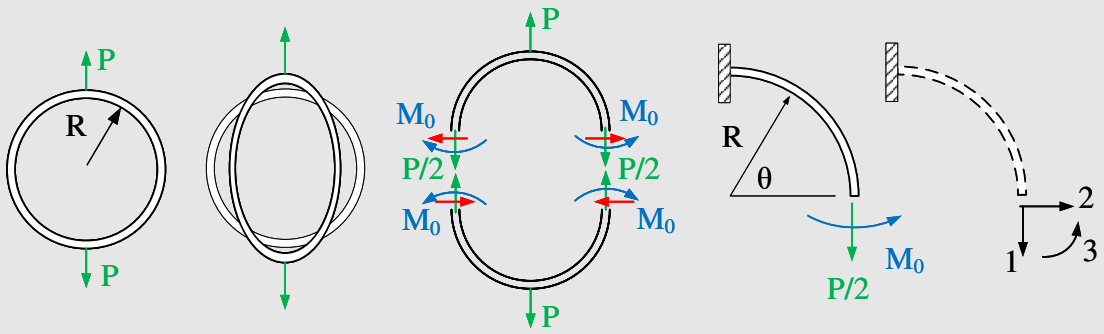
العنصر	L (in)	ΔL (in)	$\Delta\overline{P}$ (lbf)	$\Delta\overline{P}\delta L$ (lbf in)
1	96	0	2	0
2	96	0	2	0
3	48	0	0	0
4	107.33	0.5-	2.24-	1.12
5	107.33	0	0	0
6	107.33	0	0	0
				0.0768

بما أن $\delta\overline{P} = 1$، فإن $\Delta_C = 1.12\ \text{in} \rightarrow$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

24.3.14 مثال 24.14: حلقة دائرية

تخضع حلقة لقوتين مركزتين متعاكستين P. نريد تحديد الاستطالة الرأسية Δ_y والانكماش الأفقي Δ_x.



Strength of materials
Den Hartog, 1961 باستخدام التماثل، نقطع الحلقة إلى نصفين ونرسم مخططات الجسم الحر:

1. إذا افترضنا اتجاهًا لقوة القص عند أحد الأطراف الأربعة ورسمنا بقية القوى وفقًا له، نلاحظ أن النصف العلوي يتمدد جانبيًا بينما ينكمش النصف السفلي عند الموضع نفسه. لذلك تساوي قوى القص صفرًا.
2. تساوي القوى المحورية $P/2$، ولا يتبقى سوى تحديد العزوم.
3. نحلل إذن ربعًا واحدًا فقط خاضعًا لقوة رأسية $P/2$ وعزم M_0 لم يُحدد بعد بدلالة R وP.

يتابع الحل كما يأتي:

1. العزوم (موجبة إذا سببت شدًا في الداخل):

$-\frac{PR}{2}(1-\cos\theta)$	$M_{P/2}$	حمل رأسي $P/2$
M_0	M_0	عزم طرفي (مع عقارب الساعة)
$-R(1-\cos\theta)$	$\delta\overline{M}_V$	قوة رأسية افتراضية وحدية (إلى أسفل)
$R\sin\theta$	$\delta\overline{M}_H$	قوة أفقية افتراضية وحدية (إلى الخارج)
1	$\delta\overline{M}_M$	دوران افتراضي وحدي

2. الدوران الناتج من الحمل الرأسي:

$$f_{32}=\theta_{P/2}=\int \delta M_M\frac{M_{P/2}}{EI}Rd\theta=-\int_0^{\pi/2}(1)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta=-\frac{PR^2}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta$$
$$=-\frac{PR^2}{2EI}\left[\theta+\sin\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

3. الدوران الناتج من العزم M_0

$$f_{33}=\theta_{M_0}=\int M_M\frac{M_0}{EI}Rd\theta=\int_0^{\pi/2}(1)\frac{M_0}{EI}Rd\theta=\frac{\pi}{2}\frac{M_0R}{EI}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. من التماثل يجب أن يساوي مجموع الدورانين صفرًا

$$\theta_{P/2} + \theta_{M_0} = 0$$
$$-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\frac{M_0 R}{EI} = 0$$
$$M_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) PR = 0.182PR \tag{24.2}$$

5. الانحراف الرأسي الناتج من الحمل الرأسي:

$$\begin{aligned} f_{22} = \Delta^V_{P/2} &= \int \delta M_V \frac{M_{P/2}}{EI} = \int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta \\ &= \frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta \\ &= \frac{PR^3}{2EI}\left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) \end{aligned}$$

6. الانحراف الأفقي الناتج من الحمل الرأسي

$$\begin{aligned} f_{12} = \Delta^H_{P/2} &= \int \delta M_H \frac{M_{P/2}}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R\sin\theta\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta \\ &= -\frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ &= -\frac{PR^3}{2EI}\left[-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = -\frac{PR^3}{4EI} \end{aligned}$$

7. الانحراف الرأسي الناتج من العزم

$$\begin{aligned} f_{23} = \Delta^V_{M_0} &= \int \delta M_V \frac{M_0}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta)M_0 Rd\theta \\ &= \frac{M_0R^2}{EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta \\ &= \frac{M_0R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

8. الانحراف الأفقي الناتج من العزم

$$\begin{aligned} f_{13} = \Delta^H_{M_0}\int \delta M_H \frac{M_0}{EI} &= \int_0^{\pi/2} R\sin\theta M_0 Rd\theta \\ &= \frac{M_0R^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta \\ &= \frac{M_0R^2}{EI} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9. الانحراف الأفقي الكلي

$$\Delta^H = 2(\Delta^H_{P/2} + \Delta^H_{M_0}) = 2\left[-\frac{PR^3}{4EI} + \frac{M_0R^2}{EI}\right]$$

بالتعويض بحل M_0 من المعادلة 24.2

$$\Delta^H = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = -0.135\frac{PR^3}{EI} \quad \text{انكماش}$$

10. الانحراف الرأسي الكلي

$$\Delta^V = 2(\Delta^V_{P/2} + \Delta^V_{M_0} = 2\left[\frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) + \frac{M_0R^2}{EI}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

بالتعويض بحل M_0 من المعادلة 24.2

$$\Delta^V = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0.150\frac{PR^3}{EI} \quad \text{استطالة}$$

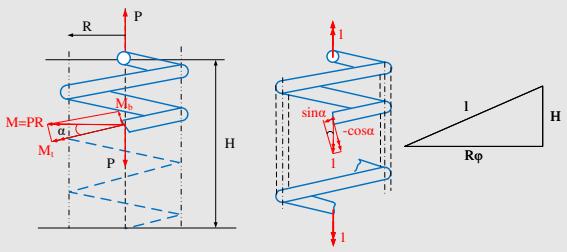
11. لاحظ أننا أدخلنا ترميزًا سيُستخدم لاحقًا، حيث تمثل f_{ij} إزاحة في الاتجاه i ناتجة من قوة في الاتجاه j، فنحصل على

$$\begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

هذه ليست مصفوفة مرونة بعد، لأن القوى المطبقة ليست وحدية ولأن العمود الأول مفقود، إذ لا توجد قوة أفقية مطبقة.

24.3.15 مثال 24.15: نابض

يُشد نابض حلزوني زاوية لولبه α ونصف قطر لفاته R بقوة P. نريد تحديد تغير ارتفاع النابض وقطره، وكذلك تغير عدد لفاته.



نعامل النابض بوصفه قضيبًا ثلاثي الأبعاد. يوجد عند كل مقطع من لفة النابض المشدود عزم لي $M_t = PR\cos\alpha$ وعزم انحناء $M_b = PR\sin\alpha$.

1. نحدد أولًا الزيادة في ارتفاع النابض

$$\Delta H = \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI} ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{EI} ds$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $\delta\overline{M}_b$ و$\delta\overline{M}_t$ عزما الانحناء واللي الناتجان من القوى الافتراضية الوحدية المطبقة بدلًا من القوى P، ويساويان

$$\delta\overline{M}_b = R\sin\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = R\cos\alpha$$

ومن ثم، بعد التعويض والتكامل

$$\Delta H = \frac{PR^2 l}{EI}\sin^2\alpha + \frac{PR^2 l}{GJ}\cos^2\alpha \tag{24.3}$$

حيث l الطول الكلي للفات النابض.

2. نوجد بعد ذلك الزاوية التي يدور بها الطرف العلوي للنابض بالنسبة إلى الطرف السفلي في المستوى الأفقي. لذلك نطبق عزومًا وحدية عند طرف النابض:

$$\delta\overline{M}_b = -\cos\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = \sin\alpha$$

و

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI}ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{GJ}ds \\ &= PRl\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \tag{24.4}$$

3. بالنظر إلى النابض بعد فرده، يكون لدينا

$$R^2\phi^2 + H^2 = l^2$$

نأخذ التفاضل، وبما أن l يظل ثابتًا

$$2R\phi^2\Delta R + R^2 2\phi\Delta\phi + 2H\Delta H = 0$$

حيث تمثل Δ في هذه الحالة تغير المعلمة المحدودة الموافقة. ومن هذا التعبير نحصل على

$$\Delta R = -\frac{R}{\phi}\Delta\phi - \frac{H}{R\phi^2}\Delta H$$

4. بالتعويض عن $\Delta\phi$ وΔH نحصل على

$$\Delta R = -\frac{PR^2 l}{\phi}\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{PHRl}{\phi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2\alpha}{GJ}\right) \tag{24.5}$$

5. من المثلث ينتج أن

$$l = \frac{\phi R}{\cos\alpha}, \qquad H = \phi R\tan\alpha$$

ولدينا أيضًا

$$\phi = 2\pi n, \qquad \Delta\phi = 2\pi\Delta n$$

حيث n عدد اللفات.

6. بحذف l وH وϕ من المعادلات 24.3 و24.4 و24.5 نحصل على

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{PR^3 n 2\pi}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2}{GJ}\right) \\ \Delta n &= PR^2 n\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha \\ \Delta R &= -\frac{2PR^3\sin\alpha}{GJ} + \frac{PR^3}{EI}\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7. لنابض مصنوع من سلك دائري قطره d، يكون

$$GJ = G\frac{\pi d^4}{32}$$
$$EI = 2G(1+\nu)\pi\frac{d^4}{64} = G(1+\nu)\frac{\pi d^4}{32}$$

ونحصل على

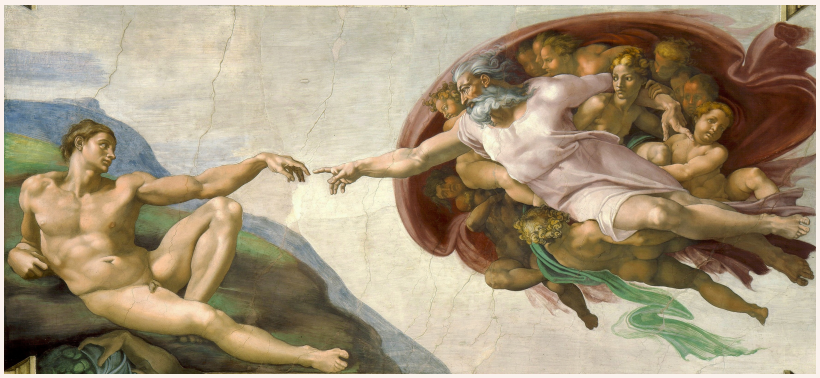
$$\Delta H = +\frac{64PR^3n}{Gd^4}\frac{1+\nu\cos^2\alpha}{(1+\nu)\cos\alpha}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2n}{G\pi d^4}\frac{\nu\sin\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{\sin\alpha}{1+\nu}\frac{1+2\nu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

تشير الإشارات أمام الأطراف اليمنى للتعبيرات السابقة إلى أن طول النابض يزداد أثناء شده ($\Delta H > 0$)، ويزداد عدد لفاته ($\Delta n > 0$)، وينقص نصف قطره ($\Delta R < 0$).

8. إذا كانت الزاوية α صغيرة، فعندئذ

$$\Delta H = +\frac{64PR^3n}{Gd^4}$$
$$\Delta n = +\frac{32PR^2n}{G\pi d^4}\frac{\nu\alpha}{1+\nu}$$
$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{1+2\nu}{1+\nu}\alpha$$

راجع أيضًا المثال 22.3.2.



خلق آدم، ميكيلانجيلو، لوحة جدارية، كنيسة سيستينا، مدينة الفاتيكان.

استعارة قوية للشغل الافتراضي؛ إذ ترمز اليدان اللتان تكادان تتلامسان إلى إزاحة متناهية الصغر، وهي مفهوم جوهري في الشغل الافتراضي حيث تساعد الاضطرابات الصغيرة المتخيلة على تحليل الاتزان.

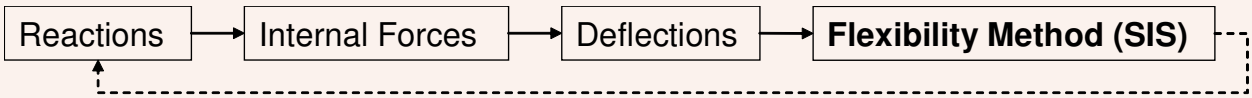
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

25 طريقة المرونة

ملخص

يتناول هذا الفصل حل المنشآت غير المحددة استاتيكياً باستعمال طريقة المرونة، التي تُعرف أيضاً بطريقة القوى، وهي طريقة لا تلائم التنفيذ الحاسوبي بصورة مباشرة. تقوم الطريقة على تحويل المنشأ غير المحدد استاتيكياً إلى منشأ أساسي محدد استاتيكياً، وذلك بتحرير عدد كافٍ من المساند أو القوى الداخلية. ثم تُحسب إزاحات هذا المنشأ الأساسي تحت الأحمال الخارجية المعطاة. بعد ذلك تُطبّق قوى وحدية، واحدة في كل مرة، عند مواضع المساند أو القوى الداخلية المحررة، وتُحسب الإزاحات الناتجة عنها. وتُصاغ معادلات التوافق وتُحل باستعمال إزاحات الأحمال الفعلية والقوى الوحدية لضمان بقاء المنشأ الكلي متوافقاً وفي حالة اتزان. ومن حل هذه المعادلات تُستخرج القوى الزائدة المجهولة، ثم تُستخدم لحساب القوى الداخلية والإزاحات النهائية في المنشأ الأصلي غير المحدد استاتيكياً. يبدأ الفصل بعرض مزايا المنشآت غير المحددة استاتيكياً، ثم يقدّم الطريقة من خلال أمثلة توضيحية بسيطة قبل صياغتها بصورة عامة. كما يتضمن عرضاً موجزاً لمعادلة العزوم الثلاثة. ويُختتم الفصل بأمثلة عديدة متزايدة التعقيد.

25.1 مقدمة 901
25.2 طريقة القوى/المرونة 907
25.2.1 أمثلة 908
25.3 معادلات العزوم الثلاثة 925
25.3.1 مثال 25.9: كمرة مستمرة 928
25.3.2 مثال 25.10: كمرة مستمرة . . . 928



للسياق التاريخي، انظر §11.4.5

25.1 مقدمة

1 يحتوي المنشأ غير المحدد استاتيكياً على مجاهيل أكثر من عدد معادلات الاتزان (ومعادلات الشروط، إن وُجدت).

2 من مزايا المنشآت غير المحددة استاتيكياً ما يأتي:

زيادة التكرار الإنشائي: تحتوي المنشآت غير المحددة استاتيكياً على مساند ووصلات تزيد على الحد الأدنى اللازم للاتزان. ولذلك يمكن، عند فشل مسند أو عضو، إعادة توزيع الحمل على بقية المساند أو الأعضاء، مما يعزز السلامة والموثوقية الكليتين.

تحسين توزيع الأحمال: توزّع هذه المنشآت الأحمال بصورة أكثر تجانساً على كامل المنشأ، فتقل احتمالات الفشل الموضعي. وقد يتيح انتظام توزيع الإجهاد والانفعال استخداماً أكفأ وأكثر اقتصاداً للمواد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

صلابة أكبر: تميل المنشآت غير المحددة استاتيكياً إلى صلابة أعلى لأنها تقاوم التشوه تحت الحمل بصورة أفضل. وتفيد هذه الزيادة في التطبيقات التي ينبغي فيها الحد من الانحراف، مثل الجسور والمباني الشاهقة.

تحسين الأداء الإنشائي: بفضل تعدد مسارات الحمل، تستطيع هذه المنشآت مقاومة الأحمال الديناميكية والاهتزازات والصدمات بصورة أفضل. وتكتسب هذه الخاصية أهمية خاصة عند تغير الأحمال مع الزمن بفعل الرياح أو المرور أو النشاط الزلزالي.

الجمال والمرونة التصميمية: تتيح المساند والأعضاء الإضافية تصاميم أكثر تعقيداً وجاذبية، وتمكّن المعماريين والمهندسين من ابتكار أشكال قد يتعذر تحقيقها بمنشآت محددة استاتيكياً.

الاستغلال الأمثل للمواد: يسمح تحسن توزيع الأحمال والصلابة باستخدام المواد بكفاءة أكبر، وقد ينتج عنه منشأ أخف يستهلك مواد أقل من دون الإخلال بالمقاومة والسلامة.

استجابة أفضل لهبوط المساند وتغيرات الحرارة: تستطيع المنشآت غير المحددة استاتيكياً استيعاب الهبوط التفاضلي للمساند والتمدد أو الانكماش الحراري بصورة أفضل، مما قد يمنع التشقق وغيره من الأضرار.

زيادة السلامة: يعزز التكرار الإنشائي وإمكان إعادة توزيع الأحمال السلامة العامة، وهو أمر بالغ الأهمية في الجسور والمباني والمنشآت الأساسية التي قد تكون لعطلها عواقب جسيمة.

3 أما عيبها الرئيس فهو زيادة تعقيد التحليل.

4 يجب أن تحقق طرق تحليل المنشآت غير المحددة استاتيكياً ثلاثة متطلبات:

1. اتزان القوى.
2. علاقات القوة–الإزاحة (أو الإجهاد–الانفعال)، مع افتراض السلوك المرن الخطي في هذا المقرر.
3. توافق الإزاحات، أي عدم وجود انقطاع.

5 ويمكن تحقيق ذلك من خلال فئتين من طرق الحل:

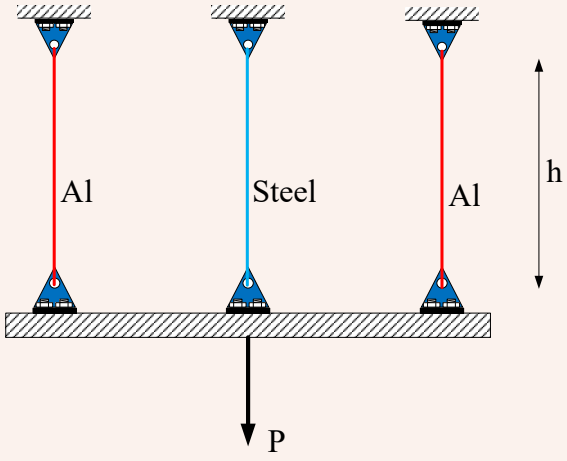
طريقة القوى أو المرونة: وهي موضوع هذا الفصل.

طريقة الإزاحة أو الصلابة: وتُعرض في الفصلين 43 و27. يتناول أحدهما الطرق اليدوية، أي توزيع العزوم والميل والانحراف، ويتناول الآخر الطريقة الحاسوبية.

مثال توضيحي 1

6 نوضح طريقة المرونة أولاً بمسألة منشأ من الكابلات غير محدد استاتيكياً، ترتكز فيه صفيحة صلبة على كابلين من الألمنيوم وكابل من الفولاذ. والمطلوب تحديد القوة في كل كابل، كما في الشكل 25.1.

1. لدينا ثلاثة مجاهيل ومعادلتان مستقلتان فقط للاتزان، ومن ثم فالمسألة غير محددة استاتيكياً من الدرجة الأولى.



شكل 25.1: منشأ من ثلاثة كابلات غير محدد استاتيكياً

2. بتطبيق معادلات الاتزان:

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0; &\Rightarrow P_{Al}^{\text{left}} = P_{Al}^{\text{right}} \\ \Sigma F_y = 0; &\Rightarrow 2P_{Al} + P_{St} = P \end{aligned} \tag{25.1}$$

وبذلك يصبح لدينا فعلياً مجهولان ومعادلة واحدة.

3. نحتاج إلى معادلة ثالثة لحل المجاهيل الثلاثة، ونستمدها من *توافق الإزاحات* في الكابلات الثلاثة، أي يجب أن تكون الإزاحات متساوية:

$$\Delta_{Al} = \Delta_{St}$$

4. وأخيراً تُستخرج هذه الإزاحات من علاقات *القوة–الإزاحة*:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\underbrace{\frac{P_{Al}L}{E_{Al}A_{Al}}}_{\Delta_{Al}} = \underbrace{\frac{P_{St}L}{E_{St}A_{St}}}_{\Delta_{St}} \Rightarrow \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

أو

$$-(EA)_{St}P_{Al} + (EA)_{Al}P_{St} = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. يعطي حل المعادلتين 25.1 و4:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

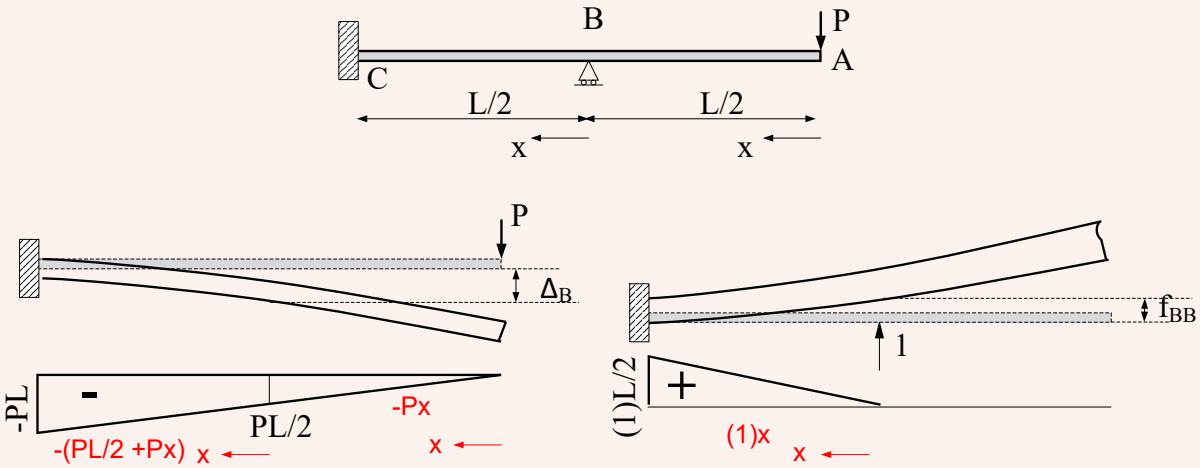
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(EA)_{Al} + (EA)_{St}}}_{\text{Determinant}} \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. نلاحظ أن حل هذه المسألة، بخلاف المسائل المحددة استاتيكياً، يعتمد على *الخواص المرنة*.

مثال توضيحي 2

7 المثال الثاني هو كمرة كابولية مسندة طولها L، كما في الشكل 25.2.



شكل 25.2: كمرة كابولية مسندة

1. نزيل أولاً المسند المتحرك، فيبقى الكابولي بوصفه المنشأ الأساسي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. ثم نحسب الانحراف عند النقطة B بسبب الحمل المطبق P باستعمال طريقة القوة الافتراضية:

$$
\begin{aligned}
1.\Delta &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{L/2} 0\frac{-px}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^{L/2} -(x)\frac{\left(\frac{PL}{2}+Px\right)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{PL}{2}x + Px^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI}\left[\frac{PLx^2}{4} + \frac{Px^3}{3}\right]\Bigg|_0^{L/2} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}
\end{aligned}
$$

3. نطبق بعد ذلك حملاً وحدياً عند النقطة B ونحسب الإزاحة عندها بطريقة القوة الافتراضية:

$$
1f_{BB} = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^{L/2}(x)\frac{x}{EI}\mathrm{d}x = \frac{(1)L^3}{24EI}
$$

4. بما أن الإزاحة عند النقطة B تساوي صفراً، فيجب ضرب الإزاحة f_{BB} في R_B بحيث:

$$
R_B f_{BB} = \Delta
$$

لضمان توافق الإزاحات، ومنه:

$$
R_B = \frac{\Delta}{f_{BB}} = \frac{\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}}{\frac{(1)L^3}{24EI}} = \frac{5}{2}P
$$

مثال توضيحي 3

8 نريد تحديد مصفوفة المرونة للكمرة المحددة استاتيكياً المبينة في الشكل 25.3. تكون مصفوفة المرونة هنا من الرتبة 2×2، ويمثل كل حد d_{ij} الإزاحة عند درجة الحرية i الناتجة من قوة وحدية عند درجة الحرية j.

- لدينا درجتا حرية تقابلان الدوران عند كل طرف.
- تُكتب علاقة *القوة–الإزاحة* على الصورة:

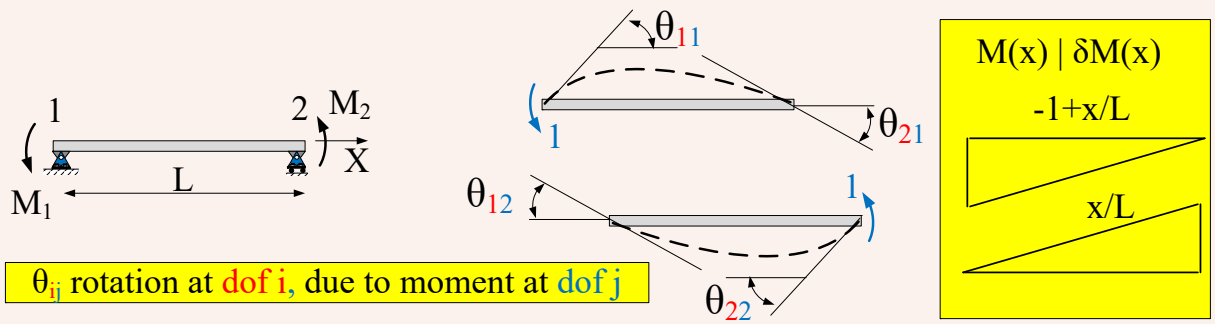
$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{25.2}
$$

حيث تمثل M_i العزوم الخارجية المطبقة، و$d_{ij} = \theta_{ij}$، وتمثل θ_i الدورانات المجهولة المناظرة عند درجة الحرية i بسبب عزم عند درجة الحرية j.

- باستعمال *الشغل الافتراضي المتمم*، أو على وجه التحديد طريقة القوة الافتراضية، لتحليل هذه المسألة:

$$
d_{ij} = \underbrace{\int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z}dx}_{\text{داخلي}} = \underbrace{\delta\overline{P}_i\,\Delta_j + \delta\overline{M}_i\,\theta_j}_{\text{خارجي}}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 25.3: مسألة توضيحية لطريقة المرونة

حيث تمثل $\delta\overline{M}(x)$ و$\frac{M(x)}{EI_z}$ و$\delta\overline{P}$ وΔ، على الترتيب، القوة الداخلية الافتراضية والإزاحة الداخلية الحقيقية والحمل الخارجي الافتراضي والإزاحة الخارجية الحقيقية.

- هنا تُؤخذ كل من القوة الافتراضية الخارجية والعزم الافتراضي مساوية للوحدة.

$$EI\underbrace{1}_{\delta\overline{M}}\underbrace{d_{11}}_{\Delta}=\int_0^L\underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{\delta\overline{M}(x)}\underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{M(x)}dx=\frac{L}{3} \tag{25.3}$$

- وبالمثل نحصل على:

$$EId_{22}=\int_0^L\left(\frac{x}{L}\right)^2dx=\frac{L}{3}$$
$$EId_{12}=\int_0^L\left(-1+\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}dx=-\frac{L}{6}\quad=\quad EId_{21}$$

- يمكن تلخيص هذه النتائج في صورة مصفوفية:

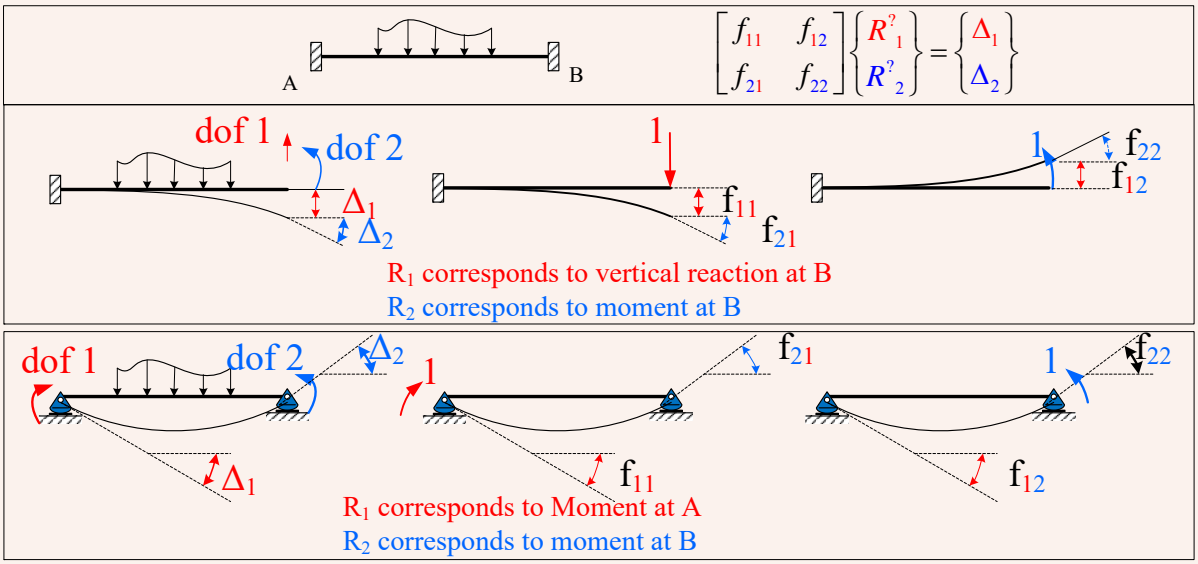
$$[\mathbf{d}]=\frac{L}{6EI_z}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

ثم يمكن حل الإزاحات، أي الدورانات، الناتجة من العزوم الخارجية.

مثال توضيحي 4

9 يوضح الشكل 25.4 الطريقة مرة أخرى بصورة موجزة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 25.4: توضيح طريقة المرونة لمجهولين

25.2 طريقة القوى/المرونة

10 استناداً إلى الأمثلة التوضيحية السابقة، نطوّر الآن طريقة عامة للتحليل *المرن* الخطي للمنشآت غير المحددة استاتيكياً.

تعريف 25.1: معادلات المرونة

1. نحدد درجة عدم *التحديد الاستاتيكي* الخارجية و/أو الداخلية، n.
2. نختار n من *القوى* و/أو *العزوم الزائدة المجهولة* في المنشأ المحمّل، مع n من التحريرات المناظرة، الدورانية أو الانتقالية، للحصول على *المنشأ الأساسي*.
3. نحسب *الإزاحات* n في *المنشأ الأساسي* تحت الحمل المطبق والمناظرة للتحريرات، Δ_i.
4. نطبق قوة وحدية عند كل تحرير j في المنشأ الأساسي من دون الحمل الخارجي، ثم نحسب الإزاحات عند جميع التحريرات i. وتسمى هذه *معاملات المرونة* f_{ij}، أي الإزاحة عند التحرير i بسبب قوة وحدية عند j. لا يؤثر اختيار الاتجاه؛ فإذا كان رد الفعل موجباً وافق الاتجاه المفروض، وإذا كان سالباً عاكسه.
5. نلاحظ أن وحدات f_{ij} هي الإزاحة لكل وحدة حمل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. نكتب علاقة توافق الإزاحات:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \\ \cdots \\ \Delta_n^0 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}_i^0} \tag{25.4}$$

7. تُستخرج ردود الأفعال بعد ذلك بقلب مصفوفة المرونة.

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{-1} \left(\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}_i^0 \right)$$

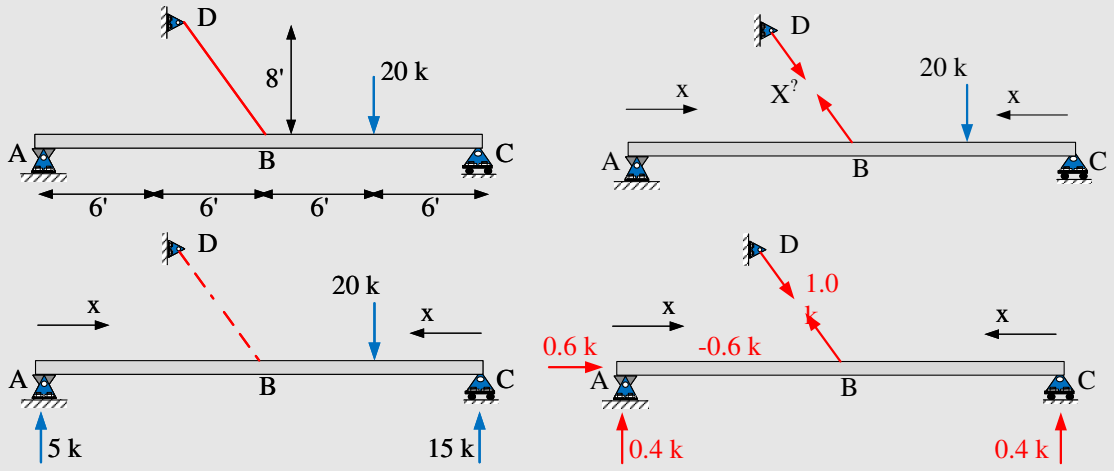
عند وجود مجهول واحد فقط، يُستعاض عن $\mathbf{f}^{-1}$ بالمقدار $1/f_{11}$.

11 يمثل Δ_i^0 متجه الإزاحات الابتدائية، ويكون صفراً عادةً ما لم توجد إزاحة ابتدائية للمسند، مثل هبوطه.

12 وفق مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل، §24.2.2، تكون مصفوفة المرونة [f] متناظرة دائماً.

25.2.1 أمثلة

25.2.1.1 مثال 25.1: كمرة ذات قضيب ربط



نريد حساب القوة المحورية في قضيب الربط. للكمرة: I=600 in^4 وA=20 in^2، وللقضيب A=2 in^2.

المنشأ غير محدد استاتيكياً من الدرجة الأولى. نقطع قضيب الربط ونختار قوته بوصفها القوة الزائدة، ومن ثم:

$$\Delta + X\delta = 0.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نحسب Δ وδ بطريقة القوة الافتراضية، مع إدراج التشوهين الانحنائي والمحوري.

العضو	$x=0$	L	A	I	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	12	20	600	0	0.6-	$5x$	$-0.4x$
CE	C	6	20	600	0	0	$15x$	$-0.4x$
EB	C	6	20	600	0	0	$120-5x$	$-0.4x$
DB	-	10	2	-	0	1	0	0

بتطبيق مبدأ الشغل الافتراضي على Δ وδ:

$$\begin{aligned}(1)\Delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= 0 + \int_0^{12}(5x)\frac{-0.4x}{EI}dx + \int_0^{6}(15x)\frac{-0.4x}{EI} + \int_6^{12}(120-5x)\frac{-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\Delta &= -3,168\text{kft}^3\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(1)\delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= (-0.6)\frac{(-0.6)^2(12)}{EA_2} + (1)\frac{(1)(10)}{EA_1} + 2\int_0^{12}(-0.4x)\frac{(-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\delta &= 206.05\text{kft}^3\end{aligned}$$

بما أن

$$\frac{I}{A_2} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{20}\right) = \left(\frac{30}{144}\right) \quad \text{و} \quad \frac{I}{A_1} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{2}\right) = \left(\frac{300}{144}\right)$$

فبالتعويض في معادلة التوافق:

$$\frac{-3,168}{EI} + \frac{206.05}{EI} = 0 \Rightarrow X = +15.38 \text{ شد}$$

ولو أهملنا التشوه الناتج من القوى المحورية لحصلنا على:

$$X = \frac{3,168}{184.32} = +17.2$$

25.2.1.2 مثال 25.2: تحليل إطار مبنى فولاذي

نقلاً عن Structural Engineering
White, Gergely **and** Sexmith, 1976. يراد إنشاء مبنى صناعي صغير نمطي بهيكل من الفولاذ الإنشائي ذي المقطع النموذجي المبين أدناه. ويجري النظر في ثلاثة تصاميم:

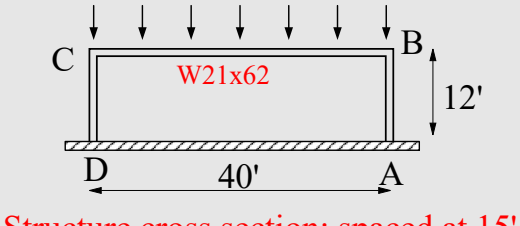
a) مفصل عند إحدى القاعدتين ومسند متحرك عند الأخرى؛ ويُعتمد هذا الحل عند ضعف خواص التربة أو عدم معرفتها، إذ قد لا تستطيع أساسات الإطار توليد قوى أفقية موثوقة عند القاعدتين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

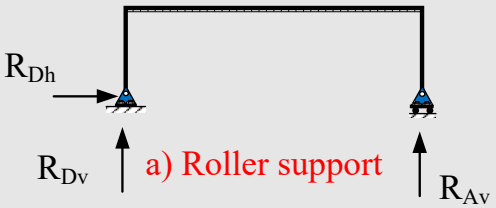
b) مفصلان عند النقطتين A وD؛ ويصلح هذا الحل للتربة الممتازة.

c) عضو ربط فولاذي بين النقطتين A وD، وكلتاهما مفصلية، لا يحمل إلا الشد. ولا يُفترض في هذه الحالة أن توفر الأساسات أي تقييد أفقي.

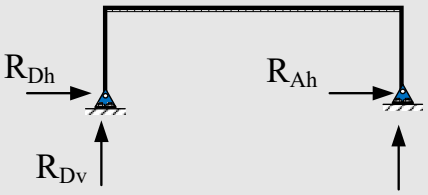
نفترض أن الإطار مصنوع من قطاعات فولاذية بعمق 21 in ووزن 62 lb/ft من الطول (W 21 × 62)، وأن عضو الربط في التصميم (c) قضيب مختار مبدئياً بمساحة 2 in^2.



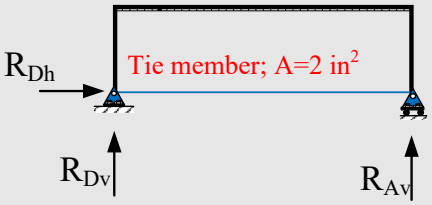
Structure cross section; spaced at 15'



a) Roller support



b) Hinged support

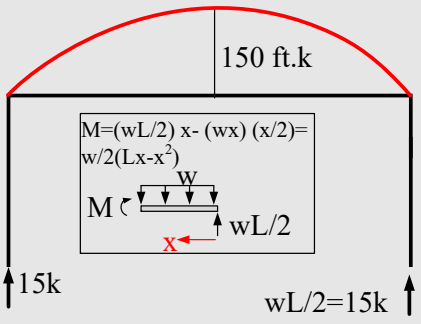


c) Roller with tie

نستخدم حمل ثلج مقداره 30 psf وحملاً ميتاً كلياً مقدراً بـ20 psf. ومع تباعد الإطارات 15 ft بين المحاور على طول المبنى، يكون حمل التصميم $15(30 + 20) = 750$ lb/ft.

الخيار a

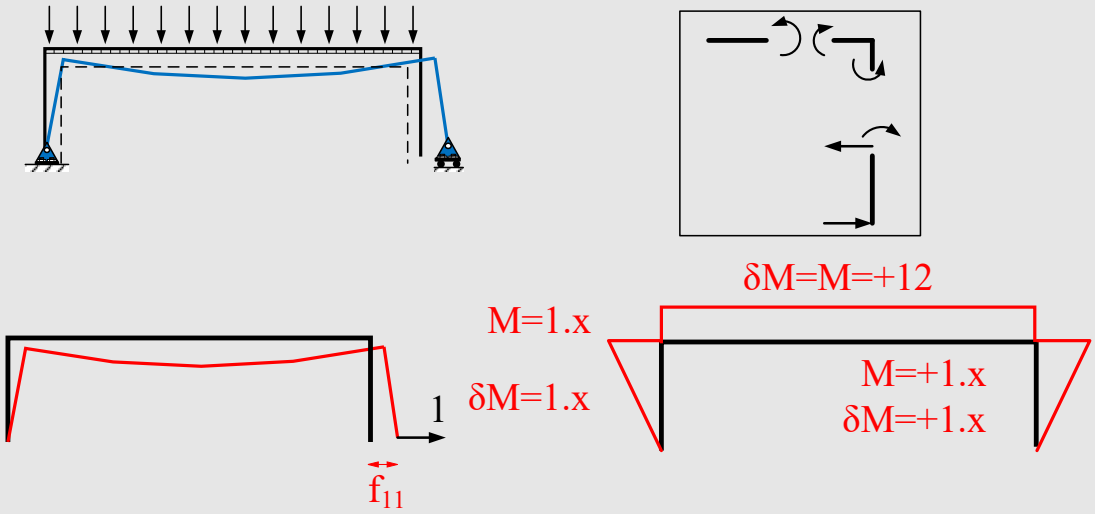
هذا الخيار محدد استاتيكياً لوجود ثلاثة ردود أفعال مجهولة وثلاث معادلات اتزان.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخيار b

المنشأ b غير محدد استاتيكياً من الدرجة الأولى، أي له قوة زائدة واحدة. نُجري تحريراً عند A، وتكون قوة القص الزائدة R_1. أما Δ_1:

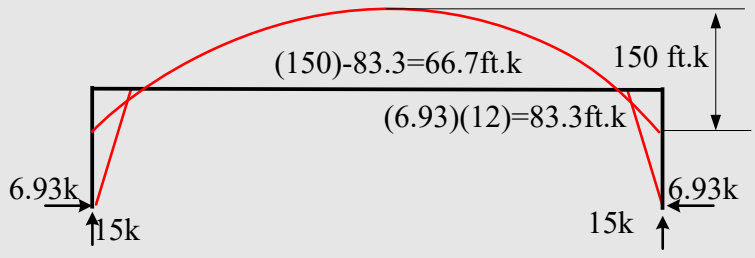


نحسب Δ_1 وf_{11}:

$$1(\text{k})\cdot\Delta_1(\text{ft}) = \int_0^L (12)\frac{w}{2}\frac{LX-x^2}{EI}dx = \int_0^{40}(12)\frac{(1/2)(.75)(40x-x^2)}{EI}$$
$$= \frac{48,000}{EI}\ \text{k}^2\ \text{ft}^3$$
$$1(\text{k})\cdot f_{11}(\text{ft}) = 2\left[\int_0^{12} x\frac{x\,dx}{EI} + \int_0^{20} 12\frac{12dx}{EI}\right] = \frac{6,912}{EI}\ \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

بحل R_1:

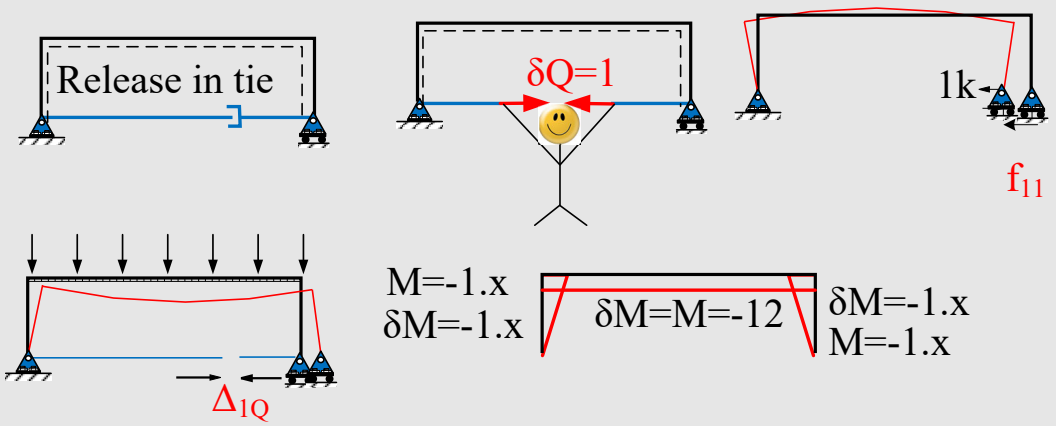
$$\frac{1}{EI}[48,000 + 6,912R_1] = 0 \Rightarrow R_1 = -6.93\ \text{k} \leftarrow$$



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخيار c

توجد ثلاث قوى خارجية مجهولة، إلا أن المنشأ غير محدد استاتيكياً من الدرجة الأولى لأن عضو الربط يوفّر درجة واحدة من عدم التحديد الداخلي. نحرر عضو الربط مع الإزاحة الطولية والقوة المحورية المرتبطتين به.



معادلة التوافق: يجب أن تساوي الإزاحة النسبية لجزأي قضيب الربط عند موضع التحرير صفراً، أي $\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$، حيث:

Δ_1 = الإزاحة عند التحرير 1 في المنشأ الأساسي،
f_{11} = الإزاحة النسبية عند التحرير 1 لقوة محورية وحدية في عضو الربط، تُحدد Δ_1 من الحالة b:
R_1 = القوة في عضو الربط في المنشأ الأصلي.

$$\Delta_1 = \frac{(48,000)\ \text{k ft}^3 (1,728)\ \text{in}^3/\text{ft}^3}{(30\cdot 10^3)\ \text{ksi}(1,327)\ \text{in}^4} = 2.08\ \text{in} \rightarrow$$

f_{11} ناتجة من التشوهين الانحنائي والمحوري معاً:

$$1\cdot f_{11} = \underbrace{2\left[\int_0^{12}(-x)\frac{(-x)\text{d}x}{EI} + \int_0^{20}(-12)\frac{(-12)\text{d}x}{EI}\right]}_{\text{انحناء}} + \underbrace{\delta\overline{P}\frac{PL}{EA}}_{\text{محوري}}$$

$$= \frac{6,912}{EI} + \frac{1(1)(40)}{EA}$$

$$= \frac{(6,912)\ \text{k ft}^3 (1,728)\ \text{in}^3/\text{ft}^3}{(30\cdot 10^3)\ \text{ksi}(1,327)\ \text{in}^4} + \frac{(40)\ \text{ft}(12)\ \text{in}/\text{ft}}{(30\cdot 10^3)\ \text{ksi}(2)}$$

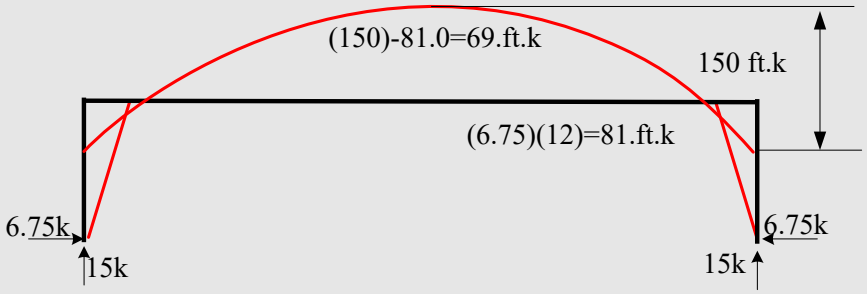
$$= 0.300 + 0.008 = 0.308$$

ومن ثم f_{11} = 0.308 in./k من شرط توافق التشوه:

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0 \Rightarrow 2.08 + .308R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = -6.75\ \text{k}$$

يجب أن تحمل حدا الإزاحة في المعادلة إشارتين متعاكستين لاختلاف اتجاهيهما.

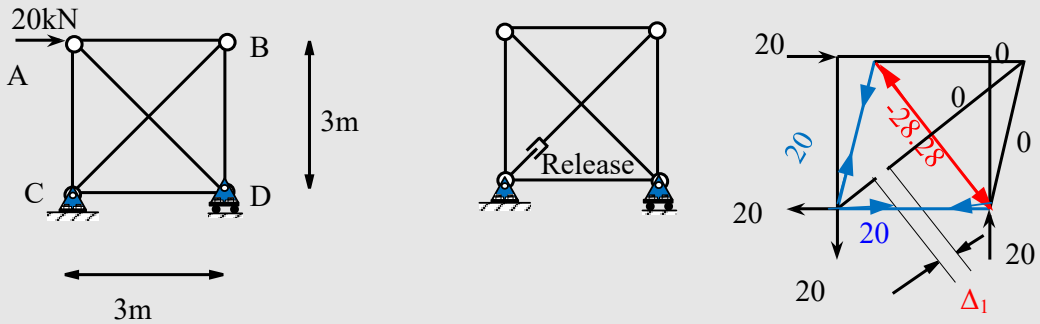
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ملاحظات

مخطط العزم في c قريب جداً من مخططه في b لأن الكابل شديد الصلابة. ويؤدي تقليل مساحة الكابل إلى زيادة العزم. تُستخدم الإطارات ذات أعضاء الربط على نطاق واسع في المباني الصناعية. يبلغ العزم الأقصى في الإطارين (b) و(c) نحو 55% من قيمته في (a). تؤدي الاستمرارية إلى خفض العزم الموجب وزيادة العزم السالب، فتنتج تصميماً أمثل. لا تتأثر ردود الأفعال الرأسية بشروط التقييد الأفقي.

25.2.1.3 مثال 25.3: جملون ذو قوة زائدة واحدة

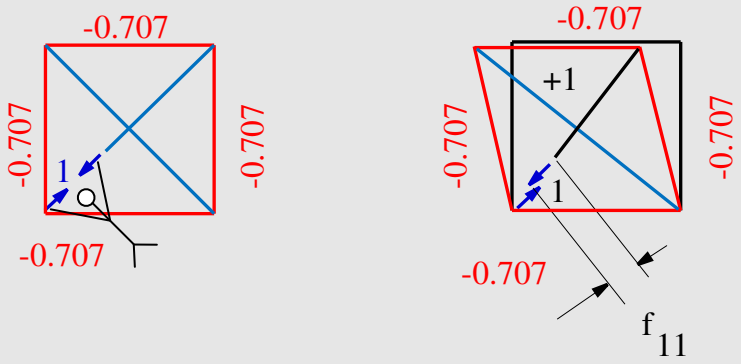


1. التحقق: لدينا $2\times 4 = 8$ معادلات، و6 أعضاء + 3 ردود أفعال $\Rightarrow$ درجة واحدة من عدم التحديد. ويمكن اختيار تحرير طولي في أي من القضبان الستة.
2. نحرر العضو القطري BC.
3. تمثل Δ_1 الإزاحة النسبية للعقدة B بالنسبة إلى العقدة C.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. معادلة التوافق على امتداد CD:

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 = 0$$
$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$
$$f_{11} = \Sigma \delta\overline{P}\frac{\overline{P}L}{AE}$$



5. نحسب هذه المجاميع في صورة جدولية:

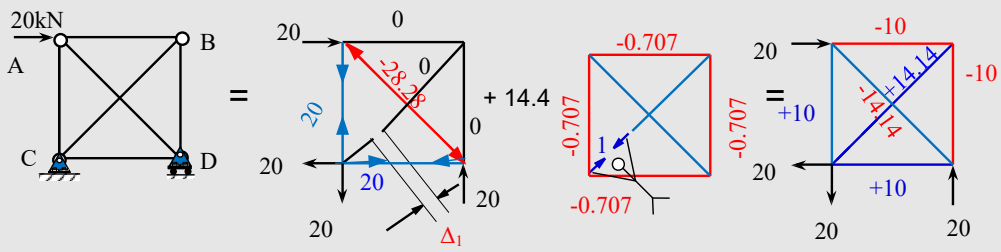
العضو	P	$\delta\overline{P}$	L	$(\Delta_1)\ \delta\overline{P}PL$	$(f_{11})\ \delta\overline{P}\overline{P}L$
AB	0	−0.707	3	0	1.5
BD	0	−0.707	3	0	1.5
CD	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AC	+20	−0.707	3	−42.42	1.5
AD	−28.28	+1	4.242	−119.96	4.242
BC	0	+1	4.242	0	4.242
				204.8-	14.484

$$\Delta_1 = \Sigma \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} = -\frac{-204.8}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$f_{11} = \frac{14.484}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$0 = \frac{1}{AE}[-204.8 + 14.484F_1]$$
$$F_1 = 14.14\ \text{kN}$$

.

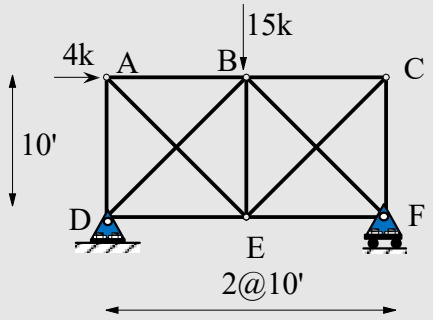
6. تُستخرج القوى النهائية عن طريق تراكب القوى الناتجة من القوة الزائدة مع القوى الناتجة من التحميل الحقيقي.
7. تأثير القوة الزائدة: نضرب قوى الأعضاء في 14.14، وهي قيمة القوة الزائدة.

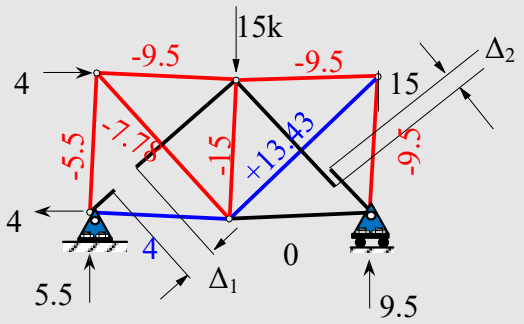
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



العضو	$\delta\overline{P}$	$F_1\delta\overline{P}$	P	P_{total}
AB	-0.707	-10.0	0.0	-10.0
BD	-0.707	-10.0	0.0	-10.0
CD	-0.707	-10.0	$+20.0$	$+10.0$
AC	-0.707	-10.0	$+20.0$	$+10.0$
AD	$+1.0$	$+14.14$	-28.28	-14.14
BC	$+1.00$	$+14.14$	0	$+14.14$

25.2.1.4 مثال 25.4: جملون ذو قوتين زائدتين





أُضيفت إلى جملون المثال السابق فتحة أخرى تحتوي عضواً زائداً ثانياً.

1. نحرر القطرين DB وBF.
2. نحسب قوى الأعضاء والإزاحات المطلوبة تحت التحميل الحقيقي وتحت القوتين الزائدتين في العضوين DB وBF.
3. مع أن التحميل الحقيقي يُجهد عادةً جميع أعضاء الجملون، فإن القوى الوحدية المناظرة للقوى الزائدة لا تُجهد إلا أعضاء الفتحة التي تحتوي العضو الزائد؛ أما قوى بقية القضبان فتساوي صفراً.
4. يتيح إدراك هذه الحقيقة حل جملون القطرين المزدوجين أسرع من حل إطار ذي عدة قوى زائدة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

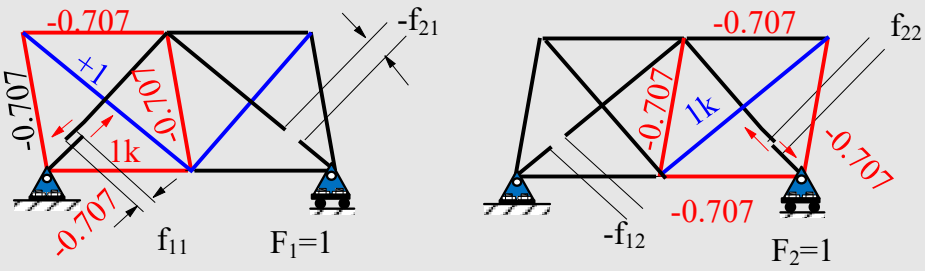
5. معادلات الشغل الافتراضي لحساب الإزاحات الست المطلوبة، اثنتان بسبب الحمل وأربعة معاملات مرونة، هي:

$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{PL}{AE} \right) \qquad 1 \cdot \Delta_2 = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right) \qquad 1 \cdot f_{21} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right)$$

وفق مبرهنة التبادل $f_{12} = f_{21}$ $\qquad 1 \cdot f_{22} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \frac{\overline{P}_2 L}{AE}$

6. نفترض أن القوى الوحدية شدية، أي موجبة.



7. نرتب النتائج في جدول:

					الإزاحات		معاملات المرونة		
					Δ_1	Δ_2	f_{11}	f_{21}	f_{22}
العضو	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	L	$\delta \overline{P}_1 PL$	$\delta \overline{P}_2 PL$	$\delta \overline{P}_1 \overline{P}_1 L$	$\delta \overline{P}_2 \overline{P}_1 L$	$\delta \overline{P}_2 \overline{P}_2 L$
AB	9.5-	0.707-	0	120	806+	0	60	0	0
BC	9.5-	0	0.707-	120	0	806+	0	0	60
CF	9.5-	0	0.707-	120	0	806+	0	0	60
EF	0	0	0.707-	120	0	0	0	0	60
DE	4+	0.707-	0	120	340-	0	60	0	0
AD	5.5-	0.707-	0	120	466+	0	60	0	0
AE	7.78+	1+	0	170	1,322+	0	170	0	0
BE	15.0-	0.707-	0.707-	120	1,272+	1272+	60	60	60
CE	13.43+	0	1+	170	0	2,280+	0	0	170
BD	0	1+	0	170	0	0	170	0	0
BF	0	0	1+	170	0	0	0	0	170
					3,528+	5,164+	580+	60+	580+

$$\Delta_1 + f_{11} F_1 + f_{12} F_2 = 0$$
$$\Delta_2 + f_{21} F_1 + f_{22} F_2 = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

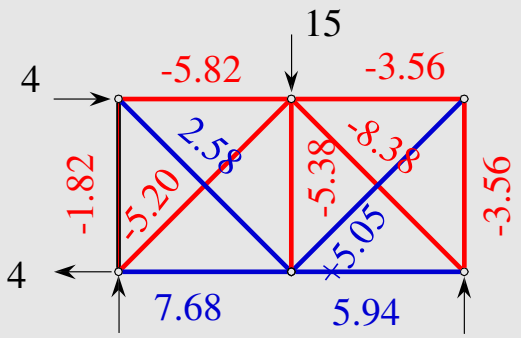
أو

$$\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 580 & 60 \\ 60 & 580 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3,528 \\ 5,164 \end{bmatrix}$$

وF_1 = -5.20 kip وF_2 = -8.38 kip.

8. مجموعة القوى النهائية: نجمع لكل عضو التأثيرات الثلاثة المنفصلة: $F = P + F_1\overline{P}_1 + F_2\overline{P}_2$

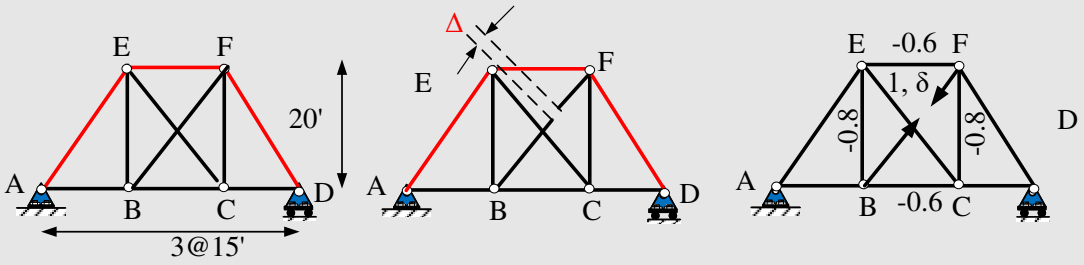
العضو	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$F_1\overline{P}_1$	$F_2\overline{P}_2$	P_{tot}
AB	9.5-	0.707-	0.0	3.676	0.0	5.82-
BC	9.5-	0.0	0.707-	0	5.925	3.56-
CF	9.5-	0.0	0.707-	0	5.925	3.56-
EF	0.0	0.0	0.707-	0	5.925	5.94
DE	4+	0.707-	0.0	3.676	0.0	7.68
AD	5.5-	0.707-	0.0	3.676	0.0	1.82-
AE	7.78+	1+	0.0	5.20-	0.0	2.58
BE	15.0-	0.707-	0.707-	3.676	5.925	5.38-
CE	13.43+	0.0	1+	0.0	8.38-	5.05
BD	0.0	1+	0.0	5.20-	0.0	5.20-
BF	0.0	0.0	1+	0.0	8.38-	8.38-



25.2.1.5 مثال 25.5: جملون تحت حمل حراري

نريد تحليل الجملون الآتي، وهو غير محدد استاتيكياً من الدرجة الأولى، عند زيادة درجة حرارة الأعضاء AE وEF وFD بمقدار $F\Delta T = 60°$. نأخذ $\alpha = 1/150{,}000$ لكل F° و$E = 30 \times 10^3$ k/sq in، ومساحة جميع المقاطع 10 in sq. نختار في هذه المسألة قطع القضيب BF واتخاذ قوته قوةً زائدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



إذن:

$$\Delta + X\delta = 0$$

ويبقى لدينا:

$$(1)\delta = \frac{1}{E}\sum \delta\overline{P}\frac{PL}{A}$$

أما Δ فتُحسب بصورة مختلفة قليلاً:

$$(1)\Delta = \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$

وكما اتبعنا في هذا الكتاب، نفصل بوضوح بين الكميات الافتراضية والحقيقية. ومن ثم يمكن التعبير عن الانفعال الحقيقي كما يأتي:

$$\frac{P}{AE} = \varepsilon = \alpha\Delta T$$

حيث α معامل التمدد الحراري وΔT تغير درجة الحرارة. ولذلك نستخدم في هذه المسألة:

$$(1)\Delta = \alpha\sum \delta\overline{P}\Delta TL$$

وبترتيب النتائج في جدول:

القضيب	L	A	$\frac{L}{A}$	$\delta\overline{P} = P$	$\delta\overline{P}\frac{PL}{A}$	ΔT	$\delta\overline{P}\Delta TL$	$X\delta\overline{p}$
	ft	^{2}in	^{2}ft/in	k	^{2}ft/in^{2}k	F°	F ft°k	k
EF	15	10	1.5	0.6-	0.54+	60+	540-	7.5-
BC	15	10	1.5	0.6-	0.54+	0	0	7.5-
EB	20	10	2	0.8-	1.28+	0	0	10.0-
FC	20	10	2	0.8-	1.28+	0	0	10.0-
EC	25	10	2,5	1.0+	2.5+	0	0	12.5+
BF	25	10	2.5	1.0+	2.5+	0	0	12.5+
Σ					8.64+		540-	

$$\Delta = (-540)\frac{1}{150,000} = -0.0036\text{ft}$$

$$\delta = \frac{8.64}{30\times 10^3} = 0.000288\text{ft}$$

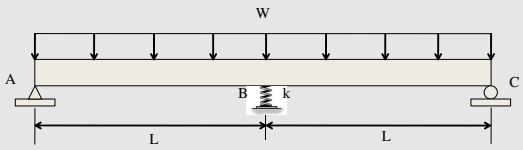
ومنه:

$$-0.0036 + 0.000288X = 0 \Rightarrow X = +12.5 \text{ (شد) k}$$

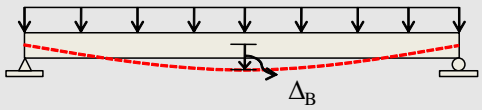
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

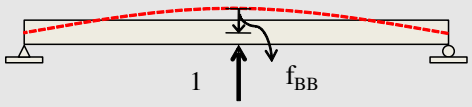
25.2.1.6 مثال 25.6: كمرة مسندة على نابض

ترتكز الكمرة على مفصل عند A ونابض صلابته k عند B ومسند متحرك عند C. أوجد القوة التي يؤثر بها النابض في الكمرة، مع ثبات EI.



1. نحدد المنشأ الأساسي بإزالة النابض، ثم نحسب الانحرافات عند موضعه تحت الحمل الحقيقي والحمل الوحدي. ولشيوع هذا الشكل الهندسي، نحسب أولاً الإزاحات لبحر طوله L.





الحمل الموزع المنتظم:

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{1}{2}w(LX - x^2)$$
$$\delta\overline{M} = \frac{1}{2}x$$
$$1.\Delta = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{1}{2}x\frac{w(Lx - x^2)}{2EI}dx$$
$$= \frac{2w}{4EI}\int_0^{L/2}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{L/2} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

الحمل المركز:

$$M = \frac{P}{2}x = \frac{Px}{2}$$
$$\delta\overline{M} = \frac{\delta\overline{P}}{2}x = \frac{x}{2}$$
$$1.f_{BB} = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\frac{Px}{2EI} = \frac{2P}{4EI}\int_0^{L/2} x^2dx$$
$$\Rightarrow f_{BB} = \frac{PL^3}{48EI}$$

2. نحسب الانحرافين الناتجين من الحمل الكلي والحمل الوحدي. ولوجود النابض لا يكون الانحراف صفراً، بل يتناسب مع قوة رد الفعل بواسطة ثابت النابض k:

$$\Delta_B + f_{BB} = \Delta_{sp} \quad \text{و} \quad \Delta_{sp} = \frac{F_{sp}}{k}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نعدّل الآن الإزاحات لتلائم كمرة طولها $2L$ بدلاً من L كما في المعادلات المشتقة سابقاً:

$$\Delta_B^* = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI}$$
$$f_{BB}^* = \frac{PL_{AC}^3}{48EI} = \frac{F_{sp}(2L)^3}{48EI} = \frac{F_{sp}}{L^3}6EI$$

بالتعويض:

$$\Delta_B^* + f_{BB}^* = \Delta_{sp} \Rightarrow \frac{5WL^4}{24EI} + \left(-\frac{F_{sp}L^3}{6EI}\right) = \frac{F_{sp}}{k} \Rightarrow F_{sp} = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$$

بعد معرفة رد الفعل عند المسند الأوسط تصبح المسألة محددة استاتيكياً.

نحيل القارئ إلى الملحق F لمسألة مماثلة، وإن كانت أشد تعقيداً بكثير، وهي قشرة أسطوانية ترتكز على كمرة مرنة.

25.2.1.7 مثال 25.7: الدعامة الملكية

صُممت كمرة أرضية فولاذية لتحمل 3 k/ft على بحر بسيط طوله 24 ft. وبسبب تغير استعمال المبنى، يريد المالك الجديد تخزين مواد ترفع الحمل الكلي إلى 4.8 k/ft. يقترح مهندس تقوية الكمرة بدعامة ضغط وقضيبي شد لتكوين «جملون ذي دعامة ملكية» كما هو مبين أدناه. ستُخفى الأعضاء الجديدة داخل قاطع غير حامل أسفل الكمرة. والمطلوب رسم مخطط العزم للكمرة بعد التقوية وتقييم كفاءة هذا التعديل. قطاع الكمرة W 18x60، حيث I=984 in^4، وقطاع الدعامة W 4x13، حيث A=4.83 in^2، ومساحة الكابل الفولاذي A=1 in^2.

1. هذا منشأ غير محدد استاتيكياً، إذ ترتكز الكمرة على ثلاثة مساند: A وB وC.
2. للحصول على المنشأ الأساسي نزيل المسند الأوسط، ثم نحسب انحراف منتصف البحر Δ: ($\Delta = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$).
3. نطبق قوة وحدية عند B ونحسب f_{BB}، مع مراعاة الانحناء في الكمرة والتشوه المحوري في الكابلين AD وDC وفي العضو BD.
4. نحسب رد الفعل عند B.

1. نختار القوة المحورية في العضو BD بوصفها القوة الزائدة.
2. نحسب انحراف الكمرة:

$$D_B = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} = -\frac{5}{384}\frac{(4.8)\ \text{k.ft}(24)^4\ \text{ft}^4(12)^4\ \text{in}^4/\ \text{ft}^4}{E(984)\ \text{in}^4} = -\frac{36,414}{E}$$

3. من الهندسة، طول كل كابل $L = \sqrt{7^2 + 12^2} = 13.89$ ft.
4. من الاتزان، تولد قوة وحدية في العضو BD قوة في الكابل مقدارها: $0.5 = 0.9923$ kips $\frac{13.89}{7}$
5. نلاحظ أن تطبيق الحمل الوحدي على الجائز يفترض وجود مسند صلب عند B لا مسند مرن مكوّن من العضو المحوري والكابل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

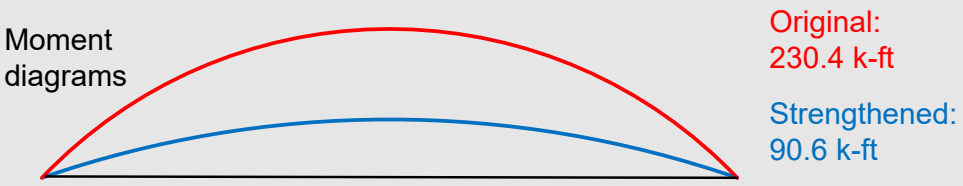
6. نحسب معامل المرونة:

$$\begin{aligned} f_{BB} &= 2\left[\int_0^{12\times12} 0.5x\frac{0.5x}{EI}dx + (0.992)\frac{(0.992)(13.89)(12)}{E}\right] + (1)\frac{(1)(7)(12)}{(3.83)E} \\ &= 2\frac{(0.25)(144)^3}{3E(984)} + 2\frac{(0.992)^2(13.89)(12)}{(1)E} + \frac{(7)(12)}{3.83E} \\ &= \frac{1}{E}(505.7 + 328 + 21.93) = \frac{855.63}{E} \end{aligned}$$

7. يقتضي توافق الإزاحات أن:

$$R f_{BB} + D_B = 0 \Rightarrow R = -\frac{D_B}{f_{BB}} = -\frac{-36,414}{855.63} = 42.5 \text{ k}$$

8. مخططا العزم بعد التقوية وقبلها هما:

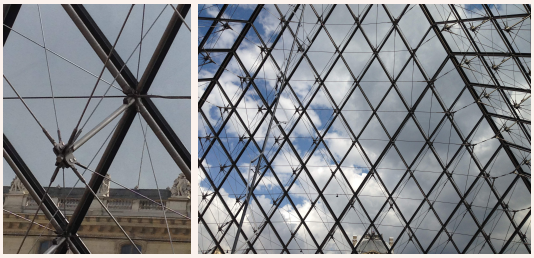


ونلاحظ أن العزم الأقصى انخفض من 230.4 k-ft إلى 90.6 k.ft.

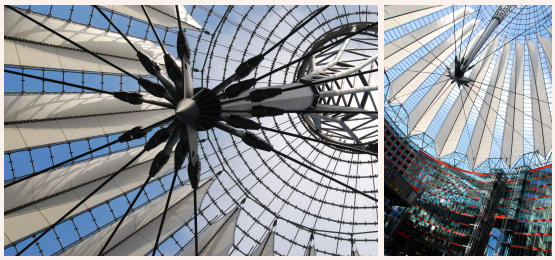
13 يبين الشكل 25.5 أمثلة لتصاميم مستوحاة من مفهوم الدعامة الملكية.



(a) مطار واشنطن دالاس (دعامة ملكية)



(b) هرم اللوفر (آي. إم. باي)



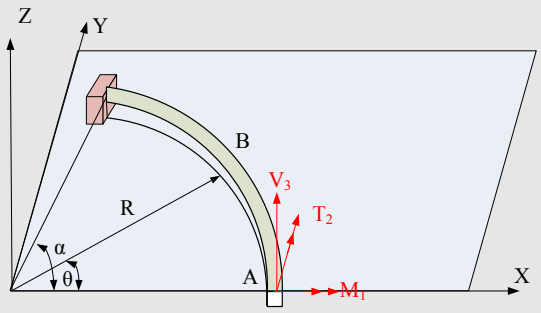
(c) مركز سوني، برلين (هلموت يان)

شكل 25.5: أمثلة لمنشآت مستوحاة من الدعامة الملكية

25.2.1.8 مثال 25.8: مصفوفة المرونة؛ كمرة منحنية

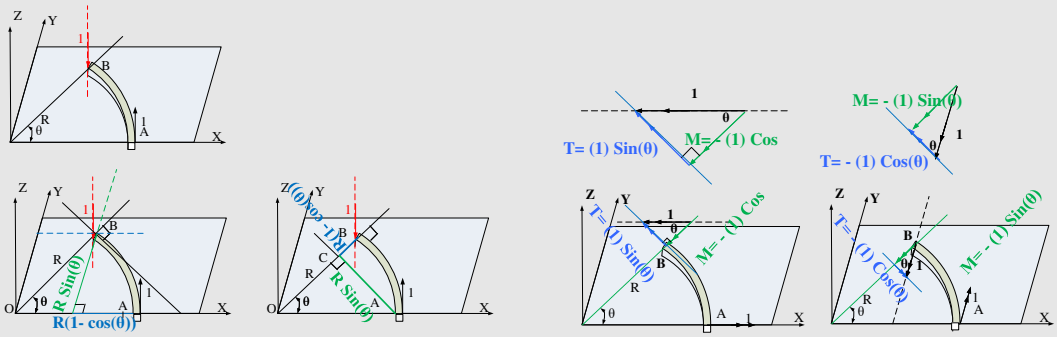
نريد اشتقاق مصفوفة المرونة لجائز صندوقي دائري نصف قطره R وزاويته α. القوس مثبت عند أحد الطرفين وحر عند الآخر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



1. تقابل درجات الحرية الثلاث العزم والالتواء والقص.
2. يمكن مباشرةً استخراج العزوم وعزوم الالتواء الناتجة من عزم أو التواء خارجي وحدي مطبق عند A من الهندسة.
3. للقوة الخارجية الوحدية المطبقة عند A، نحدد ذراعي العزم من الهندسة:

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$



درجة الحرية:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	$1=M_A$	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	1-
$M_i(\theta)$	$\cos\theta$-	$-\sin\theta$	$\sin(\theta)$R-
$T_i(\theta)$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

4. نطبق:

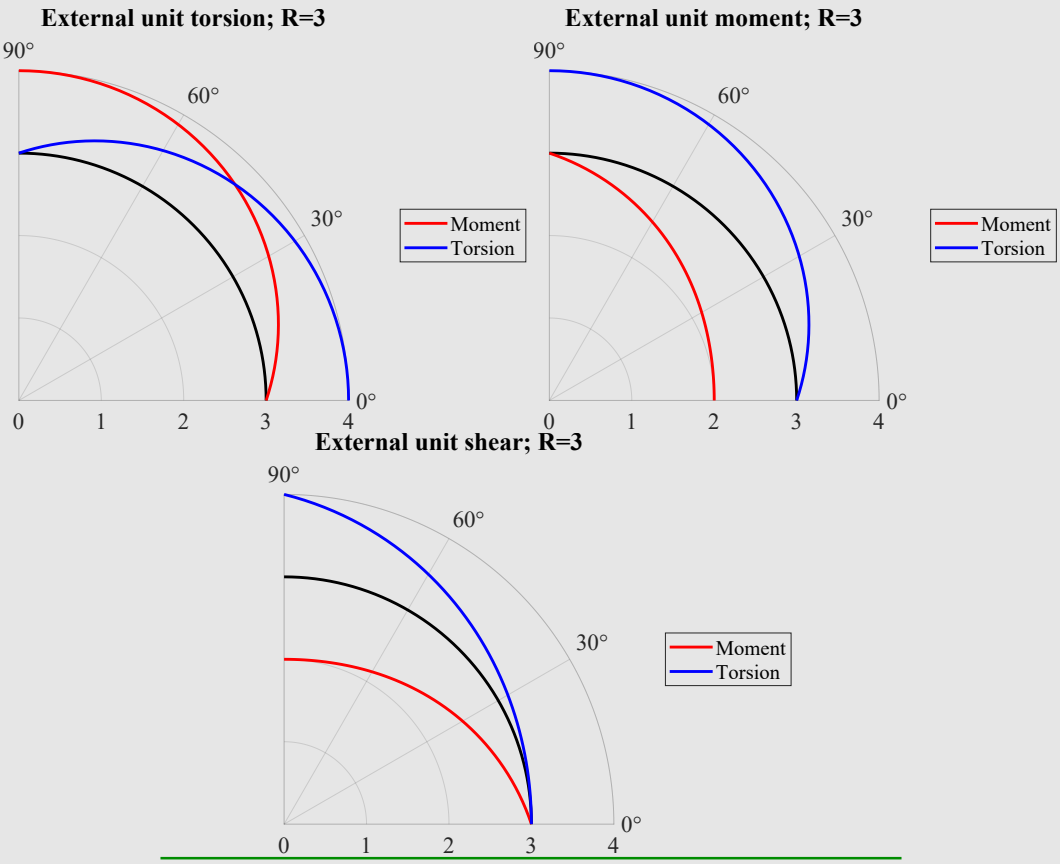
$$d_{ij}=\int_0^{\alpha}\delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta+\int_0^{\alpha}\delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $1 \le i, j \le 3$، أي نتعامل مع الصفين 2 أو 4. ومن ثم، مع التنبيه إلى أن إشارات d_{x3} عُدلت وقد تكون نتائج التكامل بحاجة إلى تحقق:

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1 \frac{M_1}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta T_1 \frac{T_1}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{-\cos\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \sin\theta \frac{\sin\theta}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1 \frac{M_2}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1 \frac{T_2}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{-\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \sin\theta \frac{-\cos\theta}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1 \frac{M_3}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1 \frac{T_3}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta \frac{R\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \sin\theta \frac{R(1-\cos\theta)}{GJ} R d\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2 \frac{M_2}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2 \frac{T_2}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta \frac{-\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{-\cos\theta}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2 \frac{M_3}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2 \frac{T_3}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta \frac{R\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta \frac{R(1-\cos\theta)}{GJ} R d\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3 \frac{M_3}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3 \frac{T_3}{GJ} R d\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta \frac{R\sin\theta}{EI} R d\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta) \frac{R(1-\cos\theta)}{GJ} R d\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



	الوحدة الخارجية					
	عزم		التواء		قوة	
القوة الداخلية	البداية	النهاية	البداية	النهاية	البداية	النهاية
العزم	1	0	0	1	0	1
الالتواء	0	1	1	0	0	1

25.3 معادلات العزوم الثلاثة

للسياق التاريخي، انظر §11.3.2

14 طوّر المهندس الفرنسي بنوا كلابيرون عام 1857 معادلة العزوم الثلاثة، المعروفة أيضاً بمبرهنة كلابيرون للعزوم الثلاثة (§10.3.2.9). وقد أسس عمله في نظرية المرونة والتحليل الإنشائي لتحليل الكمرات المستمرة. وكانت هذه المعادلة من أوائل طرق تحليل المنشآت غير المحددة استاتيكياً، إذ تربط العزوم عند ثلاثة مساند متتالية لكمرة مستمرة.

15 قلّ استعمالها في الوقت الحاضر، لكن أُدرجت هنا لقيمتها التاريخية ولأناقة حلها.

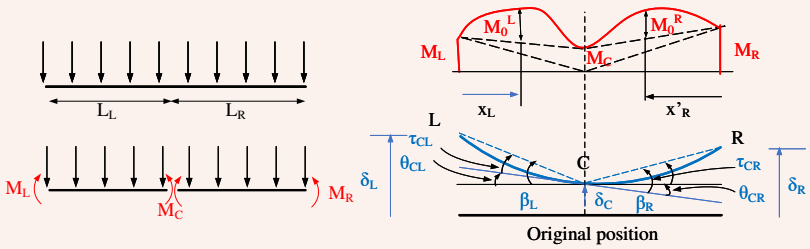
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16 سميت «معادلة العزوم الثلاثة»، أو مبرهنة *العزوم الثلاثة* أو مبرهنة *كلابيرون* ، لأنها تربط عزوم الانحناء عند ثلاث نقاط متجاورة على كمرة.

17 توفر الطريقة، في جوهرها، صيغة بسيطة لحساب عزم الانحناء عند المسند الأوسط لكمرة مستمرة ذات ثلاثة مساند.

18 ويمكن توسيعها إلى كمرات متعددة المساند، فتنشأ سلسلة معادلات تكوّن مصفوفة ثلاثية الأقطار .

19 نفترض أن العضو[1] مستقيم، ونرمز بـL وC وR إلى النقاط المبينة في الشكل 25.6. ونفترض ثبات عزمي العطالة بين المساند، ونرمز إليهما بـI_L وI_R. أما الانحرافات عن الوضع الأصلي فهي δ_L وδ_C وδ_R، وتُعد موجبة إلى أعلى كما هو مبين.



شكل 25.6: اشتقاق معادلة العزوم الثلاثة

20 لتكن العزوم عند النقاط الثلاث M_L وM_C وM_R. يُعد عزم الانحناء موجباً عندما يسبب شداً في الألياف السفلى للكمرة. ويمكن اعتبار مخطط العزم للجزء LC أو CR ناتجاً من تراكب ثلاثة تأثيرات منفصلة:

1. مساهمة كل عزم طرفي منفرداً، وتمثلها إحداثيات المثلثات المحددة بالخطوط المتقطعة.
2. مساهمة الحمل المطبق منفرداً بعد إزالة عزوم الأطراف، وتمثلها إحداثيات M_0^L في الجزء LC.
3. مساهمة M_0^R في الجزء CR.

21 من الشكل 25.6 نحصل على:

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \quad \text{و} \quad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

22 ولكن يجب أن يكون المنحنى المرن مستمراً عبر النقطة C، ولهذا تندرج الطريقة ضمن طرق المرونة[2]:

$$\theta_{CL} = \theta_{CR} \Rightarrow \beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \tag{25.5}$$

23 ولأن هذه الزوايا صغيرة، يمكن اعتبار:

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{L_L} \quad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{L_R} \tag{25.6}$$

[1] يعتمد الاشتقاق على اشتقاق Norris and Wilbur, 1960.

[2] قارن ذلك بطريقة الميل والانحراف (§27.2)، حيث نكتب معادلة اتزان عند العقدة، بينما نكتب في معادلة العزوم الثلاثة معادلة توافق للإزاحات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

24 إذا حُوّل مخطط العزم إلى مخطط M/EI، أي مخطط التقوس، أمكن حساب τ_{CL} وτ_{CR} من مبرهنة مساحة العزم الثانية[3] (§22.3.4.3):

$$\begin{aligned}\tau_{CL} &= \frac{1}{EI_L L_L}\left(\frac{M_L L_L^2}{6} + \frac{M_C L_L^2}{3} + \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L\right)\\ \tau_{CR} &= \frac{1}{EI_R L_R}\left(\frac{M_R L_R^2}{6} + \frac{M_C L_R^2}{3} + \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R\right)\end{aligned} \tag{25.7}$$

لنضع:

$$(\mathcal{M}_0)_L = \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L \quad \text{و} \quad (\mathcal{M}_0)_R = \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R \tag{25.8}$$

25 بالتعويض من المعادلة 25.8 في المعادلة 25.7، ثم من المعادلتين 25.6 و25.7 في المعادلة 25.5، نحصل على ما يسمى *معادلة العزوم الثلاثة*.

$$M_L\frac{L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R\frac{L_R}{I_R} = -\frac{\mathcal{L}_0}{I_L} - \frac{\mathcal{R}_0}{I_R} + 6E\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.9}$$

حيث حدود الحمل هي:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_L}{L_L} \quad \text{و} \quad \mathcal{R}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_R}{L_R}$$

حيث:

1. تكون M_L وM_C وM_R موجبة عندما تسبب شداً في الألياف السفلى.
2. تكون δ_L وδ_C وδ_R موجبة إلى أعلى من الوضع الأصلي.
3. يمثل $\mathcal{L}_0$ و$\mathcal{R}_0$ حدي الحمل المعتمدين على الحمل المطبق في البحرين LC وCR على الترتيب.
4. مخطط M_0 للعضو هو مخطط عزم الانحناء المرسوم له عند افتراضه كمرة بسيطة الارتكاز عند الطرفين.
5. يمثل $(\mathcal{M}_0)_L$ العزم الاستاتيكي للمساحة تحت هذا المخطط حول محور يمر بالطرف الأيسر.
6. يمثل $(\mathcal{M}_0)_R$ العزم الاستاتيكي للمساحة تحت هذا المخطط حول محور يمر بالطرف الأيمن.

تعتمد إشارة كل من العزمين الاستاتيكيين الأخيرين ببساطة على إشارة إحداثيات مخطط M_0.

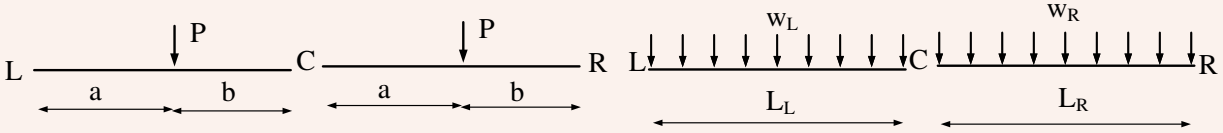
26 إذا كان $I_L = I_R = I$، تُبسط المعادلة 25.9 إلى:

$$M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R = -\mathcal{L}_0 - \mathcal{R}_0 + 6EI\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.10}$$

27 يبين الشكل 25.7 حدي الحمل لحالتي الحمل المنتظم الكامل والحمل المركز، وترد قيمهما في الجدول 25.1.

[3] يساوي الانحراف المماسي للنقطة 2 في عضو انحنائي محمّل عن مماس منحنى الانحراف عند النقطة 1، أي t_{21}، عزم مساحة مخطط التقوس بين النقطتين 1 و2 حول النقطة 2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 25.7: حدود الحمل في معادلة العزوم الثلاثة

جدول 25.1: حدود الحمل للحمل المركز والحمل المنتظم

حمل مركز	$\mathcal{L}_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$
حمل منتظم	$\mathcal{L}_0 = \frac{w_L L_L^3}{4}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$

25.3.1 مثال 25.9: كمرة مستمرة

نطبق المعادلة 25.9، مع اعتبار A وB وC هي L وC وR، على الترتيب:

$$M_a = 0 \quad M_B = ? \quad M_C = 0$$

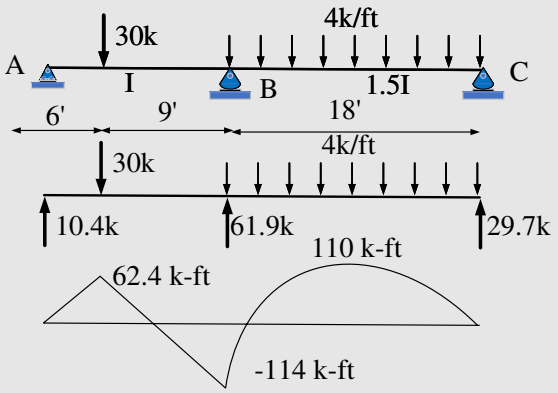
و

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C = 0$$

من الجدول 25.1:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(30)(6)(9)(21)}{15} = 2,268$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{(4)(18)^2}{4} = 5,832$$



وأخيراً:

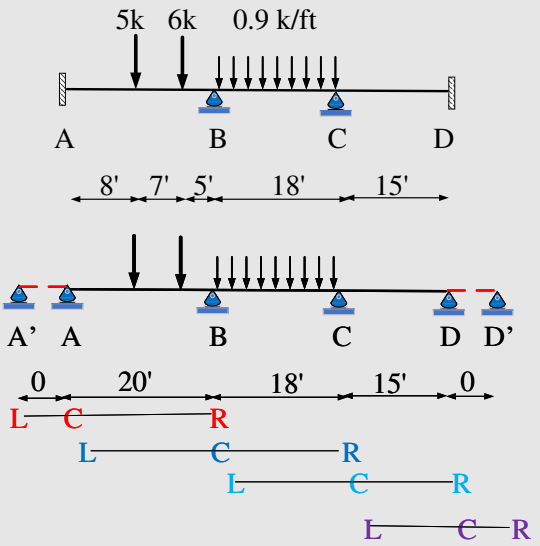
$$0 + 2M_B\left(\frac{15}{I} + \frac{18}{1.5I}\right) + 0 = -\frac{2,268}{I} - \frac{5,832}{1.5I}$$

$$54M_B = -6,156 \Rightarrow M_B = -114\text{k-ft}$$

25.3.2 مثال 25.10: كمرة مستمرة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في هذه الحالة توجد أربعة عزوم مجهولة، M_A وM_B وM_C وM_D. لذلك نحتاج إلى أربع معادلات. ويمكن معالجة الطرف المثبت باستبداله ببحر إضافي طوله يساوي صفراً عملياً، كما هو مبين. ثم تُستخرج المعادلات المطلوبة بتطبيق المعادلة 25.10 أربع مرات منفصلة، مع اختيار L وC وR تباعاً كما هو موضح.



$$\delta_{A'} = \delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta_D = \delta_{D'} = 0$$

1. نعتبر A' وA وB هي L وC وR.

$$\mathcal{L}_0 = 0 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(5)(8)(12)(32)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(25)}{20} = 1,330.5 \quad M'_A = 0$$
$$\Rightarrow 40M_A + 20M_B = -1,330.5$$

2. نعتبر A وB وC هي L وC وR.

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(5)(8)(12)(28)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(35)}{20} = 11,459.5 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(0.9)(18)^2}{4} = 1,312.2$$
$$\Rightarrow 20M_A + 76M_B + 18M_C = -2,771.7$$

3. نعتبر B وC وD هي L وC وR.

$$\mathcal{L}_0 = 1,312.2 \quad \mathcal{R}_0 = 0 \Rightarrow 18M_B + 66M_C + 15M_D = -1,312.2$$

4. نعتبر C وD وD' هي L وC وR.

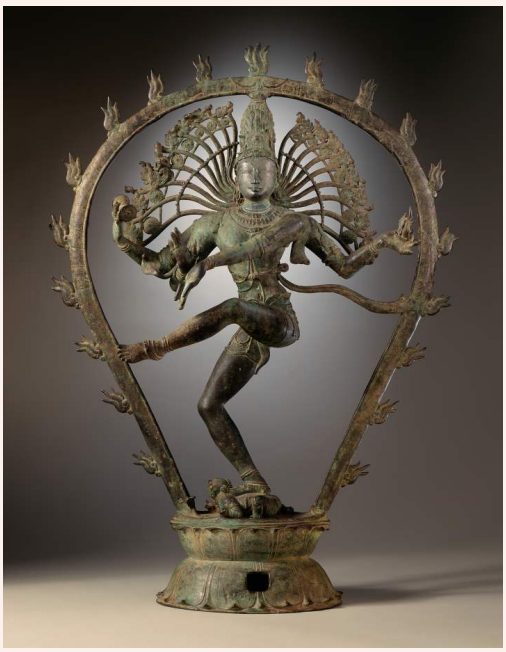
$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{R}_0 = 0 \quad M_{D'} = 0 \Rightarrow 15M_C + 30M_D = 0$$

يمكن كتابة المعادلات الأربع على الصورة:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 76 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 66 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1,330.5 \\ -2,771.7 \\ -1,312.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.17 \\ -28.20 \\ -13.74 \\ +6.87 \end{Bmatrix} \text{k-ft}$$

(نلاحظ أن المصفوفة الناتجة ثلاثية الأقطار كما هو متوقع).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شيفا، سلالة تشولا

ترمز الوضعية الديناميكية والحركة الانسيابية لرقصة شيفا الكونية إلى المرونة وقابلية التكيف، مثلما تتشوه المنشآت المرنة تحت الحمل مع بقائها في حالة اتزان.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26 القوى بدلالة الإزاحات

ملخص

تناولنا في الفصول السابقة طرق حساب الإزاحات بدلالة القوى، وهو جوهر طريقة المرونة أو القوى. أما هذا الفصل فيعكس الاتجاه، إذ نحدد القوى بدلالة إزاحات معلومة، وهو جوهر طريقة الصلابة أو الإزاحة. يمهّد هذا العرض للحسابات اليدوية اللاحقة، أي طريقة الميل والانحراف وطريقة توزيع العزوم للعناصر الانحنائية فقط، ثم للتحليل الحاسوبي للمنشآت المعقدة بطريقة الصلابة المباشرة. يقتصر الفصل على الانحناء؛ أما القص والالتواء فيُرجع فيهما إلى الفصل 23.

26.1 مقدمة 931
26.1.1 اصطلاح الإشارة 932
26.1.2 طرق التحليل 932
26.2 التشوهات المحورية 933
26.3 الانحناء 933
26.3.1 المعادلة التفاضلية 933
26.3.2 قوى الأطراف العقدية للانفعالات الابتدائية 937
26.3.3 القوى العقدية المكافئة للعناصر الانحنائية 938

26.1 مقدمة

1 نتذكر من §39.8 أن التحليل الإنشائي مسألة قيم حدية تقوم فيها ثنائية بين القوى والإزاحات؛ يُعرف أحدهما ويُستخرج الآخر بتحليل ملائم.

2 عملنا حتى الآن على الحد Γ_t في الشكل 39.8، حيث تكون القوة معلومة ونريد الإزاحات. ولهذا تسمى طريقة المرونة أيضاً *طريقة القوى*.

3 أما في هذا الفصل فنعمل على الحد Γ_u، حيث تكون الإزاحات معلومة ونبحث عن القوى المناظرة التي تحقق الاتزان وتُنتج تلك الإزاحات.

4 وهذه خطوة مهمة لتطوير طريقة الصلابة لاحقاً، وهي مكملة لطريقة المرونة أو القوى التي سبق عرضها، كما يوضح الجدول 26.1.

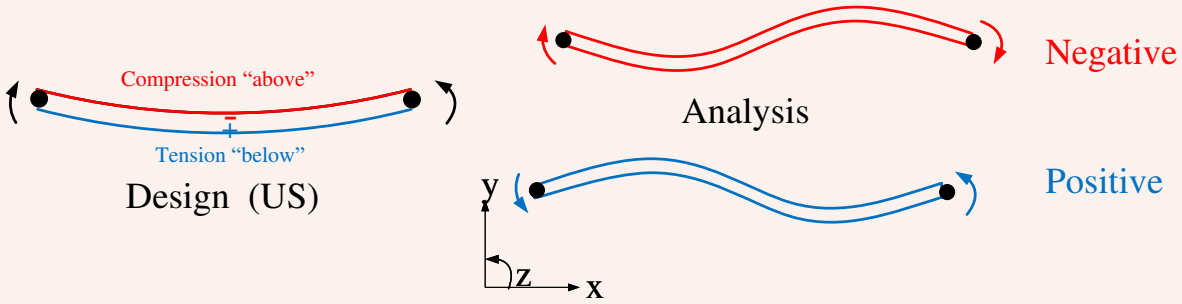
جدول 26.1: مقارنة طريقتي الصلابة والمرونة

الصلابة	المرونة	
الإزاحات	القوى	المتغير الأساسي (درجة الحرية)
حركي	استاتيكي	عدم التحديد
قوة(إزاحة)/العنصر	إزاحة(قوة)/المنشأ	علاقة القوة–الإزاحة
الاتزان	توافق الإزاحة	العلاقات الحاكمة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26.1.1 اصطلاح الإشارة

5 في حين استُخدم لطريقة المرونة اصطلاح إشارة اختياري، الشكل 21.5، يتسق اصطلاح طريقة الصلابة مع نظام الإحداثيات المحلي للعنصر. لذلك نعرّف العزم الموجب بأنه العزم بعكس اتجاه عقارب الساعة، الشكل 26.1.



شكل 26.1: اصطلاح الإشارة لطريقة الصلابة

26.1.2 طرق التحليل

6 يقدم هذا الفصل المفاهيم التمهيدية اللازمة لطريقة الصلابة. وتوجد ثلاثة مناهج تقوم عليها:

الميل والانحراف: (موهر، 1892) منظومة من n معادلات خطية وn مجاهيل، حيث n درجة عدم التحديد الحركي، أي العدد الكلي للإزاحات والدورانات المستقلة.

توزيع العزوم: (كروس، 1930) طريقة تكرارية لحساب الإزاحات n والقوى الداخلية المناظرة في المنشآت الانحنائية.

طريقة الصلابة المباشرة: (≃1960) الصياغة الرسمية المصفوفية لطريقة الصلابة، وهي أقوى طرق التحليل الإنشائي بفارق كبير.

تلائم الطريقتان الأوليان الحساب اليدوي، الفصل 27، بينما تلائم الثالثة التحليل الحاسوبي الذي يُعرض بالتفصيل عبر عدة فصول في الجزء 38.

7 في جميع طرق الصلابة يجب، قبل بدء التحليل، أن نملك معادلات القوى بدلالة الإزاحات المعلومة.

8 تعمل طريقتا المرونة والصلابة على مستويين مختلفين وتبحثان عن مجاهيل مختلفة، كما يوضح الجدول 26.2.

جدول 26.2: مقارنة تحليلي الصلابة والمرونة

التحليل	المستوى	الطريقة
الإزاحات بدلالة القوى	المنشأ	المرونة
القوى بدلالة الإزاحة	العنصر	الصلابة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26.2 التشوهات المحورية

9 من مقاومة المواد:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \underbrace{A\sigma}_{P} = \frac{AE}{L}\underbrace{\Delta}_{1} \tag{26.1}$$

10 لإزاحة وحدية يجب أن تساوي القوة المطبقة $\frac{AE}{L}$.

11 ومن الاتزان، تكون القوة عند الطرف الآخر مساوية لها ومعاكسة في الاتجاه.

26.3 الانحناء

12 الهدف هو حساب *القوى بدلالة الإزاحات المعلومة* في كمرة: أربع قوى مجهولة، $V_1^?$ و$V_2^?$ و$M_1^?$ و$M_2^?$، بدلالة أربع إزاحات معلومة، $v_1^\checkmark$ و$v_2^\checkmark$ و$\theta_1^\checkmark$ و$\theta_2^\checkmark$، كما في الشكل 26.2.

$$\begin{aligned}
V_1^? &= V_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)\\
M_1^? &= M_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)\\
V_2^? &= V_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)\\
M_2^? &= M_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark)
\end{aligned}$$

نحتاج مع المجاهيل الأربعة إلى أربع معادلات: اثنتان توفرهما *المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية* الحاكمة للانحناء، واثنتان من معادلتي *الاتزان*.

26.3.1 المعادلة التفاضلية

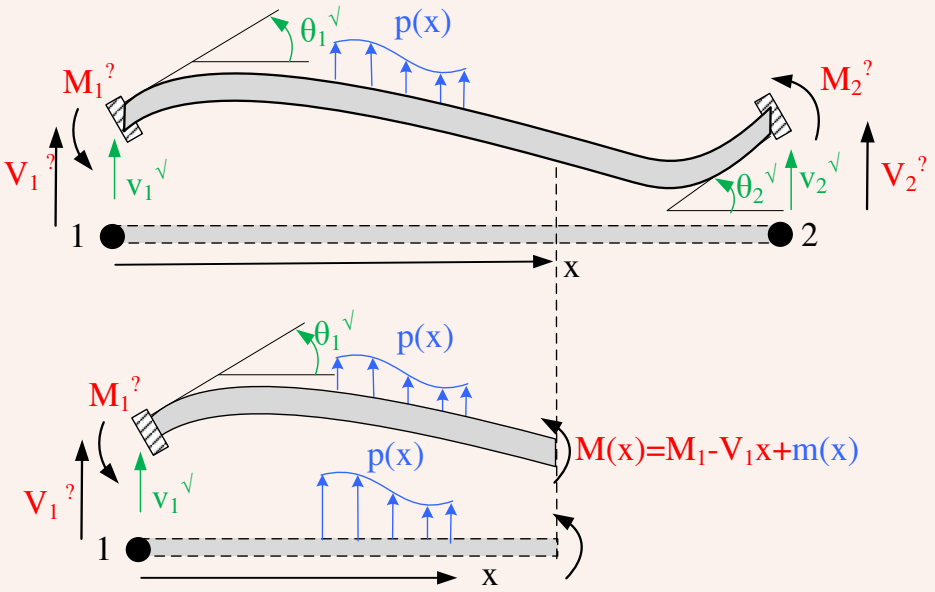
13 نبدأ من:

$$M = \underbrace{-EI\frac{d^2v}{dx^2}}_{\text{المعادلة التفاضلية}} = \underbrace{M_1^? - V_1^? x + m(x)}_{\text{الاتزان}}$$

حيث $m(x)$ العزم عند المقطع x الناتج من الحمل المطبق $q(x)$؛ وللحمل الموزع المنتظم $m(x) = -\frac{1}{2}wx^2$. نكامل مرتين:

$$\begin{aligned}
-EIv' &= M_1^? x - \frac{1}{2}V_1^? x^2 + f(x) + C_1\\
-EIv &= \frac{1}{2}M_1^? x^2 - \frac{1}{6}V_1^? x^3 + g(x) + C_1 x + C_2
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 26.2: صياغة مسألة الانحناء لاشتقاق حدود الصلابة

حيث $f(x) = \int m(x)dx$ و$g(x) = \int f(x)dx$. نطبق الشروط الحدية عند $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{rl} v' & = \theta_1^{\checkmark} \\ v & = v_1^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} C_1 & = -EI\theta_1^{\checkmark} \\ C_2 & = -EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right.$$

ثم عند $x = L$، وبالدمج مع C_1 وC_2:

$$\left.\begin{array}{rl} v' & = \theta_2^{\checkmark} \\ v & = v_2^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} -EI\theta_2^{\checkmark} & = M_1^?L - \frac{1}{2}V_1^?L^2 + f(L) - EI\theta_1^{\checkmark} \\ -EIv_2^{\checkmark} & = \frac{1}{2}M_1^?L^2 - \frac{1}{6}V_1^?L^3 + g(L) - EI\theta_1^{\checkmark}L - EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right. \tag{26.2}$$

مع أنه يمكن حل $M_1^?$ و$V_1^?$ بدلالة $v_1^{\checkmark}$ و$v_2^{\checkmark}$ و$\theta_1^{\checkmark}$ و$\theta_2^{\checkmark}$، نتابع كالآتي.

14 من الاتزان:

$$V_1^? + q + V_2^? = 0 \qquad M_1^? - V_1^?L + m(L) + M_2^? = 0$$

حيث $q = \int_0^L w(x)dx$.

15 ومن ثم:

$$V_1^? = \frac{(M_1^? + M_2^?)}{L} + \frac{1}{L}m(L) \qquad V_2^? = -(V_1^? + q) \tag{26.3}$$

16 بالتعويض عن V_1 في θ_2 وv_2، المعادلة 26.2:

$$\left\{\begin{array}{ll} M_1^? - M_2^? & = \frac{2EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} + \frac{2EI_z}{L}\theta_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{2}{L}f(L) \\ 2M_1^? - M_2^? & = \frac{6EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{6}{L^2}g(L) \end{array}\right.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17 نحل العزوم:

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II} \tag{26.4}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II} \tag{26.5}$$

حيث، في المعادلتين 26.4 و26.5، نضع $\Delta = v_2 - v_1$ (*الإزاحة النسبية*)، و$\psi = \Delta/L$ (*دوران وتر العضو*)، و$K = I/L$ (*معامل الصلابة*[1]). وتمثل NEF *القوى العقدية المكافئة* ، أي إننا نستبدل حمل العنصر بمجموعة مكافئة من القوى العقدية.

18 وأخيراً يمكن إعادة كتابة المعادلات كما يأتي:

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + NEF_1 \tag{26.6}$$

$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + NEF_2 \tag{26.7}$$

نلاحظ أن ψ موجب إذا كان بعكس اتجاه عقارب الساعة، وسالب خلاف ذلك.

19 من المعادلتين 26.6 و26.7، إذا كانت للعقدة إزاحة Δ فإن كلا العزمين في العنصرين المتجاورين يحملان الإشارة نفسها. أما عزما العنصرين على جانبي العقدة فتحمل إشارتاهما اتجاهين مختلفين.

$$\Psi_{21} = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

$$K = \frac{I}{L} \text{ الصلابة النسبية}$$

$$NEF_1 = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$

$$NEF_2 = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$

20 تمثل NEF_1 وNEF_2 عزمي *الطرفين المثبتين* عندما $\theta_1 = \theta_2 = 0$ و$v_1 = v_2 = 0$. ويجري اشتقاقهما مستقلاً في §26.3.3. أما قيمهما لأكثر أنواع الأحمال شيوعاً فترد في الجدول 26.3.

21 نلاحظ من المعادلتين 26.4 و26.5 أن العزوم المتولدة عند طرفي العضو تنتج من: I) دورانات الأطراف وإزاحاتها؛ وII) عزوم الأطراف المثبتة.

[1] سيُعرّف $K = 4EI/L$ في طريقة توزيع العزوم، ويُعرّف مصفوفةً في طريقة الصلابة المباشرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 26.3: القوى العقدية المكافئة للأحمال البسيطة

الحمل	NEF_1	NEF_2
حمل منتظم w	$\frac{wL^2}{12}$	$-\frac{wL^2}{12}$
حمل مركز في المنتصف	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$

22 نعوض بهذه التعبيرات في المعادلة 26.3 ونحل قوى القص:

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II} \tag{26.8}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II} \tag{26.9}$$

حيث:

$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\left[\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] + q\right]$$

23 من المهم جداً ملاحظة أن المعادلات المشتقة تقوم على: *الاتزان*، وعلاقة *الإجهاد–الانفعال*، و*التوافق*.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 26.1: علاقات القوة–الإزاحة في الكمرة

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II}$$

26.3.2 قوى الأطراف العقدية للانفعالات الابتدائية

24 عند وجود حمل حراري، أو انفعالات ابتدائية، يمكن تحديد القوى العقدية المكافئة كما يأتي:

الجملون

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T$$

الكمرة

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T^{avg}; \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T^{avg}$$

$$M_1^T = \frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}; \qquad M_2^T = -\frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}$$

حيث α معامل التمدد الحراري، و

$$T^{avg} = \frac{\Delta T^{top} + \Delta T^{bot}}{2}$$

25 للقوى الابتدائية، كما في *الأعضاء مسبقة الإجهاد*، يكفي تحديد $\alpha\Delta T$ بوصفه الانفعال الابتدائي الناتج من سبق الإجهاد.

26 في ملف بيانات إدخال الأحمال يكفي تحديد $\alpha\Delta T$ للجملون المحمّل حرارياً، وتحديد $\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})$ وh للكمرات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26.3.3 القوى العقدية المكافئة للعناصر الانحنائية

27 من المعادلات السابقة:

$$m(x) = \text{العزم الناتج من الأحمال المطبقة عند المقطع } x$$

$$f(x) = \int m(x)dx; \quad g(x) = \int f(x)dx; \quad q(x) = \int p(x)dx$$

الحمل الكلي على البحر

و

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] - q$$

26.3.3.1 الأحمال الموزعة بانتظام

28 لحمل موزع بانتظام w على كامل البحر:

$$m(x) = -\frac{1}{2}wx^2; \quad f(x) = -\frac{1}{6}wx^3; \quad g(x) = -\frac{1}{24}wx^4; \quad q = wL$$

29 بالتعويض:

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 3\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2\left(-\frac{1}{2}wL^2\right) - 4L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) + 6\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL}{2}$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] - wL = \frac{wL}{2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26.3.3.2 الأحمال المركزة

30 نستخدم دالة الخطوة الوحدية لإيجاد $m(x)$. لحمل مركز P يؤثر على بعد a من الطرف الأيسر، مع $b = L - a$:

$$\begin{aligned} m(x) &= -P(x-a)H_a && \rightarrow m(L) = -Pb \\ f(x) &= -\frac{1}{2}P(x-a)^2H_a && \rightarrow f(L) = -\frac{1}{2}Pb^2 \\ g(x) &= -\frac{1}{6}P(x-a)^3H_a && \rightarrow g(L) = -\frac{1}{6}Pb^3 \end{aligned}$$

حيث نعرّف $H_a = 0$ إذا كان $x < a$، و$H_a = 1$ إذا كان $x \geq a$، و

$$q = P$$

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 3\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb^2a}{L^2}$$

$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2(-Pb) - 4L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) + 6\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb}{1^2}\left(L^2 - 2Lb + b^2\right) = \frac{Pba^2}{L^2}$$

$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = -\frac{Pb^2}{L^3}(3L - 2b) = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$$

$$V_2^F = -\left(\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] + P\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$$

31 إذا طُبق الحمل عند منتصف البحر، $a = b = L/2$، تختزل المعادلات السابقة إلى:

$$\begin{aligned} M_1^F &= -\frac{PL}{8}; & M_2^F &= \frac{PL}{8}; \\ V_1^F &= -\frac{P}{2}; & V_2^F &= -\frac{P}{2}; \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



رامـي القرص (القرن الخامس قبل الميلاد، اليونان القديمة)

يجسد الجسد عند ذروة التوتر، حيث تحدد الإزاحات القوى اللازمة لرمي القرص.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

27 الصلابة بالحساب اليدوي

ملخص

انبثقت من طريقة الإزاحة، أي الصلابة، طريقتان طُورتا في أوائل القرن العشرين وتلائمان الحساب اليدوي. وقد استمر إدراجهما في كتب التحليل الإنشائي حتى اليوم، مع أن قيمتهما المعاصرة تعليمية في المقام الأول. ومع ذلك يبرز هذا الفصل مفاهيم مهمة، مثل توزيع العزوم على أساس الصلابات النسبية عند الوصلات، وقد يوفّر أحياناً طريقة عملية لتحليل منشأ بسيط. وتقتصر الطريقتان على الأعضاء الانحنائية. يتناول القسم الأخير النظير الرياضي لحل طريقة الميل والانحراف، أي غاوس–جوردان، وطريقة توزيع العزوم، أي غاوس–سايدل.

27.1 مقدمة 941
27.2 الميل والانحراف؛ الحل المباشر 941
27.2.1 أمثلة 943
27.3 توزيع العزوم 952
27.3.1 مقدمة 952
27.4 الميل والانحراف؛ توزيع العزوم؛ غاوس–سايدل 957
27.4.1 مثال 27.8: الميل والانحراف/توزيع العزوم/غاوس–سايدل 957

27.1 مقدمة

1 مهّد الفصل السابق لطريقة الصلابة، أو الإزاحة، باشتقاق علاقات القوى بدلالة الإزاحات المعلومة في الأعضاء الانحنائية. واشتُقت العلاقات المناظرة للقص والالتواء في الفصل 23.

2 بينما تلائم طريقة المرونة، أو القوى، الحساب اليدوي فقط، تتخذ طريقة الصلابة صورتين: الحساب اليدوي، والأتمتة ببرنامج حاسوبي من خلال طريقة الصلابة المباشرة، الفصل 43.

3 لذلك يعرض هذا الفصل طريقتي الحساب اليدوي التقليديتين: الميل والانحراف، وتوزيع العزوم.

27.2 الميل والانحراف؛ الحل المباشر

للسياق التاريخي، انظر §11.5.2

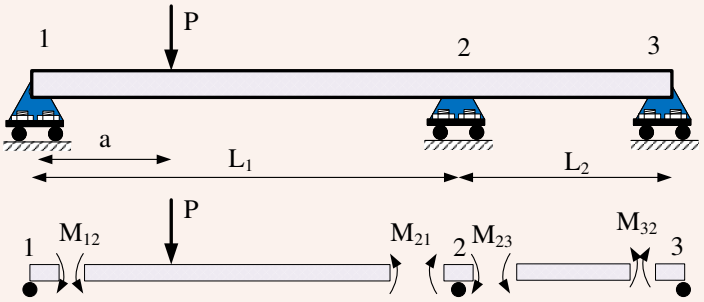
4 اشتق Bendixen, 1914 الطريقة، ثم طوّرها §11.5.2) (Maney, 1915).

5 نوضح الطريقة أولاً بالشكل 27.1، حيث تكون الكمرة البسيطة غير محددة استاتيكياً من الدرجة الأولى.

نحدد درجة عدم التحديد الحركي (§39.5): ثلاثة دورانات θ_1 وθ_2 وθ_3 عند المساند، أي ثلاث درجات حرية.

6 نقسم المنشأ عند جانبي القيود، ونرسم مخططات الجسم الحر، ونفترض عزوماً موجبة عند طرفي كل جزء. ثم يمكن التعبير عن العزوم بدلالة الدورانات المجهولة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 27.1: مثال توضيحي لطريقة الميل والانحراف

7 باستعمال المعادلتين 26.6 و26.7 نحصل على:

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) + FEM_{12}; \quad M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) + FEM_{21}; \\ M_{23} &= 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3); \qquad\qquad M_{32} = 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3); \end{aligned} \tag{27.1}$$

نتذكر أن $K = I/L$.

8 لدينا ثلاثة مجاهيل θ_1 وθ_2 وθ_3، ونحتاج إلى ثلاث معادلات اتزان[1]. نكتب معادلة *اتزان* واحدة عند كل مسند:

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} &= 0 \end{aligned}$$

بالتعويض نحصل على:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 4K_{12} & 2K_{12} & 0 \\ 2K_{12} & 4(K_{12}+K_{23}) & 2K_{23} \\ 0 & 2K_{23} & 4K_{23} \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة الصلابة}} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{F_{int}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{FEM_{12}}{2EK_{12}} \\ -\frac{FEM_{21}}{2E} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{F_{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

حيث يمكن تحديد عزم الطرف المثبت بصورة مستقلة. وهذه معادلة *اتزان* كلي.

9 نحل الإزاحات أولاً، ثم نعوض في المعادلة 27.1 لتحديد العزوم عند طرفي كل جزء من الكمرة.

10 المتطلبات الحسابية أقل بكثير من طريقة المرونة، أو طريقة التشوه المتوافق، لأن علاقات القوة–الإزاحة أُدرجت ضمنياً، مع الانتباه إلى أننا نقارن مجاهيل استاتيكية بأخرى حركية.

[1] قارن ذلك بطريقة معادلة العزوم الثلاثة (§25.3)، حيث كتبنا معادلة توافق للدوران عند العقدة، بينما نكتب هنا معادلة اتزان.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

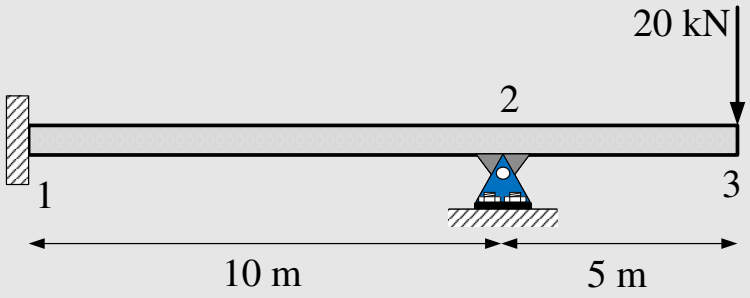
تعريف 27.1: طريقة الميل والانحراف

1. نرسم الشكل المشوه.
2. نحدد درجات الحرية المجهولة عند المساند، من دورانات وانحرافات.
3. نكتب معادلات الاتزان عند جميع المساند بدلالة عزوم الأطراف.
4. نعبر عن عزوم الأطراف بدلالة دورانات المساند وانحرافاتها وعزوم الأطراف المثبتة.
5. نعوض التعبيرات المستخرجة في الخطوة السابقة في معادلات الاتزان.
6. نحل معادلات الاتزان لتحديد دورانات المساند و/أو انحرافاتها المجهولة.
7. نستخدم معادلات الميل والانحراف لتحديد عزوم الأطراف.
8. نرسم مخطط العزم، مع الانتباه إلى اختلاف اصطلاح الإشارة بين عزوم الميل والانحراف ومخطط العزم.

27.2.1 أمثلة

27.2.1.1 مثال 27.1: كمرة كابولية

نريد تحديد M_{12} للكمرة الآتية:



1. الكمرة غير محددة حركياً من الدرجة الثالثة، θ_2 Δ_3 θ_3؛ إلا أن استبدال الجزء البارز بعزم طرف مثبت مقداره 100+ kN.m عند المسند 2 يخفض درجة عدم التحديد الحركي إلى واحد، θ_2.
2. علاقة الاتزان هي $M_{21} + M_{23} = 0$، أو $M_{21} + 100 = 0$.
3. عزوم أطراف الأعضاء بدلالة الدورانات، من المعادلتين 26.6 و26.7، هي:

$$M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{4}{10}EI\theta_2 \; {}_2\theta \text{ نحل}$$

$$M_{12} = 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{2}{10}EI\theta_2 \text{ نحل عزم الطرف}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. نعوض في معادلات الاتزان ونحل θ_2:

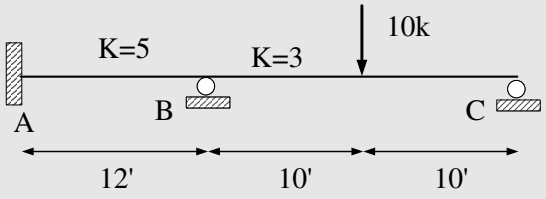
$$\theta_2 = \frac{10}{4EI} M_{21} = \frac{10}{4EI}(-100) = -\frac{250}{EI}$$

(الدوران مع عقارب الساعة سالب).

5. نعوض ونحل M_{12}:

$$M_{12} = \frac{2}{10} EI\theta_2 = -\frac{2}{10} EI \frac{250}{EI} = -50 \text{ kN.m}$$

27.2.1.2 مثال 27.2: كمرة مستمرة



1. $PL/8 = (10)(20)/8 = 25 \text{FEM} =$

2. معادلات الاتزان:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0; \quad M_{CB} = 0$$

3. تعبيرات العزوم:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B = 2EK_{AB}\theta_B = 10E\theta_B$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A) = 4EK_{AB}\theta_B = 20E\theta_B$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) + 25 = 4EK_{BC}\theta_B + 2EK_{BC}\theta_C + 25 = 12E\theta_B + 6E\theta_C + 25$$
$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_B) - 25 = 4EK_{BC}\theta_C + 2EK_{BC}\theta_B - 25 = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25$$

4. نعوض في معادلات الاتزان:

$$\begin{cases} 32E\theta_B + 6E\theta_C = -25 \\ 6E\theta_B + 12E\theta_C = 25 \end{cases}$$

5. بالحل:

$$\theta_B = -\frac{75}{58E} = -\frac{1.293}{E}$$
$$\theta_C = -\frac{475}{174E} = \frac{2.730}{E}$$

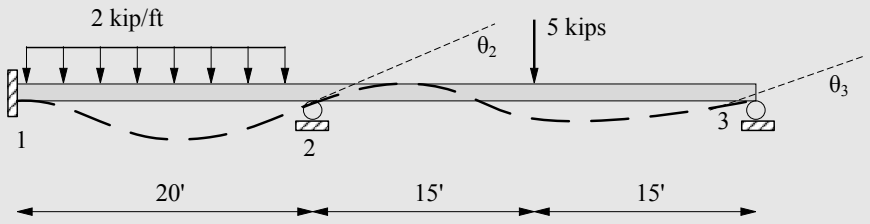
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. نعوض للحصول على العزوم:

$$M_{AB} = 10E\theta_B = -10E\frac{75}{58E} = -12.9310$$
$$M_{BA} = 20E\theta_B = -20E\frac{75}{58E} = -25.8621$$
$$M_{BC} = 12E\theta_B + 6E\theta_c + 25 = -12E\frac{75}{58E} + 6E\frac{475}{174E} + 25 = 25.8621$$
$$M_{CB} = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25 = -6E\frac{75}{58E} + 12\frac{475}{174E} - 25 = 0\checkmark$$

27.2.1.3 مثال 27.3: كمرة ذات بحرين

نريد رسم مخطط العزم للكمرة الآتية:



1. المجهولان هما θ_2 وθ_3.
2. علاقتا الاتزان هما $M_{21} + M_{23} = 0$ و$M_{32} = 0$.
3. عزوم الأطراف المثبتة هي:

$$FEM_{12} = -FEM_{21} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(2)(20)^2}{12} = 66.67 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{23} = -FEM_{32} = -\frac{PL}{8} = \frac{(5)(30)}{8} = 18.75 \text{ k.ft}$$

4. عزوم أطراف الأعضاء بدلالة الدورانات، من المعادلتين 26.6 و26.7، هي:

$$M_{12} = 2EK_{12}(\theta_2) + FEM_{12} = \frac{2EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{12} = \frac{EI}{10}\theta_2 + 66.67 \quad \text{غير مستخدم}$$
$$M_{21} = 2EK_{12}(2\theta_2) + FEM_{21} = \frac{4EI}{L_1}\theta_2 + FEM_{21} = \frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67$$
$$M_{23} = 2EK_{23}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{2EI}{L_2}(2\theta_2 + \theta_3) + FEM_{23} = \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75$$
$$M_{32} = 2EK_{23}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{2EI}{L_2}(\theta_2 + 2\theta_3) + FEM_{32} = \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. بالتعويض في معادلات الاتزان:

$$\frac{EI}{5}\theta_2 - 66.67 + \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + 18.75 = 0$$
$$\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 - 18.75 = 0$$

أو

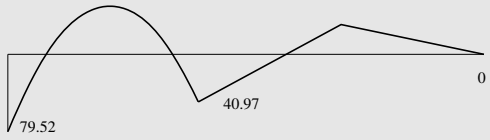
$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة الصلابة}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{\text{القوة الداخلية}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 718.8 \\ 281.25 \end{Bmatrix}}_{\text{القوة الخارجية}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مما يعطي $EI\theta_2 = 128.48$ و$EI\theta_3 = 76.38$.

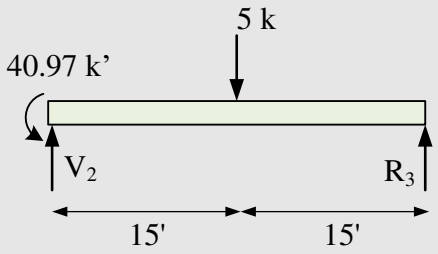
6. نعوض ثانيةً لحساب العزوم:

$$M_{12} = \frac{128.48}{10} + 66.67 \qquad = 79.52 \text{ k.ft}$$
$$M_{21} = \frac{128.48}{5} - 66.67 \qquad = -40.97 \text{ k.ft}$$
$$M_{23} = \frac{128.48}{7.5} + \frac{76.38}{15} + 18.75 \qquad = 40.97 \text{ k.ft} \checkmark$$
$$M_{32} = \frac{128.48}{15} + \frac{76.38}{7.5} - 18.75 \qquad = 0 \text{ k.ft} \checkmark$$

نلاحظ أن المعادلتين الأخيرتين كُتبتا فقط للتحقق من الحسابات.



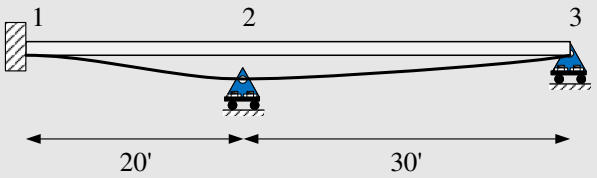
7. نلاحظ أن عزم منتصف البحر يجب أن يُحسب مستقلاً من معادلات الاتزان لإكمال المخطط.
8. نحصل على رد الفعل عند 3 من الاتزان:



$$15(5) - 30R_3 - 40.97 = 0 \Rightarrow R_3 = 1.134$$
$$V_2 = 5 - 1.134 = 3.77$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

27.2.1.4 مثال 27.4: كمرة ذات بحرين وإزاحة ابتدائية



1. لأن التحليل مرن خطي، يمكن تحليل الكمرة لهبوط المسند بصورة مستقلة، ثم جمع العزوم الناتجة منه مع عزوم الأحمال المطبقة.
2. المجهولان هما θ_2 وθ_3.
3. علاقتا الاتزان هما $M_{21}+M_{23}=0$ و$M_{32}=0$.
4. عزوم أطراف الأعضاء بدلالة الدورانات، من المعادلتين 26.6 و26.7، هي:

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{10}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{21} &= 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(2\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{5}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{23} &= 2EK_{23}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300}\\
M_{32} &= 2EK_{23}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{EI}{300}
\end{aligned}
$$

5. بالتعويض في معادلات الاتزان:

$$
\begin{aligned}
\frac{EI}{5}EI\theta_2 + \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300} &= 0\\
\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{5EI}{300} &= 0
\end{aligned}
$$

أو

$$
\underbrace{EI\begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{\text{مصفوفة الصلابة}} - \underbrace{EI\begin{Bmatrix} -\frac{13}{4} \\ -1 \end{Bmatrix}}_{\text{القوة الخارجية}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

القوة الداخلية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

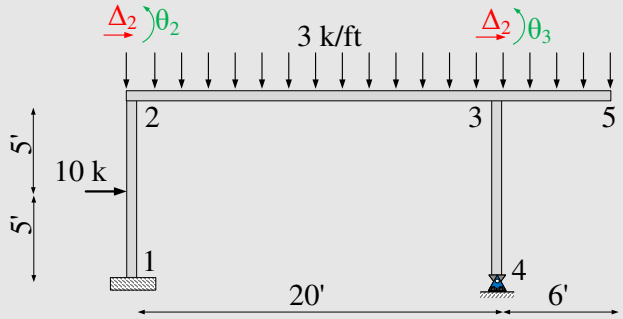
مما يعطي $\theta_2 = -\frac{5.5}{180} = -0.031$ radians و$\theta_3 = \frac{-1+\frac{5.5}{9}}{40} = -0.0097$ radians.

6. ومن ثم تكون العزوم الإضافية الناتجة من الهبوط:

$$M_{12} = \frac{EI}{10}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0044EI$$
$$M_{21} = \frac{EI}{5}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0013EI$$
$$M_{23} = \frac{EI}{7.5}(-0.031) + \frac{EI}{15}(-0.0097) + \frac{EI}{300} = -0.0013EI \checkmark$$
$$M_{32} = \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}(0.0097) + \frac{EI}{300} = 0. \checkmark$$

27.2.1.5 مثال 27.5: إطار

حدد عزوم الأطراف للإطار الآتي، حيث $I = 60$ in^4 للأعضاء الرأسية و24 in^4 للأعضاء الأفقية.



1. يمكن إدراج تأثير الكابولي 35 باستبداله بعزم طرفه:

$$M_3 = -wL\frac{L}{2} = -(3)(6)(3) = -54 \text{ k.ft}$$

2. الإزاحات والدورانات المجهولة هي:
   - Δ_2 وθ_2 عند العقدة 2.
   - θ_3 وθ_4 عند العقدتين 3 و4.

نلاحظ أنه بسبب غياب التناظر ستنشأ إزاحة جانبية في الإطار، ومع إهمال التشوهات المحورية يكون $\Delta_2 = \Delta_3$.

3. علاقات الاتزان هي:

$$M_{21} + M_{23} = 0$$
$$M_{32} + M_{34} = -54$$
$$M_{43} = 0$$
$$V_{12} + V_{43} - 10 = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهكذا لدينا أربع إزاحات مجهولة وأربع معادلات. غير أن المعادلتين الأخيرتين مكتوبتان بدلالة قوى القص، ونحتاج إلى كتابتهما بدلالة عزوم الأطراف. ويتحقق ذلك باستعمال علاقتي الاتزان الآتيتين:

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$
$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

ومن ثم أصبحت المعادلات الأربع كلها بدلالة العزوم.

4. عزوم الطرفين المثبتين للعضو 23 هي:

$$M_{21}^F = -\frac{PL}{8} = -\frac{-(10)(10)}{8} = 12.5 \text{ k.ft}$$
$$M_{23}^F = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{-(3)(20)^2}{12} = 100 \text{ k.ft}$$

5. عزوم أطراف الأعضاء بدلالة الدورانات، من المعادلتين 26.6 و26.7، هي:

$$M_{12} = 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12}^F = 0.2EI(\theta_2 - 0.3\Delta_2) + 12.5$$
$$M_{21} = 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{21}}\right) + M_{21}^F = 0.2EI(2\theta_2 - 0.3\Delta_2) - 12.5$$
$$M_{23} = 2EK_{23}\,(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^F = 0.1EI(2\theta_2 + \theta_3) + 100.$$
$$M_{32} = 2EK_{32}\,(\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32}^F = 0.1EI(\theta_2 + 2\theta_3) - 100.$$
$$M_{34} = 2EK_{34}\left(2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2)$$
$$M_{43} = 2EK_{43}\left(\theta_3 + 2\theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2)$$

6. نعوض في معادلات الاتزان ونقسم على EI:

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = -\frac{875}{EI}$$
$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$
$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

وتُستخرج معادلة الاتزان الأخيرة بالتعويض عن V_{12} وV_{43} والضرب في $10/EI$:

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = -\frac{83.3}{EI}$$

أو

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة الصلابة}} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

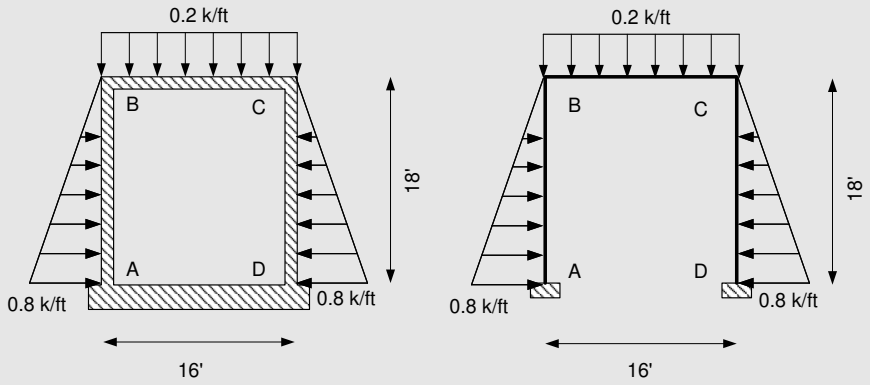
مما يعطي:

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1,375.7 \end{Bmatrix}$$

7. يعطي التعويض في معادلات الميل والانحراف عزوم الأطراف:

$$\begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36.0 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.80 \\ 61.78 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

27.2.1.6 مثال 27.6: عبّارة صندوقية



1. من التناظر $\theta_B = -\theta_C$، وعند القاعدة $\theta_A = \theta_D = 0$؛ ولذلك لدينا مجهول واحد فقط، فلا إزاحة جانبية ولا إزاحة رأسية نسبية.
2. عزوم الأطراف المثبتة هي:

$$FEM_{BC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(0.2)(16)^2}{12} = 4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(0.2)(16)^2}{12} = -4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{AB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{(0.8)(18)^2}{20} = 12.96 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{30} = \frac{(0.8)(18)^2}{30} = -8.64 \text{ k.ft}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. تُعطى العزوم بالعلاقات:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\theta_B}) + 4.267 = \frac{EI}{8}\theta_B + 4.267$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}(2\theta_B + 0) - 8.64 = \frac{2EI}{9}\theta_B - 8.64$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}(\theta_B) + 12.96$$

4. الاتزان عند العقدة B:

$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \tfrac{2EI}{9}\theta_B - 8.64 + \tfrac{EI}{8}\theta_B + 4.267 &= 0 \\ \theta_B &= -\tfrac{12.61}{EI} \end{aligned}$$

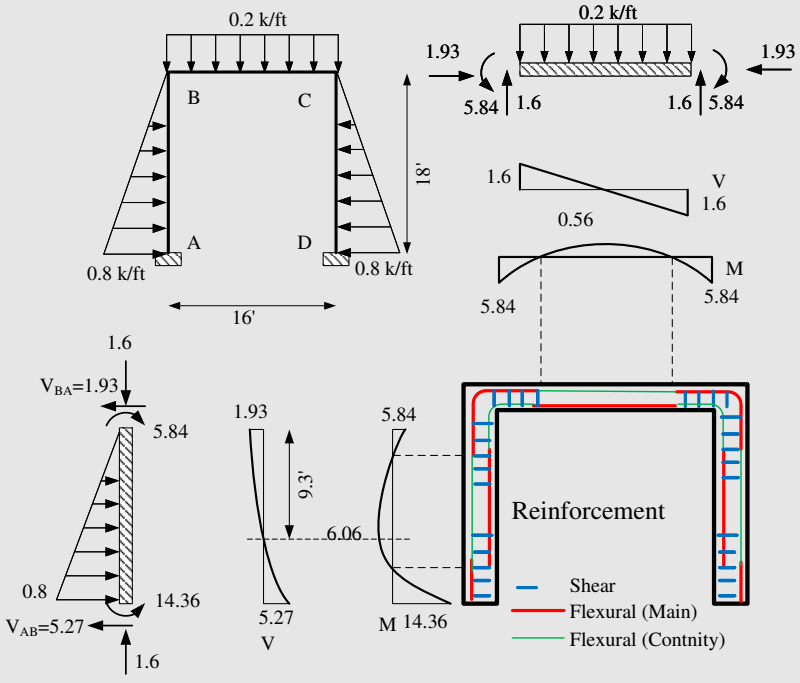
5. نعوض θ_B للحصول على العزوم:

$$M_{BC} = \frac{EI}{8}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 4.266 = 5.84 \text{ k.ft}\circlearrowleft$$

$$M_{AB} = \frac{EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 12.96 = 14.36 \text{ k.ft}\circlearrowleft$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) - 8.64 = -5.84 \text{ k.ft}\circlearrowright$$

6. تُحدد قوى الأعضاء من الاتزان. ويجب الانتباه إلى أن مخطط العزم يعتمد الآن ما يسمى اصطلاح إشارة «التصميم».



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

27.3 توزيع العزوم

للسياق التاريخي، انظر §11.5.3

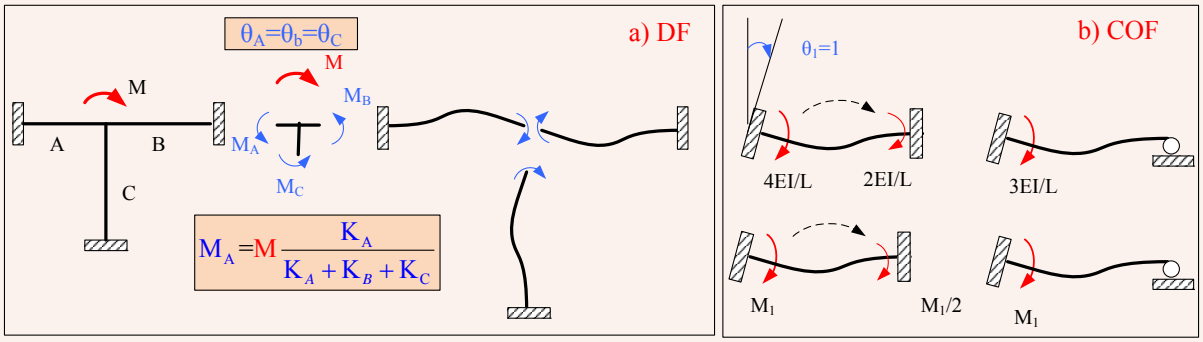
27.3.1 مقدمة

11 تتطلب طريقة الميل والانحراف قلب مصفوفة $n \times n$. وفي زمن لم تكن فيه متاحة إلا المساطر الحاسبة أو الآلات الميكانيكية، نحو ثلاثينيات القرن العشرين، ظهرت الحاجة إلى إجراء حل مبسط.

12 عملياً، تقابل طريقة توزيع العزوم طريقة الميل والانحراف كما تقابل غاوس–سايدل طريقة غاوس–جوردان في حل المعادلات الخطية؛ إذ نستبدل قلب المصفوفة المباشر بحل تكراري.

13 فيزيائياً، يعني ذلك: قفل جميع العقد ← تحريرها بالتتابع، عقدةً واحدة في كل مرة، ← توزيع العزوم الداخلية وموازنتها حتى تدور جميع العقد إلى مواضع اتزانها النهائية، أو القريبة جداً منها[2].

14 لفهم الطريقة بصورة أفضل، نعرّف أولاً بعض المصطلحات الأساسية، الشكل 27.2.



شكل 27.2: المفاهيم الأساسية لتوزيع العزوم

اصطلاح الإشارة

15 اصطلاح الإشارة هو نفسه المعتمد في طريقة الميل والانحراف؛ فالعزم بعكس اتجاه عقارب الساعة عند طرف *العنصر* موجب.

عزوم الأطراف المثبتة

16 عزوم الأطراف المثبتة هي مجموعة القوى نفسها المعرّفة في طريقة الميل والانحراف لكمرة موصولة اتصالاً صلباً عند طرفيها.

[2] هذه *تقنية استرخاء* مماثلة لطريقة ساوثويل (Southwell, 1935).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17 ووفق اصطلاح الإشارة، فهي العزوم التي يسببها الحمل المطبق عند طرفي الكمرة، مع افتراض اتصالهما اتصالاً صلباً.

معامل الصلابة

18 نعرّف معامل *الصلابة* بأنه *العزم اللازم لتدوير طرف كمرة زاوية وحدية مقدارها راديان واحد، مع تثبيت الطرف الآخر*. من المعادلة 26.4 نضع $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$ و$\theta_1 = 1$، فنحصل على:

$$K = \frac{4EI}{L} \quad \text{الطرف البعيد مثبت}$$

19 نلاحظ أن هذا التعريف يختلف قليلاً عن تعريف طريقة الميل والانحراف، I/L.

20 إذا كان الطرف البعيد للكمرة مفصلياً لا مثبتاً، نحصل على معامل *صلابة مخفض*. من المعادلتين 26.4 و26.5، مع $M_2 = v_1 = v_2 = 0$، نحصل على:

$$M_2 = \frac{2EI_z}{L}(\theta_1 + 2\theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{\theta_1}{2}$$

بالتعويض في M_1:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2EI_z}{L}(2\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_2 &= -\frac{\theta_1}{2} \end{aligned}\right\} M_1 = \frac{3EI}{L}\theta_1 \quad \text{الطرف البعيد مفصلي}$$

21 بمقارنة الصلابة المخفضة $\frac{3EI}{L}$ بصلابة الكمرة، نعرّف معامل *الصلابة المخفض*:

$$\text{معامل الصلابة المخفض} = \frac{K_{red}}{K} = \frac{3}{4} \quad \text{الطرف البعيد مفصلي}$$

معامل التوزيع (DF)

22 إذا أثّر عزم في عقدة ذات اتصال صلب تتصل بها n أعضاء، فمن الاتزان:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

ولكن من المعادلة 26.6، ومع *افتراض تثبيت الطرف الآخر للعضو*:

$$M = K_1\theta + K_2\theta + \cdots + K_n\theta$$

أو

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i}{\Sigma K_i}$$

23 إذا طُبق عزم M عند عقدة، فإن الجزء الذي يحمله كل عضو متصل بها يتناسب مع معامل توزيعه؛ وكلما زادت صلابة العضو زاد العزم الذي يحمله.

24 وبالمثل، $DF = 0$ للطرف المثبت و$DF = 1$ للمسند المفصلي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

معامل الانتقال

25 مرة أخرى، من المعادلتين 26.6 و26.7:

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + M_1^F$$
$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + M_2^F$$

نلاحظ أنه إذا قُيد أحد طرفي الكمرة، $\theta_2 = \psi = 0$، ولم يوجد حمل على العضو، تختزل المعادلتان السابقتان إلى:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 2EK(2\theta_1) \\ M_2 &= 2EK(\theta_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}M_1$$

26 ومن ثم يمثل معامل الانتقال في هذه الحالة الجزء من M الذي «ينتقل» من الطرف الدائر إلى الطرف المثبت.

$$CO = \frac{1}{2} \text{ الطرف البعيد مثبت}$$

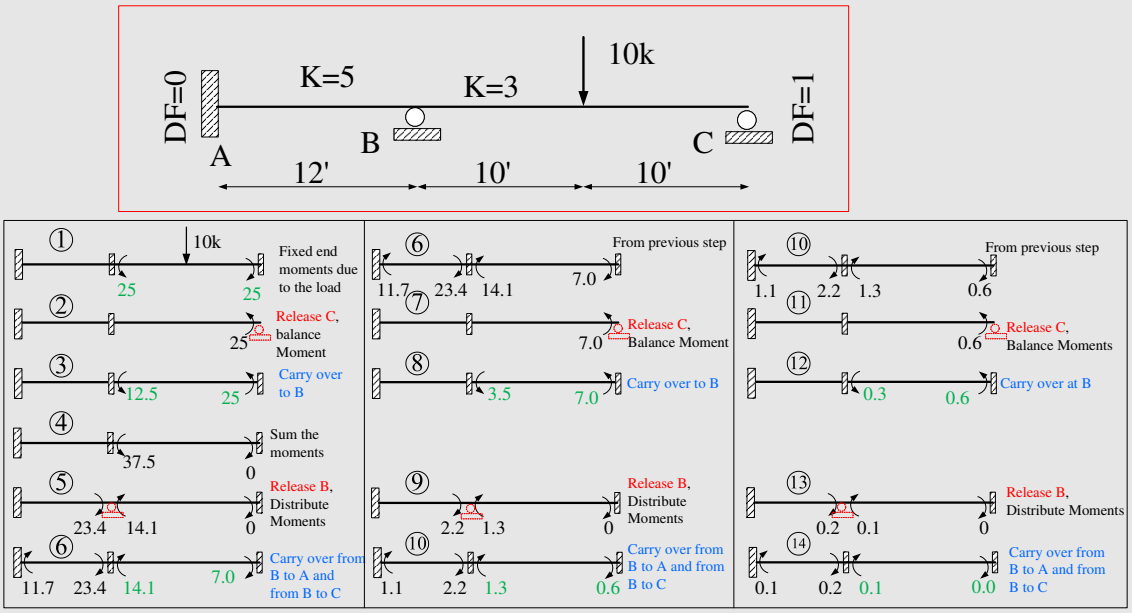
27 إذا كان الطرف البعيد مفصلياً فلا ينتقل أي عزم.

تعريف 27.2: توزيع العزوم

1. نقيد جميع الدورانات والانتقالات.
2. نطبق الحمل ونحدد عزوم الأطراف المثبتة، وقد تنتج من تحميل العنصر أو انتقال المسند.
3. عند أي عقدة i لا يتحقق الاتزان، $M_{left}^F \neq M_{right}^F$، ويكون العزم الصافي M_i.
4. نفرض الاتزان بتطبيق $-M_i$ عند العقدة؛ أي إننا نوازن القوى عندها.
5. يعتمد الجزء من M_i الذي يذهب إلى كل عنصر متصل بالعقدة i على معامل التوزيع.
6. لكن عند تطبيق جزء من $-M_i$ في طرف كمرة بينما يبقى الطرف الآخر مقيداً، تبين المعادلة 26.6 أن نصف ذلك العزم يجب أن ينتقل أيضاً إلى الطرف الآخر.
7. ثم نقفل العقدة i وننتقل إلى العقدة j حيث نكرر العمليات:
   (a) نجمع العزوم.
   (b) نوازن العزوم.
   (c) نوزع العزوم، K, DF.
   (d) ننقل العزوم، CO.
   (e) نقفل العقدة.
8. نكرر العمليات السابقة حتى تتزن جميع العقد، ثم نجمع كل العزوم.
9. يسهل تنفيذ العمليات السابقة بجدول مناسب.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

27.3.1.1 مثال 27.7: كمرة مستمرة



1. لهذا المثال، الذي حُل سابقاً بطريقة الميل والانحراف في §27.2.1.2، تُحسب عزوم الأطراف المثبتة كما يأتي:

$$M_{BC}^F = \frac{PL}{8} = \frac{(10)(20)}{8} = +25.0 \text{ k.ft}$$
$$M_{CB}^F = -25.0 \text{ k.ft}$$

2. بما أن الصلابة النسبية معطاة لكل بحر، فإن معاملات التوزيع هي:

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0,$$
$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5+3} = 0.625,$$
$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5+3} = 0.375,$$
$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1.$$

3. تُبين حسابات الموازنة أدناه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

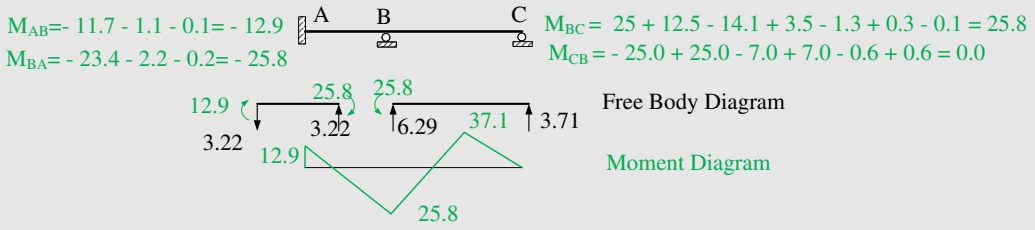
العقدة	A	B		C	الانتقال الموازنة الخطوة		
العضو	AB	BA	BC	CB			
K	5	5	3	3			
DF	0	0.625	0.375	1			
FEM			25.0+	25.0-	①		
			12.5+	25.0+	③ ②	C	BC
	11.7-	23.4-	14.1-	7.0-	⑥ ⑤ ④	B	AB; CB
			3.5+	7.0+	⑧ ⑦	C	BC
	1.1-	2.2-	1.3-	0.6-	❶ ⑩ ⑨	B	AB; CB
			0.3+	0.6+	❸ ❷	C	BC
	0.1-	0.2-	0.1-		❹	B	AB
المجموع	12.9-	25.8-	25.8+	0			

4. نلاحظ أننا حصلنا على النتائج نفسها المستخرجة بطريقة الميل والانحراف في §27.2.1.2.

5. يمكن التحقق جزئياً من صحة الإجابات بإثبات أن $\Sigma M = 0$ عند كل عقدة. غير أن تحقق هذه *المعادلة* في *الإجابات النهائية عند كل عقدة لا يثبت صحة عزوم الأطراف المثبتة الابتدائية*. لذلك ينبغي مراجعة تلك العزوم بعناية شديدة قبل بدء الموازنة. وقد تقع أحياناً أخطاء متعوضة أثناء الموازنة لا يكشفها فحص $\Sigma M = 0$ عند كل عقدة.

6. لرسم مخططي القص والعزم النهائيين، نرسم أولاً مخطط الجسم الحر لكل جزء من الكمرة مع العزوم المحسوبة، ثم نحسب ردود الأفعال من الاتزان:

$$12.9 + 25.8 - 12V_A = 0 \Rightarrow V_A = R_A = 3.22 \text{ k} \downarrow$$
$$V_A + V_B^L = 0 \Rightarrow V_B^L = -3.22 \text{ k} \uparrow$$
$$25.8 + (10)(10) - 20V_B^R = 0 \Rightarrow V_B^R = 6.29 \text{ k} \uparrow$$
$$6.29 + V_C - 10 = 0 \Rightarrow V_C = R_C 3.71 \text{ k} \uparrow$$
$$-V_B^L - V_B^R + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 9.51 \text{ k} \uparrow$$
$$\text{التحقق: } R_A + R_B + R_C - 10 = -3.22 + 9.51 + 3.71 - 10 = 0 \checkmark$$
$$M_{BC}^{+} = (3.71)(10) = 37.1 \text{ k.ft}$$



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

27.4 الميل والانحراف؛ توزيع العزوم؛ غاوس–سايدل

28 حللنا الكمرة نفسها بطريقة الميل والانحراف وطريقة توزيع العزوم في §27.2.1.2 و§27.3.1.1، على الترتيب. ولأن الطريقة الثانية تكرارية، فهي تذكّر مباشرةً بطريقة غاوس–سايدل لحل منظومة معادلات خطية، المعروضة في §L.2.3.1.

29 ويمكن إثبات ما يأتي بسهولة:

تعريف 27.3: توزيع العزوم والميل والانحراف وغاوس–سايدل

إذا حُلّت منظومة المعادلات الخطية المرتبطة بطريقة الميل والانحراف تكرارياً بطريقة غاوس–سايدل، فإن كل خطوة تطابق تماماً خطوة مناظرة في طريقة توزيع العزوم التكرارية. ولذلك تعطي الطريقتان النتائج التقريبية النهائية نفسها بعد العدد نفسه من التكرارات.

30 نوضح ذلك في المثال الآتي.

27.4.1 مثال 27.8: الميل والانحراف/توزيع العزوم/غاوس–سايدل

حُلّت الكمرة نفسها بطريقة الميل والانحراف، §27.2.1.2، وبطريقة توزيع العزوم، §27.3.1.1.

1. نعيد الآن النظر في المسألة بحل صياغة الميل والانحراف وكتابتها على الصورة:

$$E\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

نحلها الآن بطريقة غاوس–سايدل التكرارية: ثم نقارن تكرارات توزيع العزوم بتكرارات غاوس–سايدل.

2. نبدأ بـ$\theta_C = \theta_B = 0$، ثم نحل بالتتابع $\theta_C \to \theta_B \to \theta_C \cdots$ حتى التقارب.
3. يلخص الجدول الآتي خطوات غاوس–سايدل:

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$E\theta_C$	0.0	2.083	2.670	2.724	2.729	2.730
$E\theta_B$	0.0	1.172-	1.282-	1.292-	1.293-	1.293-
M_{AB}	0.0	11.72-	12.82-	12.92-	12.93-	12.93-
M_{BA}	0.0	23.44-	25.63-	25.84-	25.86-	25.86-
M_{BC}	0.0	23.44	25.63	25.84	25.86	25.86
M_{CB}	0.0	7.03-	0.658-	0.062-	0.006-	0.000

4. استعدنا فعلاً العزوم المحسوبة سابقاً عند التكرار الخامس.
5. نلاحظ أننا في توزيع العزوم نحل العزوم مباشرةً، بينما نحدد في طريقة الميل والانحراف الدورانات أولاً ثم العزوم.
6. وأخيراً نقارن القيم *الوسيطة* لتوزيع العزوم بالقيم المناظرة لطريقة الميل والانحراف:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

	الطريقة	$n = 1$	$n = 2$
M_{AB}	MD	11.7-	12.8-=1.1-11.7-
	SD	11.7-	12.82-
M_{BA}	MD	23.4-	25.6-=2.2-23.4-
	SD	23.44-	25.63-
M_{BC}	MD	23.4=14.1-12.5+25	25.7=1.3-3.5+23.4
	SD	23.44	25.63
M_{CB}	MD	7.0-=7.0-25.0+25.0-	0.6-=0.6-7.0+7.0-
	SD	7.03-	0.658-

من الواضح أن الخطوات الوسيطة لتوزيع العزوم تقابل خطوات طريقة غاوس–سايدل التكرارية. ونصل إلى الاستنتاج نفسه لو بدأنا بحل θ_B.



جسر التنهدات، البندقية (1603)، أنطونيو كونتينو.

يوزع القوس المنحني برفق عزوم الانحناء والانحرافات، فيقدم تشبيهاً ملائماً للميل والانحراف وتوزيع العزوم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28 خطوط التأثير

ملخص

توفر خطوط التأثير طريقة لتحديد أكبر ردود أفعال أو قوى داخلية تصميمية ممكنة تنتج من حمل متحرك على المنشأ، ولذلك فهي جزء أساسي من التصميم الإنشائي. جاء هذا الفصل موجزاً عمداً ومكملاً للعرض السابق لمواضع الأحمال. ويبين إجراء تحديد خطوط التأثير، ثم يشرح مبدأ مولر–برسلاو وتطبيقه عليها.

28.1 مقدمة 959
28.2 الإجراء 959
28.2.1 مثال 28.1: خطوط التأثير لكمرة بسيطة الارتكاز 960
28.2.2 مثال 28.2: كمرة بسيطة الارتكاز ذات جزأين بارزين 962
28.3 مبدأ مولر–برسلاو 963
28.3.1 الاشتقاق 963

28.1 مقدمة

1 افترضنا حتى الآن ثبات الحمل، ولم نميز بين الحمل الثابت، أو الميت، والحمل المتغير، أو الحي. ولأن الحمل الحي يستطيع الحركة، يبرز سؤال أساسي: كيف يتأثر رد فعل أو قوة داخلية عند نقطة معينة بموضع الحمل الحي؟ ومن هنا نقدم مفهوم خط التأثير.

تعريف 28.1: خط التأثير

يبين خط التأثير كيف تتغير الاستجابة، مثل قوة القص أو عزم الانحناء أو رد الفعل، عند نقطة محددة في المنشأ أثناء انتقال حمل وحدي عبره.

2 يسهّل ذلك وضع الحمل بحيث يعظم قوة داخلية، كالقص أو العزم. رياضياً يمكن وصف خط التأثير بـ IL_{ij}، حيث تمثل IL الكمية المطلوبة، أي رد الفعل أو القص أو العزم، عند درجة الحرية i بسبب حمل وحدي عند درجة الحرية j.

28.2 الإجراء

3 في المنشآت المحددة استاتيكياً يتكون خط التأثير من مقاطع مستقيمة فقط بين قيم الإحداثيات الحرجة.

4 يحتوي خط تأثير قوة القص عند موضع معين على انقطاع انتقالي عند ذلك الموضع، ويساوي مجموع قيمتي القص الموجبة والسالبة فيه الوحدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5 باستثناء موضع المفصل الداخلي، يكون ميل خط تأثير القص واحداً على جانبي المقطع الحرج لأن عزم الانحناء مستمر عنده.

6 وبالمثل، يحتوي خط تأثير عزم الانحناء على انقطاع دوراني وحدي عند النقطة التي يُقيّم عندها العزم.

7 توجد طريقتان:

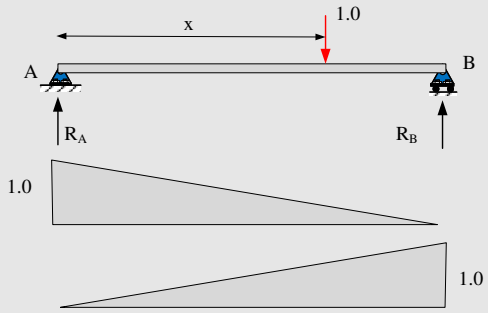
الاتزان: نكتب معادلة الدالة المطلوبة، مثل معادلة القص أو العزم أو القوة المحورية المتولدة عند نقطة بسبب حمل وحدي مطبق في أي موضع آخر على المنشأ.

مبدأ مولر–برسلاو: لرسم خطوط تأثير نوعية تتناسب طردياً مع خط التأثير الحقيقي.

28.2.1 مثال 28.1: خطوط التأثير لكمرة بسيطة الارتكاز

يتحرك حمل مركز متجه إلى أسفل مقداره وحدة واحدة من A إلى B عبر الكمرة البسيطة AB. نريد رسم خطوط تأثير ردود الفعل عند A وB، والقص والعزم عند C.

رد الفعل



من الاتزان:

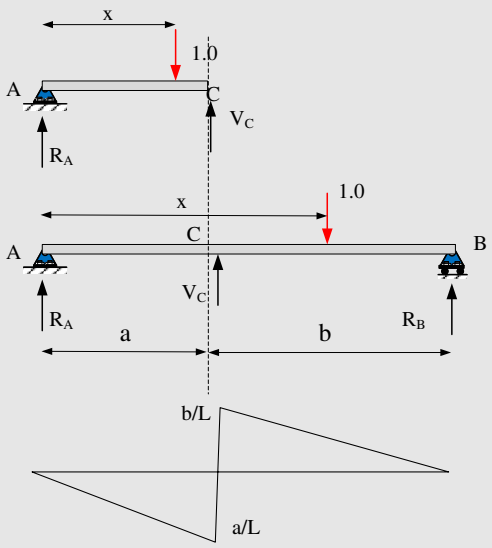
$$\Sigma M_B = 0$$
$$R_A L = 1.(L - x)$$
$$\Rightarrow R_{Ax} = 1 - \frac{x}{L}$$

وهي معادلة خطية في x لرد الفعل. وبالمثل:

$$\Sigma M_A = 0$$
$$R_B L = 1.0x \Rightarrow R_{Bx} = \frac{x}{L}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القص



الجزء AC:

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A(L) - (L-x)(1) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

V عند C بسبب حمل وحدي عند x إلى يسار C:

$$V_{Cx}^{-} = R_A - 1.0 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 1.0 = -\frac{x}{L}$$

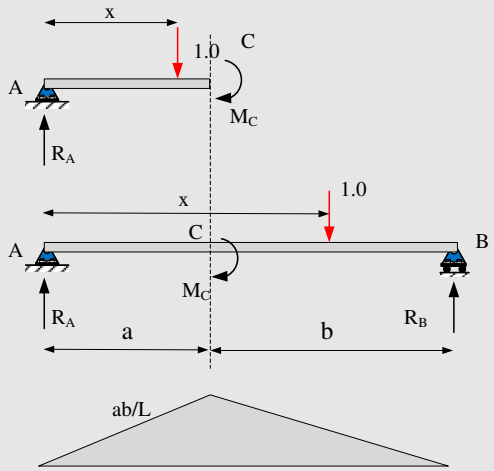
عندما $x = 0$ يكون $V_{CA} = 0$، وعندما $x = a$ قبيل النقطة C يكون $V_{CC} = -a/L$. إذا تجاوز الحمل الوحدي الجزء AC:

$$V_{Cx}^{+} = R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

عندما $x = a$ بعيد النقطة C يكون $V_{CC} = 1 - a/L = (L-a)/L = b/L$، وعندما $x = L$ يكون $V_{CB} = 1 - L/L = 0$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العزم



$$M_{Cx}^{-} = aR_A - 1.0(a-x) = a\left(1-\frac{x}{L}\right) - (a-x) = a - \frac{ax}{L} - a + x = -\frac{ax}{L} + x$$

عندما $x = 0$ يكون $M_{Cx} = 0$، وعندما $x = a$ قبيل النقطة C:

$$M_{CC} = -a^2/L + a = (-a^2 + aL)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

إذا تجاوز الحمل الوحدي الجزء AC:

$$M_{Cx}^{+} = aR_A = a(1-\frac{x}{L}) = a - \frac{ax}{L}$$

عندما $x = a$ بعيد النقطة C:

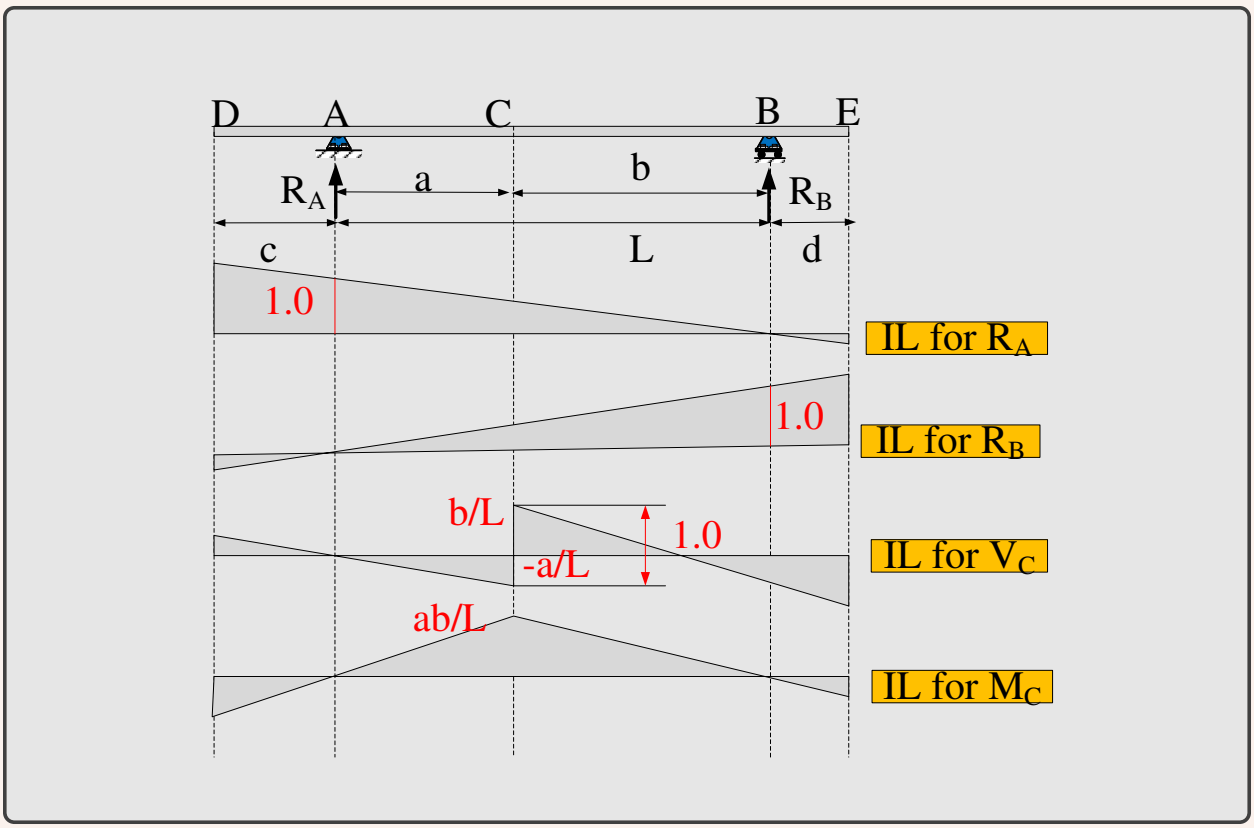
$$M_{CC} = a - a^2/L = (aL - a^2)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

وعندما $x = L$:

$$M_{CB} = a - aL/L = a - a = 0$$

28.2.2 مثال 28.2: كمرة بسيطة الارتكاز ذات جزأين بارزين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



28.3 مبدأ مولر–برسلاو

للسياق التاريخي، انظر §11.4.4

28.3.1 الاشتقاق

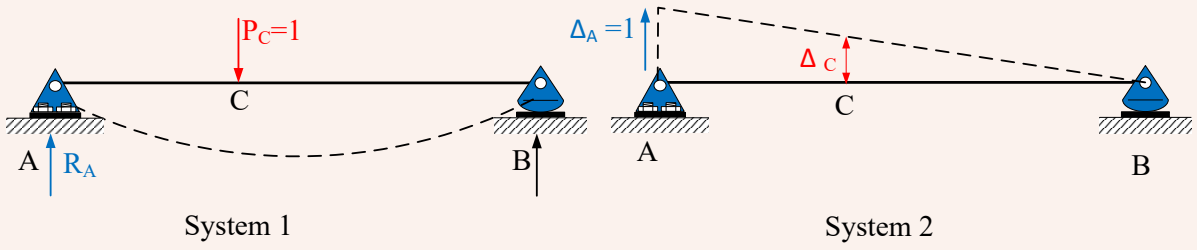
8 نتذكر مبرهنة ماكسويل–بيتي للتبادل (MBRT: §24.2.2)، يجب أن *يساوي الشغل الافتراضي الذي تبذله قوى النظام 1 عبر الإزاحات المناظرة في النظام 2، الشغل الافتراضي الذي تبذله قوى النظام 2 عبر الإزاحات المناظرة في النظام 1.*

9 ننظر الآن في النظامين المبينين في الشكل 28.1. حيث يمكن أن «تتحرك» القوة الوحدية P_C بين A وB، على غرار الحمل الوحدي المتحرك الذي يولد رد الفعل المناظر عند A. وبتطبيق مبرهنة ماكسويل–بيتي:

$$\underbrace{P_C}_{1}\ \Delta_C = R_A\ \underbrace{\Delta_A}_{1} \Rightarrow \Delta_C = R_A$$

ومن ثم تساوي الإزاحة عند C رد الفعل عند A. وهذه هي مبرهنة مولر–برسلاو.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

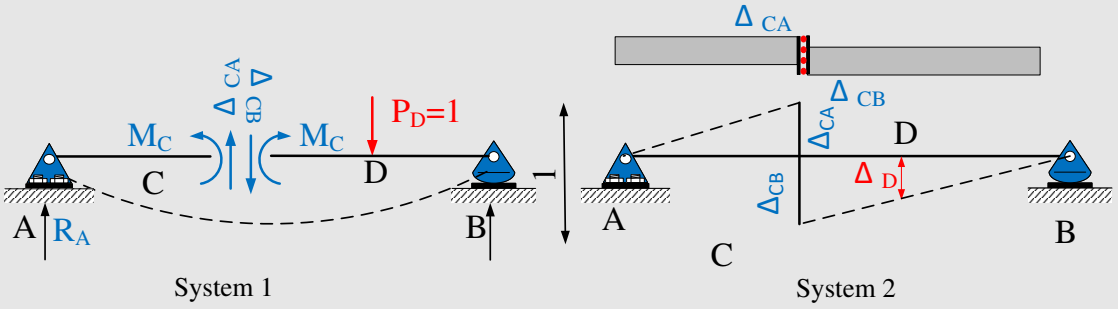


شكل 28.1: مبدأ مولر–برسلاو

تعريف 28.2: مبدأ مولر–برسلاو

يقابل خط التأثير لأي رد فعل أو قوة داخلية الشكل المشوه للمنشأ الناتج من إزالة قدرته على حمل تلك القوة، ثم فرض تشوه وحدي في المنشأ المعدل، أو المحرر، مناظر للقيد المزال.

28.3.1.1 مثال 28.3: مولر–برسلاو؛ خط تأثير القص



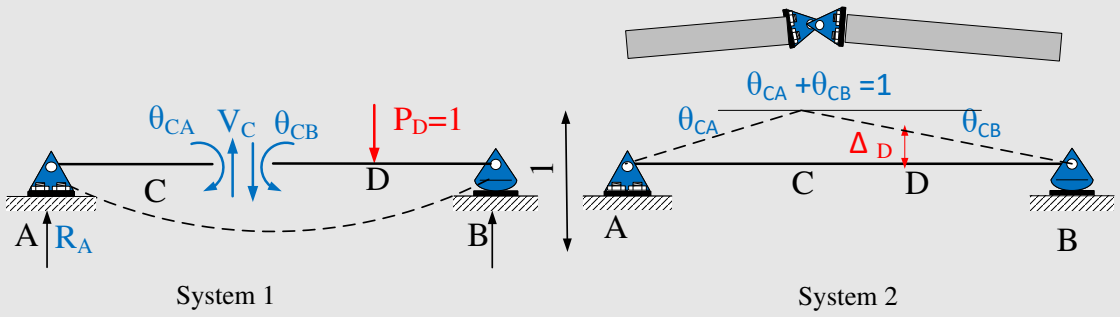
نطبق تحريراً للقص، من دون تحرير العزم، عند C. ومن مبرهنة ماكسويل–بيتي:

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\ \Delta_D = V_C\ \underbrace{(\Delta_{CA} + \Delta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = V_C$$

إذن يمثل الشكل المشوه في النظام 2 خط تأثير قوة القص V_C.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28.3.1.2 مثال 28.4: مولر–برسلاو؛ خط تأثير العزم



نطبق تحريراً للعزم، لا للقص، عند C. ومرة أخرى، من مبرهنة ماكسويل–بيتي:

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\ \Delta_D = M_C\ \underbrace{(\theta_{CA}+\theta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = M_C$$

إذن يمثل الشكل المشوه في النظام 2 خط تأثير العزم M_C.



عدو الحصان العربي، *إتيان-جول ماري، 1887؛ دراسة تصويرية زمنية.*

تأثير حمل متحرك، في موازاة تتبع خطوط التأثير لتغير القوى في المنشآت.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

29 التحليل المرن من الرتبة الثانية

ملخص

يتناول هذا الفصل تحليل المنشآت التي يؤثر فيها التشوه، أو الإزاحة، تأثيراً مهماً في الاستجابة الكلية ومعادلات الاتزان، مع بقاء سلوك المواد نفسها مرناً خطياً. ويُعرف هذا النوع بالتحليل المرن من الرتبة الثانية.

ينقسم الفصل إلى قسمين رئيسين. يتناول الأول مسائل الإزاحات الكبيرة في منشآت مستقرة، بينما يركز الثاني على مسائل الإزاحات الصغيرة التي قد تنتهي بعدم الاستقرار، وهو ما يُعرف بانبعاج أويلر.

كما تُعرض مماثلة بين المعادلة التفاضلية الحاكمة لانبعاج أويلر والمعادلة الحاكمة للاهتزازات الحرة.

وأخيراً يُختتم الفصل بمقدمة موجزة لمفهوم الطول الفعال، وهو مفهوم تصميمي، ولمخطط الأعمدة الذي يراعي الاستجابة غير المرنة.

سيُعرض النظير العددي لهذا الفصل لاحقاً ضمن اللاخطية الهندسية في الفصل

29.1 مقدمة 966
29.2 إزاحات كبيرة ومنشآت مستقرة 967
29.2.1 مثال 29.1: عدم الاستقرار الهندسي 967
29.2.2 مثال 29.2: تأثير الحمل المحوري في التشوه الانحنائي 968
29.2.3 مثال 29.3: الانحراف الكبير لكمرة كابولية 970
29.3 إزاحات صغيرة ومنشآت غير مستقرة . . . 974
29.3.1 قضبان صلبة متقطعة 974
29.3.2 الأنظمة المستمرة 978

.

29.1 مقدمة

1 حللنا حتى الآن منشآت مرنة خطية ذات إزاحات صغيرة، مما أتاح افتراض إزاحات متناهية الصغر لا تؤثر في مخطط الجسم الحر.

2 في تحليل الرتبة الثانية (SOA) لا يعود هذا الافتراض صالحاً. يجب إدراج التشوه تحت الحمل في مخطط الجسم الحر، كما في منشآت الكابلات، الفصل 30. ويوضح الشكل 53.5 هذا المفهوم.

3 تبقى أسس التحليل في SOA من دون تغيير، إذ يجب تحقيق المعادلات الحاكمة نفسها: الاتزان، والتوافق، وعلاقات الإجهاد–الانفعال. غير أن الفرق الجوهري هو وجوب مراعاة الإزاحات المحدودة في مخطط الجسم الحر. وقد تكون هذه الإزاحات صغيرة، مما يسمح بتبسيطات مثل $\sin\theta \simeq \theta$، لكنها ليست متناهية الصغر.

4 لذلك تكون عملية الحل عادةً أكثر تعقيداً، وقد تتطلب حل معادلات تفاضلية تُحدد ثوابتها من الشروط الحدية المعلومة.

5 توجد في الأساس فئتان من مسائل تحليل الرتبة الثانية:

إزاحات كبيرة ومنشآت مستقرة: تستطيع المنشآت المحافظة على هيئتها تحت الأحمال والعودة إلى موضعها الأصلي بعد زوالها.

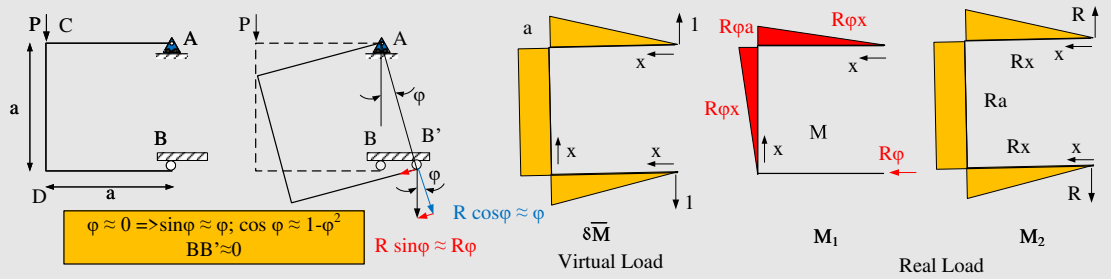
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إزاحات صغيرة ومنشآت غير مستقرة: تتعرض المنشآت تحت الأحمال لتشوهات صغيرة محدودة لا تعود بعدها إلى هيئتها الأصلية، مما يؤدي إلى فقدان الاتزان واحتمال الفشل بالانبعاج.

6 سندرس مسائل من الفئتين من خلال أمثلة توضيحية عديدة.

29.2 إزاحات كبيرة ومنشآت مستقرة

29.2.1 مثال 29.1: عدم الاستقرار الهندسي



إذا حاولنا تحديد رد الفعل عند المسند السفلي:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa = R \times 0 \Rightarrow R = \pm\infty$$

فإن النظام لا يكون في حالة اتزان في الوضع المبين.

كما يتضح وجود عدم استقرار هندسي، إذ تتلاقى جميع ردود الأفعال في نقطة واحدة (§19.1.5، §45.2.1.5).

لا يمكن تحديد رد الفعل إلا إذا راعينا الإزاحة الأفقية للمسند المتحرك السفلي.

عند زاوية متناهية الصغر ϕ نحصل على القوى السفلى المبينة في الشكل:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa - R\phi a \Rightarrow P = R\phi$$

نسعى بعد ذلك إلى حذف ϕ باشتقاق تعبيرين مستقلين لاستطالة AB إلى AB'.

ننظر أولاً في هندسة الشكل المشوه. يزداد طول الجزء AB إلى AB':

$$\Delta v = AB' - AB = a(1 - cos\phi) \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

ثم نحدد الكمية نفسها باستعمال طريقة القوة الافتراضية:

$$\begin{aligned}(1)\Delta v &= \int_0^a (1)x\frac{Rx}{EI}dx + \int_0^a (1)a\frac{R\phi x + Ra}{EI}dx + \int_0^a (1)x\frac{R\phi x + Rx}{EI}dx \\ &= \frac{Ra^3}{EI}\left(\frac{1}{3} + \frac{\phi}{2} + 1 + \frac{\phi}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI}\left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بما أن $\phi \ll 1$، يكون:

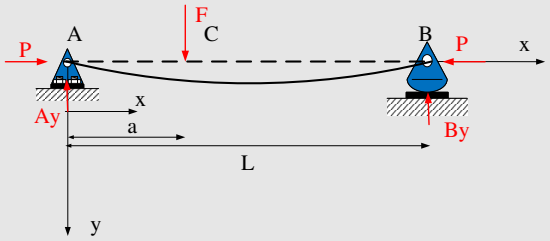
$$\Delta v \simeq \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI} \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

بالتعويض عن $\phi = \frac{P}{R}$ من أعلاه، يمكن حل R:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P^2EI}{10a^2}}$$

29.2.2 مثال 29.2: تأثير الحمل المحوري في التشوه الانحنائي

ندرس تأثير الحمل المحوري في صلابة كمرة–عمود حرة الدوران عند طرفيها وتتعرض لقوة مركزة مع قوة محورية ثابتة. نشتق تعبيرات الانحراف والقوى الداخلية للكمرة. يحل هذا المثال المسألة تحليلياً، وسنُحل لاحقاً عددياً بطريقة العناصر المحددة في §59.1.2.4.



$$\begin{aligned} EI\frac{d^2y_1}{dx^2} &= -Py_1 - A_y x &&= -Py - F(L-a) && x \le a \\ EI\frac{d^2y_2}{dx^2} &= -Py_1 - B_y(L-x) &&= -Py - F\tfrac{a}{L}(L-x) && x > a \end{aligned}$$

الحل العام لهذه المعادلات هو:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\cos(nx) + D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= C_2\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

حيث $n^2 = P/EI$.

نلاحظ أن الدالتين تعتمدان خطياً على F ولاخطياً على القوة المحورية P.

بتطبيق الشروط الحدية، تكون الإزاحات عند A وB صفراً، مما يؤدي إلى $C_1 = 0$ و$C_2 = -D_2\tan(nL)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= D_2\tan(nL)\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

ونعلم أن الإزاحة والميل مستمران عند C:

$$y_1 = y_2\big|_{x=a} \quad \text{و} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}\bigg|_{x=a}$$

بالتوسيع:

$$\begin{aligned} D_1\sin(na) &= D_2\left(\sin(na) - \tan(nL)\cos(na)\right) \\ D_1 n\cos(na) &= D_2 n\left(\cos(na) + \tan(nL)\sin(na)\right) + \frac{F}{P} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بحل D_1 وD_2:

$$D_1 = \frac{F\sin(n(L-a))}{Pn\sin(nL)} \quad \text{و} D_2 = -\frac{F\sin(na)}{Pn\tan(nL)}$$

ومن ثم يكون العزم:

$$M(x) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fn\sin(n(L-a))}{P\sin(nL)}\sin(nx)$$

يحدث العزم الأقصى إذا كان $a = L/2$؛ وعند $x = L/2$:

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI}\underbrace{\frac{3(\tan\phi-\phi)}{\phi^3}}_{\lambda_y} \quad \text{حيث} \phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{FL}{4}\underbrace{\frac{\tan\phi}{\phi}}_{\lambda_M}$$

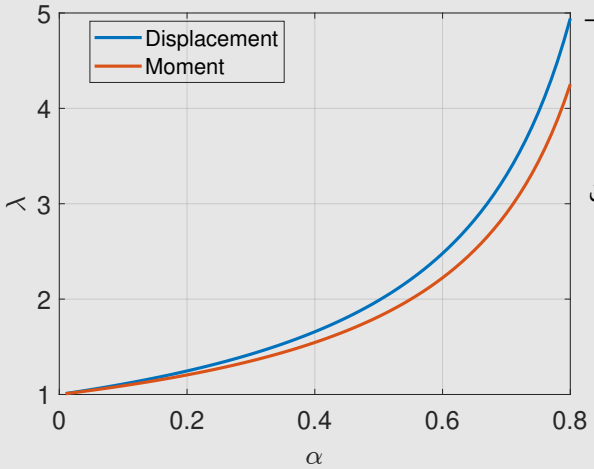
حيث تمثل λ معاملات التضخيم. من الواضح أن وجود قوة ضغط يزيد الإزاحة والعزم معاً. وتعتمد الإزاحات والعزوم خطياً على F ولاخطياً على P.

للتحقق من صحة المعادلات السابقة نضع $P = 0$، ومن ثم $\phi = 0$، لكن ذلك يعطي $0/0$. لذلك نأخذ النهاية $P \to 0$ $(\phi \to 0)$ ونطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{3(\tan\phi-\phi)}{\phi^3} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{\phi\to 0}\frac{\tan\phi}{\phi} = 1$$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{و} \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

فنستعيد الحلول الكلاسيكية لكمرة بسيطة الارتكاز تحمل حملاً مركزاً عند المنتصف.



إذا وضعنا $P = \alpha P_{cr}$، حيث $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ لهذه الكمرة–العمود، تختزل ϕ إلى:

$$\phi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$$

ونرسم معاملي التضخيم. وكما هو متوقع، إذا اقتربت ϕ من 1 اتجه المعاملان إلى اللانهاية.

[7] لا يمكن استخراج حل الانحراف الكبير لكمرة كابولية من نظرية الكمرات الابتدائية، لأن افتراضاتها الأساسية لا تعود صالحة. فهذه النظرية تهمل مربع المشتقة الأولى في صيغة التقوس ولا تصحح قصر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ذراع العزم مع انحراف طرف الكمرة المحمّل (Bisshopp **and** Drucker, 1945). وعند الأحمال المحدودة الكبيرة قد تعطي انحرافات تتجاوز طول الكمرة! ويصبح مربع المشتقة الأولى وتصحيح قصر ذراع العزم مساهمين أساسيين في حل مسائل الانحراف الكبير.

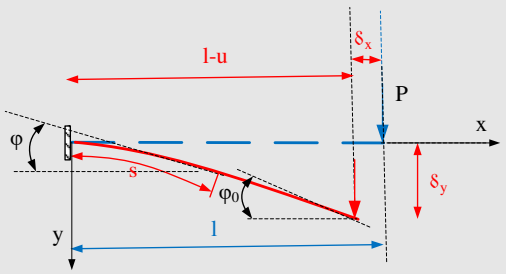
8 يبقى الاشتقاق الآتي قائماً على مبرهنة برنولي–أويلر الأساسية التي تنص على تناسب التقوس مع عزم الانحناء. كما يُفترض أن الانحناء لا يغير طول الكمرة.

29.2.3 مثال 29.3: الانحراف الكبير لكمرة كابولية

لننظر في نابض صفائحي كابولي طويل ورقيق. يرمز L إلى طول الكمرة، وu إلى المركبة الأفقية لإزاحة طرفها المحمّل، وv إلى المركبة الرأسية المناظرة، وP إلى الحمل الرأسي المركز عند الطرف الحر، وEI إلى الصلابة الانحنائية.

نلاحظ أن هذه مسألة نموذجية من مسائل *الإلاستيكا* المعروضة في §8.2.

ستُحل المسألة نفسها لاحقاً بطريقة العناصر المحددة في §59.2.1.



الصياغة

يمكن كتابة التعبير الدقيق لتقوس الخط المرن بدلالة طول القوس وزاوية الميل، ويرمز إليهما بـ s وϕ على الترتيب. فإذا كان x الإحداثي الأفقي المقاس من الطرف المثبت، كان حاصل ضرب EI في تقوس الكمرة مساوياً لعزم الانحناء M:

$$EI\frac{d\phi}{ds} = P(L - x - \delta_x) = M \tag{29.1}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2\cos\phi \tag{29.2}$$

حيث $\alpha^2 = P/EI$.

نلاحظ أن $dx/ds = \cos\phi$ و$dy/ds = \sin\phi$.

إذا ضربنا طرفي المعادلة 29.2 في $d\phi/ds$، نحصل على:

$$\frac{d\phi}{ds}\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\alpha^2\cos\phi\frac{d\phi}{ds}$$

بالتكامل بالنسبة إلى s، ووضع $\phi = \phi_0$ و$d\phi/ds = 0$ عند $x = l$، نحصل على:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = -\alpha^2\sin\phi + \alpha^2\sin\phi_0$$

ومن ثم:

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} \tag{29.3}$$

نأخذ الجذر الموجب لأن $d\phi/ds$ موجب، ومنه:

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}} \tag{29.4}$$

حل ϕ_0 نحتاج أولاً إلى حل ϕ_0. وبما أن الكمرة غير قابلة للاستطالة:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

ويمكن حل ϕ_0 عددياً.

حل δ_y

أولاً:

$$\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin\phi$$

بالتعويض من المعادلة 29.3:

$$\frac{dy}{d\phi}\underbrace{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}_{d\phi/ds} = \sin\phi \Rightarrow dy = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi$$

وأخيراً:

$$\begin{aligned}\delta_y &= \int_0^{\delta_y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi\end{aligned}$$

بالتطبيع:

$$\frac{\delta_y}{l} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_0^{\phi_0} \frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi}_{L} \tag{29.5}$$

حيث $\beta^2 = \alpha^2 L^2$.

هذا تكامل إهليلجي «مستتر»[a].

التحويل إلى تكاملات إهليلجية وفق (Bisshopp and Drucker, 1945)، ندخل التعويض الآتي:

$$1 + \sin\phi = 2k^2\sin^2\theta = (1 + \sin\phi_0)\sin^2\theta \tag{29.6}$$

حيث:

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\phi_0}{2}}$$

يجري التحويل المفصل من المعادلة 29.5 إلى صورة التكامل الإهليلجي القياسية كما يأتي.

من المعادلة 29.6:

$$\sin\phi = 2k^2\sin^2\theta - 1 \tag{29.7}$$

ثم لدينا:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} &= \sqrt{(1 + \sin\phi_0) - (1 + \sin\phi)} \\ &= \sqrt{2k^2 - 2k^2\sin^2\theta} = \sqrt{2}k\cos\theta\end{aligned} \tag{29.8}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

باشتقاق طرفي المساواة الأولى في المعادلة 29.6 نحصل على:

$$\cos\phi\, d\phi = 4k^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta \Longrightarrow d\phi = \frac{4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\phi} \tag{29.9}$$

باستعمال المعادلة 29.7 نعيد كتابة مقام 29.9 على الصورة:

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)^2} \\ &= \sqrt{4k^2\sin^2\theta - 4k^4\sin^4\theta} = 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{29.10}$$

بالتعويض من 29.7–29.10 في 29.5 نحصل على:

$$\begin{aligned}L &= \frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)\times 4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2}k\cos\theta\times 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\end{aligned} \tag{29.11}$$

حيث θ_1 وθ_2 قيمتا θ المناظرتان لـ$\phi=0$ و$\phi=\phi_0$، على الترتيب. وباستعمال 29.6 نجد:

$$1 = \left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_1 \Longrightarrow \theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi_0}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \tag{29.12}$$

$$1+\sin\phi_0 = \left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_2 \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{29.13}$$

التعبير باستعمال التكاملات الإهليلجية الكاملة نتذكر أن التكاملين الإهليلجيين الكاملين من النوعين الأول والثاني يُعرّفان، على الترتيب، كما يأتي:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

أما التكاملات الإهليلجية غير الكاملة فهي:

$$F(\psi,k) = \int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(\psi,k) = \int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

يمكن تقسيم التكامل في المعادلة 29.11 إلى:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}(\cdots)\, d\theta - \int_0^{\theta_1}(\cdots)\, d\theta$$

للتكامل من 0 إلى $\pi/2$ نفكك:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2k^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - K(k)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

باستعمال الهوية:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{k^2}\left[K(k)-E(k)\right]$$

نحصل على:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right) d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2\left[K(k)-E(k)\right]-K(k) = K(k)-2E(k)$$

وبالمثل، للتكامل من 0 إلى θ_1:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right) d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\theta_1,k)-2E(\theta_1,k)$$

إذن التعبير الكامل لـ δ_y/l هو:

$$\frac{\delta_y}{l} = \frac{1}{\beta}\left[\left(K(k)-2E(k)\right)-\left(F(\theta_1,k)-2E(\theta_1,k)\right)\right] \tag{29.14}$$

حيث $\theta_1 = \arcsin(1/(\sqrt{2}k))$ من المعادلة 29.12.

التكافؤ مع صيغة بيشوب ودروكر التعبير الذي قدمه Bisshopp **and** Drucker, 1945 هو:

$$\frac{\delta_y}{l} = 1-\frac{2}{\beta}\left[E(k)-E(\theta_1,k)\right] \tag{29.15}$$

لإثبات التكافؤ نستخدم معادلة قيد الكمرة غير القابلة للاستطالة. من قيد طول القوس:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0-\sin\phi}}$$

الذي يصبح، بعد التعويض نفسه:

$$1 = \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\beta}\left[K(k)-F(\theta_1,k)\right]$$

ومن ثم:

$$\beta = K(k)-F(\theta_1,k) \tag{29.16}$$

بالتعويض من المعادلة 29.16 في المعادلة 29.14 والتبسيط، مع ملاحظة اختزال عدة حدود، نستعيد المعادلة 29.15 تماماً.

إذن لا يوجد إلا حل واحد؛ فالمعادلتان 29.14 و 29.15 تعبيران متكافئان رياضياً عن δ_y/l.

حل δ_x

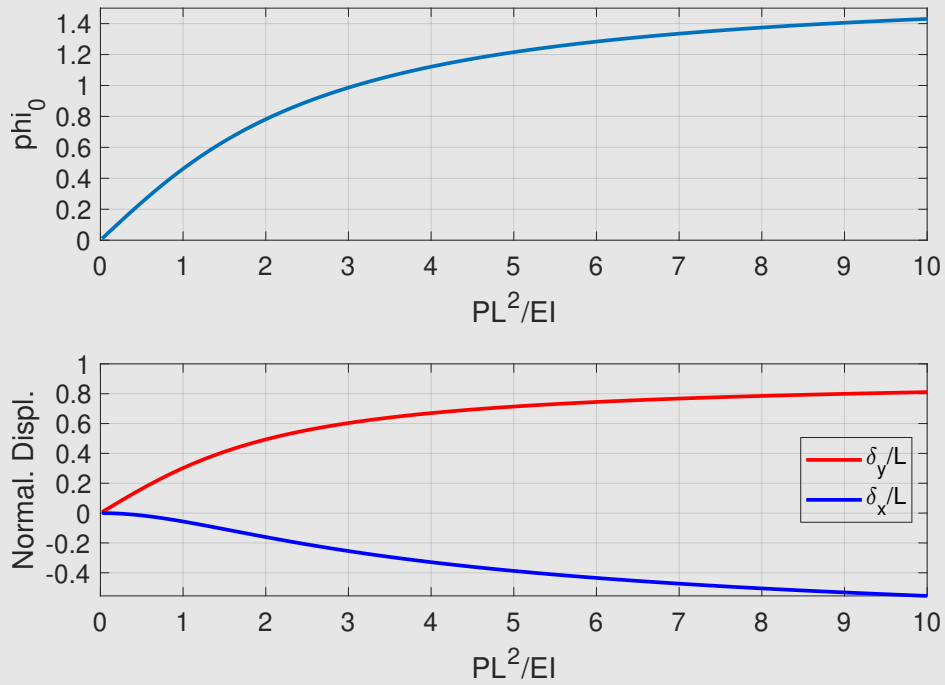
تُحسب الإزاحة الأفقية للطرف المحمّل من المعادلتين 29.1 و29.3 مع $x=\phi=0$. ومن ثم:

$$P(l-\delta_x) = EI\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0}$$

أو

$$\frac{l-\delta_x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\sin\phi_0} \tag{29.17}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ترد شيفرات ماتلاب الثلاث المنفذة لهذا الحل في §I.1.6.

[a] التكامل الإهليلجي هو أي تكامل في الصورة العامة $f(x)=\int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}$، حيث $A(x)$ و$B(x)$ و$C(x)$ و$D(x)$ كثيرات حدود في x، و$S(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الرابعة.

29.3 إزاحات صغيرة ومنشآت غير مستقرة

29.3.1 قضبان صلبة متقطعة

9 من المتطلبات الأساسية لتقييم مسائل الاستقرار والانبعاج رسم مخطط الجسم الحر للحالة المشوهة أولاً. وسندرس حالتين بسيطتين.

29.3.1.1 نظام قضيب واحد

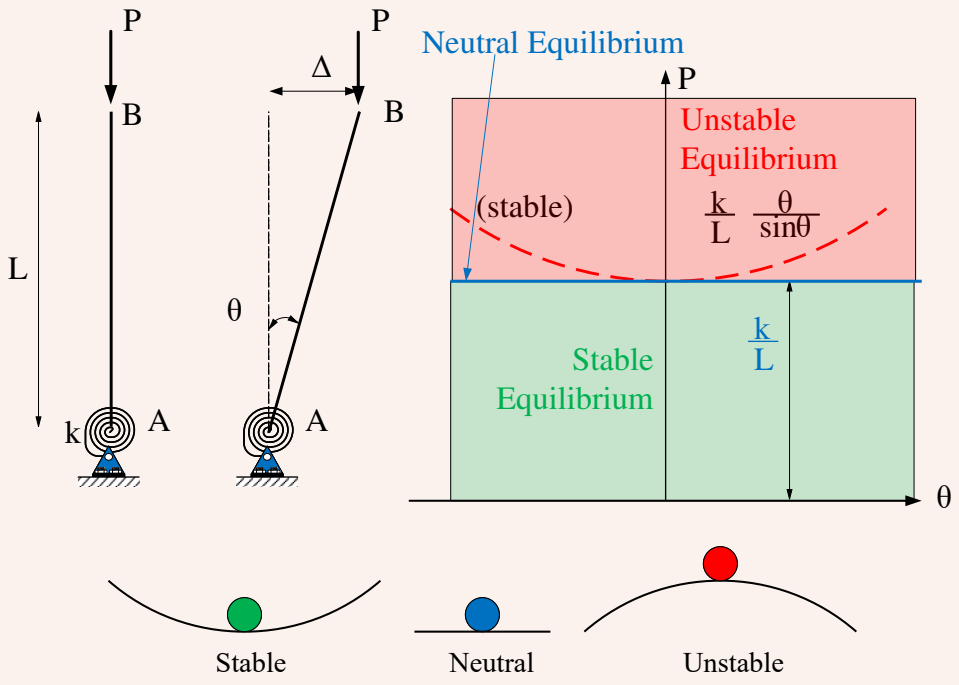
10 نبدأ بقضيب صلب موصول بالمسند بواسطة نابض ومحمل محورياً عند الطرف الآخر، الشكل 29.1. وبافتراض دوران صغير، نأخذ العزوم حول النقطة A:

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\theta \Rightarrow P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow (P - \frac{k}{L}) = 0$$

فتوجد ثلاث حالات، الشكل 29.1:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

اتزان مستقر: إذا كان $P < k/L$، فإن $\theta = 0$.
اتزان محايد: إذا كان $P = k/L$، ويمكن أن تأخذ θ أي قيمة.
اتزان غير مستقر: إذا كان $P = P_{cr} > k/L$، فإن $\theta = 0$.



شكل 29.1: استقرار قضيب صلب

11 ومن ثم نعرّف الحمل الحرج:

$$P_{cr} = \frac{k}{L}$$

12 للدوران الكبير يكون:

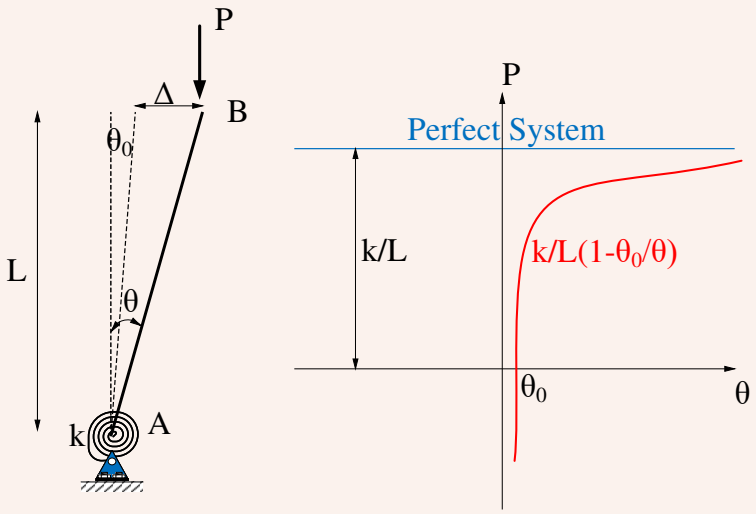
$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\sin(\theta) P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

13 لأن هناك أكثر من مسار ممكن، θ، عندما $P = P_{cr}$، نسمي هذه النقطة نقطة تشعب.

14 إذا افترضنا الآن وجود عيب ابتدائي في العمود، أي أنه «منحنٍ» ابتداءً، الشكل 29.2، فإن:

$$\Sigma M_A = PL\theta - k(\theta - \theta_0) = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}(1 - \frac{\theta_0}{\theta})$$

15 نلاحظ أن لدينا هنا مسألة عدم *استقرار*، لا ينبغي خلطها بالانبعاج الذي يمثل صورة من صور عدم الاستقرار.

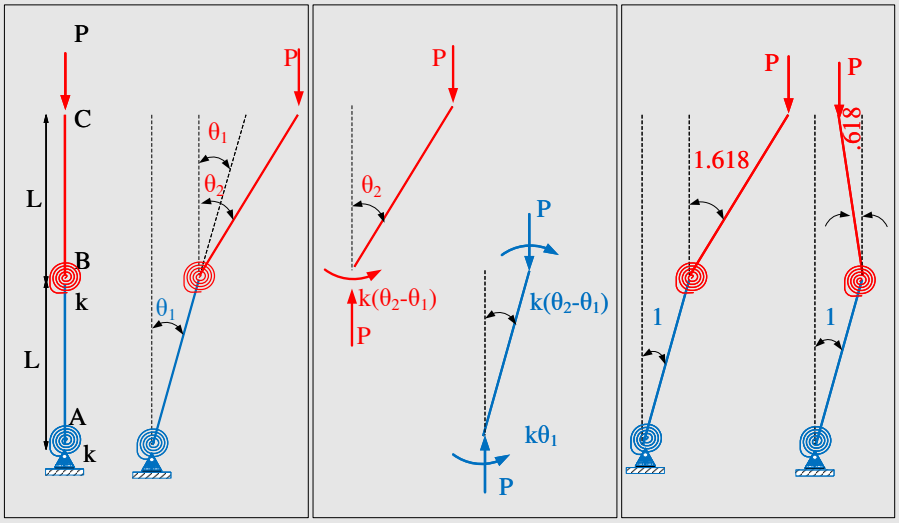


شكل 29.2: استقرار قضيب صلب ذي عيب ابتدائي

يرجى ملاحظة أن هذا القسم يحتوي على عناصر عائمة (أشكال و/أو جداول) يجب طباعتها قبل القسم التالي. لذلك قد تظهر هنا مساحات أو فجوات فارغة.

29.3.1.1.1 مثال 29.4: انبعاج عمودين صلبين مفصليين

ندرس استقرار قضيبين صلبين موصولين بنوابض صلابتها k عند كل طرف، ونريد تقييم استقرار النظام. يجب في هذه المسألة دراسة اتزان *الحالة المشوهة* لا غير المشوهة بسبب وجود تشوه كبير:



$$\Sigma M_B = PL\theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad \Rightarrow -\theta_1 + \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_2$$

$$\Sigma M_A = PL\theta_1 + k(\theta_2 - \theta_1) - k\theta_1 = 0 \Rightarrow 2\theta_1 - \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_1$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يمكن كتابة المعادلتين في صورة مصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

حيث $\lambda = PL/k$. وهذه صياغة قيمة *ذاتية* يمكن إعادة كتابتها كما يأتي:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-1 &= 0 \\ \lambda^2-3\lambda+1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

إذن لدينا حملان حرجان:

$$\begin{aligned} P_{cr_1} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 0.382\frac{k}{L} \\ P_{cr_2} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 2.618\frac{k}{L} \end{aligned}$$

نحدد الآن الشكل المشوه للحمل الحرج الأول:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{bmatrix} 2-\frac{3-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.618 & -1 \\ -1 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

نضع اعتباطياً $\theta_1 = 1$، فيكون $\theta_2 = 1/0.618 = 1.618$، ومن ثم النمط الذاتي الأول هو:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأخيراً ندرس شكل النمط الثاني:

$$\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.618 & -1 \\ -1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

نضع اعتباطياً $\theta_1 = 1$، فيكون $\theta_2 = -1/1.618 = -0.618$، ومن ثم النمط الذاتي الثاني هو:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

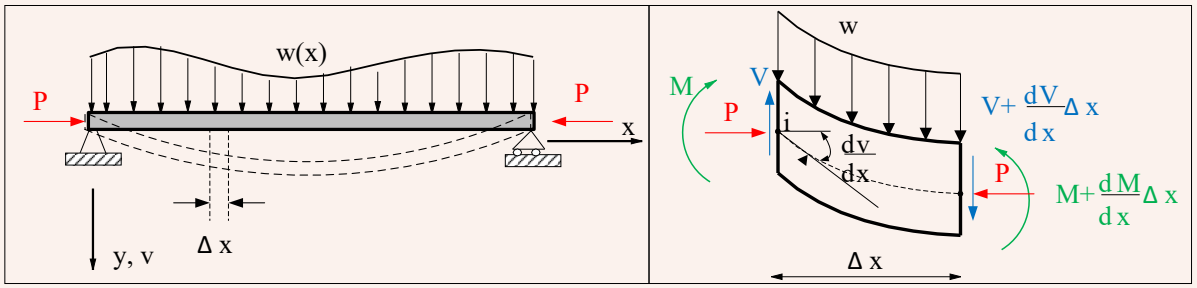
29.3.2 الأنظمة المستمرة

29.3.2.1 أحمال انبعاج أويلر

16 في المنهج السابق استُخرجت أحمال الانبعاج لعمود ذي شروط حدية أساسية محددة، هي الإزاحة والميل، مما أدى إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

17 في المنهج الآتي نراعي أيضاً الشروط الحدية الطبيعية، أي القص والعزوم المعبر عنها بالمشتقتين الثالثة والرابعة للإزاحات. وينتج عن ذلك معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة.

18 ننظر في كمرة–عمود تتعرض لقوة محورية وقوة قص وعزم، الشكل 29.3، مع ملاحظة التشابه مع منشأ الكابل في الشكل 30.2.



شكل 29.3: كمرة–عمود بسيطة الارتكاز؛ جزء تفاضلي؛ تأثير القوة المحورية P

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

19 بجمع العزوم حول i لجزء الكمرة، وافتراض صغر الزاوية $\frac{dv}{dx}$ بين محور الكمرة والمحور الأفقي، نحصل على:

$$\underbrace{M-\left(M+\frac{dM}{dx}\Delta x\right)+w\frac{(\Delta x)^2}{2}+\left(V+\frac{dV}{dx}\Delta x\right)\Delta x}_{0}+\underbrace{P\left(\frac{dv}{dx}\right)\Delta x}_{0}=0$$

نلاحظ أن الحد الأول المحاط بقوس سفلي يطابق الحد المستخدم في الاشتقاق السابق لمعادلة الكمرة التفاضلية، المعادلة 22.2.

20 بإهمال حدود dx^2 الصغيرة، ثم اشتقاق كل حد بالنسبة إلى x، نحصل على:

$$\frac{d^2M}{dx^2}-\frac{dV}{dx}-P\frac{d^2v}{dx^2}=0 \tag{29.18}$$

أما الاتزان في اتجاه y فيعطي:

$$\frac{dV}{dx}=-w \tag{29.19}$$

21 من نظرية الكمرات، مع إهمال التشوهين المحوري والقصي:

$$M=-EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{29.20}$$

22 بالتعويض من المعادلتين 29.19 و29.20 في 29.18، وافتراض كمرة منتظمة المقطع، نحصل على:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}-P\frac{d^2v}{dx^2}=w$$

وبالتعويض $\lambda=\sqrt{\frac{P}{EI}}$ و$w=0$ نحصل أخيراً على:

$$\frac{d^4v}{dx^4}+\lambda^2\frac{d^2v}{dx^2}=0 \tag{29.21}$$

نلاحظ مرة أخرى أن دراسة الاتزان في الحالة المشوهة أضافت الحد الثاني إلى ما كان سيصبح، من دونه، المعادلة التفاضلية الحاكمة للأعضاء الانحنائية، أي الكمرات.

وأخيراً نلاحظ التشابه بين هذه المعادلة والمعادلة التفاضلية الحاكمة لمنشأ الكابل، المعادلة 30.5.

23 الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الرابعة لأي مجموعة من الشروط الحدية هو:

$$v=C_1+C_2x+C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x \tag{29.22}$$

تُستخرج الثوابت C من الشروط الحدية. وتُبين شروط الأعمدة في الجدول 29.1. ترتبط الشروط الحدية الأساسية بالإزاحة والميل، بينما ترتبط الشروط الطبيعية بالقص والعزوم من خلال علاقتيهما بالإزاحة.

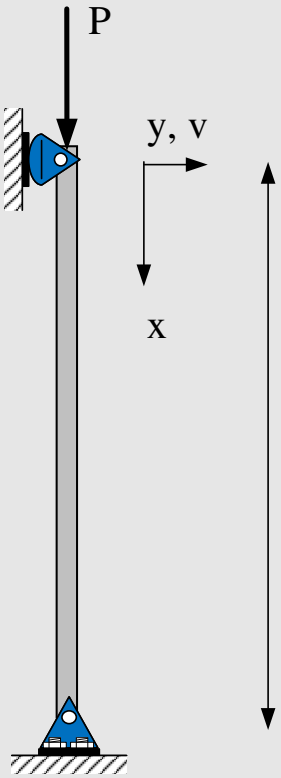
24 يجب أن يتوفر شرطان حديان عند كل عقدة. وتصح جميع التركيبات عدا الزوجين من الصف نفسه؛ فلا يمكن معرفة الإزاحة والقص معاً، ولا الميل والعزم معاً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 29.1: الشروط الحدية الأساسية والطبيعية للأعمدة

طبيعية (نيومان)	أساسية (ديريشليه)
$(V)\ \frac{d^3v}{dx^3}$	v
$(M)\ \frac{d^2v}{dx^2}$	$\frac{dv}{dx}$

29.3.2.1.1 مثال 29.5: انبعاج عمود مفصلي الطرفين



إذا درسنا استقرار عمود مفصلي الطرفين، كانت الشروط الحدية هي انعدام الإزاحة v والعزم $EI\frac{d^2v}{dx^2}$ عند الطرفين، أي:

$$\begin{array}{lllllll} \textbf{أساسية:} & v|_{x=0} & = & 0; & v|_{x=L} & = & 0; \\ \textbf{طبيعية:} & \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}} & = & 0; & \underbrace{v_{,xx}|_{x=L}}_{M|_{x=L}} & = & 0 \end{array}$$

يؤدي التعويض بالشرطين عند $x=0$ إلى $C_1 = C_4 = 0$.
ومن الشروط المتبقية نحصل على

$$C_3 \sin \lambda L + C_2 L = 0$$
$$-C_3 k^2 \sin \lambda L = 0$$

تتحقق هذه العلاقات إما إذا كان $C_2 = C_3 = 0$، أو إذا كان $\sin \lambda L = C_2 = 0$.
يؤدي البديل الأول إلى حل الاتزان التافه عند جميع الأحمال، بينما يؤدي الثاني إلى $\lambda L = n\pi$ من أجل $n = 1, 2, 3 \cdots$. الحمل الحرج هو

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

وهو ما اشتُق سابقاً باستعمال المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأدنى. شكل العمود المنبعج هو:

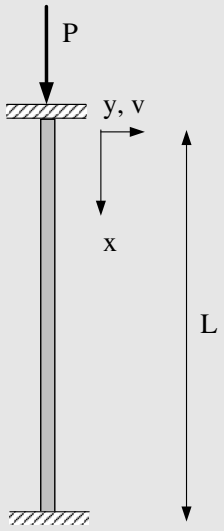
$$y = C_3 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ولا يمكن تحديد إلا الشكل لا أبعاده. ونفترض عموماً $C_3 = 1$ ونرسم y.

29.3.2.1.2 مثال 29.6: انبعاج عمود مثبت الطرفين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إذا قُيد العمود ضد الدوران عند الطرفين، فباستعمال المعادلة 29.22 تكون الشروط الحدية:



أساسية: $v|_{x=0}=0;\quad v|_{x=L}=0;\quad \underbrace{v_{,x}|_{x=L}}_{\theta|_{x=L}}=0;$

طبيعية: $\underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}}=0$

$$\begin{aligned} v(0)=0 &\Rightarrow C_1+C_4=0\\ v'(0)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda=0\\ v(L)=0 &\Rightarrow C_1+C_2L+C_3\sin\lambda L+C_4\cos\lambda L=0\\ v'(L)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda\cos(\lambda L)-C_4\sin(\lambda L)=0 \end{aligned}$$

يمكن كتابة هذه المعادلات في صورة مصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}=0$$

يُستخرج المحدد من:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0\\ L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & L & \sin\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} L & \cos\lambda L\\ 1 & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & \sin\lambda L\\ 0 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & L\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-2\lambda+\lambda^2L\sin\lambda L+2\lambda\cos\lambda L=0$$

الحل الأول $\lambda=0$ حل تافه، أما الحل التالي:

$$\begin{aligned} \lambda L\sin\lambda L+2\cos\lambda L-2 &= 0\\ \lambda L\sin\lambda L &= 2(1-\cos\lambda L) \end{aligned}$$

حل هذه المعادلة المتسامية هو:

$$\begin{aligned} \lambda L &= 2n\pi\\ \sqrt{\frac{P}{EI}} &= \frac{2n\pi}{L} \end{aligned}$$

ومن ثم يُعطى الحمل الحرج والإجهادات بـ:

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2EI}{L^2}\\ \sigma_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2E}{(L/r)^2} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يمكن استخراج الشكل المشوه، أو الأنماط الذاتية، بالتعويض بقيمة λ في الثوابت C.

29.3.2.1.3 مثال 29.7: انبعاج عمود مثبت–مفصلي

نريد تحديد حمل انبعاج عمود مثبت عند $x = L$ ومفصلي عند $x = 0$.
الشروط الحدية هي:

$$\begin{array}{lllllll} \text{شرط حدي طبيعي} & v & = & 0, & \frac{d^2v}{dx^2} & = & 0 \quad \text{عند} x = 0 \\ \text{شرط حدي أساسي} & v & = & 0, & \frac{dv}{dx} & = & 0 \quad \text{عند} x = L \end{array}$$

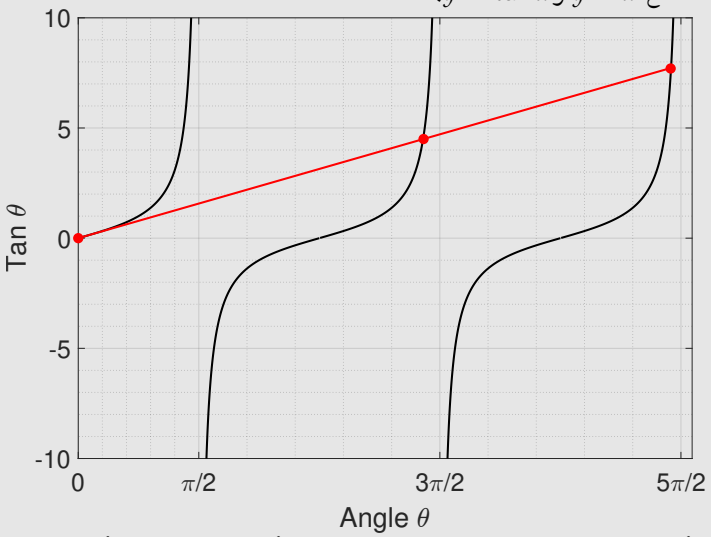
يعطي الشرطان الأولان $C_1 = C_4 = 0$، ويعطي الآخران:

$$\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L = 0$$

ولأن $\cos \lambda L$ لا يمكن أن يساوي صفراً، تختزل المعادلة السابقة إلى:

$$\tan \lambda L = \lambda L \tag{29.23}$$

وهي معادلة جبرية متسامية لا تُحل إلا عددياً. ونحن نبحث أساساً عن تقاطع $y = x$ و$y = \tan x$.



وأصغر جذر موجب هو $\lambda L = 4.4934$. وبما أن $k^2 = \frac{P}{EI}$، فإن أصغر حمل حرج هو:

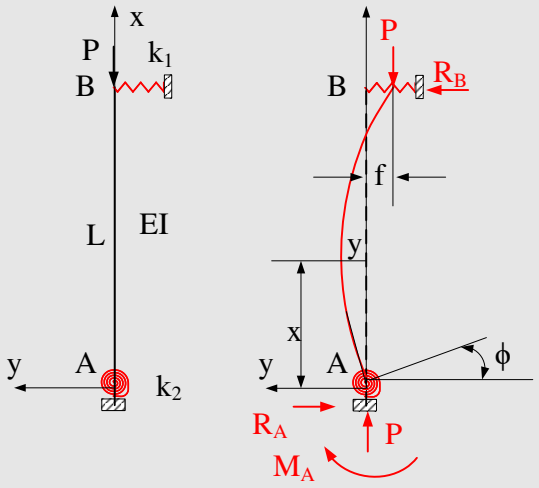
$$P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(0.699L)^2} EI$$

نلاحظ أنه إذا حللنا x بحيث $v_{,xx} = 0$، أي عند نقطة انقلاب، كان $x = 0.699L$.

سيُحدد حمل انبعاج هذا العمود عددياً في §59.1.2.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

29.3.2.1.4 مثال 29.8: عمود ذو مساند مرنة



للعمود المجاور مسندان مرنان عند طرفيه: $R_B = k_1 f$ و$M_A = k_2\phi$. نريد تحديد حمل الانبعاج P_{cr}.
العزم عند أي نقطة X هو:

$$M(x) = -P(f+y) + k_1 f(L-x)$$

بالتعويض $EId^2y/dx^2 = M(x)$ نحصل على:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = f\,[k_1(L-x) - P] \qquad (29.24)$$

وهذه معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية. إذا عرّفنا:

$$f* = f\left[\frac{k_1}{P}(L-x) - 1\right]$$

فإن الحل العام للمعادلة 29.24 والميل المناظر هما:

$$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + y*$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -C_1\lambda\sin\lambda x + C_2\lambda\cos\lambda x - \frac{f\,k_1}{P}$$

حيث:

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

نحل الثابتين C_1 وC_2 والقيمة f من الشروط الحدية الآتية:

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = \phi; \qquad y(L) = -f$$

يؤدي الشرط الحدي الأول إلى:

$$C_1 + f\left(\frac{k_1 L}{\lambda} - 1\right) = 0$$

عند المسند A، $M_A = f(k_1 L - P)$، ولذلك زاوية الدوران هي:

$$\phi = \frac{M_A}{k_2} = \frac{f}{k_2}(k_1 L - P)$$

ومن ثم يؤدي الشرط الحدي الثاني إلى:

$$C_2\lambda - f\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) = 0$$

وأخيراً يعطي الشرط الحدي الثالث:

$$C_1\cos\lambda L + C_2\sin\lambda L = 0$$

يمكن التعبير عن المعادلات الثلاث كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ \cos\lambda L & \sin\lambda L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

هذه معادلة متجانسة، ولضمان وجود حل غير تافه نجعل محددها صفراً. وبعد تعديل بسيط في الصف الثالث نحصل على:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ 1 & \tan \lambda L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

بحساب المحدد يمكن إعادة كتابة المعادلة في صورة متسامية بالنسبة إلى λ:

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} \tag{29.25}$$

حالات خاصة:

a-1: الطرف العلوي حر والقاعدة نابضية: $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ يعطي التعويض المباشر:

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{P}$$

a-2: الطرف العلوي مثبت والقاعدة نابضية: $k_1 = \infty,\ k_2 \neq 0$ تعطي المعادلة 29.25 صورة غير معينة، ∞/∞، ولذلك نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

أو

$$\tan \lambda L = \lim_{k_1 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = \frac{k_2 L \lambda}{k_2 + LP} = \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP}$$

a-3: الطرف العلوي نابضي والقاعدة مثبتة: $k_1 \neq 0,\ k_2 = \infty$ نحتاج مرة أخرى إلى قاعدة لوبيتال:

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} \left(1 - \frac{P}{k1L}\right)$$

من هذه المعادلات يمكن اشتقاق، أو استعادة، العلاقات السابقة:

b-1: الطرف العلوي حر والقاعدة مثبتة: $k_1 = 0, k_2 = \infty$ بالملاحظة المباشرة:

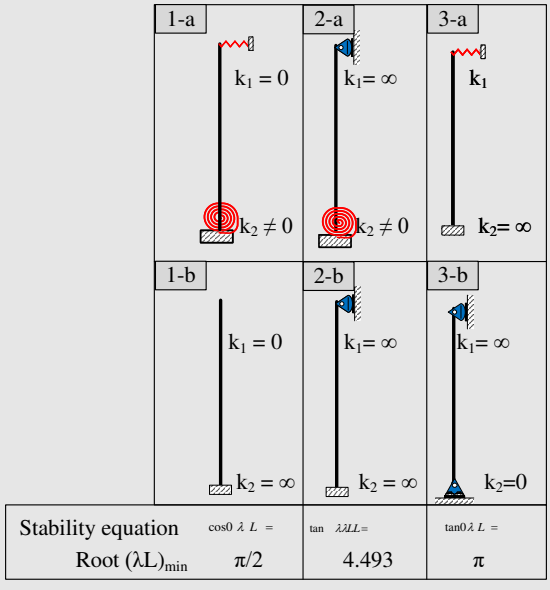
$$\tan \lambda L = \infty \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \frac{\pi}{2}$$

b-2: الطرف العلوي والقاعدة مثبتان: $k_1 = \infty;\ k_2 = \infty$

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP} \Rightarrow (\lambda L)_{min} = 4.493$$

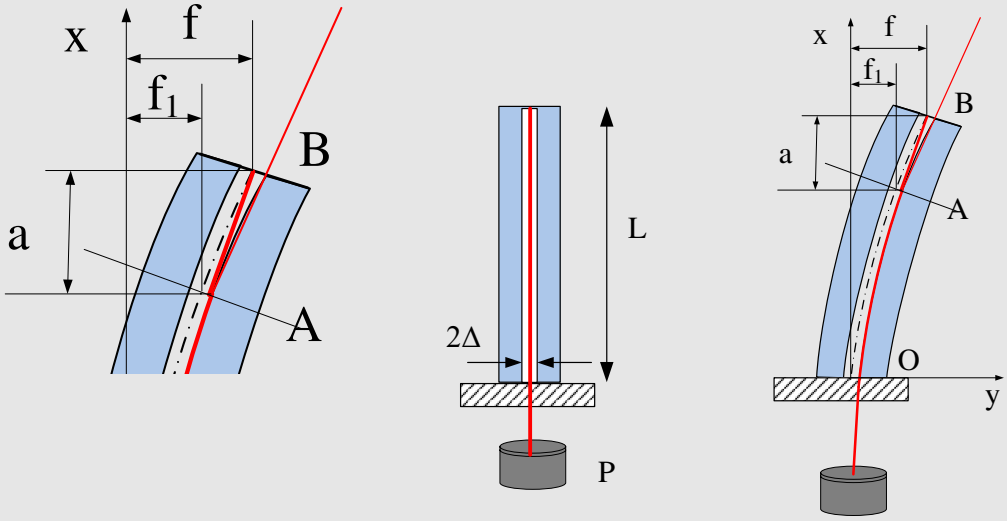
b-3: الطرف العلوي مثبت والقاعدة مفصلية: $k_1 = \infty;\ k_2 = 0$ ليست هذه تماماً حالة خاصة من المعادلات السابقة، لذلك نعيد النظر في المعادلة 29.25. ومع الشروط الحدية المحددة يكون بوضوح:

$$\tan \lambda L = 0 \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \pi$$



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

29.3.2.1.5 مثال 29.9: الانبعاج المقيد



ينبعج الأنبوب عندما $P = \pi^2 EI/4L^2$. وتبقى هذه القوة الحدية ما دام الانحراف f لم يتجاوز Δ.

لكن الحبل يلامس عند مرحلة ما جدار الأنبوب المنحني، فنحتاج إلى دراسة الجزأين OA وAB.

في الجزء OA يساوي العزم ببساطة $P\Delta$، وينحني الأنبوب إلى منحنى من الدرجة الثانية. نتذكر أن $M/EI = d^2y/dx^2$، ثم نكامل مرتين ونطبق الشروط الحدية عند القاعدة:

$$y = \frac{P\Delta}{2EI}x^2$$

الانحراف عند A هو:

$$f_1 = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2$$

نحتاج الآن إلى حل f. من الاعتبارات الهندسية، لو لم ينحن القضيب في الجزء AB لكانت الإزاحة عند B:

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L-a} a = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a$$

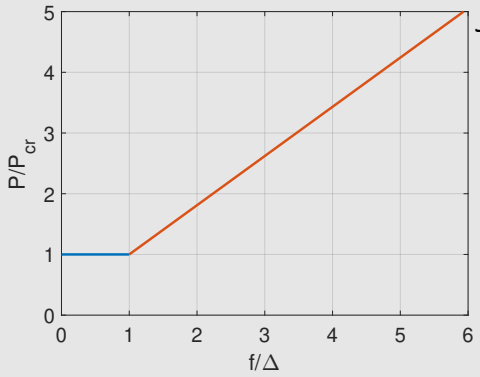
لكن الجزء الثاني ينحني بالقدر الذي يجعل B تبتعد عن المماس AB بمقدار Δ. ولذلك:

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a + \Delta$$

أو

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L^2 - a^2) + \Delta$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لكننا لا نعرف a بعد. وتمثل a طول قضيب مثبت عند أحد طرفيه يفقد الاستقرار تحت القوة P:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{\pi^2 EI}{4P}$$

بالتعويض في f:

$$f = \Delta\left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right)$$

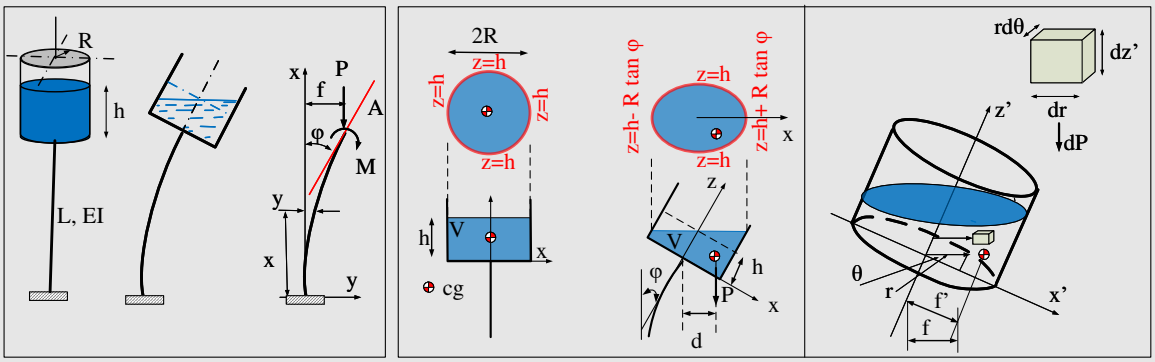
أو

$$\frac{f}{\Delta} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{P}{P_{cr}} - 1\right) + 1$$

حيث $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$.

29.3.2.1.6 مثال 29.10: برج مياه

عند تصميم برج مياه يبرز سؤال طبيعي عن استقرار المنشأ: عند أي منسوب للماء في الخزان تفقد الدعامة الحاملة استقرارها؟ (Feodossiev, 1977).



المعادلة التفاضلية الحاكمة

نبدأ برسم مخطط الجسم الحر مع تشوه صغير. ومعادلة المنحنى المرن للقضيب هي:

$$EIy'' = P(f - y) + M$$

تساوي القوة P وزن الماء:

$$P = \gamma \pi R^2 h$$

حيث γ الوزن النوعي للماء.

العزم المفروض

نشتق الآن العزم M الذي يسببه الماء في الوعاء الأسطواني المائل. زاوية الميل ϕ، والعزم حول المحور z العمودي على الدعامة الرأسية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عندما يميل الأسطوانة بزاوية ϕ ينتقل مركز الكتلة. ونشتق الإزاحة الأفقية d لمركز الكتلة عن المحور الرأسي المار بنقطة الارتكاز.

نستعمل إحداثيات أسطوانية، بحيث ينطبق المحور z' على محور تناظر الأسطوانة، وينطبق المحور x على اتجاه ميل الأسطوانة. ونعرّف θ بحيث $x = r\cos\theta$. ووفق هذا النظام، يُعطى السطح الحر للماء بالمعادلة

$$z = h + \alpha x = h + \alpha r\cos\theta$$

حيث $\alpha = \tan\phi$. ومن ثم يُعطى حجم التكامل بالعلاقات

$$0 \le r \le R \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le z \le h + \alpha r\cos\theta$$

وعليه فإن $dV = rdrd\theta dz$، ويكون وزن الماء $P = \gamma\pi hR^2$.

نسعى إلى تحديد مركز ثقل الماء على المحور x'، وتتمثل الصعوبة الوحيدة في ضرورة مراعاة ترتيب حساب التكاملات.

$$\begin{aligned} df' &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{h+\alpha r\cos\theta}(r\cos\theta)rdrd\theta dz \\ &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}(hr^2\cos\theta + \alpha r^3\cos^2\theta)drd\theta \\ &= \frac{\gamma\pi}{P}\int_0^R(\alpha r^3)dr \\ &= \frac{\alpha\gamma R^4}{4P} = \frac{\alpha R^2}{4h} \end{aligned}$$

وأخيراً، نحتاج إلى الإحداثي x لمركز الثقل؛ وبالتعويض نحصل على

$$f = f'\cos\phi = \frac{\tan\phi R^2}{4h}\cos\phi = \frac{R^2}{4h}\sin\phi \simeq \frac{R^2}{4h}\phi$$

ومن ثم يكون العزم الناتج

$$M = Pd = (\gamma\pi R^2 h)\frac{R^2}{4h}\phi = \frac{\gamma\pi R^4}{4}\phi$$

وهذه العبارة مستقلة عن h، ومن الواضح أن الاشتقاق غير صحيح.

لذلك نعتمد المعادلة التي أوردها Feodossiev, 1977، وإن كانت من دون اشتقاق:

$$M = \frac{\gamma\pi R^2}{4}(2h^2 + R^2)\phi$$

الحل

نحل المعادلة التفاضلية الحاكمة

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + f + \frac{2h^2 + R^2}{4h}\phi$$

حيث $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الشروط الحدية

عندما $x=0$ يكون $y=0$ و$y'=0$؛ وعندما $x=l$ يكون $y=f$ و$y'=\phi$. وتؤدي هذه الشروط إلى

$$\begin{aligned} B+f+\frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A &= 0 \\ A\sin\alpha l + B\cos\alpha l + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A\alpha\cos\alpha l - B\alpha\sin\alpha l &= \phi \end{aligned}$$

ومن المعادلتين الأخيرتين نجد

$$\frac{\alpha l\tan\alpha l}{4\frac{h}{l}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+\frac{R^2}{l^2}\right)=1$$

وبالتعويض عن قيمة P نحصل على

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EI}}l=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}}\sqrt{\frac{h}{l}}$$

ومن ثم تُحدد الكمية المطلوبة h/l من المعادلة المتسامية

$$\frac{a}{4}\frac{\tan a\sqrt{\frac{h}{l}}}{\sqrt{\frac{h}{l}}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+b^2\right)=1$$

حيث

$$a=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2 l^3}{EI}} \quad \text{و} \quad b=\frac{R}{L}$$

29.3.2.2 التناظر مع الاهتزاز الحر

25 تشبه المسألة التي دُرست للتو إلى حد بعيد اهتزاز منظومة كتلة–نابض ذات درجتي حرية، الشكل 29.4، وهي أيضاً مسألة قيم *ذاتية*.

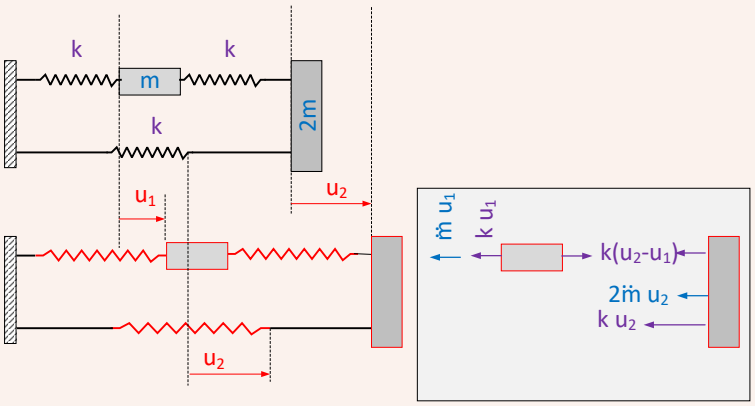
26 تتعرض كل كتلة لقوة قصور ذاتي تساوي حاصل ضرب الكتلة في التسارع، ولقوة النابض:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{\mathbf{u}}_2 + k\mathbf{u}_2 + k(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1) &= 0 \\ m\ddot{\mathbf{u}}_1 + k\mathbf{u}_1 + k9\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 0 &= 0 \end{aligned}$$

أو بالصيغة المصفوفية

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{U}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 29.4: منظومة ديناميكية ذات درجتي حرية

27 المعادلة المميزة هي $|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}|$، حيث $\lambda = \omega^2$ وω هو التردد الطبيعي.

$$\begin{vmatrix} 2h - \lambda & -h \\ -h & 2h - 2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

حيث $h = k/m$. وتُختزل هذه المعادلة إلى كثيرة الحدود

$$\lambda^2 - 3h\lambda + \frac{3}{2}h^2 = 0$$

وبالحل، $\lambda = (3 \pm -\sqrt{3})h/2$، أو

$$\omega_1 = 0.796\sqrt{k/m}$$
$$\omega_1 = 1.538\sqrt{k/m}$$

28 لإيجاد شكلي النمطين ϕ_1 وϕ_2 (المقادير النسبية لدرجتي الحرية)، نعوّض في المعادلة المميزة ونجعل العنصر الأول مساوياً للواحد:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.3660 \end{Bmatrix} \quad \text{و} \phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.3660 \end{Bmatrix}$$

29.3.2.3 معاملات الطول الفعّال K

29 تذكّر أن حمل انبعاج أويلر اشتُق لعمود مفصلي الطرفين. وفي حالات كثيرة تكون للعمود شروط حدية مختلفة. ويمكن إثبات أن حمل الانبعاج في جميع الحالات يُعطى بالعلاقة

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{29.26}$$

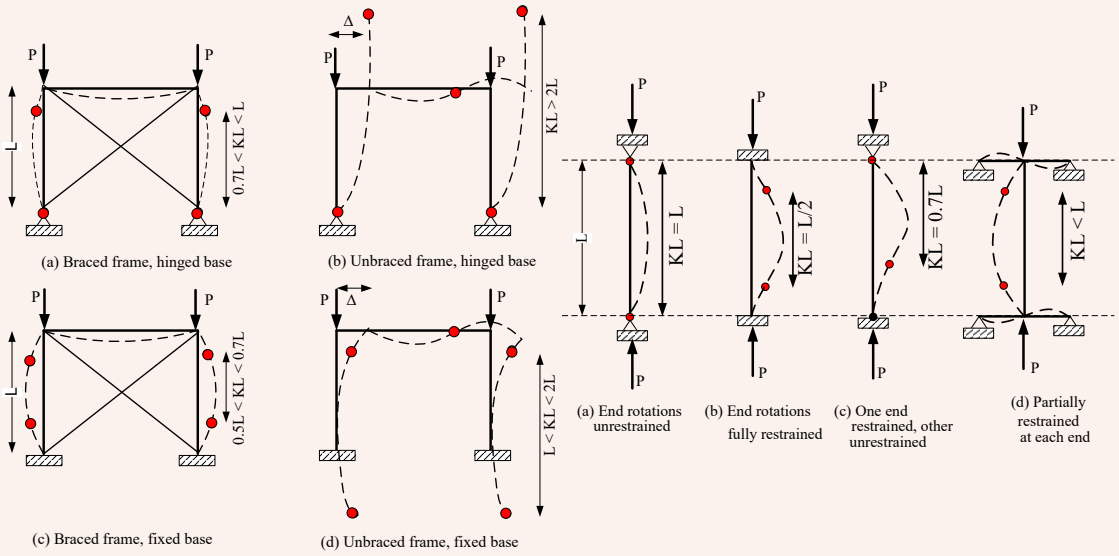
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث يسمى K *معامل الطول الفعّال* ، ويسمى KL *الطول الفعّال*. ومن ثم

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r_{\min}}\right)^2}$$

تسمى النسبة $\frac{KL}{r_{\min}}$ نسبة النحافة . لاحظ أن $r_{\min}$ ينبغي أن يكون أصغر نصف قطر قصور في الاتجاه أو الاتجاهات غير المدعّمة.

30 لا يمكن تحديد الطول الفعّال إلا بطرائق عددية أو تقريبية، وهو *المسافة بين نقطتي انقلاب* متجاورتين، حقيقيتين أو افتراضيتين، كما في الشكل 29.5.



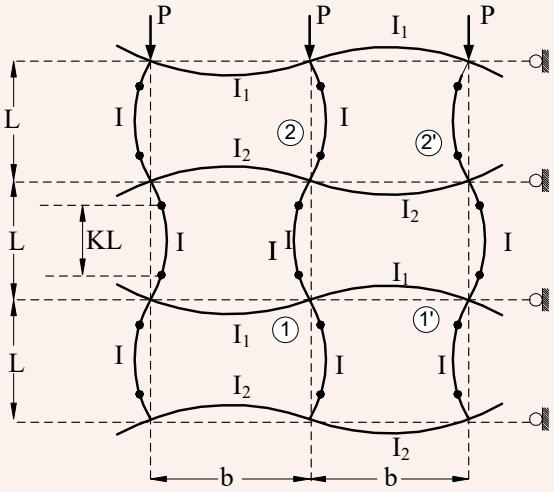
شكل 29.5: الأطوال الفعّالة للكمرات والإطارات

31 أكثر المخططات استعمالاً لتحديد الطول الفعّال هي التي أصدرها مجلس أبحاث الاستقرار الإنشائي. ويبيّن الشكل 29.6 مخطط المحاذاة لعمود منفرد. ويظهر هذا المخطط في الشكل 29.7[1]. وينبغي ملاحظة أن هذا المخطط يفترض بقاء جميع الأعضاء ضمن المجال المرن.

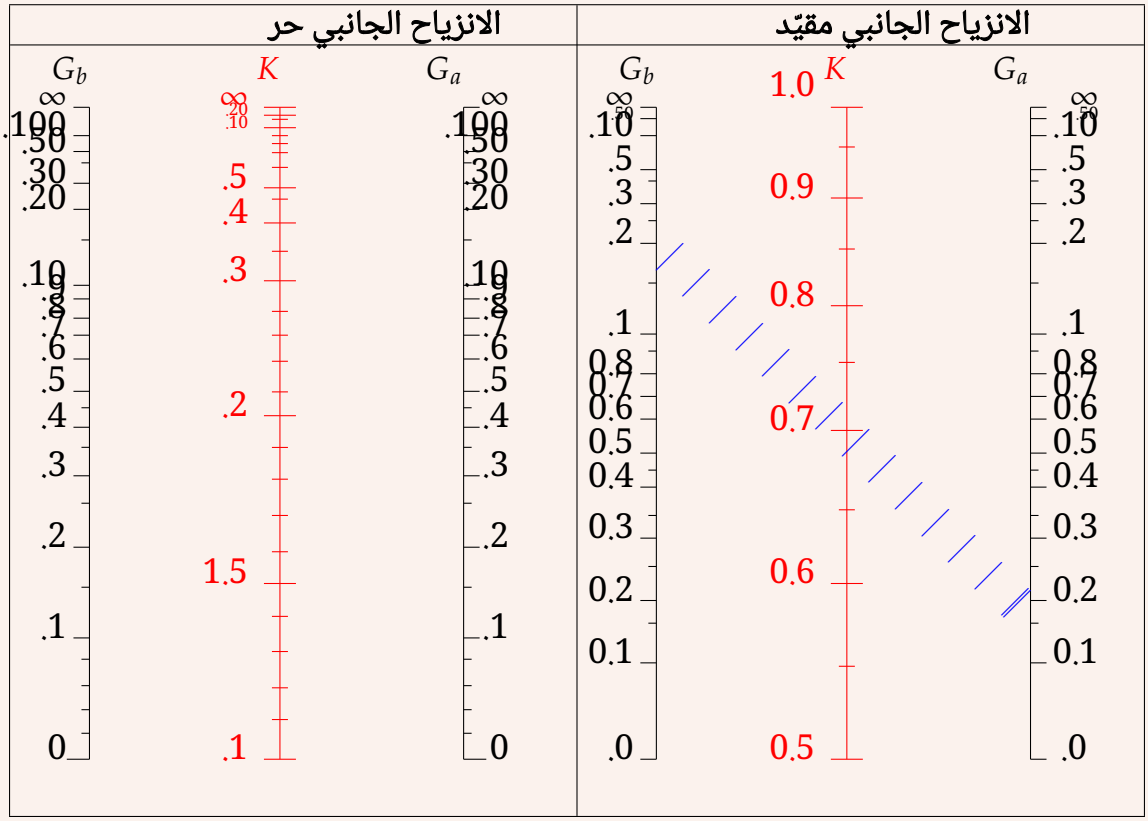
32 يسمى هذا النوع من المخططات *المخطط البياني الحسابي* أو *النموجراف*. وهو فن منسي، للأسف، يمثّل العلاقات الرياضية بيانياً. وبعبارة أخرى، هو رسم ثنائي الأبعاد صُمّم لإتاحة الحساب البياني التقريبي لدوال رياضية تكون معقدة عادةً. وقد استُعمل على نطاق واسع سنوات طويلة ليوفّر للمهندسين حسابات بيانية سريعة لصيغ معقدة بدقة عملية. ومن المؤسف أنه خرج من الاستعمال وحل الحاسوب محله، مما قد يدفعنا إلى الثقة بجميع الأرقام المعنوية التي يعرضها. وينطبق الأمر نفسه على المساطر الحاسبة.

[1] في الشكل، تساوي G_a وG_b القيمتين 0.18 و2.0 على الترتيب، ومن ثم تساوي قيمة K المناظرة 0.7. يسمى الخط الأزرق *خط المؤشر* أو *خط تساوي القيم*، ويسمى الخط الأحمر الأوسط *محور المقياس*.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 29.6: الأطوال الفعّالة للأعمدة في إطارات متعددة البحور والطوابق



شكل 29.7: مخطط المحاذاة للوصلات شبه المرنة (American Institute of Steel Construction, 2016)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33 يتطلب استعمال مخطط المحاذاة حساب G عند كل طرف من طرفي العمود باستعمال الصيغة الآتية:

$$G_a = \frac{\sum \frac{I_c}{L_c}}{\sum \frac{I_g}{L_g}}$$

حيث G_a جساءة الطرف a من العمود، وI_c وI_g عزما القصور الذاتي للأعمدة والجوائز، على الترتيب. ويجب أن يشمل الجمع الأعضاء المتصلة اتصالاً صلباً بتلك العقدة والواقعة في المستوى الذي يُدرس الانبعاج ضمنه فقط.

34 بعد تحديد G_a وG_b، تُوصل القيمتان بخط مستقيم على المخطط المناسب، وتكون K هي قيمة نقطة تقاطع ذلك الخط مع المحور الأوسط.

35 وبدلاً من ذلك يمكن استعمال المعادلة:

$$\frac{G_A G_B}{4}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right)\left(1 - \frac{\pi/K}{\tan \pi/K}\right) + \frac{2\tan \pi/2K}{\pi/K} = 1$$

McGuire **and** Winter, 1968, pg. 467

29.3.2.4 الأعمدة غير المرنة

36 للعمود حملان حدّيان:

1. خضوع المقطع الإجمالي $P_{cr} = F_y A_g$، ويحدث في الأعمدة القصيرة الجاسئة؛
2. الانبعاج المرن (انبعاج أويلر)، المعادلة 29.26، $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$، في الأعمدة الطويلة النحيفة.

37 تمثل هاتان العبارتان قيمتين مقاربتين لانبعاج العمود الفعلي. أما أحمال الفشل المتوسطة فتنتج من وجود الإجهادات المتبقية التي تؤدي بدورها إلى *الانبعاج غير المرن*.

38 يحدث الانبعاج غير المرن عندما لا تكون الإجهادات المتوسطة قد بلغت إجهاد الخضوع بعد، ويعتمد على معامل المماس E_t الذي يقل عن المعامل الابتدائي E.

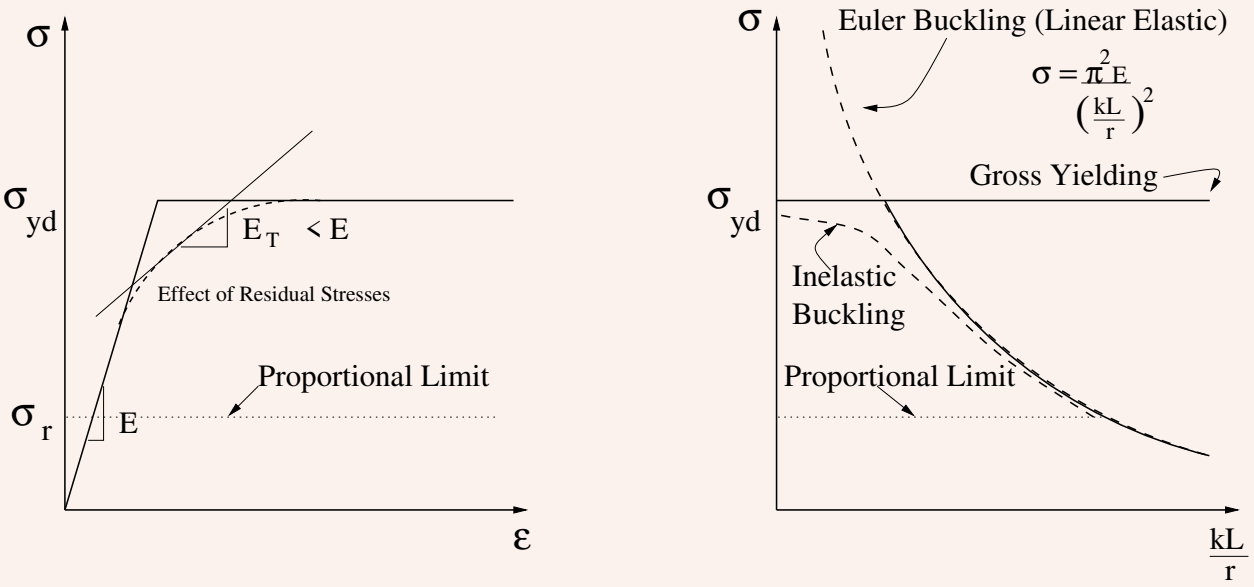
39 تبدأ الإجهادات المتبقية، الناتجة من التبريد غير المنتظم، الانبعاج غير المرن، كما في الشكل 29.8.

40 يجب أن يتقارب منحنى الانبعاج غير المرن مع كل من منحنى انبعاج أويلر المرن للأعمدة النحيفة وإجهاد الخضوع للأعمدة الجاسئة.

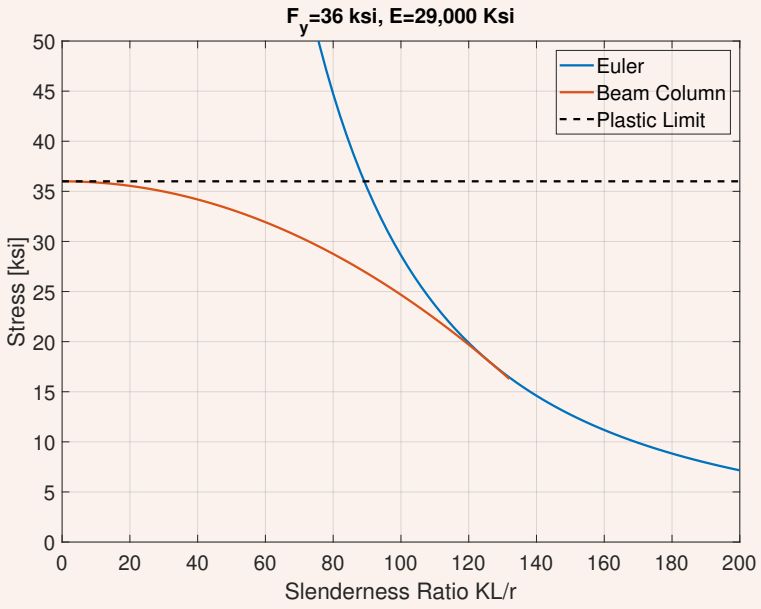
41 اقترح مجلس أبحاث الاستقرار الإنشائي (SSRC) منحنى مكافئاً يوفّر انتقالاً بين الانبعاج المرن والخضوع، وبذلك يأخذ في الحسبان الإجهادات المتبقية وما ينشأ عنها من انبعاج غير مرن، الشكل 29.9.

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left[1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E}\left(\frac{KL}{r_{min}}\right)^2\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

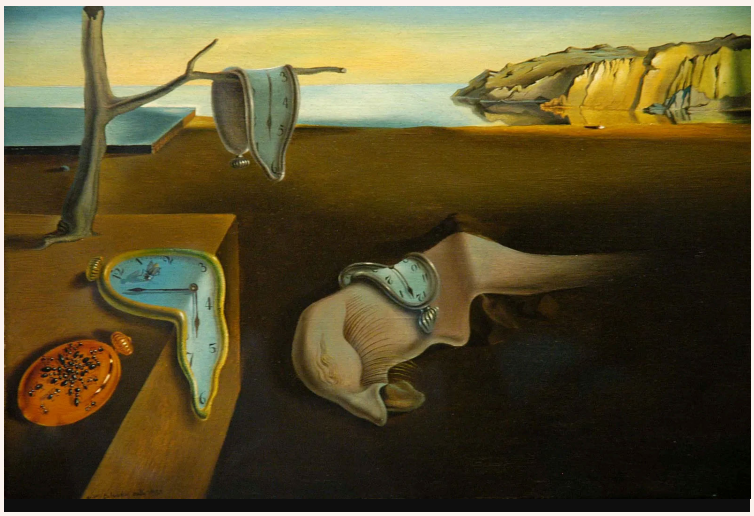


شكل 29.8: الانبعاج غير المرن



شكل 29.9: انبعاج أويلر ومنحنى الأعمدة لمجلس أبحاث الاستقرار الإنشائي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



إصرار الذاكرة، سلفادور دالي، 1931

تمثل الساعات الذائبة السريالية تشوهات شديدة، مما يجعل اللوحة استعارة ملائمة للإزاحات الكبيرة التي تتجاوز فيها استجابة المنشآت افتراضات الانفعالات الصغيرة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 منشآت الكابلات

ملخص

الكابلات منشآت قادرة على تحمّل تشوهات كبيرة، إذ تكيّف هندستها باستمرار لتلائم الأحمال ولا تنقل إلا قوى الشد. وتجعل هذه الخصائص الكابلات قيّمة وصعبة التحليل في آن واحد، وسنبحث هذه التعقيدات في هذا الفصل. نبدأ بالأحمال المركزة والكابلات الحبلية، ثم ننتقل إلى الأحمال الموزعة. وتنقسم الأحمال الموزعة إلى نوعين: أحمال موزعة على الطول المسقط فتنتج شكلاً مكافئاً، وأحمال موزعة على طول قوس الكابل فتنتج شكلاً سلسلياً. وفي الحالتين تستلزم شروط البدء المختلفة، مثل الطول والترخيم والمساند، مجموعات مختلفة من المعادلات. وسندرس أيضاً أثر درجة الحرارة، وقابلية الكابل للاستطالة، والشد المسبق فيه. وأخيراً، يُشرح الموضوع شرحاً وافياً بأمثلة عديدة متزايدة التعقيد.

30.1 مقدمة 995
30.2 الأحمال المركزة 996
30.2.1 مثال 30.1: كابل حبلي 996
30.2.2 مثال 30.2: كابل حبلي مائل . . . 998
30.2.3 مثال 30.3: عربة معلقة بكابلين . 999
30.3 الأحمال الموزعة 1000
30.3.1 معادلة الاتزان 1000
30.3.2 qdx؛ حمل عرضي؛ قطع مكافئ 1001
30.3.3 qds؛ المنحنى السلسلي 1019
30.3.4 مقارنة الحلين المكافئ والسلسلي 1026

30.1 مقدمة

1 الكابل عضو نحيف مرن، جساءته الانحنائية معدومة أو ضئيلة، ولذلك لا يستطيع نقل إلا قوى الشد.

2 تعمل قوة الشد عند أية نقطة في اتجاه مماس الكابل، لأن أي مركبة أخرى تسبب الانحناء.

3 تنشأ مقاومته من قدرته على إحداث تغيرات هندسية كبيرة، ولا سيما في الميول عند نقاط تطبيق الأحمال، كي يلائم توزيعها.

4 تقاوم الكابلات القوى الرأسية بحدوث ترخيم مقداره h، ومن ثم بتوليد قوى شد.

5 تسمى المركبة الأفقية لهذه القوة، H، قوة الدفع .

6 تسمى المسافة بين مسندي الكابل الوتر أو البحر.

7 ويرمز إلى نسبة الترخيم إلى البحر بـ

$$r = \frac{h}{l}$$

8 عندما تُطبق مجموعة أحمال مركزة على كابل وزنه مهمل نسبياً، ينحرف الكابل على هيئة سلسلة من القطع المستقيمة، ويسمى الشكل الناتج المضلع الحبلي .

9 إذا حمل الكابل قوى رأسية فقط، بقيت المركبة الأفقية H لشد الكابل T ثابتة؛ ومن ثم يكون ردّا الفعل الأفقيان متساويين ومتعاكسين.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 من الخصائص المميزة لمنشآت الكابلات، بل للمنشآت المرنة عموماً، أن كلاً من القوى الداخلية والهندسة مجهول. فبما أن الهندسة تتغير مع الحمل، ومعادلات الاتزان مبنية على مخطط الجسم الحر للهيئة المتشوهة، فلا بد من تحديدها أيضاً. وتسمى هذه الظاهرة اللاخطية الهندسية . لذلك يشمل تحليل منشآت الكابلات ردود الأفعال والقوى المحورية الداخلية والهندسة معاً.

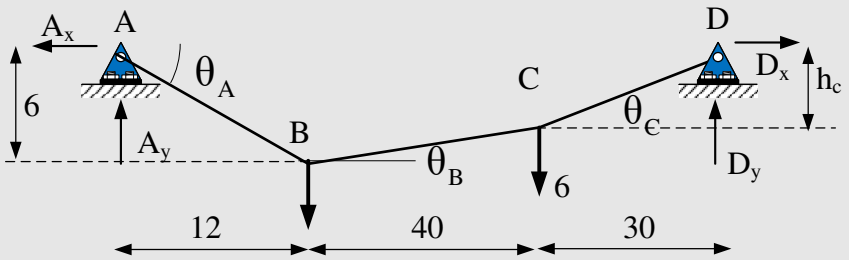
11 إذا بدأنا بالكابل غير المحمّل وغير المشدود قبل تطبيق الحمل، وجب حل المسألة تكرارياً بسبب لاخطيتها الهندسية. أما في المعتاد فنبدأ بكابل مشدود قبل تطبيق الحمل؛ وفي هذه الحالة تكون التشوهات الإضافية صغيرة عادةً، ويمكن اعتبار الكابل غير قابل للاستطالة، فتكون معادلات الاتزان كافية لحل المسألة.

30.2 الأحمال المركزة

12 يسمى الكابل الذي يحمل أحمالاً نقطية كابلاً حبلياً . وتحليله بسيط مبدئياً، إذ يستعمل معادلات الاتزان الأساسية.

13 نبدأ بمثال بسيط، ثم نعرّف مبرهنة عامة تحكم شكل الكابل الحبلي.

30.2.1 مثال 30.1: كابل حبلي



لدينا أربعة ردود أفعال خارجية، إلا أن الأفقيين منها متساويان، ويمكن استعمال إحدى معادلات الشروط العديدة إلى جانب معادلات الاتزان الثلاث. نحل أولاً لإيجاد A_y وD_y و$H = A_x = D_x$. يمكن في هذه المسألة استعمال معادلات الاتزان الساكن الثلاث $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$، لكن لعدم وجود قوة في اتجاه x لا تفيدنا المعادلة الأولى. لذلك نستعمل المجموعة $\Sigma F_y = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. لاحظ أن في المسألة ثمانية مجاهيل، هي $A_x, A_y, D_x, D_y, \theta_A, \theta_B, \theta_C, h_C$، وأن لدينا أربع عقد ومعادلتي اتزان عند كل عقدة.

1. نوجد أولاً D_y:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0; \Rightarrow 12(30) + 6(70) - D_y(100) = 0 \Rightarrow D_y = 7.8 \text{ kip}$$

2. ثم نوجد A_y:

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow A_y - 12 - 6 + 7.8 = 0 \Rightarrow A_y = 10.2 \text{ kip}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. نوجد القوة الأفقية بعزل مخطط الجسم الحر للجزء AB:

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_B = 0; \Rightarrow A_y(30) - H(6) = 0 \Rightarrow H = 51 \text{ kip}$$

4. يمكن الآن إيجاد الترخيم عند النقطة C بعزل مخطط الجسم الحر للجزء CD:

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -D_Y(30) + H(h_c) = 0$$
$$\Rightarrow h_c = \frac{30D_y}{H} = \frac{30(7.8)}{51} = 4.6 \text{ ft}$$

5. وأخيراً نوجد القوى الداخلية في الكابل، أي قوى الشد في هذه الحالة:

$$\tan\theta_A = \frac{6}{30} = 0.200 \Rightarrow \theta_A = 11.31\,\text{deg}$$
$$T_{AB} = \frac{H}{\cos\theta_A} = \frac{51}{0.981} = 51.98 \text{ kip}$$
$$\tan\theta_B = \frac{6-4.6}{40} = 0.035 \Rightarrow \theta_B = 2\,\text{deg}$$
$$T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B} = \frac{51}{0.999} = 51.03 \text{ kip}$$
$$\tan\theta_C = \frac{4.6}{30} = 0.153 \Rightarrow \theta_C = 8.7\,\text{deg}$$
$$T_{CD} = \frac{H}{\cos\theta_C} = \frac{51}{0.988} = 51.62 \text{ kip}$$

14 يتضح من متابعة حسابات المثال السابق أن الخطوات تشبه تحليل كمرة بسيطة الارتكاز بحرها مساوٍ لبحر الكابل وتحمل الحمل الرأسي نفسه. ونلاحظ أيضاً تطابق شكل الكابل ومخطط العزم للكمرة المكافئة، الشكل 30.1.

15 وليس من قبيل المصادفة أن $Hh = M$:

$$(51)(6) = (10.2)(30) = 306 \checkmark$$
$$(51)(4.6) = (7.8)(30) = 234 \checkmark$$

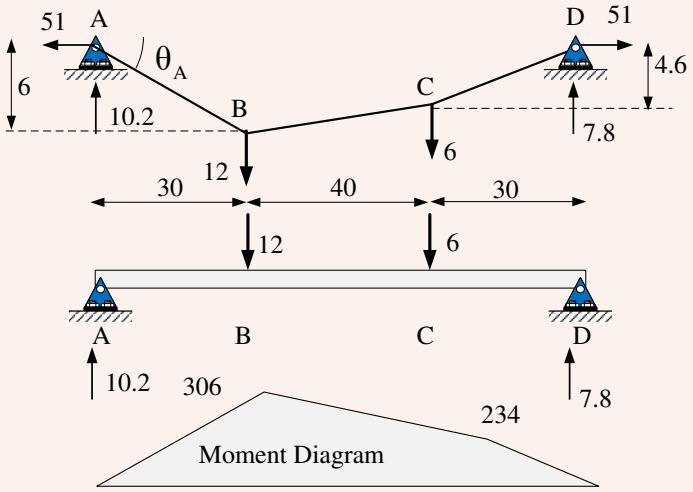
16 ومن ثم يمكن صياغة المبرهنة الآتية:

تعريف 30.1: مبرهنة الكابل العامة

عند أية نقطة من كابل خاضع لأحمال رأسية، يساوي حاصل ضرب المركبة الأفقية لشد الكابل في المسافة الرأسية من النقطة إلى وتر الكابل عزم الانحناء الذي ينشأ في ذلك المقطع لو أثرت الأحمال التي يحملها الكابل في كمرة بسيطة الارتكاز لها البحر نفسه.

17 يوضح المثال الآتي هذه المبرهنة بمزيد من التفصيل.

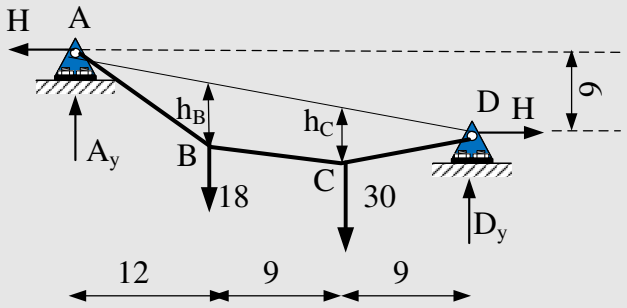
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 30.1: التحقق من نظرية الكابل

30.2.2 مثال 30.2: كابل حبلي مائل

نريد تحديد ردود الأفعال والترخيمين عند B وC للكابل الحبلي الآتي.



باستعمال معادلات الاتزان

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 12(18) + 21(30) - 6H - 30D_y = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 18(18) + 9(30) - 30A_y + 6H = 0$$
$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y A_y + D_y - 30 - 18 = 0$$

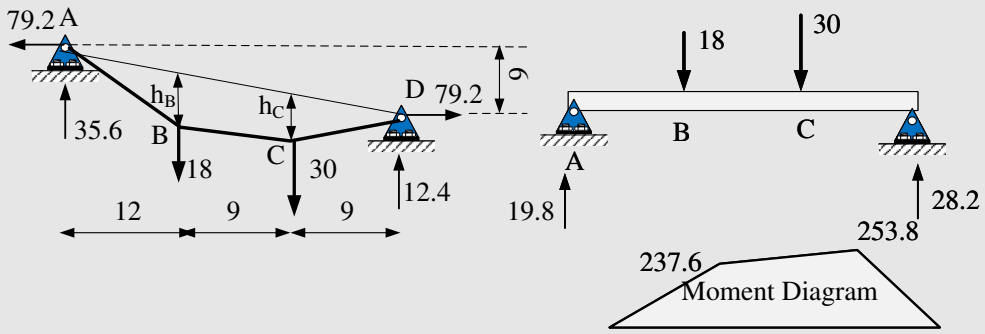
حل هذه المعادلات الثلاث هو

$$\lfloor\ A_y \quad D_y \quad H\ \rfloor = \lfloor\ 35.6 \quad 12.4 \quad 79.2\ \rfloor$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يظهر مخطط العزم المناظر أدناه، وتُحدد قيمتا الترخيم مباشرةً من

$$h_B = \frac{M_B}{H} = \frac{237.6}{79.2} = 3$$
$$h_C = \frac{M_C}{H} = \frac{253.8}{79.2} = 3.2$$



18 وهكذا يمكن تحديد ترخيمات الكابل بسهولة من معادلات الاتزان ومبرهنة الكابل العامة.

19 ويترتب على ذلك أن شكل الكابل الذي يحمل حملاً موزعاً بانتظام على طول الوتر يكون مكافئاً، وهو شكل مخطط العزم المناظر.

30.2.3 مثال 30.3: عربة معلقة بكابلين

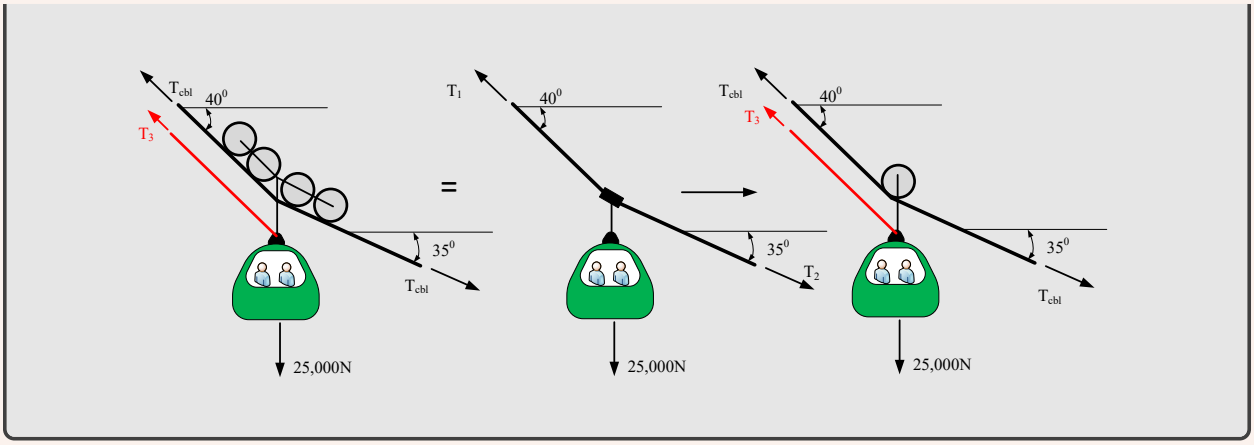
نريد تحديد القوة اللازمة لسحب عربة معلقة بالكابل الأحمر، يحملها الكابل الأسود، وتتحرك بسرعة ثابتة من برج منخفض إلى برج أعلى. نفترض أولاً أن العربة مثبتة بالكابل الحامل، وبإهمال كابل السحب نحصل على

$$\begin{cases} (\leftarrow\ ) \Sigma F_x = 0 & \Rightarrow \quad T_1 \cos(40) - T_2 \cos(35) \\ (+\uparrow) \Sigma F_y = 0 & \Rightarrow \quad T_1 \sin(40) - T_2 \sin(35) - 25,000 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 234,900 \\ 219,700 \end{array} \right\} \text{ N}$$

نلاحظ أن شدّي الكابل يساويان نحو عشرة أمثال وزن العربة، وأن $T_1 > T_2$. إذا حررنا العربة من التثبيت انزلقت إلى أسفل ما لم تمسكها القوة T_3. ومع افتراض انعدام الاحتكاك في نظام الإسناد، ينبغي أن يبقى الشد في الكابل T_{cbl} ثابتاً. ومن ثم

$$T_3 = T_1 - T_2 = 234,900 - 219,700 = 15,200 \text{ N}$$
$$T_{cbl} = 234,900 - 15,200 = 219,700 \text{ N}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



30.3 الأحمال الموزعة

20 ندرس في الأقسام الآتية حالتين. في الأولى يتوزع الحمل بانتظام على الطول المسقط للكابل، كما في كابل يحمل جسراً ذا حمل منتظم؛ وفي الثانية لا يحمل الكابل إلا وزنه الذاتي الموزع بانتظام على طول القوس.

21 قبل المتابعة ينبغي ملاحظة أن من صعوبات تحليل الكابلات تعدد الصيغ الصحيحة لحل المسألة الواحدة؛ فقد يُعبّر الحل بمزيج من القوة الأفقية أو الترخيم أو الشد الأقصى أو طول الكابل. وقد يجعل ذلك الحلول، أو مقارنتها بحلول أخرى، مربكاً أحياناً.

30.3.1 معادلة الاتزان

22 يظهر مخطط الجسم الحر لكابل معلّق ذي حمل موزع بانتظام في الشكل 30.2. وتكون عادةً معلومة قيم البحر L، والترخيم الأقصى d، والمسافة الرأسية بين المسندين h.

23 في غياب أي حمل أفقي تكون H ثابتة.

24 يعطي جمع القوى الرأسية:

$$(+\downarrow)\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V + dF + (V + \mathrm{d}V) = 0 \tag{30.1}$$

$$dV + dF = 0 \tag{30.2}$$

حيث V المركبة الرأسية لشد الكابل عند x.

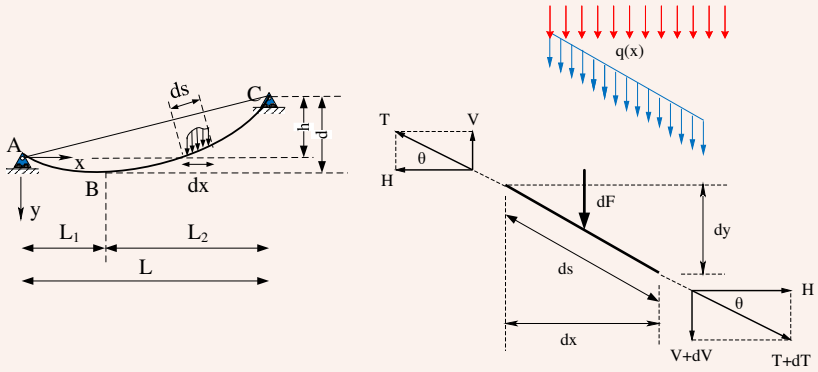
25 ولأن اتجاه شد الكابل T يجب أن يكون مماساً له، فإن

$$\tan\theta = \frac{V}{H}$$

بحذف V والتعويض في المعادلة 30.2، نعيد الصياغة بدلالة H الثابتة على طول الكابل:

$$\mathrm{d}(H\tan\theta) + dF = 0 \tag{30.3}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 30.2: هندسة الكابل: الحالة الأولى

30.3.2 qdx؛ حمل عرضي؛ قطع مكافئ

30.3.2.1 الهندسة

26 نشتق معادلتين متكافئتين لهندسة الكابل، إذ سنحتاج إلى كلتيهما في الاشتقاقات اللاحقة.

أولاً: بدلالة $H,\ q,\ L$

27 يكون الاشتقاق الأول بدلالة القوة الأفقية H، والحمل q، والبعدين الهندسيين L وh، الشكل 30.2.

28 لحمل موزع بانتظام على المحور x، كما في كابل يحمل سطح جسر، يكون $dF = qdx$ ويمكن إعادة كتابة المعادلة 30.3 على الصورة

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(H\tan\theta\right) = q$$

بما أن H ثابتة لعدم تطبيق حمل أفقي، فإن

$$-H\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\tan\theta\right) = q \tag{30.4}$$

وبالتعويض عن $\tan\theta = \frac{dy}{\mathrm{d}x}$ في المعادلة 30.4 نحصل على المعادلة التفاضلية الحاكمة للكابلات:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H} \tag{30.5}$$

29 لاحظ التناظر مع الانحناء:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 يعطي التكامل مرتين

$$Hy' = -qx + C_1 \tag{30.6}$$

$$Hy = -q\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \tag{30.7}$$

تُستخرج C_1 وC_2 من الشرطين الحديين: $y = 0$ عند $x = 0$، و$y = -h$ عند $x = L$.

31 ومنهما نحصل على

$$C_2 = 0$$

$$-Hh = -q\frac{L^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2} - H\frac{h}{L}.$$

ومن ثم تصبح المعادلتان 30.6 و30.7

$$y' = -\frac{q}{H}x + \frac{qL}{2H} - \frac{h}{L} \tag{30.8}$$

$$y = -\frac{q}{2H}x^2 + \left(\frac{qL}{2H} - \frac{h}{L}\right)x \tag{30.9}$$

وهكذا يكون شكل الكابل مكافئاً، وتعطي هذه المعادلة الشكل $y(x)$ بدلالة القوة الأفقية H التي لم تُحدد بعد.

ثانياً: بدلالة s ، L

32 يمكن استخراج شكل الكابل من المعادلة 30.9 لـy، والمعادلة 30.23 لـH؛ وبجمعهما نحصل على

$$\frac{x\left(2d\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)(L-x)+h(x-2L)\right)}{L^2}$$

بالنسبة إلى الشكل 30.3.

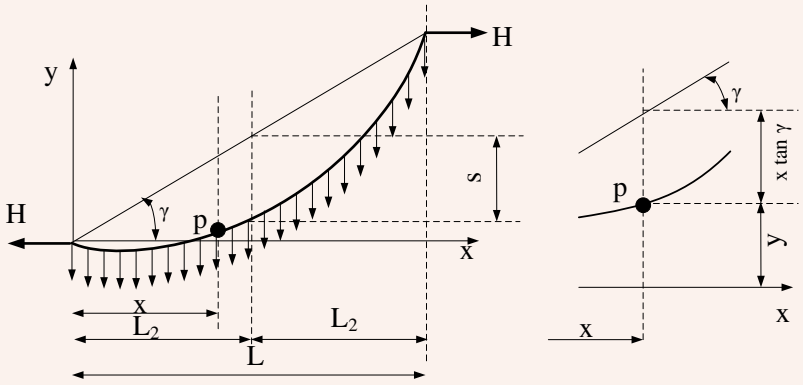
33 للحصول على معادلة المنحنى بالنسبة إلى الوتر وبدلالة الترخيم s في الشكل 30.3، نجعل $h = 0$:

$$y = \frac{4sx}{L^2}(L - x)$$

34 نعود الآن لتحديد معادلة الكابل بالنسبة إلى محور أفقي:

$$y = \frac{4sx}{L^2}(L - x) + x\tan\gamma \tag{30.10}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 30.3: هندسة الكابل: الحالة الثانية

مقدار الترخيم

35 يكون الترخيم الأقصى بالنسبة إلى الوتر

$$s = \frac{qL^2}{8H} \tag{30.11}$$

36 ويُعطى الترخيم d بالنسبة إلى المسند الأعلى بإحدى المعادلتين الآتيتين:

بدلالة h وL_1
$$d = \frac{hL^2 - 2hLL_1 + hL_1^2}{L(L-2L_1)}$$

بدلالة q وH
$$d = \frac{\left(2hH + L^2q\right)^2}{8HL^2q}$$

موضع الترخيم الأقصى

37 عند نقطة الترخيم الأقصى d الواقعة عند L_1 يكون $y' = 0$؛ ومن المعادلة 30.8

$$0 = -\frac{q}{H}x + \frac{0}{qL}2H - \frac{h}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{2} - \frac{Hh}{qL} = L_1 \;\&\; L_2 = \frac{L}{2} + \frac{Hh}{qL}$$

بأخذ عزوم الجزأين AB وBC حول A وB، على الترتيب، نحصل على

$$\begin{aligned} H(d-h) - q\frac{L_1^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_1^2}{2d-h} \\ Hd - q\frac{L_2^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_2^2}{2d} \end{aligned} \tag{30.12}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبمساواة عبارتي H:

$$q\frac{L_1^2}{2d-h} = q\frac{L_2^2}{2d} \Rightarrow L_1 = \sqrt{\frac{d-h}{d}}L_2$$

لكن $L_1 + L_2 = L$، ومن ثم

$$L2 = \frac{L}{\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]} \tag{30.13}$$

مما يعطي

$$L_1 = L - \frac{L}{\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1}$$

طول قوس الكابل

38 لا يُعطى الطول الابتدائي للكابل L_{cbl} عادةً، بل يجب مثلاً تحديده بحيث لا يتجاوز الترخيم قيمة معينة. ويمكن تحقيق ذلك بتغيير L_{cbl} والشد المسبق الابتدائي σ_0 حتى بلوغ الترخيم المطلوب.

39 يُعطى طول الكابل بالعلاقة

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{30.14}$$

40 نعرض عبارتين للطول: الأولى بدلالة H، والثانية بدلالة s وL.

أولاً: بدلالة H

41 باستذكار توسع المتسلسلة اللانهائية لنظرية ذات الحدين:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots \\ (1+b)^n &= 1 + nb + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + \cdots \end{aligned} \tag{30.15}$$

$$\Rightarrow \text{عندما} b^2 << 1; \sqrt{1+b} = (1+b)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2$$

يمكن إذن تبسيط المعادلة 30.14 إلى

$$L_{cbl} = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx \tag{30.16}$$

نستخرج dy/dx من المعادلة 30.8، وH من المعادلة 30.23، وبشيء من المساعدة من برنامج Mathematica نحصل على

(30.17)

$$L_{cbl} \simeq \frac{1}{120L^3}\left\{-3d^4\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^8+10d^2\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^4\left(2L^2-3h^2\right)-15h^4+60h^2L^2+120L^4\right\}$$

[42] أو بدلالة H:

$$L_{cbl} = -\frac{h^4}{8L^3}+\frac{Lq^2\left(2L^2-3h^2\right)}{48H^2}+\frac{h^2}{2L}-\frac{L^5q^4}{640H^4}+L \tag{30.18}$$

ثانياً: بدلالة s وL

[43] للوتر الأفقي، نبدأ بالمعادلة 30.10 وننقل مبدأ الإحداثيات إلى أخفض نقطة، الواقعة في منتصف البحر، فنحصل على

$$y = \frac{4s}{L^2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8sx}{L^2}$$

بالتعويض في المعادلة 30.14

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left(1+\frac{64h^2x^2}{L^4}\right)dx$$

نستعمل مرة أخرى نظرية ذات الحدين، المعادلة 30.15، ونحتفظ بالحدود القليلة الأولى من المتسلسلة الناتجة:

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left[1+\frac{1}{2}(64)\frac{h^2}{L^4}x^2-\frac{1}{4}(64)^2\frac{h^4}{L^8}x^4+\cdots\right]dx$$

فنحصل على

$$L_{cbl} \simeq L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right) \tag{30.19}$$

حيث تُعرّف θ الآن بـ

$$\theta = h/L \tag{30.20}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

44 للكابل المائل، يلزم استعمال dy/dx من المعادلة 30.10، غير أن ذلك يؤدي إلى معادلة شديدة التعقيد، حتى باستعمال Mathematica:

(30.21)

$$L_{cbl}$$

$$) - 4L\theta + 4s) + L\left[(\tan(\gamma) + 4\theta)\sqrt{8\theta(\tan(\gamma) + 2\theta) + \sec^2(\gamma)} + \sinh^{-1}(\tan(\gamma) + 4\theta)\right] - L\sinh^{-1}(\tan(\gamma))\Big\}$$

45 يمكن اشتقاق عبارة مبسطة بافتراض أن طول الكابل يساوي طول كابل ذي وتر أفقي، على أن يساوي البحر طول وتر الكابل المائل، أي $L\sec\gamma$، ويساوي الترخيم $s\cos\gamma$، وهو تقريب لأقصى مسافة عمودية بين الكابل ووتره. ووفق هذه الافتراضات:

$$\theta' = \frac{s\cos\gamma}{L\sec\gamma} = \frac{\theta}{\sec^2\gamma}$$

بالتعويض في المعادلة 30.19

$$L_{cbl} = L\left(\sec\gamma + \frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^3\gamma}\right) \tag{30.22}$$

30.3.2.2 القوى الداخلية

القوة الأفقية

46 بدمج المعادلة 30.12 مع المعادلة 30.13 نحصل على

$$H = \frac{qL^2}{2d\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]^2} \tag{30.23}$$

الشد الأقصى

47 من الشكل 30.2[1]

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} \Rightarrow T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

[1] مقتبس من Norris, C. H., and J. B. Wilbur, "Elementary Structural Analysis," 1960.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \Rightarrow T(x) = H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{30.24}$$

48 للحالة العامة لكابل مائل، وباستعمال المعادلة 30.10:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8sx}{L^3} - \frac{4s}{L} + \tan\gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L^3} - 4\theta + \tan\gamma\end{aligned}$$

حيث $\theta = s/L$ وهي نسبة الترخيم. وبالاشتقاق نحصل على

$$= H\left(1 + \frac{64\theta^2x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - \frac{64\theta^2x}{L} + \frac{16\theta x}{L}\tan\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} T(x)$$

(30.25)

يحدث الشد الأقصى عند طرفي الكابل:

$$\begin{aligned}x\text{=0 عند};\ T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ x\text{=L عند};\ T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{30.26}$$

30.3.2.3 الاستطالة المرنة

بدلالة θ وH

49 يتعرض الكابل المحمّل لاستطالة مرنة قد تؤثر كثيراً في الترخيم. وتكون الاستطالة ببساطة $\Delta L = FL/AE$.

50 رغم تغير شد الكابل $T(x)$ على امتداد طوله، نحدد شدّاً متوسطاً يؤدي، لو طُبق على طول الكابل كله، إلى الاستطالة المرنة الكلية نفسها (Norris **and** Wilbur, 1960):

$$\frac{T_{avg}L_{cbl}}{AE} = \int_0^{L_{cbl}} \frac{T(l)dl}{AE}$$

وبما أن A وE ثابتان، فإن

$$\begin{aligned}T_{avg} &= \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} T(x)dl = \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} H\frac{dl}{dx}dl \\ &= \frac{H}{L_{cbl}}\int_0^{L}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لحمل منتظم لكل وحدة طول أفقي ووتر كابل مائل، يمكن استخراج dy/dx من المعادلة 30.10 فنحصل على

$$T_{avg} = \frac{HL}{L_{cbl}}\left(1 + \frac{16}{3}\theta^2 + \tan^2\gamma\right) \tag{30.27}$$

وأخيراً نستعمل المعادلة 30.22 لتحديد استطالة الكابل:

$$\Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1 + 16\theta^2/3 + \tan^2\gamma}{\sec\gamma + 8/3(\theta^2/\sec^3\gamma)} \tag{30.28}$$

بدلالة q وL وL_{cbl}

51 يمكن التعبير عن طول الكابل المائل في الحالة المتشوهة كما يأتي:

$$\begin{aligned} L_{cbl}^{ext} &= \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \int_0^L \frac{T\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA} dx \end{aligned} \tag{30.29}$$

وتشمل هذه العبارة الاستطالة الحرارية $\alpha\Delta T$، والإجهاد الابتدائي σ_0، وشد الكابل T. وباستخدام المعادلة 30.24 يمكن إعادة كتابة الحد الثاني في الطرف الأيمن على الصورة

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{T\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA} dx &= \frac{H}{EA}\int_0^L \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{H}{EA}\int_0^L \left(\tan\gamma + \frac{V(x)}{H}\right)^2 dx \end{aligned} \tag{30.30}$$

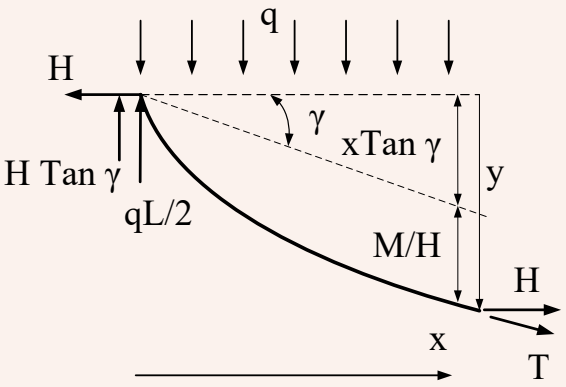
ومن الشكل 30.4

$$y = \frac{M(x)}{H} + x\tan\gamma; \quad y' = \frac{V(x)}{H} + \tan\gamma; \quad V(x) = H\tan\gamma + q\frac{L}{2} - qx$$

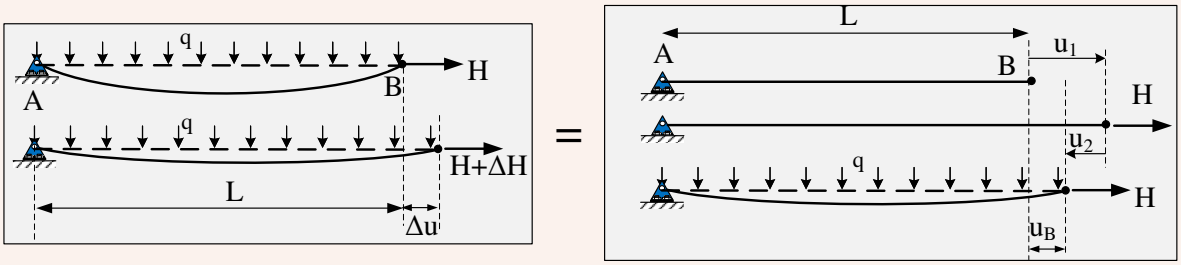
بالتعويض في المعادلتين 30.30 و30.29، تُختزل العبارة إلى

$$L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) \tag{30.31}$$

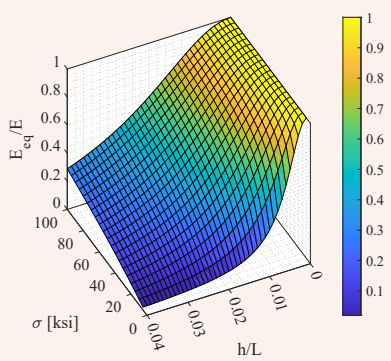
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



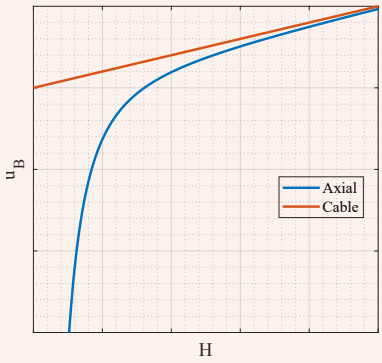
شكل 30.4: هندسة كابل مائل خاضع لحمل عرضي أفقي منتظم



(a) الجساءة المحورية للكابل



(c) معامل E المكافئ بدلالة الإجهاد والترخيم



(b) أثر الحمل العرضي المليّن

شكل 30.5: جساءة الكابل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.3.2.4 الجساءة المحورية المكافئة

49 تمثل الجساءة القوة لكل وحدة إزاحة؛ وتساوي مرونة الكابل المحورية البسيطة L/AE.

50 للكابل المحمّل، تكون الجساءة القوة الأفقية لكل وحدة استطالة مناظرة. وفي الشكل 30.5a تساوي dH/du. وكما سيظهر، تُحدد هذه الجساءة بقلب حد المرونة، أي التشوه لكل وحدة قوة. والخطوات مباشرة نسبياً:

1. نطبق H، فيستطيل الكابل بمقدار $u_1 = HL/AE$.
2. مع إبقاء الشد H، نطبق الحمل العرضي q، فيسبب تقصيراً وفق المعادلة 30.16:

$$u_2 = \int_0^L \left\{ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \right\} dx$$

وتُعطى $y(x)$ بالمعادلة 30.37؛ وبالتعويض نحصل على

$$u_2 = \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

3. تكون الإزاحة الصافية ومشتقتها بالنسبة إلى H كما يأتي:

$$u_B = u_1 - u_2 = \frac{HL}{AE} - \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 + \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \tag{30.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_B}{dH} &= \frac{L}{AE} + \frac{L}{12H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{160H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \\ &= \frac{L}{AE}\left\{ 1 + \frac{1}{12}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{1}{160}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \right\} \end{aligned}$$

تُمثّل المعادلة 30.32 بيانياً في الشكل 30.5b، ويظهر بوضوح أثر الحمل العرضي في تليين الكابل[2].

4. غير أن المطلوب فعلياً هو حد الجساءة

$$\frac{dH}{du_B} = k_t = \left(\frac{1}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4} \right) \frac{AE}{L} \tag{30.33}$$

51 يمكن أيضاً التعبير عن الجساءة المماسية بدلالة معامل مرونة مكافئ E_{eq}:

$$E_{eq} = \left(\frac{E}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4} \right) \frac{AE}{L} \tag{30.34}$$

ينبغي ملاحظة أن الحمل العرضي يخفض الجساءة، ولذلك يكون دائماً $E_{eq} < E$.

[2] يناظر ذلك أثر $P - \delta$ في الأعمدة الخاضعة لحمل ضاغط، كما سيُناقش في §29.2.2 و59.1.2.4.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52 يمكن التعويض بـ

$$\frac{qL}{H} = 8\frac{H}{L}\text{؛ و } \sigma = \frac{H}{A}$$

فتصبح المعادلة 30.34

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{16}{3}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{128}{5}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^4} \tag{30.35}$$

ومن ثم يعتمد المعامل المكافئ على كل من الإجهاد الابتدائي في الكابل ونسبة الترخيم. ويوضح الشكل 30.5c ذلك، إذ نلاحظ أن E_{eq} ينخفض بزيادة الترخيم أو بنقصان الشد المحوري.

30.3.2.5 حالة خاصة: وتر أفقي

53 للكابل الذي يقع مسنداه على المنسوب نفسه، أي $h = 0$، تُختزل بعض المعادلات السابقة إلى:

$$\text{المعادلة 30.9} \rightarrow y = \frac{4xs}{L^2}(L - x) \tag{30.36}$$

$$\text{المعادلة 30.9} \rightarrow y = \frac{qx}{2H}(L - x) \tag{30.37}$$

$$\text{المعادلة 30.23} \rightarrow H = \frac{qL^2}{8s} \tag{30.38}$$

$$\text{المعادلة 30.17} \rightarrow L_{cbl} \simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L \tag{30.39}$$

$$\text{المعادلة 30.18} \rightarrow L_{cbl} = -\frac{L^5q^4}{640H^4} + \frac{L^3q^2}{24H^2} + L \tag{30.40}$$

$$\text{المعادلة 30.28} \rightarrow \Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1 + 16\theta^2/3}{1 + 8\theta^2/3} \tag{30.41}$$

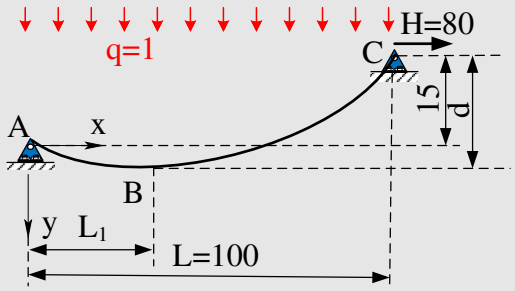
$$\text{المعادلة 30.26} \rightarrow T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \tag{30.42}$$

$$\text{المعادلة 30.30} \rightarrow L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2q\left(8\theta^2 + 3\right)}{12AE\theta} \tag{30.43}$$

حيث s هو الترخيم؛ وفي المعادلة 30.42 تكون $r = s/L$، الشكل 30.3، بينما تكون $r = d/L$ في الشكل 30.2. وباستعمال المعادلة 30.15 والاحتفاظ بالحد الأول فقط يمكن تبسيط ذلك إلى

$$T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \approx H(1 + 8r^2) \tag{30.44}$$

30.3.2.5.1 مثال 30.4: هندسة كابل مائل



المعطيات هي $H = 80$ و$L = 100$ و$h = 15$ و$q = 1$. يمكن استخراج طول الكابل من المعادلة 30.18، فنحصل على

$$L_{cbl} = -\frac{15^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + 100 = 107.03$$

ثم نوجد d من المعادلة 30.23:

$$80 = \frac{5000}{\left(\sqrt{\frac{d-15}{d}} + 1\right)^2 d}$$

مما يعطي $d = 24.025$. نتحقق من الحسابات بإيجاد L_{cbl} من المعادلة 30.17؛ وبالتعويض:

$$L_{cbl} \simeq \frac{1}{120(100)^3}\left\{-3(24.02)^4\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^8 + 10(24.02)^2\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^4\left(2(100)^2-3(15)^2\right) - 15(15)^4 + 60(15)^2\right.$$

أو بدلالة H من المعادلة 30.18:

$$L_{cbl} = -\frac{(15)^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + (100) = 107.03$$

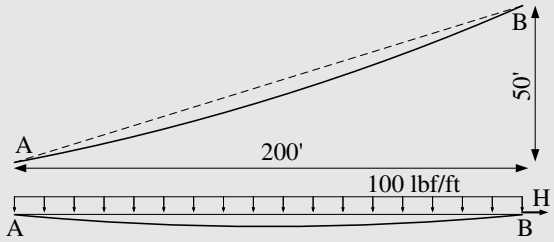
وأخيراً تقع النقطة الأخفض على مسافة L_1 من المسند الأيسر، وفق المعادلة 30.3.2.1:

$$L_1 = 100 - \frac{100}{\sqrt{\frac{24.02-15}{24.02}}+1} = 38$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.3.2.5.2 مثال 30.5: قوى كابل مائل

كابل يحمل حملاً منتظماً مقداره 100 رطل قوة لكل قدم أفقي، ومعلّق بين نقطتين تفصل بينهما مسافة أفقية قدرها 200 قدم، وتقع إحداهما أعلى من الأخرى بمقدار 50 قدماً. عُدّل شد الكابل حتى أصبح الترخيم في منتصف البحر، أي المسافة الرأسية من وتر الكابل عند منتصف البحر، 12.5 قدماً. المطلوب تحديد الشد الأقصى وطول الكابل.



تُعطى المركبة الأفقية للشد بالمعادلة 30.38:

$$H = \frac{qL^2}{8s} = \frac{100(200)^2}{8(12.5)} = 40,000 \text{ lbf}$$

وتُستخرج θ و$\tan\gamma$ بدورهما من المعادلة 30.20 والشكل 30.3:

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{12.5}{200} = 0.0625$$
$$\tan\gamma = \frac{50}{200} = 0.25 \Rightarrow \gamma = 0.245 \text{ rad}$$

يحدث الشد الأقصى عند المسند الأعلى، ويُعطى بالمعادلة 30.26:

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 40,000\left(1 + 16(0.0625)\theta^2 + (0.25)^2 + 8(0.0625)(0.25)\right)^{1/2} \\ &= 44,700 \text{ lbf} \end{aligned}$$

نحدد بعد ذلك طول الكابل من المعادلتين المشتقتين سابقاً. نبدأ بالحل شبه الدقيق، المعادلة 30.21:

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8(0.0625)}\Bigg\{ &\sqrt{\sec^2(0.245)}\left[-(200)\tan(0.245) - 4(200)(0.0625) + 4(12.5)\right] \\ &+ 200\Bigg[\tan(0.245) + 4(0.0625)\sqrt{8(0.0625)(\tan(0.245) + 2(0.245)) + \sec^2(0.245)} \\ &+ \sinh^{-1}(\tan(0.245) + 4(0.0625))\Bigg] - (200)\sinh^{-1}(0.245)\Bigg\} \\ = 214.1 \text{ ft} \end{aligned} \tag{30.45}$$

ثم نستعمل التقريب في المعادلة 30.22:

$$L_{cbl} = L\left(\sec(0.245) + \frac{8}{3}\frac{0.0625^2}{\sec^3(0.245)}\right) = 208.1\text{ft}$$

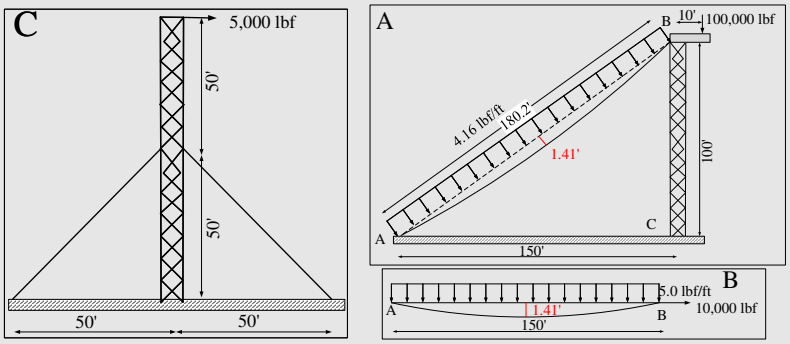
الفرق عن الحل الأدق أقل من 3%.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.3.2.5.3 مثال 30.6: برج مشدود بكابلات تثبيت

نم لوقنم يتآلا عطقملا Norris **and** Wilbur, 1960 Elementary Structural Analysis.

لنفترض استعمال كابل وزنه 4.16 رطلاً لكل قدم ككابل تثبيت، وأن المطلوب منه إبقاء الصاري BC رأسياً عند تطبيق حمل مقداره 100,000 رطل قوة[a].



بأخذ العزوم حول المسند:

$$100H - 100,000(10) = 0 \Rightarrow H = 10,000 \text{ lbf}$$

ينبغي إذن توليد H لإبقاء الصاري رأسياً. بما أن الوزن 4.16 رطل قوة لكل قدم مقاس على طول الكابل، يكون الحمل الرأسي المكافئ q'، باستعمال الكابل المكافئ في الشكل B:

$$q' = 4.16\frac{180.2}{150} = 5.0 \text{ رطل قوة لكل قدم أفقي}$$

يجب أن يحقق ترخيم الكابل المعادلة 30.38:

$$H = \frac{qL^2}{8h} \Rightarrow h = \frac{qL^2}{8H} = \frac{5(150)^2}{8(10,000)} = 1.41 \text{ ft}$$

بما أن هذا الحل التقريبي يفترض أن الكابل مكافئ وخاضع لحمل منتظم مقداره

$$q = 4.16(180.2/150) = 5.0 \text{ رطل قوة لكل قدم أفقي}$$

فإن الشد الأقصى في كابل التثبيت يحدث عند B، وباستعمال المعادلة 30.26:

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 10,000\left[1.0 + 16\left(\frac{1.41}{150}\right)^2 + \left(\frac{100}{150}\right)^2 + 8\left(\frac{141}{150}\right)\left(\frac{100}{150}\right)\right]^{1/2} \\ &= 12,240 \text{ lbf} \end{aligned}$$

يمكن الحصول على تقريب جيد للحل السابق باعتبار الكابل قضيب شد مستقيم يقع على الوتر AB. طول هذا الوتر 180.2 قدم، ويكون الشد حينئذ

$$T_{max} = 10,000\left(\frac{180.2}{150}\right) = 12,000 \text{ lbf}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ينشأ الخطأ الوحيد في هذا التقريب من أن ميل الكابل عند B أكبر فعلياً من ميل الوتر. وما لم تكن نسبة ترخيم الكابل كبيرة، فلا يُتوقع أن يكون فرق الميل مهماً.

عادةً أكثر من كابل تثبيت واحد للصاري أو للمنشآت المشدودة الأخرى، كي يُقاوم الانقلاب في أكثر من اتجاه. في هذه الحالة تُضبط كابلات التثبيت على شد ابتدائي معين؛ ويشيع استعمال شد ابتدائي يساوي نحو نصف الشد الأقصى المتوقع تحت الحمل. لنفترض أن ترخيمي الكابلين AB وAC ضُبطا بحيث تساوي المركبة الأفقية للشد في كل منهما 6,000 رطل قوة عند عدم وجود حمل أفقي على الصاري. وفق طريقة التحليل التقريبية المقترحة، يساوي الشد الابتدائي الأقصى في كل كابل $6,000 \times 1.414 = 8,500$ رطل قوة. عند تطبيق حمل مقداره 5,000 رطل قوة عند قمة الصاري، ينشأ فرق أفقي محصل مقداره 10,000 رطل قوة بزيادة المركبة الأفقية للشد في الكابل AB وخفضها في AC بالمقدار نفسه، فيصبح $H_{AB} = 11,000$ رطل قوة و$H_{AC} = 1,000$ رطل قوة. ويكون شد التثبيت الأقصى

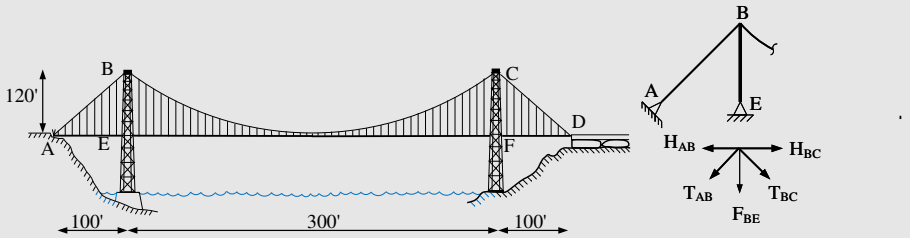
$$T_{max} = 11,000 \times 1.414 = 15,500 \text{ lbf}$$

في الواقع، عندما يُطبق حمل 5,000 رطل قوة عند قمة الصاري تتحرك النقطة A إلى اليمين. يسمح الكابل AB بهذه الحركة لأنه يتعرض لاستطالة مرنة إضافية وينقص ترخيمه، بينما يزداد ترخيم الكابل AC ويقصر طوله مرناً. ويمكن إجراء تحليل دقيق يأخذ تغيرات الطول المرنة وتغيرات الترخيم في الحسبان، لكنه معقد نسبياً.

[a] مقتبس من Norris, C. H., and J. B. Wilbur, "Elementary Structural Analysis," 1960.

30.3.2.5.4 مثال 30.7: جسر معلّق

نريد تحديد الأقطار الأولية لكابلات جسر معلّق، بافتراض إجهاد مسموح للكابل σ_{all} مقداره 190 ksi. قواعد البرجين مفصلية لتجنب عزوم الانحناء الكبيرة.



يُقدّر الحمل الميت الكلي بـ200 psf. نفترض نسبة ترخيم إلى بحر قدرها $\frac{1}{5}$. يساوي الحمل الميت الذي يحمله كل كابل نصف الحمل الميت الكلي، أي $p_1 = \frac{1}{2}(200)\ \text{psf}(50)\ \text{ft}\frac{1}{1,000} = 5.0\ \text{k/ft}$. وباستخدام شاحنة HS 20، أو حملها الموزع المكافئ البالغ 0.64 k/ft لكل حارة، يكون الحمل المنتظم الإضافي على كل كابل

$$p_2 = (2)\text{كابل/حارة}(.64)\text{حارة/k/ft} = 1.28\ \text{k/ft كابل/}$$

ومن ثم يكون حمل التصميم الكلي

$$p_1 + p_2 = 5 + 1.28 = 6.28\ \text{k/ft}$$

تُحدد قوة الدفع H من المعادلة 30.38:

$$H = \frac{pl^2}{8h} = \frac{(6.28)\ \text{k/ft}(300)^2\ \text{ft}^2}{(8)\,(60)\ \text{ft}} = 1,177\ \text{k}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحظ أن h تُستخرج من $r = h/L = 1/5$. ومن المعادلة 30.44 يكون الشد الأقصى

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (1,177)\ \text{k}\sqrt{1+(16)\left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= 1,507\ \text{k} \end{aligned}$$

ولو استعملنا الصيغة التقريبية في المعادلة 30.44 لحصلنا على

$$\begin{aligned} T_{max} &= H(1+8r^2) \\ &= 1,177\left(1+8\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \\ &= 1,554\ \text{k} \end{aligned}$$

أي فرق مقداره 3%. يجب أن تساوي مساحة المقطع العرضي المطلوبة للكابل على البحر الرئيس $A = \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{1,507\ \text{k}}{190\ \text{ksi}} = 7.93\ \text{in}^2$، وهي تقابل قطراً $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(7.93)}{\pi}} = 3.18\ \text{in}$. نحدد بعد ذلك قوة الكابل في AB. بما أن البرج لا يستطيع حمل قوة أفقية، يجب أن تكون المركبة الأفقية لـT_{max} مساوية ومعاكسة للمركبة الأفقية لـT_{AB}، أي $\frac{T_{AB}}{H} = \frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100}$، ومن ثم

$$T_{AB} = H\frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100} = (1,177)(1.562) = 1,838\ \text{k}$$

ينبغي أن تكون مساحة الكابل $A = \frac{1,838\ \text{k}}{190\ \text{ksi}} = 9.68\ \text{in}^2$، وهي تقابل قطراً $d = \sqrt{\frac{(4)(9.68)}{\pi}} = 3.51\ \text{in}$. لتحديد الحمل الرأسي المؤثر في البرج، نجمع المركبتين الرأسيتين لـT_{max} وـT_{AB}، أي V_{BC} وV_{AB} على الترتيب. ويمكن تحديد V_{BC} من H وT_{max}، ومن ثم

$$P = \underbrace{\frac{120}{100}(1,177)}_{V_{AB}} + \underbrace{\sqrt{(1,507)^2-(1,177)^2}}_{V_{BC}} = 1,412+941 = 2,353\ \text{k}$$

باستعمال فولاذ A36 بإجهاد مسموح 21 ksi، ينبغي أن تكون مساحة المقطع العرضي للبرج $A = \frac{2,353}{21} = 112\ \text{in}^2$. لاحظ أن انبعاج برج بهذا الارتفاع قد يحكم أبعاده النهائية. إذا ثُبتت الكابلات في كتلة خرسانية، فينبغي ألا يقل حجم الكتلة عن $V = \frac{(1,412)\ \text{k}(1,000)}{150\ \text{lbs/ft}^3} = 9,413\ \text{ft}^3$، أي مكعب طول حرفه نحو 21 قدماً.

30.3.2.5.5 مثال 30.8: كابل غير قابل للاستطالة؛ درجة الحرارة

لكابل أفقي طوله 300 قدم، وترخيمه المركزي 50 قدماً، وحمله المنتظم 2 k/ft، نريد تحديد التغير الهندسي الناتج من ارتفاع درجة الحرارة بمقدار 150°F، حيث $\alpha_T = 6.6^{-6}/^\circ\text{F}$. تُحدد القوة الأفقية من المعادلة

$$H = \frac{qL^2}{8s} = 450\ \text{kip}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما طول الكابل، من المعادلة 30.39، فهو

$$L_{cbl} \simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L = 320.7 \text{ ft}$$
$$\Delta L_{cbl} = \alpha \Delta T L_{cbl} = 0.317 \text{ ft}$$
$$\frac{\Delta L}{\Delta s} \simeq -\frac{128}{5}\left(\frac{s}{L}\right)^3 + \frac{16}{3}\frac{s}{L} = 0.770$$
$$\Delta s \simeq \frac{0.317}{0.770} = 0.412 \text{ ft}$$
$$s + \Delta s = 50.41 \text{ ft}$$
$$\Delta H = 450 - \frac{qL^2}{8(s+ds)} = 3.68 \text{ kip}$$

أي بنسبة 0.82% فقط.

30.3.2.5.6 مثال 30.9: كابل قابل للاستطالة؛ الترخيم

كابل طوله 40.5 m، أي L_{cbl}، ومعامله $E = 195$ kN/mm^2 ومساحته $A = 100$ mm^2، يمتد مسافة أفقية $L = 40$ m ويحمل حملاً موزعاً بانتظام $q = 1.5$ kN/m. يمكن تحديد ترخيمه من المعادلة 30.31، لكن الطول الفعلي للكابل مجهول؛ لذلك نستعمل المعادلة 30.19 فنحصل على

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

بالتعويض[a] عن $\gamma = 0$ و$\alpha_T = 0$ و$\Sigma M_0 = 0$ نحصل على $\theta = 0.0900$، ومن ثم

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right)$$
$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta}$$
$$40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) = 40.5 + \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta}$$

أصغر جذر هو $\theta = 0.09$، ومن ثم

$$\text{الترخيم} = \theta L = 0.090(40) = 3.6 \text{ m}$$

ثم يُحدد الشد الأفقي H من المعادلة 30.23 مع $h = 0$:

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{1.5(40)^2}{8(3.6)} = 83.3 \text{ kN}$$

[a] حُلّت باستعمال Mathematica.

30.3.2.5.7 مثال 30.10: كابل قابل للاستطالة؛ تأثير حراري

نريد تحديد الطول الابتدائي L_{cbl} لكابل بحره $L = 40m$، ومعامله $E = 195$ kN/mm^2، ومساحته $A = 100$ mm^2، ومعامل تمدده $\alpha_T = 10^{-5}/°$C، بحيث يبلغ ترخيمه 3 m عند خضوعه لـ $q = 1$ kN/m و$\Delta T = 40°$C. نستعمل مرة أخرى

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم

$$\theta = \frac{3}{40} = 0.075$$

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40.591 \text{ m}$$

$$1 + \alpha_T \Delta T = 1.0004$$

$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = 0.2776 \text{ m}$$

$$40.591 = 1.0004 L_{cbl} + 0.2776 \Rightarrow L_{cbl} = 40.297 \text{ m}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.3.2.5.8 مثال 30.11: كابل قابل للاستطالة؛ الشد المسبق

نريد تحديد قوة الشد المسبق اللازمة لتحقيق ترخيم مقداره 1 m تحت حمل $q = 2$ kN/m، مع $L_{cbl} = L = 40.5m$ و$E = 195$ kN/mm^2 و$A = 100$ mm^2. نستعمل مرة أخرى

$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right)=L_{cbl}\left(1-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right)$$

ومن ثم

$$\theta=\frac{1}{40}=0.025$$
$$L\left(1+\frac{8\theta^2}{3}-\frac{32\theta^4}{5}\right)=40,067\text{ mm}$$
$$L_{cbl}\left(1-\frac{\sigma_0}{E}\right)=40,000-\frac{\sigma_0}{195}\text{ mm}$$
$$\frac{L^2q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right)=1,644\text{ mm}$$
$$40,0067=\left(40,000-\frac{\sigma_0}{195}\right)+1,644\Rightarrow \sigma_0{=}7.688\text{ kN/mm}^2$$

ثم يُحدد الشد الأفقي H من المعادلة 30.23 مع $h = 0$:

$$H=\frac{qL^2}{8d}=\frac{2.0(40)^2}{8(1)}=400\text{ kN}$$

30.3.3 $q$ds؛ المنحنى السلسلي

للسياق التاريخي، انظر §30.3.3

30.3.3.1 الهندسة

54 ندرس الآن حالة خضوع الكابل لوزنه الذاتي، مضافاً إليه وزن الجليد وأثر الرياح إن وُجدا. عندئذ نستبدل $q\,\mathrm{d}x$ بـ$q_g\,\mathrm{d}s$ في المعادلة 30.2. تُشتق المعادلة التفاضلية لهذه الحالة كما سبق تماماً، فتصبح المعادلة 30.5

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\underbrace{\frac{q_g}{H}}_{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{30.46}$$

55 لكن $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+dy^2$، ومن ثم

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=-a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{30.47}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56 حل هذه المعادلة التفاضلية أعقد بكثير من حل المعادلة 30.5. نجعل $dy/\mathrm{d}x = p$، فنحصل على

$$\frac{dp}{\mathrm{d}x} = a\sqrt{1+p^2} \tag{30.48}$$

وبإعادة الترتيب

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a\mathrm{d}x \tag{30.49}$$

يساوي الطرف الأيسر

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(p+\sqrt{1+p^2}) + c_1$$

أما الطرف الأيمن فيساوي

$$\int adx = ax + c_2 \tag{30.50}$$

بالتعويض في المعادلة 30.49

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax + c_3$$

لكن عند $x = 0$ يكون $\theta = dy/dx = p = 0$، ومن ثم $c_3 = 0$ و

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax$$

وبالتبسيط

$$\begin{aligned}
p + \sqrt{1+p^2} &= e^{ax} \\
\sqrt{1+p^2} &= e^{ax} - p \\
1 + p^2 &= p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax} \\
p = \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2ax}-1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} = \sinh ax \\
y &= \int \sinh ax dx \\
&= \frac{\cosh ax}{a}
\end{aligned}$$

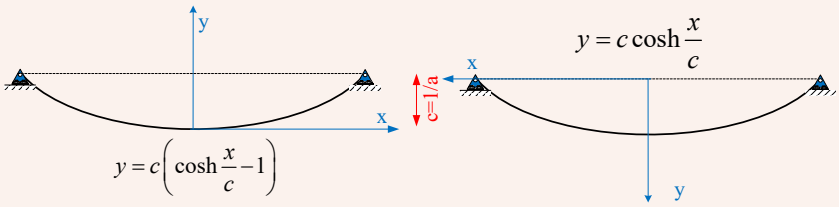
صيغة بديلة للمعادلة الأخيرة هي

$$y = c\cosh\frac{x}{c} \tag{30.51}$$

حيث $c = 1/a = H/q_g$. ومن ثم، عند $x = 0$ يكون $y = c = 1/a$؛ وهذا يناظر نظام الإحداثيات الأيمن في الشكل 30.6. أما إذا استُعمل نظام الإحداثيات الأيسر، فتصبح المعادلة المناظرة

$$y = c\left(\cosh\frac{x}{c} - 1\right) \tag{30.52}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 30.6: نظاما إحداثيات مرجعيان بديلان للمنحنى السلسلي

57 يُستخرج طول القوس بإعادة ترتيب المعادلة 30.46:

$$H\frac{d^2y}{dx^2}dx = q_g ds$$

وبالتكامل

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2} \frac{H}{q_g}\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{2}{q_g}H\frac{dy}{dx}\Big|_0^{L/2}$$
$$= \frac{2H}{q_g}\sinh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.53}$$

30.3.3.2 القوى

58 يُعطى الشد على طول الكابل بالعلاقة

$$T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

ومن المعادلة 30.51

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c}$$
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

أو ببساطة

$$T(x) = H\cosh\left(\frac{q_g x}{H}\right) \tag{30.54}$$

ويحدث الشد الأقصى عند المسند $x = L/2$:

$$T_{max} = H\cosh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.55}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

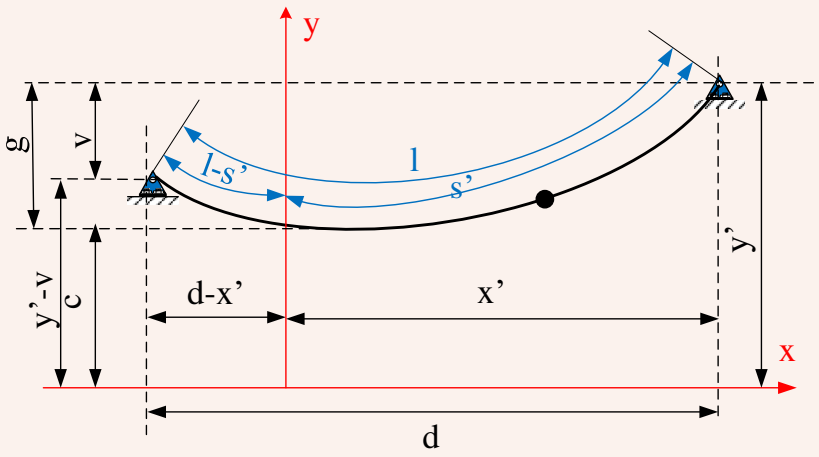
30.3.3.3 منحنى سلسلي ذو وتر مائل

59 نشتق الآن هندسة منحنى سلسلي ذي وتر مائل، باتباع اشتقاق (Cella, 1999) والرجوع إلى الشكل 30.7.

60 انطلاقاً من المعادلة 30.51 يمكن اشتقاق s مباشرةً من

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (\sinh x/c)^2}\,dx = \int_0^x \cosh \frac{x}{c}\,dx = c \sinh \frac{x}{c} \tag{30.56}$$

باشتقاق المعادلة 30.51



شكل 30.7: منحنى سلسلي ذو وتر مائل، (Cella, 1999)

$$y' = c \cosh \frac{x'}{c}, \quad y' - v = c \cosh \frac{d - x'}{c}, \tag{30.57}$$

وتعطي المعادلة 30.56

$$s' = c \sinh \frac{x'}{c}, \quad l - s' = c \sinh \frac{d - x'}{c}. \tag{30.58}$$

من المعادلة 30.57

$$v = c \cosh \frac{x'}{c} - c \cosh \frac{d - x'}{c}. \tag{30.59}$$

ثم تُستخرج l من

$$l = c \sinh \frac{x'}{c} + c \sinh \frac{d - x'}{c}, \tag{30.60}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم

$$\frac{v}{l} = \frac{\cosh\left(x'/c\right) - \cosh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}{\sinh\left(x'/c\right) + \sinh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}.$$

بتطبيق المتطابقات الزائدية

$$\cosh a - \cosh b = 2\sinh\frac{a+b}{2}\cdot\sinh\frac{a-b}{2}$$
$$\sinh a + \sinh b = 2\sinh\frac{a+b}{2}\cdot\cosh\frac{a-b}{2}$$

نحصل بعد الاختزال على

$$\frac{v}{l} = \tanh\frac{2x' - d}{2c}$$

وبحلها لإيجاد x'/c نحصل على

$$\frac{x'}{c} = \frac{d}{2c} + \tanh^{-1}\frac{v}{l} \tag{30.61}$$

بالتعويض في المعادلة 30.60 نحصل على

$$l = c\sinh\left(\frac{d}{2c} + \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) + c\sinh\left(\frac{d}{2c} - \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) \tag{30.62}$$

وهي المعادلة المستعملة لتحديد c عندما يكون g مجهولاً. وأخيراً، من الشكل 30.7 يكون $y' = c + g$، ومن المعادلة 30.57 نحصل على

$$c + g = c\cosh\frac{x'}{c} \tag{30.63}$$

وبذلك يمكن تحديد g بعد معرفة c.

30.3.3.3.1 مثال 30.12: ترخيم كابل مائل

نريد تحديد الترخيم أسفل المسند الأعلى لكابل طوله 110 أقدام، معلّق بين مسندين تفصل بينهما مسافة أفقية 100 قدم ومسافة رأسية 20 قدماً. بتطبيق المعادلة 30.62 نحل المعادلة اللاخطية لإيجاد c:

$$110 = c\sinh\left(\frac{100}{2c} + \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) + c\sinh\left(\frac{100}{2c} - \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) \Rightarrow c = 72.288$$

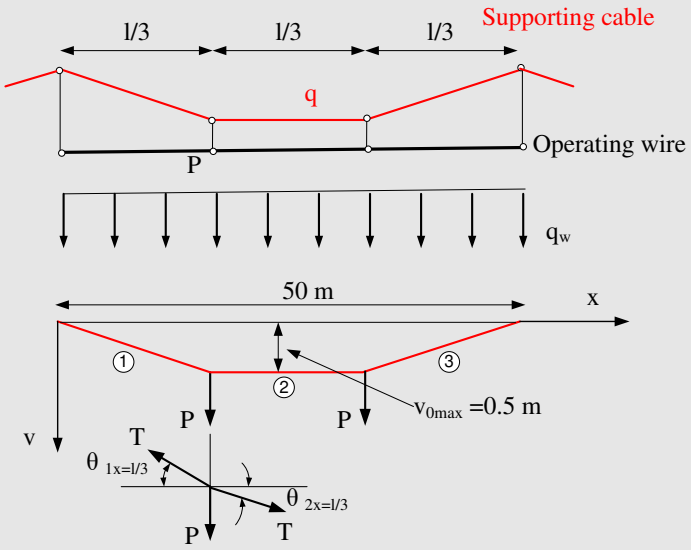
بالتعويض في المعادلة 30.61 نحصل على $x' = 63.291$، وأخيراً تعطي المعادلة 30.63 القيمة $g = 29.523'$. وبالطريقة نفسها يمكن اشتقاق معادلات للحالات التي يكون فيها المتغير المجهول v أو d أو l.

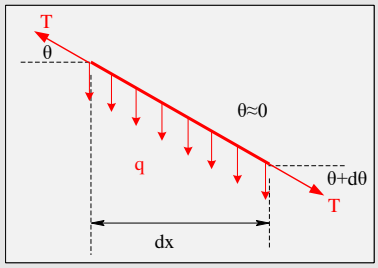
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30.3.3.3.2 مثال 30.13: كابل تعليق خط حافلة كهربائية

نم لوقنم يتآلا عطقملا Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

نريد تحديد الشد ومنحنى الترخيم لكابل تعليق سلك التشغيل في خط حافلات كهربائية.





نستعمل $l = 50$ m و$v_{0max} = 0.5$m. مساحة مقطع كابل التعليق الفولاذي $A = 0.6$ cm^2، ومعامل مرونته المختزل[a] هو $E = 8 \times 10^5$ kgf/cm^2. ووزن سلك التشغيل q_w لكل وحدة طول يساوي 1.5 مرة وزن الكابل q.

نلاحظ أولاً أن هذا الكابل ضحل للغاية، إذ تساوي نسبة الترخيم إلى البحر $r = 1/100$؛ ولذلك تكون الزوايا θ صغيرة جداً.

تُختزل المسألة إلى تحليل كابل محمّل بقوتين مركزتين $P = q_w l/3$. ومن المعادلة 30.38 نحصل على

$$T_0 = \frac{ql^2}{8v_{0\,\max}} \tag{30.64}$$

وبتطبيق معادلة الاتزان على جزء الكابل

$$T\theta - qdx - T(\theta + d\theta \Rightarrow \frac{q}{T} = -\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{q}{T}(C - x)$$

عند $x = l/2$ يكون $T = T_0$ و$\theta_0 = 0$، ومن ثم $C = l/2$ و

$$\theta_0 = \frac{q}{T_0}\left(\frac{l}{2} - x\right) \tag{30.65}$$

حيث θ_0 وT_0، على الترتيب، ميل منحنى الترخيم وشد الكابل قبل تعليق السلك السفلي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نعتبر الجزء الأيسر (1) ونصف الجزء الأوسط (2) من الكابل. ويقابل هذين الجزأين ما يأتي:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \tfrac{q}{T}(C_1 - x),\\ v_1 &= \tfrac{q}{T}\left(A_1 + C_1 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned}\theta_2 &= \tfrac{q}{T}(C_2 - x),\\ v_2 &= \tfrac{q}{T}\left(A_2 + C_2 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(\frac{l}{3} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

تُحدد الثوابت A_1, A_2, C_1, C_2 من الشروط الآتية: عندما $x = 0$ يكون $v_1 = 0$؛ وعندما $x = l/2$ يكون $\theta_2 = 0$؛ وعندما $x = l/3$ يكون $v_1 = v_2$ و$T\theta_1 - T\theta_2 = P$. وفي هذه الحالة

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{Pl}{3q}, \quad C_1 = \frac{P}{q} + \frac{l}{2}, \quad C_2 = \frac{l}{2}.$$

بالعودة إلى المعادلة 30.14 نحصل على

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \theta^2}\, dx$$

يمكن استعمال توسع ذات الحدين، ومع افتراض الزوايا الصغيرة يكون

$$L_{cbl} \simeq \int_0^L 1 + \frac{\theta^2}{2}\, dx$$

بعد ذلك تُحدد القوة T بمساواة الفرق بين طولي الكابل المعلّق بحرية والكابل المشدود باستطالة الشد:

$$\int_0^{l/3}\left(1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right)dx + \int_{l/3}^{l/2}\left(1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right)dx - \int_0^{l/2}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right)dx = \frac{(T - T_0)\,l}{2EA}$$

أو بعد التعويض عن قيم θ واستعمال المعادلة 30.65:

$$\frac{q^2}{T^2}\int_0^{l/3}(C_1 - x)^2\, dx + \frac{q^2}{T^2}\int_{l/3}^{l/2}(C_2 - x)^2\, dx - \frac{q^2}{T_0^2}\int_0^{l/2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{(T - T_0)\,l}{EA}$$

ومن ثم نجد بالتكامل

$$\frac{q^2}{T^2}\left(\frac{P^2}{q^2}\frac{l}{3} + \frac{P}{q}\frac{2l^2}{9} + \frac{l^3}{24}\right) - \frac{q^2}{T_0^2}\frac{l^3}{24} = \frac{(T - T_0)\,l}{EA}.$$

وبالتعويض عن T_0 من المعادلة 30.64 نحصل على

$$\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^3 + \left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^2\left[\frac{8}{3}\frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4} - \frac{1}{8}\right] = = \frac{1}{3}\frac{EAv_{0\max}^8}{ql^4}\left(\frac{P^2}{q^2l^2} + \frac{2}{3}\frac{P}{ql} + \frac{1}{8}\right)$$

نجري الحساب العددي:

$$P = \frac{q_v l}{3} = \frac{1.5ql}{3}, \quad \frac{P}{ql} = 0.5,$$

$$q = 0.6 \times 0.0078 = 0.00468\text{kgf/cm},$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث 0.0078kgf/cm^3 هو الوزن النوعي للفولاذ؛ ومن ثم نحصل على

$$\frac{EAv_{0\,\max}^3}{ql^4} = 0.0205.$$

في هذه الحالة تُختزل معادلة التصميم إلى

$$\left(\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2}\right)^3 - 0.0704\left(\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2}\right)^2 - 0.00484 = 0,$$

ومن ثم

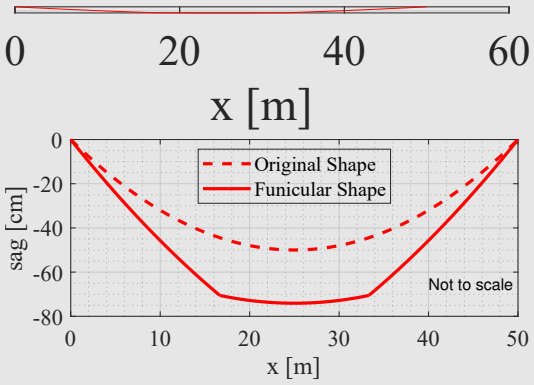
$$\frac{Tv_{0\,\max}}{ql^2} = 0.196, \quad T = 460\text{kgf}$$

تصبح معادلة منحنى الترخيم، حيث ترخيم الجزء الخارجي v_1 وترخيم الجزء الأوسط v_2:

$$v_1 = 254\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

$$v_2 = 254\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

لاحظ أن الترخيمات بالكاد تُرى فعلياً.



يوضح هذا الشكل بجلاء تغير هيئة الكابل لملاءمة الأحمال النقطية.

[a] لا تنتج استطالة الكابل المشدود من تشوهه المرن وحده، بل أيضاً من الانحناء والالتواء الجزئيين. ولا يبقى معامل المرونة المختزل للكابل المشدود ثابتاً؛ أي إن مخطط اختبار الشد للكابل غير خطي حتى ضمن مجال الانفعالات المرنة. في البداية تشد الاستطالة الكابل وتتناقص الخلوصات بين الأسلاك تدريجياً، ثم يزداد وضوح أثر التشوه الموضعي في مناطق التلامس بين الأسلاك مع استمرار الاستطالة.

30.3.4 مقارنة الحلين المكافئ والسلسلي

61 يمكن جمع المعادلتين 30.11 و30.3.2.1 للحصول على

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \quad \text{قطع مكافئ}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62 وأخيراً نقارن القطع المكافئ بالمنحنى السلسلي. للقطع المكافئ يمكن جمع المعادلتين 30.11 و30.3.2.1 للحصول على

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \Rightarrow \frac{q}{H}y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{H}x\right)^2$$

أما للمنحنى السلسلي فنعيد كتابة المعادلة 30.52:

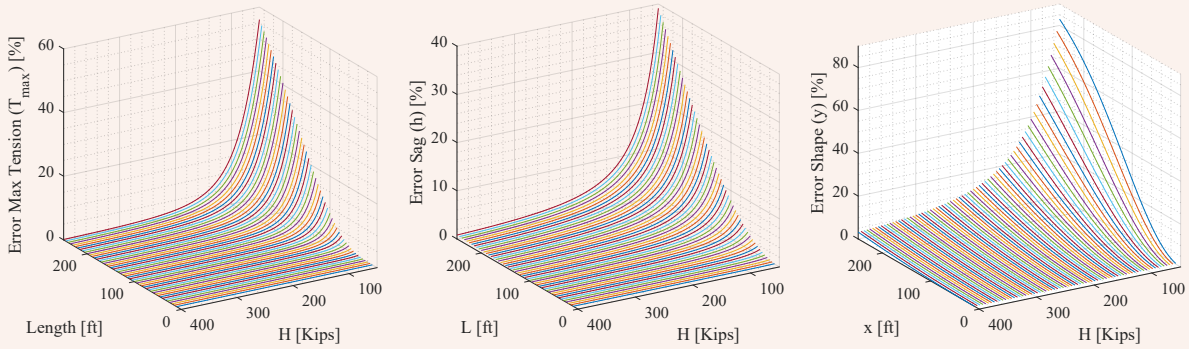
$$\frac{q}{H}y = \cosh\left(\frac{q}{H}x\right) - 1 \quad \text{منحنى سلسلي}$$

لإتاحة المقارنة المباشرة، نعبّر عن جيب التمام الزائدي بمتسلسلة قوى تايلور:

$$\frac{qy}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \ldots \tag{30.66}$$

يتطابق الحد الأول من هذا التوسع مع صيغة القطع المكافئ، وتمثل الحدود الأخرى الفرق بين الحلين. ولا يصبح الفرق مهماً إلا عندما تكون qx/H كبيرة، أي عندما يكون الترخيم كبيراً مقارنةً بالبحر، الشكل 30.8b.

63 لكابل وزنه الذاتي 1.0 k/ft، تبيّن الأشكال 30.8a و30.8b و30.8c الفروق بين الحلين المكافئ والسلسلي في الهندسة والترخيم والشد الأقصى، على الترتيب.



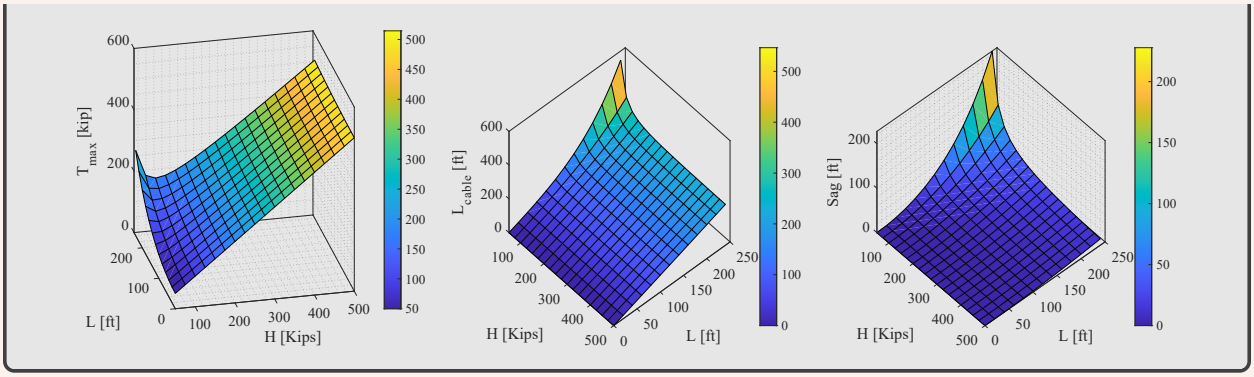
(c) الشد الأقصى (b) الترخيم (a) الشكل

شكل 30.8: مقارنة الحلين السلسلي والمكافئ

30.3.4.1 مثال 30.14: المنحنى السلسلي مقابل القطع المكافئ

لكابل وزنه الذاتي 1.0 kip/ft، نريد تحديد الشد الأقصى T_{max} والترخيم h وطول الكابل L_{cable} بدلالة H وL. باستعمال المعادلتين 30.53 و30.55 لطول الكابل والشد الأقصى، على الترتيب، يمكن توضيح النتائج على أفضل وجه بالأشكال الآتية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.





جسر الإنكا، بيرو

الفعل السلسلي وتوزيع الحمل والاتزان في المنشآت المرنة؛ نظير تاريخي للجسور المعلّقة الحديثة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31 الأقواس والكمرات المنحنية

ملخص

هذا آخر ثلاثة فصول تتناول المنشآت التي توفر القوى المحورية مقاومتها الأساسية. تناول الفصلان السابقان الكابلات والأقواس الصلبة المؤلفة من الصنجات. ويدرس هذا الفصل الأقواس المرنة والكمرات المنحنية دراسة شاملة لسلوكها وخصائصها. نبدأ بتحليل مفصل للأقواس الدائرية وسلوكها الإنشائي تحت ظروف تحميل مختلفة، مع مناقشة درجات التعقيد المرتبطة بعدد المفاصل ومواضعها. ثم ننتقل إلى الأقواس المكافئة، ونبحث كذلك أثر ترتيبات المفاصل المختلفة في الأداء الإنشائي. بعد دراسة الأقواس ننتقل إلى الكمرات المنحنية، مستعرضين الكمرات المستوية المنحنية والمنشآت الحلزونية الفراغية. وتتميز هذه المنشآت بتفاعل معقد بين الانحناء والالتواء. وأخيراً، يتناول الملحق D أقواساً دائرية أكثر تعقيداً تتجاوز نطاق هذا الفصل.

31.1 الأقواس الدائرية 1030
31.1.1 الأقواس الدائرية ثلاثية المفاصل 1030
31.1.2 الأقواس الدائرية ثنائية المفاصل 1037
31.1.3 قوس دائري عديم المفاصل . . . 1037
31.1.4 الحل العام 1045
31.1.5 حلول باستعمال Mathematica 1052
31.2 الشكل الأمثل للقوس 1052
31.2.1 مثال 31.5: القوس المثالي . . . 1053
31.3 الأقواس المكافئة 1053
31.3.1 أمثلة 1053
31.3.2 قوس مثبت تحت حمل متناظر 1058
31.3.3 آثار هبوط الأساسات وتغير الحرار 1063
31.4 الكمرات المنحنية 1066
31.4.1 جائز قوسي 1066
31.4.2 المنشآت الحلزونية 1069

1 كانت الأقواس عنصراً معمارياً وهندسياً أساسياً آلاف السنين، تؤدي أغراضاً وظيفية وجمالية معاً. فمن قنوات المياه الرومانية القديمة إلى كاتدرائيات العصر القوطي، أدت الأقواس دوراً محورياً في تطور الحضارة. وقد جعلتها قدرتها الفريدة على حمل الأوزان بكفاءة حلاً إنشائياً مفضلاً في الجسور والبوابات والنوافذ والأسقف.

2 يقوم مبدأ القوس على نقل الأحمال عبر شكله المنحني بحيث تُخفّض قوى الانحناء وتُعظّم القوى المحورية.

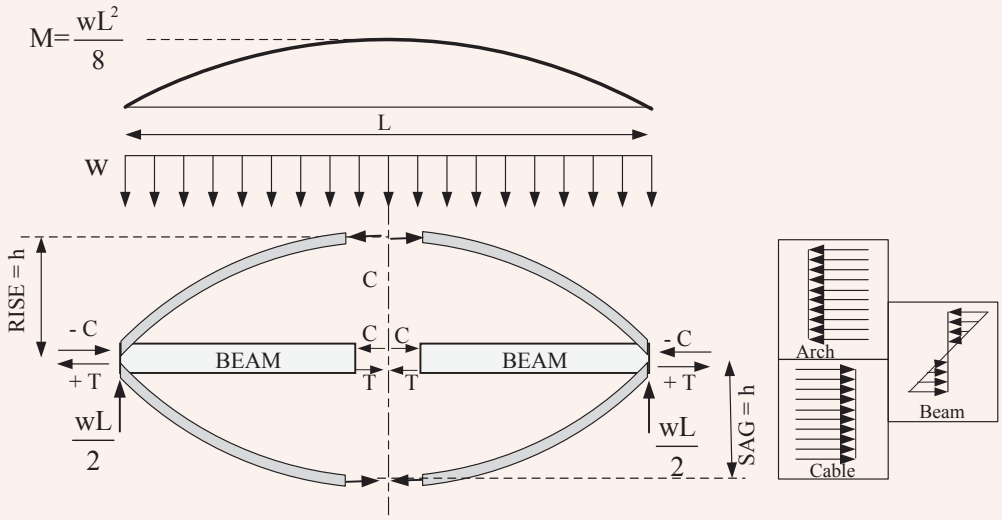
3 يركز هذا الفصل على تحليل الأقواس والكمرات المنحنية. والمفاهيم المستعملة هي نفسها التي سبقت دراستها؛ والفرق الرئيس والوحيد هو كتابة المعادلات بالإحداثيات القطبية للأقواس الدائرية، وبالإحداثيات الديكارتية للأقواس المكافئة.

4 مثل الكابلات، يمكن استعمال الأقواس لخفض عزم الانحناء في المنشآت طويلة البحور. ويمكن اعتبار القوس كابلاً مقلوباً ينقل الحمل أساساً بالضغط المحوري، مع قدرته أيضاً على مقاومة الانحناء بجساءته الانحنائية.

5 لتحسين كفاءة المنشآت طويلة البحور تحت الحمل الميت، يمكن جعل أشكالها تقارب مخطط العزم المناظر؛ ولذلك تكون هيئة القوس والكابل المعلّق ومسار وتر الشد في كمرة خرسانية سابقة الإجهاد شبه مكافئة، الشكل 31.1.

6 يتناول هذا الفصل الأقواس الدائرية ثم المكافئة، والكمرات المنحنية، وأخيراً المنشآت الحلزونية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 31.1: القوى المقاومة للعزم في القوس أو النظام المعلّق مقارنةً بكمرة، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

31.1 الأقواس الدائرية

7 يمكن إنشاء المنشآت طويلة البحور بعناصر مستقيمة مثل الجوائز أو الجمالونات. غير أنه غالباً ما يكون إنشاء منشأ منحن، كالقوس أو الكابل المعلّق أو القشرة الرقيقة، أوفر للبحور التي تتجاوز 100 قدم.

8 منذ فجر التاريخ سعى الإنسان إلى عبور المسافات بالأقواس، لأنها تتطلب مواد تقاوم الضغط فقط، مثل الحجر والمباني بالطوب، في زمن لم تكن فيه كلفة العمل عاملاً حاسماً.

9 يوضح الشكل 31.2 مسائل الاتزان الأساسية في تصميم الأقواس، حيث يُقاس الحمل الرأسي لكل وحدة من الإسقاط الأفقي، كما في الحمل الخارجي لا الوزن الذاتي.

31.1.1 الأقواس الدائرية ثلاثية المفاصل

10 الأقواس ثلاثية المفاصل منشآت محددة استاتيكياً، تسمح هيئتها بهبوط المساند والتمدد الحراري دون إجهادات داخلية ثانوية، كما يسهل تحليلها بمعادلات الاتزان.

11 ينقل القوس عموماً الحمل الرأسي عبر البحر بمزيج من القوى المحورية والانحنائية. ويكون العزم في القوس الجيد الأبعاد صغيراً أو مهملاً، بينما تكون إجهاداته الضاغطة العادية مرتفعة نسبياً.

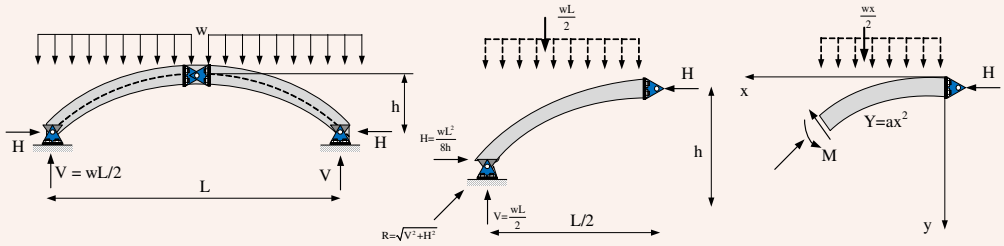
12 بسبب التناظر، يساوي رد الفعل الرأسي ببساطة $V = \frac{wL}{2}$، ولا يوجد قص أو عزم عند منتصف بحر القوس. وبأخذ العزم حول التاج:

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

13 بحل المعادلة لإيجاد H:

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 31.2: اتزان قوس ثلاثي المفاصل

14 نتذكر أن معادلة مماثلة اشتُقت للكابلات، المعادلة 30.38. وتناظر H قوتي الضغط والشد $C - T$ في الكمرة، الشكل 31.1، بينما يمثل h الارتفاع الكلي للقوس. وبما أن h أكبر بكثير من عمق الكمرة d، تكون H أصغر بكثير من $C - T$ في الكمرة.

15 بما أن الاتزان يقتضي ثبات H على امتداد القوس، فإن الشكل المكافئ يؤدي نظرياً إلى انعدام العزم في مقاطع القوس.

31.1.1.1 مبرهنة إيدي

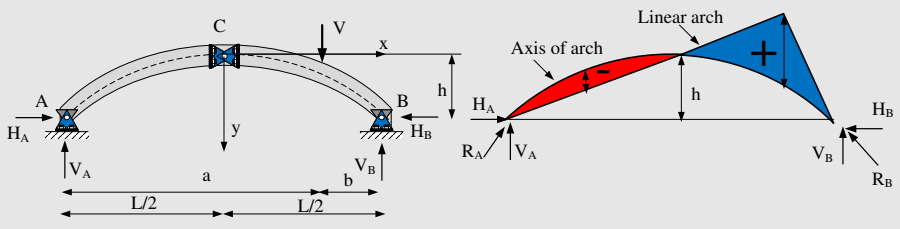
16 مبرهنة إيدي مفهوم مهم في تحليل الأقواس، إذ تتيح تحديد العزوم والقوى فيها. وهي مفيدة خصوصاً في تحليل الأقواس ثلاثية المفاصل لأنها تبسط الحسابات المعقدة.

تعريف 31.1: مبرهنة إيدي

يتناسب عزم الانحناء عند أية نقطة على محور القوس مع المسافة الرأسية بين القوس النظري ومحور القوس الفعلي (Eddy, 1878).

31.1.1.2 أمثلة

31.1.1.2.1 مثال 31.1: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي؛ حل تحليلي



نم لوقنم يتآلا عطقملا Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كما في الكمرات المستقيمة

$$V_A = \frac{Wb}{L} \quad \text{و} \quad V_B = \frac{Wa}{L} \tag{31.1}$$

يُعطى العزم حول النقطة C عند التاج بـ

$$V_B \frac{L}{2} - H_B h - W\left(\frac{L}{2} - b\right) = 0$$

بالتعويض عن V_B من المعادلة 31.1:

$$\begin{aligned}
&\frac{Wa}{2} - H_B h - \frac{WL}{2} + Wb = 0; \quad W\left(\frac{a}{2} - \frac{L}{2} + b\right) - H_B h = 0 \\
&\frac{W}{2}(a - L + 2b) - H_B h = 0; \quad \frac{W}{2}(a - L + b + b) - Hh = 0 \\
&\frac{Wb}{2} - H_B h = 0; \quad H_B = \frac{Wb}{2h}
\end{aligned} \tag{31.2}$$

من اتزان القوى الأفقية، $H_A = H_B = H$:

$$H = H_A = \frac{Wb}{2h} \tag{31.3}$$

وبالمثل، إذا كان الحمل بين A وC، فإن

$$H_A = \frac{Wa}{2h} \tag{31.4}$$

ومن معادلة الاتزان

$$H = H_B = \frac{Wa}{2h}$$

العزم عند أي مقطع X_1 بين نقطة الحمل والمسند B، وعلى مسافة x من التاج، هو

$$M_{x1} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_B(h - y) \tag{31.5}$$

بالتعويض بالمعادلتين 31.1 و31.2 في 31.5:

$$\begin{aligned}
M_{x1} &= \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y) \\
&= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} = \frac{WL}{2} - W\left(\frac{ax}{L} - \frac{by}{2h}\right)
\end{aligned}$$

العزم عند أي مقطع X_2 بين الحمل النقطي والتاج، وعلى مسافة x من التاج، هو

$$M_{x2} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - H_B(h - y) \tag{31.6}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بالتعويض بالمعادلتين 31.1 و31.3 في 31.6:

$$\begin{aligned} M_{x2} &= \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2}-x\right) - W\left(\frac{L}{2}-b-x\right) - \frac{Wb}{2h}(h-y) \\ &= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{2} - \frac{WL}{2} + Wb + Wx - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} \\ &= Wx\left(1-\frac{a}{L}\right) + \frac{Wby}{2h} = \frac{Wbx}{L} + \frac{Wby}{2h} \\ M_{x2} &= Wb\left(\frac{x}{L}+\frac{y}{2h}\right) \end{aligned}$$

العزم عند أي مقطع بين A ونقطة تبعد x إلى يسار C هو

$$M_{x3} = V_A\left(\frac{L}{2}-x\right) - H_A(h-y) \tag{31.7}$$

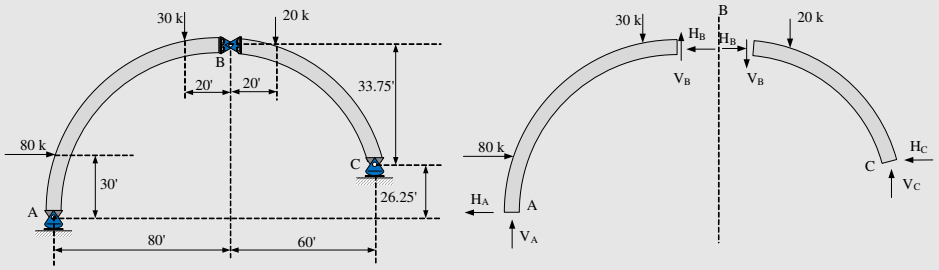
بالتعويض بالمعادلتين 31.1 و31.4 في 31.7:

$$\begin{aligned} M_{x3} &= \frac{Wb}{L}\left(\frac{L}{2}-x\right) - \frac{Wb}{2h}(h-y) = \frac{Wb}{2} - \frac{Wbx}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wbx}{2h} \\ &= -Wb\left(\frac{x}{L}-\frac{y}{2h}\right) \end{aligned} \tag{31.8}$$

يظهر أعلاه مخطط العزم للقوس ثلاثي المفاصل. وبما أنه لا يوجد حمل على AC والعزم عند C يساوي صفراً، فلا بد أن يمر خط دفع المسند A بالنقطة C ليلتقي خط عمل W الممتد عند D. ولأن R_A وR_B وW في اتزان، يجب أن يلتقي خط عمل R_B عند B بخط W عند D. يمثل المثلث ADB، وفق مقياس معين، مخطط عزم كمرة بسيطة بإشارة موجبة. ويمثل المنحنى $ACBA$ بالمقياس نفسه مخطط عزم $H(h-y)$ بإشارة سالبة. ويبين الجزء المظلل مخطط العزم المحصل: موجباً في النصف المحمّل وسالباً في النصف غير المحمّل. ومن ثم يمثل إحداثي المخطط المحصور بين القوس الخطي ومحور القوس العزم المحصل عند أي مقطع. يمكن استخراج إحداثي العزم عند الحمل بطرح عزم الدفع حول النقطة من عزم الكمرة البسيطة عند موضع الحمل.

31.1.1.2.2 مثال 31.2: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل نقطي

حدد ردود أفعال القوس ثلاثي المفاصل المبين أدناه.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أربعة مجاهيل، وثلاث معادلات اتزان، ومعادلة شرط واحدة؛ لذلك فالمنشأ محدد استاتيكياً.

$$\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^C &= 0 \\
\Rightarrow (R_{Ay})(140) + (80)(3.75) - (30)(80) - (20)(40) + R_{Ax}(26.25) &= 0 \\
\Rightarrow 140R_{Ay} + 26.25R_{Ax} &= 2.900 \\
(+\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0; \Rightarrow 80 - R_{Ax} - R_{Cx} &= 0 \\
(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 30 - 20 &= 0 \\
(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = 0; \Rightarrow (R_{ax})(60) - (80)(30) - (30)(20) + (R_{Ay})(80) &= 0 \\
\Rightarrow 80R_{Ay} + 60R_{Ax} &= 3,000
\end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات الأربع:

$$\begin{bmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,900 \\ 80 \\ 50 \\ 3,000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.1\ \text{k} \\ 29.8\ \text{k} \\ 34.9\ \text{k} \\ 50.2\ \text{k} \end{Bmatrix}$$

يمكن التحقق من النتائج بأخذ العزوم حول B من الجهة اليمنى:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_z^B = 0; -(20)(20) - (50.2)(33.75) + (34.9)(60) = 0 \checkmark$$

17 بسبب التناظر، يساوي رد الفعل الرأسي للقوس في الشكل 31.2 القيمة $V = \frac{wL}{2}$، ولا يوجد قص أو عزم عند منتصف البحر. وبأخذ العزم حول التاج:

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

18 بحل المعادلة لإيجاد H:

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

19 لاحظ التناظر بين $M = wL^2/8$ للكمرات و$H = wL^2/8h$ للكابلات. ينقل القوس عموماً الحمل الرأسي عبر البحر بمزيج من القوى المحورية والانحنائية. ويكون العزم في القوس الجيد الأبعاد صغيراً أو مهملاً، والإجهادات الضاغطة العادية مرتفعة نسبياً. للشكل المكافئ «المثالي» لقوس بسيط الارتكاز ثلاثي المفاصل الخصائص الآتية:

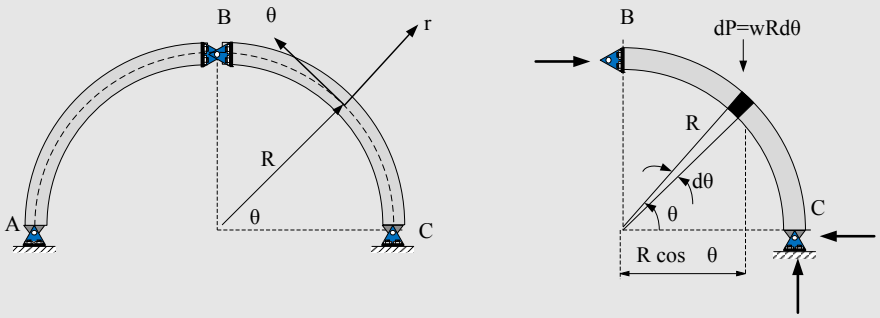
- لا يوجد قص أو عزم عند أي مقطع.
- العزم عند x: $M = Hy - wx^2/2 = Hax^2 - wx^2/2 = 0$.
- بحل المعادلة لإيجاد a: $a = w/(2H)$.
- بالتعويض عن H نستنتج أن $a = 4h/L^2$.
- لكل بحر L ارتفاع واحد فقط h ينتج قطعاً مكافئاً عديم العزم والقص.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

20 الأقواس ثلاثية المفاصل منشآت محددة استاتيكياً، تسمح بهبوط المساند والتمدد الحراري دون إجهادات داخلية ثانوية، كما يسهل تحليلها بمعادلات الاتزان. القوس أكفأ بكثير من الكمرة، وقد يكون أوفر وأجمل من الجمالون لحمل الأحمال عبر البحور الطويلة.

31.1.1.2.3 مثال 31.3: قوس ثلاثي المفاصل؛ حمل منتظم

حدد ردود أفعال قوس نصف دائري ثلاثي المفاصل ومحدد استاتيكياً تحت وزنه الذاتي w لكل وحدة من طول القوس s، حيث $ds = rd\theta$.



يمكن تحديد ردود الأفعال بتكامل الحمل على المنشأ كله. رد الفعل الرأسي:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0; (C_y)(2R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \underbrace{wRd\theta}_{\mathrm{d}P}\ \underbrace{R(1+\cos\theta)}_{\text{ذراع العزم}} = 0$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos\theta)d\theta = \frac{wR}{2}[\theta+\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$
$$= \frac{wR}{2}[(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)]$$
$$= \frac{\pi}{2}wR$$

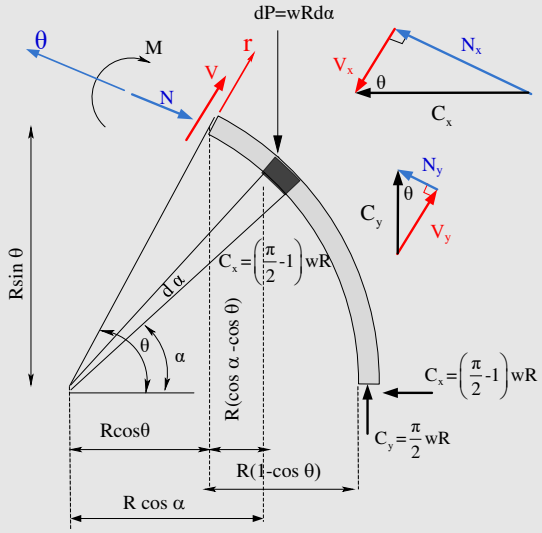
ردود الأفعال الأفقية:

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_B = 0; -(C_x)(R) + (C_y)(R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \underbrace{wRd\theta}_{\mathrm{d}P}\ \underbrace{R\cos\theta}_{\text{ذراع العزم}} = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{\pi}{2}wR - \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}wR - wR[\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}wR - wR(1-0)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR \tag{31.9}$$

بسبب التناظر، تساوي ردود الأفعال عند A نظائرها عند C. ويمكن الآن تحديد القوى الداخلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



قوى القص: باعتبار مخطط الجسم الحر للقوس وجمع القوى في الاتجاه الشعاعي، $\Sigma F_R = 0$:

$$-\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\cos\theta}_{V_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\sin\theta}_{V_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta+V=0$$

$$\Rightarrow V(\theta)=wR\left[(\frac{\pi}{2}-1)\cos\theta+(\theta-\frac{\pi}{2})\sin\theta\right] \tag{31.10}$$

القوى المحورية: بالمثل، بجمع القوى في الاتجاه المحوري، $\Sigma F_\theta = 0$:

$$\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\sin\theta}_{N_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\cos\theta}_{N_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta+N=0$$

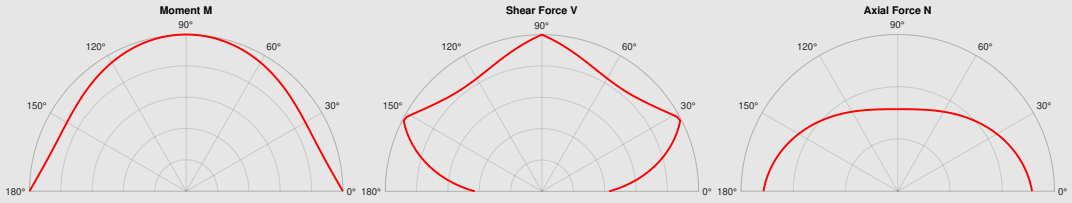
$$\Rightarrow N(\theta)=wR\left[(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta-(\frac{\pi}{2}-1)\sin\theta\right] \tag{31.11}$$

العزم: نستعمل الآن معادلة الاتزان الثالثة، $\Sigma M_z = 0$:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M\ \underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR}_{C_x}\cdot R\sin\theta-\underbrace{\frac{\pi}{2}wR}_{C_y}R(1-\cos\theta)$$

$$+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta)+M=0$$

$$\Rightarrow M(\theta)=wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta\right] \tag{31.12}$$

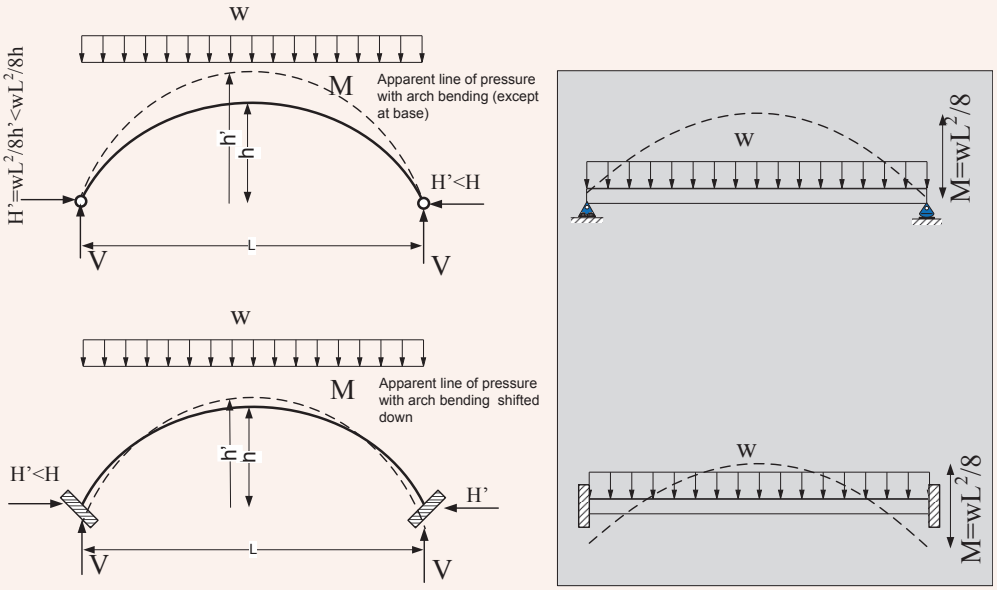


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحظ أن حلاً عاماً باستعمال Mathematica يرد في §I.1.3.

31.1.2 الأقواس الدائرية ثنائية المفاصل

21 إذا كان للقوس مفصلان فقط، الشكل 31.3، أو لم تكن له مفاصل، فقد توجد عزوم انحناء عند التاج أو المساند أو كليهما.



شكل 31.3: قوس ثنائي المفاصل والتناظر مع كمرة مثبتة الطرفين (Lin **and** Stotesbury, 1981)

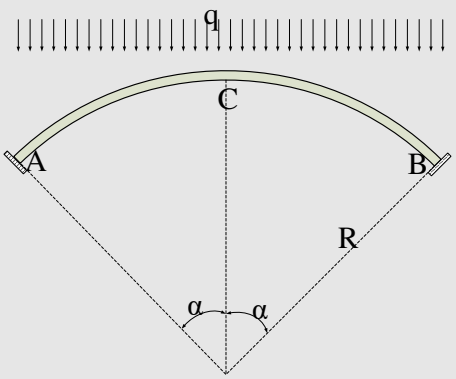
22 بما أن H تتناسب عكسياً مع الارتفاع h، فمن الواضح أن من الأفضل استعمال أكبر ارتفاع ممكن. ولأسباب جمالية وعملية مجتمعة، تُستعمل غالباً نسبة بحر إلى ارتفاع بين 5 و8، وقد تصل إلى 12. غير أن زيادة هذه النسبة قد تسبب مشكلات انبعاج تتطلب مقطعاً أعمق، فتتضاءل ميزة القوس.

31.1.3 قوس دائري عديم المفاصل

31.1.3.1 مثال 31.4: قوس دائري عديم المفاصل

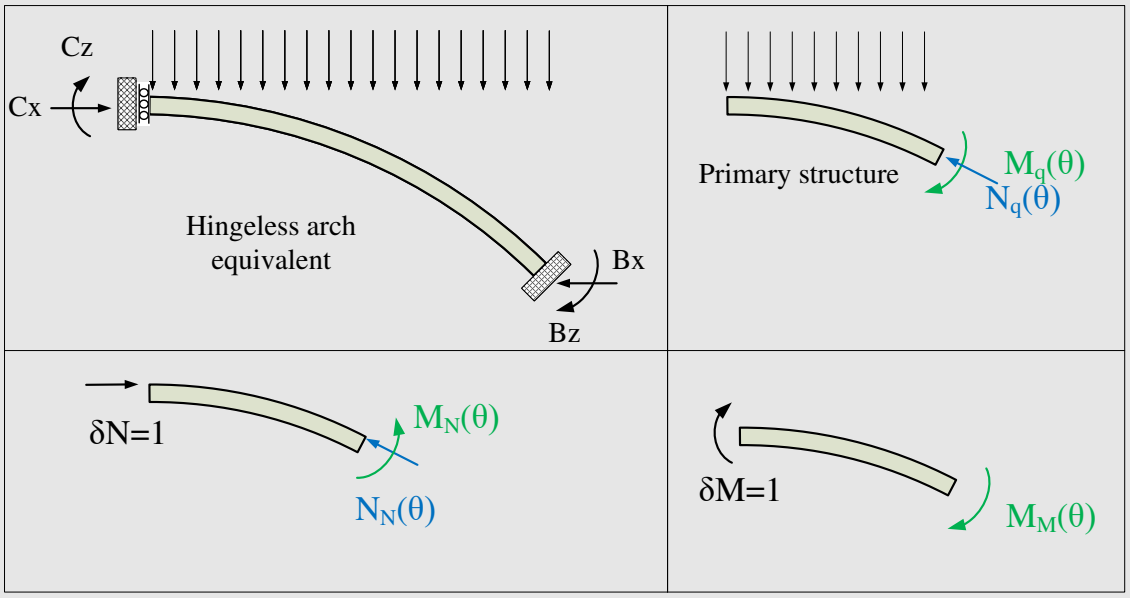
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لهذا القوس العديم المفاصل ثلاث قوى زائدة. وقد يبدو أولاً أن الأنسب تحرير جميع القوى عند أحد المساند، لكن ذلك يؤدي إلى مصفوفة مرونة من الرتبة 3×3.



المنهج

بسبب تناظر القوس، وانعدام قوة القص عند التاج، يكون من الأنسب تحرير القوس عند التاج؛ إذ يؤدي الحمل المتناظر عندئذ إلى قوتين زائدتين فقط: قوة محورية وعزم.



نستعمل مبدأ الشغل الافتراضي التكميلي لحل المسألة بطريقة القوى، أي طريقة المرونة. وتُعطى مصفوفة المرونة بـ

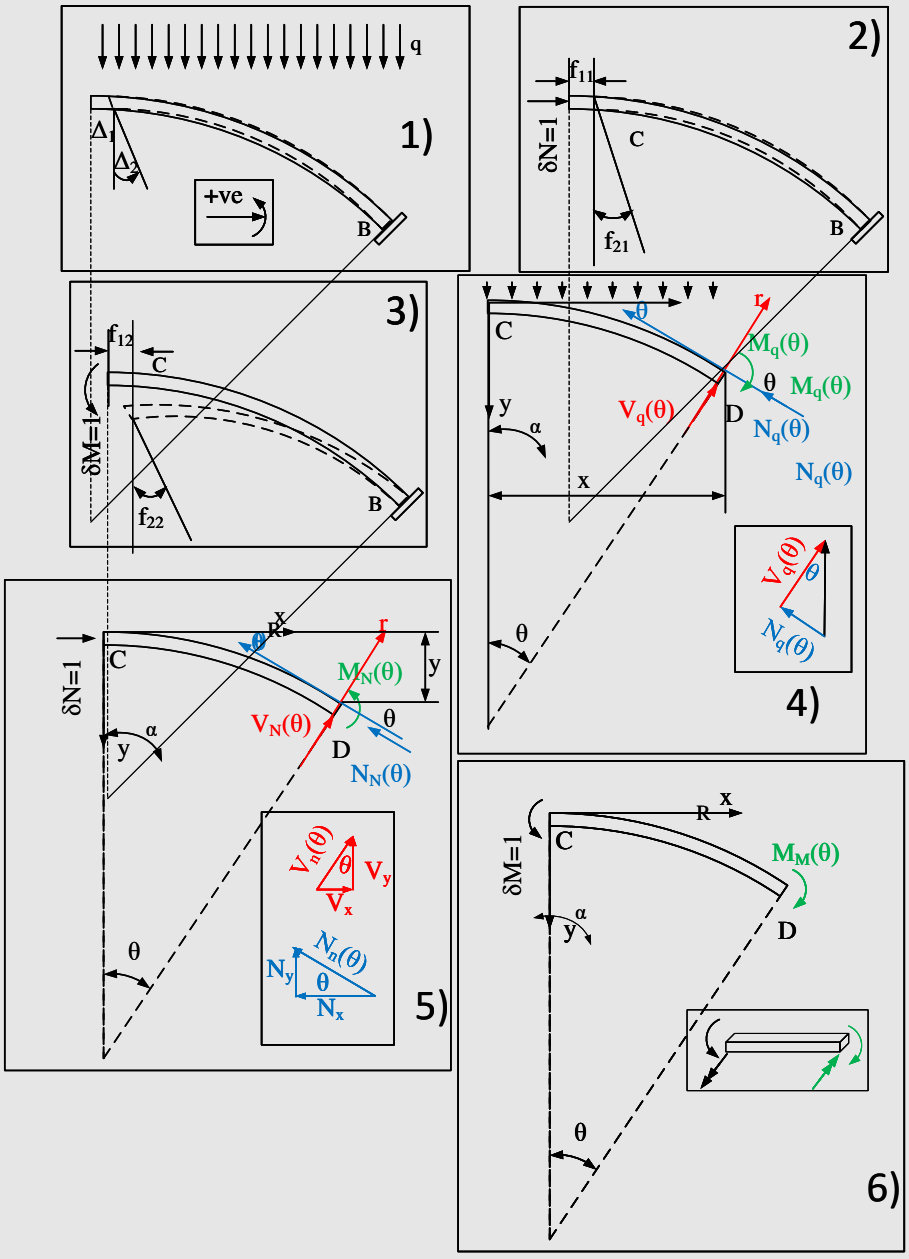
$$\begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_m \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وكذلك

$$\text{أوجد} \left\{ \begin{array}{c} \Delta_N,\ \Delta_M \\ f_{NN},\ f_{NM} \\ f_{MM} \end{array} \right\} \quad \text{بدلالة} \left\{ \begin{array}{l} N_q(\theta),\ M_q(\theta) \\ N_n(\theta),\ M_n(\theta); \\ N_m(\theta),\ M_m(\theta); \end{array} \right\} \quad \text{الناتجة من} \left\{ \begin{array}{c} q \\ \delta\overline{N}=1 \\ \delta\overline{M}=1 \end{array} \right\}$$

القوى العادية والعزوم الداخلية



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من الشكلين 1 و4 تُعطى القوة العادية والعزم الناتجان من الحمل الخارجي بـ

$$V_q(\theta) = qx\cos\theta = qR\sin\theta\cos\theta$$
$$N_q(\theta) = qx\sin\theta = qR\sin^2\theta$$
$$M_q(\theta) = -q\frac{x^2}{2} = -q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}$$

تسبب القوة الأفقية الافتراضية الواحدة القوى الداخلية الآتية، الشكلان 2 و5:

$$M_n(\theta) = (1)(y) = R(1-\cos\theta)$$

من الشكل 5، حيث $\delta N = 1$، يعطي اتزان القوى، مع ملاحظة وجود قوى في اتجاه x فقط وعدم وجودها في اتجاه y:

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_x - N_x + \delta N &=& 0 \\ V_y + N_y &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_n(\theta) \\ N_n(\theta) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

بالحل وإدخال $M_n(\theta)$:

$$\lfloor\ V_n(\theta),\quad N_n(\theta), M_n(\theta)\ \rfloor = \lfloor\ -\sin(\theta),\quad \cos(\theta),\quad R(1-\cos\theta)\ \rfloor$$

للعزم الخارجي الواحد عند C لا تنشأ قوة داخلية، بينما يكون العزم الداخلي كما في الشكلين 3 و6:

$$\lfloor\ N_m,\quad M_m\ \rfloor = \lfloor\ 0,\quad -1\ \rfloor$$

نلاحظ من الشكل السابق أن القوس يدفع المسند تحت الحمل الرأسي بينما ينزاح إلى اليسار. غير أننا افترضنا هنا إزاحة إلى اليمين وفق اتجاه $\delta N = 1$.

إزاحات المنشأ الأساسي

نحدد الآن الإزاحتين المرتبطتين بالحمل الحقيقي من

$$\underbrace{\delta\overline{N}}_{1}\,\Delta_n = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_n(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q\frac{\delta\overline{N}_n(\theta)}{EA}Rd\theta$$
$$\underbrace{\delta\overline{M}}_{1}\,\Delta_m = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_m(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q(\theta)\frac{\delta\overline{N}_m(\theta)}{EA}Rd\theta$$

وبالتعويض عن القوى الداخلية السابقة نحصل على

$$\Delta_n = \frac{qR^2\left(4\sin^3(\alpha)\left(2\kappa+R^2\right)+3R^2(\sin(2\alpha)-2\alpha)\right)}{24EI}$$
$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$

حيث $\kappa = I/A$؛ أي إننا نهمل التشوه المحوري إذا كان $\kappa = 0$. ونلاحظ أن الجساءة المحورية لا تؤثر في الدوران Δ_2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مصفوفة المرونة

تُستخرج مصفوفة المرونة من

$$f_{ij} = \int_0^{\alpha} M_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^{\alpha} N_i(\theta)\frac{N_j(\theta)}{EA}Rd\theta$$

حيث تقابل i, j القيمتين n, m. وبالتعويض:

$$\begin{aligned}
f_{nn} &= \frac{R\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{4EI} \\
f_{nm} = f_{mn} &= \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} \\
f_{mm} &= \frac{\alpha R}{EI}
\end{aligned}$$

يعطي قلب مصفوفة المرونة مصفوفة الجساءة المختزلة K_{ij}:

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{4\alpha EI}{\alpha R(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^3\sin^2(\alpha)} \\
K_{12} &= \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^2\sin^2(\alpha)} \\
K_{22} &= \frac{EI\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{\alpha R(2\alpha+\sin(2\alpha))\left(\kappa+R^2\right)-4R^3\sin^2(\alpha)}
\end{aligned}$$

أُجري ضرب مصفوفة الجساءة في Δ_n وΔ_m باستعمال Mathematica، لكن النتيجة معقدة جداً بحيث يصعب تفسيرها تحليلياً.

تبسيط: إهمال التشوه المحوري

المعادلات الحاكمة

رغم إمكان استخراج حلول دقيقة عددياً من المعادلات السابقة، نبسّط المسألة بإهمال التشوهات المحورية، أي بجعل $\kappa = 0$، فنحصل على

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{qR^4\left(-6\alpha+4\sin^3(\alpha)+3\sin(2\alpha)\right)}{24EI} \\
\Delta_m &= \frac{qR^3(\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI} \\
\mathbf{f} &= \begin{bmatrix} \frac{R^3(6\alpha-8\sin(\alpha)+\sin(2\alpha))}{4EI} & \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} \\ \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI} & \frac{\alpha R}{EI} \end{bmatrix} \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \frac{4\alpha EI}{R^3(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha))} & \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{R^2(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha))} \\ \frac{4EI(\alpha-\sin(\alpha))}{R^2(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha))} & \frac{EI(6\alpha-8\sin(\alpha)+\sin(2\alpha))}{R(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha))} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

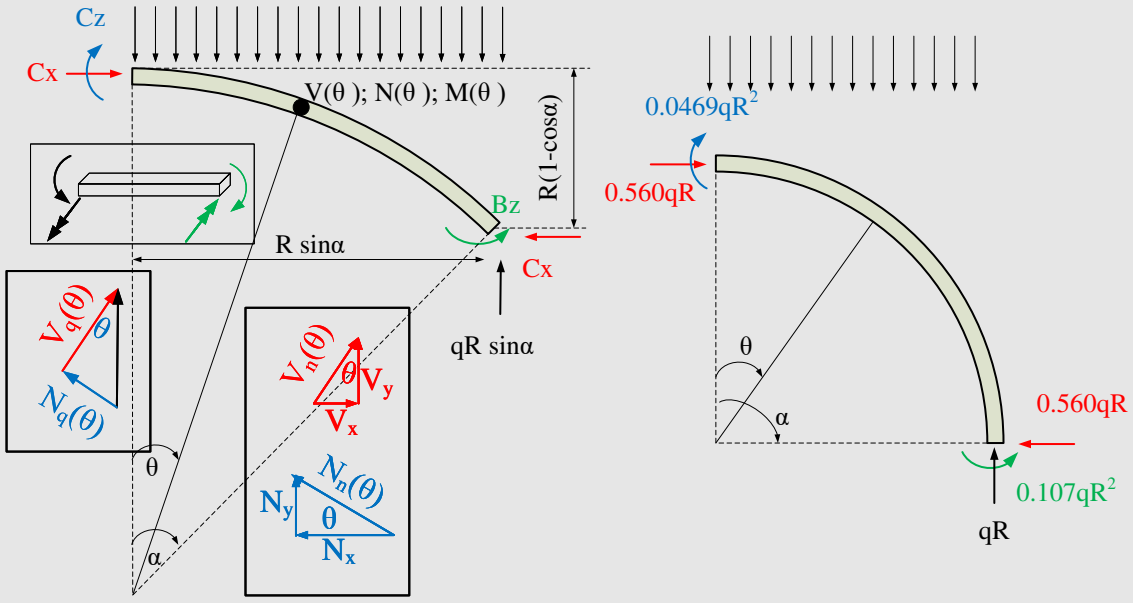
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ينتج عن ذلك القوتان الآتيتان:

$$C_x = \frac{qR\sin(\alpha)(2\alpha(\cos(2\alpha)+2)-3\sin(2\alpha))}{24\sin^2(\alpha)-6\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))}$$

$$C_z = -\frac{qR^2}{48\left(\alpha(2\alpha+\sin(2\alpha))-4\sin^2(\alpha)\right)}\Big[24\alpha^2+8\sin(\alpha)$$
$$\left(-6\alpha+4(\alpha-\sin(\alpha))\sin^2(\alpha)+3\sin(2\alpha)\right)+3\cos(4\alpha)-3\Big]$$

بالرجوع إلى الشكل الآتي، تُعطى القوى الداخلية بـ



$$N(\theta) = C_x \underbrace{\cos\theta}_{N_n} + \underbrace{qR\sin^2\theta}_{N_q}$$ ضغط موجب+

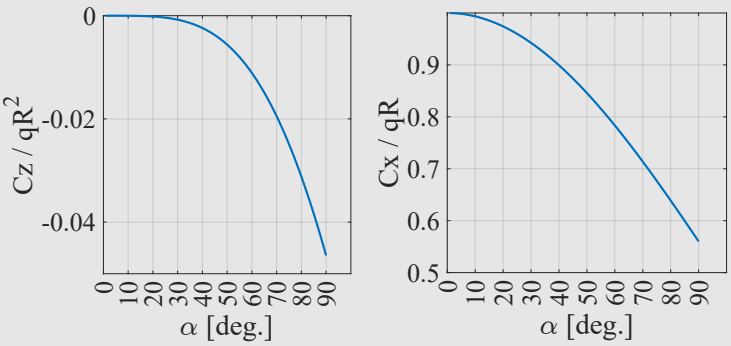
$$V(\theta) = -C_x \underbrace{\sin\theta}_{V_n} + \underbrace{qR\sin\theta\cos\theta}_{V_q}$$ موجب مع عقارب الساعة+

$$M(\theta) = C_z \underbrace{1}_{M_m} + C_x \underbrace{R(1-\cos\theta)}_{M_n} - \underbrace{q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}}_{M_q}$$ موجب عكس عقارب الساعة+

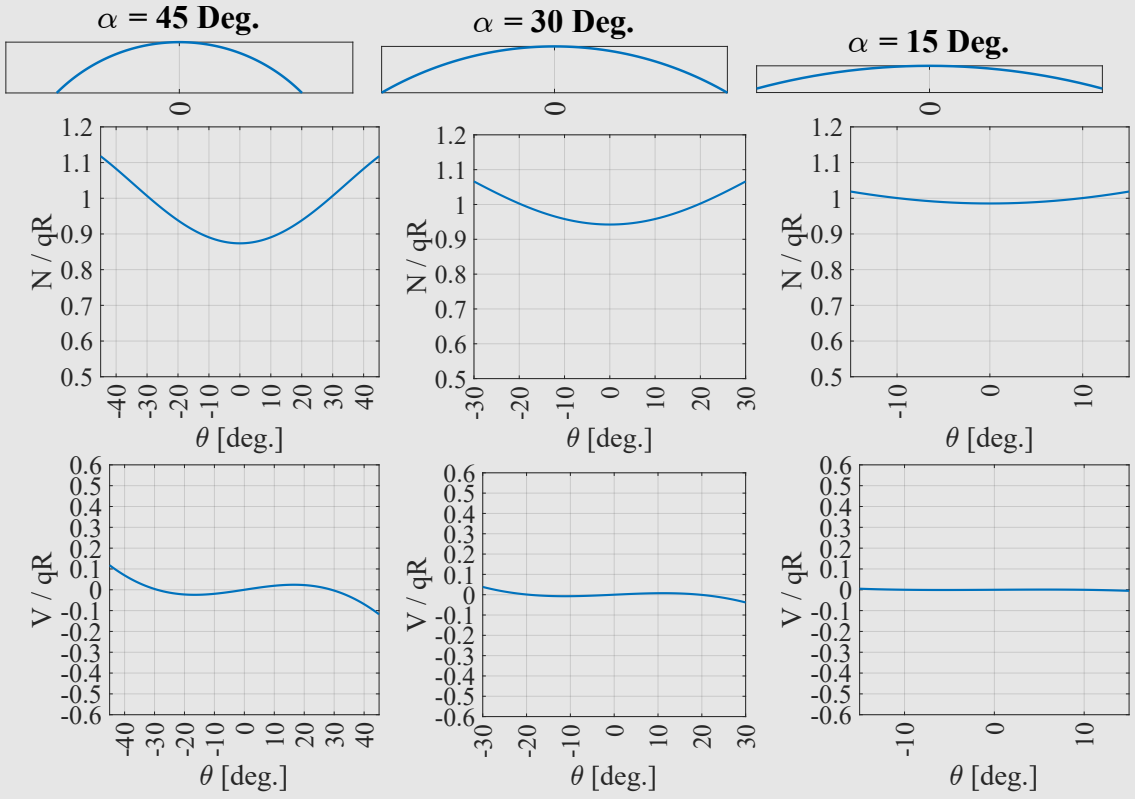
تمثيل النتائج

بدراسة تغير C_x وC_z، نجد أن الأولى تبلغ أكبر قيمة في الأقواس «المسطحة» وتنخفض بصورة شبه خطية كلما اقترب القوس من نصف دائرة. أما C_z فتقارب الصفر في القوس المسطح وتبلغ أكبر قيمة في القوس نصف الدائري.

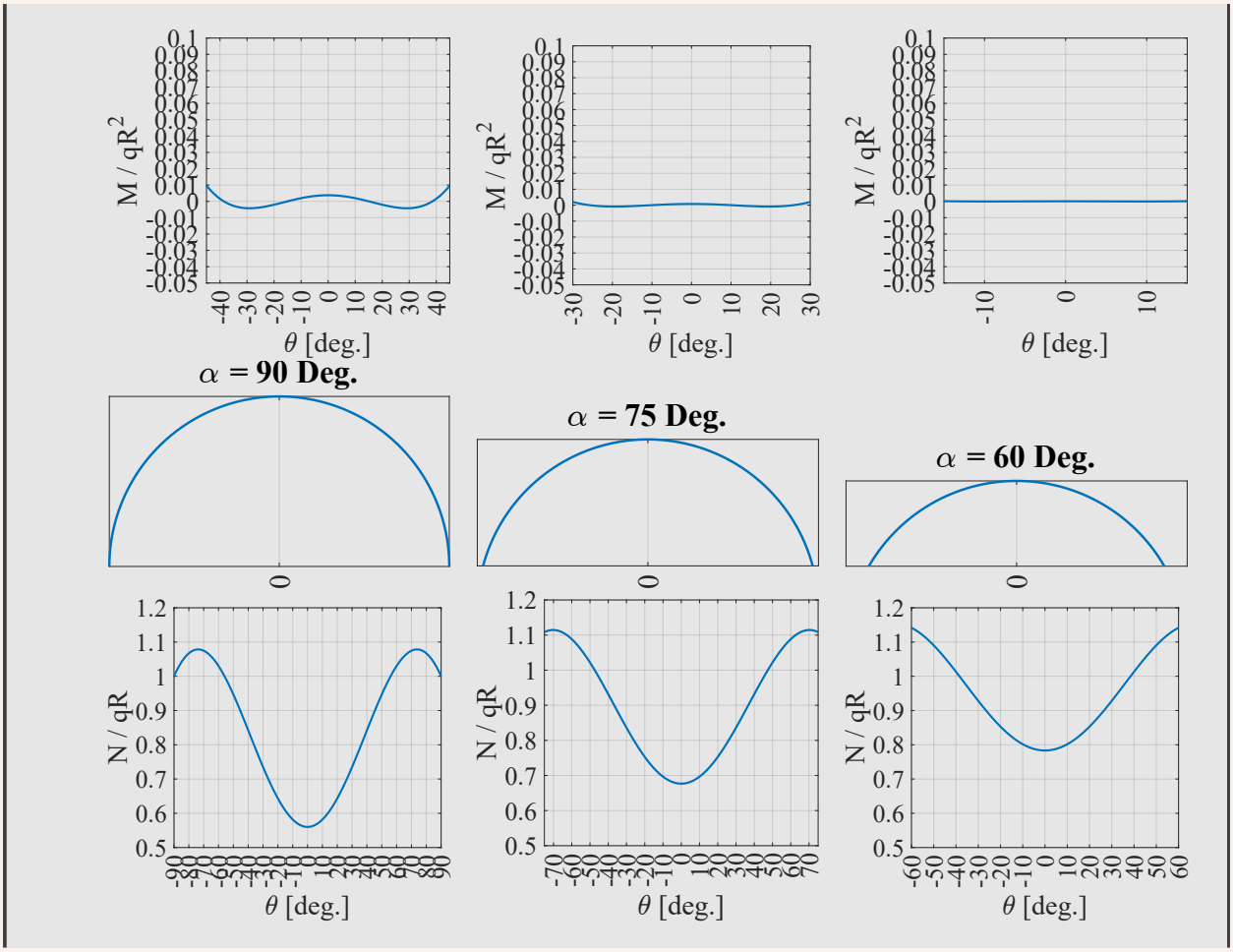
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



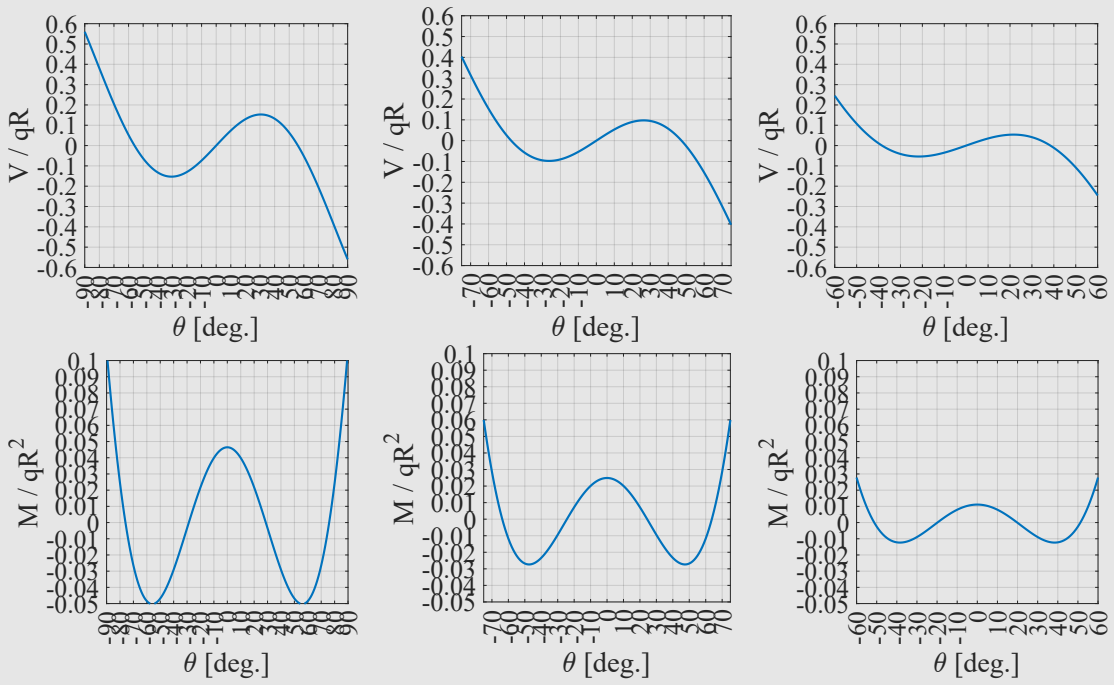
ندرس بعد ذلك القوة المحورية المطبّعة N والقص V والعزم M على امتداد الأقواس بدلالة θ. ولتيسير المقارنة، استُعملت القيمتان الدنيا والعليا نفسيهما في جميع الرسوم. تكون القوة العادية شبه ثابتة عند قيم α الصغيرة، لكن N عند التاج تنخفض تدريجياً حتى تظهر نقطتا انقلاب. يمكن رسم القيمة المطلقة للقص، غير أننا نلاحظ أنه يقارب الصفر في القوس المسطح، ويزداد تدريجياً عند الطرف مع زيادة α، بينما يساوي صفراً دائماً عند التاج بسبب التناظر. وأخيراً، يقارب العزم الصفر في الأقواس شبه المسطحة ثم يزداد تدريجياً؛ وتوجد القيم القصوى دائماً عند المساند، ويتصف المخطط بشكل الحرف W.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



وأخيراً، لا يكتمل حل المسألة من دون رسم الهيئة المتشوهة. يُترك ذلك تمريناً، وتوجد إرشادات للحل في الفصل D.

31.1.4 الحل العام

31.1.4.1 الاشتقاق

مقتبس من *"Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes"* Smars, 2000.

31.1.4.1.1 مركز الثقل

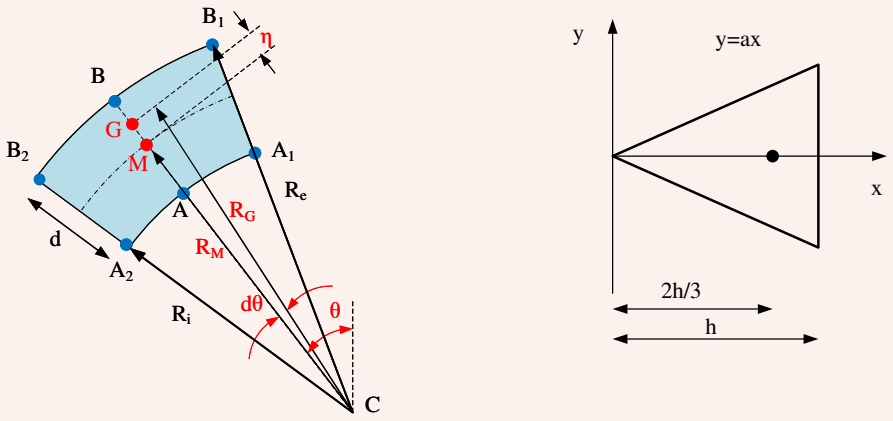
23 نُشر هذا الاشتقاق أول مرة في *"Theorie der druckkurven"* Milankovitch, 1907.

24 نشتق أولاً موضع مركز ثقل الصنجة، وهي مهمة غير بديهية، بالرجوع إلى الشكل 31.4.

25 نلاحظ أولاً أن مركز ثقل الصنجة يقع في موضع مختلف عن النقطة الوسطى M للمقطع AB، أي $A_1B_1B_2A_2$.

26 نحدد موضع G بالنظر إلى الفرق بين عزمي المساحة الأولين للمثلثين المتناهيين في الصغر CB_1B_2 وCA_1A_2 حول محور يمر بـC ومتعامد مع نصف قطر الانحناء. فعزم المساحة الأول S_1 للمثلث CB_1B_2 يساوي مساحته $A_{CB_1B_2}$ مضروبة في مسافة مركز ثقله عن C، أي $R_{CB_1B_2}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 31.4: مركز ثقل صنجة

27 وبالمثل، يساوي عزم المساحة الأول S_2 للمثلث CA_1A_2 المساحة $A_{CA_1A_2}$ مضروبة في المسافة $R_{CA_1A_2}$ من مركز ثقله إلى C.

$$S_2 = A_{CA_1A_2} R_{CA_1A_2} = A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right)$$

28 عزم المساحة الأول للصنجة المتناهية في الصغر $A_1B_1A_2B_2$ هو

$$(A_{CB_1B_2} - A_{CA_1A_2}) R_G = A_{CB_1B_2} \frac{2}{3}\left(R_M + \frac{d}{2}\right) - A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right) \tag{31.13}$$

29 تُستخرج العلاقة بين مساحة المثلث وارتفاعه من تعريف المركز الهندسي:

$$\overline{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h x(\overbrace{ax}^{y})\,dx}{\int_0^h (ax)dx} = \underbrace{\frac{\frac{ah^3}{3}}{\frac{ah^2}{2}}}_{A} = \frac{2h}{3} \Rightarrow A = \frac{ah^2}{2} \Rightarrow A \propto h^2$$

30 ومن ثم تتناسب النسبة بين $A_{CB_1B_2}$ و$A_{CA_1A_2}$ مع نسبة مربعي المسافتين $\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2$ و$\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2$؛ لذلك

$$A_{CB_1B_2} = A_{CA_1A_2} \frac{\left(R_M + \frac{d}{2}\right)^2}{\left(R_M - \frac{d}{2}\right)^2} \tag{31.14}$$

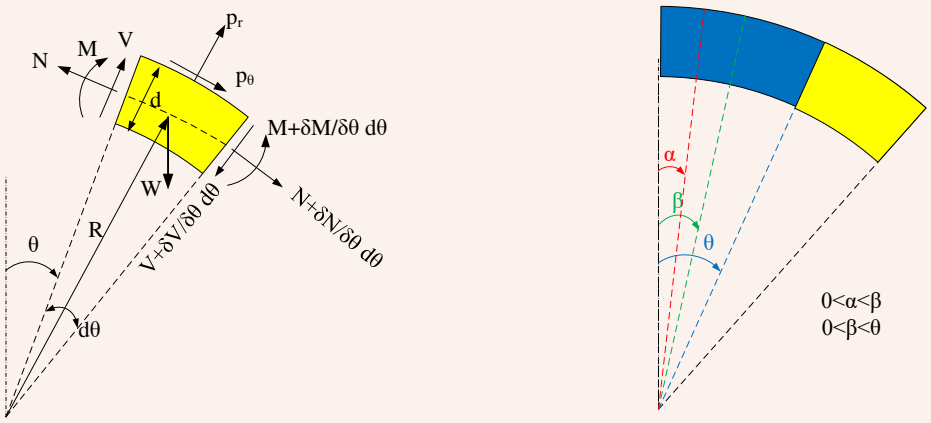
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31 بالتعويض بالمعادلة 31.14 في 31.13 والحل لإيجاد R_G:

$$R_G = R_M + \frac{d^2}{12R_M} \Rightarrow \eta = \frac{d^2}{12R_M}$$

31.1.4.1.2 الاشتقاق

32 تُعرّف هندسة قوس ذي سماكة وحدية بزاويته القطبية θ، ونصف قطر انحنائه $r(\theta)$، وسماكته $d(\theta)$، الشكل 31.5. ولاشتقاق معادلة الاتزان التفاضلية ندرس اتزان صنجة متناهية في الصغر، أو جزء من قوس. ولا يلزم أن تكون سماكة القوس أو انحناؤه r صغيرة.



شكل 31.5: اتزان صنجة متناهية في الصغر

33 للصنجة وزن W يُعطى بـ

$$W = \gamma r d \, d\theta$$

حيث γ الوزن النوعي للقوس $[N/m^3]$. ويؤثر الوزن عند مركز ثقل الصنجة على مسافة r_G من مركز الانحناء.

$$R_G = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right] = R\left[1 + \frac{\eta^2}{12}\right]$$

34 القوى الداخلية هي القوة العادية N، موجبة في الشد، وقوة القص V، موجبة إذا مالت إلى إحداث دوران مع عقارب الساعة، والعزم M، موجب إذا شد الليف السفلي. ولا يُفترض توزيع معين للإجهادات في المقطع.

35 يخضع السطح الخارجي للقوس لقوتين سطحيتين: p_θ في الاتجاه المماسي وp_r في الاتجاه الشعاعي. ويُعطى الاتزان الشعاعي بـ

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta - N d\theta - \gamma R d \cos(\theta) d\theta + p_r \left(R + \frac{d}{2}\right) d\theta = 0$$

لاحظ أن القوة العادية لها مركبة شعاعية $-Nd\theta$ – لأن الوجهين غير متوازيين.

36 طول الوجه الخارجي هو $\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta$.

37 يُكتب الاتزان المماسي كما يأتي:

$$-\frac{\partial N}{\partial \theta}d\theta - Vd\theta + \gamma R d\sin(\theta)d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

ومرة أخرى، بما أن الوجهين غير متوازيين، تكون لقوة القص مركبة مماسية.

38 وأخيراً، يُكتب اتزان الدوران حول النقطة المركزية:

$$-\frac{\partial M}{\partial \theta}d\theta + VRd\theta + \frac{d^2}{12R}\sin(\theta)\gamma R d d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}d\theta = 0$$

39 إذا رمزنا إلى الاشتقاق بالنسبة إلى θ بشرطة ($'$)، وأدخلنا المعامل اللابعدي $\eta = d/r$ الذي يمثل نحافة القوس، أمكن إعادة كتابة معادلات الاتزان:

$$N' - V + \gamma R^2\eta\sin(\theta) + p_\theta R(1+\eta/2) = 0 \tag{31.15}$$

$$-V' - N - \gamma R^2\eta\cos(\theta) + p_r R\left(1+\frac{\eta}{2}\right) = 0 \tag{31.16}$$

$$-M' + VR + \gamma R^3(\eta^3/12)\sin(\theta) + p_\theta R^2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\frac{\eta}{2} = 0 \tag{31.17}$$

40 بالتعويض عن مشتقة V، أي V' من المعادلة 31.16، في مشتقة المعادلة 31.15، يمكن حذف V.

$$N'' + V' + (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta) + \gamma R^2\eta\cos(\theta) + (p_\theta R(1+\frac{\eta}{2}))' = 0$$

فنحصل على

$$N'' + N = q(\theta) \tag{31.18}$$

حيث جُمعت الحدود المتغيرة، والمعلومة غالباً، في الطرف الثاني:

$$q(\theta) = \underbrace{R(p_r - p'_\theta)\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - p_\theta\left[R\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\right]}_{\text{الحمل الخارجي}} - 2\gamma R^2\eta\cos(\theta) - (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

41 الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المصاحبة مزيج خطي من $\sin(\theta)$ و$\cos(\theta)$. ويمكن إثبات، مع إهمال الحمل الخارجي، أن

$$N(\theta) = a_1 \cos(\theta) + \left(a_2 + \underbrace{\int_0^{\theta} \frac{\overbrace{\int_0^{\beta} q(\alpha) \sin\alpha d\alpha}^{F_1(\beta)}}{\sin^2\beta} d\beta}_{F_2(\theta)} \right) \sin(\theta) \tag{31.19}$$

هو حل. وللتحقق:

$$F_1(\beta) = \int_0^{\beta} q(\alpha)\sin(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}\gamma\eta R^2\left[-2\beta - 4\sin^2(\beta) + \sin(2\beta)\right]$$

$$F_2(\theta) = \frac{\int_0^{\theta} F_1(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{1}{2}R^2\gamma\eta\left[(-1 + \theta(-2 + \cot(\theta))\right]$$

$$F_3(\theta) = \frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta)\left[2\mathbf{a1} + \gamma\eta(\theta+4)R^2\right] - \frac{1}{2}\sin(\theta)\left[2a_2 + \gamma\eta(1-2\theta)R^2\right]$$

$$N(\theta) = a_1\cos(\theta) + (a_2 + F_2(\theta))\sin(\theta)$$

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}(2a_1 + R^2\gamma\eta(4+\theta))\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[2a_2 + R^2\gamma\eta(1-2\theta)\right]\sin(\theta)$$

بالتعويض في المعادلة 31.18 يسهل إثبات أن

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) + N(\theta) - q(\theta) = 0$$

42 يمكن تحديد قوة القص من المعادلة 31.16:

$$V(\theta) = \cos(\theta)\left(a_2 - \gamma\eta\theta R^2\right) - \tfrac{1}{2}\sin(\theta)\left(2a_1\gamma\eta\theta R^2\right)$$

43 ويُستخرج العزم بدوره من المعادلة 31.17:

$$M(\theta) = a_3 - a_1 R + R^3\gamma\eta + \frac{1}{2}R\left[2a_1 + R^2\gamma\eta(-2+\theta)\right]\cos(\theta) + a_2 R\sin(\theta) + \frac{1}{12}R^3\gamma\eta\left[-6 + (-12+\eta^2)\theta\right]\sin(\theta)$$

لاحظ إدخال ثابت تكامل ثالث a_3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

44 لإيجاد ثوابت التكامل الثلاثة a_1, a_2, a_3 نحتاج إلى ثلاث معادلات إضافية. ويمكن إيجاد قيم N وV وM عند جعل $\theta = 0$.

45 يمكن تمثيل القوى الداخلية بطريقة أخرى، بتعريف اللامركزية المطلقة ex واللامركزية النسبية e:

$$ex = -\frac{M}{N},\ e = \frac{2ex}{d}$$

46 يُقاس العزم بالنسبة إلى منتصف المقطع. والنظام مكافئ للنظام (N^*, V, ex) أو (N^*, V, e)، حيث N^* قوة مساوية في المقدار لـN وتؤثر على مسافة ex من منتصف المقطع لتولد العزم M. تكون $e < -1$ عندما يمر خط عمل N^* خارج طرف السطح الداخلي، وتساوي صفراً عندما يمر بالمركز، وتكون $e > 1$ عندما يمر خارج السطح الخارجي.

47 مثالاً على ذلك، اعتبر قوساً دائرياً ثابت السماكة لا يخضع إلا لوزنه الذاتي. يمكن إعادة كتابة معادلات الاتزان 31.15–31.17 على الصورة:

$$N'(\theta) - V(\theta) + \gamma R^2 \eta \sin(\theta) = 0$$
$$V'(\theta) + N(\theta) + \gamma R^2 \eta \cos(\theta) = 0$$
$$-M'(\theta) + V(\theta)R + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta) = 0$$

وتصبح المعادلة التفاضلية 31.18

$$N''(\theta) + N(\theta) = -2\gamma R^2 \eta \cos(\theta)$$

48 بحل المعادلة 31.19 لهذه الحالة نحصل على

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta)$$
$$V(\theta) = -N_0 \sin(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta)$$

حيث N_0 القوة العادية عند $\theta = 0$. أما العزم فتصبح المعادلة 31.17

$$M'(\theta) = VR + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta)$$

وبالتعويض عن عبارة V:

$$M'(\theta) = -N_0 R \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) R \cos(\theta) + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

يعطي التكامل

$$M(\theta) = a_3 + N_0 R \cos(\theta) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta (\theta \sin(\theta) + cos(\theta) - \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49 وأخيراً تُعطى القوى الداخلية بـ

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta) \tag{31.20}$$

$$V(\theta) = -N_0 \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta) \tag{31.21}$$

$$M(\theta) = M_0 - N_0 R(1 - \cos(\theta)) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta \left[\theta \sin(\theta) - (1 - \cos(\theta)) \left(1 + \frac{\eta^2}{12}\right)\right] \tag{31.22}$$

31.1.4.1.3 التحقق

50 يمكن التحقق من تطابق المعادلات 31.20–31.22 مع المعادلات 31.10 و31.11 و31.12 للقوة المحورية والقص والعزم في القوس ثلاثي المفاصل (Smars, 2022).

51 تُقاس الزوايا في هذا الاشتقاق من التاج، حيث $\theta = 0$ وكل من القص والعزم يساوي صفراً، $V = M = 0$. ونفترض أيضاً أن السماكة مهملة مقارنةً بـR، أي $\eta = 0$. ويمكن التعبير عن الوزن الذاتي بـ$w = \gamma R \eta$. وبالتعويض تصبح المعادلات 31.20–31.22

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) - wR\theta \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) - wR\theta \cos(\theta) \\ M(\theta) &= -N_0 R(1 - \cos(\theta)) - wR^2 \left[\theta \sin(\theta) - 1 + \cos(\theta)\right] \end{aligned}$$

N_0، القوة المحورية عند التاج، تساوي رد الفعل الأفقي، المعادلة 31.9: $N_0 = C_x = (\pi/2 - 1)wR$.

$$\begin{aligned} N(\theta) &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cos(\theta) + \theta \sin(\theta)\right] \\ V(\theta) &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \sin(\theta) - \theta \cos(\theta)\right] \\ M(\theta) &= wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos(\theta)) - \theta \sin(\theta)\right] \end{aligned}$$

52 وأخيراً نستبدل الزاوية θ المقاسة من التاج في هذا الاشتقاق بالزاوية θ' المقاسة من المحور x في حل القوس ثلاثي المفاصل:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

فنحصل على

$$\begin{aligned} N(\theta') &= -wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \sin(\theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \cos(\theta')\right] \\ V(\theta') &= wR \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cos(\theta') - \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \sin(\theta')\right] \\ M(\theta') &= wR^2 \left[\frac{\pi}{2}(1 - \sin(\theta')) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \cos(\theta')\right] \end{aligned}$$

وهكذا استعدنا المعادلات نفسها المشتقة سابقاً: 31.10 و31.11 و31.12.

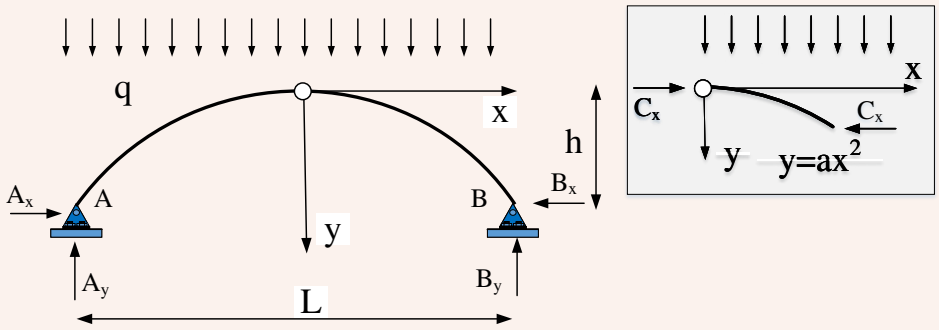
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31.1.5 حلول باستعمال Mathematica

53 يورد الملحق D مجموعة واسعة من حلول الأقواس الدائرية تحت توليفات مختلفة من الأحمال والمساند. وقد كان هذا العمل رسالة ماجستير لـSonavane, 2014، ويشمل مخططات الأجسام الحرة وشيفرات Math-ematica المناظرة.

31.2 الشكل الأمثل للقوس

54 يمكن رسم عدد لا نهائي من القطوع المكافئة بين نقطتين، لكننا نبحث عن الشكل الأمثل تحت حمل منتظم، الشكل 31.6. من اتزان الشكل الأيسر نحصل على



شكل 31.6: القوس المكافئ الأمثل تحت حمل منتظم

$$\begin{cases} (+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y L - \dfrac{qL^2}{2} == 0 \\ (+\circlearrowright)\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow \dfrac{qL}{2}\dfrac{L}{4} + B_x \dfrac{L}{2} - C_x h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \dfrac{qL^2}{8h} \\ B_y = \dfrac{qL}{2} \end{cases}$$

نريد تحديد a بحيث يكون $M(x) = 0$ على امتداد القوس. وباعتبار اتزان مخطط الجسم الحر الأيمن وفرض $y = ax^2$، نوجد a:

$$(+\circlearrowright)\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow C_x \underbrace{(ax^2)}_{y} - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{L^2}$$

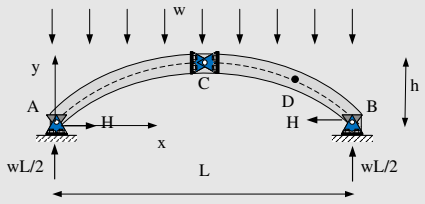
55 لا توجد عزوم داخلية تحت حمل منتظم في قطع مكافئ كهذا.

56 كما في الكابلات، تقع أكبر قوة كلية في القوس عند المسند، $F_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$، بينما لا توجد عند التاج إلا H؛ لذلك يتطلب التاج مقطعاً أصغر من المسند.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31.2.1 مثال 31.5: القوس المثالي

يخضع قوس مكافئ ثلاثي المفاصل، بحره L وارتفاعه h، لحمل منتظم w على البحر كله. سنثبت أن عزم الانحناء يساوي صفراً عند كل نقطة.



تُحدد قوة الدفع الأفقية H بأخذ العزوم حول التاج C:

$$Hh = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{wL}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{wL^2}{8} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{wL^2}{8h}$$

عزم الانحناء عند أي مقطع يبعد مسافة x هو

$$M_x = \frac{wL}{2} \times x - \frac{wx^2}{2} - Hy$$

حيث y ارتفاع النقطة الواقعة على مسافة x من الطرف A. وبجعل مبدأ الإحداثيات عند A تكون معادلة القطع المكافئ

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$

بالتعويض عن H وy في العبارة السابقة:

$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h} \times \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$
$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wxL}{2} + \frac{wx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M_x = 0$$

لاحظ التناظر مع كابل يحمل حملاً منتظماً؛ إذ يكون شكله مكافئاً ولا يحمل عزماً.

31.3 الأقواس المكافئة

57 تحليل الأقواس المكافئة مطابق لتحليل الأقواس الدائرية، عدا الاختلاف الواضح في الشكل. وقد جُمعت هنا الأمثلة الخاصة بالأقواس المكافئة.

58 ولأن عدداً قليلاً جداً من الكتب الدراسية يتناول الأقواس المكافئة، أُضيف هذا القسم لتغطيتها.

هذا القسم عن الأقواس المكافئة مأخوذ من Structural Analysis 2011, Thandavamoothy.

31.3.1 أمثلة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31.3.1.1 مثال 31.6: قوس مكافئ ثلاثي المفاصل

نم لوقنم يتآلا عطقملا Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

قوس مكافئ معادلته $y = 4hx^2/L^2$، مبدأ إحداثياته عند التاج ومحوره x نحو اليمين ومحوره y إلى أسفل، بحره 80 m وارتفاعه 6 m. يؤثر حمل مركز مقداره 20 kN إلى أسفل على مسافة 60 m من المسند الأيسر. نريد تحديد ردود الأفعال والعزم المحصل عند الحمل. من المعادلة 31.1:

$$V_A = \frac{20 \times 20}{80} = 5\text{kN} \quad \text{و} \quad V_B = \frac{20 \times 60}{80} = 15\text{kN}$$

من المعادلة 31.3:

$$H = \frac{20 \times 20}{2 \times 6} = 33.33\text{kN}$$

عزم الانحناء عند الحمل المركز في كمرة بسيطة الارتكاز هو

$$M_o = \frac{Wab}{L} = \frac{20 \times 60 \times 20}{80} = 300\text{kNm}$$

وأخيراً، ارتفاع محور القوس عند الحمل فوق خط المنشأ هو $(h - y)$. وعند $x = 20$ m:

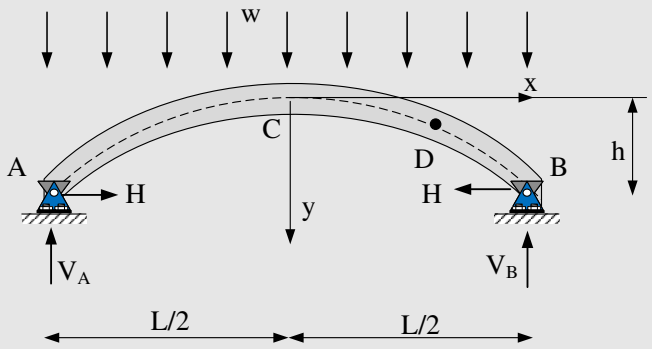
$$y = \frac{4 \times 6 \times 20^2}{80^2} = 1.5\text{ m} \quad \therefore (h - y) = (6 - 1.5) = 4.5\text{ m}$$

العزم الناتج من الدفع هو $H(h - y) = 33.33 \times 4.5 = 149.985\text{kNm}$. ومن ثم يكون العزم المحصل عند الحمل $(300 - 149.985) = 150.015\text{kNm}$.

للتحقق، عزم التاج هو $(5 \times 40 + 20 \times 20 - 1.5 \times 40) = (200 + 400 - 600) = 0$.

31.3.1.2 مثال 31.7: قوس مكافئ ثنائي المفاصل متغير المقطع

يخضع قوس متناظر ثنائي المفاصل لحمل رأسي. وبسبب التناظر، يكون ردًا الفعل الأفقيان عند المسندين متساويين ومتعاكسين. وتسمى هذه القوة الدفع ويرمز إليها بـ H.



نم لوقنم يتآلا عطقملا Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

النظرية

نعتبر قوة الدفع H مجهولاً زائداً مطلوباً. وبتطبيق مبرهنة كاستيليانو، المعادلة 47.36:

$$U^* = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{AE}ds = 0 \tag{31.23}$$

وكذلك

$$\Delta = \frac{\partial U^*}{\partial H} = 0 \tag{31.24}$$

نرمز إلى عزم الانحناء الناتج من حالة الارتكاز البسيط هذه بـM_0، وإلى القوة المحورية المناظرة بـN_0. ووفق هذه الحالة المحررة يمكن التعبير عن عزم الانحناء والقوة المحورية عند المقطع D في القوس بـ

$$M = M_0 - H(h-y) \quad \text{و} \quad N = N_0 + H\cos\theta \tag{31.25}$$

حيث h ارتفاع القوس وθ زاوية مماس خط مركز القوس عند D مع المحور X. وبالتعويض بالمعادلة 31.25 ومشتقاتها بالنسبة إلى H في 31.24:

$$-\int_0^l \frac{M_0 - H(h-y)}{EI}(h-y)ds + \int_0^l \frac{N_0 + H\cos\theta}{AE}\cos\theta ds = 0 \tag{31.26}$$

يُعطى حل H عندئذ بـ

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds - \int_0^l \left(\frac{N_0}{AE}\right)\cos\theta ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

تصلح هذه المعادلة لجميع الأقواس المتناظرة ثنائية المفاصل مهما كان شكلها أو حالة تحميلها. في الأقواس ذات النسب المعتادة يكون الحد الثاني في البسط صغيراً جداً مقارنةً بالأول، لأن التشوه المحوري أصغر بكثير من الانحنائي، فيمكن إهماله. ومن ثم تُعطى قوة الدفع بـ

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

لا يمكن حساب الدفع H إلا بعد معرفة العلاقة بين h وy. وفي الحالة الخاصة للقوس المكافئ تُعطى معادلة محور القوس التي تربطهما بـ

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \tag{31.27}$$

وكذلك

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (8hx/L^2)^2}}$$

يُفترض أيضاً أن مساحة المقطع وعزم القصور يتغيران وفق العبارة الآتية:

$$A = \frac{A_c}{\cos\theta} \quad \text{و} \quad I = \frac{I_c}{\cos\theta}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث يرمز A_c وI_c إلى مساحة المقطع وعزم القصور عند التاج C.

لإيجاد M_0، نلاحظ وجود حمل موزع بانتظام شدته w يؤثر رأسياً في القوس، وأن مخطط عزم الانحناء لكمرة بسيطة الارتكاز يكون قطعاً مكافئاً بعزم أقصى $wL^2/8$ عند منتصف البحر. لذلك يكون عزم الانحناء عند المقطع D الواقع على مسافة x من التاج C:

$$M_o = \frac{wL^2}{8}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)$$

وبالتعويض:

$$H = \frac{\int_0^l \frac{\frac{wL^2}{8}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)}{[EI_C]/\left[\sqrt{\left\{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right\}}\right]}\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) ds}{\int_0^l \left[\left(\frac{h-\frac{4hx^2}{L^2}}{EI_C}\right)^2 \sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}\right] ds + \int_0^l \left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2 \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}}{EA_C}\right] ds}$$

$$= \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^1 \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2 ds}{\left[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^l \left[\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2\right] ds + \frac{1}{EA_c}\int_0^l \left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right] ds\right]} \tag{31.28}$$

لطول متناهٍ في الصغر من محور القوس، يعطينا التفاضل

$$ds = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

باشتقاق المعادلة 31.27:

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}\, dx$$

بالتعويض في المعادلة 31.28:

$$H = \frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^{L/2}(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx}{[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^{L/2}[(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx] + \frac{1}{EA_c}\int_0^{L/2}[1+(\frac{8hx}{L^2})^2]\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]}$$

أو

$$H = \frac{\alpha_1\left[-\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{2L}{3} + \frac{L^3}{256} + \frac{19L^3}{384h^2} + \frac{L^5}{819h^2}\right)\right] + \alpha_2\left[\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{L^4}{128h^2} + \frac{L^6}{4{,}096h^4} + \frac{L^8}{26{,}244h^6}\right)\right]}{\alpha_1\left[-\frac{8h^2}{I_CL^2}\left(\frac{2L}{3} + \frac{L^3}{256} + \frac{19L^3}{3{,}844h^2} + \frac{L^5}{8{,}192h^2}\right) + \frac{8h}{A_CL^2}\left(L + \frac{Lh^2}{3} + \frac{L^3}{192} - \frac{L^5}{2{,}048h^2}\right)\right] + \alpha_2\left[\frac{8h^3}{I_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2} + \frac{L^6}{4{,}096h^4} + \frac{L^8}{262{,}144h^6}\right) + \frac{8h}{A_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2} + \frac{L^{15}}{41{,}943h^6}\right)\right]} \tag{31.29}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}, \quad \alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right) \tag{31.30}$$

تطبيق

لنأخذ ارتفاعاً 10 m وبحراً 60 m تحت حمل $w = 25$ kN/m. عزم القصور عند مقطع التاج 1.14×10^{-3} m^4 ومساحة المقطع 6.75×10^{-2} m^2.

من المعادلة 31.30:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{60^2}{4} + \left(\frac{60^2}{8 \times 10}\right)^2} = 54.08; \alpha_2 = \ln\left(\frac{60}{2} + 54.08\right) = 4.43$$

من المعادلة 31.29:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{A}{B} \\
A &= 54.08\left[-\frac{25 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{60 \times 10^2}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,096 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right] \\
B &= 54.08\left[-\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3} \times 60^2}\left(\frac{2 \times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19 \times 60^3}{384 \times 10^2} + \frac{60^5}{8,192 \times 10^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^{-2}}\left(60 + \frac{60 \times 10^2}{3} + \frac{60^3}{192} - \frac{60^5}{2,048 \times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{8 \times 10^3}{1.14 \times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^6}{4,069 \times 10^4} + \frac{60^8}{262,144 \times 10^6}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \times 10}{6.75 \times 10^2}\left(\frac{60^4}{128 \times 10^2} + \frac{60^{15}}{419,430 \times 10^6}\right)\right] \\
\Rightarrow H &= -13.18 \text{kN}
\end{aligned}$$

نعتبر مقطعاً D على مسافة x من التاج C. تُستخرج عبارة عزم الانحناء من اتزان القوى في الجزء الأيمن DB من القوس. ولأن العزم مأخوذ حول المقطع D، فلا تولد قوتا القص والقوة العادية عزماً.

$$M_x = \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H(h - y)$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بالتعويض عن y من المعادلة 31.27:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right) + H\left(h-\frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= -\frac{2w}{L^2}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) + Hh\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)\times\left(Hh-\frac{2w}{L^2}\right) \end{aligned}$$

وهكذا يكون مخطط العزم مكافئاً أيضاً. ويُستخرج عزم التاج بجعل $x=0$:

$$M_C = \left(Hh-\frac{2w}{L^2}\right) = \left(-13.18\times 10 - \frac{2\times 25}{60^2}\right) = -131.81\text{kNm}$$

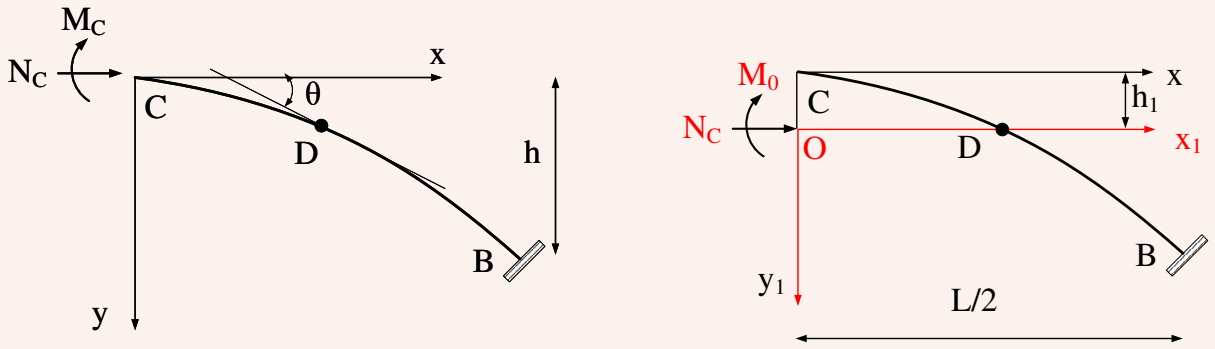
عندما $x=L/2$ يكون عزم المسند صفراً. وعندما $x=L/4$ يُستخرج عزم ربع البحر من المعادلة السابقة:

$$M_{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(Hh-\frac{2w}{L^2}\right) = -98.86\text{kNm}$$

من الواضح أن مساهمة الدفع في عزم الانحناء أكبر من مساهمة الحمل w.

31.3.2 قوس مثبت تحت حمل متناظر

59 يمكن اعتبار عزم الانحناء وقوة القص والقوة العادية عند أي مقطع من القوس مجاهيل زائدة. غير أن مقطع التاج هو الأنسب في القوس المتناظر. وإذا كان الحمل متناظراً وموزعاً أيضاً، انعدمت قوة القص عند التاج ولم يبق إلا مجهولان زائدان: عزم الانحناء M_C والقوة العادية عند مقطع التاج، كما في الشكل 31.7.



شكل 31.7: قوس مكافئ عديم المفاصل؛ مخطط الجسم الحر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 باستعمال مبرهنة كاستيليانو مرة أخرى، المعادلة 47.36، تكون الإزاحة والدوران عند C صفراً بسبب التناظر. ومن ثم يمكن حساب القوتين الزائدتين:

$$\theta_C = \frac{\partial U^*}{\partial M_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}ds = 0 \tag{31.31}$$

$$\Delta_C = \frac{\partial U^*}{\partial N_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial N_C}ds + 2\int_0^l \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial N_C}ds \tag{31.32}$$

حيث l طول القوس CB، أي نصف طول محور القوس الكامل. ولاحظ أن الطرفين الأيمنين يساويان صفراً لأن الإزاحة والدوران المناظرين يساويان صفراً بسبب التناظر.

61 لتكن M_o وN_o، على الترتيب، العزم والقوة العادية الناتجين من الأحمال المطبقة عند أي مقطع. عندئذ يمكن التعبير عن العزم والقوة المحورية الكليين عند مقطع نموذجي D بـ

$$M = M_C + N_C y + M_o \tag{31.33}$$

$$N = N_C \cos\theta + N_o \tag{31.34}$$

باشتقاق المعادلة 31.33 بالنسبة إلى M_C:

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

وباشتقاق المعادلتين 31.33 و31.34:

$$\frac{\partial M}{\partial N_C} = y \tag{31.35}$$

$$\frac{\partial N}{\partial N_C} = \cos\theta \tag{31.36}$$

بالتعويض في المعادلتين 31.31 و31.32:

$$\int_0^l \frac{1}{EI}(M_C + N_C y + M_o)ds = 0 \Rightarrow M_C\int_0^l \frac{ds}{EI} + N_C\int_0^l \frac{yds}{EI} = \int_0^l \frac{M_o}{EI}ds \tag{31.37}$$

$$\int_0^l \frac{M_C + N_c y + M_o}{EI}yds = \int_0^l \frac{N_C\cos\theta + N_o}{AE}\cos\theta ds = 0$$

$$\Rightarrow M_C\int_0^l \frac{y}{EI}ds + N_C\int_0^l \frac{y^2}{EI}ds + N_C\int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE}ds = -\int_0^l \frac{M_o y}{EI}ds - \int_0^l \frac{N_o\cos\theta}{AE}ds \tag{31.38}$$

62 يصعب التعامل مع المعادلتين 31.37 و31.38. ويمكن تبسيطهما بنقل مبدأ الإحداثيات من التاج C إلى نقطة O على مسافة h_1 منه، فتكون الإحداثيات الجديدة $y_1 = y - h_1$.

63 تُختار المسافة بحيث تحقق الشرط الآتي:

$$\int_0^l \frac{y_1}{EI}ds = \int_0^l \frac{y - h_1}{EI}ds = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\int_0^l \frac{y_1}{EI}ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تسمى النقطة O المعرفة بهذه الطريقة *المركز المرن للقوس*.

64 إذا استُعملت O مبدأً للإحداثيات، يُستعاض عن y في المعادلتين 31.37 و31.38 بـ $y_1 = y - h_1$. وعندئذ يساوي $\int_0^l (y_1/EI)ds$ صفراً، وتُعطى عبارتا العزم والقوة العادية بـ

$$M_{oo} = M_C + H_{oo} h_1 = \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{M_o}{EI} ds}{\displaystyle\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{31.39}$$

$$H_{00} = N_C = \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{M_o y_1}{EI} ds + \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE} ds}{\displaystyle\int_0^l \frac{y_1^2}{EI} ds + \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE} ds} \tag{31.40}$$

31.3.2.1 مثال 31.8: قوس مكافئ عديم المفاصل

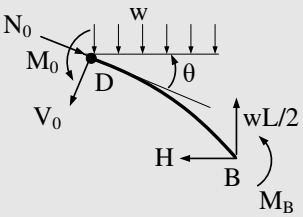
نريد تحديد عزم الانحناء والقوة المحورية عند تاج قوس مكافئ متناظر بحره 40 m، خاضع لحمل موزع بانتظام $w = 20$ kN/m على البحر كله. ارتفاع القوس 8 m، و$E = 2 \times 10^5$ N/mm^2، و$I = 1.5 \times 10^{-4}$ m^4، و$A = 7.5 \times 10^{-2}$ m^2. يقع المركز المرن على مسافة 1 m أسفل التاج. معادلة القوس المكافئ هي

$$y = \frac{4hx^2}{L^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2} \tag{31.41}$$

وكذلك

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}\, dx \tag{31.42}$$

يظهر القوس المثبت وحمله في الشكل. وبسبب تناظر الأبعاد والتحميل، تكون عزوم التثبيت عند المسندين متساوية ومتعاكسة، وكذلك قوتا الدفع الأفقيتان.



نصوغ أولاً عبارات عامة للقوى المختلفة، ثم نعوض القيم المعطاة لحساب مقاديرها. لدينا $M_A = M_B = M^F$، حيث M^F عزم التثبيت عند المسندين، وكذلك $H_A = H_B = H$. وبأخذ عزوم القوى حول C، $\sum M = 0$:

$$-M_B - \frac{wL}{2}\frac{L}{2} + \frac{wL}{2}\frac{L}{4} + Hh = 0 \quad \text{أو} \quad -M_B - \frac{wL^2}{8} + Hh = 0$$

$$Hh = M_B + \frac{wL^2}{8} \quad \text{أو} \quad H = \frac{1}{h}\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) \tag{31.43}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عزم الانحناء M_0 عند أي مقطع هو

$$\begin{aligned}M_0 &= -M_B - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right) + w\frac{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}{2} + H_B(h-y)\\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - Lx + x^2\right) + H_B(h-y)\\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h-y)\\ &= -M_B - \frac{wL^2}{8} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h-y) = -\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) + \frac{wx^2}{2} + H_B(h-y)\end{aligned}$$

باستعمال المعادلتين 31.43 و31.41، يمكن إعادة كتابة M_0 على الصورة

$$\begin{aligned}M_0 &= -Hh + \frac{wx^2}{2} + H_B\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right)\\ &= \frac{wx^2}{2} - \frac{4Hh}{L^2}x^2 \left(\because H_B = H\right) = x^2\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)\end{aligned} \tag{31.44}$$

القوى المؤثرة في الجسم الحر DB عند المقطع D:

$$N_O = w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\theta$$

بالتعويض عن M_0 في المعادلة 31.39:

$$M_{OO} = \frac{\int_0^l \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2 ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{31.45}$$

بالتعويض عن ds من المعادلة 31.42:

$$\begin{aligned}M_{oo} &= -\frac{\int_0^{L/2}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}\\ &= \frac{\left(4whL - \frac{32Hh^2}{L}\right)\left\{\alpha_1\left(\frac{1}{32} + \frac{L^2}{1024h^2}\right) - \frac{\alpha_2 L^5}{32{,}768h^4}\right\}}{\frac{2h}{L}\alpha_1 + \left(h + \frac{L^2}{16h}\right)\alpha_2}\end{aligned} \tag{31.46}$$

بالتعويض عن M_o من المعادلة 31.44، وعن $y_1 = y - h_1$ وds من المعادلة 31.42، في المعادلة 31.40:

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/2}\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\left(y-h_1\right)\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{w\left(\frac{L}{2}-x\right)\cos^2\theta}{AE}\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\frac{\left(y-h_1\right)^2}{EI}\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{\cos^2\theta}{AE}\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \tag{31.47}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لطول متناهٍ في الصغر من القوس:

$$\cos\theta = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \left[1+\left(\frac{8hx^2}{L^2}\right)^2\right] \tag{31.48}$$

بالتعويض عن $\cos^2\theta$ في المعادلة 31.47 نحصل على

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/} \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2}-\frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\left(y-h_1\right)\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{w\left(\frac{L}{2}-x\right)}{AE}1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L2}\frac{1}{EI}\left(\frac{4hx^2}{L^2}-h_1\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{1}{AE}1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \tag{31.49}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left[(\frac{4wh}{L^2}-\frac{8h^2h_1}{L^2})\left\{\frac{4h}{L^2}\left(\frac{L^5}{192}+\frac{L^7}{12,288h^2}-\frac{L^9}{65,536h^2}+\frac{L^9}{131072h^4}\right)\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.-h_1\left(\frac{L^3}{32}+\frac{L^5}{1,024h^2}\right)\right\}-\frac{wL^2I}{8Ah}\right]+\alpha_2\left\{\left(\frac{4wh}{L^2}-\frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\right. \\ &\left.\left(\frac{L^{10}}{1,033,576h^5}+\frac{L^8h_1}{32,768h^4}\right)\right\}\Bigg\}+\alpha_3\frac{wL^3}{16Ah} \end{aligned}$$

$$H_{oo} = -\frac{}{\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left\{\frac{8h^3}{3L^3}\left(\frac{L^2}{4}+\frac{L^4}{64h^2}\right)-\frac{1}{8Lh^2}\left(\frac{L^2}{4}+\frac{L^4}{64h^2}\right)+\frac{L^3}{1,024h^4}+\frac{2hh_1}{L}\right\}\right.} \tag{31.50}$$

$$\left.+\alpha_2\left\{\frac{L^{12}}{4,134,034h^6}+\frac{L^4}{64h^2}\right\}\right\}+\frac{L^2}{8Ah}\alpha_3$$

حيث

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4}+\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$

$$\alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right)$$

$$\alpha_3 = \ln\left\{\frac{8h}{L^2}\left(\frac{L}{2}+\alpha_1\right)\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

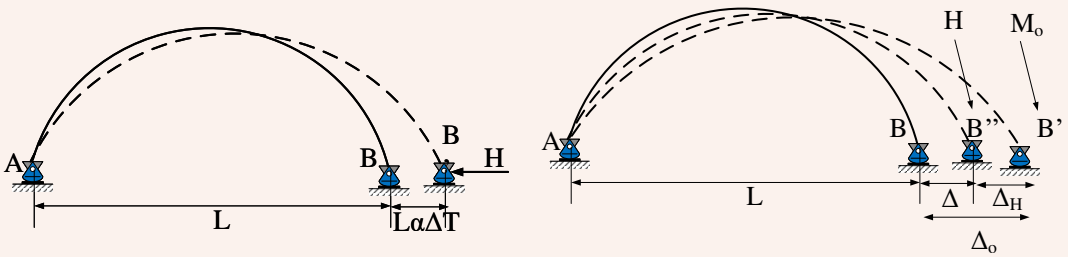
تعتمد معادلة H_{oo}، المعادلة 31.50، على أبعاد القوس وخواصه الهندسية وبحره وتحميله. وبالتعويض بالقيم المعطاة في المعادلة 31.47 يمكن حساب H_{oo}. وبعد ذلك تُستعمل قيمته في المعادلة 31.46 لحساب M_{oo}، عزم المركز المرن. ومع القيم المعطاة تصبح عبارة H_{oo} في المعادلة 31.50:

$$\begin{aligned}
H_{oo}\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\Bigg\{32.02\Bigg[\Big(\frac{4\times20\times8}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\Big)\Bigg\{\frac{4\times8}{40}\Bigg(\frac{40^5}{192}+\frac{40^7}{12288h^2}\\
-\frac{40^9}{65536\times8^2}+\frac{40^5}{131072\times8^4}\Bigg)-1\Bigg(\frac{40^3}{32}+\frac{4}{1024\times8^2}\Bigg)\Bigg\}\\
-\frac{20\times40^2\times1.5\times10^{-4}}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\Bigg]+3.95\Bigg\{\Bigg(\frac{4\times20\times3}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\Bigg)\\
\Bigg(\frac{40^{10}}{1033576\times8^5}+\frac{40^8\times1}{32768\times8^4}\Bigg)\Bigg\}\Bigg\}+\frac{0.733\times20\times40^3}{16\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=-\frac{}{\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\Bigg\{32,02\Bigg\{\frac{8\times8^3}{3\times40^3}\Bigg(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}-\frac{1}{8\times40\times8^2}\Bigg(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}\Bigg)\\
+\frac{40^3}{1024\times8^4}+\frac{2\times8\times1}{40}\Bigg\}+3.95\Bigg\{\frac{40^{12}}{4134034\times8^6}+\frac{40^4}{64\times8^2}\Bigg\}\Bigg\}+\frac{40^2\times0.733}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
=32.08\text{kN}
\end{aligned}\tag{31.51}$$

وأخيراً، بالتعويض عن H_{oo} في المعادلة 31.46 يكون العزم

$$\begin{aligned}
M_{oo}&=-\frac{\Big(4\times20\times8\times40-\frac{32\times32.08\times8^2}{40}\Big)\Big\{32.02\Big(\frac{1}{32}+\frac{40^2}{1024\times8^2}\Big)-\frac{3.95\times40^5}{32768\times8^4}\Big\}}{\frac{2\times8}{40}\times32.02+\Big(8+\frac{40^2}{16\times8}\Big)3.95}\\
&=314.98\text{kNm}
\end{aligned}$$

31.3.3 آثار هبوط الأساسات وتغير الحرارة



(b) أثر الحرارة

(a) الإزاحة الابتدائية

شكل 31.8: أثر الهبوط الابتدائي وتغير درجة الحرارة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

هبوط المساند

65 ندرس أثر هبوط المساند أو حركتها في قيمة H. يبين الشكل 31.8a قوساً AB ثنائي المفاصل، طرفه B على مسند متحرك، ويسمى المنشأ الأساسي. تحت الحمل الخارجي يتحرك المسند B في المنشأ الأساسي إلى B'. ولْيكن M_0 عزم المنشأ الأساسي الناتج من الحمل الخارجي.

66 يؤدي تطبيق قوة أفقية افتراضية واحدة[1] إلى عزم افتراضي $\delta\overline{M} = 1 \times y$، حيث y ارتفاع القوس عند المقطع الذي يُحسب عنده العزم. ومن ثم تكون إزاحة القوس

$$(1)BB' = (1)\Delta_o = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds$$
$$= \int y\frac{M_o}{EI}ds$$

67 إذا كان مقدار القوة الأفقية المطبقة في القوس H، فإنها تولد العزم $M = Hy$. وتكون الإزاحة الأفقية الناتجة من H:

$$B'B'' = \Delta_H = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds$$
$$= \int y\frac{Hy}{EI}ds = H\int \frac{y^2}{EI}ds$$

68 لنفترض أن المسند يهبط بمقدار Δ، أي ينتقل من B إلى B'. عندئذ

$$\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} = \Delta_0 - \Delta$$
$$= \int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta$$
$$\Rightarrow H = \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta}{\int \frac{y^2}{EI}ds}$$

[1] نستعمل في هذا القسم طريقة القوة الافتراضية بدلاً من مبرهنة كاستيليانو المستعملة حتى الآن للأقواس المكافئة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

69 إذا كان المسند مرناً وكانت مرونته k_s لكل وحدة قوة أفقية عند منسوبه، فإن $\Delta = k_s H$. وفي هذه الحالة:

$$\begin{aligned} \Delta_H &= H\int y^2\frac{ds}{EI} = \Delta_0 - \Delta \\ &= H\int y^2\frac{ds}{EI} = \int y\frac{M_o}{EI}ds - k_s H \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds}{\int\frac{y^2}{EI}ds + k_s} \end{aligned} \tag{31.52}$$

درجة الحرارة

70 ندرس أثر تغير الحرارة في القوة الأفقية لقوس ثنائي المفاصل كما في الشكل 31.8b. لْترتفع درجة حرارة القوس بمقدار ΔT. تولد مفاصل الطرفين دفعاً أفقياً يمنع الطرفين من التحرك إلى الخارج عند ارتفاع الحرارة.

71 ينشأ من هذا الدفع الأفقي عزم انحناء في جميع مقاطع القوس. نستبدل المفصل عند المسند B بمسند متحرك، فيتحرك B إلى الموضع B'. ومن ثم

$$BB' = L\alpha\Delta T$$

حيث L بحر القوس وα معامل التمدد الحراري.

72 لتكن H قوة الدفع الأفقية الناتجة من ارتفاع الحرارة بمقدار ΔT. تعيد هذه القوة القوس إلى موضعه الأصلي، أي تعيد الطرف B' إلى B. ومن مبرهنة كاستيليانو:

$$\frac{dU^*}{dH} = L\alpha\Delta T$$

حيث U^* طاقة الانفعال:

$$U^* = \int\frac{M^2}{2EI}ds$$

في هذه الحالة يُعطى العزم بـ$M = -Hy$، ومن ثم

$$\begin{aligned} M &= -Hy \\ \Rightarrow \quad L\alpha\Delta T &= \frac{dU}{dH} = \int\frac{d}{dH}\left(\frac{M^2}{2EI}\right)ds = \int\frac{M}{EI}\frac{dM}{dH}ds \\ &= \int(-Hy)(-y)\frac{ds}{EI} = H\int y^2\frac{ds}{EI} \\ \Rightarrow H &= \frac{L\alpha\Delta T}{\int y^2\frac{ds}{EI}} \end{aligned} \tag{31.53}$$

تعبر هذه المعادلة عن الدفع الأفقي الناتج من تغير درجة حرارة القوس.

73 بجمع أثري هبوط الأساس وتغير الحرارة، يمكن استخراج الدفع الأفقي من المعادلتين 31.52 و31.53:

$$H = \frac{\int M_o y \frac{ds}{EI} + L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + k_s} \tag{31.54}$$

31.3.3.1 مثال 31.9: حمل حراري على قوس مكافئ

قوس مكافئ ثنائي المفاصل بحره 50 m وارتفاعه 5 m يحمل حملاً مركزاً 50 kN عند التاج. مرونة مسند القوس 0.0002 m/kN. مع $E = 200$ kN/mm^2 و$I = 8^9$ mm^4 و$C\alpha = 20 \times 10^{-6}$/°C، نريد حساب الدفع الأفقي إذا ارتفعت الحرارة 20°C. باعتبار المسند الأيسر مبدأً للإحداثيات، تكون معادلة القوس المكافئ

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2} = \frac{4 \times 5 \times x \times (L-x)}{50^2} = \frac{x(50-x)}{125}$$

$$\int_0^{50} y^2 ds = \int_0^{50} \frac{x^2(50-x)^2}{125^2} = \frac{1}{125^2}\int_0^{50} \left(2500x^2 - 100x^3 + x^4\right) dx$$

$$= \frac{1}{125^2}\left[2500\frac{x^3}{3} - 100\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{50} = 666.67$$

عزم الكمرة هو $M_o = 25x$:

$$\int_0^L M_o y \frac{dx}{EI} = 2\int_0^{25} 25x \frac{x}{125}(50-x)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{2}{5EI}\int_0^{25} \left(50x^2 - x^3\right) dx = \frac{2}{5EI}\left[50\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{25} = \frac{65,104.17}{EI}$$

لدينا $EI = 200 \times 10^6 \times 8 \times 10^9 \times 10^{-12} = 1,600,000 \text{kNm}^2$. وبالتعويض في المعادلة 31.54 نحصل على

$$H = \frac{\frac{65,104.17}{1,600,000} + 25 \times 20 \times 10^{-6} \times 20}{\frac{666.67}{1,600,000} + 0.0002} = 92.43\text{kN}$$

31.4 الكمرات المنحنية

74 استُلهمت مسائل هذا القسم من المسائل الواردة في Basic Structural Analysis, Gerstle, 1974.

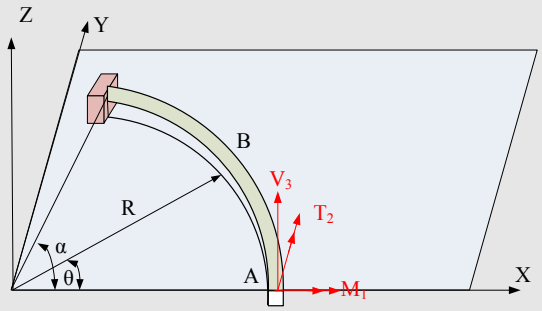
31.4.1 جائز قوسي

75 الجائز القوسي كمرة مستوية منحنية محمّلة عمودياً على مستواها، فتخضع للقص والعزم والالتواء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

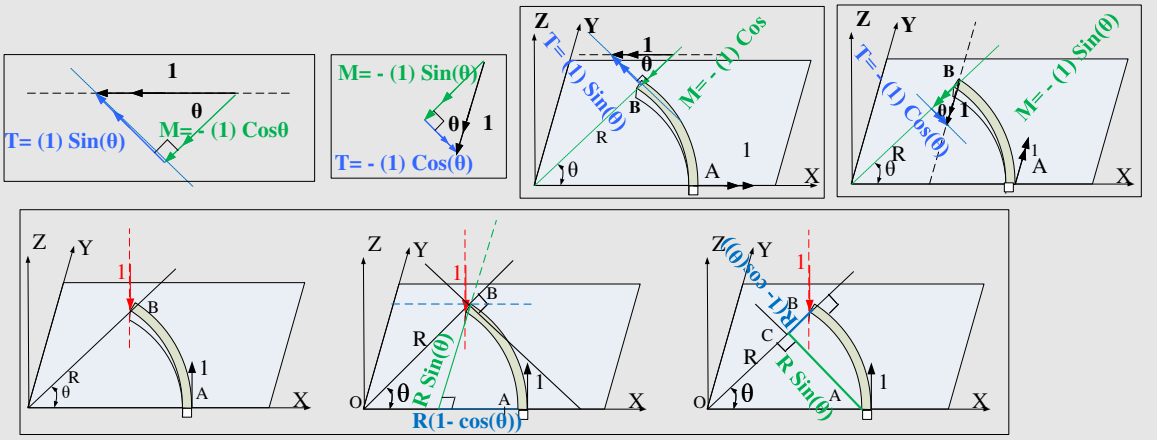
31.4.1.1 مثال 31.10: جائز قوسي

نريد اشتقاق مصفوفة المرونة لجائز صندوقي دائري نصف قطره R وزاويته α. يُثبت القوس عند أحد طرفيه ويُترك الطرف الآخر حراً؛ لاحظ التشابه مع المسألة السابقة.



يمكن استخراج العزوم وعزوم الالتواء الناتجة من عزم خارجي واحد أو عزم التواء واحد مطبق عند A مباشرةً من الهندسة. أما للقوة الخارجية الواحدة عند A فيلزم تحديد ذراعي العزم هندسياً. ينبغي استعمال الشكل الأيمن؛ فالأيسر غير صحيح رغم أنه يعطي النتائج الصحيحة.

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$



درجة الحرية:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	$1=M_A$	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	1-
$M_i(\theta)$	$\cos\theta$-	$-\sin\theta$	$\sin(\theta)$R-
$T_i(\theta)$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

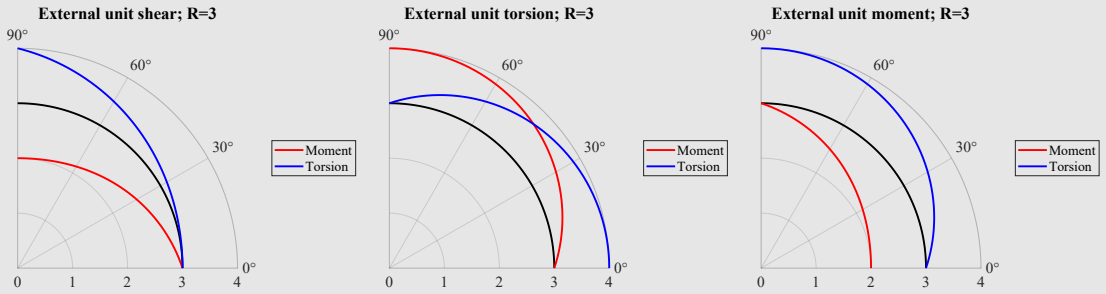
نستعمل بعد ذلك

$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

حيث $1 \le i,j \le 3$، أي نعمل على الصفين 2 أو4. ومن ثم، مع ملاحظة أن إشارات d_{x3} تغيرت وأن نتائج التكامل قد تحتاج إلى تدقيق:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ونلاحظ ما يأتي:

	المؤثر الخارجي الواحد					
	عزم		التواء		قوة	
القوة الداخلية	البداية	النهاية	البداية	النهاية	البداية	النهاية
العزم	1	0	0	1	0	1
الالتواء	0	1	1	0	0	1

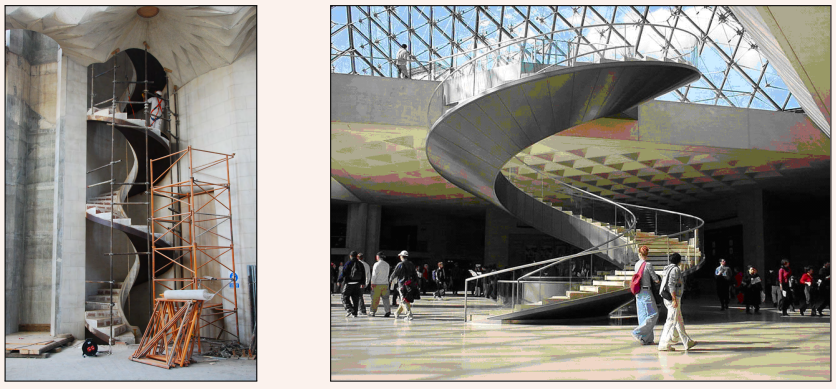
31.4.2 المنشآت الحلزونية

مقتبس من Basic Structural Analysis Gerstle, 1974.

31.4.2.1 الهندسة

76 لأن هندسة المنشآت الفراغية، الشكل 31.9، قد تكون معقدة، فلا بد من استعمال التحليل المتجهي[2] لتحديد القوى الداخلية.

77 توجد عموماً ستة محصلات داخلية، قوى وعزوم، تؤثر عند أي مقطع.

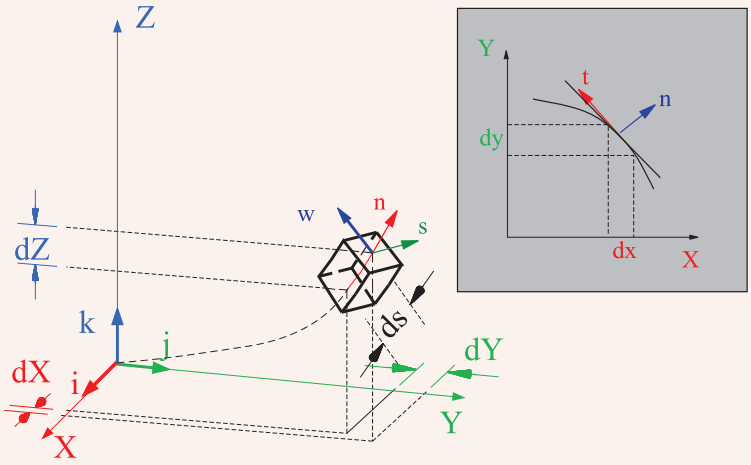


شكل 31.9: السلم الحلزوني في متحف اللوفر بباريس وكاتدرائية ساغرادا فاميليا في برشلونة

[2] سبق تقديمه في مرحلة مبكرة، لكنه لم يُستعمل كثيراً حتى الآن في الميكانيكا.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$x = f_1(\theta); \qquad y = f_2(\theta); \qquad z = f_3(\theta) \tag{31.55}$$



شكل 31.10: هندسة منشأ منحني في الفراغ

78 يرمز إلى نظام الإحداثيات العام بـ$X-Y-Z$، وإلى متجهاته الوحدية[3] بـ$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$. نقطع المقطع المطلوب تحديد قواه الداخلية، ونعرّف المحاور *الرئيسة* $N-S-W$، المناظرة للقوة العادية ومحوري الانحناء القوي والضعيف. ومتجهاتها الوحدية هي $\mathbf{n},\mathbf{s},\mathbf{w}$، الشكل 31.10.

79 يُعطى متجه الوحدة العادي، المماس للمنحنى عند أي مقطع، بـ

$$\mathbf{n} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{ds} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}} \tag{31.56}$$

80 يجب تعريف محوري الانحناء الرئيسين. فإذا كان محور الانحناء القوي موازياً للمستوى XY، أي أفقياً كما في أحمال الجاذبية عادةً، فإنه عمودي على المحورين N وZ، ومتجه وحدته هو

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}\times\mathbf{k} \tag{31.57}$$

81 محور الانحناء الضعيف عمودي على كل من N وS، ولذلك يُحدد متجه وحدته من

$$\mathbf{w} = \mathbf{n}\times\mathbf{s} \tag{31.58}$$

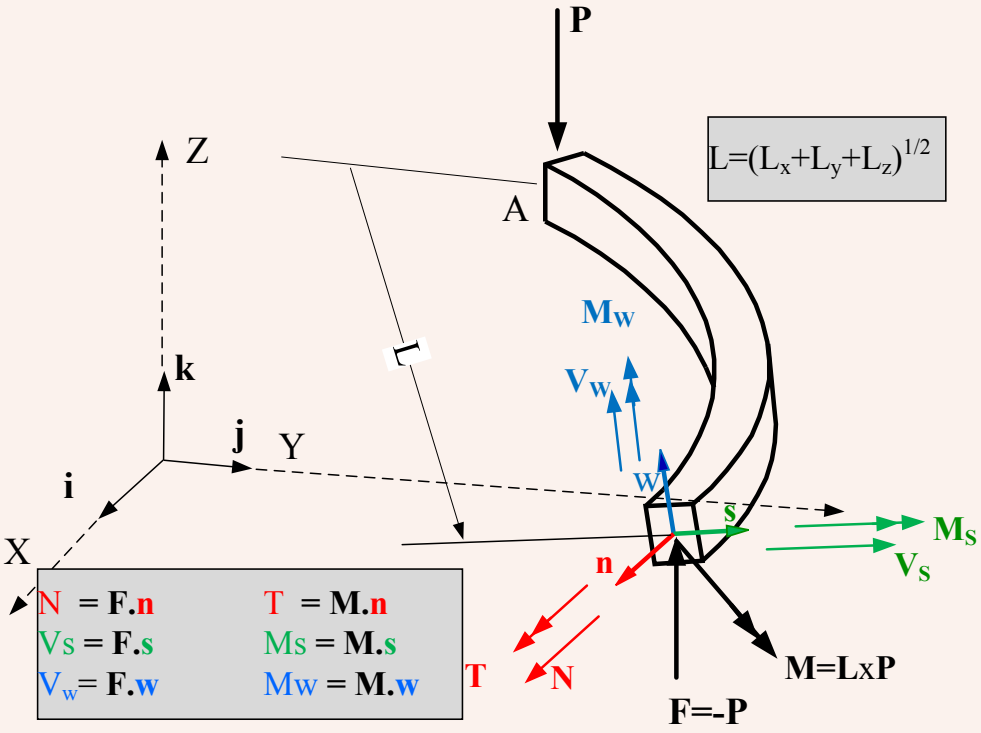
لاحظ أن كلاً من $\mathbf{n}$ و$\mathbf{s}$ أصبح متجه وحدة.

31.4.2.2 الاتزان

82 لكتابة معادلات الاتزان نعتبر مخطط الجسم الحر في الشكل 31.11.

[3] يُرمز إلى جميع الكميات المتجهية بحرف عريض.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 31.11: مخطط الجسم الحر لمنشأ منحني في الفراغ

83 يؤثر الحمل **P** عند النقطة A. ويُحدد متجه القوة المحصلة **F** ومتجه العزم المحصل **M** المؤثران في المقطع B من الاتزان:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P} \tag{31.59}$$

$$\Sigma\mathbf{M}^B = 0; \quad \mathbf{L}\times\mathbf{P} + \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}\times\mathbf{P} \tag{31.60}$$

حيث **L** متجه ذراع العزم من B إلى A. والقوى المحورية وقوتا القص N, V_s, V_w هي مركبات متجه القوة **F** على المحاور N, S, W، وتُستخرج بالضرب القياسي في متجهات الوحدة المناسبة:

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}$$

84 وبالمثل، عزوم الالتواء والانحناء T, M_s, M_w هي مركبات متجه العزم **M**، وتُحدد من

$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s}$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w}$$

85 وهكذا تتوفر طريقة لتحديد القوى الداخلية: نجمع في حالة الأحمال المركزة، ونكامل في حالة الأحمال الموزعة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31.4.2.2.1 مثال 31.11: قوس حلزوني؛ حمل نقطي

نريد تحديد القوى الداخلية N, V_s, V_w والعزوم الداخلية T, M_s, M_w على امتداد جائز حلزوني كابولي تحت حمل رأسي P عند طرفه الحر. نحدد أولاً الهندسة بدلالة الزاوية θ:

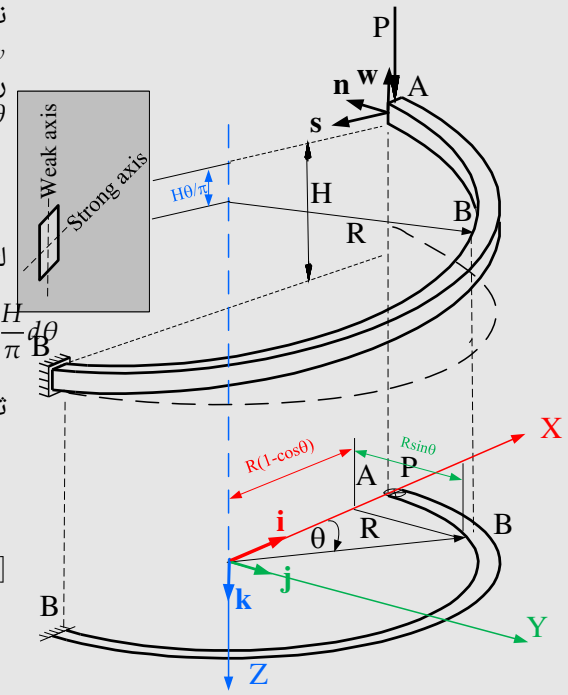
$$x = R\cos\theta; \qquad y = R\sin\theta; \qquad z = \frac{H}{\pi}\theta \tag{31.61}$$

لتحديد متجه الوحدة $\mathbf{n}$ عند أي نقطة نحتاج إلى المشتقات:

$$dx = -R\sin\theta d\theta; \qquad dy = R\cos\theta d\theta; \qquad dz = \frac{H}{\pi}d\theta \tag{31.62}$$

ثم نعوض في المعادلة 31.56:

$$\mathbf{n} = \frac{-R\sin\theta\mathbf{i} + R\cos\theta\mathbf{j} + H/\pi\mathbf{k}}{\left[R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + (H/\pi)^2\right]^{1/2}} = \underbrace{\frac{1}{\left[1 + (H/\pi R)^2\right]^{1/2}}}_{K}[-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} + (H/\pi R)\mathbf{k}]$$



بما أن المقام يعتمد على الهندسة وحدها، نرمز إليه بـ K.

يقع محور الانحناء القوي في مستوى أفقي، ولذلك يمكن تحديد متجه وحدته من المعادلة 31.57:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{31.63}$$

$$= \frac{1}{K}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{31.64}$$

والمقدار المطلق لهذا المتجه $|\mathbf{k}\times\mathbf{n}| = \frac{1}{K}$، ومن ثم

$$\mathbf{s} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \tag{31.65}$$

يُحدد متجه الوحدة على المحور الضعيف من المعادلة 31.58:

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}\times\mathbf{n} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{K}\left(\frac{H}{\pi R}\sin\theta\mathbf{i} - \frac{H}{\pi R}\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

بعد إتمام تعريف الهندسة، ندرس معادلتي الاتزان 31.59 و31.60.

$$\Sigma F = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$
$$\Sigma M_b = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}\times\mathbf{P}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث

$$\mathbf{L} = (R - R\cos\theta)\mathbf{i} + (0 - R\sin\theta)\mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi}H\right)\mathbf{k} \tag{31.66}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \mathbf{L}\times\mathbf{P} &= R\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (1-\cos\theta) & -\sin\theta & -\frac{\theta}{\pi}\frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} \\ &= PR[-\sin\theta\mathbf{i} - (1-\cos\theta)\mathbf{j}]\end{aligned}$$

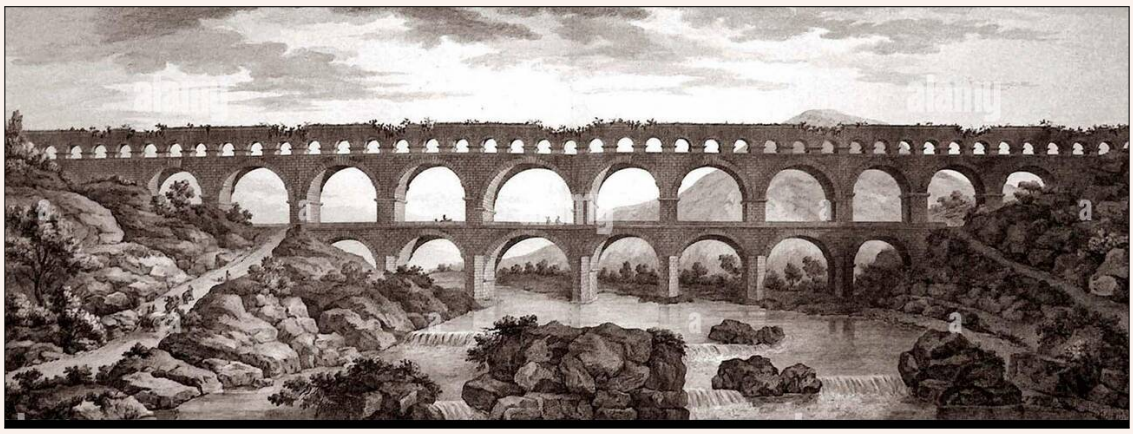
وكذلك

$$\mathbf{M} = PR[\sin\theta\mathbf{i} + (1-\cos\theta)\mathbf{j}] \tag{31.67}$$

تُستخرج مركبات القوة $\mathbf{F} = -P\mathbf{k}$ والعزم $\mathbf{M}$ بإجراء الضرب القياسي المناسب مع متجهات الوحدة:

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{K}P\frac{H}{\pi R} \\ V_s &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = 0 \\ V_w &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{K}P \\ T &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} = -\frac{PR}{K}(1-\cos\theta) \\ M_s &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{s} = PR\sin\theta \\ M_w &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{w} = \frac{PH}{\pi K}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



جسر بون دو غار، القرن الأول الميلادي، نيم، فرنسا.

مثال على بناء الأقواس، حيث ينقل الترتيب الدقيق للصنجات الأحمال بكفاءة ويضمن الاستقرار وتوزيع الدفع في منشأ متعدد الطبقات.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

32 البلاطات

ملخص

ينقل هذا الفصل اهتمام الكتاب من العناصر أحادية البعد إلى البلاطات، ويشتق المعادلات التفاضلية التي تحكمها. ومن خلال التركيز على النظرية، نهدف إلى مساعدة القارئ على إدراك التعقيد الهندسي للبلاطات، إلى جانب جمال وبساطة معادلاتها الحاكمة. وتُعد قراءة هذا الفصل أساسية لكل من يرغب في نمذجة البلاطات بطريقة العناصر المحددة، إذ يوضح التفاعل بين محصلات القوى الداخلية المعقدة فيها.

32.1 نظرية البلاطات السميكة: رايسنر–ميندلن 1075
32.1.1 العلاقات الحركية 1075
32.1.2 العلاقات التأسيسية 1077
32.1.3 الاتزان 1078
32.2 نظرية البلاطات الرقيقة: كيرشهوف 1080
32.2.1 العلاقات الأساسية 1081
32.2.2 المعادلة التفاضلية 1082
32.2.3 الإجهادات 1082
32.2.4 البلاطات الدائرية 1086
32.2.5 الصياغة التغايرية 1090
32.3 الخلاصة 1091

للسياق التاريخي، انظر §10.3.2.5

أُعيد عرض القسم الآتي بالاستناد إلى Pilkey **and** Wunderlich, 1994 Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods. ونتقدم بالشكر إلى Georg, R., 2014 على مساعدته.

32.1 نظرية البلاطات السميكة: رايسنر–ميندلن

1 نبدأ بالحل العام لبلاطة سميكة تظهر فيها تشوهات القص.

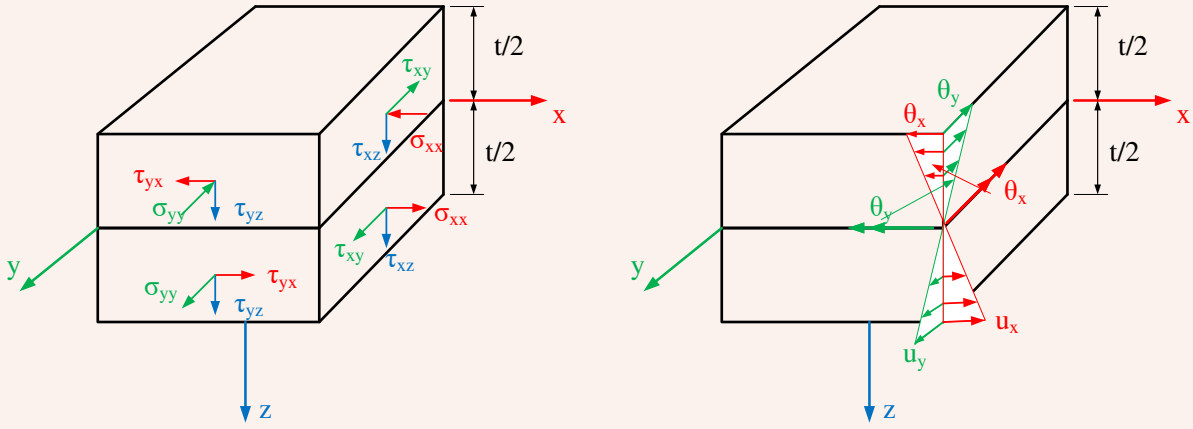
32.1.1 العلاقات الحركية

2 يبين الشكل 32.1a خمس درجات إزاحة هي u وv وw وθ_{xx} وθ_{yy}. ويمكن التعبير عن الإزاحتين u وv بدلالة الدورانين θ_{xx} وθ_{yy} للسطح الأوسط للبلاطة، في حين تمثل w الإزاحة المستعرضة.

3 سنستعمل ترميزاً متوافقاً مع الترميز التقليدي لانحناء البلاطات، بدلاً من ترميز يتبع اتجاهات الإحداثيات كما في العناصر المحددة. وبما أن الاهتمام منصب على البلاطات الرقيقة، نفترض بقاء السطح الأوسط من دون انفعال وبقاء المقاطع المستوية مستوية. ومن هذا الافتراض نحصل على

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ w \end{array} \right\} \tag{32.1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) الإزاحات (b) الإجهادات

شكل 32.1: الإزاحات والإجهادات في البلاطة

4 ومن مقاومة المواد نعرف العلاقة $\varepsilon = Lu$، أي

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

5 بما أن w تمثل الانحراف المستعرض للسطح الأوسط ولا تتغير مع z، فإن $\varepsilon_{zz} = 0$. وبالتعويض من المعادلة 32.1 نحصل على

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \hline \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\theta_{xx,x} \\ z\theta_{yy,y} \\ 0 \\ \hline z(\theta_{xx,y} + \theta_{yy,x}) \\ \hline (\theta_{xx} + w_{,x}) \\ (\theta_{yy} + w_{,y}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\kappa_{xx} \\ z\kappa_{yy} \\ 0 \\ \hline 2z\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} \tag{32.2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحظ أن هذه المعادلة تفترض أن الإزاحة w صغيرة مقارنة بسماكة البلاطة، وأن الدوران صغير. ولصغر الدوران يمكن إهمال مربعه قياساً إلى الواحد، ومن ثم يكون الانحناء

$$\kappa = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{(1+\theta^2)^{3/2}} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

مساوياً لمعدل تغير الدوران.

6 وعليه تكون العلاقة الحركية للإزاحة المستعرضة في البلاطة هي

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \hline 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\\ \hline w\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$$

32.1.2 العلاقات التأسيسية

7 في الوسط المتصل ثلاثي الأبعاد تكون علاقة الانفعال بالإجهاد

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \hline \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\} = \frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & \mathbf{0} & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 2(1+\nu) & 0 & 0\\ & \mathbf{0} & & 0 & 2(1+\nu) & 0\\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \hline \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}$$

8 غير أن المعادلة 32.2 تعطي $\varepsilon_{zz} = 0$. ولذلك يمكن إهمال σ_{zz} لصغره كثيراً عن بقية الإجهادات. وبعكس المعادلة السابقة نحصل على

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\\ \hline \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & \nu & 0 & & \\ \nu & 1 & 0 & & \mathbf{0}\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & \\ \hline & & & \frac{1-\nu}{2} & 0\\ & \mathbf{0} & & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{32.3}$$

حيث إن معامل القص هو $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

9 نكتب الآن العزوم بدلالة الانحناءات، كما في الشكل 32.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 بإدخال الإجهادات من المعادلة 32.3 في المعادلة 32.5، وباستعمال المعادلة 32.2، نشتق الحد الأول

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z \mathrm{d}z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}(z\kappa_{xx} + \nu z\kappa_{yy}) z \mathrm{d}z$$
$$= \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \mathrm{d}z = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy})$$

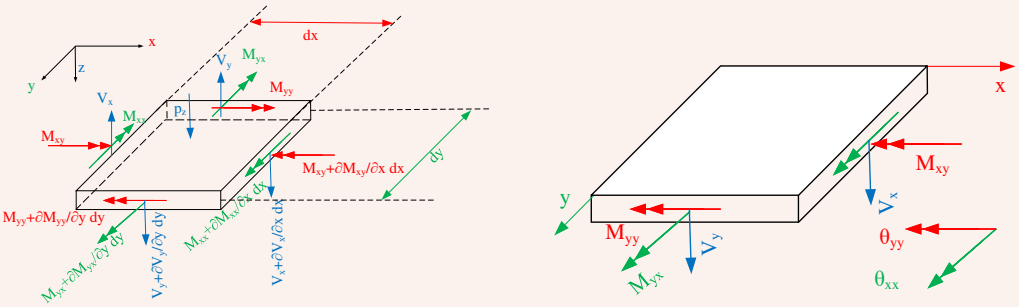
وباتباع الإجراء نفسه للحدين الآخرين نحصل على علاقة العزم–الانحناء الآتية

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{32.4}$$

يُسمى الحد $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ *الصلابة الانحنائية*، وهو نظير الصلابة الانحنائية EI للكمرة (فإذا كان عرض البلاطة وحدة واحدة و$\nu = 0$، كان $EI = Et^3/12$).

32.1.3 الاتزان

11 يبين الشكل 32.2a محصلات الإجهاد الموجبة، بينما يبين الشكل 32.4 مخطط الجسم الحر لعنصر متناهي الصغر.



(a) العزوم والدورانات الموجبة (b) مخطط الجسم الحر لبلاطة رقيقة

شكل 32.2: القوى الداخلية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12 تُعطى المحصلات لكل وحدة عرض بالعلاقات

$$\begin{aligned}
\text{قوى الغشاء} \qquad \mathbf{N} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}z \quad \begin{cases} N_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx}\,\mathrm{d}z \\ N_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy}\,\mathrm{d}z \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy}\,\mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{عزوم الانحناء} \qquad \mathbf{M} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z\,\mathrm{d}z \quad \begin{cases} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z\,\mathrm{d}z \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z\,\mathrm{d}z \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z\,\mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{قوى القص المستعرضة} \qquad \mathbf{V} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}z \quad \begin{cases} V_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz}\,\mathrm{d}z \\ V_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz}\,\mathrm{d}z \end{cases}
\end{aligned} \tag{32.5}$$

13 لاحظ أننا نهمل في نظرية البلاطات أثر قوى *الغشاء*، وسوف تؤخذ هذه القوى في الحسبان عند دراسة القشريات.

14 تُشتق معادلات الاتزان باعتبار عنصر متناهي الصغر $t\,dx\,dy$ خاضعاً لحمل مستعرض مطبق p_z. ويلزم النظر في معادلات الاتزان الثلاث الآتية، الشكل 32.4:

مجموع القوى في اتجاه z

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial V_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p_z = 0$$

مجموع العزوم حول محور x

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - V_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - V_y = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مجموع العزوم حول محور y

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - V_x = 0$$

15 بما أن $M_{xy} = M_{yx}$، يمكن كتابة هذه المعادلات في صورة مصفوفية كما يأتي

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ \hline M_{xy} \\ \hline V_x \\ V_y \end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p_z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{32.6}$$

لاحظ أن المصفوفة اليسرى تقابل L^T بعد استبدال الحد 1 بالحد -1.

32.2 نظرية البلاطات الرقيقة: كيرشهوف

16 نطبق في هذا القسم المعادلات المشتقة من العلاقات الأساسية على نظرية كيرشهوف للبلاطات.

17 تهمل هذه النظرية تشوهات القص المستعرضة، ومن ثم تبقى الزوايا القائمة في المقطع قائمة. وهذه الصياغة مماثلة لنظرية أويلر–برنولي التقليدية للكمرات[1].

32.2.0.1 مثال 32.1: تمثيل البلاطة الرقيقة مقارنة بالبلاطة السميكة

لبلاطتين خرسانيتين مربعتين طول الضلع نفسه $a = 1.0$ m، ومعامل يونغ $E = 25$ GPa، ونسبة بواسون $\nu = 0.20$. سماكة الأولى $t = 20$ mm، وسماكة الثانية $t = 150$ mm. حدد مدى ملاءمة نموذج كيرشهوف للبلاطات الرقيقة لكل حالة.

المؤشر الأول المفيد هو نسبة البحر إلى السماكة

$$\lambda = \frac{a}{t}.$$

للبلاطة الأولى،

$$\lambda_1 = \frac{1.0}{0.020} = 50.$$

وللبلاطة الثانية،

$$\lambda_2 = \frac{1.0}{0.150} = 6.67.$$

[1] تؤخذ تشوهات القص في الحسبان في صياغة ميندلن.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم،

$$\lambda_1 = 50, \qquad \boxed{\lambda_2 = 6.67}.$$

البلاطة الأولى نحيفة، ولذلك يكون افتراض كيرشهوف بإهمال تشوه القص المستعرض مناسباً عموماً. أما البلاطة الثانية فسميكة نسبياً، وقد يسهم تشوه القص المستعرض إسهاماً مهماً في الانحراف الكلي؛ لذا يكون نموذج رايسنر–ميندلن أنسب.

لا يغني هذا المثال عن دراسة تفصيلية للتقارب أو التحقق، لكنه يبين أن الفرق بين نظريتي كيرشهوف ورايسنر–ميندلن ليس شكلياً فحسب، بل تحكمه إلى حد كبير نحافة البلاطة هندسياً.

32.2.1 العلاقات الأساسية

العلاقات الحركية : بما أن تشوهات القص مهملة، فإن $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$، ومن ثم تختزل العلاقتان الأخيرتان في المعادلة 32.2 إلى

$$\theta_{xx} = -w_{,x} \quad \text{and} \quad \theta_{yy} = -w_{,y}$$

وتصبح الانفعالات الثلاثة الأولى

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{32.7}$$

أي

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{ w \}}_{\mathbf{u}} \tag{32.8}$$

[18] يمثل الحد الأخير في المعادلة السابقة *الالتواء* بالنسبة إلى محوري x وy للسطح الأوسط.

العلاقة التأسيسية : تظل العلاقة التأسيسية في المعادلة 32.4 صالحة

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{32.9}$$

الاتزان : تظل معادلة الاتزان المعبر عنها بالمعادلة 32.6 صالحة أيضاً. وبالتعويض بالعلاقتين الثانية والثالثة في الأولى نحصل على علاقة الاتزان الآتية بدلالة العزوم

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p_z = 0 \tag{32.10}$$

(لاحظ التشابه مع المعادلة المناظرة لانحناء الكمرة $\frac{d^2 M}{\mathrm{d}x^2} - V_x = 0$).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

32.2.2 المعادلة التفاضلية

18 بدمج معادلتي العلاقة الحركية والتأسيسية، 32.8 و32.9، نحصل على

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{array} \right\} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \{ \ w \ \} \tag{32.11}$$

19 وأخيراً نعوض معادلة الاتزان 32.10 في المعادلة السابقة،

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

أي

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

لاحظ التشابه مع المعادلة المناظرة للكمرات

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_z \ \text{ or } \ \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{p_z}{EI}$$

32.2.3 الإجهادات

20 بدمج علاقة الإجهاد–الانفعال في المعادلة 32.3 مع المعادلتين 32.7 و 32.11، يمكن التعبير عن الإجهادات بدلالة العزوم

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{xx}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{t^3}{12}} z$$

ونلاحظ مرة أخرى التناظر مع صيغة إجهاد الانحناء في الكمرات $\sigma = \frac{My}{I}$. وباستعمال معادلات الاتزان ثلاثية الأبعاد:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يؤدي تكامل المعادلة الأولى إلى

$$\tau_{xz} = -\int_{t/2}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z = \int_{z}^{t/2} \frac{12z}{t^3} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z$$
$$= \frac{12}{t^3} \int_{z}^{t/2} z V_x \mathrm{d}z$$

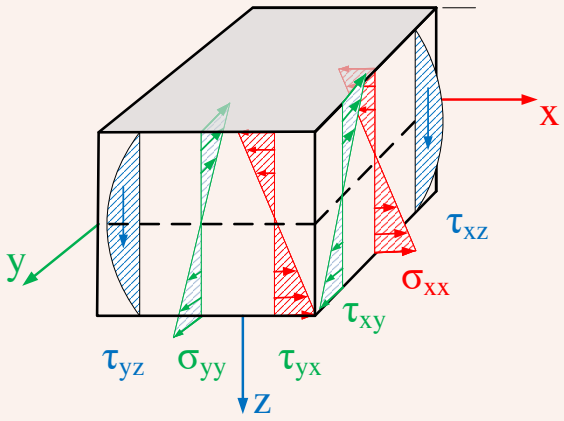
21 وأخيراً

$$\tau_{xz} = \frac{3V_x}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right] \quad \text{and} \quad \tau_{yz} = \frac{3V_y}{2t} \left[1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right]$$

22 ومن ثم يكون توزيع إجهاد القص عبر سماكة البلاطة قطعياً مكافئاً (مع أنه يكون صغيراً جداً عادة مقارنة بـτ_{xy})، وتقع قيم إجهاد القص العظمى عند السطح الأوسط ($z = 0$)، حيث

$$\tau_{xz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_x}{t} \quad \text{and} \quad \tau_{yz}|_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{t}$$

23 نلاحظ أن إجهادات الانحناء تتغير خطياً ابتداءً من السطح الأوسط؛ كما تتغير إجهادات القص τ_{xy} الناجمة عن الانحناء خطياً من السطح الأوسط؛ أما إجهادا القص τ_{yz} وτxz فهما موجودان وضروريان للاتزان، لكن يُفترض إهمال انفعاليهما المناظرين؛ ويتغير σ_{zz} تكعيبياً، الشكل 32.3.



شكل 32.3: توزيع الإجهادات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

32.2.3.1 مثال 32.2: استرجاع الإجهادات من محصلات عزوم البلاطة

عند نقطة في بلاطة، تكون محصلات عزوم الانحناء والالتواء

$$M_{xx} = 1.20\ \text{kN m/m}, \qquad M_{yy} = 0.80\ \text{kN m/m}, \qquad M_{xy} = 0.30\ \text{kN m/m}.$$

سماكة البلاطة $t = 25$ mm. قدّر إجهادات الألياف القصوى المرتبطة بهذه المحصلات.

في حالة التوزيع الخطي للإجهاد عبر السماكة، تكون الإجهادات العادية في الألياف القصوى المرتبطة بـM_{xx} وM_{yy}

$$\sigma_{xx} = \frac{6M_{xx}}{t^2}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{6M_{yy}}{t^2}.$$

وبالمثل تعطي محصلة عزم الالتواء إجهاد القص المناظر عند الألياف القصوى

$$\tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{t^2}.$$

باستعمال $t = 0.025$ m،

$$\sigma_{xx} = \frac{6(1200)}{(0.025)^2} = 11.52 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 11.5\ \text{MPa},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{6(800)}{(0.025)^2} = 7.68 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 7.68\ \text{MPa},$$

وكذلك

$$\tau_{xy} = \frac{6(300)}{(0.025)^2} = 2.88 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 2.88\ \text{MPa}.$$

وعليه،

$$\sigma_{xx} = 11.5\ \text{MPa}, \qquad \sigma_{yy} = 7.68\ \text{MPa}, \qquad \tau_{xy} = 2.88\ \text{MPa}.$$

يؤكد هذا المثال أن حل البلاطة يعطي محصلات الإجهادات، ولا تُسترجع الإجهادات الفعلية إلا بعد استعمال توزيع الإجهاد المفترض عبر السماكة.

32.2.3.2 مثال 32.3: بلاطة مربعة بسيطة الاستناد تحت ضغط منتظم

لبلاطة فولاذية مربعة بسيطة الاستناد طول ضلعها $a = 2.0$ m وسماكتها $t = 20$ mm، وتخضع لضغط مستعرض منتظم $q = 5$ kPa. ليكن

$$E = 200\ \text{GPa}, \qquad \nu = 0.30.$$

قدّر الانحراف الأقصى ورتبة مقدار إجهاد الانحناء الأقصى.

أولاً، صلابة البلاطة هي

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(200 \times 10^9)(0.020)^3}{12(1-0.30^2)} = 1.465 \times 10^5\ \text{N m}.$$

لبلاطة مربعة بسيطة الاستناد تحت حمل منتظم، يعطي معامل قياسي مجدول (عند $\nu = 0.30$)

$$w_{\max} = 0.00406 \frac{qa^4}{K}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مع $q = 5000\ \mathrm{N/m^2}$ و$a = 2.0\ \mathrm{m}$،

$$w_{\max} = 0.00406\frac{(5000)(2.0)^4}{1.465\times 10^5} = 2.22\times 10^{-3}\ \mathrm{m}. substituting$$

ومن ثم،

$$w_{\max} = 2.22\ \mathrm{mm}.$$

ولتقدير العزم الأقصى لكل وحدة عرض، نستعمل المعامل المجدول المناظر (عند $\nu = 0.30$)

$$M_{\max} \simeq 0.0479 q a^2.$$

وعليه،

$$M_{\max} \simeq 0.0479(5000)(2.0)^2 = 958\ \mathrm{N\,m/m}.$$

يكون إجهاد الانحناء المناظر عند الألياف القصوى تقريباً

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{6M_{\max}}{t^2} = \frac{6(958)}{(0.020)^2} = 14.4\times 10^6\ \mathrm{N/m^2}.$$

إذن،

$$\sigma_{\max} \simeq 14.4\ \mathrm{MPa}.$$

يوضح المثال الناتجين الرئيسيين لحل البلاطة: حقل الإزاحة، الذي يمثله هنا $w_{\max}$، ومحصلات العزوم التي يمكن منها استرجاع إجهادات الانحناء.

32.2.3.3 مثال 32.4: حساسية انحراف البلاطة للسماكة

لنعد إلى البلاطة المربعة بسيطة الاستناد ذات طول الضلع $a = 2.0\ \mathrm{m}$ والخاضعة لضغط منتظم $q = 5\ \mathrm{kPa}$. لنفترض أن السماكة زيدت من $t_1 = 20\ \mathrm{mm}$ إلى $t_2 = 30\ \mathrm{mm}$ مع بقاء المادة والحمل دون تغيير. قدّر النقص في الانحراف الأقصى.

لبلاطة رقيقة متساوية الخواص،

$$K = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}.$$

ومن ثم، إذا بقي E وν ثابتين،

$$K \propto t^3.$$

ولأن الانحراف يتناسب عكسياً مع صلابة البلاطة،

$$w \propto \frac{1}{K} \propto \frac{1}{t^3}.$$

إذن،

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{30}\right)^3 = 0.296.$$

إذا كان الانحراف الأقصى للبلاطة ذات السماكة $20\ \mathrm{mm}$ هو

$$w_1 = 2.22\ \mathrm{mm},$$

فإن الانحراف الأقصى للبلاطة ذات السماكة $30\ \mathrm{mm}$ هو

$$w_2 = 0.296(2.22) = 0.657\ \mathrm{mm}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وعليه،

$$w_2 \simeq 0.66\ \text{mm}.$$

أدت زيادة السماكة بنسبة 50 بالمئة إلى خفض الانحراف إلى نحو 30 بالمئة من قيمته السابقة. وهذه إحدى أهم النتائج العملية لاعتماد K تكعيبياً على t.

32.2.4 البلاطات الدائرية

24 تمثل *البلاطة الدائرية* حالة خاصة بالغة الأهمية من نظرية كيرشهوف. وتظهر البلاطات الدائرية في أغطية الخزانات والحواجز والألواح المحيطة بالفتحات الدائرية والأساسات وأغطية المناهل ومكونات أوعية الضغط. ولها أيضاً قيمة تعليمية؛ فعند وجود حمل وشروط حدية متناظرة محورياً، تختزل المعادلة ثنائية التوافق ذات البعدين المشتقة في المعادلة 32.10 إلى معادلة تفاضلية عادية في الإحداثي الشعاعي وحده، مما يتيح حلاً مغلق الصيغة.

25 اعتبر بلاطة دائرية مصمتة نصف قطرها a وسماكتها الثابتة t. نعتمد الإحداثيات القطبية، حيث r الإحداثي الشعاعي وθ الإحداثي المحيطي. في المسألة المتناظرة محورياً يعتمد الانحراف المستعرض على r وحده،

$$w = w(r),$$

وبما أنه لا يوجد تغير مع θ، تنعدم جميع المشتقات بالنسبة إليه. ولأن w دالة في متغير واحد فقط، نستعمل المشتقات الكلية بالنسبة إلى r. ولا تتغير الصلابة الانحنائية عن الحالة المستطيلة،

$$K = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}.$$

26 **الحركة.** الانحناءان غير الصفريين لبلاطة كيرشهوف متناظرة محورياً هما الانحناء الشعاعي والانحناء المحيطي (الحلقي)

$$\kappa_{rr} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}, \qquad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

وهما النظيران القطبيان لـκ_{xx} وκ_{yy} في المعادلة 32.8، ولهما إشارة سالبة بادئة مماثلة. يقيس الانحناء الشعاعي انحناء ليف شعاعي تماماً كما يفعل $-\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}x^2$ في بعد واحد. أما الانحناء الحلقي فهندسي محض؛ فحتى الانحراف المخروطي الذي يحقق $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}r^2 = 0$ يمدد الألياف المحيطية بسبب تغير نصف قطرها، ويلتقط الحد $-\frac{1}{r}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}r$ هذا الأثر بدقة. وينعدم انحناء الالتواء،

$$\kappa_{r\theta} = 0,$$

لعدم وجود تغير بالنسبة إلى θ.

27 **العلاقة التأسيسية.** بتخصيص قانون العزم–الانحناء في المعادلة 32.9 للانحناءات القطبية نحصل على محصلتي عزم الانحناء الشعاعي والحلقي لكل وحدة طول من الحافة،

$$M_{rr} = K(\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\theta\theta}), \qquad M_{\theta\theta} = K(\kappa_{\theta\theta} + \nu\kappa_{rr}),$$

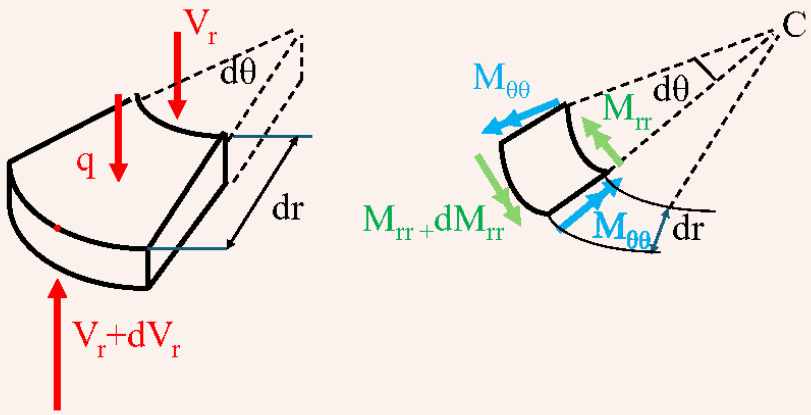
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو بدلالة الانحراف،

$$M_{rr} = -K\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right], \qquad M_{\theta\theta} = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right]. \tag{32.12}$$

يمثل M_{rr} عزم الانحناء الشعاعي، ويمثل $M_{\theta\theta}$ العزم المحيطي أو الحلقي؛ وهما النظيران في الإحداثيات القطبية لـM_{xx} وM_{yy} (المحصلتان لكل وحدة عرض في §32.1.3). لاحظ أن كلا العزمين غير صفري عموماً، مع أن w تعتمد على r وحده، لوجود كلا الانحناءين.

28 **الاتزان.** نحتاج إلى علاقتي اتزان. يربط اتزان العزوم لعنصر حلقي تحده الدائرتان ذواتا نصفي القطر r و$r + \mathrm{d}r$ والشعاعان θ و$\theta + \mathrm{d}\theta$ محصلة القص المستعرض الشعاعي V_r بالعزوم، الشكل 32.4.



شكل 32.4: اتزان عنصر متناهي الصغر من بلاطة دائرية

$$V_r = \frac{\mathrm{d}M_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r}. \tag{32.13}$$

الحد الأول هو النظير المباشر للعلاقة $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$ في نظرية الكمرات. أما الحد الثاني $(M_{rr} - M_{\theta\theta})/r$ فلا نظير أحادي البعد له؛ إذ ينشأ لأن وجهي العنصر الشعاعيين غير متوازيين بل يتقاربان نحو المركز، ولذلك يكون للعزم الحلقي $M_{\theta\theta}$ المؤثر عليهما مركبة صافية في اتزان العزوم الشعاعية. وبالتعويض من المعادلة 32.12 في 32.13 والتبسيط نحصل على الصورة المدمجة

$$V_r = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right] = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\nabla^2 w\right).$$

يتطلب الاتزان الرأسي للعنصر نفسه أن يعادل القص المستعرض الصافي الضغط المطبق. يؤثر القص على القوس الداخلي بطول $r\,\mathrm{d}\theta$ وعلى القوس الخارجي بطول $(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$؛ والفرق بينهما $\mathrm{d}(rV_r)\,\mathrm{d}\theta$، بينما يسهم الحمل بالمقدار $p_z\, r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$. وبالقسمة على $r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$،

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rV_r\right) + p_z = 0.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

29 **المعادلة الحاكمة.** بدمج المعادلتين 32.2.4 و32.2.4 نحصل على معادلة كيرشهوف للبلاطة المتناظرة محورياً

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right]\right\}=\frac{p_z}{K},$$

وهي ببساطة المعادلة ثنائية التوافق $\nabla^4 w = p_z/K$ في المعادلة 32.10 مكتوبة لحقل متناظر محورياً، حيث

$$\nabla^2 w=\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

30 **الشروط الحدية.** عند مركز بلاطة مصمتة يعطي الانتظام شرطين،

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0}=0, \qquad V_r(0)=0.$$

يمثل الأول تناظر الانحراف المحوري، وينص الثاني على عدم تطبيق قوة مركزة عند المركز. وعند الحافة $r=a$ تماثل الشروط المثالية شروط الكمرة:

حافة مثبتة: تُمنع الإزاحة والدوران معاً،

$$w(a)=0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a}=0.$$

حافة بسيطة الاستناد: تُمنع الإزاحة ويُسمح بالدوران،

$$w(a)=0, \qquad M_{rr}(a)=0.$$

حافة حرة: لا عزم ولا قص مستعرض،

$$M_{rr}(a)=0, \qquad V_r(a)=0.$$

31 **الضغط المنتظم.** في الحالة المهمة لضغط مستعرض منتظم ثابت $p_z = q =$ ثابت، يمكن تكامل المعادلة 32.2.4 مباشرة. الحل العام هو مجموع الحل المتجانس للمعادلة $\nabla^4 w = 0$ وحل خاص؛ ولحمل منتظم،

$$w(r)=\underbrace{C_1+C_2 r^2}_{\text{منتظم}}+\underbrace{C_3\ln r+C_4 r^2\ln r}_{=0\ \text{بسبب الانتظام عند}\ r=0}+\frac{q\,r^4}{64K}.$$

يولد الحدان اللوغاريتميان انحرافاً أو ميلاً أو قصاً غير محدود عند $r=0$ ورد فعل مركزياً مركزاً؛ ولذلك يُحذفان في البلاطة *المصمتة*، ويبقى $w = C_1 + C_2 r^2 + q r^4/64K$. (أما البلاطة الحلقية ذات الفتحة المركزية فتُبقى فيها هذه الحدود وتُحدد بشروط الحافة الداخلية.) ويُحدد الثابتان الباقيان من شروط الحافة.

32 *البلاطة المثبتة.* يؤدي فرض $w'(a)=0$ على $w' = 2C_2 r + q r^3/16K$ إلى $C_2 = -qa^2/32K$، ثم يعطي $w(a)=0$ القيمة $C_1 = qa^4/64K$. ومن ثم

$$w(r)=\frac{q}{64K}\left(a^2-r^2\right)^2,$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويقع الانحراف الأقصى عند المركز،

$$w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64K}.$$

وتُستخرج محصلات العزوم المناظرة من المعادلة 32.12،

$$M_{rr} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right], \qquad M_{\theta\theta} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right].$$

عند المركز يساوي كلا العزمين $q(1+\nu)a^2/16$، أما عند الحافة المثبتة

$$M_{rr}(a) = -\frac{qa^2}{8}.$$

يعكس تغير الإشارة الانتقال من انحناء موجب قرب وسط البلاطة إلى انحناء سالب عند الحافة المقيدة حيث يقع أكبر عزم.

33 *البلاطة بسيطة الاستناد.* بتطبيق $M_{rr}(a) = 0$ و$w(a) = 0$ على الحل المنتظم نفسه نحصل على

$$C_2 = -\frac{qa^2}{32K}\frac{3+\nu}{1+\nu}, \qquad C_1 = \frac{qa^4}{64K}\frac{5+\nu}{1+\nu},$$

ومن ثم

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left[r^4 - 2a^2\frac{3+\nu}{1+\nu}r^2 + a^4\frac{5+\nu}{1+\nu}\right],$$

وكذلك

$$w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64K}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right).$$

يزيد هذا الانحراف على قيمة التثبيت في المعادلة 32.2.4 بالمعامل $(5+\nu)/(1+\nu)$، أي بنحو أربعة لأغلب قيم ν، كما هو متوقع لأن الحافة بسيطة الاستناد لا توفر تقييداً دورانياً.

34 تفيد هذه النتائج المغلقة الصيغة بوصفها حلولاً مرجعية للتحقق من الحلول العددية، ومنها صياغات العناصر المحددة للبلاطات التي ستناقش لاحقاً. كما توضح التفسير الفيزيائي لمحصلتي العزم الرئيسيتين؛ ففي البلاطة المستطيلة يصف M_{xx} وM_{yy} الانحناء حول المحاور الديكارتية، بينما يكون نظيراهما في البلاطة الدائرية المتناظرة محورياً العزم الشعاعي M_{rr} والعزم الحلقي $M_{\theta\theta}$، وكلاهما موجود حتى عندما يعتمد الانحراف على r وحده.

32.2.4.1 مثال 32.5: بلاطة دائرية مثبتة تحت ضغط منتظم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لبلاطة ألمنيوم دائرية نصف قطرها $a = 0.75$ m وسماكتها $t = 12$ mm. وهي مثبتة على حافتها وخاضعة لضغط مستعرض منتظم $q = 2$ kPa. ليكن

$$E = 70\ \text{GPa}, \qquad \nu = 0.33.$$

قدّر الانحراف الأقصى.

الصلابة الانحنائية، من المعادلة 32.2.4، هي

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(70\times 10^9)(0.012)^3}{12(1-0.33^2)} = 1.131\times 10^4\ \text{N m}.$$

لبلاطة دائرية مثبتة تحت ضغط منتظم، تعطي المعادلة 32.2.4 انحراف المركز،

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64K}.$$

مع $q = 2000\ \text{N/m}^2$ و$a = 0.75$ m،

$$w_{\max} = \frac{(2000)(0.75)^4}{64(1.131\times 10^4)} = 8.74\times 10^{-4}\ \text{m}.$$

ومن ثم،

$$w_{\max} = 0.874\ \text{mm}.$$

تتفق هذه القيمة الصغيرة مع افتراض البلاطة الرقيقة (الانحراف الصغير)، لأن الانحراف أقل بكثير من سماكة البلاطة،

$$\frac{w_{\max}}{t} = \frac{0.874}{12} = 0.073.$$

32.2.5 الصياغة التغايرية

35 قبل تقسيم المجال إلى عناصر محددة، نسعى إلى اشتقاق صياغة تغايرية للمسألة من العلاقات السابقة.

36 يُعطى العمل الافتراضي الداخلي بالعلاقة

$$\delta W_i = -\int_A \delta\varepsilon^T \sigma \mathrm{d}A = -\int_A \delta\kappa^T M \mathrm{d}A$$

حيث تُستخرج $M = D\kappa$ من المعادلة 32.9، وتُستخرج $\kappa = Lu$ من المعادلة 32.8.

37 وبأخذ العمل الافتراضي الخارجي في الحسبان، نحصل على

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = \underbrace{-\int_A \delta u^T (L^T D L) u \mathrm{d}A}_{} + \underbrace{\int_A \delta u^T p_v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} u^T p \mathrm{d}\Gamma}_{} = 0$$

حيث يحتوي p_v على الحمل المستعرض المطبق p_z، ويمثل p حمل الحافة p_s.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38 بالتعويض عن حدود L^TDL (المعادلة 32.8) نحصل على

$$K^e = L^TDL = \lfloor\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\ \rfloor \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= K \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]$$

39 وأخيراً، بملاحظة أن $u = w$، يصبح العمل الافتراضي

$$\delta W_e = -K\int_A \delta w \left(Lwp_z\right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$$

حيث $K = Et^3/12(1-\nu^2)$.

32.3 الخلاصة

يلخص الجدول 32.1 بعض المعادلات الرئيسة الحاكمة لانحناء البلاطات، ويقارنها بنظيراتها في المرونة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 32.1: مقارنة المعادلات الحاكمة في المرونة وانحناء البلاطات (Pilkey **and** Wunderlich, 1994)

نظرية البلاطات (كيرشهوف)	**المرونة**
العلاقات الحركية	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{\ w\ \}}_{\mathbf{u}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \hline \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \hline \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_f} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\theta}}; \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_s} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}w\\ \theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$	
الاتزان	
$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \rho\underbrace{\left\{\begin{array}{c}b_x\\ b_y\\ b_z\end{array}\right\}}_{\rho\mathbf{b}} = 0$
$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc\|cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T=\lfloor\ \mathbf{L}_f^T\quad \mathbf{L}_s^T\ \rfloor} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$	
العلاقات التأسيسية	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = K\underbrace{\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}1 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & 1 & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & \beta & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c\|c}K\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right] & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \zeta\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$	$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \beta = \frac{\nu}{1-\nu}; \gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$
$\zeta = \frac{5}{6}\mu t \qquad ; K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	
العمل الافتراضي	
$\delta W = -\int_A \delta w\left(KL w p_z\right)\mathrm{d}A + \int_{\Gamma p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$	$\delta\Pi = \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma = 0$
$\delta W = -K\left[\int_A \delta\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{K}_f^e\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}A + \frac{6k_s(1-\nu)}{t^2}\int_A \delta\mathbf{u}^T\mathbf{K}_s^e\mathbf{u}\mathrm{d}A\right] + \int_A \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}_V\mathrm{d}A + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}\mathrm{d}\Gamma = 0$	

بعد أن استعرضنا بصورة كاملة اشتقاق معادلات الكمرة والبلاطة الخاضعتين للانحناء، يمكننا الانتقال خطوة أخرى في الصعوبة والبدء بمناقشة القشريات الرقيقة.



المتحف الوطني الجديد، لودفيغ ميس فان دير روه، 1968، برلين، ألمانيا

مثال بارز على المنشآت البلاطية، إذ تعمل بلاطة السقف الكبيرة المسطحة كبلاطة إنشائية تمتد فوق فضاء داخلي واسع بأقل قدر من المساند.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33 القشريات

ملخص

ينقسم هذا الفصل إلى قسمين رئيسيين. يبدأ الأول باشتقاق معادلات الاتزان والتوافق الحاكمة لعنصر قشري عام باستعمال الهندسة التفاضلية، ثم يخصص هذه المعادلات للقشريات الضحلة، وأخيراً يقدم تبسيط نظرية الغشاء.

ثم تُطبق هذه المعادلات على قشرة أسطوانية دائرية، إما بسيطة الاستناد على حواجز طرفية أو مستندة إلى كمرات حافية.

من المؤسف أن تحليل القشريات نادراً ما يُدرّس اليوم في برامج الدراسات العليا، إن دُرّس أصلاً. وبدلاً منه يتلقى الطلبة مقرراً مختصراً في البلاطات والقشريات، غالباً مع تركيز كبير على استعمال طريقة العناصر المحددة.

وأرى أن على المهندس الإنشائي المقبل على تصميم قشرة، مع وجود الحاسوب الدائم، أن يتعرف أولاً إلى الميكانيكا الأساسية كي يطور الفهم الكافي والضروري لتفسير نتائج العناصر المحددة تفسيراً صحيحاً.

وأخيراً، ربما يكون هذا الفصل أكثر فصول الكتاب أناقة، إذ يجمع الهندسة التفاضلية والتفاضل والتكامل والميكانيكا والرياضيات المتقدمة نسبياً، ويفضي إلى فهم منشآت مدهشة حقاً مثل منشآت نيرفي وتورّوخا (الفصل 15).

33.1 النظرية العامة 1094
33.1.1 التعريفات 1094
33.1.2 الافتراضات 1097
33.1.3 علاقات القوة–الإزاحة 1099
33.1.4 التبسيطات 1116
33.2 تحليل قشرة برميلية مفردة (قشرة أسطوانية دائرية) 1124
33.2.1 مقدمة 1124
33.2.2 نظرية الغشاء 1125
33.2.3 نظرية القشريات الضحلة 1134
33.3 القشريات غير المحددة استاتيكياً 1148
33.3.1 الكمرة الحافية 1148
33.3.2 الكمرة الحافية سابقة الإجهاد . . . 1152
33.3.3 شفرة MATLAB® ومثال عددي 1163

أُعيد عرض القسم الآتي بالاستناد إلى كتاب *Thin Shell Concrete Structures*[a] من تأليف Billington, 1965، وإلى مذكراتي لمحاضرات مقرر الأستاذ ريتشارد غالاغر في جامعة كورنيل. ونتقدم بالشكر إلى Georg, R., 2014 على مساعدته.

[a] مع أن الكتاب لا يقدم طريقة تحليلية جديدة، فإنه يعرض بأسلوب أنيق ومقروء الطرق التي بدأها Love, 1927 ووسعتها لاحقاً «المدرسة الألمانية» (ويلخصها خير تلخيص Flügge, 1973)، مع إيضاحات ورسوم كثيرة وتكييف للترميز الحديث. أما معالجة Timoshenko, Woinowsky-Krieger **andothers**, 1959 فمحدودة على نحو قد لا يبدو واضحاً للوهلة الأولى.

33.1 النظرية العامة

33.1.1 التعريفات

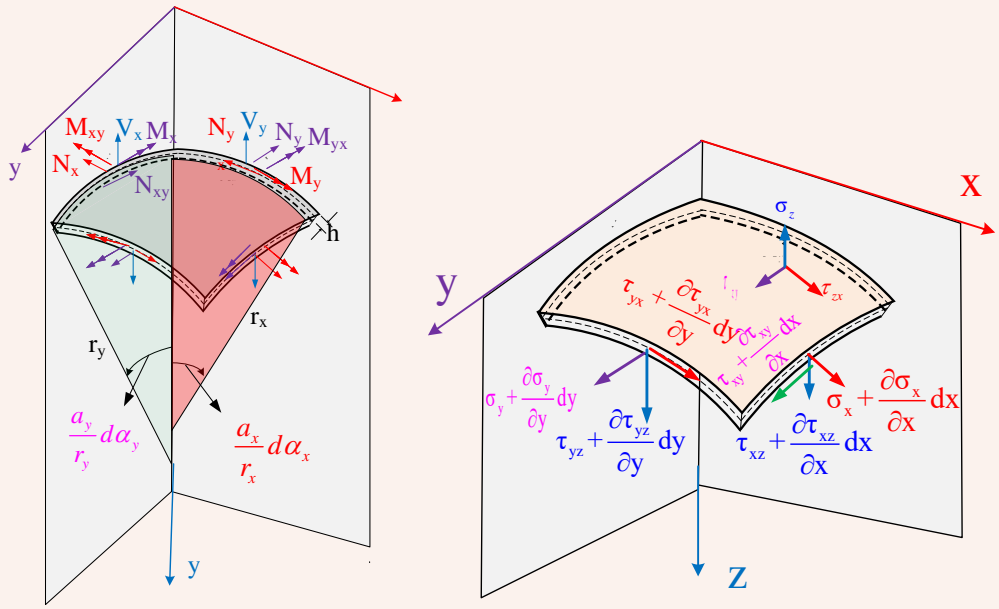
1 القشرة الرقيقة سطح أو بلاطة منحنية تكون سماكتها h صغيرة مقارنة بأبعاد المنشأ القشري ونصفي انحنائه r_x و r_y.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2 يُسمى السطح الذي ينصف سماكة القشرة *السطح الأوسط*، ويحدد شكل هذا السطح وسماكة القشرة عند كل نقطة هندسة القشرة تحديداً كاملاً.

3 تُكامل محصلات *الإجهاد* ومزدوجات *الإجهاد* عبر سماكة القشرة، وتُعرّف بأنها القوى والعزوم الكلية المؤثرة لكل وحدة طول عند السطح الأوسط.

4 يبين الشكل 33.1a الإجهادات، ويبين الشكل 33.1b محصلات الإجهاد ومزدوجاته، ولا سيما على الحافة الواقعة على محور y.



(b) الهندسة والقوى الداخلية (a) الإجهادات الداخلية

شكل 33.1: عنصر قشري تفاضلي وهندسته وإجهاداته ومحصلاتها

5 من الاتزان نحصل على

$$\underbrace{N_x r_y d\alpha_y}_{\text{القوة المحصلة على المحور المتعادل}} = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x (r_y - z) d\alpha_y dz}_{\text{القوة الداخلية}} \tag{33.1}$$

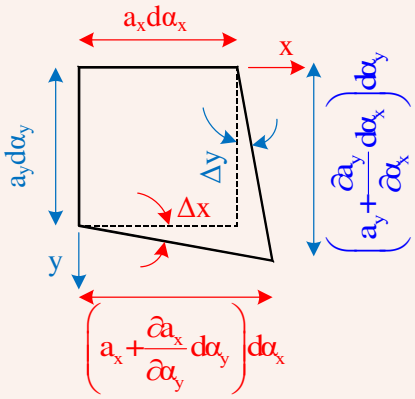
6 بقسمة الطرفين على $r_y d\alpha_y$ نحصل على قوة الغشاء المؤثرة على محور x

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \tag{33.2}$$

7 يبين الشكل 33.2 تشوه العنصر. ويمكن تصور a_x وa_y كنصفي انحناء، و$d\alpha_x$ و$d\alpha_y$ كزاويتين صغيرتين؛

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكن الأدق أن الحدين الأخيرين معاملا عائلتي المنحنيات اللتين تحددان أضلاع العنصر، وأن a_x وa_y معاملان يحولان هذين المعاملين إلى أطوال.



شكل 33.2: حركة العنصر التفاضلي

8 تُعطى محصلات الإجهاد ومزدوجاته، الشكل 33.1a، بالعلاقات الآتية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قوى الغشاء

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}\left(1-\frac{z}{r}\right)dz \qquad \begin{cases} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \end{cases}$$

عزوم الانحناء

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z\left(1-\frac{z}{r}\right)dz \qquad \begin{cases} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \\ M_{xy} &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ M_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \end{cases} \tag{33.3}$$

قوى القص المستعرضة

$$\mathbf{V} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau}\left(1-\frac{z}{r}\right)dz \qquad \begin{cases} \cancelto{0}{V_x} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz}\left(1-\frac{z}{r_y}\right)dz \\ \cancelto{0}{V_y} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz}\left(1-\frac{z}{r_x}\right)dz \end{cases}$$

9 يبين الشكل 33.3 متجهات محصلات الإجهاد ومزدوجاته.

10 يتبع اشتقاق محصلات الإجهاد ومزدوجاته الصياغة نفسها المستعملة لقوة الغشاء N_{xx} في المعادلة 33.2.

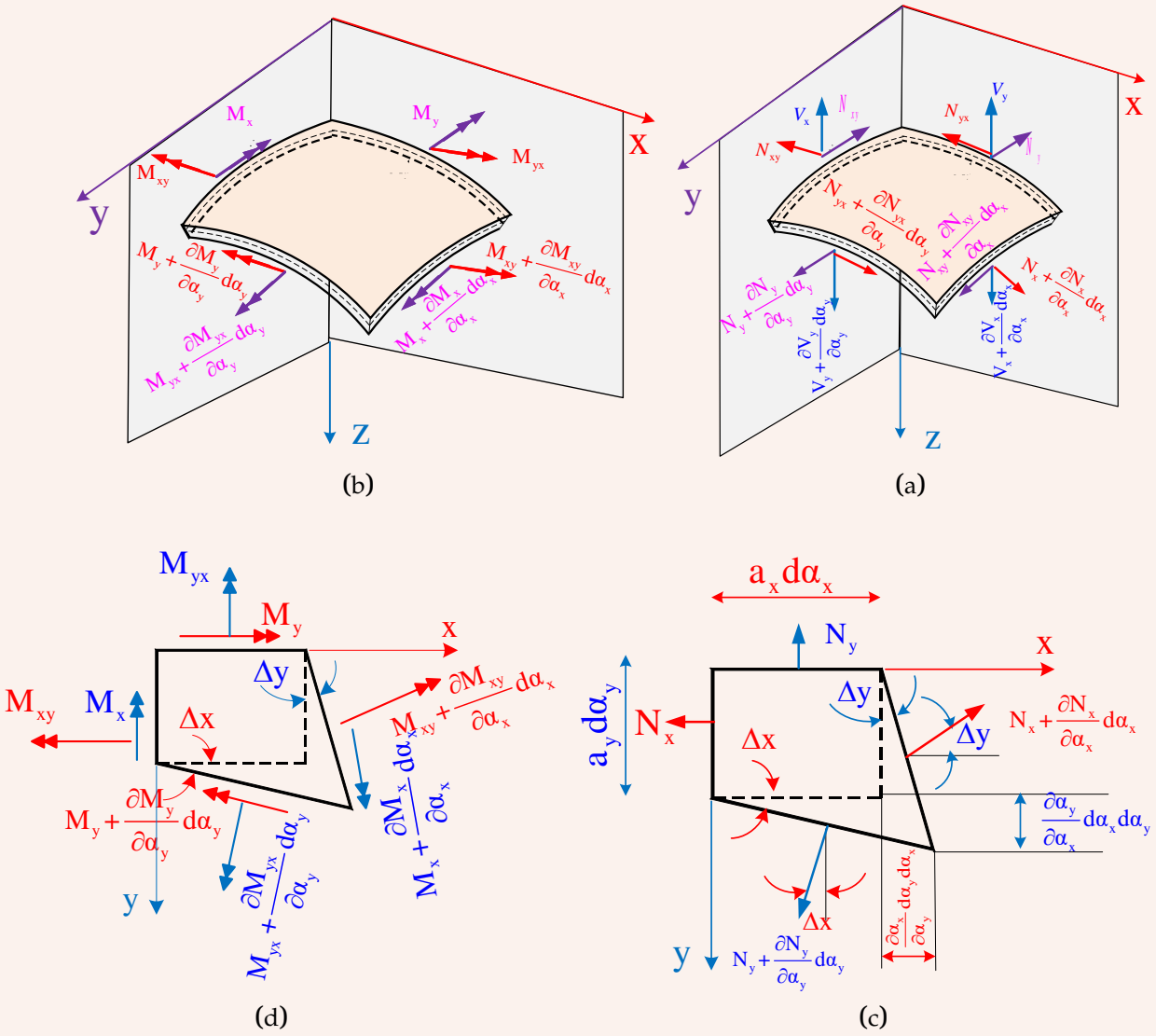
33.1.2 الافتراضات

11 لأغراض التبسيط نعتمد عدداً من الافتراضات:

القشرة الرقيقة: إذا أُهمل الحدان z/r_x وz/r_y عندما يظهران مع الواحد، ومع $\tau_{xy} = \tau_{yx}$، فإن

$$N_{xy} = N_{yx}$$
$$M_{xy} = -M_{yx}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.3: اتزان عنصر قشري تفاضلي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

كذلك يُهمل σ_z لأن أثره في الانفعالين ε_x وε_y صغير جداً.

الانحراف الصغير: لا تؤثر التغيرات الهندسية في الاتزان السكوني.

السلوك المرن الخطي: علاقات خطية بين الإجهاد والانفعال (أو بين العزم والانحناء).

النظام المحافظ: تبقى النقاط الواقعة على خطوط عمودية على السطح الأوسط قبل التشوه على خطوط عمودية عليه بعد التشوه[1].

إهمال تشوهات القص: لا يؤخذ القصان الشعاعيان V_x وV_y في الحسبان[2].

33.1.3 علاقات القوة–الإزاحة

12 يجب أن يحقق كل حل في الميكانيكا الإنشائية ثلاثة متطلبات أساسية:

الاتزان للقوى المعممة؛

التوافق بين الانفعالات والإزاحات؛

علاقات الإجهاد–الانفعال [3]

تمكننا هذه المتطلبات، مع التعريفات والافتراضات التمهيدية، من اشتقاق نظرية عامة للقشريات عبر الخطوات المتتابعة الآتية، الجدول 33.1:

1. تحديد *اتزان* القوى والعزوم على عنصر تفاضلي (5 معادلات و8 مجاهيل).

   نهمل عادة في نظرية القشريات M_z لأن τ_{xz} و τ_{yz} مهملان. لذا يجب تحقيق معادلات الاتزان الخمس، المعادلة 33.3، بدلالة ثماني قوى معممة.
2. إنشاء علاقات *التوافق* (الانفعال–الإزاحة) (6 معادلات و3 مجاهيل).
3. إنشاء علاقة *الإجهاد–الانفعال* بافتراض مجموعة من الخواص المرنة (3 معادلات و6 مجاهيل).
4. تحويل علاقات القوة–الانفعال إلى معادلات *القوة–الإزاحة* (6 معادلات و3 مجاهيل).
5. الحصول على *صياغة كاملة* بدمج معادلات القوة–الإزاحة مع معادلات الاتزان (11 معادلة و11 مجهولاً).

33.1.3.1 الاتزان

13 بالرجوع إلى الشكل 33.3 نسعى إلى إنشاء معادلات الاتزان الخمس $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$، وسنبحث كل واحدة على حدة.

14 سننظر مجدداً في إسهام كل حد منفرداً، الجدول 33.2، ثم نجمع جميع المركبات لتكوين معادلة الاتزان الكاملة.

15 لا تسهم مزدوجات الإجهاد بمركبة قوة في اتجاه x. وتُحدد كل مركبة بضرب محصلة الإجهاد، الشكل 33.1a، في طول ضلع العنصر الذي تؤثر عليه.

[1] كما في الكمرات، تبقى المقاطع المستوية مستوية، وهو افتراض أويلر–برنولي.
[2] كما نهمل تشوه القص في الكمرات.
[3] تذكر أن تكامل الإجهادات يعطي القوى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 33.1: ملخص المعادلات والمجاهيل في القشريات الرقيقة

المتغيرات (المجهولة)	المعادلات
1) الاتزان (§33.1.3.1)	
8 قوى داخلية $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$	5 معادلات اتزان $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$
2) التوافق (§33.1.3.3)	
3 إزاحات u, v, w	6 انفعالات $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$
3) الإجهاد–الانفعال (§33.1.3.5)	
6 انفعالات $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	3 إجهادات $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$
4) القوة–الإزاحة (§33.1.3.6)	
3 إزاحات u, v, w	5 قوى $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$
5) الصياغة النهائية	
8 قوى و3 إزاحات $u, v, w, N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, M_{xy}$	5 معادلات اتزان و6 انفعالات $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$ $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$

جدول 33.2: الإسهامات المنفردة في معادلات اتزان القشريات الرقيقة

Forces	$N_x, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y, p_{ext}$
Moments	$M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, V_y$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$\Sigma F_x = 0$ **1/5**

16 يوضح الشكل 33.3c اختلافاً في هندسة العنصر التفاضلي. فلضلعَي العنصر المتقاطعين عند الأصل الطولان المنحنيان $a_x d\alpha_x$ و$a_y d\alpha_y$، بينما يزداد طولا الحافتين المقابلتين إلى $(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y})d\alpha_x$ و$(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x})d\alpha_y$.

إسهام N_x:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{N_x} &= -N_x a_y d\alpha_y + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial \alpha_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= N_x \frac{\partial \alpha_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + a_y \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y + \underbrace{\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y}_{\text{أثر من الرتبة الثانية}}\end{aligned}$$

وبجمع الحدين الأولين وحذف الثالث لأنه من الرتبة الثانية

$$\Sigma F_x^{N_x} = \frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{33.4}$$

إسهام N_y: نلاحظ أولاً أن N_y لا يؤثر عموماً عمودياً على محور x، بل بزاوية ما

$$\Delta_x = \frac{(\partial a_y / \partial \alpha_x) d\alpha_x d\alpha_y}{a_x d\alpha_x} = \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x}$$

ومن ثم تكون مركبة القوة الكلية في اتجاه x is $N_y a_x d\alpha_x$

$$\Sigma F_x^{N_y} = -N_y a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x} = -N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y$$

إسهام N_{xy}: أما N_{xy} فله أيضاً مركبة غير عمودية، وتُحدد على امتداد الزاوية Δ_y:

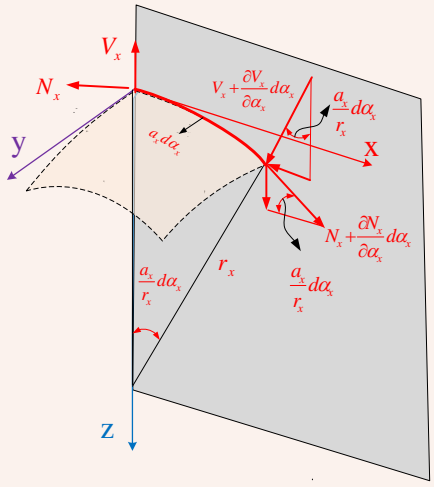
$$\Delta_y = \frac{(\partial a_x / \partial \alpha_y) d\alpha_y d\alpha_x}{a_y d\alpha_y} = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} \tag{33.5}$$

وتكون مركبة القوة الكلية $N_{xy} a_y d\alpha_y$

$$\Sigma F_x^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} = N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{33.6}$$

إسهام N_{yx}: يماثل إسهام N_x، المعادلة 33.4

$$\Sigma F_x^{N_{yx}} = -N_{yx} a_x d\alpha_x + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \quad = \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_x d\alpha_y \tag{33.7}$$



شكل 33.4: عنصر قشري تفاضلي، محصلة الإجهاد V_x

إسهام V_x: المركبة الأفقية للقوة الكلية على الجانب المائل، الشكل 33.4، هي

$$\Sigma F_x^{V_x} = -\left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$$

حيث $d\alpha_x \simeq \sin d\alpha_x$. ونلاحظ أن V_x لا يملك مركبة في اتجاه x على الجانب السالب. وبإهمال حدود الرتب العليا تختزل العلاقة إلى

$$\Sigma F_x^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x \tag{33.8}$$

إسهام V_y: لا تسهم محصلة الإجهاد في الاتزان في اتجاه x إلا إذا لم يكن a_x وa_y نصفي الانحناء الرئيسيين. يبين الشكل 33.5 العنصر التفاضلي ذا الانحناءات، التي تؤدي إلى مسافة كلية $z_x+z_y+z_{xy}$ عند الركن المقابل إلى الأصل، كما هو مبين. وينشأ z_x وz_y من الميلين $\partial z/\partial \alpha_x$ and $\partial z/\partial \alpha_y$. ينتج عن تغير الميل

$$z_{xy} = \frac{1}{a_x a_y} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} a_x a_y d\alpha_x d\alpha_y = \frac{a_x a_y}{r_{xy}} d\alpha_x d\alpha_y$$

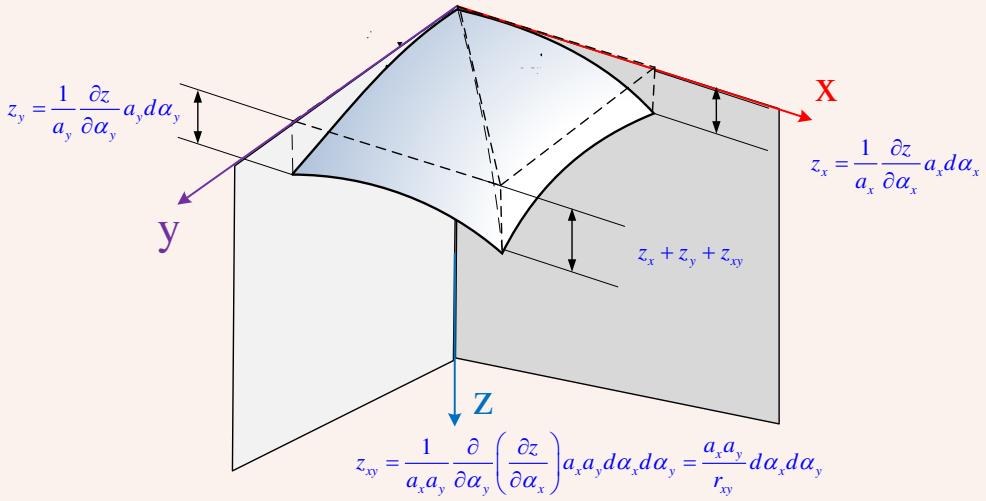
حيث

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{a_x a_y} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

ويقابل التواء السطح بالنسبة إلى محوري x وy المحورين. ومن ثم يكون ميل V_y

$$\frac{z_{xy}}{a_x d\alpha_x} = \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.5: عنصر قشري تفاضلي والانحناءات الرئيسة

وتكون المركبة الكلية لـV_y في اتجاه x

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{V_y} &= \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \\ &= V_y a_x d\alpha_x \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}\end{aligned} \tag{33.9}$$

تنعدم هذه العبارة عندما تحد العنصر خطوط الانحناء الرئيسة curvature r_x and r_y, $z_{xy} = 0$، ويكون نصف قطر الالتواء $r_{xy} = \infty$.

إسهام الحمل الخارجي: يُفترض أنه ضغط ذو مركبات p_x وp_y وp_z تؤثر على العنصر التفاضلي element of an area $a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y$:

$$\Sigma F_x^p = p_x a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{33.10}$$

وأخيراً يمكن جمع مركبات اتجاه x لكل من N_x وN_y وN_{xy} وN_{yx} وV_x وV_y والحمل من Eqs. 33.4, 33.1.3.1, 33.6, 33.7, 33.8, 33.9 و33.10. وبعد اختصار العامل المشترك $d\alpha_x d\alpha_y$ نحصل على

$$\frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \tag{33.11}$$

$\Sigma F_y = 0$ **2/5**

17 هذه المعادلة الثانية مماثلة تماماً للمعادلة المناظرة لـ $\Sigma F_x = 0$، باستثناء تبادل حدي x وy، فنحصل على

$$\frac{\partial (N_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (N_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \tag{33.12}$$

$\Sigma F_z = 0$ **3/5**

18 يُعرّف اتجاه z دائماً عمودياً على السطح الأوسط؛ ومن ثم يكون في اتجاه أنصاف أقطار الانحناء الرئيسة، الشكل 33.4. ولذلك يمكن مع افتراض الزوايا الصغيرة أخذ $\sin\theta \simeq \theta$.

على غرار $\Sigma F_x = 0$، ننظر في إسهامات محصلات الإجهاد N_{xx} وN_{yy} وN_{xy} وN_{yx}، وقوتي القص الشعاعيتين V_x وV_y، والضغوط الخارجية. ولا تسهم مزدوجات الإجهاد بمركبة قوة في اتجاه z. وتُحدد كل مركبة بضرب محصلة الإجهاد، الشكل 33.1a، أو قوة القص الشعاعية، الشكل 33.4، في طول ضلع العنصر الذي تؤثر عليه.

إسهام N_x:

$$\Sigma F_z^{N_x} = N_x a_y d\alpha_y \underbrace{\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x}_{\sin\theta \simeq \theta} + \text{حدود من الرتبة الثانية} \tag{33.13}$$

19 تماثل جميع العبارات الآتية صياغة N_x بعد تبديل المتغيرين x وy.

إسهام N_y:

$$\Sigma F_z^{N_y} = N_y a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_y} d\alpha_y \tag{33.14}$$

إسهام N_{xy}:

$$\Sigma F_z^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_{xy}} d\alpha_x \tag{33.15}$$

إسهام N_{yx}:

$$\Sigma F_z^{N_{yx}} = N_{yx} a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \tag{33.16}$$

إسهام V_x:

$$\Sigma F_z^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \underbrace{\cos\left(\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x\right)}_{\simeq 1} \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y$$

$$= \frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{33.17}$$

إسهام V_y: بالقياس إلى V_x

$$\Sigma F_z^{V_y} = \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{33.18}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إسهام الحمل الخارجي: من المعادلة 33.10

$$\Sigma F_z^p = p_z a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{33.19}$$

19 وأخيراً يمكن جمع مركبات اتجاه z لكل من N_x وN_y وN_{xy} وN_{yx} وV_x وV_y والحمل من Eq. 33.13, 33.14, 33.15, 33.16, 33.17, 33.18 و33.19 على الترتيب. وبعد اختصار العامل المشترك $d\alpha_x d\alpha_y$ نحصل على

$$\frac{\partial(V_x a_y)}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(V_y a_x)}{\partial \alpha_y} + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \tag{33.20}$$

4/5 $\Sigma M_x = 0$

20 لمعادلات العزوم مركبات مشابهة لمركبات القوى السابقة، ويكمن الاختلاف أساساً في الحدود المساهمة. فلا إسهام لمحصلات الإجهاد، ولا تؤخذ إلا قوة قص شعاعية واحدة هي V_y. غير أن مزدوجات الإجهاد M_x وM_y وM_{xy} وM_{yx} تسهم الآن بمركبات في اتجاهات x وy وz. وتُحدد كل مركبة بضرب مزدوجة الإجهاد، الشكل 33.3d، أو قوة القص الشعاعية، الشكل 33.4، في طول ضلع العنصر الذي تؤثر عليه.

إسهام M_x: له مركبة حول محور x مماثلة لمركبة N_x في اتجاه y (المعادلة 33.4 بعد تبادل x وy)

$$\Sigma M_x^{M_x} = M_x a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} = M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{33.21}$$

إسهام M_y: كما في المعادلة 33.4، وبالرجوع إلى الشكل 33.3d

$$\begin{aligned} \Sigma M_x^{M_y} &= M_y a_x d\alpha_x - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{d\alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \\ &= -\frac{\partial(M_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \end{aligned} \tag{33.22}$$

إسهام M_{xy}: يماثل المعادلة 33.22

$$\Sigma M_x^{M_{xy}} = -M_{xy} a_y d\alpha_y + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y = \frac{\partial(M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{33.23}$$

إسهام M_{yx}:

$$\Sigma M_x^{M_{yx}} = -M_{yx} a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x} = -M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \tag{33.24}$$

إسهام V_y:

$$\Sigma M_x^{V_y} = V_y a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{33.25}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأخيراً يمكن جمع آثار جميع الحدود components M_x ,M_y ,M_{xy} ,M_{yx} and ,V_y Eq. 33.21, 33.22, 33.23, 33.24 و33.25 على الترتيب. وبعد اختصار العامل المشترك $d\alpha_x d\alpha_y$ نحصل على

$$-\frac{\partial(M_y a_x)}{\partial \alpha_y} + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + V_y a_x a_y = 0 \tag{33.26}$$

5/5 $\Sigma M_y = 0$

تعطي العزوم حول محور y العبارة نفسها الواردة في المعادلة 33.26، مع تبادل الدليلين x وy وعكس إشارة مزدوجات إجهاد الالتواء.

$$-\frac{\partial(M_x a_y)}{\partial \alpha_x} + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial(M_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + V_x a_x a_y = 0 \tag{33.27}$$

33.1.3.2 المجموعة الكاملة لمعادلات الاتزان

21 تُلخص أدناه معادلات الاتزان الخمس 33.11 و33.12 و33.20 و33.26 و33.27

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(N_x a_y) - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(N_{yx} a_x) - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_y &= \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(N_y a_x) - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(N_{xy} a_y) - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_z &= \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(V_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(V_y a_x) + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \\
\Sigma M_x &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_y a_x) + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_{xy} a_y) + V_y a_x a_y = 0 \\
\Sigma M_y &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_x a_y) + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_{yx} a_x) + V_x a_x a_y = 0
\end{aligned} \tag{33.28}$$

33.1.3.3 التوافق

22 ننتقل الآن إلى معادلات التوافق التي تربط الإزاحات الثلاث بالانفعالات.

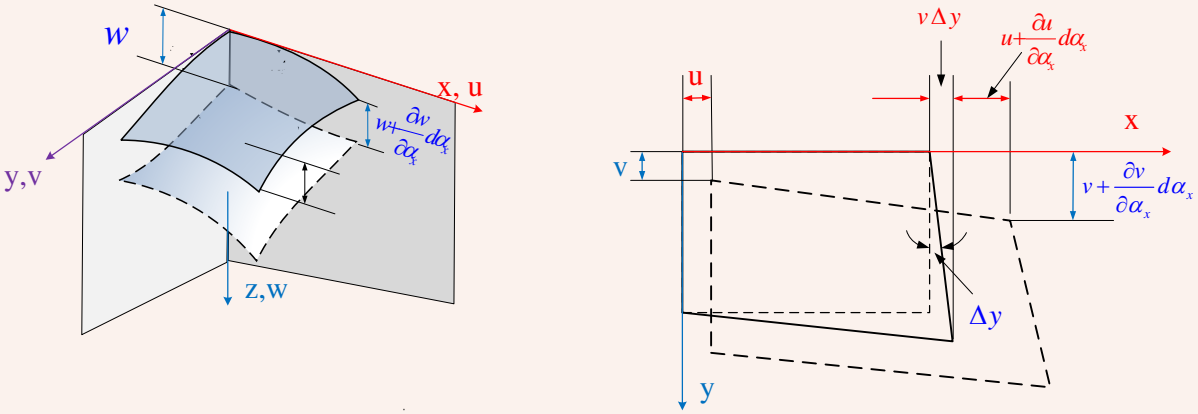
1/4 ε_{x0}

تُشتق الآن علاقات الانفعال–الإزاحة بالرجوع إلى الشكل 33.6. يتعرض العنصر الخطي ذي الطول $a_x d\alpha_x$ لثلاثة تغيرات في الطول:

الاستطالة المحورية على محور x: مقدارها $\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x$.

الاستطالة الجانبية على محور y: الشكل الأصلي غير المتشوه للعنصر التفاضلي ليس مستطيلاً (نتيجة $d\alpha_x$ و $d\alpha_y$)، والزاوية بين الجانب الموجب لـy والشاقول هي (المعادلة 33.5) $\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}$ (بدلاً من الصفر)؛ ولذلك تؤدي إزاحة انتقالية على محور y إلى إزاحة انتقالية على محور x تساوي $v\Delta_y$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.6: العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة

نقص نصف قطر الانحناء: $-w\frac{a_x}{r_x}d\alpha_x$

بجمع هذه الحدود جميعاً والقسمة على الطول الأصلي $a_x d\alpha_x$ نحصل على

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \tag{33.29}$$

حيث يدل الدليل 0 على أن المقصود هو السطح الأوسط.

ε_{y0} 2/4

23 يُستخرج انفعال السطح الأوسط على محور y بالقياس، وذلك بتبادل المتغيرين x وy مع v وu في المعادلة السابقة.

$$\varepsilon_{y0} = \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \tag{33.30}$$

γ_{xy0} 3/4

24 انفعال القص، الذي يمثل التغير الزاوي الكلي بين $a_y d\alpha_y$ و$a_x d\alpha_x$، معقد نوعاً ما أيضاً، ولذلك تُشتق مركباته الثلاث على حدة.

فرق الإزاحات: بالنسبة إلى حد v، الشكل 33.6، لدينا $(v + \frac{\partial v}{\partial \alpha_x}d\alpha_x) - v$. وبالقسمة على طول العنصر $a_x d\alpha_x$، وتكرار العملية نفسها لإزاحة u، نحصل على:

$$\gamma^I_{xy0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} \tag{33.31}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

زيادة طول الأضلاع الموجبة: نبدأ بتحديد Δs، الشكل 33.7.

$$\Delta s = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \Delta_y$$

حيث اشتُقت Δ_y في المعادلة 33.5 على الصورة

$$\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}$$

ومن ثم،

$$\begin{aligned} \Delta s &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}}_{\text{حد من رتبة أعلى}} \end{aligned}$$

بقسمة Δs على طول العنصر $a_x d\alpha_x$ وتكرار العملية نفسها للجانب الآخر نحصل على

$$\gamma_{xy0}^{II} = -\frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \tag{33.32}$$

حيث تعكس الإشارة السالبة نقص الزاوية بين الوجهين $x = 0$ و $y = 0$ (وكانت في الأصل زاوية قائمة).

التواء السطوح: بالرجوع إلى الشكل 33.7، لدينا

$$w^* = -w \frac{a_x d\alpha_x}{r_{xy}}$$

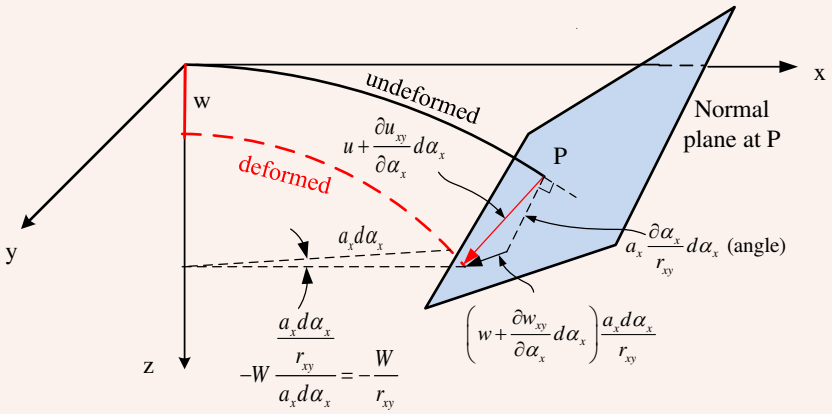
وبالقسمة على الطول الأصلي $a_x d\alpha_x$ وملاحظة وجود حد مماثل للمستوى $x = 0$، نحصل على

$$\gamma_{xy0}^{III} = -2 \frac{w}{r_{xy}} \tag{33.33}$$

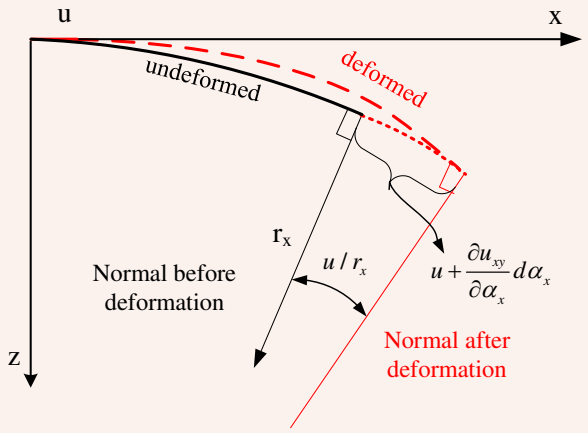
وهكذا، بجمع المركبات الثلاث، المعادلات 33.31 و33.32 و33.33، نحصل على

$$\gamma_{xy0} = \underbrace{\frac{1}{a_x} \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial u}{\partial \alpha_y}}_{} - \underbrace{\frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}}_{} - \underbrace{2 \frac{w}{r_{xy}}}_{} \tag{33.34}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.7: العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة؛ انفعال القص الناجم عن زيادة طول الأضلاع الموجبة



شكل 33.8: العنصر القشري التفاضلي في حالتيه الابتدائية والمتشوهة؛ الدوران

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4/4 χ_x، χ_y، $2\chi_{xy}$

25 باعتبار المستوى $x - z$، الشكل 33.8، وافتراض $w = 0$، تصنع العموديات على العنصر التفاضلي عند الوجه الموجب قبل التشوه وبعده زاوية $\frac{u}{r_x}$.

26 الحد التقليدي الناجم عن الإزاحة المستعرضة هو $\frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} = \frac{\partial w}{\partial s_{\alpha_x}}$. وبأخذ حد الالتواء في الحسبان أيضاً نحصل أخيراً على

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \tag{33.35}$$

27 وبالمثل نحصل على

$$\phi_y = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

28 يكون تغير الانحناء مساوياً لتغير الدوران $\partial \phi_x$ لكل طول قوس $a_x \partial \alpha_x$

$$\chi_x = \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}$$

وفضلاً عن ذلك، ونظراً إلى عدم توازي جانبي العنصر بسبب تغير قيمتي a_x وa_y، يولد الدوران ϕ_y في اتجاه y مركبة في اتجاه x.

$$\frac{\phi_y \Delta_y}{a_x \partial \alpha_x} = \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}$$

29 ومن ثم تصبح العبارات الكاملة لتغيرات الانحناء

$$\chi_x = \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}$$

$$\chi_y = \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}$$

$$2\chi_{xy} = \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + + \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.1.3.4 الخلاصة

30 نلخص الآن عبارات الانفعال الست بدلالة الإزاحات الثلاث المجهولة. ومن المعادلات 33.29 و33.30 و 33.34 والمجموعة السابقة نحصل على

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \\
\varepsilon_{y0} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \\
\gamma_{xy0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - 2\frac{w}{r_{xy}} \\
\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \\
\chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
\end{aligned} \tag{33.36}$$

حيث

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \\
\phi_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}$$

33.1.3.5 الإجهاد–الانفعال–القوى

33.1.3.5.1 الإجهاد–الانفعال

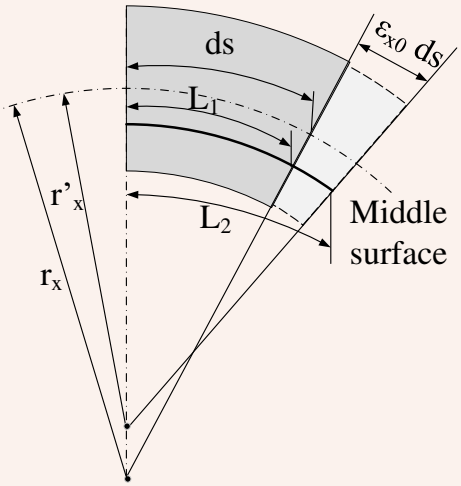
31 يتكون الانفعال ε_x على مسافة z من السطح الأوسط، الشكل 33.9، من مركبة محورية ε_{x0} ناجمة عن استطالة السطح الأوسط، ومركبة أخرى ناجمة عن الانحناء.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{L_2 - L_1}{L1} \\
L_1 &= ds\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \\
L_2 &= ds(1+\varepsilon_{x0})\left(1 - \frac{z}{r'_x}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{(1+\varepsilon_{x0})(1 - z/r'_x) - (1 - z/r_x)}{1 - z/r_x} \\
&= \frac{1 - z/r'_x + \varepsilon_{x0}(1 - z/r'_x) - 1 + z/r_x}{1 - z/r_x}
\end{aligned}$$

32 يمكن إهمال الحدين الصغيرين z/r'_x وz/r_x عندما يظهران مع الواحد،

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x}\right)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.9: السطح الأوسط للعنصر التفاضلي

33 وباستعمال χ للدلالة على تغير الانحناء نجد

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\chi_x \tag{33.37}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\chi_y \tag{33.38}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \tag{33.39}$$

34 لا يمكن من هذه النقطة إهمال خواص مادة النظام. ولاشتقاق علاقة الإجهاد–الانفعال نفترض مادة مرنة خطية، متساوية الخواص ومتجانسة. وبما أننا افترضنا سابقاً $\sigma_z = 0$، تتحقق حالة الإجهاد المستوي، ومن مقاومة المواد:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

حيث معامل الصلابة $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

35 بالتعويض بعبارات الانفعال الفعلية، المعادلات 33.37 و33.38 و33.39، نحصل على

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)]$$
$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy})$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.1.3.5.2 الإجهاد–القوى

36 بالتعويض بمجموعة المعادلات السابقة في علاقات القوة–الإجهاد، المعادلة 33.3، والتكامل عبر h وإهمال حدي z/r_x وz/r_y عندما يظهران إلى جوار الواحد، نحصل على

$$\begin{aligned} N_x &= K(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \\ N_y &= K(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0}) \\ N_{xy} &= N_{yx0} = Gh\gamma_{xy0} \\ M_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ M_y &= -D(\chi_y + \nu\chi_x) \end{aligned} \tag{33.40}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6}\chi_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy} \tag{33.41}$$

حيث

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

K هي الصلابة المحورية وD الصلابة الانحنائية، وتقابلان EA وEI في المسألة أحادية البعد المناظرة.

37 نلاحظ أن K وD أكبر من الثابتين المناظرين أحاديي البعد بالمعامل $1-\nu^2$، الذي يمثل زيادة الصلابة الناجمة عن تقييد الانفعالات الجانبية.

33.1.3.6 العبارات النهائية (القوى بدلالة الإزاحات)

38 نعوض الآن بالانفعالات المحورية والانحنائية المعطاة في المعادلة 33.36 في المعادلات من 33.40 إلى 33.41 فنحصل على

$$\begin{aligned} N_x &= K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y}\right)\right] \\ N_y &= K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x}\right)\right] \\ N_{xy} &= N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}}\right) \\ M_x &= -D\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)\right] \\ M_y &= -D\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\right)\right] \\ M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right) \end{aligned} \tag{33.42}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث نتذكر من المعادلة 33.35 أن

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}}$$
$$\phi_y = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

39 تحتوي هذه المعادلات الست على ثلاث محصلات إجهاد (N_x وN_y وN_{xy})، وثلاث مزدوجات إجهاد (M_x وM_y وM_{xy})، وثلاث إزاحات (u وv وw).

40 أما معادلات الاتزان الخمس، المعادلة 33.28، فتحتوي ثمانية مجاهيل: خمس محصلات إجهاد (N_x وN_y وN_{xy} وV_x وV_y)، وثلاث مزدوجات إجهاد (M_x وM_y وM_{xy}).

41 عند جمع مجموعتي المعادلات يصبح لدينا 11 معادلة و11 مجهولاً (N_x وN_y وN_{xy} وV_x وV_y وM_x وM_y وM_{xy} وu وv وw). وبذلك تكون المسألة محددة تحديداً سليماً ويغدو الحل الكامل ممكناً.

42 يلخص الجدول 33.3 بعض المعادلات الرئيسة الحاكمة للقشريات الرقيقة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 33.3: ملخص المعادلات الرئيسة الحاكمة للقشريات الرقيقة

Kinematic

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y}\begin{bmatrix} a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_y} \\ a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial\alpha)_x} & -\frac{2a_x a_y}{r_{xy}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y}\begin{bmatrix} a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} \\ \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} \\ a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} - \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

Equilibrium

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & -\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} + \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_x}{r_x}a_y & \frac{a_y}{r_y}a_x & \frac{a_x}{r_{xy}}a_y + \frac{a_y}{r_{xy}}a_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & -\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) - \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} - \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} + a_x a_y \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_{xy}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{r_{xy}} & -\frac{1}{r_y} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{b}} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{zz} \\ V_{xx} \\ V_{yy} \end{Bmatrix}}_{\rho} = 0$$

Constitutive

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\beta\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & -z & -z\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 & -z\nu & -z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{-2z}{\beta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx0} \\ \varepsilon_{yy0} \\ \gamma_{xy0} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$\beta = \frac{E}{1-\nu^2}$$

33.1.4 التبسيطات

43 يمكن استعمال التحليل المشتق في القسم السابق (11 معادلة و11 مجهولاً) لإيجاد الإجهادات والإزاحات لأي قشرة مرنة رقيقة. غير أن هذا التحليل قد يكون *بالغ التعقيد* حتى لأبسط النظم القشرية؛ لذلك استُعمل في تصميم القشريات نوعان من التبسيط لتيسير التحليل.

الصياغات الرياضية نفترض أو نثبت أحياناً أن بعض الحدود قليلة الأهمية نسبياً ثم نحذفها من المعادلة المدروسة. وقد فُعل ذلك في §33.1.3 بإهمال حدود z/r عندما تظهر مع الواحد، إلى جانب افتراض الإجهاد المستوي $\sigma_z = 0$. والغرض هو تقليل عدد الحدود مع الحفاظ على حل رياضي معقول.

الصياغات الفيزيائية يمكن أيضاً افتراض سلوك إنشائي محدد لتبسيط التحليل، واستبدال النظام القشري بمنشأ أبسط مكافئ له، ثم استعمال هذا المنشأ الأبسط لتحليل النظام المعقد.

44 تلائم هذه التبسيطات تصميم الخرسانة المسلحة، حيث لا يبرر تفاوت دقة التنفيذ إجراء تحليل بالغ الدقة. ومع ذلك، من الضروري أن يفهم المصمم السلوك الإنشائي الحقيقي الذي لا يتضح إلا من السمات الفيزيائية للنظام وصياغته الرياضية المناظرة.

45 سنبحث نظريتين مبسطتين للتحليل: نظرية القشريات الضحلة ونظرية الغشاء.

33.1.4.1 القشريات الضحلة

46 نظرية القشريات الضحلة هي أولى نظريتي القشريات المبسطتين اللتين سنعرضهما، والثانية نظرية الغشاء. وتستعمل الصياغة الآتية التبسيطين الرياضي والفيزيائي معاً.

33.1.4.1.1 Assumptions

47 تعتمد نظرية القشريات الضحلة الافتراضات الآتية:

1. ميل القشرة صغير بالنسبة إلى مستوى مرجعي، وغالباً المستوى الأفقي للأسقف.
2. انحناء السطح صغير.
3. حدود القشرة تسمح بحمل الأحمال السطحية بواسطة محصلات الإجهاد داخل المستوى (N_x وN_y وN_{xy}). ولذلك تكون الانحرافات المستعرضة أكبر بكثير من الإزاحات داخل المستوى.
4. تغيرات انحناء السطح صغيرة.

33.1.4.1.2 Application of assumptions

48 نطبق الآن هذه الافتراضات على المعادلتين 33.28 و33.42.

- يسمح الافتراض الأول بإهمال المركبة الشعاعية للحمل.
- وفق الافتراض الثاني تكون الحدود التي تحتوي V في المعادلتين الأوليين من 33.28 والحدود التي تحتوي N في الثالثة صغيرة. وينطبق ذلك أيضاً على حدود w في المعادلات الثلاث الأولى من 33.42 وحدود u وv في المعادلات الثلاث الأخيرة منها. لكن لا يجوز حذفها قبل النظر في الافتراض الثالث.
- يربط الافتراض الثالث القشرة بقوس مسطح تتحكم فيه، تحت الحمل المنتظم، الإجهادات المحورية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والإزاحات الرأسية. أي إن المركبات المستعرضة الصغيرة لمحصلات الإجهاد داخل المستوى في المعادلة الثالثة من 33.28 ليست مهملة مقارنة بتغير محصلة القص المستعرض.

- يسمح الافتراض الرابع باعتبار a_x وa_y ثابتين.

49 بدمج الافتراضين الثاني والثالث يمكن حذف V من أول معادلتين في 33.28، لكن لا يمكن حذف N من الثالثة. وتسمح المعادلة 33.42 بإهمال أثر الإزاحتين داخل المستوى (u وv) في مزدوجات الإجهاد، لكن لا تسمح بإهمال أثر الإزاحة w في محصلات الإجهاد داخل المستوى.

50 يمكن إعادة كتابة المعادلتين 33.28 و33.42 على الصورة:

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y}+p_x=0 \tag{33.43a}$$

$$\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_y}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha_x}+p_y=0 \tag{33.43b}$$

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial V_y}{\partial \alpha_y}+\frac{N_x}{r_x}+\frac{2N_{xy}}{r_{xy}}+\frac{N_y}{r_y}+p_z=0 \tag{33.43c}$$

$$-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x}+V_y=0 \tag{33.43d}$$

$$-\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x}-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_{yx}}{\partial \alpha_y}+V_x=0 \tag{33.43e}$$

and

$$N_x=K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_x}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_y}\right)\right] \tag{33.44a}$$

$$N_y=K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_y}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_x}\right)\right] \tag{33.44b}$$

$$N_{xy}=N_{yx}=Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}-\frac{2w}{r_{xy}}\right) \tag{33.44c}$$

$$M_x=-D\left(\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}+\nu\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}\right) \tag{33.44d}$$

$$M_y=-D\left(\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}+\nu\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}\right) \tag{33.44e}$$

$$M_{xy}=-M_{yx}=D(1-\nu)\left(\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\right) \tag{33.44f}$$

51 نلاحظ وجود معادلات منفصلة للكمرة العميقة والبلاطة، تقترن بحدود N في المعادلة 33.43c وحدود w في المعادلات من 33.44a إلى 33.44c.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- المعادلتان 33.43a و33.43b تخصان بلاطة محملة في مستواها (*معادلات الكمرة العميقة*).
- المعادلات من 33.44a إلى 33.44c هي أيضاً معادلات كمرة عميقة باستثناء حدود w. والمعادلات من 33.44d إلى 33.44f تخص بلاطة محملة جانبياً (بلاطة منحنية).
- المعادلات من 33.43c إلى 33.43e هي أيضاً معادلات بلاطة باستثناء حدود N في 33.43c.

33.1.4.1.3 معادلة الكمرة العميقة

52 سنجمع العبارات السابقة في معادلة واحدة للقشرة الضحلة، لكن يجب أولاً اشتقاق معادلتي الكمرة العميقة والبلاطة. من المعادلات 33.44a و33.44b و33.44c

$$N_x - \nu N_y = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)$$
$$N_y - \nu N_x = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)$$
$$2(1+\nu)N_{xy} = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right)$$

53 بالتفاضل مرتين والجمع نحصل على

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 (N_x - \nu N_y)}{\partial \alpha_y^2} - \frac{2(1+\nu)}{a_x a_y}\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 (N_y - \nu N_x)}{\partial \alpha_x^2} \\ &= -K(1-\nu^2)\left[\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2}\left(\frac{w}{r_y}\right) - \frac{2}{a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\left(\frac{w}{r_{xy}}\right) + \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}\left(\frac{w}{r_x}\right)\right]\end{aligned} \tag{33.45}$$

54 عندما يُفترض ثبات r_x وr_y وr_{xy} نضع

$$\nabla_R^2 w = \left(\frac{1}{r_y a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2} - \frac{2}{r_{xy} a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{r_x a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}\right) w$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

55 نستبدل محصلات الإجهاد بدوال الإجهاد الآتية

$$N_x = \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_y^2} - \int p_x a_x d\alpha_x \tag{33.46}$$

$$N_y = \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_x^2} - \int p_y a_y d\alpha_y \tag{33.47}$$

$$N_{xy} = -\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} \tag{33.48}$$

وبالتعويض في المعادلة 33.45 نصل إلى المعادلة التفاضلية للكمرات العميقة

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = \int \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 p_x}{\partial \alpha_y^2} a_x d\alpha_x + \int \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 p_y}{\partial \alpha_x^2} a_y d\alpha_y - \nu \frac{1}{a_x}\frac{\partial p_x}{\partial \alpha_x} - \nu \frac{1}{a_y}\frac{\partial p_y}{\partial \alpha_y} \tag{33.49}$$

حيث

$$\nabla^4 F = \left(\frac{1}{a_x^4}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_x^4} + \frac{2}{a_x^2 a_y^2}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_x^2 \partial \alpha_y^2} + \frac{1}{a_y^4}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_y^4}\right) F$$

56 If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, $a_x d\alpha_x = dx$, $a_y d\alpha_y = dy$ and $p_x = p_y = 0$, Eq. 33.49 reduces to

$$\nabla^4 F = 0$$

33.1.4.1.4 معادلة البلاطة

57 لاشتقاق معادلة البلاطة نعوض أولاً بقيمتي V_x وV_y من المعادلتين 33.43d و33.43e في المعادلة 33.43c للحصول على المعادلة المجمعة

$$\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 M_x}{\partial \alpha_x^2} - 2\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 M_y}{\partial \alpha_y^2} + \frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \tag{33.50}$$

58 بالتعويض بالمعادلات 33.44d و33.44e و33.44f في 33.50 نحصل على

$$-\nabla^4 w + \frac{1}{D}\left(\frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y}\right) = -\frac{p_z}{D}$$

59 ومرة أخرى ندخل دوال الإجهاد في المعادلات 33.46 و33.47 و33.48 في المعادلة التفاضلية 33.1.4.1.4 لتوليد المعادلة التفاضلية للبلاطة المنحنية

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r_x}\int p_x a_x d\alpha_x + \frac{1}{r_y}\int p_y a_y d\alpha_y\right) \tag{33.51}$$

If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, Eq. 33.51 reduces to

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{D}$$

33.1.4.1.5 معادلة القشريات الضحلة

60 يلزم لحل مسألة *القشريات الضحلة* استعمال المعادلتين التفاضليتين للكمرة العميقة (33.49) والبلاطة المنحنية (33.51). ويمكن إعادة كتابة المعادلتين المتزامنتين على الصورة

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = f(p) \tag{33.52}$$

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = f'(p) \tag{33.53}$$

حيث $f(p)$ و$f'(p)$ هما الطرفان الأيمنان للمعادلتين 33.49 و33.51. وإذا شغّلنا ∇^4 على المعادلة 33.52 و$K(1-\nu^2)\nabla_R^2$ على المعادلة 33.53 ثم جمعناهما، نحصل على

$$\nabla^8 F + \frac{12(1-\nu^2}{h^2}\nabla_R^4 F = \nabla^4 f(p) + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 f'p \tag{33.54}$$

61 أما إذا شغّلنا $(1/D)\nabla_R^2$ على المعادلة 33.52 و∇^4 على المعادلة 33.53 ثم جمعناهما، نحصل على حل القشريات الضحلة

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p)$$

33.1.4.2 نظرية الغشاء

نظرية الغشاء هي الطريقة المبسطة الثانية التي سنعرضها، وسنركز فيها على الافتراضات والنظرية أكثر من المنهجية.

33.1.4.2.1 Assumptions

62 تعتمد نظرية الغشاء الافتراضات الآتية:

1. يُهمل كل انحناء في القشرة. ولذلك تصبح المعادلة 33.28

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx}a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_y &= \frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy}a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_z &= \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0
\end{aligned} \tag{33.55}$$

2. بما أننا نفترض $N_{xy} = N_{yx}$، فإن المعادلات الثلاث السابقة تحتوي ثلاثة مجاهيل فقط هي N'_x وN'_y و$N'_{xy} = N'_{yx}$. وتدل العلامة العليا على أن القيم تقريبية.
3. تؤثر جميع إجهادات الغشاء في مستوى القشرة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.1.4.2.2 Theory

63 توفر نظرية الغشاء أساساً معقولاً للتصميم إذا تحققت الشروط الآتية:

1. لا تزيد الإزاحة الناتجة من محصلات إجهاد الغشاء انحناء القشرة زيادة كبيرة؛ إذ تفترض النظرية إهمال جميع حالات الانحناء في القشرة.
2. يجب أن يكون توزيع الحمل منتظماً على كامل سطح القشرة.
3. تستطيع الحدود توفير القوى والسماح بالإزاحات التي تتطلبها محصلات إجهاد الغشاء.

64 تكون نظرية الغشاء غير كافية عادة، لكنها قد تكون مفيدة للأسقف نصف الكروية أو الخزانات الأسطوانية.

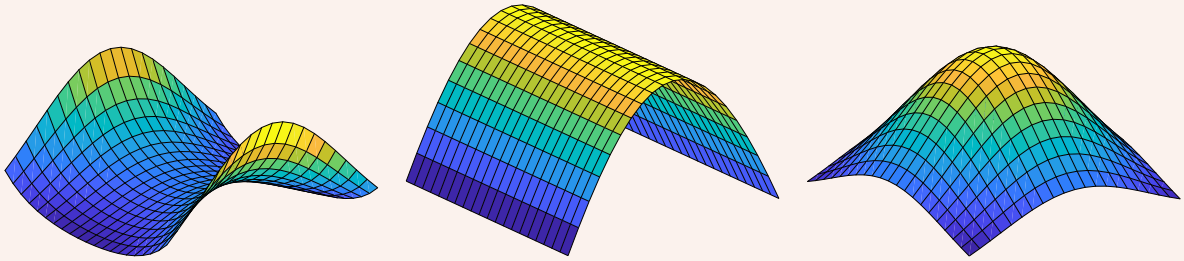
33.1.4.2.3 Classification

65 يمكن تصنيف القشريات الرقيقة إلى ثلاث فئات رئيسة على أساس *الانحناء الغاوسي*، الشكل 33.10.

القشريات محدبة الانحناء ذات انحناء غاوسي موجب، وتتكون من عائلتين من المنحنيات باتجاه انحناء واحد.

القشريات أحادية الانحناء ذات انحناء غاوسي صفري، وتتكون من عائلة واحدة من المنحنيات.

القشريات متعاكسة الانحناء ذات انحناء سالب، وتتكون من عائلتين من المنحنيات باتجاهي انحناء متعاكسين.



(a) محدبة الانحناء (قبة) (b) أحادية الانحناء (قبو برميلي) (c) متعاكسة الانحناء (سطح زائد–قطع مكافئ)

شكل 33.10: تصنيف القشريات

66 يتمثل الاختلاف الرئيس بين الفئات الثلاث في انتشار آثار الحواف داخل القشرة. ففي القشريات محدبة الانحناء تتلاشى آثار الحواف سريعاً عادة وتنحصر في نطاق ضيق قريب من الحافة، مما يجيز استعمال نظرية الغشاء في القشرة كلها ما عدا الحدود.

67 وفي القشريات أحادية الانحناء تتلاشى آثار الحواف على نحو مشابه، لكنها تنتشر إلى مسافة أبعد داخل القشرة. أما القشريات متعاكسة الانحناء فتكون فيها درجة التلاشي أقل كثيراً، مما يسمح لآثار الحدود بالتحكم في معظم القشرة.

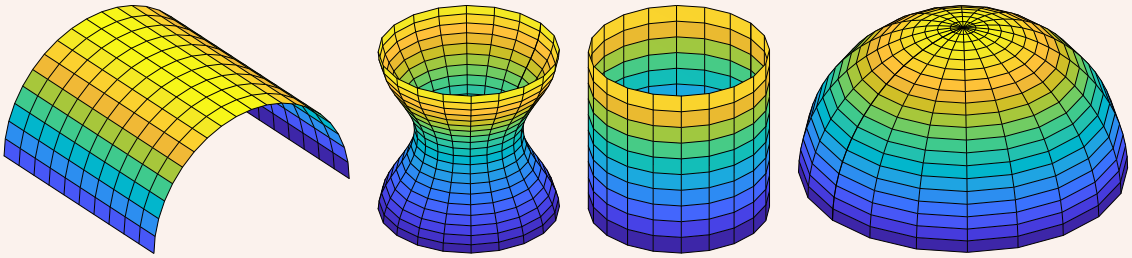
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68 يصنف نهج آخر النظم القشرية إلى دورانية وانتقالية. فغالباً ما تُعد القباب والخزانات نظماً دورانية، بينما تُعد القشريات الأسطوانية والقطوع المكافئة الإهليلجية والقطوع المكافئة الزائدية نظماً انتقالية.

69 وأخيراً، ليست كل القشريات محددة تحليلياً، فضلاً عن تحليلها «ميكانيكياً». وقد صمم إيسلر (§15.5.2.2) وموسميشي (§15.5.2.3) قشريات من هذا النوع ذات أشكال محددة تجريبياً.

33.1.4.2.4 Specialization

70 يمكن تطبيق افتراض الغشاء على تحليل عدد من القشريات، الشكل 33.11.

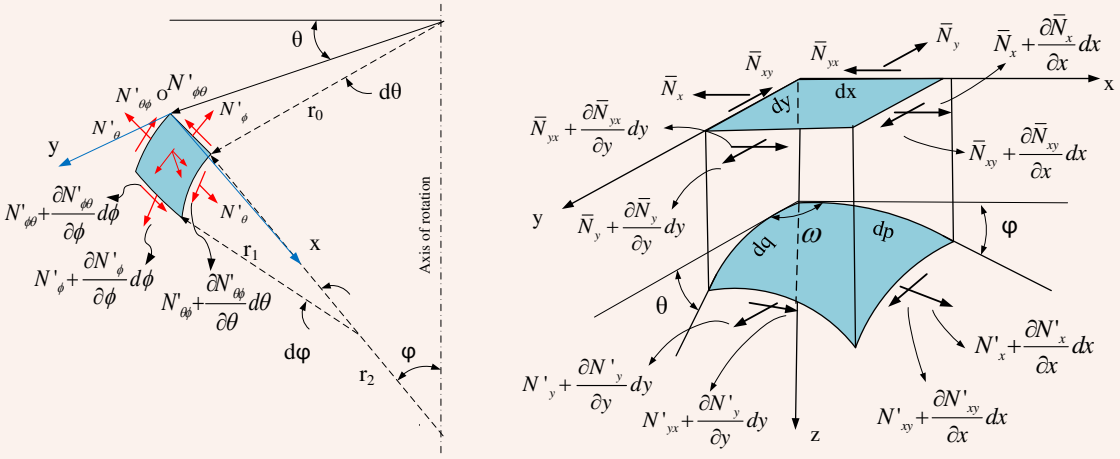


(a) قبة (b) جدار قشري (c) سطح زائد (d) قشرة برميلية

شكل 33.11: أمثلة لقشريات يكون فيها افتراض الغشاء صالحاً في معظم المجال

71 مع ذلك، قد يُتوقع ظهور عزوم «طفيلية» موضعية عند القاعدة.

72 في كل قشرة من هذه القشريات تُعتمد مجموعة من الافتراضات، وتُبسط معادلات الاتزان الحاكمة، المعادلة 33.55، تبسيطاً إضافياً كما في الجدول 33.4، ثم تُشتق المعادلات باستعمال الشكل 33.12.



(a) سطح زائد (b) قبة

شكل 33.12: مخططات الجسم الحر لعنصرين متناهيي الصغر من سطح زائد وقبة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

73 سنقتصر فيما يأتي على اشتقاق معادلات القشرة البرميلية، ويمكن العثور على الحالات الأخرى في (Billington, 1965).

جدول 33.4: افتراضات ومعادلات حاكمة للمنشآت الغشائية

المعادلات العامة

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y &= 0 \\
\frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y &= 0 \\
\Sigma \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z &= 0
\end{aligned}$$

Dome

$$\begin{aligned}
&\alpha_x = \theta \quad a_x = r_0 \quad r_x = r_1 \quad r_0 = r_2 \sin\phi \quad N'_{xy} = N'_{\theta\phi} \\
&\alpha_y = \phi \quad a_y = r_1 \quad r_y = r_1 \quad N'_x = N'\theta \quad N'_y = N'_\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dN'_\phi r_0}{d\phi} - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 &= 0 \\
\frac{N'_\theta}{r_2} + \frac{N'_\phi}{r_1} + p_z &= 0
\end{aligned}$$

جدار قشري

$$\begin{aligned}
&\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_x = N'_\theta \\
&\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_{xy} = N'_{\theta y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N'_\theta &= -p_z r \\
N'_{y\theta} &= -\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N'_\theta}{\partial \theta} + p_\theta \right) dy + f_1(\theta) \\
N'_y &= -\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial N'_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y \right) dy + f_2(\theta)
\end{aligned}$$

قشرة زائدية

$$\begin{aligned}
&\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad r_{xy} = \infty \\
&\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dB_y}{dy} r + p_r &= 0 \\
\frac{dV_y}{dy} r + N_\theta + p_z r &= 0 \\
-\frac{dM_y}{dy} r + V_y r &= 0
\end{aligned}$$

قشرة أسطوانية دائرية

$$\begin{aligned}
&\alpha_x = x \quad a_x = 1 \quad r_x = \infty \quad N'_{xy} = N'_{x\phi} \\
&\alpha_y = \phi \quad a_y = r \quad r_y = r \quad N'_y = N'_\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N'_\phi &= -p_z r \\
N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} dx - \int p_\phi dx + f_1(\phi) \\
N'_x &= -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi)
\end{aligned}$$

قشرة انتقالية مزدوجة الانحناء

$$\begin{aligned}
&a_x = r_x \quad a_y = r_y \quad r_{xy} = \infty \quad \frac{\partial r_y}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N'_x}{\partial \alpha_x} r_y + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \alpha_y} r_x + p_x r_x r_y &= 0 \\
\frac{\partial N'_y}{\partial \alpha_y} r_x + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial \alpha_x} r_y + p_y r_x r_y &= 0 \\
\frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z &= 0
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.2 تحليل قشرة برميلية مفردة (قشرة أسطوانية دائرية)

33.2.1 مقدمة

74 يركز هذا القسم على تحليل قشرة أسطوانية دائرية باستعمال نظريتي القشريات الضحلة والغشاء، ويقتصر على قشرة بسيطة الاستناد إلى كمرتين حافيتين. تُشتق محصلات الإجهاد ومزدوجاته والإزاحات أولاً بنظرية الغشاء، ثم يُعاد الاشتقاق بنظرية القشريات الضحلة.

75 يتناول القسم أيضاً نظرية الانحناء؛ فنشتق المعادلة التفاضلية الحاكمة من الرتبة الثامنة، ونناقش تحديد ثوابت التكامل الاعتباطية الثمانية. ثم تُعوض هذه الثوابت في معادلات محصلات الإجهاد ومزدوجاته والإزاحات.

76 تُعرّف القشريات الأسطوانية الدائرية أو الأقبية البرميلية غالباً بأنها «بلاطة منحنية مقتطعة من أسطوانة كاملة». ولا تنحني البلاطة إلا في اتجاه واحد، ولذلك تُصنف قشرة أحادية الانحناء كما سبق.

77 توصف القشريات الأسطوانية عادة بأنها طويلة أو متوسطة أو قصيرة بحسب نسبة نصف القطر المستعرض r إلى الطول الطولي L. ومن التصنيفات الاصطلاحية:

1. قشريات طويلة حيث $r/L < 0.4$؛
2. قشريات متوسطة حيث $0.4 < r/L < 2.0$؛
3. قشريات قصيرة حيث $r/L > 2.0$.

78 في القشريات الطويلة تولد الأحمال الخطية عادة قوى داخلية كبيرة على كامل سطح القشرة. وتكون هذه القوى من الكبر بحيث تغدو القيم الغشائية مهملة بالمقارنة؛ لذلك لا يمثل النظام الأولي النظام الحقيقي تمثيلاً وثيقاً. ومع تناقص r/L يقترب النظام الحقيقي من سلوك كمرة ذات مقطع منحنٍ، الشكل figcircshellroverL.

79 أما في القشريات القصيرة فتولد الأحمال الخطية قوى داخلية تنحصر عادة قرب الحواف الطولية. ومع زيادة r/L يتصرف معظم القشرة كما يفترض النظام الأولي، أي بقيم غشائية فقط. وتشبه القشريات القصيرة عندئذ أقواساً برميلية رقيقة تستند قرب حوافها الطولية إلى حواجز منحنية قليلاً، تنقل دفع القوس إلى الإطارات المستعرضة بإجهادات داخل المستوى كما تفعل الكمرات العميقة.

80 بالرجوع إلى التعريف الهندسي لعنصر قشري عام في الشكل 33.13a، يكون للقوس الدائري

$$\begin{array}{llll} \alpha_x = \theta & a_x = r & r_x = r & N'_{xy} = N'_{\theta y} \\ \alpha_y = y & a_y = 1 & r_y = \infty & N'_x = N'_\theta \end{array} \tag{33.56}$$

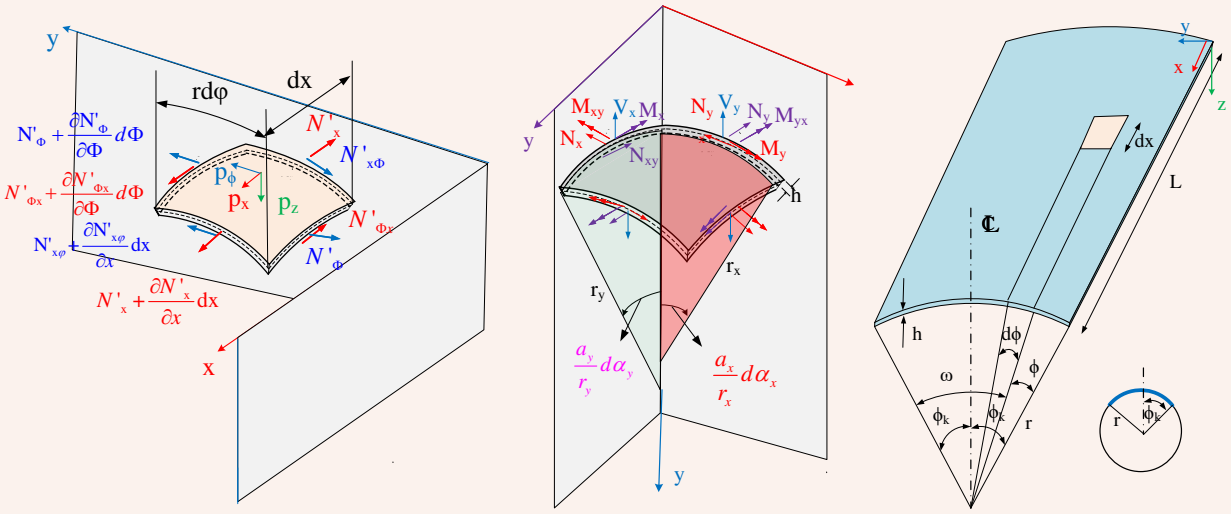
حيث r ثابت، وتُقاس ϕ من الحافة الطولية.

81 يبين الشكل 33.13c مخطط الجسم الحر المناظر لعنصر متناهي الصغر من القشرة، وسيُرجع إليه في الاشتقاق الآتي.

82 بما أن نظرية الغشاء تقريبية، يكون الإجراء كما يأتي:

النظام الأولي: يُستخرج باختزال النظرية العامة إلى نظرية الغشاء، وفيه تقاوم الأحمال السطحية بمحصلات الإجهاد وحدها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.13: مخطط الجسم الحر لعنصر متناهي الصغر من قشرة دائرية

الأخطاء: تمثل آثار الحواف غير المتوافقة، أو القوى التي تتطلبها نظرية الغشاء عند الحواف الحرة.

التصحيحات: تُطبق أحمال خطية (آثار حافة وحدية) على امتداد الحواف الحرة.

التوافق: يتحقق الاتزان بتحديد التصحيحات اللازمة لإزالة أخطاء نظرية الغشاء. وفي مثالنا نساوي الأحمال الخطية بمحصلات إجهاد الغشاء على الحافة الحرة.

33.2.2 نظرية الغشاء

83 قبل إجراء التحليل الكامل بنظرية القشريات الضحلة نبحث نظرية الغشاء، مع التركيز على اشتقاق محصلات الإجهاد والإزاحات.

33.2.2.1 محصلات الإجهاد

النظام الأولي

84 باستعمال الافتراضات المعطاة في المعادلة 33.56، تختزل المعادلات 33.55 إلى:

$$
\begin{aligned}
N'_{\phi} &= -p_z r \\
N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi}}{\partial \phi} dx - \int p_{\phi} dx + f_1(\phi) \\
N'_{x} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi)
\end{aligned}
\tag{33.57}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

85 نلاحظ أن الأدلة مستعملة بحيث يكون x المحور الأفقي، وy المحور الرأسي أو المماسي، وz المحور الشعاعي. وتُقاس p من الحافة الطولية.

86 كُتبت عبارات محصلات الإجهاد في صورة ثلاث معادلات ذات ثلاث قوى مجهولة N'_{ϕ} وN'_{x} و$N'_{x\phi} =$ و$N'_{\phi x}$، وبذلك أُنشئ النظام الأولي.

87 يمكن إذن حساب محصلات الإجهاد بسهولة للأحمال الموزعة. وكمثال نشتق المحصلات الناجمة عن الوزن الذاتي للقشرة، ويلخص الجدول 33.5 نتائج بعض حالات الحمل الأخرى.

88 لوزن ذاتي منتظم للقشرة P_d تكون مركبات الحمل:

$$\begin{aligned} p_z &= p_d \cos(\phi_k - \phi) \\ p_\phi &= -p_d \sin(\phi_k = \phi) \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

ويمكن إيجاد N'_{ϕ} مباشرة من المعادلة الأولى في 33.57

$$N'_{\phi} = -p_d r \cos(\phi_k - \phi) \tag{33.58}$$

89 عند التعويض بهذه العبارة لـN'_{ϕ} في المعادلة الثانية من 33.57

$$N'_{x\phi} = \frac{1}{r} \int \frac{\partial \left[p_d r \cos\left(\phi_k - \phi\right) \right]}{\partial \phi} dx + \int p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) dx + f_1(\phi)$$

بالتفاضل والتكامل نحصل على

$$N'_{x\phi} = p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + f_1(\phi)$$

90 في الكمرة البسيطة يكون $N'_{z\phi} = 0$ عند $x = L/2$، ومنه

$$f_1(\phi) = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L$$

so that

$$N'_{x\phi} = 2p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x - p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L$$

or

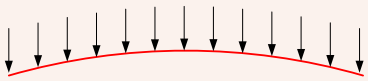
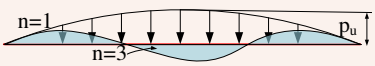
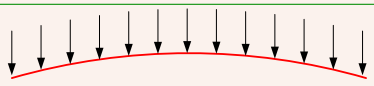
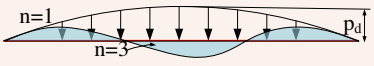
$$N'_{x\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{33.59}$$

91 بالتعويض بهذه القيمة لـ$N'_{x\phi}$ في المعادلة الثالثة من 33.57 نحصل على

$$N'_{x} = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial \left[-p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L(1 - 2x/L) \right]}{\partial \phi} dx + f_2(\phi)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 33.5: مقارنة توزيعات محصلات إجهاد الغشاء تحت أحمال مختلفة

محصلة إجهاد الغشاء kip/ft	الحمل ksf	ثوابت القشرة ft	التوزيع المستعرض	التوزيع الطولي
				
N'_ϕ	p_u	r	$\cos^2(\phi_k-\phi)$	1
$N'_{\phi x}$	p_u	$r(L/r)$	$\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$	$(3/2)(1-2x/L)$
N'_x	p_u	$r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(3x/2L)(1-x/L)$
				
N'_ϕ	p_d	r	$\cos(\phi_k-\phi)$	1
$N_{\phi x}$	p_d	$r(L/r)$	$\sin(\phi_k-\phi)$	$1-2x/L$
N'_z	p_d	$r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(x/L)(1-x/L)$
				
N'_ϕ	p_u	r	$\cos^2(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi\pi}$	p_u	$r(L/r)$	$\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$	$(3/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$
N''_π	p_u	$r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(3/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$
				
N'_ϕ	p_d	r	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi x}$	p_d	$r(L/r)$	$\sin(\phi_k-\phi)$	$(2/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$
N'_x	p_d	$r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$	$(2/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$

(لجميع محصلات الإجهاد إشارة سالبة)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومنها

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) \int \left(1 - \frac{2x}{L}\right) dx + f_2(\phi)$$

مما يعطي

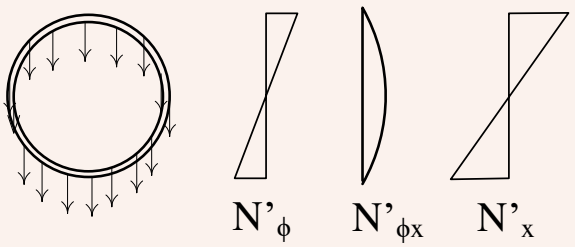
$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) x \left(1 - \frac{x}{L}\right) + f_2(\phi)$$

92 في الكمرة البسيطة يجب أن تنعدم القوة الطولية N'_x عند $x = 0$ و$x = L$، ومن ثم $f_2(\phi) = 0$ و

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r} \cos\left(\phi_k - \phi\right) x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{33.60}$$

93 قُسمت هذه المعادلات في الجدول 33.5 إلى ثلاثة أجزاء لإبراز توزيع محصلات إجهاد الغشاء في القشرة الأسطوانية. يحتوي الجزء الأول من كل معادلة حدوداً تعتمد فقط على مقدار الحمل وأبعاد القشرة، ويعطي الجزآن الثاني والثالث التوزيعين المستعرض والطولي للمحصلات على الترتيب. وهذان التوزيعان مستقلان؛ فإذا كان لحملين سطحيين التوزيع المستعرض نفسه مع اختلاف التوزيع الطولي، تطابق التوزيع المستعرض لمحصلات الإجهاد فيهما.

94 رُسمت نتائج المعادلات من 33.58 إلى 33.60 في الشكل 33.14 لأسطوانة دائرية كاملة بسيطة الاستناد.



شكل 33.14: توزيع محصلات الإجهاد في قشرة دائرية كاملة بسيطة الاستناد

95 يمكن أيضاً الحصول على توزيع القوى نفسه باعتبار القشرة كمرة دائرية مجوفة تمتد في اتجاه محور دورانها.

96 في الواقع تعطي المعادلات من 33.58 إلى 33.60 قيم N'_ϕ و$N'_{x\phi}$ وN'_x التي يمكن إيجادها مباشرة من صيغ الكمرات العادية، حيث

$$\begin{aligned} f_\phi &= \frac{N'_\phi}{h} = -\frac{p_z T}{h} \\ v &= \frac{N'_{x\phi}}{h} = -\frac{VQ}{2Ih} \\ f_x &= \frac{N'_z}{h} = -\frac{My}{I} \end{aligned} \tag{33.61}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولمقطع حلقي دائري،

$$\begin{aligned} M &= p_d 2\pi r \left(\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\ y &= r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ I &= \pi h r^3 \\ V &= p_d 2\pi r \left(\frac{L}{2} - x\right) \\ Q &= 2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right) \end{aligned} \tag{33.62}$$

ومن ثم يمكن إعادة كتابة هذه المعادلات على الصورة

$$\begin{aligned} N'_{\phi} &= -p_d r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ \frac{N'_{x\phi}}{h} &= -\frac{p_d 2\pi r[(L/2) - x]2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right)}{\pi h r^3 (2h)} \end{aligned} \tag{33.63}$$

مما يعطي

$$N'_{z\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L\left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{33.64}$$

and

$$\frac{N'_z}{h} = -\frac{p_d 2\pi r\left[(Lx/2) - x^2/2\right] r\cos\left(\phi_i - \phi\right)}{\pi h r^3}$$

مما يعطي

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{33.65}$$

نلاحظ أن المعادلتين 33.64 و33.65 تطابقان المعادلتين 33.59 و33.60.

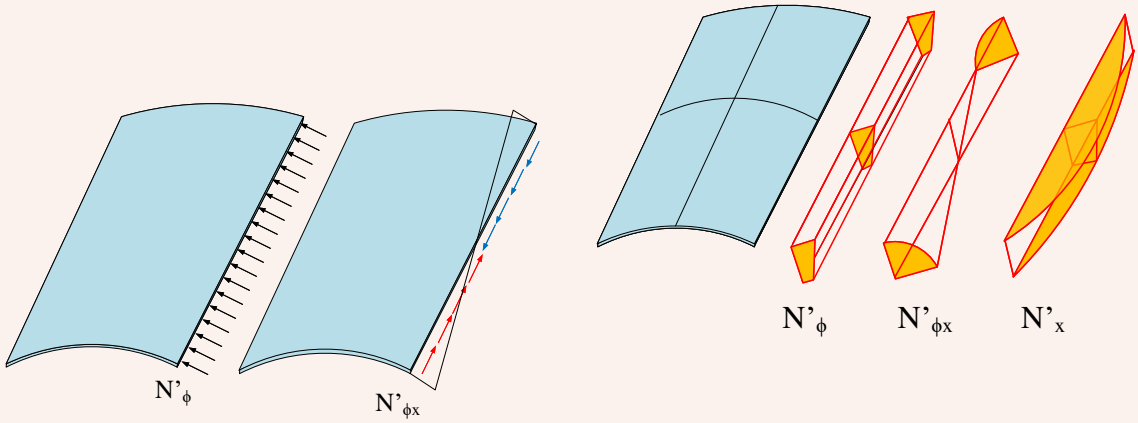
33.2.2.1.1 الأخطاء

97 لكي تعطي نظرية الغشاء محصلات الإجهاد الداخلية الصحيحة، يجب أن تساوي ردود الفعل على الحواف الطولية القيم الغشائية لـ N'_{ϕ} و$N'_{x\phi}$. غير أن ردود الفعل هذه تنعدم عند الحواف الحرة للقشرة.

98 لكي تصف نظرية الغشاء محصلات الإجهاد الداخلية وصفاً صحيحاً، يجب أن توجد عند الحواف الطولية ردود فعل تساوي القيم الغشائية N'_{ϕ} و$N'_{z\phi}$.

99 يبين الشكل 33.15a توزيع القيم الغشائية في قشرة أسطوانية، ويبين الشكل 33.15b ردود فعل الحواف المطلوبة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) قوى الغشاء (b) ردود فعل الحواف المطلوبة

شكل 33.15: آثار الحواف

33.2.2.1.2 التصحيح

100 تنعدم ردود الفعل عند الحواف الحرة. ولتعويض غياب قوى ردود فعل الحواف الحرة يجب تطبيق تصحيحات أو أحمال خطية $T_L = -N'_\phi$ و$S_L = -N'_{\phi x}$ للحصول على المحصلات الحقيقية.

101 يلزم استعمال نظرية الانحناء (§33.2.3) لتحديد الإزاحات والقوى الداخلية الناتجة من الأحمال الخطية في مرحلة التصحيح. وللتبسيط يمكن تمثيل الحمل الخطي المنتظم كمجموع أحمال جزئية بسلسلة فورييه. ولذلك يمكن تمثيل الحمل الخطي المنتظم T_L، الشكل 33.16، بسلسلة فورييه.

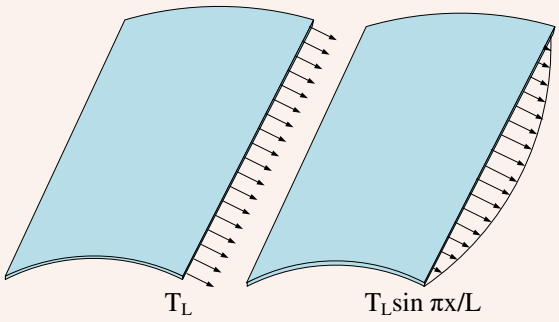
$$(T_L)_x = \frac{4}{\pi} T_L \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{33.66}$$

يجب أيضاً التعبير عن الأحمال السطحية بسلسلة فورييه لتوفير قوى وتشوهات متوافقة على طول الحواف الحرة. فمثلاً سلسلة فورييه للوزن الذاتي المنتظم للقشرة هي

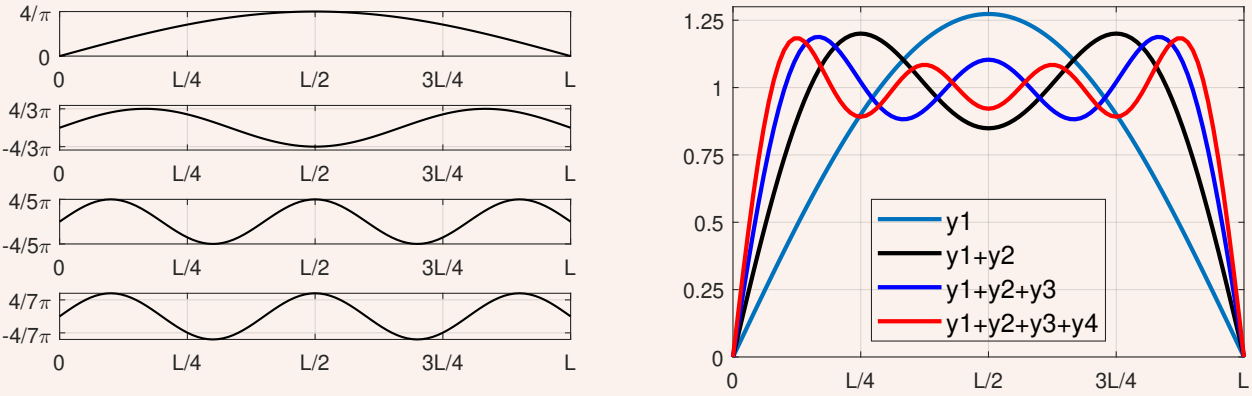
$$(p_d)_x = \frac{4}{\pi} p_d \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

يبين الشكل 33.17 الحدود الثلاثة الأولى للسلسلة، وتُقارب الموجات الثلاث مجتمعة حملاً منتظماً. وغالباً ما يكفي الحد الأول للقشريات الطويلة، بينما تتطلب القشريات القصيرة إضافة الحد الثاني. وستناقش هذه المنهجية بمزيد من التفصيل في §33.2.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 33.16: الحمل الخطي التصحيحي المطبق على القشرة الدائرية



شكل 33.17: تمثيل سلسلة الجيب

33.2.2.2 الإزاحات

102 يتطلب اشتقاق معادلات الإزاحة من نظرية الغشاء استدعاء انفعالات السطح الأوسط من §33.1.3.3 (المعادلات 33.29 و33.30 و33.31). وباستعمال تعريفات القشرة الأسطوانية الدائرية، المعادلة 33.36، يمكن إعادة كتابة الانفعالات على الصورة

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_\phi = \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi} \end{aligned} \tag{33.67}$$

103 ويمكن إعادة كتابة الانفعالات مرة أخرى بدلالة محصلات إجهاد الغشاء (§33.1.3.5.1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}\left(N'_x - \nu N'_\phi\right) \\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi &= \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}\left(N'_\phi - \nu N'_x\right) \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi} = \frac{2\,(1+\nu)}{Eh} N'_{x\phi} \end{aligned} \tag{33.68}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

104 لأن أثر ν في التشوهات ضئيل، يُهمل لتبسيط معادلات الإزاحة. وتُحل المعادلة الأولى من 33.68 لإيجاد الإزاحة الطولية

$$u = \frac{1}{Eh}\int N'_x dx + f_3(\phi) \tag{33.69}$$

وتُحل المعادلة الثالثة لإيجاد الإزاحة المماسية

$$v = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial u}{\partial \phi} dx + \frac{2}{Eh}\int N'_{x\phi} dx + f_4(\phi) \tag{33.70}$$

105 وتُستخرج الإزاحة الشعاعية من المعادلة الثانية

$$w = \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{rN'_\phi}{Eh} \tag{33.71}$$

106 يمكن حساب هذه الإزاحات لأي نوع من الأحمال. وكمثال نعتبر قشرة تحت حمل موزع بانتظام على سطحها. ويُقارب التوزيع الطولي المنتظم بالحد الأول من سلسلة فورييه، حيث $k = n\pi/L$ و$p = (4/\pi)p_d$ و$n = 1$

$$\begin{aligned} p_x &= p\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ p_\phi &= -p\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

فتصبح محصلات الإجهاد المشتقة من المعادلة 33.57:

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -pr\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ N'_{x\phi} &= -\frac{2p}{k}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\cos kx + f_1(\phi) \\ N'_x &= -\frac{2p}{rk^2}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial \phi} + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{33.72}$$

107 عند إدخال المعادلات 33.72 في المعادلات من 33.69 إلى 33.71،

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$u = \frac{1}{Eh}\left[\frac{2p}{rk^8}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx - \frac{x^2}{2r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi} + x f_2(\phi)\right] \tag{33.73}$$

$$\begin{aligned} v = &-\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^8}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^2 f_1(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial f_2(\phi)}{\partial\phi}\right] \\ &-\frac{x}{r}\frac{\partial f_3(\phi)}{\partial\phi} - \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx - x f_1(\phi)\right] + f_4(\phi) \end{aligned} \tag{33.74}$$

$$\begin{aligned} w = &\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^4}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin lx + \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^3 f_1(\phi)}{\partial\phi^3} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f_2(\phi)}{\partial\phi^2}\right] \\ &-\frac{x}{r}\frac{\partial^2 f_3(\phi)}{\partial\phi^2} + \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx + x\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial\phi}\right] + \frac{\partial f_4(\phi)}{\partial\phi} \\ &+\frac{pr^2}{Eh}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \end{aligned} \tag{33.75}$$

108 في حالة القشرة بسيطة الاستناد،

$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = f_3(\phi) = f_4(\phi) = 0$$

:and Eqs. 33.72 to 33.75 reduce to

$$u = \frac{2p}{Ehr}\frac{1}{k^3}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\cos kx \tag{33.76}$$

$$v = -\frac{2p}{Eh}\left(\frac{1}{r^2}\frac{1}{k^4} + 2\frac{1}{k^2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{33.77}$$

$$w = \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left(1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4k^4}{2}\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx \tag{33.78}$$

109 من المفيد حساب الإزاحتين الرأسية والأفقية، ويمكن إيجادهما بسهولة من المعادلتين 33.77 و33.78 كما يأتي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$
\begin{aligned}
\Delta_V =& -v\sin\left(\phi_k-\phi\right)+w\cos\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[\left(1+2r^2k^2\right)\sin^2\left(\phi_k-\phi\right)+\left(1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\right)\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[1+2r^2k^2+\frac{r^4}{2}k^4\cos^2\left(\phi_k-\phi\right)\right]\sin kx
\end{aligned}
\tag{33.79}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_H =&v\cos\left(\phi_k-\phi\right)+w\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{2p}{Ehr^2}\left(-\frac{1}{k^4}-2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}+2r^2\frac{1}{k^2}+\frac{r^4}{2}\right)\sin\left(\phi_k-\phi\right)\\
=&\frac{pr^2}{Eh}\sin\left(\phi_k-\phi\right)\cos\left(\phi_k-\phi\right)\sin kx
\end{aligned}
\tag{33.80}
$$

حيث تكون Δ_V موجبة للإزاحة إلى أسفل، وΔ_H موجبة للإزاحة إلى الداخل.

33.2.3 نظرية القشريات الضحلة

33.2.3.1 معادلات الاتزان

110 قبل إجراء التحليل بنظرية القشريات الضحلة، يجب إعادة اشتقاق معادلات محصلات الإجهاد ومزدوجاته ومعادلات الاتزان بما يلائم خواص القشرة الأسطوانية الدائرية. سبق اشتقاق معادلات الاتزان 33.28 لنظرية القشريات الضحلة في §33.1.4.1. وباستعمال تعريف القشرة الأسطوانية (§33.2.2.1) تصبح معادلات الاتزان

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x}r+\frac{\partial_{\phi x}}{\partial\phi}+p_x r=0\\
\frac{\partial N_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x}r-V_\phi+p_\phi r=0\\
\frac{\partial V_x}{\partial x}r+\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}+N_\phi+p_x r=0\\
-\frac{\partial M_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x}r+V_\phi r=0\\
-\frac{\partial M_x}{\partial x}r-\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial\phi}+V_x r=0
\end{aligned}
\tag{33.81}
$$

111 لاحظ أن النتائج نفسها تُستخرج من المعادلات 33.43a–33.43e في نظرية القشريات الضحلة، باستثناء إهمال الحد Q_ϕ في المعادلة الثانية من 33.81 للقشريات الضحلة. وتُستخرج محصلات الإجهاد ومزدوجاته من المعادلة 33.42 حيث

$$\phi_x=\frac{\partial w}{\partial x}\quad \phi_y=\frac{v}{r}+\frac{\partial w}{r\partial\phi}\quad \nu=0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

112 سبق أيضاً اشتقاق محصلات الإجهاد ومزدوجاته، المعادلة 33.42، في §33.1.4.1. وتُعدل المعادلات مجدداً لمراعاة خواص القشرة الأسطوانية

$$
\begin{aligned}
N_x &= Eh\frac{\partial u}{\partial x} \\
N_\phi &= Eh\left(\frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r}\right) \\
N_{x\phi} = N_{\phi x} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi}\right) \\
M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{r^2\partial\phi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\
M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{2r\partial x} + \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right)
\end{aligned}
\tag{33.82}
$$

وكان يمكن الحصول على هذه النتائج من المعادلات 33.44a–33.44f لنظرية القشريات الضحلة، باستثناء إهمال حدود v في المعادلتين الأخيرتين من 33.82.

33.2.3.2 الصياغة

113 بعد إعادة اشتقاق المعادلات الإحدى عشرة، يمكن البدء باشتقاق معادلة تفاضلية جزئية واحدة من الرتبة الثامنة باستعمال نظرية القشريات الضحلة. سنختزل المعادلات الإحدى عشرة في النهاية إلى معادلة واحدة بمجهول واحد، وفق الخطوات الآتية:

1. نستعيد افتراضات القشريات الضحلة في §33.1.4.1.1. ويجب التعبير عن جميع مزدوجات الإجهاد بدلالة الإزاحة الشعاعية، وذلك بإهمال حدود v في المعادلة 33.82

$$
\begin{aligned}
M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\
M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right)
\end{aligned}
\tag{33.83}
$$

2. تُكتب محصلات إجهاد القص الشعاعي بدلالة w من المعادلة 33.81

$$
\begin{aligned}
V_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{r^3\partial\phi^3} + \frac{\partial^3 w}{r\partial x^2\partial\phi}\right) \\
V_x &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{r^2\partial x\partial\phi^2}\right)
\end{aligned}
\tag{33.84}
$$

حيث h وr ثابتان.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. يمكن الآن كتابة بقية محصلات الإجهاد بدلالة w باستعمال المعادلات الثلاث الأولى من 33.81. وبالتعويض بالمعادلة 33.84 في المعادلة الثالثة من 33.81 نحصل على

$$N_\phi = \frac{Eh^3}{12}\left(r\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4}\right) - p_z r \tag{33.85}$$

ثم نعوض بـN_ϕ في المعادلة الثانية من 33.81. وبإهمال V_ϕ وفق الافتراض الثاني نحصل على

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial \phi^3} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^5 w}{\partial \phi^5}\right) + \frac{\partial p_z}{\partial \phi} - p_\phi \tag{33.86}$$

ثم تُفاضل العبارة الأخيرة بالنسبة إلى ϕ فنحصل على

$$\frac{\partial^2 N_{x\phi}}{\partial x \partial \phi}$$

وأخيراً تُفاضل المعادلة الأولى من 33.81 بالنسبة إلى x، وتُستعمل النتيجة المشتقة

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 N_{\phi x}}{\partial \phi \partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{33.87}$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{Eh^3}{12}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \phi^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial \phi^4} + \frac{1}{r^5}\frac{\partial^6 w}{\partial \phi^6}\right] - \frac{\partial^2 p_z}{r\partial \phi^2} + \frac{\partial p_\phi}{r\partial \phi} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{33.88}$$

4. تُشتق معادلة التوافق من المعادلات الثلاث الأولى في 33.82 بحذف حدود u وv:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh}N_x \\
\frac{\partial v}{\partial \phi} &= \frac{r}{Eh}N_\phi + w \\
N_{x\phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}$$

بالتفاضل نحصل على

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2} &= \frac{1}{Eh}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2} \\
\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} &= \frac{r}{Eh}\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial \phi^2}\right) \\
\frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3 \partial \phi} &= \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4} + \frac{1}{r}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2 \partial \phi^2}\right) + \frac{Eh}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}
\end{aligned} \tag{33.89}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. تُستعمل محصلات الإجهاد المشتقة في المعادلات 33.85 و33.86 و33.89 لإكمال الصياغة العامة

$$\begin{aligned}&\frac{r^2}{2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 w}{\partial x^6\partial\phi^2}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial\phi^4}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial\phi^4}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2\partial\phi^6}+\frac{1}{2r^6}\frac{\partial^8 w}{\partial\phi^8}\\&\quad+\frac{\partial^8 w}{\partial x^6\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial\phi^4}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2\partial\phi^6}+\frac{6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\&=\frac{12}{Eh^3}\left(\frac{r^2}{2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^4}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial\phi^4}-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial\phi^3}+\frac{1}{2r}\frac{\partial^3 p_x}{\partial x\partial\phi^2}+\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^2\partial\phi^2}-\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2\partial\phi}\right)\end{aligned}\tag{33.90}$$

وبجمع الحدود نحصل على

$$\begin{aligned}r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 w+\frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{12}{Eh^3}\Bigg[&r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^2 p_z\\&-2\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2\partial\phi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^8 p_\phi}{\partial\phi^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 p_z}{\partial x\partial\phi^2}\Bigg]\end{aligned}\tag{33.91}$$

باستعمال ترميز §33.1.4.1 نجد أن المعادلة 33.91 تطابق بالفعل المعادلة 33.54 عند $\nu=0$:

وبالرجوع إلى معادلة القشريات الضحلة المشتقة سابقاً، المعادلة 33.91، نجد أن معادلتنا الجديدة تأخذ الصورة نفسها عندما تساوي ν صفراً.

$$\nabla^8 w+\frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w=\frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p)+\nabla^4 f'(p)\quad\text{(Eq. 33.54)}\tag{33.92}$$

وللقشريات الأسطوانية الدائرية،

$$\begin{aligned}\nabla_R^4 w&=\frac{\partial^4 w}{r^2\partial x^4}\\\nabla^8 w&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 w\\f(p)&=\frac{1}{r^2}\int\frac{\partial^2 p_x}{\partial\phi^2}dx+r\int\frac{\partial^2 p_\phi}{\partial x^2}d\phi\\f'(p)&=\frac{p_z}{D}-\frac{1}{D}\int p_\phi d\phi\end{aligned}$$

33.2.3.2.1 الحل الخاص للحمل المنتظم

114 إذا اعتبرنا حملاً p موزعاً بانتظام على سطح القشرة، أي $p=4/pip_d$، فإن

$$\begin{aligned}p_z&=p\cos(\phi_k-\phi)\sin kx\\p_\phi&=p\sin(\phi_k-\phi)\sin kx\\p_x&=0\end{aligned}\tag{33.93}$$

115 باستعمال الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية الجزئية، المعادلة 33.92، نحدد الحل الخاص.

(33.94)

$$(-\cos(\phi_k-\phi))(-\sin kx)k^2+\frac{1}{r^2}p\sin kx\cos(\phi_k-\phi)-2k^2p\cos\phi_k(-\sin kx)-\frac{1}{r^2}p\sin kx(-\cos(\phi_k-\phi))\Bigg]$$

$$=\frac{12}{Eh^3}\left(r^2k^4+4k^2+\frac{2}{r^2}\right)p\cos(\phi_k-\phi)\sin kx$$

116 يُحدد الحل الخاص على الصورة

$$w=Cp\cos(\phi_k-\phi)\sin kx \tag{33.95}$$

وبالتعويض في الطرف الأيسر للمعادلة 33.91 نحصل على

$$r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k-\phi)\sin kx+\frac{12}{h^2}\frac{\partial^4[Cp\cos(\phi_k-\phi)\sin kx]}{\partial x^4}$$
$$=r^2\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k-\phi)\sin kx+\frac{12}{h^2}k^4Cp\cos(\phi_k-\phi)\sin kx \tag{33.96}$$

117 بمساواة الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة نحل لإيجاد الثابت C في الحل الخاص

$$C=\frac{1}{Eh}\left[\frac{r^2k^4+4k^2+2/r^2}{(r^2h^2/12)(k^2+1/r^2)^4+k^4}\right] \tag{33.97}$$

وبالتعويض في المعادلة 33.95 نحسب w عند أي نقطة بدلالة الحمل وأبعاد القشرة.

118 تُستخرج مزدوجات الإجهاد ومحصلاته والإزاحة بالتعويض بـw في المعادلات من 33.83 إلى 33.89.

33.2.3.2.2 مقارنة نظرية الغشاء بنظرية القشرة الضحلة

119 من المفيد مقارنة نتائج نظرية الغشاء بنتائج نظرية القشريات الضحلة. وترد النتائج في الجدول 33.6.

120 لاحظ أن الممارسة المعتادة تهمل أثر الانحناء وتستعمل نظرية الغشاء بدلاً من التكامل الخاص الأدق. ويقيس الحدان P وB دقة هذا النهج.

121 بالنسبة إلى الحل الخاص، يؤدي التعويض بالمعادلة 33.93 في المعادلة 33.57 إلى محصلة الإجهاد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$N'_{\phi} = -pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

122 عند التعويض بـN'_{ϕ} في الحد الثاني من المعادلة 33.57 نحصل على

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial[-pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial\phi}dx + \int p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx dx + f_1(\phi)$$

وبعد التفاضل والتكامل يصبح $N'_{x\phi}$

$$N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx + f_1(\phi)$$

حيث $f_1(\phi) = 0$ لقشرة بسيطة الاستناد.

123 نعوض بعد ذلك بالحد المشتق حديثاً في الحد الثالث من المعادلة 33.57. وبالتفاضل والتكامل نحصل على

$$N'_x = -2\frac{p}{k^2 r}\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + f_2(\phi)$$

حيث $N'_x = 0$ عند $x = 0$ و$x = L$ للكمرة بسيطة الاستناد. ومن ثم تكون $f_2(\phi) = 0$ ويمكن حذفها من المعادلة السابقة.

124 نشتق الآن الإزاحات من نظرية الغشاء باستعمال محصلات الإجهاد السابقة والمعادلات 33.69 و33.70 و33.71.

بعد التعويض نجد

$$u = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}\cos(\phi_k - \phi)\cos kx$$
$$v = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1 + 2k^2 r^2\right)\sin(\phi_k - \phi)\sin kx$$
$$w = \frac{2}{Eh}\frac{pk^4}{r^2}\left(1 + 2k^2 r^2 + \frac{r^4 k^4}{2}\right)\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

125 لاحظ أن الإزاحة المحسوبة بالحل الخاص يمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$u = u'(1 - P)$$
$$v = v'(1 - P)$$
$$w = w'\frac{1}{B + 1}$$

حيث

$$P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1 + 2k^2 r^2 + k^4 r^4)C$$
$$B = \frac{h^2}{12r^6 k^4}(k^2 r^2 + 1)^4$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن جدول المقارنة، $\phi_k = (\phi_k - \phi)$. ويُستعمل P وB لقياس دقة نهج الغشاء مقارنة بطريقة القشرة الضحلة.

126 مع أن نظرية الغشاء قد تبدو خياراً سهلاً لتجنب المعادلة التفاضلية الدقيقة من الرتبة الثامنة، فإنها لا تعطي نتائج معقولة إلا إذا تحققت شروط معينة. أولاً، يجب ألا تزيد الإزاحات انحناء القشرة زيادة مهمة لأن المنهج يهمل الانحناء كله. وثانياً، يجب أن يكون الحمل منتظماً على كامل السطح. وأخيراً، يجب أن توفر الحدود القوى وتسمح بالإزاحات التي تتطلبها النظرية. وغالباً لا يُسمح باستعمال نظرية الغشاء في التصميم، لكنها تبدو مفيدة لتسريع تصميم القشرة الأسطوانية الدائرية.

جدول 33.6: مقارنة حلي الغشاء والقشرة الضحلة للحمل المنتظم

نظرية القشرة الضحلة	نظرية الغشاء
مزدوجات الإجهاد	
$M_{\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r^2} pC \cos(\phi_k) \sin kx$	$M'_{\phi} = 0$
$M_{x\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r} kpC \sin(\phi_k) \cos kx$	$M'_{x\phi} = 0$
$M_{x^p} = \frac{Eh^3}{12} k^2 pC \cos(\phi_k) \sin kx$	$M'_{x} = 0$
محصلات الإجهاد	
$N_{\phi^p} = -pr(1-2P) \cos(\phi_k) \sin kx$	$N'_{\phi} = -pr \cos(\phi_k) \sin kx$
$N_{x\phi^p} = 2\frac{p}{k}(1-P) \sin(\phi_k) \cos kx$	$N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k} \sin(\phi_k) \cos kx$
$N_{x^p} = -\frac{2p}{k^2 r}(1-P) \cos(\phi_k) \sin kx$	$N'_{x} = -\frac{2p}{k^2 r} \cos(\phi_k) \sin kx$
Displacements	
$u^p = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r}(1-P) \cos(\phi_k) \cos kx$	$u' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3 r} \cos(\phi_k) \cos kx$
$= u'(1-P)$	$v' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}(1+2k^2r^2) \sin(\phi_k) \sin kx$
$v^p = v - (1-P)$	$w' = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4 r^2}\left(1+2k^2r^2+\frac{r^4k^4}{2}\right)$
$w^p = w'\frac{1}{B+1}$	$\cos(\phi_k) \sin kx$
$P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1+2k^2r^2+k^4r^4)C$	
$B = \frac{h^2}{12r^6k^4}(k^2r^2+1)^4$	
C From Eq. 33.97	

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

127 بعد استعراض طريقتي التحليل بنظريتي القشريات الضحلة والغشاء، نناقش بإيجاز اختلاف المنهجين ونتائجهما.

128 نظرية الغشاء طريقة تقريبية تُستعمل كثيراً لتجنب نهج القشريات الضحلة الأدق. وهي تتيح حساب محصلات الإجهاد والإزاحات من دون الانحناء لأنها تهمل انحناء القشرة كله، وتفترض أن جميع إجهادات الغشاء تؤثر في مستوى القشرة. وهذا يشبه نظرية القشريات الضحلة التي تشترط حمل الأحمال السطحية بإجهادات داخل المستوى. غير أن نظرية القشريات الضحلة، بخلاف نظرية الغشاء، تأخذ انحناء القشرة في الحسبان، مع افتراض صغر انحناء السطح وتغيره مع بقائهما ضروريين للتحليل.

129 نعرض الآن مثالين، الأول بنظرية الغشاء والثاني بنظرية القشريات الضحلة، لمقارنة نتائج الطريقتين.

33.2.3.2.3 مثال 33.1: مقارنة الغشاء والقشرة الضحلة

قشرة طويلة: المعطيات

$$h = 3\text{ in} = 0.25\text{ ft} \quad r = 26.6\text{ ft}$$
$$L = 66.5\text{ ft} \quad \frac{h}{r} = \frac{1}{106}$$
$$\frac{r}{L} = 0.4 \quad k = \frac{\pi}{L}$$
$$E = 4.32 \times 10^5 \text{ksf} \quad \phi_k = 45^\circ$$

تسمح قيم المثال الآتية باستعمال نظرية الغشاء للقشرة الطويلة بدلاً من نظرية القشريات الضحلة:

$$C = 0.0284 \text{kip/}^3\text{ft}$$
$$P = 0.00011$$
$$B = 0.000131$$

من الواضح إمكان استعمال نظرية الغشاء بدلاً من التكامل الخاص في هذه الحالة.

قشرة قصيرة: المعطيات

$$h = 4\text{ in} = 0.33\text{ ft} \quad L = 30\text{ ft}$$
$$r = 140\text{ ft} \quad \frac{h}{r} = \frac{1}{420}$$
$$\frac{r}{L} = 4.67 \quad E = 4.32\text{x}10^5\text{ ksf}$$
$$\phi_k = 45^\circ$$

تظل نتائج حالة القشرة القصيرة معقولة وتسمح باستعمال نظرية الغشاء.

$$C = 0.135 \text{kip/}^3\text{ft}$$
$$P = 0.011$$
$$B = 0.024$$

33.2.3.3 الحل العام

130 يمكن الحصول مباشرة على النظام الأولي والأخطاء الناتجة إما من نظرية الغشاء أو من التكامل الخاص. أما تحديد التصحيحات فليس سهلاً، إذ يتطلب حل الجزء المتجانس الصعب من المعادلة 33.91. ولأن القشرة الأسطوانية الدائرية من الأنظمة القشرية القليلة التي طُور حلها جيداً، نقدم هنا اشتقاقاً كاملاً.

131 يمكن كتابة المعادلة المتجانسة:

$$r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2} \right)^4 w + \frac{12}{h^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{33.98}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

33.2.3.3.1 الإزاحة w

يأخذ الحل الصورة

$$w = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_m e^{M\phi} \sin kx \tag{33.99}$$

حيث يمثل A_m وM ثمانية ثوابت اعتباطية وثمانية جذور. تعتمد الثوابت على الشروط الحدية الطولية، بينما تعتمد الجذور على أبعاد القشرة وحدها.

تُحدد الجذور M بالتعويض بالمعادلة 33.99 في المعادلة 33.98

$$r^2\left(-k^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)^4 + \frac{12}{h^2}k^4 = 0$$

Substituting

$$Q^8 = 3(kr)^4\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

فنحصل على

$$\left(M^2 - (kr)^2\right)^4 A_m e^{M\phi}\sin kx + 4Q^8 A_m e^{M\phi}\sin kx = 0$$

ويمكن إعادة كتابتها على الصورة

$$\left[\frac{M^2 - (kr)^2}{\sqrt{2}Q^2}\right]^4 + 1 = 0 \tag{33.100}$$

132 وبتعويض إضافي،

$$\gamma = \left(\frac{kr}{Q}\right)^2$$

Eq. 33.100 becomes

$$\frac{M^2}{Q^2} - \gamma = \sqrt[4]{-1}\sqrt{2} \tag{33.101}$$

133 يتبقى الحد التخيلي $\sqrt[4]{-1}$، ويُعاد كتابته على الصورة

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i}$$

حيث $i = \sqrt{-1}$. ويُكتب العدد المركب على الصورة

$$z = x + iy = \mathrm{Re}^{i\theta}$$

عندما $x = 0$ و$y = 1$ و$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ يصبح العدد المركب

$$i = e^{i\theta}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث، من معادلة أويلر،

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ومع $\theta = \pi/2$ نحصل على العلاقة المركبة

$$i = e^{i\pi/2}$$

134 بعد اشتقاق العلاقة المركبة نحسب

$$\begin{aligned}\sqrt{i} = (i)^{\frac{1}{2}} &= e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} &= \cos\pi/4 + i\sin\pi/4 \\ e^{i\pi/4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{33.102}$$

إذا عوضنا بالمعادلة 33.102 في المعادلة 33.101

$$M^2 = Q^2\left[\gamma \pm (1 \pm i)\right] \tag{33.103}$$

الجذور الثمانية الناتجة مركبة ومترافقة

$$M_1 = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1) \tag{33.104}$$
$$M_2 = \pm(\alpha_1' \pm i\beta_1') \tag{33.105}$$

حيث

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = Qm_1 \\ \beta_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = Qn_1 \\ \alpha_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = Qm_2 \\ \beta_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = Qn_2 \end{aligned} \tag{33.106}$$

135 نحدد الآن الثوابت الاعتباطية الثمانية A_m بتوسيع المعادلة 33.99.

$$w = \begin{bmatrix} A_1 e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_2 e^{(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_3 e^{(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_4 e^{(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \\ A_5 e^{-(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_6 e^{-(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_7 e^{-(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_8 e^{-(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{33.107}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

136 كما سبق، من معادلة أويلر

$$e^{\pm i\beta_1\phi} = \cos\beta_1\phi \pm i\sin\beta_1\phi$$

مما يسمح بإعادة كتابة الصف الأول من المصفوفة على الصورة

$$\left[(A_1 + A_2)\cos\beta_1\phi + i(A_1 - A_2)\sin\beta_1\phi\right] e^{\alpha_1\phi} \tag{33.108}$$

137 لكي تكون w حقيقية يجب أن يكون الثابتان A_1 وA_2 مركبين مترافقين.

$$A_1 + A_2 = 2a; \quad A_1 - A_2 = i2b \tag{33.109}$$

وتُعاد كتابته على الصورة

$$A_1 = a + ib; \quad A_2 = a - ib \tag{33.110}$$

وهكذا يكون A_1 وA_2 ثابتين مركبين مترافقين، وكذلك الأزواج الأخرى. ويمكن تبسيط المعادلة 33.108 بالتعويض من 33.109 فنحصل على

$$2(a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \tag{33.111}$$

138 بمقارنة العبارة السابقة بالحد الأول من المعادلة 33.107

$$\begin{aligned} A_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)\phi} &= (a + ib)(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \\ &= [a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi + i(b\cos\beta_1\phi + a\sin\beta_1\phi)]e^{\alpha_1\phi} \end{aligned} \tag{33.112}$$

يتضح أن المعادلة 33.111 تساوي ضعفي الجزء الحقيقي من 33.112، أي $2\mathrm{Re}\left(A_1 e^{M_1\phi}\right)$، ومن ثم

$$w = 2\mathrm{Re}\begin{bmatrix} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_2\phi} \\ A_5 e^{-M_1\phi} + A_7 e^{-M_2\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{33.113}$$

33.2.3.3.2 M_ϕ

139 لأغراض الإيضاح، لنحل لإيجاد M_ϕ من المعادلة 33.83

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} \\ &= -\frac{Eh^3}{12r^2} 2\mathrm{Re}\begin{pmatrix} A_1 M_1^2 e^{M_1\phi} + A_3 M_2^2 e^{M_3\phi} \\ A_5 M_1^2 e^{-M_1\phi} + A_7 M_2^2 e^{-M_3\phi} \end{pmatrix} \sin kx \end{aligned}$$

140 تُستخرج المشتقات الجزئية لـw بسهولة على الصورة

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial\phi} &= 2\mathrm{Re}\begin{bmatrix} A_1 M_1 e^{MM_\phi\phi} + A_3 M_2 e^{M_\phi\phi} \\ A_5\left(-M_1\right)e^{-M_1\phi} + A_7\left(-M_2\right)e^{-M_\phi\phi} \end{bmatrix} \sin kx \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\mathrm{Re}(k)\begin{bmatrix} A_1 e^{M_1\phi} + A_3 e^{M_1\phi} \\ A_s e^{-M_1\phi} + A_2 e^{-M_2\phi} \end{bmatrix} \cos kx \\ etc. \end{aligned} \tag{33.114}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبتطبيق المعادلة 33.114 تتابعياً على 33.113 يمكن إيجاد أي مشتق جزئي لـw والتعويض به في 33.83 أو 33.84 أو 33.85 و33.86 لإيجاد محصلات الإجهاد أو مزدوجاته.

141 From Eq. 33.103

$$M_1^2 = Q^2(\gamma + 1 + i)$$
$$M_2^2 = Q^2(\gamma - 1 + i)$$

ويُعطى A_1 وA_2 بالمعادلة 33.110. ومن ثم،

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{6r^2}\mathrm{Re}\begin{bmatrix} +(a+ib)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi\right)e^{\alpha_1\phi} \\ +(c+id)M_2^2\left(\cos\beta_1'\phi + i\sin\beta_1'\phi\right)e^{\alpha_1'\phi} \\ +(e+if)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi - i\sin\beta_1\phi\right)e^{-a_1\phi} \\ +(g+ih)M_2^2\left(\cos\beta_1' - i\sin\beta_1'\phi\right)e^{-\alpha_1'\phi} \end{bmatrix}\sin kx$$

أو، في الصورة الموسعة وبعد حذف الحدود التخيلية الناتجة، نجد

$$M_\phi = -\frac{Eh^2}{6r^2}Q^2\begin{bmatrix} +\left\{[a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{\alpha_1\phi} \\ +\left\{[c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{\alpha_1'\phi} \\ +\left\{[e(1+\gamma)-f]\cos\beta_1\phi + [e+f(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\}e^{-\alpha_1\phi} \\ +\left\{[g(\gamma-1)-h]\cos\beta_1'\phi + [g+h(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\}e^{-\alpha_1'\phi} \end{bmatrix}$$

142 من الملائم قياس ϕ من خط المركز الطولي أو تاج القشرة بدلاً من الحافة، كما في الشكل 33.13. وللهندسة والحمل المتناظرين نجد $a = e$ و$b = f$ و$c = g$ و$d = h$. ولحمل غير متناظر على قشرة متناظرة يمكن جمع الحالة المتناظرة بحالة متعاكسة التناظر حيث $a = -e$ وهكذا. نعيد الآن كتابة M_ϕ للحالة المتناظرة، ونستبدل الحدود الأسية بصورها الزائدية المكافئة

$$e^{\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi + \sinh\alpha\phi$$
$$e^{-\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi - \sinh\alpha\phi$$

فنحصل، مع قياس ϕ من التاج، على:

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{3r^2}Q^2\begin{bmatrix} [a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ [c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi \end{bmatrix}\sin kx \tag{33.115}$$

33.2.3.3.3 الحدود الأخرى؛ الإجراء

143 يُعبر عن الدوال الإحدى عشرة جميعاً بطريقة مماثلة، وتُلخص في الجدولين 33.7 و33.7.

144 المطلوب الآن إيجاد التصحيحات، أي آثار الحواف الناتجة من أحمال الحواف الخطية. وتُوجد عموماً بجعل ثلاثة شروط حدية مساوية للصفر والرابع مساوياً للواحد، ثم حل المعادلات الأربع المتزامنة للثوابت الاعتباطية a وb وc وd. ويمكن حل أي دالة في الجدولين 33.7 بدلالة مباشرة للحمل الخطي الوحدي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 33.7: معاملات القشرة (ϕ مقاسة من التاج)

$$F = 2R\begin{bmatrix} (aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi \end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
M_ϕ	$-\frac{2D}{T^2}\sin kx$	$Q^2(1+\gamma)$	Q^2	$Q^2(\gamma-1)$	Q^2
M_z	$2Dk^2\sin kx$	1	0	1	0
Q	$-\frac{2Dk^3}{\gamma}\cos kx$	1	1	-1	1
N_ϕ	$\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	0	1	0	-1
N_x	$-\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	-1	$1+\gamma$	1	$1-\gamma$
Q_x'	$-\frac{2Dk^2}{\gamma}\cos kx$	$\gamma+2$	2	$\gamma-2$	2
u	$\frac{4Drk^2}{hE\gamma^2}\cos kx$	-1	$1+r$	1	$1-\gamma$
w	$2\sin kx$	1	0	1	0

$$F = 2R\begin{bmatrix} (aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi \end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
Q_ϕ	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1 - n_1$	$m_1 + n_1$	$-(m_2 + n_2)$	$m_2 - n_2$
Q_ϕ'	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1(1-\gamma) - n_1$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$-m_2(1+\gamma) - n_2$	$m_2 - n_2(1+\gamma)$
$N_{x\phi}$	$\frac{4Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx$	$-n_1$	m_1	n_2	$-m_2$
ν	$\frac{4Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$n_1 - m_1(1-\gamma)$	$-m_2 + n_2(1+\gamma)$	$-n_2 - m_2(1+\gamma)$
$\theta*$	$\sin kx$	$\frac{2\alpha_1}{r} + \frac{(R.B_1)_\mu}{r}$	$\frac{2\beta_1}{r} + \frac{(R.B_2)_\nu}{r}$	$\frac{2\alpha_1'}{r} + \frac{(R.B_3)_\nu}{r}$	$\frac{2\beta_1'}{r} + \frac{(R.B_4)_\nu}{r}$
$M_{x\phi}$	$\frac{2Dk}{r}\cos kx$	α_1	β_1	α_1'	β_1'

$D = Eh^3/12$ thus $\nu = 0$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

145 مثالاً على ذلك، اعتبر الحمل الخطي $N_\phi = (4/\pi)(1)\sin kx$ المطبق بتناظر على كل حافة طولية لقشرة بسيطة الاستناد. تُكتب أربع معادلات

$$N_{\phi_k} = T_L = 8Dr\left(\frac{k^4}{\gamma^2}\right)\sin kx[\ \ ] = \frac{4}{\pi}\sin kx$$
$$M_\phi = -\frac{4D}{r^2}\sin kx[\ \ ] = 0$$
$$Q'_\phi = -\frac{4Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx[\ \ ] = 0$$
$$N_{\phi_{kx}} = \frac{8Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx[\ \ ] = 0$$

وتُحل لإيجاد الثوابت الاعتباطية. وإذا طُلبت الإزاحة المماسية v لحالة الحمل الخطي الوحدي $N_{\phi_k} = T_L$، تُعوض القيم الناتجة لـa وb وc وd في

$$v = \frac{8Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx[\ \ ]$$

146 بهذه الطريقة أُعد الجدولان 2 و3 في (Whitney **andothers,** 1952)[4]. وعندما لا تتوفر قيم مجدولة يكون من الأنسب غالباً حساب الثوابت الاعتباطية مباشرة للحمل الفعلي وشروط الحافة الكاملة بدلاً من حساب آثار الأحمال الخطية منفردة.

147 مع أن المعادلة التفاضلية الجزئية الحاكمة 33.91 اشتُقت من الافتراضات المفصلة في §33.1.1 و33.1.2 و33.2.3، فإن الحل في المعادلة 33.99 يفرض قيداً رياضياً إضافياً هو انعدام جميع الدوال التي تحتوي $\sin kx$ على الحدين $x = 0$ و$x = L$. ولذلك تنعدم قيم R المحتوية $\sin kx$ في الجدول 33.7 عند طرفي القشرة.

148 القيود الفيزيائية الرئيسة الناتجة هي أن توفر الإطارات المستعرضة التي تسند القشرة تماماً عند $x = 0$ و$x = L$: (1) صلابة تامة في مستوياتها الرأسية، أي $v_0 = W_0 = v_L = w_L = 0$؛ و(2) مرونة تامة في المستويات الموازية للسطح الأوسط للقشرة، أي $M_{x_0} = N_{x_0} = M_{x_L} = N_{x_L} = 0$. وبذلك يُفترض مثالياً أن القشرة مسندة إلى جدار عميق بما يمنع الإزاحة داخل مستواه، ورقيق بما يمنع تطور القص أو الانحناء خارج المستوى. وعلى الرغم من اختلاف المساند الفعلية كثيراً عن هذا المثال، استُعملت النظرية على نطاق واسع في تصميم منشآت سقفية ناجحة عديدة.

149 استُعملت المعادلة 33.99 أساساً لفصل المتغيرات ومعاملة الحل كحل معادلة تفاضلية عادية، على غرار حل ليفي للبلاطات. وقيد حدين من الحدود الأربعة هو الثمن المدفوع مقابل هذه الملاءمة الرياضية.

150 لمزيد من تفاصيل الإجراء، يُرجع إلى (Gibson, 1968) و(Portland Cement Association, 1954) الذي يحتوي أمثلة عددية. كما أن (Baker, Kovalevsky **and** Rish, 1972) «دليل» لحلول منشورة

[4] ويستندان بدورهما إلى عمل (Finsterwalder, 1933)؛ وتقابل الرموز $N_z,\ N_{zy}$ في الجدول الرموز $T_s,\ S,\ T_\phi,\ t,\ l,\ I$ في هذا الكتاب.

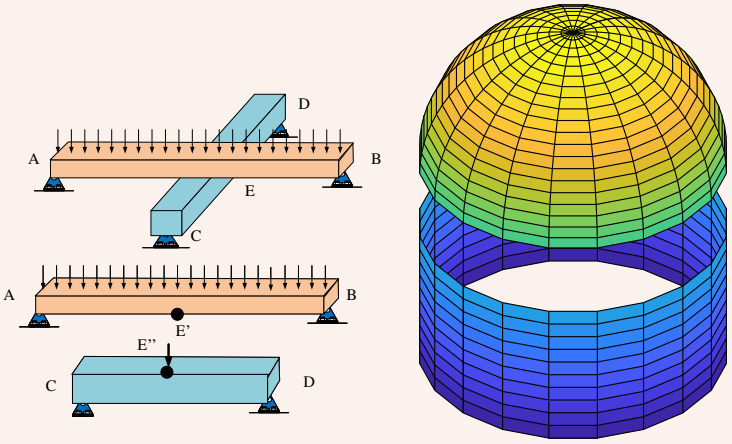
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في مصادر متعددة، ولا سيما ناسا، ويركز على تصميم منشآت الفضاء الجوي، لكنه ينطبق أيضاً على المنشآت المدنية.

151 لاحظ أن صياغات القباب والجدران ذات الهندسة المتناظرة محورياً تبسطت لأنها تتطلب معادلات تفاضلية عادية فقط وتتجنب المعادلات التفاضلية الجزئية.

33.3 القشريات غير المحددة استاتيكياً

152 قد تستند قشرة إلى مسند مرن ذي صلابة مختلفة، أو تحمل عليه. وفي هذه الحالة تظهر لااستمرارية في الإزاحة والقوة بين العنصرين، الشكل 33.18a. وهذا مشابه جداً لترتيب الكمرات في الشكل 33.18b حيث تستند كمرة إلى أخرى ذات صلابة مختلفة.



(a) قبة على قشرة برميلية (دائرية)

(b) كمرة على كمرة

شكل 33.18: التناظر بين قشرة غير محددة استاتيكياً ونظام كمرات

33.3.1 الكمرة الحافية

153 الغرض من الكمرة الحافية تقوية حافة القشرة وحمل إجهادات الانحناء بالاشتراك معها. ونبحث نوعين: الكمرات الحافية الرأسية والأفقية، الشكلان 33.19b و33.19a. تُستعمل الرأسية عادة مع القشريات الطويلة التي يكون سلوكها الرئيس الانحناء الطولي، بينما تُستعمل الأفقية مع القشريات القصيرة التي يكون سلوكها الرئيس التقوس المستعرض.

154 يتبع تحليل النوعين الخطوات الأربع المعتادة:

النظام الأولي: تحمل قشرة ذات حواف حرة الأحمال السطحية، وتوجد عند الحواف الحرة كمرات بسيطة تحمل وزنها الذاتي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

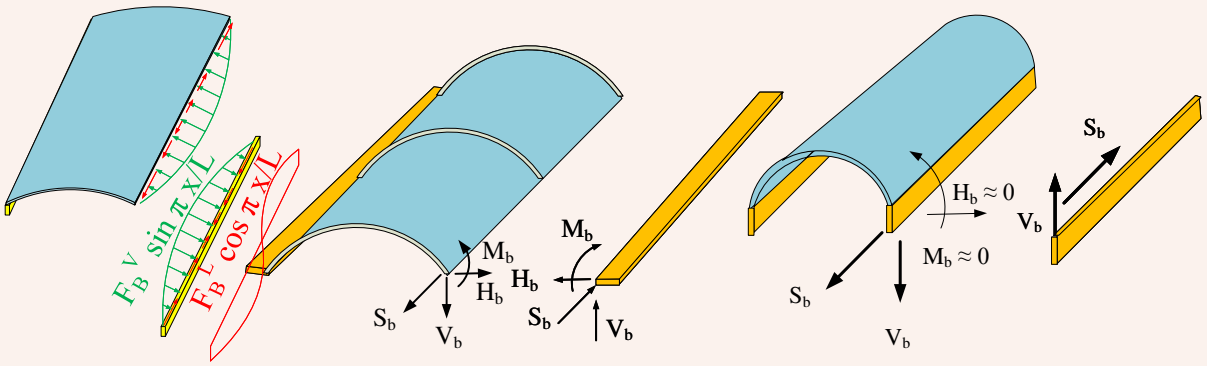
الأخطاء: يظهر خطآن بين النظامين الأوليين للقشرة والعناصر الحافية: فرق الانحراف الرأسي بين حافة القشرة الحرة والكمرة الحافية $D_{10}^S + D_{10}^B$، وفرق الإجهادات الطولية بين حافة القشرة وأعلى الكمرة $f_{20}^S + f_{20}^B$.

التصحيحات: تُطبق قوة رأسية V_b وقوة قص S_b عند الكمرة الحافية كما في الشكل 33.19c. تؤثر V_b إلى أعلى على القشرة وإلى أسفل على الكمرة، فتخفض الانحراف الرأسي والإجهادات الطولية في القشرة؛ وتُعد موجبة حين تؤثر إلى أسفل على القشرة وإلى أعلى على الكمرة. وتؤثر S_b إلى الداخل على القشرة وإلى الخارج على الكمرة، فتخفض الانحراف الرأسي والإجهادات الطولية؛ وتُعد موجبة حين تؤثر إلى الخارج على القشرة وإلى الداخل على الكمرة.

التوافق: تُطبق معادلتا توافق لاستعادة الإزاحة الرأسية والإجهادات الطولية كما يأتي

$$X_1 \left(D_{11}^S + D_{11}^B\right) + X_2 \left(D_{12}^S + D_{12}^B\right) + D_{10}^S + D_{10}^B = 0 \qquad (33.116)$$

$$X_1 \left(f_{21}^S + f_{21}^B\right) + X_2 \left(f_{22}^S + f_{22}^B\right) + f_{20}^S + f_{20}^B = 0 \qquad (33.117)$$



(a) كمرة حافية رأسية (b) كمرة حافية أفقية (c) تصحيح القوتين الرأسية والقصية

شكل 33.19: قشريات دائرية مستندة إلى مسند مرن

155 تكون الإزاحات الرأسية موجبة في اتجاه V_b الموجب. وفي الإجهادات يُعد الشد موجباً في القشرة والضغط موجباً في الكمرة.

156 سبق بحث إزاحات القشرة وإجهاداتها في §33.2.3.2.2 و(Whitney **andothers,** 1952 PDF) بنظريتي الغشاء والقشريات الضحلة. أما إزاحات الكمرة الحافية وإجهاداتها فتحسب بنظرية الانحناء العادية أدناه.

33.3.1.1 الكمرات الحافية الرأسية

157 في الكمرات الحافية الرأسية، الشكل 33.19a، تُطبق الأحمال الخطية T_L وS_L بحيث تنعدم قوى الحافة الحرة. والغرض من الكمرة مقاومة الحركة الرأسية (Δ_v) والانفعال الطولي للحافة (N_x/Eh).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

158 إذا كانت الكمرة نحيفة، يُفترض أن مقاومتها للدوران والانتقال الأفقي مهملة. وعندئذ لا تعود قوى الحافة صفراً، بل يجب تطبيق قوتي الحافة المجهولتين V_b وS_b. ويتوقف تحديدهما على خواص الكمرة الحافية وقدرتها على مقاومة الانحراف الرأسي والانفعال الطولي للحافة.

159 بما أن الأحمال الخطية على القشرة ممثلة بسلسلة فورييه، يجب تمثيل حمل الكمرة الحافية بالطريقة نفسها لتحقيق التوافق مع القشرة على طولها كله.

160 تستعمل نظرية الانحناء العادية العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= w_x = \text{الحمل} \\ EI\frac{d^3y}{dx^3} &= -S_x = \text{shear} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_x = \text{العزم} \\ \frac{dy}{dx} &= -\int_0^L \frac{M_x}{EI}dx + f_1(x) = \theta = \text{slope} \\ y &= -\int_0^L \int \frac{M_x}{EI}dx + \int_0^L f_1(x)dx + f_2(x) = \text{deflection} \end{aligned} \tag{33.118}$$

161 تُحسب قوى القص والعزوم والميول والانحرافات لحالة حمل معلومة بالتكامل المباشر. وبما أن حمل الكمرة مفترض على الصورة $V_b \sin \frac{n\pi x}{L}$، تأخذ معادلة الحمل الشكل

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_s = Vb \sin kx$$

حيث $k = n\pi/L$؛ ومن ثم

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -M = -Vb \sin kx$$

$$y = \frac{V_b}{EIk^4} \sin kx$$

162 يُحسب الإجهاد الطولي عند أعلى الكمرة بالعلاقة

$$f_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{V_b}{Z_t}\frac{1}{k^2} \sin kx$$

163 تولد قوة القص المعلومة $S_b \cos kx$ دفعاً محصلاً عند حافة الكمرة على أي مسافة x من مسندها.

$$T = -\int_0^x S_b \cos \frac{n\pi x}{L}dx = -S_b \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

164 يولد هذا الدفع عزم انحناء Te وحملاً عادياً T. ويُحسب الانحراف الرأسي من المعادلة 33.118 مع $f_1(x) = f_2(x) = 0$، ويُعاد حساب الإجهاد الطولي عند أعلى الكمرة على الصورة

$$y = -\left[\frac{S_b}{EI}\frac{1}{k^3}\sin kx\right]e \tag{33.119}$$

ويكون الإجهاد الطولي عند أعلى الكمرة

$$f_t = \frac{T}{A} + \frac{Te}{Z_t} \tag{33.120}$$

165 للمقطع المستطيل يمكن كتابة المعادلات السابقة في صورة مصفوفية. وعندما $I = bd^3/12$ و$Z = bd^2/6$ و$e = d/2$، تُلخص المعادلات كما يأتي. عندما $V_b = S_b = 1$:

$$D^B_{11} = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{12}{\pi^4 n^4}\sin kx = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{33.121}$$

$$f^B_{21} = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin kx = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx D^B_{12} \qquad = -\frac{L^3}{Ebd^2}\frac{6}{\pi^3 n^3}\sin kx \tag{33.122}$$

$$f^B_{22} = \frac{L}{bd}\frac{4}{\pi n}\sin kx \tag{33.123}$$

166 يمكن إيجاد إزاحة الكمرة وإجهادها الناجمين عن الأحمال الكاملة على الكمرة وحدها من المعادلات 33.123. وباستعمال تمثيل سلسلة فورييه للحمل الرأسي المنتظم

$$(w_{B+L})_x = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin kx$$

نشتق

$$D^B_{10} = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{33.124}$$

$$f^B_{20} = \frac{4}{\pi}w_{B+L}\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx \tag{33.125}$$

33.3.1.2 الكمرات الحافية الأفقية

167 للكمرة الأفقية، الشكل 33.19a، يكون الإجراء مماثلاً تقريباً لإجراء الكمرة الرأسية، غير أن H_b يحل محل V_b في المعادلة 33.118، ويتبادل d وb في المعادلات 33.123 لتمثيل عرض الكمرة وعمقها. وكما في الكمرة الرأسية، يُفترض إهمال صلابتها الدورانية والمستعرضة.

168 يتمثل الفرق الرئيس في إضافة حمل رأسي V_{B+L} وعزم انحناء M_{B+L} عند حافة القشرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$V_{B+L} = w_{B+L} d$$
$$M_{B+L} = w_{B+L} \frac{d^2}{2}$$

169 لذلك يُفترض أن الكمرة الحافية الأفقية تحمل وزنها ككابولي بحره d، لا ككمرة بحرها L. ولا تتجاوز عادة نسبة العمق b إلى البحر L لجميع الكمرات الحافية $1/3$، ولذلك يمكن تطبيق نظرية الانحناء العادية.

33.3.2 الكمرة الحافية سابقة الإجهاد

170 الغرض من سبق الإجهاد في الكمرة الحافية هو إتاحة تقليل أبعادها. ونتبع مجدداً إجراء التحليل ذي الخطوات الأربع:

النظام الأولي: يتكون من عنصرين منفصلين: قشرة غير محملة ذات حواف حرة، وكمرة حافية تُحلل ككمرة بسيطة خاضعة لحمل سبق الإجهاد.

الأخطاء: يظهر خطآن بين النظامين الأوليين للقشرة والعناصر الحافية: فرق الانحراف الرأسي لحافة القشرة الحرة، وفرق الإجهادات الطولية بين حافة القشرة وأعلى الكمرة الحافية. وفي الحالتين يكون انحراف حافة القشرة صفراً لأن القشرة غير محملة.

التصحيحات: تُطبق قوة رأسية V_b وقوة قص S_b عند الكمرة الحافية كما في §33.3.1. واتجاهاتهما واتفاقية إشاراتهما كما سبق في تحليل الكمرة الحافية.

التوافق: معادلات التوافق هي نفسها في §33.3.1 باستثناء حدود الخطأ المشتقة في المعادلة 33.125.

171 تُشتق حدود الخطأ الجديدة من المعادلات 33.123. وإذا اعتُبرت الكمرة الحافية كمرة بسيطة، يولد مسار كابل قطع مكافئ انحرافاً رأسياً إلى أعلى وإجهاداً طولياً عند أعلى الكمرة.

$$D^B_{10} = -\int_0^L \int \frac{M_F}{EI} dx dx + \int_0^L f_1(x) dx + f_2(x) \tag{33.126}$$
$$f^B_{20} = \frac{F}{A} - \frac{M_F}{Z_t} \tag{33.127}$$

حيث M_F عزم الانحناء الناجم عن لامركزية مسار الكابل.

172 تُحسب الانحرافات والإجهادات الناجمة عن هذا العزم على امتداد العنصر كله ما عدا المساند حيث يُفترض انعدام العزم، ثم يُستعمل الحمل المنتظم المكافئ لحساب الانحرافات والإجهادات.

$$w_e = \frac{8 F e_c}{L^2}$$

ويمكن تمثيله مجدداً بسلسلة فورييه:

$$(w_e)_x = \frac{4}{\pi} w_e \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

173 إذا كان مقطع الكمرة الحافية مستطيلاً، تُعاد كتابة المعادلة 33.126 على الصورة

$$D_{10}^{B} = \frac{4}{\pi}\frac{8Fe_c}{L^2}\frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{33.128}$$

ويُكتب الحد الثاني من المعادلة 33.127 كالحد الثاني في المعادلة 33.125

$$\frac{M_F}{Z_t} = \frac{4}{\pi}\frac{F}{bd}\sin kx - \frac{4}{\pi}\frac{8Fe_c}{L^2}\frac{L^2}{bd^2}(0.60793)\sin kx \tag{33.129}$$

174 بالنسبة إلى الحد الأول من المعادلة 33.127 يُعطى الضغط المنتظم بسلسلة فوريه:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin kx$$

بالتعويض بالمعادلتين الأخيرتين في المعادلة 33.127 واستعمال الحد الأول فقط من سلسلة فوريه نحصل على

$$f_{20}^{B} = \frac{4}{\pi}\frac{F}{bd}\sin kx - \frac{4}{\pi}\frac{8Fe_c}{L^2}\frac{L^2}{bd^2}(0.60793)\sin kx \tag{33.130}$$

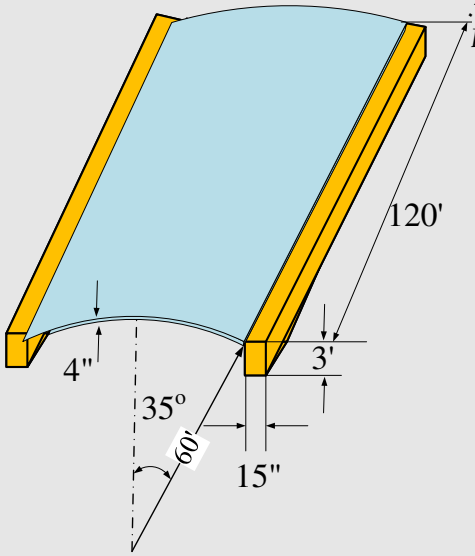
175 .are determined by inserting Eq. 33.128 and 33.130 in 33.116-33.117 S_b^F and V_b^F

33.3.2.1 مثال 33.2: تصميم قشرة أسطوانية

:ةيصخش ةظحالم ذاتسألا هسرّد يذلا ،اهميمصتو تايرشقلا ليلحت ،CE-720 ررقم يف يلزنم بجاول لح اذه يتذتاساً رثكأ نم[a] رغالاغ ذاتسألا ناكو ،لينروك ةعماج يف لوألا يلصف كلذ ناك .1976 عيبر يف رغالاغ دراشتير .باتكلا اذه يف يلح جاردإ يندعسي ،ماعلا اذه ةياهن يف يدعاقت عمو ،أماع 47 دعبو .ايلعلا يتاسارد يف أريثأت

[a] .يئاشنإلا نيسحتلاو ةددحملا رصانعلا أضيأ هعم تسرد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



المطلوب تحليل قشرة أسطوانية تحت حمل ميت مقداره 80 lb/ft^2.
افترض وجود حاجز عند كل طرف صلب في مستواه. $E = 3 \times 10^7$ psi و$\nu = 0$.
نتبع الخطوات الآتية:

1. تحليل القشرة من دون كمرات حافية، وبالاستناد إلى الحواجز الطرفية فقط، باستعمال
   (a) حل الغشاء باستعمال الجدول 2A (الملحق E)، مع جدولة النتائج ورسمها؛
   (b) الحل الدقيق بنظرية القشريات الضحلة ومقارنته بحل الغشاء.
2. اعتبار القشرة مستندة إلى الكمرة الحافية.
   (a) تحديد الإزاحات الرأسية والإجهادات في القشرة والكمرة؛
   (b) كتابة معادلة توافق الإزاحات بين القشرة والكمرة وحلها.
3. تحديد القوى النهائية المؤثرة على الكمرات الحافية.

قشرة مستندة إلى الحواجز فقط

حل الغشاء

نستعمل أولاً تقريب الغشاء لتحليل القشرة، مع ملاحظة أن لن تكون $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x}$ مساوية للصفر بسبب التقريب.

النظام الأولي تُحدد محصلات الإجهاد من نظرية الغشاء كما يلخصها الجدول 33.5.

Errors لأن النظام الأولي لم يراع وجود الكمرة الحافية، تظهر أخطاء في N'_ϕ و$N''_{\phi x}$ نتيجة نظرية الغشاء. ولذلك، باستبدال p بـ$\frac{4}{\pi}p$ (من المعادلة 33.66) ووضع $k = \frac{\pi}{L}$، تصبح المعادلات 33.72

$$
\begin{aligned}
N'_\phi &= -\frac{4}{\pi} pr \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \\
&= \frac{4}{\pi}(0.080)(60)\cos(35-0)\sin\frac{(1)\pi L}{L^2} \\
&= -5.0062/L \text{ k/ft at edge of the cylinder at} \\
N'_{\phi x} &= -\frac{8pL}{\pi^2}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx \\
&= -\frac{(8)(0.08)(120)}{\pi^2}(0.5736)(0.9997) \\
&= -4.463 \text{k/ft}
\end{aligned}
$$

عند حافة الأسطوانة حيث $x = 0$ أو L.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التصحيحات «لتقييد» الإجهاد الناتج من نظرية الغشاء على امتداد الحواف، تُطبق N'_ϕ و$N'_{\phi x}$، وتُحسب الإجهادات الناتجة من الجدول 2A (الملحق E) بدلالة

$$\begin{aligned}\frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} \simeq 200\\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6\\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ\end{aligned}$$

إذن قشرتنا برميلية متوسطة يمكن تحليلها باستعمال الجدول 2A (الملحق E).

Compatibility

$$\begin{aligned}V_L &= -N'_\phi \sin\phi_k = -(5.006)\sin 35^\circ = +2.871\\ H_L &= -N'_\phi \cos\phi_k = -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101\\ S_L &= -N'_{\phi k} = -4.463\end{aligned}$$

للتحقق من انطباق الجدول 2A:

$$\begin{aligned}\frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} = 180 \simeq 200 \text{ ومن ثم يمكن استعمال الجدول 2A}\\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6\\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ\end{aligned}$$

إذن قشرتنا برميلية متوسطة يمكن تحليلها باستعمال الجدول 2A (الملحق E).

الحمل	المضاعفات	الزاوية ϕ مقاسة من الحافة		
		35°	20°	0°
	k/ft $x = L/2$;$N_x = T_x$			
‡daoL	$C = \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos(\phi_k - \phi)$	2.026-	0.1957-	0.1660-
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	4.953-	4.784-	4.058-
$V_L^\dagger$	(col 1) C Coefficient	12.92+	8.763-	52.21+
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	148.4+	100.6-	599.6+
$H_L^\dagger$	(col 5) C Coefficient	7.760-	3.367+	22.16-
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	127.3-	55.23+	363.5-

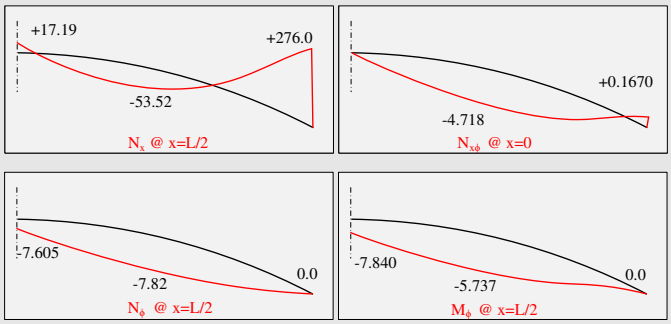
يتبع في الصفحة التالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحمل	المضاعفات	الزاوية ϕ مقاسة من الحافة		
		$35°$	$20°$	$0°$
$S_L^{\dagger}$	(col 9) C Coefficient	0.0566+	0.1818-	2.374+
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	1.048+	3.367-	43.97+
TOTAL		17.19+	53.52	276.0+
	$x = 0$;$N_{\phi x} = S$			
‡daoL	$C = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \sin(\phi_k - \phi)$	0.0	0.1648-	0.3651-
	$\frac{4}{\pi}(p)(r) \left(\frac{L}{r}\right) C$	0.0	2.014-	4.463-
$V_L^{\dagger}$	(col 2) C Coefficient	0.0	4.022+	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	23.09+	0.0
$H_L^{\dagger}$	(col 6) C Coefficient	0.0	3.036-	0.0
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	24.90-	0.0
$S_L^{\dagger}$	(col 10) C Coefficient	0.0	0.0966-	0.50+
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	0.8945-	4.630+
TOTAL		0.0	4.718-	0.10+
	$x = L/2$;$N_{\phi} = T_{\phi}$			
‡daoL	$C = -\sin \frac{\pi x}{L} \cos(\phi_k - \phi)$	1.0-	0.9659-	0.8192-
	$\frac{4}{\pi}(p)(r) \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	6.112-	5.903-	5.007-
$V_L^{\dagger}$	(col 3) C Coefficient	0.520+	2.425-	0.574+
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	1.493+	6.962-	1.648+
$H_L^{\dagger}$	(col 7) C Coefficient	0.6687	1.253+	0.8192+
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	2.742-	5.138+	3.360+
$S_L^{\dagger}$	(col 11) C Coefficient	0.0528-	0.0204-	0.0
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.2445-	0.0945-	0.0
TOTAL		7.605-	7.821-	0.001+
	$x = L/2$;M_{ϕ}			
$V_L^{\dagger}$	(col 4) C Coefficient	0.1106-	0.1266-	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	19.05-	21.81-	0.0
$H_L^{\dagger}$	(col 8) C Coefficient	0.0486+	0.0670+	0.0
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	1.96+	16.49+	0.0
$S_L^{\dagger}$	(col 12) C Coefficient	0.0027-	0.0015-	0.0
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.7501-	0.4167-	0.0
TOTAL		7.840-	5.737-	0.0

‡ الجدول 33.5؛ † الجدول E) 1-2A)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



نلاحظ مجدداً أن $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} \neq 0$ بسبب افتراضات الغشاء.

حل القشرة الضحلة

نسعى هنا إلى الحل الدقيق باستعمال الحل التحليلي للقشرة الضحلة (§33.2.3).

1. الأبعاد والأحمال: $L = 120'$ و$r = 60'$ و$h = 4"$ و$\phi_k = 35°$ و$p = 0.0$ ksf؛
2. ثوابت القشرة؛

$$k = \frac{n\pi}{L} = 0.02618; \qquad n = 1$$

$$\gamma = \frac{rk}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{h}{r}} = 0.08322$$

$$Q = \sqrt[8]{3}\sqrt[4]{\frac{r}{h}}\sqrt{rk} = 5.445$$

3. الجذور (المعادلة 33.106)؛

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = 1.1308$$

$$n_1 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = 0.4422$$

$$m_2 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = 0.469$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = 1.0662$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. معاملا M_1 وM_2؛

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= Qm_1 = 6.1572\\ \beta_1 &= Qn_1 = 2.407\\ \alpha_1' &= Qm_2 = 2.5537\\ \beta_1' &= Qn_1 = 5.8055\end{aligned}$$

5. المضاعفات المثلثية والزائدية عند $\phi = -35° = 0.6108$ rad مقاسة من التاج؛

$$\begin{array}{llll}\cos\beta_1\phi & = +0.09929 & \cos\beta_1'\phi & = -0.919\\ \sin\beta_1\phi & = -0.9950 & \sin\beta_1'\phi & = +0.39382\\ \cosh\alpha_1\phi & = +21.5116 & \cosh\alpha_1'\phi & = +2.4844\\ \sinh\alpha_1\phi & = +0.214884 & \sinh\alpha_1'\phi & = -2.2742\\ \cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = +2.1466 & \cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = -2.1443\\ \sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = +21.3812 & \sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = -21.4043\\ \cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = -2.2836 & \cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = +2.0904\\ \sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = -0.8956 & \sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = +0.9784\end{array} \tag{33.131}$$

6. شروط حافة القشرة (لاحظ أن نظرية الغشاء لم تستطع فرضها)؛

$$\begin{aligned}M_\phi &= 0\\ N_\phi &= 0 = N_\phi' + T_L\\ Q_\phi' &= Q_\phi + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial x} = 0 \quad \text{بإهمال تغير } M_{\phi x} \text{ مع } n\\ N_{\phi x} &= 0 = N_{\phi x}' + S_L\end{aligned}$$

7. معادلات M_ϕ من الجدول 33.7؛

$$\begin{array}{llllll}B_1 & = Q^2(1+\gamma) & = +32.1153 & B_3 & = Q^2(1-\gamma) & = -27.1807\\ B_2 & = Q^2 & = +29.6480 & B_4 & = Q^2 & = 29.6480\end{array}$$

بالتعويض في المعادلات المناظرة في الجدول ومساواتها بالصفر

$$2R\Big[(32.1153Q-29.6480b)(2.1466)-(29.6480a+32.1153b)(21.3812)+(-27.1807c+29.6480d)(2.2836) + (29.6480c - 27.1807d)(0.8956)\Big] = 0 \tag{33.132}$$

Simplifying

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.3612d = 0$$

8. معادلة N_ϕ من الجدول 33.7؛

$$B_1 = 0; \quad B_2 = 1; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -1$$

Substituting

$$\frac{4D(60)(0.02618)^4}{0.08322^2}\left[(-b)(2.1466) - (a)(21.3812) + d(-2.2836) - (-c)(-0.8956)\right] - \frac{5.006}{2} = 0.0$$

$$\Rightarrow 0.348070a + 0.034945b + 0.014580c + 0.037125d = -\frac{2.503}{D} \tag{33.133}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9. معادلة Q'_ϕ من الجدول 33.7؛

$$B_1 = m_1(1-\gamma) - n_1 = 0.59450 \quad B_3 = -m_2(1+\gamma) - n + 2 = -1.5742$$
$$B_2 = m_1 + n_1(1-\gamma) = 1.5362 \quad B_4 = m_2 - n_2(1+\gamma) = 0.68593$$

Substituting

$$-\frac{-20(0.02618)^3}{(\sqrt{.08322})^3}\Big[(0.5945a - 1.53626b)(-2.1443) - (1.5362a + 0.5945b)(-21.4043)$$
$$+ (-1.5742c + 0.68593d)(2.0944) - (-0.68593c - 1.5747d)(0.9784)\Big] = 0.0 \quad (33.134)$$

or

$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.97410d = 0.0$$

10. معادلة $N_{\phi x}$ من الجدول 33.7؛

$$B_1 = -n_1 = -0.4422 \quad B_3 = +n_2 = 1.0662$$
$$B_2 = +m_1 = +1.1308 \quad B_4 = m_2 = -0.4690$$

Substituting

$$\frac{8D(60)(0.02618)^4}{(\sqrt{0.08322})^5}\Big[(-0.4422a - 1.1308b)(-2.443) - (1.1308a - 0.4422b)(-21.4043)$$
$$+ (1.0662c + 0.4690d)(2.0904) - (-0.4690c + 1.0662d)(0.9784)\Big] - 4.463 = 0.0 \quad (33.135)$$

or

$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$

11. حل الثوابت الاعتباطية؛

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.361d = 0$$
$$0.34807a + 034945b + 0.14580c + .037175d = -\frac{2.505}{D}$$
$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.9741d = 0.0$$
$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$
$$\Rightarrow a = \frac{8.6097}{D}; \quad b = -\frac{26.4349}{D}; \quad c = \frac{-136.668}{D}; \quad d = \frac{-69.4923}{D};$$

12. من الجدول 33.7؛

$$D = \frac{Eh^3}{12} = \frac{(3\times 10^4)(4/12)^3}{12}(144) = 1.33\times 10^4$$

or

$$a = 6.4573\times 10^{-4}; \quad b = -0.0020; \quad c = -0.0103; \quad d = -0.0052;$$

13. ثم نعوض بهذه المعاملات والمعاملات المجدولة في المعادلة 33.131 في المعادلة 33.115 فنحصل على

$$N_x = 281.285 \text{ k/ft}$$

14. بما أننا حسبنا المعادلات عند $\phi = 35°$ من التاج، حيث $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} = 0$، فإن المقارنة الوحيدة الممكنة هي $N_x = 281.285$ k/ft مقارنة بـ276.0 k/ft من حل الغشاء النهج. والتطابق وثيق جداً!

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نظام القشرة–الكمرة

النظام الأولي

تشكل النتائج النهائية للجزء السابق النظام الأولي، وتُستعمل الإجهادات الناتجة لتحديد الإزاحات من الجدولين 2A و2B في الملحق E.

Errors

Those are due to

1. الانحرافات الرأسية؛
2. الإجهادات الطولية؛

على امتداد حافة القشرة. ومن ثم تظهر لااستمرارية على امتداد الكمرات.

تُعد صلابة الكمرة الالتوائية مهملة.

الإزاحة الرأسية لغشاء القشرة تنشأ الإزاحة الرأسية Δv من نتائج الغشاء، المعادلة 33.79، وأحمال الحواف من الجدول 2A (الملحق E).

$$\Delta v^s = \frac{L^4}{r^3 hE}\left\{\underbrace{pr\left[\left(\frac{2r}{\pi L}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{r}{L}\right)^4\right]}_{\text{انحراف الغشاء}} + \underbrace{(1)\text{العمود}V_L + (4)\text{العمود}H_L + (7)\text{العمود}S_L}_{\text{آثار أحمال الحواف في الانحرافات، الجدول 2B}}\right\}\sin kx$$

$$= \frac{(120)^4 L^2}{(60)^3(4/12)E}\left\{(0.08)(60)\left[\left(\frac{2(60)}{120\pi}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + 0.50\left(\frac{60}{120}\right)^4\right]\right.$$

$$\left.+(486.24)(2.871) - (244.3)(4.101) + (8.309)(4.63)\right\}\sin kx$$

$$= \frac{L^2}{E}(86.76)\sin kx = D_{10}^S \quad (33.136)$$

حيث يقابل الدليل 1 الانحراف الرأسي، ويقابل الدليل 0 الحمل الميت المطبق.

إجهاد حافة الغشاء عدم التوافق الآخر في الإجهادات. وعند $L/2$ يكون $N_x = T_x = 2.76$ k/ft.

$$\frac{N_x}{h} = \frac{2.76}{4/12} = 8.28 \text{ ksf} = f_{20}^S \quad \text{at } x = L/2$$

حيث يقابل الدليلان 2 و0 في f_{20}^S الإجهادات والحمل المطبق على الترتيب.

الإزاحة الرأسية للكمرة بالنسبة إلى الكمرة يوجد تشابه بين D_{10}^B وf_{20}^b. من المعادلة 33.125، حيث وزن الكمرة هو

$$w = \frac{15}{12}(3)(0.15) \text{ k/ft}^3 = 0.5625 \text{ k/ft}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$
\begin{aligned}
D^B_{10} &= -\frac{4}{\pi} w \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \\
&= -\frac{4}{\pi} (0.5625) \frac{(120)^2 L^2}{E\left(\frac{15}{12}\right)(3)^3} (0.123) \sin kx \\
&= -37.586 \frac{L^2}{E} \sin kx \\
f^B_{20} &= \frac{4}{\pi} w \frac{L^2}{bd^2} \frac{0.60793}{n^2} \sin kx \\
&= \frac{4}{\pi} (0.5625) \frac{(120)^2}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)^2} (0.60793) \sin kx \\
&= 557.37 \sin kx
\end{aligned}
$$

Incompatibilities

إزاحات القشرة تُطبق V_b وS_b أيضاً على القشرة. وكما سبق

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{L^4}{r^3 hE} ((486.24)V_b + (8.309)S_b) \sin kx \\
&= \frac{L^2}{E} \frac{(120)^2}{(60)^3 (4/12)} ((486.24)V_b + (8.309)S_b) \sin kx \\
&= \frac{L^2}{E} \left(\underbrace{97.28}_{D^s_{11}} V_b + \underbrace{1.662}_{D^s_{12}} S_L \right) \sin kx
\end{aligned}
$$

إجهاد القشرة

$$
\begin{aligned}
f^s &= \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{h} (52.21V_b + 2.374S_b) \sin kx \\
&= \left(\frac{120}{60}\right)^2 \left(\frac{12}{4}\right) (52.21V_b + 2.374S_b) \sin kx \\
&= \left(\underbrace{626.52}_{f^s_{21}} V_b + \underbrace{28.488}_{f^s_{22}} S_b \right) \sin k_x
\end{aligned}
$$

إزاحات الكمرة (المعادلة 33.123)

$$
\begin{aligned}
\Delta v^b &= \frac{L^4}{bd^3 E} \left[(0.123)V_b - \frac{d}{L}(0.1935)S_b \right] \sin kx \\
&= \frac{L^2 (120)^3}{(15/12)(3)^3 E} \left[(0.123V_b - \frac{3}{120}(0.1935)S_b \right] \sin kx \\
&= \frac{L^2}{E} \left(\underbrace{52.48}_{D^b_{11}} V_b \underbrace{-2.064}_{D^b_{12}} S_b \right) \sin kx
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إجهاد الكمرة

$$\begin{aligned} f_t^b &= \frac{L}{bd}\left(-0.608\frac{L}{d}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{120}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)}\left(-0.608\frac{120}{3}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{-778.24}_{f_{21}^b}V_b + \underbrace{40.736}_{f_{22}^b}S_b\right)\sin kx \end{aligned}$$

Compatibility

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{E}\left[(\underbrace{97.28}_{D_{11}^s} + \underbrace{52.48}_{D_{11}^b})V_b + (\underbrace{1.662}_{D_{12}^s} - \underbrace{2.064}_{D_{12}^b})S_b + (\underbrace{86.76}_{D_{10}^s} - \underbrace{37.586}_{D_{10}^b})\right] = 0 \\ (\underbrace{626.52}_{f_{21}^s} - \underbrace{778.24}_{f_{21}^b})V_b + (\underbrace{28.488}_{f_{22}^s} + \underbrace{40.736}_{f_{22}^b})S_b + (\underbrace{828.0}_{f_{20}^s} + \underbrace{557.37}_{f_{20}^b}) = 0 \end{cases}$$

or

$$\begin{bmatrix} 149.76 & -0.402 \\ -151.72 & 69.224 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -49.174 \\ -1,385.37 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.3839 \\ -20.85 \end{Bmatrix}$$

القيم النهائية للكمرة

وجدنا سابقاً $N'_\phi = -5.006$ و$N'_{\phi x} = -4.463$.

$$\begin{aligned} V_L &= -(-5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -4.463 \end{aligned}$$

الحمل	المضاعفات	الزاوية ϕ مقاسة من الحافة		
		35°	20°	0°
	k/ft $x = L/2$;$N_x = T_x$			
قشرة بسيطة		17.19+	53.52-	276.0+
V_L	(col 1) C Coefficient	12.92+	8.763-	52.21+
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	19.84-	13.46+	80.17-
S_B	(col 9) C Coefficient	0.0566+	0.1818-	2.374+
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	4.72-	15.16+	198.0-

...Continued

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحمل	المضاعفات	الزاوية ϕ مقاسة من الحافة		
		$35°$	$20°$	$0°$
TOTAL		7.37-	24.9-	2.17-
	$x = 0$;$N_{\phi x} = S$			
قشرة بسيطة		0.00	4.718-	0.167+
V_B	(col 2) C Coefficient	0.0	4.022+	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	3.088-	0.0
S_B	(col 10) C Coefficient	0.0	0.0966-	0.50+
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	4.028+	20.85-
TOTAL		0.0	3.778-	20.68-
	$x = L/2$;$N_\phi = T_\phi$			
قشرة بسيطة		7.605-	7.821-	0.0
V_B	(col 3) C Coefficient	0.520+	2.425-	0.574+
	$V_B C$	0.199-	0.931+	0.220-
S_B	(col 11) C Coefficient	0.0528-	0.0204-	0.0
	$S_B C$	1.10+	0.425+	0.0
TOTAL		6.70-	6.46-	0.22-
	$x = L/2$;M_ϕ			
قشرة بسيطة		7.84-	5.737-	0.0
V_B	(col 4)C Coefficient	0.1106-	0.1266-	0.0
	$V_B r C$	2.55	2.92+	0.0
S_B	(col 12) C Coefficient	0.0027-	0.0015-	0.0
	$S_B r C$	3.38+	1.88+	0.0
TOTAL		1.91-	0.937-	0.0

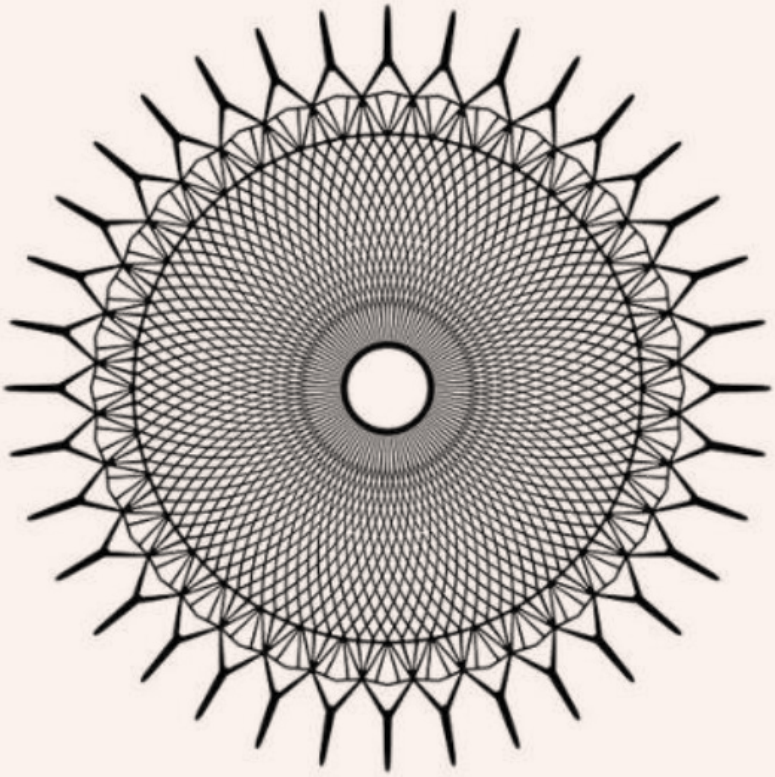
33.3.3 شفرة MATLAB®ومثال عددي

176 ترد في الملحق I.2.1 شفرة أولية بلغة MATLAB®لتصميم القشريات الدائرية.

177 يرد حل عددي إضافي للقشرة الأسطوانية في الملحق F من (Portland Cement Association, 1954)، وهو قائم على (Whitney **andothers**, 1952) ويكاد يطابق حل Billington, 1965.

178 يمكن العثور على معلومات إضافية في كتاب Gibson, 1968 التأسيسي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



قصر الرياضة الصغير، بيير لويجي نيرفي، 1957، روما، إيطاليا.

مثال للقشريات الإنشائية؛ إذ تحمل القشرة الخرسانية المسلحة الرقيقة والمنحنية الأحمال بكفاءة عبر الفعل الغشائي، فتقلل إجهادات الانحناء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34 الديناميكا الإنشائية الأولى

ملخص

يطور هذا الفصل أسس الديناميكا الإنشائية اللازمة لمقرر تمهيدي. يبدأ بمعادلة الحركة ومعنى العطالة والتخميد، ثم يعالج بعمق المهتز أحادي درجة الحرية: الاهتزاز الحر غير المخمد والمخمد، والإثارة التوافقية والرنين، والاستجابة العابرة لأحمال الخطوة والنبضة والأحمال العامة باستعمال تكامل دوهاميل. ثم يمتد إلى الأنظمة متعددة درجات الحرية مفاهيمياً وتحليلياً، مع التركيز على أشكال الأنماط وفصلها وتفسير الاستجابة الزلزالية بأطياف الاستجابة. ويظل التركيز على الفهم الفيزيائي والتحليل اليدوي تمهيداً للطرائق الحاسوبية في فصل الدراسات العليا.

34.1 الأسس الفلسفية 1166
34.2 متى يلزم التحليل الديناميكي؟ 1166
34.3 المبادئ الأساسية 1167
34.3.1 مبدأ دالمبير والاتزان الديناميكي 1167
34.3.2 المهتز أحادي درجة الحرية . . . 1167
34.3.3 التردد الطبيعي والدور 1168
34.3.4 التخميد ونسبته 1169
34.4 الاهتزاز الحر 1170
34.4.1 الاهتزاز الحر غير المخمد . . . 1170
34.4.2 الاهتزاز الحر المخمد 1171
34.4.3 التناقص اللوغاريتمي 1171
34.5 الاهتزاز القسري: الإثارة التوافقية 1173
34.5.1 الاستجابة التوافقية غير المخمدة 1173
34.5.2 الاستجابة التوافقية المخمدة . . 1174
34.6 الاستجابة لحمل عام 1175
34.6.1 استجابة النبضة والنبضة الوحدية 1175
34.6.2 تكامل دوهاميل 1177
34.6.3 تحليل فوريه والاستجابة الترددية 1180
34.7 إثارة المساند والاستجابة الزلزالية 1182
34.7.1 معادلة الحركة لإثارة القاعدة . . 1182
34.7.2 أطياف الاستجابة 1183
34.8 الأنظمة متعددة درجات الحرية 1185
34.8.1 معادلات الحركة 1185
34.8.2 الاهتزاز الحر غير المخمد: الأنماط الطبيعية 1185
34.8.3 التحليل النمطي 1186
34.8.4 المشاركة النمطية في الاستجابة الزلزالية 1187
34.9 الأنظمة المستمرة 1189
34.9.1 الاهتزاز المحوري للقضبان . . . 1189
34.9.2 الاهتزاز المستعرض للكمرات . . 1190
34.10 الديناميكا اللاخطية 1192
34.10.1 مصادر اللاخطية 1192
34.10.2 التخلفية وتبديد الطاقة 1192
34.10.3 المطيلية وتصميم السعة 1194
34.11 اعتبارات عملية 1196
34.11.1 التخميد في المنشآت الحقيقية . 1196
34.11.2 تفاعل التربة والمنشأ 1196
34.11.3 مخمدات الكتلة الموالفة 1196
34.11.4 مثال 34.13: تصميم مخمد كتلة موالف لمبنى عالٍ 1197
34.11.5 العزل القاعدي 1198
34.11.6 مثال 34.14: تصميم مبنى مستشفى معزول قاعدياً 1198
34.12 ملاحظات ختامية 1200
34.12.1 تحذير مهني بشأن طرائق طيف الاستجابة 1200
34.12.2 ملاحظة أخيرة: حدود النظرية الخطية 1200

كُتب هذا الفصل كاملاً بواسطة كلود عبر نحو ستين توجيهاً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.1 الأسس الفلسفية

1 عالجنا المنشآت في الفصول السابقة كأنها في اتزان خارج الزمن: قوى تُطبق لحظياً وتبقى إلى الأبد، وإزاحات تحدث بلا حركة، وإجهادات تنشأ بلا تاريخ. هذا التصور مفيد لفهم العلاقات الأساسية بين الحمل والاستجابة، لكنه لا يمثل إلا حالة حدية. فالعالم الحقيقي ديناميكي؛ تتغير الأحمال مع الزمن، وللكتل عطالة، وتتبدد الطاقة بالتخميد. تدرس الديناميكا الإنشائية استجابة المنشآت للإثارات المتغيرة زمنياً، وهي الجسر بين التحليل السكوني وسلوك المنشآت الفعلي تحت الرياح والزلازل والصدم واهتزاز الآلات وسواها.

2 الانتقال من السكون إلى الديناميكا ليس مجرد إضافة حدود زمنية إلى معادلات مألوفة، بل تحول أساسي في المنظور. نسأل في السكون عن حالة الإجهاد والتشوه تحت حمل معين، وفي الديناميكا عن تطور المنشأ مع الزمن تحت إثارة متغيرة. ولا تعتمد الإجابة على الصلابة وحدها، بل أيضاً على توزيع الكتلة وخصائص تبديد الطاقة. وتشكل الصلابة والكتلة والتخميد ثالوث الديناميكا الإنشائية.

3 يوازي التطور التاريخي للديناميكا الإنشائية تطور الميكانيكا الكلاسيكية. أسست قوانين نيوتن للحركة المنشورة في *المبادئ الرياضية* (1687) المجال، وشغلت اهتزازات الأوتار والأغشية أويلر ودالمبير وأسرة برنولي في القرن الثامن عشر. وجمع رايلي في *نظرية الصوت* (1877) كثيراً من الإطار الرياضي المستخدم اليوم. ثم جاء القرن العشرون بتحدي هندسة الزلازل وتطوير أطياف الاستجابة والتكامل العددي الزمني والتصميم القائم على الأداء. واليوم تعد الديناميكا الإنشائية أداة أساسية لكل مهندس إنشائي.

34.2 متى يلزم التحليل الديناميكي؟

4 السؤال البسيط ظاهرياً هو: متى يلزم التحليل الديناميكي؟ يلزم عندما يكون تردد الحمل المطبق من رتبة مقدار التردد الطبيعي للمنشأ. فإذا تقارب الترددان قد يحدث الرنين، فتتضخم الاستجابة إلى قيم تفوق توقع التحليل السكوني بكثير، وأحياناً بصورة كارثية.

5 يترتب على ذلك أن المنشأ المرن منخفض التردد الطبيعي أكثر عرضة للإثارة الديناميكية من المنشأ الصلب، لأن تردده الطبيعي أقرب إلى ترددات الرياح والآلات والزلازل والنشاط البشري. أما المنشأ الصلب فعالي التردد الطبيعي ويستجيب لمعظم الأحمال استجابة شبه سكونية، فيكفيه التحليل السكوني التقليدي.

6 يلزم التحليل الديناميكي عملياً في أربع حالات: الأحمال السريعة التغير كالانفجار والصدم؛ حمل آلات دوارة قد يتوافق تردد تشغيلها مع نمط إنشائي؛ مقاومة الزلازل التي تثير نطاقاً واسعاً من الترددات؛ والمنشآت النحيفة أو المرنة المعرضة للرياح حيث قد يسبب انفصال الدوامات أو الرفرفة رنيناً.

7 قاعدة تقريبية مفيدة: إذا تجاوز التردد الغالب للحمل نحو ثلث التردد الطبيعي الأساسي للمنشأ، تصبح الآثار الديناميكية غير مهملة ويجب تقييمها. ودون ذلك يكفي عموماً تحليل سكوني بمعاملات تضخيم مناسبة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.3 المبادئ الأساسية

34.3.1 مبدأ دالمبير والاتزان الديناميكي

للسياق التاريخي، انظر §6.7.4

8 حجر الزاوية في الديناميكا الإنشائية هو مبدأ دالمبير المنشور في *رسالة في الديناميكا* (d'Alembert, 1743). فقد أعاد دالمبير صياغة قانون نيوتن الثاني كمبدأ اتزان ديناميكي بإدخال قوة *العطالة*. فإذا تسارع جسم كتلته m بمقدار $\ddot{u}$، يمكن عد $-m\ddot{u}$ قوة افتراضية مؤثرة عليه بحيث يساوي مجموع القوى كلها، ومنها قوة العطالة، صفراً. وتحول هذه الصياغة مسائل الديناميكا إلى مسائل اتزان يمكن تطبيق طرائق السكون عليها.

9 لجسيم كتلته m خاضع لقوة خارجية $F(t)$، ينص قانون نيوتن الثاني على:

$$F(t) = m\ddot{u}(t)$$

حيث $\ddot{u}(t) = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$ هو التسارع. وبإعادة الترتيب:

$$F(t) - m\ddot{u}(t) = 0$$

وهذا مبدأ دالمبير: تتزن القوة المطبقة $F(t)$ مع قوة العطالة $F_I = -m\ddot{u}(t)$، فيتحقق الاتزان الديناميكي في كل لحظة.

10 تكمن فائدة مبدأ دالمبير في امتداده إلى الأنظمة المستمرة وصياغات العمل الافتراضي. فبمعاملة قوى العطالة كالقوى المطبقة يمكن استعمال العمل الافتراضي ومبدأ هاملتون ومعادلات لاغرانج لاشتقاق معادلات حركة منشآت معقدة. والثمن أن معادلات «الاتزان» تصبح معادلات تفاضلية زمنية تحتاج شروطاً ابتدائية وتكاملاً لإيجاد الاستجابة.

34.3.2 المهتز أحادي درجة الحرية

11 النظام أحادي درجة الحرية للديناميكا الإنشائية كالكمرة بسيطة الاستناد للتحليل الإنشائي: المثال النموذجي لتقديم المفاهيم. اعتبر كتلة m مقيدة بالحركة في اتجاه واحد، موصولة بمسند ثابت بنابض صلابته k ومخمد لزج معامله c. عندما تُزاح الكتلة $u(t)$ عن موضع اتزانها وتخضع لقوة خارجية $F(t)$ تنشأ ثلاث قوى داخلية:

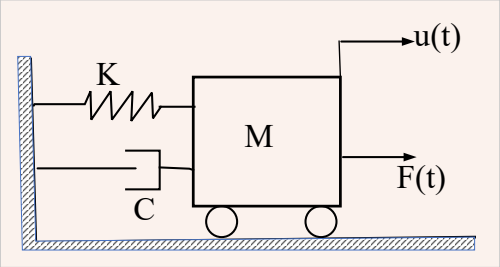
- **قوة الاستعادة المرنة**: $F_S = ku(t)$، تتناسب مع الإزاحة وتتجه نحو الاتزان.
- **قوة التخميد**: $F_D = c\dot{u}(t)$، تتناسب مع السرعة وتعاكس الحركة.
- **قوة العطالة**: $F_I = m\ddot{u}(t)$، تتناسب مع التسارع.

12 يبين الشكل 34.1 مخطط نموذج الكتلة–النابض–المخمد المثالي.

13 بتطبيق مبدأ دالمبير، أي جعل مجموع القوى صفراً، نحصل على معادلة الحركة الأساسية:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \tag{34.1}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 34.1: مهتز مثالي أحادي درجة الحرية

تحكم هذه المعادلة التفاضلية العادية الخطية من الرتبة الثانية استجابة النظام لأي إثارة $F(t)$. ويتطلب حلها شرطين ابتدائيين: الإزاحة $u(0) = u_0$ والسرعة $\dot{u}(0) = v_0$.

14 تبدو معادلة النظام أحادي الحرية (34.1) بسيطة، لكنها تختزل فيزياء الاهتزاز الأساسية. تمثل حدود الطرف الأيسر آليات مقاومة الحمل الديناميكي الثلاث: العطالة المعتمدة على التسارع، والتخميد المعتمد على السرعة، والصلابة المعتمدة على الإزاحة. وتحدد مقاديرها النسبية وتغيرها مع التردد طبيعة الاستجابة.

34.3.3 التردد الطبيعي والدور

15 لكل منشأ خواص ديناميكية ذاتية تعتمد على كتلته وصلابته لا على الحمل. وأهمها *التردد الطبيعي* المعرف للنظام غير المخمد أحادي الحرية بالعلاقة:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/s)}$$

يمثل التردد الزاوي ω_n معدل اهتزاز النظام غير المخمد بعد إزاحته وإطلاقه. والدور الطبيعي والتردد الدوري المناظران هما:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(s)}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Hz)}$$

34.3.3.1 مثال 34.1: حساب ω_n وT_n وf_n لنظام أحادي الحرية

اعتبر كتلة طابق $m = 2000$ kg مسندة جانبياً بصلابة مكافئة $k = 800$ kN/m.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800 \times 10^3}{2000}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ s}, \qquad f_n = \frac{1}{T_n} \approx 3.18 \text{ Hz}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16 ربما يكون التردد الطبيعي أهم معامل منفرد في الديناميكا الإنشائية؛ فهو يحدد تردد الرنين والاستجابة للنبضات وعلاقة الطور بين الإثارة والاستجابة. ويعني التردد الطبيعي العالي صلابة عالية أو كتلة صغيرة أو كليهما، فتستجيب الأنظمة سريعاً بإزاحات صغيرة. أما التردد المنخفض فيعني مرونة أو كتلة كبيرة واستجابة أبطأ قد ترافقها إزاحات كبيرة.

17 في التصميم الأولي تُقدر الأدوار الطبيعية بصيغ تجريبية. ومن التقريبات الشائعة للمباني:

$$T_n \approx 0.1N \quad \text{(s)}$$

حيث N عدد الطوابق. وتلتقط هذه القاعدة التقريبية الاتجاه الأساسي: المباني الأعلى أكثر مرونة وأطول دوراً. وتراعي التقديرات الأدق نوع النظام الإنشائي والمادة والترتيب.

34.3.4 التخميد ونسبته

18 تبدد المنشآت الحقيقية الطاقة أثناء الاهتزاز. وينشأ هذا *التخميد* من الاحتكاك الداخلي في المواد والوصلات والمساند والمقاومة الهوائية وإشعاع الطاقة إلى الوسط. ومع تعقد فيزيائه، تعتمد الديناميكا الإنشائية نموذج *التخميد اللزج* المبسط الذي تتناسب فيه قوة التخميد مع السرعة.

19 وحدات معامل التخميد c قوة لكل سرعة، لكن نسبته إلى القيمة الحرجة أهم من قيمته المطلقة. ويُعرّف معامل *التخميد الحرج* بالعلاقة:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

يعود النظام ذو هذا المعامل تماماً إلى الاتزان في أقصر زمن دون تذبذب. وتعبر *نسبة التخميد* ζ عن التخميد الفعلي كجزء من الحرج:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

20 نسبة التخميد بلا أبعاد وصغيرة عادة: $\zeta \approx 0.01$ إلى 0.05 لمعظم المباني والجسور. ومع صغرها تؤثر بقوة في الاستجابة، ولا سيما قرب الرنين حيث تحد التضخيم غير المحدود.

21 توجد ثلاثة أنماط للسلوك المخمد:

- **ناقص التخميد ($\zeta < 1$):** يهتز النظام بسعة تتناقص تدريجياً، وهي حالة معظم المنشآت.
- **حرج التخميد ($\zeta = 1$):** يعود النظام إلى الاتزان دون اهتزاز في أقصر زمن، وهو نادر إنشائياً.
- **زائد التخميد ($\zeta > 1$):** يعود دون اهتزاز لكن أبطأ من الحالة الحرجة، وهو غير شائع إنشائياً.

22 التردد الطبيعي المخمد لنظام ناقص التخميد هو:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

لنسب التخميد الإنشائية المعتادة ($\zeta < 0.1$)، يكون $\omega_d \approx \omega_n$ بفارق أقل من **1%**. ولا يغدو الفرق مهماً إلا للأنظمة عالية التخميد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الشروط الابتدائية كمتغيرات حالة

لا تمثل الإزاحة والسرعة الابتدائيتان مجرد بيانات تنظيمية، بل تحددان حالة النظام الأولية وتقسيم الطاقة بين الحركية والوضعية عند $t = 0$، وقد تهيمنان على الاستجابة المبكرة حتى بلا إثارة خارجية. تحددان ثوابت التكامل في الحلول التحليلية، وتدخلان كمتجه الحالة الأولية في التكامل العددي.

ملاحظة نمذجة حول التخميد

بخلاف الصلابة والكتلة، نادراً ما يُعرف التخميد من المبادئ الأولى. ويُدخل التخميد اللزج كنموذج فعال يلتقط تبديد الطاقة المرصود بصيغة رياضية مريحة. لذا تُعاير معاملاته بالتجارب أو القياسات الحقلية أو الحكم الهندسي، ويجب مراعاة حساسية الاستجابة المتوقعة لنموذج التخميد المفترض.

34.4 الاهتزاز الحر

23 يحدث الاهتزاز الحر عندما يهتز النظام بلا قوة خارجية، مدفوعاً بالشروط الابتدائية وحدها. وتكشف هذه الحالة الطبيعة الديناميكية الأساسية وتمهد لفهم الاهتزاز القسري.

34.4.1 الاهتزاز الحر غير المخمد

24 في الحالة غير المخمدة ($c = 0$) تختزل معادلة الحركة إلى:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

بقسمة المعادلة على m وإدخال $\omega_n^2 = k/m$:

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

وهذه معادلة الحركة التوافقية البسيطة، وحلها العام:

$$u(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

حيث A وB ثابتان تحددهما الشروط الابتدائية. مع $u(0) = u_0$ و$\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = u_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

25 يمكن كتابة الحل بصيغة السعة–الطور المكافئة:

$$u(t) = \rho\cos(\omega_n t - \phi)$$

حيث السعة ρ وزاوية الطور ϕ:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \tan\phi = \frac{v_0}{\omega_n u_0}$$

يهتز النظام غير المخمد إلى الأبد بسعة ثابتة ρ، ويتم دورة في الزمن $T_n = 2\pi/\omega_n$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.4.2 الاهتزاز الحر المخمد

26 مع التخميد تصبح معادلة الحركة:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

بقسمة المعادلة على m وإدخال ζ وω_n:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

27 نبحث عن حلول على الصورة $u(t) = Ce^{st}$. ويعطي التعويض المعادلة المميزة:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

بجذرين:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

28 في حالة نقص التخميد ($\zeta < 1$) يكون الجذران مركبين مترافقين:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

حيث $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ التردد الطبيعي المخمد، والحل العام:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

مع الشرطين $u(0) = u_0$ و$\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

29 يمثل الحل اهتزازاً بتردد ω_d وسعة تتلاشى أسياً بمعدل $\zeta\omega_n$. وغلاف الاهتزاز $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$، حيث تحدد الشروط الابتدائية ρ. ويسكن النظام في النهاية بعد اقتراب اهتزازي من الاتزان.

34.4.3 التناقص اللوغاريتمي

30 يوفر التناقص اللوغاريتمي طريقة عملية لتحديد نسبة التخميد من استجابة الاهتزاز الحر المقاسة. اعتبر قمتين متتاليتين عند t_1 و$t_2 = t_1 + T_d$، حيث $T_d = 2\pi/\omega_d$ الدور المخمد. نسبة السعتين:

$$\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

يُعرّف التناقص اللوغاريتمي δ بأنه اللوغاريتم الطبيعي لهذه النسبة:

$$\delta = \ln\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31 للتخميد الصغير ($\zeta \ll 1$) تختزل إلى:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \tag{34.2}$$

عملياً يحسن القياس عبر n دورات الدقة:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{u_1}{u_{n+1}} \tag{34.3}$$

34.4.3.1 مثال 34.2: تقدير التخميد من التناقص اللوغاريتمي

افترض إطلاق نظام خفيف التخميد من السكون وقياس سعتي القمة $u_1 = 10\ \text{mm}$ و$u_6 = 6\ \text{mm}$، أي عبر $n = 5$ دورات. باستخدام المعادلة (34.3):

$$\delta = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{1}{5}(0.5108) = 0.1022$$

للتخميد الصغير تعطي المعادلة (34.2):

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.1022}{6.283} = 0.0163 \approx 1.6\%$$

ملحق تكميلي: الاهتزاز الحر (مدمج من الملحق السابق)

32 المعادلة الحاكمة للاهتزاز الحر غير المخمد للمنشأ هي

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

وتسمى الحركة حرة لعدم وجود أحمال مطبقة.

33 بافتراض حركة توافقية

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\sin\omega t$$

يمكن تحديد الترددات الطبيعية ω وأشكال الأنماط المناظرة $\boldsymbol{\phi}$ من مسألة القيم الذاتية المعممة

$$\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}$$

أو

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

34 بما أن $\boldsymbol{\phi}$ غير صفري،

$$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0$$

أو بوضع $\omega^2 = \lambda$

$$|\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| = 0$$

وهي المعادلة المميزة؛ وتسمى λ القيمة الذاتية، ويقال إن المنشأ يستجيب بالنمط المناظر لتردد معين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35 لأغراض الحساب، إذا ضربنا طرفي المعادلة السابقة من اليسار في $\mathbf{M}^{-1}$، فإن

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\phi} = 0$$

36 لاحظ أن كل حركة ممكنة لجسم صلب في منشأ غير مسند بالكامل تعطي قيمة ذاتية صفرية (§44.1.1). وتختلف النتائج قليلاً باختلاف مصفوفة الكتلة؛ وعموماً تقترب مصفوفات الكتلة المجمعة من القيمة الدقيقة، أي مصفوفة الكتلة المتسقة، من الأسفل.

37 أشكال الأنماط $\boldsymbol{\phi}$ هي «أشكال» تعطي مقادير نسبية لدرجات الحرية لا قيماً مطلقة، لأنها حلول معادلات متجانسة. وتوفر الترددات الطبيعية وأشكال الأنماط وصفاً أساسياً للمنشأ المهتز.

34.5 الاهتزاز القسري: الإثارة التوافقية

38 عندما يخضع المنشأ لقوة دورية يستقر في النهاية في اهتزاز دائم بتردد القوة. وتكشف هذه الاستجابة التوافقية ظاهرة الرنين وتمهد لفهم الإثارات الأكثر تعقيداً.

34.5.1 الاستجابة التوافقية غير المخمدة

39 اعتبر نظاماً غير مخمد خاضعاً لقوة جيبية $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$، حيث ω تردد الإثارة وليس بالضرورة مساوياً لـω_n:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

يتكون الحل الكامل من الحل المتمم المتجانس وحل خاص. وعندما $\omega \neq \omega_n$ يكون الحل الخاص:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)$$

40 الإزاحة السكونية تحت F_0 هي $u_{st} = F_0/k$. وتسمى نسبة الإزاحة الديناميكية إلى السكونية معامل *التضخيم الديناميكي*:

$$D = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

حيث $\beta = \omega/\omega_n$ نسبة التردد. وهذا المعامل مفتاح فهم الاستجابة:

- عند $\beta \ll 1$: $D \approx 1$، والاستجابة شبه سكونية وقوى العطالة مهملة.
- عند $\beta \gg 1$: $D \approx 0$، إذ لا تستطيع الكتلة متابعة القوة السريعة وتبقى شبه ساكنة.
- عند $\beta \to 1$: $|D| \to \infty$، وهذه حالة *الرنين*.

41 الرنين، أي النمو غير المحدود للاستجابة عند مساواة تردد الإثارة للتردد الطبيعي، من أهم مفاهيم الديناميكا الإنشائية. وهو يفسر انهيار جسر تاكوما نارو وفشل مساند الآلات وكوارث أخرى. ويجب في كل تصميم ديناميكي فصل ترددات التشغيل عن الترددات الطبيعية بمقدار كافٍ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.5.2 الاستجابة التوافقية المخمدة

42 مع التخميد تكون معادلة الحركة تحت القوة التوافقية:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

يتلاشى الحل العابر المتجانس أسياً ولا يبقى إلا الحل الخاص الدائم:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

حيث زاوية الطور ϕ:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \tag{34.4}$$

43 معامل التضخيم الديناميكي للنظام المخمد:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \tag{34.5}$$

يحد التخميد تضخيم الرنين إلى قيمة محدودة:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{at} \quad \beta = \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1$$

عند $\zeta = 0.02$ يكون $D_{\max} = 25$، وعند $\zeta = 0.05$ يكون $D_{\max} = 10$. وحتى التخميد الصغير يخفض استجابة الرنين كثيراً.

44 يوضح الشكل 34.2 معامل التضخيم D بدلالة نسبة التردد $\beta = \omega/\omega_n$ لعدة نسب تخميد.

45 تمثل زاوية الطور ϕ التأخر بين القوة والاستجابة. عند الترددات المنخفضة ($\beta \ll 1$) تكون $\phi \approx 0$ والاستجابة في طور القوة. وعند الرنين ($\beta = 1$) تكون $\phi = 90^\circ$ وتتأخر الاستجابة ربع دورة. وعند الترددات العالية ($\beta \gg 1$) تؤول ϕ إلى 180° فتغدو الاستجابة شبه معاكسة للقوة.

34.5.2.1 مثال 34.3: الاستجابة التوافقية: التضخيم والطور

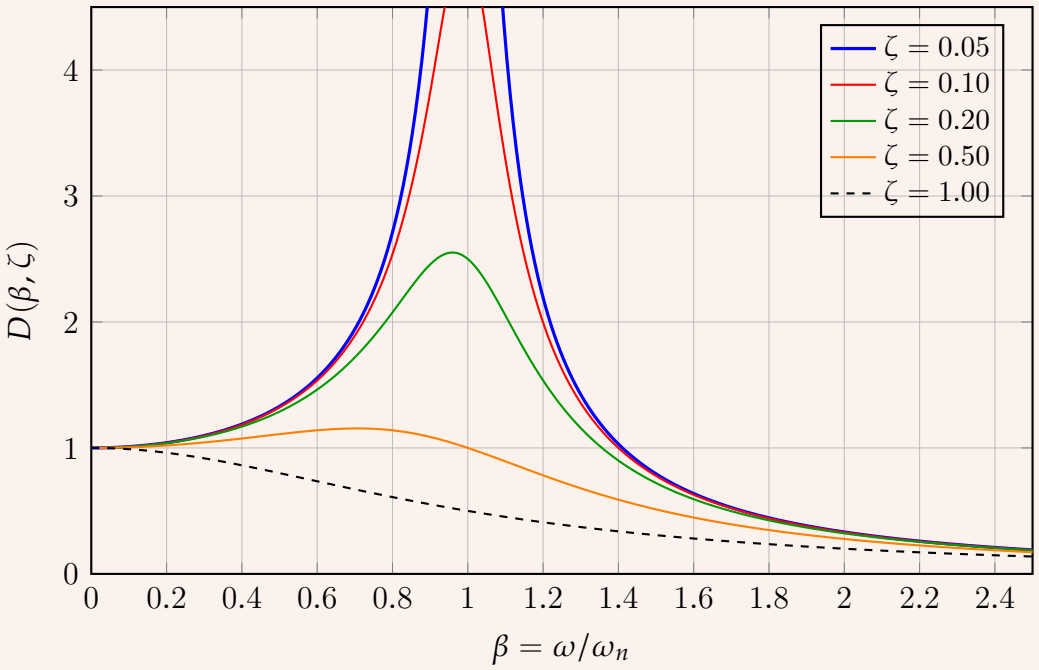
ليكن لنظام مخمد أحادي الحرية صلابة $k = 200\ \text{kN/m}$، وليُثر بقوة توافقية سعتها $F_0 = 10\ \text{kN}$. سعة الإزاحة السكونية $u_{st} = F_0/k = 10/200 = 0.05\ \text{m}$.

افترض نسبة تردد $\beta = \omega/\omega_n = 0.9$ ونسبة تخميد $\zeta = 0.05$. من المعادلة (34.5):

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.81)^2 + (2\cdot 0.05\cdot 0.9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19^2 + 0.09^2}} \approx 4.76$$

ومن ثم تكون سعة الإزاحة الدائمة $u_0 = D\,u_{st} \approx 4.76(0.05) = 0.238\ \text{m}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 34.2: منحنيات مفاهيمية للتضخيم الديناميكي لمهتز مخمد أحادي الحرية تحت قوة توافقية

من المعادلة (34.4):

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \frac{0.09}{0.19} = 0.474 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 25.4^\circ$$

34.6 الاستجابة لحمل عام

46 نادراً ما تكون الأحمال الديناميكية الحقيقية، كهبات الرياح وحركة الأرض الزلزالية وقوى الصدم، توافقية. ونحتاج طرائق لتحديد الاستجابة لقوى عامة متغيرة زمنياً. يوجد نهجان متكاملان: تكامل دوهاميل في المجال الزمني وتحليل فورييه في المجال الترددي.

34.6.1 استجابة النبضة والنبضة الوحدية

47 توفر الاستجابة لنبضة وحدية مثالية اللبنة الأساسية لتحليل الإثارات العامة. والنبضة قوة كبيرة جداً تُطبق زمنًا قصيراً جداً بحيث يكون حاصل (القوة × الزمن) قيمة محدودة تسمى *النبضة*. وتمثل دالة دلتا ديراك $\delta(t-\tau)$ نبضة وحدية عند الزمن τ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \delta(t-\tau) = 0 \ \text{عندما} \ t \neq \tau$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

[48] عندما تؤثر نبضة وحدية على نظام ساكن، تعطي مبرهنة النبضة–كمية الحركة السرعة الابتدائية بعد النبضة مباشرة:

$$m\Delta v = 1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{m}$$

الاهتزاز الحر اللاحق، مع $u(0) = 0$ و$\dot{u}(0) = 1/m$، هو *دالة استجابة النبضة الوحدية* $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t), \quad t > 0 \tag{34.6}$$

للحالة غير المخمدة:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n t), \quad t > 0 \tag{34.7}$$

34.6.1.1 مثال 34.4: استجابة نبضة وحدية لنظام مخمد أحادي الحرية

خزان ماء ممثل بنظام أحادي الحرية كتلته $m = 500\ \text{kg}$، وصلابته الجانبية $k = 200\ \text{kN/m}$، ونسبة تخميده $\zeta = 5\%$. ينفجر أنبوب ويولد قوة نفاثة نبضية يمكن تمثيلها كنبضة وحدية ($\hat{F} = 1\ \text{N·s}$) عند $t = 0$. حدد: (أ) الخواص الديناميكية؛ (ب) دالة استجابة النبضة؛ (ج) الإزاحة عند $t = 0.10\ \text{s}$؛ (د) الإزاحة القصوى. وزمن حدوثها.

الحل.

(أ) الخواص الديناميكية.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{500}} = 20.00\ \text{rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.314\ \text{s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20.00\sqrt{1-0.0025} = 19.975\ \text{rad/s}$$

(ب) دالة استجابة النبضة.

من المعادلة (34.6)، مع $m = 500\ \text{kg}$ و$\omega_d = 19.975\ \text{rad/s}$:

$$h(t) = \frac{1}{500 \times 19.975}\, e^{-0.05\times 20\, t}\sin(19.975\, t) = 1.0025\times 10^{-4}\, e^{-t}\sin(19.975\, t) \quad \text{m/(N·s)}$$

لنبضة وحدية $\hat{F} = 1\ \text{N·s}$ تكون الاستجابة ببساطة $u(t) = \hat{F}\,h(t) = h(t)$.

(ج) الإزاحة عند $t = 0.10\ \text{s}$.

$$u(0.10) = 1.0025\times 10^{-4}\, e^{-1\times 0.10}\sin(19.975\times 0.10)$$

$$= 1.0025\times 10^{-4}\times 0.9048\times\sin(1.9975\ \text{rad}) = 1.0025\times 10^{-4}\times 0.9048\times 0.9128 = 8.28\times 10^{-5}\ \text{m}$$

$$u(0.10) \approx 0.083\ \text{mm}$$

(د) الإزاحة القصوى.

تقع قمة $h(t)$ عندما $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$، أي للتخميد الصغير تقريباً عند $\omega_d\, t_{\text{peak}} = \pi/2$:

$$t_{\text{peak}} = \frac{\pi/2}{\omega_d} = \frac{\pi/2}{19.975} = 0.0786\ \text{s}$$

$$h_{\text{peak}} = \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\zeta\omega_n t_{\text{peak}}} = 1.0025{\times}10^{-4}\, e^{-0.05\times 20\times 0.0786} = 1.0025{\times}10^{-4}{\times}e^{-0.0786} = 9.26\times 10^{-5}\ \text{m/(N·s)}$$

الإزاحة القصوى للنبضة الوحدية هي $0.0926\ \text{mm/(N·s)}$. ولنبضة فعلية $\hat{F}$ تتناسب القمة خطياً: $u_{\text{peak}} = \hat{F}\,h_{\text{peak}}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.6.2 تكامل دوهاميل

49 طور جان-ماري دوهاميل (1797–1872) تكامل الالتفاف الذي يحمل اسمه لحل معادلة الحرارة، لكنه ينطبق كذلك على الديناميكا الإنشائية. والفكرة أن القوة العامة $F(t)$ يمكن رؤيتها كسلسلة نبضات متناهية الصغر. عند الزمن τ تكون نبضة مقدارها $F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ تؤثر في النظام. وتكون استجابة النبضة عند زمن لاحق t هي $F(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. وبتركيب جميع الإسهامات:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{34.8}$$

هذا تكامل دوهاميل، أو تكامل الالتفاف. وهو يعطي الاستجابة لأي قوة $F(t)$ بافتراض بدء النظام من السكون. وإذا لم تكن الشروط الابتدائية صفراً، تُضاف استجابة الاهتزاز الحر.

50 تكامل دوهاميل قوي نظرياً لكنه صعب التقييم التحليلي غالباً. وتوجد حلول مغلقة لقوى بسيطة كالخطوة والمنحدر والنبضة المستطيلة، أما الإثارات المعقدة أو المقاسة فتحتاج تكاملاً عددياً.

34.6.2.1 مثال 34.5: حمل خطوة مفاجئ: معامل تضخيم ديناميكي مقداره 2

النظام أحادي الحرية نفسه في المثال 34.6.1.1 ($m = 500\,\mathrm{kg}$ و$k = 200\,\mathrm{kN/m}$) يخضع لقوة ثابتة $F_0 = 10\,\mathrm{kN}$ تُطبق فجأة عند $t = 0$ وتستمر إلى أجل غير محدود. يبدأ النظام من السكون. حدد: (أ) الاستجابة بتكامل دوهاميل للحالة غير المخمدة؛ (ب) الإزاحة القصوى ومعامل التضخيم؛ (ج) أثر تخميد 5% في القمة.

الحل.

(أ) تكامل دوهاميل لحمل خطوة في الحالة غير المخمدة.

مع $F(\tau) = F_0 = \text{const}$ و$\zeta = 0$ ($\omega_d = \omega_n$)، تختزل المعادلة (34.8) إلى:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

بتقييم التكامل مع التعويض $s = t - \tau$:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n s)\,\mathrm{d}s = \frac{F_0}{m\omega_n}\left[-\frac{\cos(\omega_n s)}{\omega_n}\right]_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$$

بما أن $m\omega_n^2 = k$ تختزل إلى:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\cos(\omega_n t)\right] \tag{34.9}$$

(ب) الإزاحة القصوى ومعامل التضخيم الديناميكي.

الإزاحة السكونية تحت F_0 هي $u_{\mathrm{st}} = F_0/k$. عددياً:

$$u_{\mathrm{st}} = \frac{10\,000}{200\,000} = 0.050\ \mathrm{m} = 50\ \mathrm{mm}$$

من المعادلة (34.9) تبلغ $u(t)$ أقصاها عندما $\cos(\omega_n t) = -1$، أي عند $t = \pi/\omega_n = T_n/2$:

$$u_{\max} = \frac{F_0}{k}\times 2 = 2\,u_{\mathrm{st}} = 2\times 50 = 100\ \mathrm{mm}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{20} = 0.157\ \text{s} = \frac{T_n}{2}$$

معامل التضخيم الديناميكي يساوي 2 تماماً. وهذه النتيجة الأساسية لحمل خطوة على نظام غير مخمد: تولد القوة المطبقة فجأة ضعفي الإزاحة السكونية.

(ج) أثر تخميد قدره 5%.
مع التخميد تكون الاستجابة المغلقة لحمل الخطوة:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

بالتقييم عند $t = 0.157$ s قرب القمة غير المخمدة:

$$u(0.157) \approx 50\left[1 - e^{-0.05\times 20\times 0.157}\left(\cos(19.975\times 0.157) + 0.0501\sin(19.975\times 0.157)\right)\right] \approx 92.7\ \text{mm}$$

يخفض التخميد قمة الدورة الأولى من 100 mm إلى 93 mm، أي 7% عند $\zeta = 5\%$. وفي الدورات التالية تتلاشى الاهتزازات وتستقر الاستجابة عند القيمة السكونية $u_{\text{st}} = 50$ mm.

34.6.2.2 مثال 34.6: حمل نبضة مستطيلة وطيف الصدمة

يتعرض النظام أحادي الحرية ($m = 500$ kg، $k = 200$ kN/m، $\omega_n = 20$ rad/s، $T_n = 0.314$ s) لنبضة مستطيلة:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 = 10\ \text{kN} & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

لنظام غير مخمد، حدد: (أ) الاستجابة المغلقة أثناء النبضة وبعدها؛ (ب) الإزاحة الديناميكية القصوى لثلاث مدد للنبضة؛ للنسب $t_d/T_n = 0.25,\ 0.50,\ 1.00$؛ (ج) التفسير الهندسي للحمل النبضي مقارنة بالحمل شبه السكوني.

الحل.

(أ) الاستجابة المغلقة.
أثناء النبضة ($0 \le t \le t_d$): تنطبق نتيجة حمل الخطوة في المعادلة (34.9) مباشرة:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos(\omega_n t)] \tag{34.10}$$

بعد النبضة ($t > t_d$): يهتز النظام حراً من حالته عند $t = t_d$. وتُستخرج النتيجة بتركيب استجابتي خطوة، إحداهما تبدأ عند الصفر والأخرى معاكسة تبدأ عند t_d:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t - t_d) - \cos\omega_n t] \tag{34.11}$$

سعة الاهتزاز الحر بعد النبضة:

$$A = \frac{F_0}{k}\,2\left|\sin\frac{\omega_n t_d}{2}\right| = 2\,u_{\text{st}}\left|\sin\frac{\pi t_d}{T_n}\right|$$

(ب) الإزاحة القصوى لثلاث مدد نبضة.
يعتمد معامل التضخيم الديناميكي $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ فقط على النسبة t_d/T_n:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

t_d/T_n	(s) t_d	$A/u_{\text{st}} = 2\lvert\sin(\pi t_d/T_n)\rvert$	$D = u_{\max}/u_{\text{st}}$
0.25	0.0785	$2\lvert\sin(\pi/4)\rvert = \sqrt{2} = 1.414$	1.41
0.50	0.1571	$2\lvert\sin(\pi/2)\rvert = 2.000$	2.00
1.00	0.3142	$2\lvert\sin(\pi)\rvert = 0.000$	1.00

عند $t_d/T_n = 0.25$: $u_{\max} = 1.414 \times 50 = 70.7$ mm.
عند $t_d/T_n = 0.50$: $u_{\max} = 2.000 \times 50 = 100$ mm (وهي نتيجة حمل الخطوة نفسها؛ فالنبضة طويلة بما يكفي لبلوغ القمة الأولى غير المخمدة قبل انتهائها).
عند $t_d/T_n = 1.00$: $u_{\max} = 1.000 \times 50 = 50$ mm (سعة ما بعد النبضة صفر؛ إذ يعود النظام تماماً إلى حالته الابتدائية عند $t = T_n$ ولا يبقى اهتزاز حر).

(ج) التفسير الهندسي.
تحكم النسبة t_d/T_n في طبيعة الاستجابة:

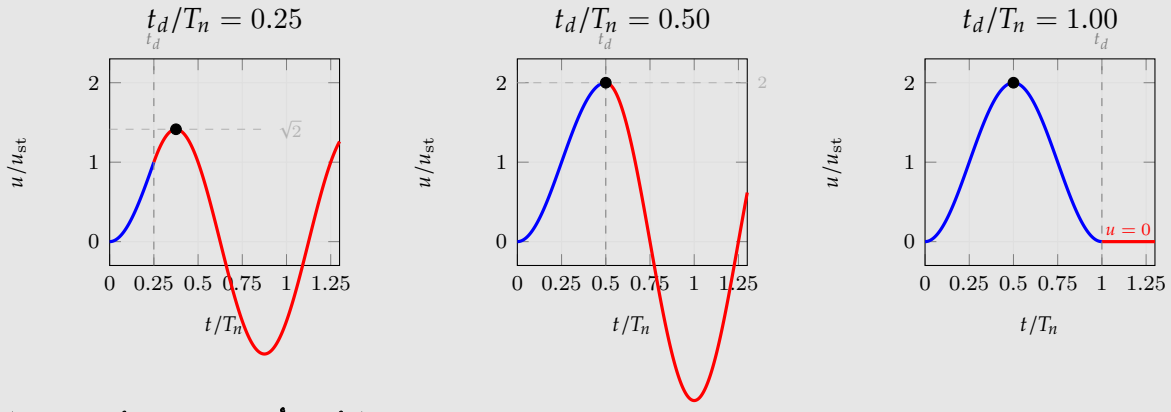
النظام النبضي ($t_d/T_n \ll 1$): النبضة قصيرة إلى حد أن المنشأ لا يكاد يتحرك أثناء التحميل؛ وتحدد النبضة $\hat{F} = F_0\, t_d$ الاستجابة. والإزاحة القصوى $u_{\max} \approx \hat{F}/(m\omega_n) = F_0\, t_d/(m\omega_n)$، فتزداد خطياً مع t_d.

النظام شبه السكوني ($t_d/T_n \gg 1$): تستمر النبضة أدواراً كثيرة؛ فيستجيب المنشأ استجابة شبه سكونية ويؤول $D \to 1$ في المتوسط (مع تذبذبه بين 0 و2 أثناء وجود الحمل ثم اهتزازه حراً).

نظام الرنين ($t_d/T_n \approx 0.5$): تساوي مدة النبضة نصف الدور الطبيعي، فينشأ أكبر تضخيم ممكن $D = 2$، وهو مطابق لنتيجة حمل الخطوة.

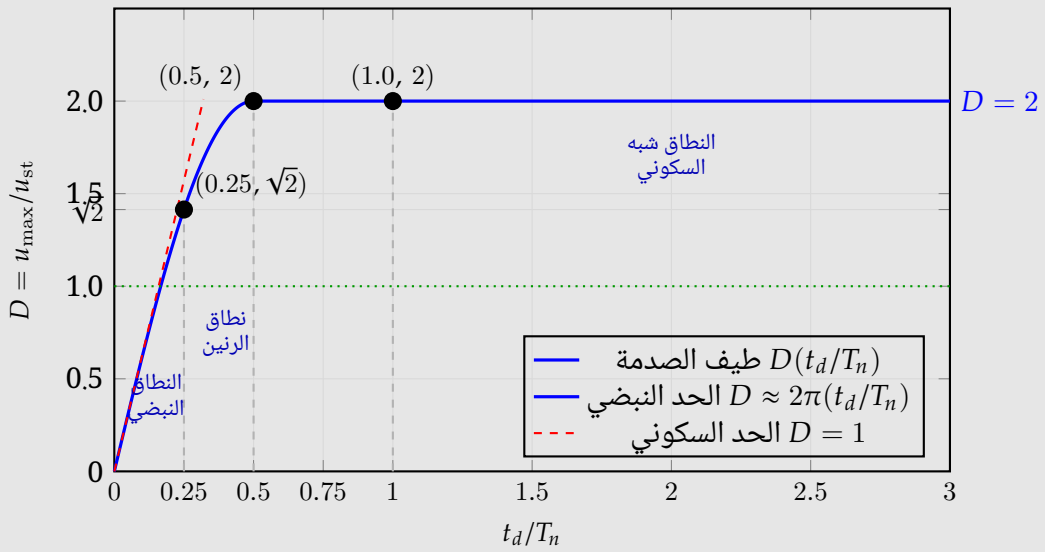
المخطط الكامل لـD بدلالة t_d/T_n، أي *طيف الصدمة* أو *طيف استجابة الأحمال النبضية*، هو النظير في المجال الزمني لمنحنى التضخيم التوافقي، ويستعمل في تصميم المنشآت للانفجار والصدم والمعدات.

استجابة النبضة المستطيلة.



سجلات الإزاحة المطبعة u/u_{st} لثلاث مدد للنبضة (الأزرق: أثناء النبضة، والأحمر: بعدها).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



طيف **الصدمة** $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ **بدلالة** t_d/T_n**. تمثل الدوائر الثلاث المملوءة الحالات المحسوبة في المثال. الخط الأحمر المتقطع هو المقارب النبضي** $D \approx 2\pi(t_d/T_n)$**، والخط الأخضر المنقط هو المرجع السكوني** $D = 1$.

34.6.3 تحليل فوريه والاستجابة الترددية

51 يستعمل نهج بديل تحليل فوريه لتفكيك القوة إلى مركبات توافقية، وتحديد استجابة كل مركبة بدالة الانتقال التوافقية، ثم تركيبها. وللقوة الدورية ذات الدور T_p:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

حيث $\omega_0 = 2\pi/T_p$ التردد الأساسي. تكون الاستجابة:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[a_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_0 t - \phi_n) \right] / k$$

حيث D_n وϕ_n معامل التضخيم والطور عند التردد $n\omega_0$.

52 للقوة غير الدورية تصبح سلسلة فوريه تحويل فوريه ليصبح تحويل فوريه:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

تربط *دالة الاستجابة الترددية المركبة* $H(\omega)$ الدخل بالخرج في المجال الترددي:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-\beta^2) + i(2\zeta\beta)} \tag{34.12}$$

طيف الاستجابة $U(\omega) = H(\omega)F(\omega)$، وتُستخرج الاستجابة الزمنية بتحويل فوريه العكسي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.6.3.1 مثال 34.7: الاستجابة الترددية لقوة آلة دورية ذات مركبتين توافقيتين

تتعرض قاعدة آلة ($m = 500$ kg، و$k = 200$ kN/m، و$\zeta = 5\%$، و$\omega_n = 20$ rad/s) لإثارة آلة دوارة تولد قوة دورية ترددها الأساسي $f_0 = 2$ Hz ($\omega_0 = 4\pi$ rad/s، و$T_p = 0.5$ s):

$$F(t) = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(2\omega_0 t) = 2\,000 \sin(4\pi t) + 800 \sin(8\pi t) \quad [\text{N}]$$

حدد: (أ) نسبة التردد لكل مركبة توافقية؛ (ب) سعة الحالة المستقرة لكل استجابة باستعمال $H(\omega)$؛ (ج) الاستجابة الكلية في الحالة المستقرة.

الحل.

(أ) نسب التردد.

$$\beta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{4\pi}{20} = \frac{12.566}{20} = 0.628 \qquad \beta_2 = \frac{2\omega_0}{\omega_n} = \frac{8\pi}{20} = \frac{25.133}{20} = 1.257$$

تقع المركبة التوافقية الأولى ($\beta_1 = 0.628$) دون الرنين، وتقع الثانية ($\beta_2 = 1.257$) فوقه.

(ب) سعات الحالة المستقرة.

سعة الإزاحة السكونية لكل مركبة توافقية هي $u_{\text{st},n} = F_n/k$. ويُستخرجان التضخيم الديناميكي والطور من المعادلتين (34.5) و(34.4):

$$D(\beta,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \qquad \phi = \arctan\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

المركبة التوافقية الأولى ($F_1 = 2\,000$ N، و$\beta_1 = 0.628$):

$$u_{\text{st},1} = \frac{2\,000}{200\,000} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0.628^2)^2 + (2\times 0.05\times 0.628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(0.606)^2 + (0.0628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3672 + 0.00394}} = \frac{1}{0.608} = 1.644$$

$$\phi_1 = \arctan\frac{0.0628}{0.606} = \arctan(0.1036) = 5.9^\circ$$

$$u_1(t) = D_1\, u_{\text{st},1} \sin(\omega_0 t - \phi_1) = 1.644 \times 10 \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ) = 16.4 \text{ mm} \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ)$$

المركبة التوافقية الثانية ($F_2 = 800$ N، و$\beta_2 = 1.257$):

$$u_{\text{st},2} = \frac{800}{200\,000} = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1.257^2)^2 + (2\times 0.05\times 1.257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-0.580)^2 + (0.1257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3364 + 0.0158}} = \frac{1}{0.593} = 1.686$$

$$\phi_2 = \arctan\frac{0.1257}{1-1.580} = \arctan\frac{0.1257}{-0.580} = 180^\circ - 12.2^\circ = 167.8^\circ$$

(يتجاوز الطور 90° لأن $\beta_2 > 1$؛ فتتأخر الاستجابة عن القوة بأكثر من ربع دورة فوق الرنين.)

$$u_2(t) = 1.686 \times 4 \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ) = 6.74 \text{ mm} \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ)$$

(ج) الاستجابة الكلية في الحالة المستقرة.

بالتراكب:

$$u(t) = 16.4 \sin(4\pi t - 5.9^\circ) + 6.74 \sin(8\pi t - 167.8^\circ) \quad [\text{mm}]$$

يمكن تقييد قمة هذه الإشارة المركبة بمجموع السعتين: $u_{\max} \le 16.4 + 6.74 = 23.1$ mm. وعملياً لا تتطابق قمّتا المركبتين، فتكون القيمة القصوى الفعلية أصغر؛ ويعطي التقييم العددي لـ$u(t)$ على دور واحد $u_{\max} \approx 18.5$ mm.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعليق. تستحق ملاحظتان التأكيد:

1. مع أن سعة قوة المركبة الثانية لا تتجاوز 40% من سعة الأولى ($800/2000 = 0.4$)، فإنها تسهم بنسبة $6.74/16.4 = 41\%$ من سعة الإزاحة لأن نسبة ترددها $\beta_2 = 1.257$ أقرب إلى الرنين. وقد تهيمن مركبات قوة صغيرة عالية التردد إذا اقتربت من الرنين.
2. يعني انزياح الطور 167.8° للمركبة الثانية أنها تكاد تعاكس الأولى قرب القمم؛ لذلك تكون القيمة القصوى الحقيقية (18.5 mm) أصغر كثيراً من مجموع السعتين (23.1 mm). وتُظهر طرائق المجال الترددي علاقات الطور هذه بوضوح وتيسر معالجتها على نحو لا يتيحه الحدس الزمني.

34.7 إثارة المساند والاستجابة الزلزالية

53 في حالات عملية كثيرة، وأبرزها الحركة الأرضية الزلزالية، لا تكون الإثارة قوة مطبقة بل حركة مفروضة للمسند. وهذا يتطلب إعادة صياغة معادلة الحركة بدلالة الإزاحة النسبية.

34.7.1 معادلة الحركة لإثارة القاعدة

54 لتكن $u_g(t)$ إزاحة الأرض، و$u_t(t)$ الإزاحة الكلية المطلقة للكتلة. الإزاحة النسبية:

$$u(t) = u_t(t) - u_g(t)$$

تعتمد قوتا النابض والمخمد على الإزاحة والسرعة النسبيتين:

$$F_S = ku, \qquad F_D = c\dot{u}$$

غير أن قانون نيوتن يتضمن التسارع المطلق:

$$m\ddot{u}_t = -F_S - F_D = -ku - c\dot{u}$$

بالتعويض عن $\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$:

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$$

وبإعادة الترتيب:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

55 هذه المعادلة الأساسية لتحليل الاستجابة الزلزالية. تُقاد الإزاحة النسبية u بـقوة زلزالية فعالة $F_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g(t)$، حاصل ضرب الكتلة في تسارع الأرض. ويستجيب المنشأ كأنه مثبت عند قاعدته وخاضع لهذه القوة.

56 التسارع المطلق للكتلة، اللازم لحساب قوى العطالة وتسارعات الطوابق، هو:

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g = -\frac{c}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}u = -2\zeta\omega_n\dot{u} - \omega_n^2 u$$

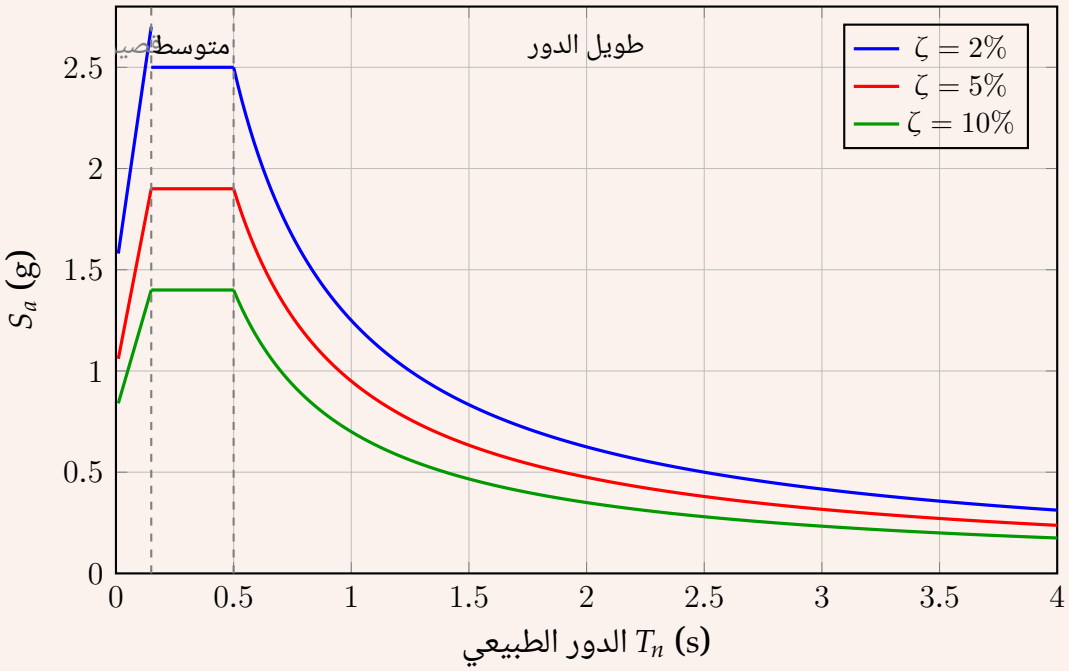
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.7.2 أطياف الاستجابة

57 أحدث مفهوم طيف الاستجابة الذي طوره موريس بيو وجورج هاوسنر ثورة في هندسة الزلازل، إذ وفر وسيلة عملية لوصف حركة الأرض وتحديد الاستجابة القصوى دون تحليل تاريخ زمني.

58 طيف الاستجابة رسم لأقصى استجابة لسلسلة مهتزات أحادية الحرية لها نسبة التخميد نفسها وأدوار طبيعية مختلفة، تحت حركة أرضية محددة. تُحل معادلة كل مهتز وتُسجل القيمة المطلقة القصوى للإزاحة أو السرعة أو التسارع.

59 يبين الشكل 34.3 طيف تسارع نموذجي مملس S_a بدلالة الدور الطبيعي T_n لعدة نسب تخميد. وتقابل مناطق الدور القصير والمتوسط والطويل سلوكاً تحكمه على الترتيب العجلة والسرعة والإزاحة.



شكل 34.3: طيف استجابة التسارع S_a بدلالة الدور الطبيعي T_n لعدة نسب تخميد.

60 تُعرّف *الإزاحة الطيفية* S_d *والسرعة الطيفية* S_v *والتسارع الطيفي* S_a كما يأتي:

$$S_d(T_n,\zeta) = \max_t |u(t)| \qquad S_v(T_n,\zeta) = \max_t |\dot{u}(t)| \qquad S_a(T_n,\zeta) = \max_t |\ddot{u}_t(t)| \tag{34.13}$$

حيث $u(t)$ استجابة الإزاحة النسبية للحركة الأرضية المحددة.

61 للأنظمة خفيفة التخميد تصح العلاقات التقريبية:

$$S_v \approx \omega_n S_d, \qquad S_a \approx \omega_n S_v \approx \omega_n^2 S_d$$

هذه العلاقات شبه طيفية. والتسارع شبه الطيفي S_a مفيد خصوصاً لأن قص القاعدة الأقصى ببساطة:

$$V_{\max} = m S_a = \frac{W}{g} S_a \tag{34.14}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث W الوزن وg تسارع الجاذبية.

34.7.2.1 مثال 34.8: التصميم الزلزالي لإطار من طابق واحد باستعمال طيف الاستجابة

لإطار خرساني مسلح من طابق واحد الخواص الآتية:

- الوزن الزلزالي الكلي: $W = 4\,500\ \text{kN}$؛
- الصلابة الجانبية للطابق: $k = 180\,000\ \text{kN/m}$؛
- نسبة التخميد اللزج: $\zeta = 5\%$.

يُعرّف طيف تسارع التصميم عند تخميد 5% بالعلاقة

$$S_a(T_n) = \begin{cases} 0.40g\left(1 + \dfrac{T_n}{0.10}\right) & 0 \le T_n < 0.10\ \text{s} \\ 0.80g & 0.10\ \text{s} \le T_n \le 0.60\ \text{s} \\ \dfrac{0.48g}{T_n} & T_n > 0.60\ \text{s} \end{cases}$$

حدد: (أ) الدور الأساسي؛ (ب) التسارع الطيفي؛ (ج) قص القاعدة الأقصى؛ (د) الإزاحة الجانبية القصوى.

الحل.

(أ) الدور الطبيعي. الكتلة هي $m = W/g = 4\,500/9.81 = 458.7\ \text{t}$.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{180\,000}{458.7}} = 19.81\ \text{rad/s} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.81} = 0.317\ \text{s}$$

(ب) التسارع الطيفي. بما أن $0.10\ \text{s} \le T_n = 0.317\ \text{s} \le 0.60\ \text{s}$، يقع الدور على هضبة التسارع الثابتة:

$$S_a = 0.80g = 0.80 \times 9.81 = 7.85\ \text{m/s}^2$$

(ج) قص القاعدة الأقصى. من المعادلة (34.14):

$$V_{\max} = W\frac{S_a}{g} = 4{,}500 \times 0.80 = 3{,}600\ \text{kN} \quad \text{أو بصورة مكافئة} \quad V_{\max} = m\,S_a = 458.7 \times 7.85 = 3{,}601\ \text{kN}$$

(د) الإزاحة الجانبية القصوى. باستعمال العلاقة شبه الطيفية $S_d \approx S_a/\omega_n^2$:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{7.85}{(19.81)^2} = 0.020\ \text{m} = 20\ \text{mm}$$

ويمكن التحقق من ذلك بالعلاقة $u_{\max} = V_{\max}/k = 3{,}600/180{,}000 = 0.020\ \text{m}$ ✓.

تعليق. يصبح الحساب جبرياً بعد معرفة الدور الطبيعي. يختزل الطيف أثر حركة الأرض؛ فيقرأ المهندس S_a عند T_n ويضربها في الكتلة. ويفيد تقدير الإزاحة في فحص انجراف الطابق. هنا، عند ارتفاع $h = 4\ \text{m}$، تكون نسبة الانجراف $20/4000 = 1/200$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62 أطياف التصميم في الأكواد أغلفة ملساء لأطياف زلازل مسجلة متعددة، تُقيّس لمستوى خطر مستهدف. وهي أساس إجراء القوة الجانبية المكافئة في التصميم الزلزالي المعتاد.

إحالة لاحقة. توفر الكميات الحتمية المطورة هنا الأساس الديناميكي لأطر التصميم القائم على الأداء اللاحقة؛ انظر الفصل 70 للتفسير الاحتمالي.

34.8 الأنظمة متعددة درجات الحرية

63 للمنشآت الحقيقية كتلة وصلابة موزعتان، ومن ثم درجات حرية لا نهائية. وللتحليل تُقسم إلى نظم ذات عدد محدود من الدرجات، فتنتج معادلات تفاضلية عادية مقترنة تُكتب مصفوفياً.

34.8.1 معادلات الحركة

64 لنظام ذي N درجة حرية، تكون معادلات الحركة:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{34.15}$$

حيث:

- $\mathbf{u}(t)$ متجه الإزاحة $N \times 1$؛
- $\mathbf{M}$ مصفوفة الكتلة $N \times N$ متناظرة وموجبة التعريف؛
- $\mathbf{C}$ مصفوفة التخميد متناظرة وموجبة شبه التعريف؛
- $\mathbf{K}$ مصفوفة الصلابة متناظرة وموجبة شبه التعريف؛
- $\mathbf{F}(t)$ متجه القوة $N \times 1$.

65 قد تكون مصفوفة الكتلة $\mathbf{M}$ مجمعة قطرية بكتل عقدية، أو متسقة مشتقة من دوال الشكل نفسها. ومصفوفة الصلابة $\mathbf{K}$ هي مصفوفة التحليل السكوني نفسها. أما $\mathbf{C}$ فهي الأكثر إشكالاً لعدم يقين أساسها الفيزيائي، وغالباً تُبنى رياضياً.

34.8.2 الاهتزاز الحر غير المخمد: الأنماط الطبيعية

66 بوضع $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ و$\mathbf{F} = \mathbf{0}$ نبحث عن حلول على الصورة $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

هذه مسألة القيم الذاتية المعممة. وتتطلب الحلول غير الصفرية:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

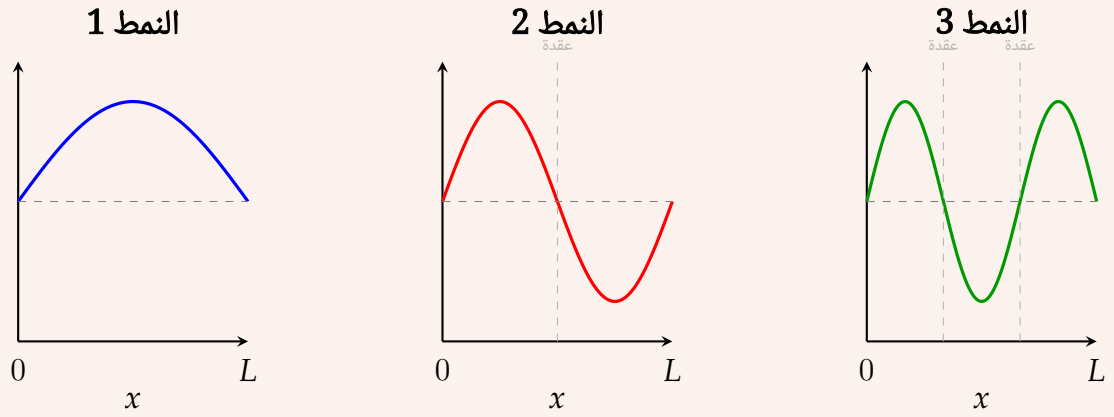
ينتج N قيمة ذاتية $\omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \cdots \le \omega_N^2$ ومتجهاتها الذاتية $\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_N$.

67 تعطي القيم الذاتية الترددات الطبيعية $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$. وتصف المتجهات الذاتية، أي *أشكال الأنماط*، نمط التشوه عند كل تردد. ولها خواص التعامد:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad \text{عندما} i \neq j$$

شروط التعامد هذه مفتاح فصل معادلات الحركة.

68 يوضح الشكل 34.4 أشكال الأنماط $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ عند $n = 1, 2, 3$. لا يملك النمط الأول عقداً داخلية، وللثاني عقدة عند منتصف البحر، وللثالث عقدتان عند $L/3$ و$2L/3$. وتحقق الترددات $\omega_n \propto n^2$.



شكل 34.4: أشكال الأنماط الثلاثة الأولى لكمرة بسيطة الاستناد

34.8.3 التحليل النمطي

69 تشكل أشكال الأنماط أساس فضاء الإزاحة؛ ويسمى هذا *التحليل النمطي*. ويمكن التعبير عن أي إزاحة:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t)$$

حيث $q_n(t)$ الإحداثيات النمطية المعممة، و$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \cdots \boldsymbol{\phi}_N]$ المصفوفة النمطية.

70 بالتعويض في معادلة الحركة والضرب من اليسار في $\boldsymbol{\Phi}^T$:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}$$

بفعل التعامد تكون $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}$ و$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}$ قطريتين. وإذا كانت $\mathbf{C}$ على صورة تخميد رايلي:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

تكون $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}$ قطرية أيضاً، وتنقسم المعادلات إلى N معادلة مستقلة أحادية الحرية:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = F_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث M_n الكتلة النمطية، وK_n الصلابة النمطية، و$F_n(t)$ القوة النمطية.

71 كل معادلة نمطية معادلة أحادية الحرية تُحل بأي طريقة مناسبة، ثم تُركب الاستجابة الفيزيائية بالتراكب:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

34.8.4 المشاركة النمطية في الاستجابة الزلزالية

72 للإثارة الزلزالية $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t)$، حيث $\mathbf{r}$ متجه التأثير، وغالباً متجه آحاد لحركة أفقية تؤثر بالتساوي في الدرجات. تصبح القوة النمطية:

$$F_n(t) = -\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) = -L_n \ddot{u}_g(t)$$

حيث $L_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r}$ معامل المشاركة النمطية.

73 *الكتلة النمطية الفعالة* هي:

$$M_n^* = \frac{L_n^2}{M_n} = \frac{(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n}$$

يساوي مجموع الكتل النمطية الفعالة الكتلة الكلية:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \mathbf{r}^T \mathbf{M}\mathbf{r}$$

تتيح هذه الخاصية تحديد عدد الأنماط اللازمة لالتقاط نسبة محددة، غالباً 90%، من الاستجابة الزلزالية الكلية.

34.8.4.1 مثال 34.9: التحليل النمطي لمبنى قص ثلاثي درجات الحرية تحت حمل زلزالي

لمبنى قص من ثلاثة طوابق كتل طابقية مجمعة وصلابة طابقية منتظمة:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m = 100\ \text{t}, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k = 40\,000\ \text{kN/m}$$

مصفوفتا الصلابة والكتلة للدرجات الجانبية، مع إهمال التشوه المحوري، هما:

$$\mathbf{K} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\ \text{kN/m}, \qquad \mathbf{M} = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ \text{t}$$

باستعمال طيف المثال 34.7.2.1 عند تخميد 5%، حدد: (أ) الترددات وأشكال الأنماط؛ (ب) معاملات المشاركة؛ (ج) قصوص القاعدة النمطية القصوى وتركيبها بطريقة SRSS.

الحل.

(أ) الترددات الطبيعية وأشكال الأنماط.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تختزل مسألة القيم الذاتية $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}$، مع $\lambda = m\omega^2/k$، إلى:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

وبالتوسيع: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$، وجذورها:

$$\lambda_1 = 0.198, \quad \lambda_2 = 1.555, \quad \lambda_3 = 3.247$$

الترددات الزاوية هي $\omega_n = \sqrt{\lambda_n k/m} = \sqrt{\lambda_n \times 400}$:

النمط	λ_n	(rad/s) ω_n	(s) T_n
1	0.198	8.90	0.706
2	1.555	24.93	0.252
3	3.247	36.01	0.174

يعطي حل أشكال الأنماط (بعد تطبيع الكتلة بحيث $\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n = m$):

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 0.328 \\ 0.591 \\ 0.737 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 0.737 \\ 0.328 \\ -0.591 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_3 = \begin{Bmatrix} 0.591 \\ -0.737 \\ 0.328 \end{Bmatrix}$$

(طُبعت المركبات بحيث تساوي أكبرها واحداً تقريباً بعد القياس بـ$1/\sqrt{m}$؛ والقيم بلا أبعاد).

(ب) معاملات المشاركة النمطية.

لحركة أرضية أفقية يكون متجه التأثير $\mathbf{r} = \{1,1,1\}^T$. ومعامل المشاركة للنمط n هو:

$$\Gamma_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\,\mathbf{r}}{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\,\boldsymbol{\phi}_n}$$

$$\Gamma_1 = \frac{m(0.328+0.591+0.737)}{m(0.328^2+0.591^2+0.737^2)} = \frac{1.656}{0.974} = 1.700$$

$$\Gamma_2 = \frac{m(0.737+0.328-0.591)}{m(0.737^2+0.328^2+0.591^2)} = \frac{0.474}{0.974} = 0.487$$

$$\Gamma_3 = \frac{m(0.591-0.737+0.328)}{m(0.591^2+0.737^2+0.328^2)} = \frac{0.182}{0.974} = 0.187$$

تبلغ الكتل النمطية الفعالة (معامل التطبيع) $M_n^* = \Gamma_n^2 M_n = \Gamma_n^2 m \times 3m$، معبراً عنها ككسور من الكتلة الكلية $3m$، نحو 87% و11% و2% للأنماط 1 و2 و3 على الترتيب. يلتقط النمط الأول وحده 87% من الكتلة الزلزالية؛ ومع النمط الثاني يبلغ المجموع 98%، متجاوزاً حد 90% المطلوب عادة في الأكواد.

(ج) قصوص القاعدة النمطية القصوى وتركيب SRSS.

لكل نمط يُقرأ التسارع الطيفي من طيف التصميم عند T_n:

النمط	(s) T_n	S_a	قص القاعدة النمطي الأقصى V_n^*	Γ_n
1	0.706	$0.48g/0.706 = 0.680g$	$\Gamma_1\,\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{M}\mathbf{r}\,S_{a,1}$	1.700
2	0.252	(الهضبة) $0.80g$	—	0.487
3	0.174	(الهضبة) $0.80g$	—	0.187

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قص القاعدة الأقصى في النمط n هو $V_n = M_n^{*}\, S_{a,n}$. ومع $M_n^{*} \approx \{261, 33, 5\}$ t و$S_{a,n} = \{0.680g,\ 0.80g,\ 0.80g\}$:

$$V_1 = 261 \times 0.680 \times 9.81 = 1\,741 \text{ kN}, \quad V_2 = 33 \times 0.80 \times 9.81 = 259 \text{ kN}, \quad V_3 = 5 \times 0.80 \times 9.81 = 39 \text{ kN}$$

لأن القمم النمطية لا تقع متزامنة، تُجمع بقاعدة الجذر التربيعي لمجموع المربعات (SRSS):

$$V_{\text{SRSS}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{1741^2 + 259^2 + 39^2} = \sqrt{3{,}031{,}081 + 67{,}081 + 1{,}521} \approx 1{,}761 \text{ kN}$$

تعليق. تجدر ملاحظة ما يأتي:

1. يهيمن النمط الأول تماماً: $V_1 / V_{\text{SRSS}} \approx 99\%$، وهو معتاد في المباني المنتظمة القصيرة.
2. يعطي تركيب SRSS نتيجة أكبر قليلاً فقط من V_1 وحده، مما يؤكد إهمال الأنماط العليا هنا.
3. يمكن استعادة قوى الطوابق من $\mathbf{f}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n\, S_{a,n}$ لكل نمط، ثم تركيبها بطريقة SRSS؛ وهو إجراء مدمج مباشرة في طرائق القوة الجانبية المكافئة في الأكواد الحديثة.
4. في المنشآت غير المنتظمة أو المباني الأعلى أو المواقع المتأثرة بقرب الفالق، تزداد أهمية الأنماط العليا، وينبغي أن تحل قاعدة التركيب التربيعي الكامل (CQC)، التي تراعي الارتباط النمطي، محل SRSS.

34.9 الأنظمة المستمرة

74 تحكم المعادلات التفاضلية الجزئية المنشآت ذات الكتلة والصلابة الموزعتين كالكمرات والبلاطات والقشريات. ومع أن الطرائق العددية تقسمها، فإن الحلول التحليلية توضح أشكال الأنماط والترددات الطبيعية.

34.9.1 الاهتزاز المحوري للقضبان

75 اعتبر قضيباً منتظماً طوله L ومساحته A ومعامله E وكثافته ρ. تحقق الإزاحة المحورية $u(x,t)$:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

أو بتعريف سرعة الموجة $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{34.16}$$

وهذه معادلة الموجة أحادية البعد.

76 للاهتزاز الحر نبحث عن حلول على الصورة $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$. وبالتعويض:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وحلها $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. تحدد الشروط الحدية الترددات وأشكال الأنماط المسموحة. لقضيب مثبت الطرفين:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

34.9.2 الاهتزاز المستعرض للكمرات

77 معادلة أويلر–برنولي للاهتزاز المستعرض:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

حيث $v(x,t)$ الإزاحة المستعرضة، وEI الصلابة الانحنائية، و$q(x,t)$ الحمل الموزع.

78 للاهتزاز الحر ($q = 0$)، وبافتراض $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

الحل العام:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

توفر الشروط الحدية عند الطرفين أربع معادلات للثوابت الأربعة، فتنتج مسألة قيمة ذاتية لـβ.

79 لكمرة بسيطة الاستناد طولها L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

تزداد الترددات الطبيعية مع n^2، فتبتعد الأنماط العليا سريعاً عن الدنيا. التردد الأساسي عند $n = 1$:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

80 للشروط الحدية الأخرى يجب حل معادلة التردد المتسامية عددياً، وتتوفر معاملات التردد في المراجع القياسية.

34.9.2.1 مثال 34.10: التردد الطبيعي لجسر مشاة فولاذي وفحص رنين المشاة

لجسر مشاة فولاذي بسيط الاستناد الخواص الآتية:

- البحر: $L = 20\ \mathrm{m}$؛

- مقطع فولاذي على شكل I: $I = 6.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^4$، $A = 1.0 \times 10^{-2}\ \text{m}^2$؛
- معامل المرونة: $E = 210\ \text{GPa}$؛
- كثافة الفولاذ: $\rho = 7\,850\ \text{kg/m}^3$؛
- الحمل الميت الإضافي من السطح والدرابزين والتكسية: $m' = 600\ \text{kg/m}$

حدد: (أ) التردد الطبيعي الأساسي؛ (ب) هل رنين المشاة مصدر قلق؛ (ج) أثر مضاعفة البحر إلى $L = 40\ \text{m}$.

الحل.

(أ) التردد الطبيعي الأساسي.

تجمع الكتلة الكلية لكل وحدة طول كتلة المقطع والحمل الميت:

$$\bar{m} = \rho A + m' = 7\,850 \times 1.0 \times 10^{-2} + 600 = 78.5 + 600 = 678.5\ \text{kg/m}$$

الصلابة الانحنائية هي $EI = 210 \times 10^{9} \times 6.0 \times 10^{-4} = 1.26 \times 10^{8}\ \text{N·m}^2$. وبتطبيق صيغة الكمرة بسيطة الاستناد عند $n = 1$:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \frac{\pi}{2 \times 20^2}\sqrt{\frac{1.26 \times 10^{8}}{678.5}} = \frac{\pi}{800}\sqrt{185\,700} = \frac{\pi}{800} \times 430.9 = 1.69\ \text{Hz}$$

الدور الطبيعي المناظر هو $T_1 = 1/f_1 = 0.59\ \text{s}$.

(ب) فحص رنين المشاة.

تولد حركة الإنسان قوى شبه دورية، ونطاقات التردد المعنية المعنية هي:

النشاط	التردد الغالب (Hz)
مشي بطيء	1.7–1.4
مشي عادي	2.3–1.7
مشي سريع أو هرولة	3.5–2.3
تأرجح جانبي للجسم	1.2–0.7

عند $f_1 = 1.69\ \text{Hz}$ يقع الجسر عند الحد الأعلى للمشي البطيء والحد الأدنى للمشي العادي، ولذلك يمثل رنين وقع الخطوات مشكلة خدمية حقيقية. يلزم فحص التسارع الأقصى؛ إذ يحد المعيار EN 1990 (European Committee for Standardization (CEN), 2010) التسارع الرأسي إلى $0.7\ \text{m/s}^2$ لجسور المشاة الخارجية. وأُغلق جسر الألفية في لندن (2000) بعد يومين من افتتاحه لأن تردده الجانبي $0.97\ \text{Hz}$ توافق مع تأرجح المشاة، مما يبين أن قوى ديناميكية صغيرة قد تولد استجابة غير مقبولة عند الرنين.

(ج) أثر مضاعفة البحر.

بما أن $f_1 \propto 1/L^2$ (مع ثبات المقطع والحمل الميت):

$$f_1(40\ \text{m}) = f_1(20\ \text{m}) \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 = 1.69 \times 0.25 = 0.42\ \text{Hz}$$

ينخفض تردد جسر الـ 40 m إلى ما دون جميع ترددات المشي بكثير، فلا يعود الرنين الرأسي مع حركة المشاة مصدر قلق. لكن تردد التأرجح الجانبي قد يقترب من $0.42\ \text{Hz}$، وهو ضمن مجال التحميل الجانبي للحشود. ويعد تناسب $1/L^2$ من أهم نتائج الديناميكا الإنشائية: مضاعفة البحر تخفض التردد إلى ربعه، وقد تنقل زيادة متواضعة في البحر منشأً من الأمان إلى قابلية الرنين أو العكس.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.10 الديناميكا اللاخطية

81 افترضت الأقسام السابقة سلوكاً خطياً، أي تناسب القوى مع الإزاحة والسرعة. لكن المنشآت الحقيقية، ولا سيما تحت الزلازل القوية والأحمال القصوى، تستجيب لاخطياً بسبب خضوع المادة والآثار الهندسية والتلامس والفجوات والاحتكاك.

34.10.1 مصادر اللاخطية

82 تحدث **لاخطية المادة** عندما تكون علاقة الإجهاد–الانفعال لاخطية. يخضع الفولاذ بعد تجاوز إجهاد الخضوع، ويولد تشقق الخرسانة لاخطية حتى عند أحمال الخدمة. ويجب نمذجة العلاقة التأسيسية بنموذج مرن–لدن أو ضرر مناسب.

83 تنشأ **اللاخطية الهندسية** عندما تكبر الإزاحات بحيث تُكتب معادلات الاتزان على الوضع المتشوه. وأثر P–Δ في الأعمدة مثال شائع.

84 تحدث **لاخطية التلامس** عند السطوح التي قد تنفصل مكوناتها أو تتلامس، مثل مساند العزل وفواصل التمدد والمقاطع المتشققة.

34.10.2 التخلفية وتبديد الطاقة

85 تحت الحمل الدوري تتبع المواد اللاخطية مسار قوة–إزاحة مختلفاً في التحميل والتفريغ. وتمثل مساحة حلقة التخلفية الطاقة المبددة في الدورة، وهي مصدر التبديد الرئيس في المنشآت الخاضعة أثناء الزلازل.

86 يبين الشكل 34.5 حلقة تخلفية وطاقة التبديد؛ الأسهم الزرقاء للتحميل وإعادة التحميل، والحمراء للتفريغ. تساوي المساحة المظللة الطاقة المبددة في الدورة $W_D = \oint F \, \mathrm{d}u$. تحكم الصلابة الابتدائية k_0 الميل المرن، وتنخفض الصلابة بعد الخضوع. ويظهر في الشكل كل من قوة الخضوع $\pm F_y$ والإزاحة القصوى $\pm u_{\max}$.

87 تشمل نماذج التخلفية الشائعة:

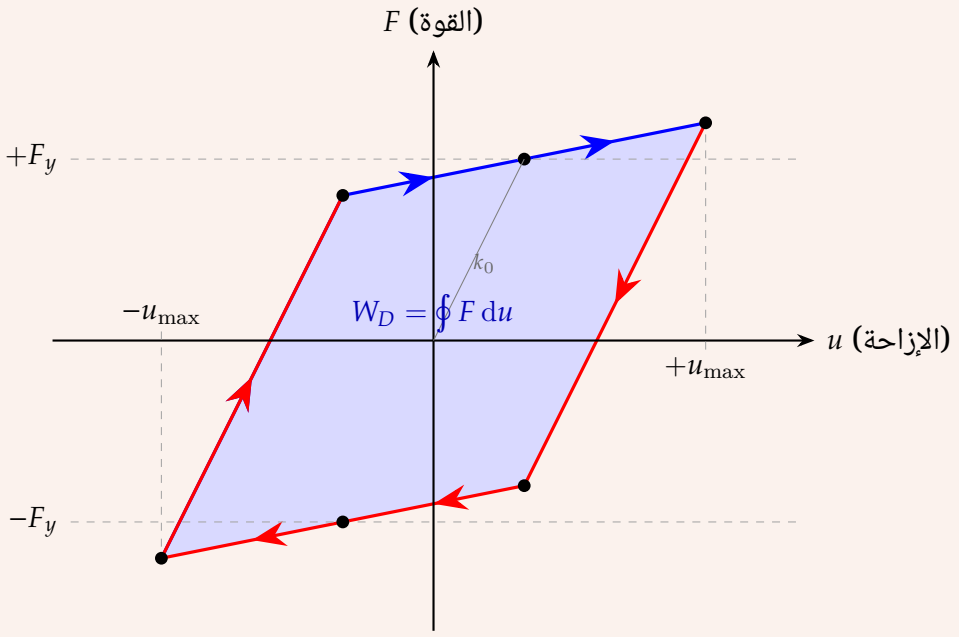
- **المرن–اللدن**: مرونة حتى الخضوع ثم قوة ثابتة مع زيادة الإزاحة.
- **ثنائي الخط**: مرونة حتى الخضوع ثم صلابة مخفضة بعده.
- **تدهور الصلابة**: تنخفض صلابة التفريغ مع الضرر المتراكم، لنمذجة الخرسانة والمباني.
- **بوك–ون**: نموذج أملس قابل للتفاضل يمثل طيفاً من السلوك التخلفي.

34.10.2.1 مثال 34.11: التخميد اللزج المكافئ من حلقة تخلفية ثنائية الخط

يظهر إطار فولاذي مدعم حلقة تخلفية مرنة–لدنة ثنائية الخط كما في الشكل 34.5، بمعاملات مقاسة من اختبار دوري:

- الصلابة المرنة الأولية: $k_0 = 50 \ \mathrm{kN/mm}$؛
- قوة الخضوع: $F_y = 400 \ \mathrm{kN}$؛
- الإزاحة القصوى: $u_{\max} = 20 \ \mathrm{mm}$؛

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 34.5: حلقة تخلفية مرنة–لدنة ثنائية الخط تحت حمل دوري متناظر.

- نسبة الصلابة بعد الخضوع: $\alpha = k_1/k_0 = 0.05$ (تصلد حركي 5%)؛

حدد: (أ) إزاحة الخضوع ومطيلية الإزاحة؛ (ب) الطاقة المبددة في الدورة؛ (ج) طاقة الانفعال عند الإزاحة القصوى؛ (د) نسبة التخميد اللزج المكافئ بصيغة ياكوبسن؛ (هـ) التفسير الهندسي.

الحل.

(أ) إزاحة الخضوع والمطيلية.

$$u_y = \frac{F_y}{k_0} = \frac{400}{50} = 8\ \text{mm} \qquad \mu = \frac{u_{\max}}{u_y} = \frac{20}{8} = 2.5$$

(ب) الطاقة المبددة في الدورة.

للحلقة ثنائية الخط المتناظرة تساوي الطاقة المبددة في الدورة الكاملة مساحة متوازي الأضلاع المغلق. ولحلقة مرنة–لدنة (الحالة الحدية $\alpha \to 0$) تكون النتيجة الدقيقة:

$$W_D = 4\,F_y\,(u_{\max} - u_y)$$

في الحلقة ثنائية الخط ذات التصلد الحركي ($\alpha > 0$) تضيف الرحلات بعد الخضوع مساحة، لكن إسهامات التصلد تتلاشى في دورة متناظرة ذات سعتين موجبة وسالبة متساويتين، فتنطبق الصيغة نفسها. ومن ثم:

$$W_D = 4 \times 400 \times (20 - 8) = 4 \times 400 \times 12 = 19\,200\ \text{kN·mm} = 19.2\ \text{kN·m}$$

(ج) طاقة الانفعال عند الإزاحة القصوى.

طاقة الانفعال المرنة المخزنة عند $u_{\max}$ (محسوبة باتخاذ الصلابة الابتدائية مرجعاً) هي:

$$W_s = \frac{1}{2}\,k_0\,u_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 20^2 = 10\,000\ \text{kN·mm} = 10.0\ \text{kN·m}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(د) نسبة التخميد اللزج المكافئ (صيغة ياكوبسن).
تساوي صيغة ياكوبسن (1960) بين الطاقة المبددة في الدورة لمهتز لزج خطي مكافئ وطاقة النظام اللاخطي عند السعة نفسها:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{W_D}{4\pi\, W_s} = \frac{19.2}{4\pi \times 10.0} = \frac{19.2}{125.7} = 0.153 \quad (15.3\%)$$

(هـ) التفسير الهندسي.
تسهم حلقة التخلفية وحدها بتخميد لزج مكافئ قدره 15.3% عند مطيلية $\mu = 2.5$. ومع التخميد الإنشائي الذاتي ($\zeta_s \approx 2$–5% للفولاذ)، يتجاوز التخميد الفعال الكلي 17%؛ ولذلك تنجو المنشآت الخاضعة من زلازل أكبر بكثير مما توحي به سعتها المرنة. وتستحق ثلاث نقاط أخرى الذكر:

1. *المطيلية تولد التخميد.* بإعادة كتابة الصيغة:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{4F_y(u_{\max} - u_y)}{4\pi \cdot \frac{1}{2}k_0 u_{\max}^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1 - 1/\mu}{\mu} \times \frac{F_y/u_y}{F_y/u_y} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu}\cdot\mu$$

   وبصورة أبسط: تزداد ζ_{eq} مع طلب المطيلية حتى هضبة، مما يفسر كفاءة الأنظمة عالية المطيلية في امتصاص الطاقة الزلزالية.
2. *الصلة بمعاملات R في الأكواد.* الأساس الفيزيائي لمعامل خفض المقاومة $R = \mu$ هو هذا التخميد التخلفي تحديداً؛ فالإطار الذي يتحمل $\mu = 4$ يبدد طاقة كافية لمقاومة حركة أرضية أكبر أربع مرات مما تسمح به مقاومة خضوعه وحدها.
3. *القيود.* صيغة ياكوبسن تقريبية؛ تفترض استجابة مستقرة وتكون أدق عند المطيلية المعتدلة ($\mu \le 4$). وللأنظمة شديدة اللاخطية أو المتدهورة يكون تحليل التاريخ الزمني اللاخطي المباشر أوثق.

34.10.3 المطيلية وتصميم السعة

88 تُعرّف *مطيلية الإزاحة* μ بأنها نسبة الإزاحة القصوى إلى إزاحة الخضوع:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

يمكن للمنشآت المصممة للخضوع والتشوه اللدن النجاة من زلازل أقوى كثيراً من سعتها المرنة. وهذا مبدأ تصميم *السعة*: قبول الخضوع في مناطق مفصلة بعناية مع حماية العناصر الهشة.

89 تلتقط علاقة R–μ–T الصلة بين خفض المقاومة وطلب المطيلية. للمنشآت في نطاق الدور الحساس للسرعة:

$$R \approx \mu$$

تنص قاعدة «تساوي الإزاحة» على أن الإزاحة القصوى للمنشأ الخاضع تساوي نظيرتها لمنشأ مرن له الدور نفسه؛ فيخفض الخضوع طلب القوة دون زيادة الإزاحة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.10.3.1 مثال 34.12: طلب المطيلية وخفض القوة لإطار خرساني مسلح

يُراد تصميم إطار عزوم خرساني مسلح من طابق واحد في منطقة زلزالية يتبع طيف تصميمها الشكل الثلاثي في المثال 34.7.2.1 ($S_a = 0.80g$ عندما $T \le 0.60\ \text{s}$). خواص الإطار هي:

- الكتلة الزلزالية: $m = 300\ \text{t}$؛
- الدور الأساسي: $T_n = 0.40\ \text{s}$ (على الهضبة)؛
- ارتفاع الطابق: $h = 3.5\ \text{m}$؛
- مطيلية الإزاحة المتاحة: $\mu = 4$ (خرسانة مسلحة مطيلة جيدة التفصيل وفق الأكواد الحديثة).

باستعمال قاعدة تساوي الإزاحة، حدد: (أ) طلب قص القاعدة المرن؛ (ب) قص القاعدة التصميمي المخفض؛ (ج) إزاحتي الخضوع والحد الأقصى؛ (د) نسبة انجراف الطابق وفحص الأداء.

الحل.

(أ) قص القاعدة المرن (بلا خفض للمطيلية).

$$V_{\text{el}} = m\,S_a = 300 \times 0.80 \times 9.81 = 2\,354\ \text{kN}$$

(ب) قص القاعدة التصميمي المخفض.
تعطي قاعدة تساوي الإزاحة للأدوار في النطاق الحساس للسرعة $R \approx \mu$، ومن ثم يكون معامل خفض المقاومة $R = 4$:

$$V_y = \frac{V_{\text{el}}}{R} = \frac{2\,354}{4} = 589\ \text{kN}$$

يجب تصميم الإطار ليخضع عند مستوى القوة هذا. والتصميم على V_y بدلاً من V_{el} يخفض المقاومة الإنشائية المطلوبة، ومن ثم الكلفة، إلى الربع.

(ج) إزاحة الخضوع والإزاحة القصوى.
تُستخرج الصلابة الجانبية من الدور والكتلة:

$$k = \omega_n^2\,m = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m = \left(\frac{2\pi}{0.40}\right)^2 \times 300 = 246.7 \times 300 = 74\,022\ \text{kN/m}$$

إزاحة الخضوع:

$$u_y = \frac{V_y}{k} = \frac{589}{74\,022} = 7.95\ \text{mm}$$

وفق قاعدة تساوي الإزاحة، تساوي الإزاحة القصوى اللاخطية الإزاحة الطيفية المرنة:

$$u_{\max} = S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{0.80 \times 9.81}{246.7} = 31.8\ \text{mm}$$

التحقق: $\mu = u_{\max}/u_y = 31.8/7.95 = 4.0$ ✓.
الإزاحة اللدنة المطلوبة بعد الخضوع:

$$u_p = u_{\max} - u_y = 31.8 - 8.0 = 23.8\ \text{mm}$$

(د) نسبة انجراف الطابق وفحص الأداء.

$$\frac{u_{\max}}{h} = \frac{31.8}{3\,500} = 0.91\%$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تسمح معظم الأكواد بنسبة انجراف قصوى 2% لسلامة الأرواح و0.5% للإشغال الفوري. والانجراف 0.91% مقبول لهدف أداء سلامة الأرواح لكنه لا يحقق شرط الإشغال الفوري. تلخص الأرقام المقايضة الأساسية في الهندسة الزلزالية: بقبول 24 mm من التشوه اللدن تنخفض قوة التصميم إلى الربع. سيتحمل المنشأ ضرراً قابلاً للإصلاح في زلزال التصميم دون انهيار، وهو مقصد الأكواد الحديثة تحديداً. ولو صُمم الإطار نفسه مرناً ($\mu = 1$، و$R = 1$) لاحتاج إلى أربعة أمثال المقاومة، لكنه لن يتعرض لضرر إنشائي.

34.11 اعتبارات عملية

34.11.1 التخميد في المنشآت الحقيقية

90 تعتمد نسب التخميد المقاسة على المادة وسعة الاهتزاز ونوع الإنشاء. ومن القيم المعتادة:

نوع المنشأ	نسبة التخميد ζ
فولاذ ملحوم قبل الخضوع	0.02–0.01
فولاذ بمسامير قبل الخضوع	0.03–0.02
خرسانة مسلحة غير متشققة	0.02–0.01
خرسانة مسلحة متشققة	0.05–0.03
خرسانة سابقة الإجهاد	0.02–0.01
مبانٍ غير متشققة	0.03–0.02
منشآت خشبية	0.10–0.05

هذه قيم رتبة مقدار؛ يعتمد التخميد الفعلي على التفاصيل ويُقاس إن أمكن.

34.11.2 تفاعل التربة والمنشأ

91 تعتمد الاستجابة الديناميكية على المنشأ والتربة الحاملة. وقد يؤثر *تفاعل التربة والمنشأ* في حركة الدخل وترددات النظام. تزيد التربة المرنة الدور الفعال وتضيف تخميداً بإشعاع الطاقة. وتكون الآثار كبيرة للمنشآت الصلبة على تربة رخوة، ومهملة للمنشآت المرنة على الصخر.

34.11.3 مخمدات الكتلة الموالفة

92 مخمد الكتلة الموالف نظام ثانوي من كتلة ونابض ومخمد، يُوصل بالمنشأ ويُوالف لتردد محدد. عندما يهتز المنشأ عند تردده الطبيعي يهتز المخمد بعكسه فيخفض الاستجابة. ويُستعمل في المباني العالية والجسور الطويلة لخفض اهتزازات الرياح والزلازل.

93 الموالفة المثلى لمخمد على منشأ أولي غير مخمد:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

حيث $\mu_m = m_d/m$ نسبة الكتلة، وω_d تردد المخمد، وζ_d نسبة تخميده.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.11.4 مثال 34.13: تصميم مخمد كتلة موالف لمبنى عالٍ

لبرج فولاذي نحيل الخواص الديناميكية الآتية في نمطه الأساسي:

- الكتلة الكلية: $M = 800\ \text{t}$؛
- التردد الطبيعي: $\omega_n = 2.094\ \text{rad/s}$ ($T_n = 3.0\ \text{s}$، و$f_n = 0.333\ \text{Hz}$)؛
- التخميد الإنشائي: $\zeta = 1\%$ (فولاذ خفيف التخميد).

سيُركب مخمد كتلة موالف أعلى البرج بنسبة كتلة $\mu_m = m_d/M = 0.02$ (2%). حدد: (أ) كتلة المخمد؛ (ب) تردده الأمثل وصلابة نابضه؛ (ج) نسبة تخميده المثلى ومعامل المخمد؛ (د) خفض سعة الرنين في الحالة المستقرة.

الحل.

(أ) كتلة المخمد الموالف.

$$m_d = \mu_m\, M = 0.02 \times 800 = 16\ \text{t}$$

(ب) تردد المخمد الأمثل وصلابة نابضه.
من صيغة دن هارتوغ للموالفة المثلى:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

$$\omega_d = 0.9804 \times 2.094 = 2.053\ \text{rad/s} \qquad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0.327\ \text{Hz}$$

صلابة نابض المخمد هي:

$$k_d = m_d\,\omega_d^2 = 16 \times (2.053)^2 = 67.5\ \text{kN/m}$$

(ج) نسبة التخميد المثلى ومعامل المخمد.

$$\zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.02}{8 \times (1.02)^3}} = \sqrt{\frac{0.060}{8.489}} = \sqrt{0.00707} = 0.0841 \quad (8.4\%)$$

معامل المخمد اللزج:

$$c_d = 2\,\zeta_d\, m_d\, \omega_d = 2 \times 0.0841 \times 16 \times 2.053 = 5.53\ \text{kN·s/m}$$

(د) خفض سعة الرنين.
للمنشأ الأولي غير المخمد ($\zeta = 0$)، يخفض المخمد الموالف معامل التضخيم الديناميكي عند الرنين من قيمة غير محدودة إلى نحو:

$$D_{\text{TMD}} \approx \sqrt{\frac{2+\mu_m}{\mu_m}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2.02}{0.02}} = \frac{1}{2}\sqrt{101} = 5.02$$

مقارنةً بـ$D = 1/(2\zeta_{\text{struct}})$ دون المخمد الموالف. وعند التخميد الإنشائي الفعلي $\zeta = 1\%$ يكون تضخيم الرنين غير المضبوط $D_0 = 1/(2 \times 0.01) = 50$. ومن ثم يخفض المخمد الاستجابة القصوى بمعامل يقارب $50/5 = 10$، أي بنحو 90%.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعليق. تمثل نسبة الكتلة $\mu_m = 2\%$ التركيبات الفعلية؛ إذ يستعمل برج تايبيه 101 مخمداً بندولياً كتلته $660\ \text{t}$ مقابل كتلة مبنى تقارب $30{,}000\ \text{t}$ ($\mu_m \approx 2.2\%$). ونسبة التخميد المثلى 8.4% أعلى كثيراً من التخميد الإنشائي، ولذلك يلزم مخمد لزج مخصص داخل مخمد الكتلة. وتستحق ثلاث نقاط عملية التأكيد:

1. تفترض صيغ دن هارتوغ منشأً أولياً غير مخمد؛ ولا يكاد التخميد الإنشائي الصغير ($\zeta \le 2\%$) يؤثر في المعاملات المثلى.
2. يؤدي اختلال الموالفة، أي تغير ω_n بسبب تغير الصلابة أو الكتلة المضافة أو الحرارة، إلى تدهور كبير في فعالية المخمد. لذلك تُضاف أحياناً آليات نابض أو مخمد قابلة للضبط لإعادة الموالفة أثناء الخدمة.
3. لا تكون مخمدات الكتلة الموالفة فعالة إلا قرب التردد الموالف، ولا تخفض استجابة الأنماط الأخرى؛ لذلك تُستخدم مخمدات متعددة أو أجهزة عريضة النطاق عند إسهام عدة أنماط في الاستجابة.

34.11.5 العزل القاعدي

94 يُدخل العزل القاعدي طبقة مرنة، غالباً من مساند مطاطية أو نظم انزلاقية، بين المنشأ والأساس. ويطيل دور المنشأ المعزول كثيراً، فيبعده عن محتوى الطاقة العالي في الحركات الأرضية الزلزالية المعتادة. كما توفر طبقة العزل تخميداً إضافياً. ويكون العزل القاعدي فعالاً خصوصاً للمنشآت الصلبة قصيرة الدور، ويشيع في المستشفيات ومرافق الطوارئ والمباني التاريخية.

34.11.6 مثال 34.14: تصميم مبنى مستشفى معزول قاعدياً

يُراد تدعيم مستشفى من طابقين بنظام عزل من مساند المطاط والرصاص (LRB). وللمنشأ مثبت القاعدة الخواص الآتية:

- الوزن الزلزالي: $W = 12\,000\ \text{kN}$ (الكتلة $M = W/g = 1\,223\ \text{t}$)؛
- الدور الأساسي للقاعدة المثبتة: $T_{\text{fb}} = 0.30\ \text{s}$؛
- الصلابة الجانبية للقاعدة المثبتة: $K_{\text{fb}} = 537\,000\ \text{kN/m}$؛
- التخميد الإنشائي: $\zeta_s = 5\%$.

يتبع طيف تسارع التصميم عند تخميد 5% الشكل الثلاثي في المثال 34.7.2.1:

$$S_a(T) = \begin{cases} 0.80g & T \le 0.60\ \text{s} \\ \dfrac{0.48g}{T} & T > 0.60\ \text{s} \end{cases}$$

يُصمم نظام العزل لتحقيق دور معزول مستهدف $T_{\text{iso}} = 2.50\ \text{s}$ وتخميد فعال $\zeta_{\text{iso}} = 15\%$. حدد: (أ) صلابة العزل المطلوبة؛ (ب) إزاحة تصميم العوازل؛ (ج) قص القاعدة مع العزل ودونه؛ (د) معامل خفض التسارع.

الحل.

(أ) صلابة العزل المطلوبة.

تحكم صلابة طبقة العزل K_{iso} وحدها الدور المعزول (يُفترض أن المنشأ العلوي صلب نسبة إلى العوازل):

$$T_{\text{iso}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_{\text{iso}}}} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{iso}} = M\left(\frac{2\pi}{T_{\text{iso}}}\right)^2 = 1\,223 \times \left(\frac{2\pi}{2.50}\right)^2 = 1\,223 \times 6.317 = 7\,726\ \text{kN/m}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تمثل هذه نحو 1.4% من صلابة القاعدة المثبتة، مما يؤكد مرونة طبقة العزل الكبيرة نسبة إلى المنشأ العلوي.

(ب) إزاحة تصميم العوازل.

تُستخرج الإزاحة الطيفية عند $T_{\text{iso}} = 2.50\ \text{s}$ من العلاقات شبه الطيفية. أولاً يُقرأ التسارع الطيفي عند T_{iso}، وهو في فرع الدور الطويل:

$$S_a(2.50) = \frac{0.48g}{2.50} = 0.192g = 1.883\ \text{m/s}^2$$

يراعي معامل تصحيح التخميد η زيادة تخميد العزل ($\zeta_{\text{iso}} = 15\%$) نسبة إلى المرجع 5%:

$$\eta = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \zeta_{\text{iso}}}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + 0.15}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.20}} = 0.707$$

التسارع والإزاحة الطيفيان المصححان للتخميد هما:

$$S_a^{*} = \eta\, S_a = 0.707 \times 1.883 = 1.332\ \text{m/s}^2$$

$$S_d = \frac{S_a^{*}}{\omega_{\text{iso}}^2} = \frac{S_a^{*}}{(2\pi/T_{\text{iso}})^2} = \frac{1.332}{(2\pi/2.50)^2} = \frac{1.332}{6.317} = 0.211\ \text{m} \approx 211\ \text{mm}$$

هذه إزاحة التصميم التي يجب أن تستوعبها كل وحدة عزل. ويمكن للمساند المطاطية الرصاصية المعتادة تحمل إزاحة جانبية 200–400 mm، لذا فالتصميم قابل للتنفيذ.

(ج) قص القاعدة مع العزل ودونه.

القاعدة المثبتة (دون عزل، $T_{\text{fb}} = 0.30\ \text{s}$، تخميد 5%، منطقة الهضبة):

$$V_{\text{fb}} = M\, S_a(0.30) = 1\,223 \times 0.80 \times 9.81 = 9\,597\ \text{kN} \approx 0.80\,W$$

العزل القاعدي ($T_{\text{iso}} = 2.50\ \text{s}$، تخميد 15%، مصحح):

$$V_{\text{iso}} = M\, S_a^{*} = 1\,223 \times 1.332 = 1\,629\ \text{kN} \approx 0.136\,W$$

(د) معامل خفض التسارع.

$$\mathcal{R} = \frac{V_{\text{fb}}}{V_{\text{iso}}} = \frac{9\,597}{1\,629} = 5.89 \approx 6$$

يخفض العزل القاعدي قص القاعدة الزلزالي بنحو ستة أمثال، من 80% من وزن المبنى إلى 14%.

تعليق. تستحق جوانب عدة من هذه النتيجة الانتباه:

1. *إزاحة الدور هي الآلية الرئيسة.* ينقل التغير من $T = 0.30\ \text{s}$ إلى $T = 2.50\ \text{s}$ المنشأ خارج هضبة التسارع عالية الطاقة إلى ذيل الطيف طويل الدور منخفض التسارع. ويضيف التخميد الإضافي ($\eta = 0.707$) خفضاً بمعامل $\sqrt{2}$، لكن إزاحة الدور تحقق معظم الخفض.
2. *تسارعات المنشأ العلوي شبه منتظمة.* لأن طبقة العزل تركز معظم التشوه عند القاعدة، يتحرك المنشأ العلوي كجسم صلب تقريباً. وتتقارب تسارعات جميع الطوابق من $S_a^{*}/g \approx 0.136g$، وهي ميزة حاسمة لمستشفى يجب أن تبقى معداته وأسقفه ومكوناته غير الإنشائية عاملة بعد الزلزال.
3. *يجب استيعاب إزاحة العزل.* تتطلب إزاحة التصميم 211 mm فجوة زلزالية بهذا العرض على الأقل حول محيط المبنى كله، كما يجب تزويد جميع المرافق العابرة لمستوى العزل بوصلات مرنة.
4. *مجال التطبيق.* يكون العزل القاعدي أكثر فعالية للمنشآت الصلبة قصيرة الدور على أرض متماسكة. أما المنشآت المرنة (ذات T_{fb} الطويل) فتكون إزاحة الدور أصغر، وقد تلغي طاقة حركة التربة طويلة الدور الفائدة تماماً في الترب الرخوة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34.12 ملاحظات ختامية

34.12.1 تحذير مهني بشأن طرائق طيف الاستجابة

الأستاذ إدوارد ل. ويلسون عن طريقة طيف الاستجابة

«يؤسفني أنا وراي كلوف أننا ابتكرنا طريقة طيف الاستجابة التقريبية للتحليل الزلزالي للمنشآت عام 1962... كان كثير من المهنيين آنذاك يجمعون القيم المطلقة للقيم النمطية لتقدير قوى العناصر القصوى. اقترح راي استعمال طريقة SRSS لتركيب القيم النمطية. لكنني أنا من أدرج الطريقة التقريبية في برامج كثيرة للتحليل الديناميكي، فأتاحت للمهندسين إنتاج أرقام موجبة عديمة المعنى أو قليلة القيمة... وبعد أكثر من خمسين عاماً من العمل بطريقة RSM، أوصي بعدم استعمالها في التحليل الزلزالي.»

95 هذا التأمل الصريح من أحد مبتكري الطريقة يذكرنا بأن السهولة والصرامة ليستا شيئاً واحداً دائماً. وما زالت طريقة طيف الاستجابة شائعة في الأكواد والممارسة، لكن يجب فهم قيودها: تقريبات تركيب الأنماط، والعجز عن تمثيل السلوك اللاخطي، والاعتماد على افتراضات شكل الطيف. وللمنشآت الحرجة أو الاستجابة شديدة اللاخطية يكون تحليل التاريخ الزمني اللاخطي الأداة الملائمة، كما يطوره الفصل 52.

34.12.2 ملاحظة أخيرة: حدود النظرية الخطية

تعتمد معظم النتائج التحليلية في هذا الفصل على افتراضات خطية: قوى استعادة مرنة خطية، وإزاحات صغيرة، وتخميد لزج خطي عند استعماله. تتيح هذه الافتراضات التراكب والحلول المغلقة. وعند انتهاكها، بسبب خضوع المادة أو حركيات الإزاحة الكبيرة أو التلامس أو التخميد شديد اللاخطية، يجب عموماً حساب الاستجابة بالتكامل الزمني خطوةً بخطوة. ويطور الفصل المتقدم 52 هذه الموضوعات الحسابية والمتقدمة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35 عناصر التصميم الإنشائي

ملخص

لا يكون التحليل الإنشائي غاية في ذاته؛ بل هو أداة أساسية لتقييم مخاطر منشأ جديد أو قائم وسلامته، سواء كان مبنى أو طائرة أو حتى عظماً.

لذلك من المهم، في سياق هذا الكتاب الشامل، أن يملك المحلل الإنشائي فهماً موجزاً، وإن كان تمهيدياً، لعملية التصميم وعلاقتها بالتحليل. ويعرض هذا الفصل بعض الاعتبارات والنماذج الرئيسة لإجراءات التصميم الإنشائي.

سنستعرض بإيجاز تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD)، وتصميم معاملات الحمل والمقاومة (LRFD)، مع أمثلة توضيحية عدة. كما نقدم الهندسة القائمة على الأداء (PBE) بإيجاز، على أن تُعالج تفصيلاً في فصول لاحقة.

ويرتبط هذا الفصل خصوصاً بالعرض اللاحق للتحليل اللاخطي لمقاطع المنشآت (الفصل 55)، حيث يجب أن يتكامل التحليل والتصميم تكاملاً وثيقاً.

35.1 مقدمة 1201
35.1.1 التحليل والتصميم: عملية تكرارية 1201
35.1.2 السلامة 1201
35.2 تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD) . . 1204
35.2.1 مثال 35.1: تصميم الانحناء بطريقة ASD 1204
35.3 تصميم معاملات الحمل والمقاومة (LRFD) 1205
35.4 أمثلة لأكواد تصميم قائمة على LRFD . . 1207
35.4.1 تطبيق: المقاومة اللدنة لمقاطع كمرات الخرسانة المسلحة . . . 1208
35.4.2 تطبيق: المقاومة اللدنة لأعمدة الخرسانة المسلحة 1217
35.4.3 الخرسانة سابقة الإجهاد 1226
35.5 الهندسة القائمة على الأداء (PBE) 1230

35.1 مقدمة

35.1.1 التحليل والتصميم: عملية تكرارية

1 ليس التحليل غاية في ذاته؛ فغرضه النهائي إما تصميم منشأ جديد، غالباً وفق *أكواد التصميم* السائدة، أو تقييم سلامة منشأ قائم، وغالباً خارج النطاق المباشر للأكواد.

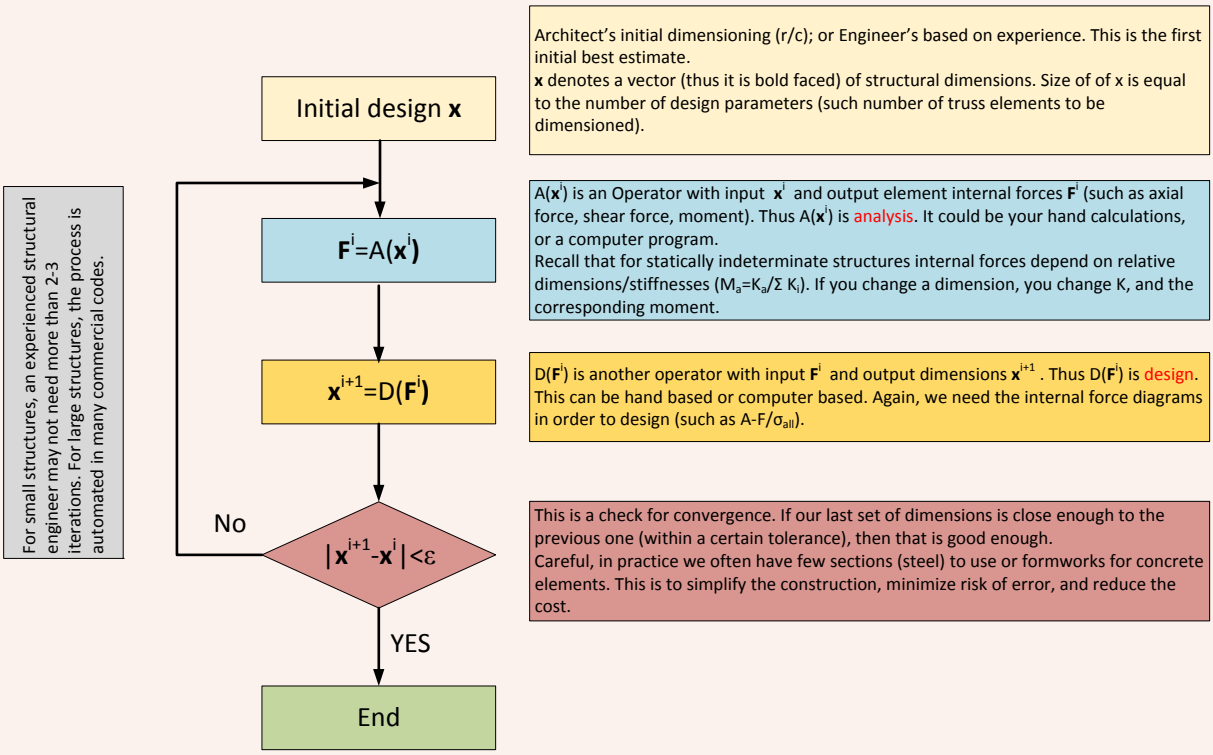
2 يزود التحليل مهندس التصميم بالإزاحات والإجهادات والقوى وردود الأفعال اللازمة للتصميم.

3 ولأن تحليل منشأ افتراضي غير محدد غير ممكن، نبدأ بتصميم أولي، ثم نحلل ونفحص وننقح بقدر ما يلزم حتى التقارب. يوضح الشكل 35.1 هذه العملية بوصفها تفاعلاً متكرراً بين عمليتي التحليل والتصميم.

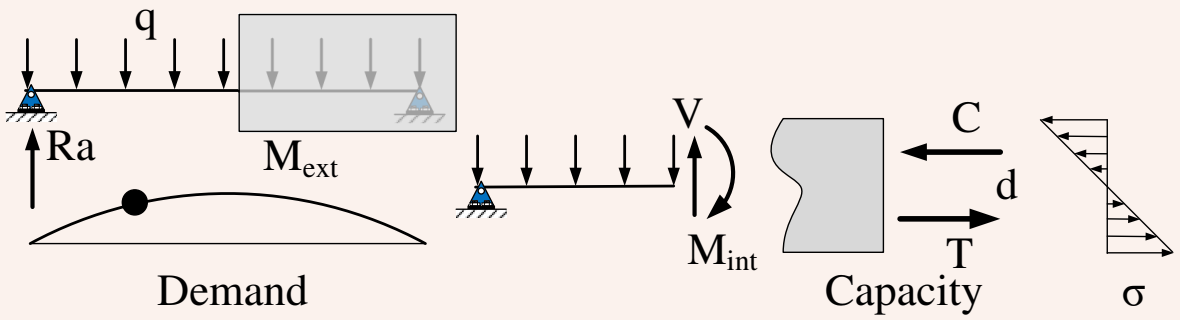
35.1.2 السلامة

4 نرمز في التصميم الإنشائي إلى قدرة المنشأ على مقاومة حمل معين بـC، وإلى الطلب الناتج من الحمل الخارجي بـD. وقد تكون وحداتهما F أو FL أو F/L^2، أي قوة أو عزماً أو إجهاداً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 35.1: التفاعل التكراري بين المعماري والمهندس الإنشائي

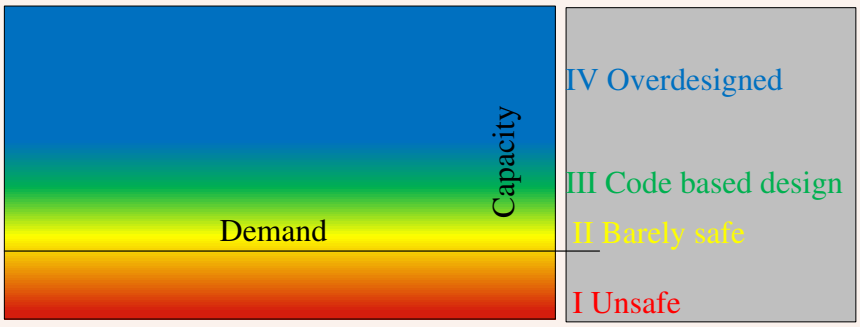


شكل 35.2: الطلب والقدرة في كمرة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5 ففي الكمرة مثلاً يُحدد الطلب من مخطط العزوم، بينما تعتمد القدرة على العزم الداخلي الممكن تعبئته، وهو دالة في خواص المقطع ومنحنى الإجهاد–الانفعال، كما في الشكل 35.2.

6 ينبغي طبعاً أن تتجاوز القدرة الطلب، لكن السؤال الرئيس هو: بأي مقدار، ووفق حسابات من؟ يبين الشكل 35.3 أربع مناطق، لا تحدد حدودها تحديداً صارماً إلا الحد الأدنى للأولى.



شكل 35.3: السلامة

I غير آمنة قد تبقى هذه المنشآت قائمة زمناً قصيراً جداً، وقد تنهار حتى قبل اكتمالها.

II آمنة بالكاد معامل سلامة هذه المنشآت أكبر بقليل من الواحد. وتمثل إنشاءات سبقت الأكواد الحديثة، ولا نعرف عادة معامل سلامتها الحقيقي. وقد تبقى قائمة حتى تتعرض لحدث تحميل نادر، وغالباً زلزالاً وإن لم يقتصر عليه. دُمر البارثينون بانفجار البارود المخزن فيه، ودمرت الزلازل منارة الإسكندرية وتمثال رودس ومدينتي لشبونة وبازل. وحتى حديثاً دمرت الزلازل منشآت سيئة التصميم؛ فقد حطم زلزال لوما بريبتا عام 1989 جسوراً وقناطر عديدة قرب سان فرانسيسكو. وربما صُممت هذه المنشآت جيداً *للأحمال الرأسية* لا *للأحمال الجانبية*. لذا يمكن تنقيح الشكل 35.3 للتمييز بين النوعين.

III آمنة وفق الأكواد الحديثة منشآت صُممت بأكواد حديثة، أي منذ نحو 1960 فما بعد.

IV مفرطة التصميم منشآت تتجاوز حاجتها التصميمية كثيراً. قد تكون صممها غير متخصصين حديثاً، أو مهندسون في زمن لم يكن فيه التحليل الإنشائي قد نضج. ومن أمثلتها مبنى إمباير ستيت وسد هوفر.

7 سعت الأكواد الحديثة إلى تأسيس السلامة على أساس صارم. وتبرز ثلاثة مناهج رئيسة:

1. تصميم الإجهادات المسموح بها؛
2. تصميم معاملات الحمل والمقاومة؛
3. الهندسة القائمة على الأداء.

وسيُعرض كل منها بإيجاز.

35.2 تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD)

8 في طريقة تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD) نفرض ببساطة:

$$D < \frac{C}{SF}$$

حيث SF معامل سلامة ($2 - 1.5 \sim$).

9 تُخفض القدرة وحدها في هذا النهج بسبب عدم اليقين، بينما يُفترض ضمنياً أن الطلب حتمي تماماً.

10 كان هذا النهج هو الاستراتيجية التاريخية السائدة، لكنه استُبدل تدريجياً بالنهج التالي منذ سبعينيات القرن العشرين.

35.2.1 مثال 35.1: تصميم الانحناء بطريقة ASD

تتعرض كمرة فولاذية بسيطة الاستناد بحرها 15 قدماً لحمل منتظم قدره 400 رطل لكل قدم، وإجهاد خضوع الفولاذ 36,000 psi. نتحقق من كفاية مقطع له عزم قصور $I = 80\,\text{in}^4$ ومعامل مقطع $S = 16\,\text{in}^3$، باستعمال معامل سلامة 1.75.

الإجهاد المسموح σ_{allow}، مع مراعاة معامل السلامة، هو:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\text{معامل السلامة}}$$

حيث $\sigma_{\text{yield}} = 36,000\,\text{psi}$ ومعامل السلامة 1.75. بالتعويض:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{36,000\,\text{psi}}{1.75} = 20,571.43\,\text{psi}$$

للكمرة بسيطة الاستناد ذات الحمل المنتظم، يقع عزم الانحناء الأقصى عند منتصف البحر ويعطى بالعلاقة:

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8}$$

حيث w = 400 رطل لكل قدم وL = 15 قدماً. ومن ثم:

$$M_{\max} = \frac{400\,\text{lb/ft} \times (15 \times 12)^2\,\text{in}^2}{8 \times 12} = \frac{400 \times 32400}{96} = 135,000\,\text{lb-in}$$

معامل المقطع المطلوب لمقاومة عزم الانحناء دون تجاوز الإجهاد المسموح هو:

$$S_{\text{required}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{allow}}}$$

حيث $\sigma_{\text{allow}} = 20,571.43\,\text{psi}$.
بالتعويض:

$$S_{\text{required}} = \frac{135,000\,\text{lb-in}}{20,571.43\,\text{psi}} \approx 6.56\,\text{in}^3$$

معامل المقطع المتاح $S = 16\,\text{in}^3$. وبما أن $S_{\text{provided}} = 16\,\text{in}^3$ أكبر من $S_{\text{required}} = 6.56\,\text{in}^3$، فإن المقطع كافٍ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35.3 تصميم معاملات الحمل والمقاومة (LRFD)

11 في LRFD تُعامل القدرة والطلب كمتغيرين عشوائيين لكل منهما دالة توزيع احتمالية، ولذلك يبقى دائماً احتمال للفشل.

12 يُفصل الحمل إلى حمل ميت (DL) وحمل حي (LL) وحمل رياح (WL) وغيرها. ثم يُضرب كل منها بمعامل $\alpha > 1$ وفق (ASCE/SEI 7-16, 2017 ,ASCE-7)، وتُستخدم المقاومة الاسمية القصوى أو اللدنة بعد خفضها بالمعامل Φ.

13 يُحدد α وΦ بحيث لا يتجاوز احتمال الفشل قيمة مستهدفة. ويُكتب شرط LRFD عموماً:

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i$$

فمثلاً يعطي كود ACI-318 التركيبة $D = 1.4DL + 1.7LL$ والمعامل $\phi = 0.9$ للانحناء.

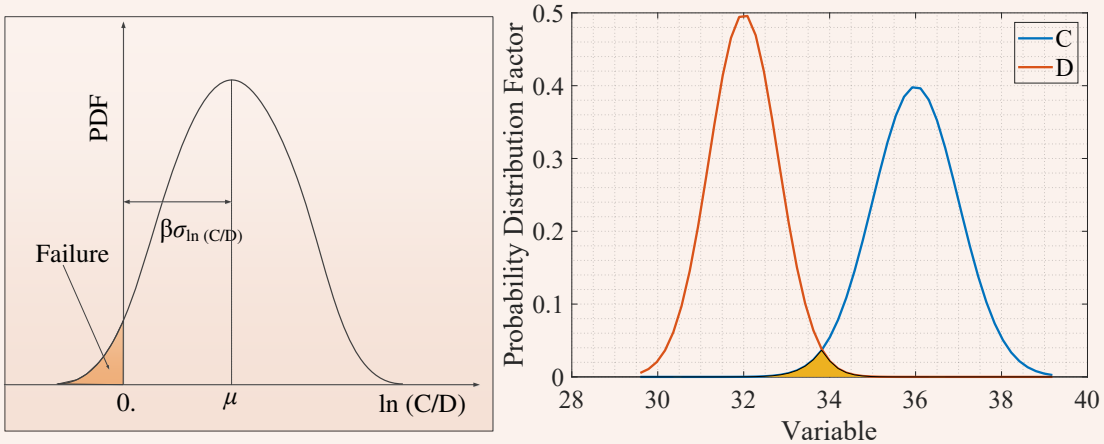
14 تُحدد الحالة الحدية عادة من القدرة اللدنة دون تحليل لاخطي، مع افتراض كفاية نتائج التحليل المرن الخطي.

15 يهدف LRFD إلى تحقيق مؤشر موثوقية، §N، بحيث $\beta >\sim 3.5$.

16 تُناقش قيود نموذج LRFD في §65.1 تمهيداً للهندسة الزلزالية القائمة على الأداء (chapter 70).

مؤشر الموثوقية مقياس عام لكفاية المنشأ، ويمكن استعماله: 1) لتقييم حالته، و2) لمقارنة منشآت مختلفة مرشحة للإصلاح.

17 نتيجة افتراض التوزيع الطبيعي لكل من C وD، يبقى احتمال للفشل دائماً، كما في الشكل 35.4a.



(a) التوزيعات الاحتمالية للقدرة والطلب (b) تعريف مؤشر الموثوقية

شكل 35.4: دالتا التوزيع الاحتمالي لـ C وD

18 يمكن تطبيع القدرة بالطلب، الشكل 35.4b، وتعريف ما يسمى مؤشر *الموثوقية* بإحدى طريقتين:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الطريقة الأولى

$$M = C - D$$
$$\mu_M = \mu_C - \mu_D$$
$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}$$
$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}}$$

الطريقة الثانية

$$M = \ln C - \ln D$$
$$\mu_M = \mu_C - \mu_D \text{ من الرتبة الأولى}$$
$$\sigma_M = \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2}$$
$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} = \frac{\ln \mu_C/\mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}$$

19 تُختار β لتعكس عواقب الفشل، كما في الجدول 35.1.

جدول 35.1: القيم المستهدفة لمؤشر الموثوقية

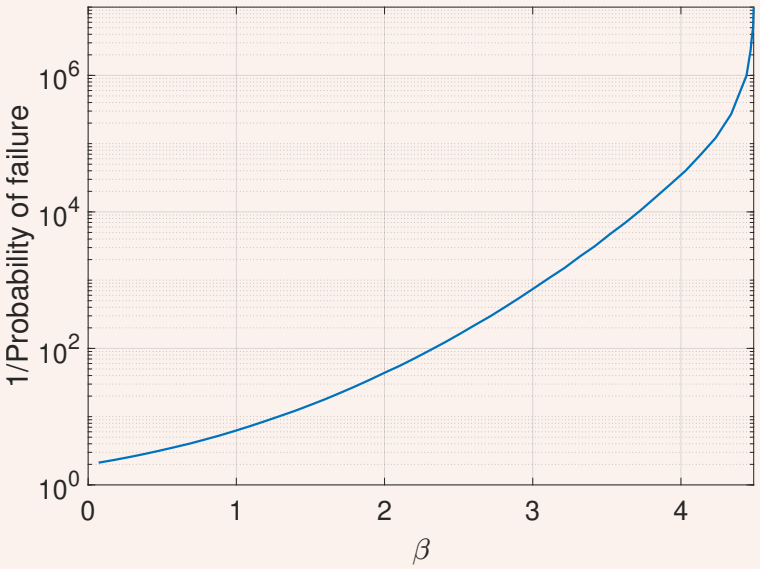
β	نوع الحمل أو العنصر
	***AISC**
3.0	DL + LL؛ عناصر
4.5	DL + LL؛ وصلات
3.5	DL + LL + WL؛ عناصر
1.75	DL + LL +EL؛ عناصر
	ACI
3.5-3	فشل مطيل
4-3.5	فشل هش

* المعهد الأمريكي للإنشاءات الفولاذية

20 يساوي احتمال الفشل P_f نسبة المساحة المظللة إلى المساحة الكلية تحت المنحنى، الشكل 35.4b، ويعطى بـ$\Phi(-\beta)$، حيث Φ دالة الاحتمال التراكمية للتوزيع الطبيعي المعياري:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 35.5: احتمال الفشل بدلالة β

21 وأخيراً يمكن ربط مؤشر الموثوقية مباشرة باحتمال الفشل، الشكل 35.5.

22 من أهم قيود LRFD:

1. عدم الاتساق: التحليل خطي والتصميم لدن.
2. إهمال إعادة توزيع الحمل قرب الفشل، وإن كان ACI يراعي بعضها ضمنياً بخفض العزوم السالبة.
3. معالجة مستوى خطر واحد فقط، هو فشل مكون إنشائي لا النظام كله، من دون قياس الضرر الناتج من أحداث أكثر تكراراً.

35.4 أمثلة لأكواد تصميم قائمة على LRFD

23 بعد تحديد القوى الداخلية، كالعزوم والقص، يمكن تصميم *مكونات المقطع* وفق كود *التصميم* السائد محلياً. تعتمد معظم المدن والولايات أكواد وطنية، مثل *متطلبات كود البناء للخرسانة الإنشائية* للمعهد الأمريكي للخرسانة (ACI 318.2-14, 2014) أو مواصفات المعهد الأمريكي للإنشاءات الفولاذية (American Institute of Steel Construction, 2016).

24 تُحدث هذه الأكواد بانتظام كل بضع سنوات لتعكس تعديلات توافقية تستند إلى أحدث البحوث.

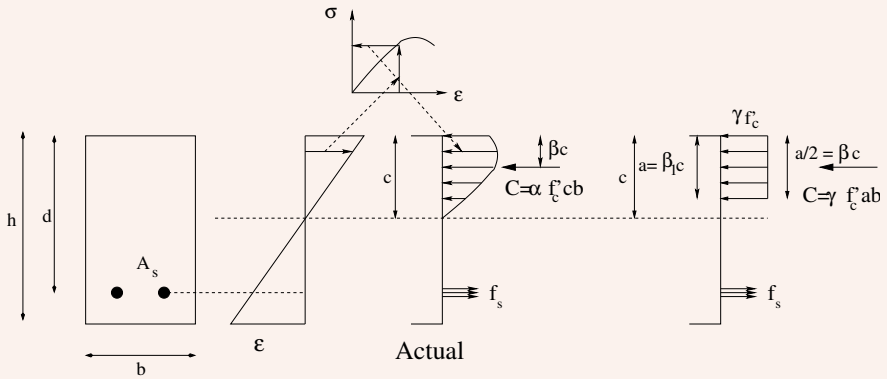
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

25 فيما يأتي مقتطفات من متطلبات *كود البناء للخرسانة الإنشائية* للمعهد الأمريكي للخرسانة (ACI 318.2-14, 2014).

> **9.5.1.1** لكل تركيبة أحمال معامَلة واجبة التطبيق، يجب أن تحقق مقاومة التصميم في جميع المقاطع $\phi S_n \geq U$، بما في ذلك ...
> **22.2.2** *افتراضات تصميم الخرسانة*
> **22.2.2.1** يُفترض أن الانفعال الأقصى عند ليف الضغط الأقصى للخرسانة يساوي 0.003.
> **22.2.2.2** تُهمل مقاومة شد الخرسانة في حسابات مقاومة الانحناء والمحور.
> **22.2.2.3** تُمثل علاقة إجهاد الضغط بالانفعال للخرسانة بشكل مستطيل أو شبه منحرف أو مكافئ أو أي شكل آخر يتنبأ بالمقاومة بما يتفق جوهرياً مع نتائج الاختبارات الشاملة.
> **22.2.2.4.1** يُفترض توزيع إجهاد خرسانة مقداره $0.85f'_c$ بانتظام على منطقة ضغط مكافئة تحدها حواف المقطع وخط موازٍ للمحور المتعادل على مسافة a من ليف انفعال الضغط الأقصى، وتحسب من: $a = \beta_1 c$ (22.2.2.4.1)
> **22.2.2.4.2** تُقاس المسافة c من ليف انفعال الضغط الأقصى إلى المحور المتعادل عمودياً على ذلك المحور.

35.4.1 تطبيق: المقاومة اللدنة لمقاطع كمرات الخرسانة المسلحة

26 مثالاً للتحليل والتصميم اللدنين للمقاطع، نعتبر مقطع خرسانة مسلحة، الشكل 35.6. لأن مقاومة شد الخرسانة أقل كثيراً من مقاومة ضغطها، يُفترض تشقق المقطع حتى المحور المتعادل. تقاوم الخرسانة الضغط، ويقاوم الفولاذ وحده الشد.



شكل 35.6: تحليل الحالة الحدية لمقطع خرسانة مسلحة متشقق

27 عند الفشل، أي الحالة الحدية، يكون توزيع الانفعال على المقطع خطياً وفق فرض برنولي (ACI 10.2.2). ولأن منحنى إجهاد–انفعال الخرسانة لاخطي، يكون توزيع الإجهاد لاخطياً.

28 لذلك يوجد خياران للتحليل:

1. استعمال تعبير تحليلي لـσ ثم التكامل الدقيق؛
2. استبدال مخطط الإجهاد الدقيق بمخطط أبسط مكافئ (ACI 10.2.6).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعتمد معظم الأكواد النهج الثاني، بينما يوضح المثال 35.4.1.4 النهج الأول.

29 في توزيع الإجهاد المكافئ يكفي معرفة محصلة الضغط C وموضعها، أي α وβ.

30 نعتمد إجهاداً مستطيلاً عمقه $a = \beta_1 c$ وقيمته $\gamma f'_c$ (ACI 10.2.7.1). ويسمى هذا التوزيع المستطيل *كتلة إجهاد ويتني*.

$$C = \alpha f'_c bc = \gamma f'_c ab$$
$$\alpha = \frac{f_{av}}{f'_c}$$
$$a = \beta_1 c$$

ومن ثم:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta_1}$$

ولأن موضع محصلة القوى يجب أن يبقى نفسه:

$$\beta_1 = 2\beta$$

31 من النتائج التجريبية:

(psi) f'_c	4,000<	5,000	6,000	7,000	8,000
α	72.	68.	64.	60.	56.
β	425.	400.	375.	350.	325.
$\beta_1 = 2\beta$	85.	80.	75.	70.	65.
$\gamma = \alpha/\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.86	0.86

32 لذلك يعطي ACI-318 10.2.7.3:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= .85 && \text{if } f'_c \le 4,000 \\ &= .85 - (.05)(f'_c - 4,000)\frac{1}{1,000} && \text{if } 4,000 < f'_c < 8,000 \end{aligned}$$

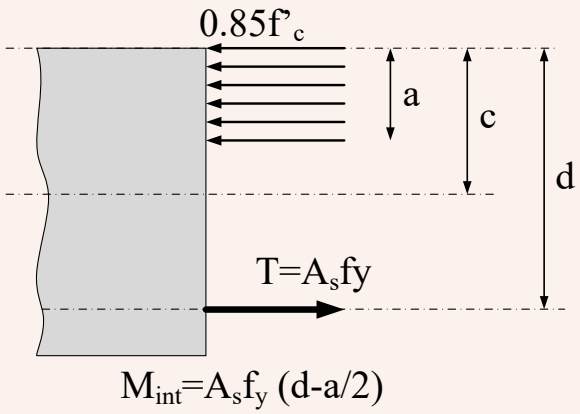
33 يمكن أن يحدث الفشل بإحدى الآليتين:

- خضوع الفولاذ: $\varepsilon_s = \varepsilon_y$؛ وهو تدريجي؛
- سحق الخرسانة: $\varepsilon_c = .003$؛ وهو مفاجئ؛ **(ACI 10.3.2)**.

يفضل أن تحدث آليتا الفشل معاً. ويتحقق ذلك عندما تكون نسبة التسليح $\rho = A_s/bd = \rho_b$ في تصميم *متوازن*.

أنماط الفشل نحدد نمطي الفشل الممكنين:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 35.7: كتلة إجهاد ويتني

فشل الشد:

$$\left.\begin{aligned} f_s &= f_y \\ A_s f_s &= .85 f_c' a b = .85 f_c' b \beta_1 c \\ \rho &= \frac{A_s}{bd} \end{aligned}\right\} c = \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d$$

فشل الضغط:

$$\varepsilon_c = .003$$

$$\varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \Rightarrow c = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d$$

التصميم المتوازن: يحدث عند تزامن خضوع الفولاذ وسحق الخرسانة. ولذلك نساوي المعادلتين السابقتين:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \\ \rho = \rho_b \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\rho b f 2 d}{.85 f_c' \beta_1} = \frac{.003}{\frac{f_s}{E - s} + .003} d \\ E_s = 29,000 \text{ ksi} \end{aligned}\right\} \quad \rho_b = .85 \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87,000}{87,000 + f_y}$$

(ACI 8.4.3)

فرض فشل الخضوع وهو تدريجي، بخلاف فشل الضغط المفاجئ:

$$\rho < .75 \rho_b$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

متطلبات المقاومة في ACI

$$U = 1.4D + 1.7L \quad \textbf{(ACI 9.2.1)}$$
$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) \quad \textbf{(ACI 9.2.2)}$$
$$M_d = M_u = \phi M_n \quad \textbf{(ACI 9.1.1)}$$
$$\phi = .90 \quad \textbf{(ACI 9.3.2.2)}$$

مراجعة تصميم قائم: عند إعطاء b, d, A_s, f'_c, f_y نحدد قدرة العزم M.

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd}$$
$$\rho_b = (.85)\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87 + f_y}$$

- إذا كان $\rho_{act} < \rho_b$ يحدث الفشل بالخضوع، ويكون:

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'_c b} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$M_d = \phi A_s f_y (d - \frac{a}{2}) \quad \Sigma M = 0$$

- لا يسمح الكود بالحالة $\rho_{act} > \rho_b$؛ وفيها يظهر مجهول إضافي هو f_s.

34 أصبح لدينا مجهول إضافي f_s، فنحتاج معادلة أخرى من مخطط الانفعال.

$$c = \frac{A_s f_s}{.85 f'_c b \beta_1} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \qquad \text{من مخطط الانفعال}$$
$$M_d = \phi A_s f_s (d - \frac{\beta_1 c}{2}) \qquad \Sigma M = 0$$

يمكن الحل بالتكرار، أو بالتعويض وحل معادلة تربيعية.

التصميم

35 في مسائل التصميم نحدد إما b وd وA_s لمقاومة عزم تصميم خارجي، أي الطلب، أو نعطى b وd ونحدد A_s.

I تكون b وd وA_s مجهولة وM_d معلومة. ولأن فشل التصميم يبدأ عند $f_s = f_y$:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 a = \dfrac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \\ \rho = \dfrac{A_s}{bd} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \dfrac{\rho f_y}{0.85 f'_c} d \\ M_d = A_s f_y \left(d - \dfrac{a}{2}\right) \end{array}\right\} M_d = \Phi \underbrace{\rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f'_c}\right)}_{R} b d^2$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث يحدد المصمم ρ؛ أو:

$$R = \rho f_y \left(1 - .59\rho\frac{f_y}{f_c'}\right)$$

وهو لا يعتمد على كميات مجهولة. ثم نحل لـbd^2:

$$bd^2 = \frac{M_d}{\Phi R}$$

نحل لـb وd، مما يتطلب افتراض أحدهما أو نسبتهما، ثم:

$$A_s = \rho bd$$

II تكون b وd وM_d معلومة ونحدد A_s. لكن لا ضمان لإمكان التصميم ضمن ρ_b؛ فإذا كان المقطع صغيراً جداً احتاج إلى فولاذ مفرط، فأصبح مفرط التسليح.

36 نتبع في هذه الحالة نهجاً تكرارياً:

(a) لأننا لا نعرف هل سيخضع الفولاذ، نستعمل f_s.
(b) نفترض قيمة ابتدائية لـa، ومنطلق جيد $a = \frac{d}{5}$.
(c) نفترض أولاً $f_s = f_y$.
(d) نتحقق من اتزان العزوم ($\Sigma M = 0$):

$$A_s = \frac{M_d}{\Phi f_s \left(d - \frac{a}{2}\right)}$$

(e) نتحقق من اتزان القوى في اتجاه x ($\Sigma F_x = 0$):

$$a = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b}$$

(f) نتحقق من افتراض f_s بمقارنة ρ مع ρ_b أو من مخطط الانفعال:

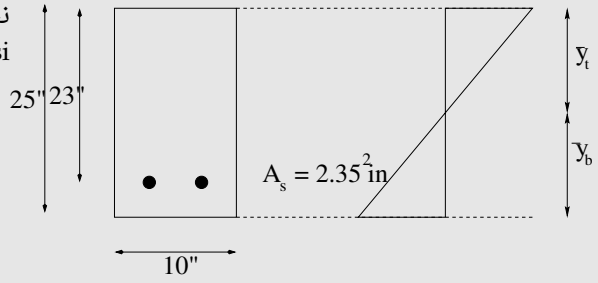
$$\frac{\varepsilon_s}{d-c} = \frac{.003}{c} \Rightarrow f_s = E_s\frac{d-c}{c}.003 < f_y$$

حيث $c = \frac{a}{\beta_1}$.

(g) نكرر حتى التقارب.

35.4.1.1 مثال 35.2: المقاومة القصوى: مراجعة

نحدد قدرة العزم القصوى للمقطع الآتي، حيث f'_c = 4,000 psi؛ f'_t = 475 psi؛ f_y = 60,000 psi؛ A_s = 2.35 in^2



$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.35}{(10)(23)} = .0102$$

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+f_y} = (.85)(.85)\frac{4}{60}\frac{87}{87+60} = .0285 > \rho_{act} \checkmark$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'_c b} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(4)(10)} = 4.15 \text{ in}$$

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (2.35)(60)\left(23 - \frac{4.15}{2}\right) = 2,950 \text{ k.in}$$

$$M_d = \phi M_n = 0.9(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

ملاحظة:

1. من الاتزان، $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow c = \frac{A_s f_y}{.85\beta_1 b f'_c} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(.85)(4)(10)} = 4.87$ in
2. حل بديل:

$$M_n = \rho_{act} f_y b d^2 (1 - .59\rho_{act}\frac{f_y}{f'_c})$$

$$= A_s f_y d (1 - 59\rho_{act}\frac{f_y}{f'_c})$$

$$= (2.35)(60)(23)[1 - (.59)\frac{60}{4}(.0102)] = 2,950 \text{ k.in} = 245 \text{ k.ft}$$

$$M_d = \phi M_n = (.9)(2,950) = 2,660 \text{ k.in}$$

35.4.1.2 مثال 35.3: المقاومة القصوى: التصميم الأول

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

صمم كمرة خرسانة مسلحة لها $L = 15$ ft; DL = 1.27 ; k/ft LL = 2.44 ; k/ft f'_c = 3,000 psi؛ وf_y = 40 ksi؛
وأهمل الوزن الذاتي للكمرة؛ واختر $\rho = 0.75\rho_b$.

$$w_u = 1.4(1.27) + 1.7(2.44) = 5.92 \text{ k/ft} \quad \text{الحمل المعامل}$$

$$M_d = \frac{w_u L^2}{8} = \frac{(5.92)(15)^2}{8} = 166.5 \text{ k.ft}(12) \text{ in/ft} = 1,998 \text{ k.in}$$

$$\rho = 0.75\rho_b = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+f_y}$$

$$= (0.75)(.85)^2 \frac{3}{40}\frac{87}{87+40} = .0278$$

$$R = \rho f_y \left(1 - .59\rho\frac{f_y}{f'_c}\right)$$

$$= (.0278)(40)\left(1 - (0.59)(.0278)\frac{40}{3}\right) = 0.869 \text{ psi}$$

$$bd^2 = \frac{M_d}{\phi R} = \frac{1,998}{(0.9)(0.869)} = 2,555 \text{ in}^3$$

نأخذ $b = 10$ in و$d = 16$ in، ومن ثم $\Rightarrow A_s = (.0278)(10)(16) = 4.45 \text{ in}^2$ نستعمل 11 # 3

35.4.1.3 مثال 35.4: المقاومة القصوى: التصميم الثاني

صمم كمرة خرسانة مسلحة للمعطيات: $b = 11.5$ in ;$d = 20$ in ;$f'_c = 3$ ksi ;$f_y = 40$ ksi ;$M_d = 1,600$ k.in
نفترض $a = \frac{d}{5} = \frac{20}{5} = 4$ in.

$$A_s = \frac{M_d}{\phi f_y (d - \frac{a}{2})} = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{4}{2})} = 2.47 \text{ in}^2$$

التحقق من الافتراض:

$$a = \frac{A_s f_y}{(.85) f'_c b} = \frac{(2.47)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.38 \text{ in}$$

لذلك نأخذ $a = 3.3$ in.

$$A_s = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{3.3}{2})} = 2.42 \text{ in}^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{(2.42)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.3 \text{ in} \checkmark$$

$$\rho_{act} = \frac{2.42}{(11.5)(20)} = .011$$

$$\rho_b = (.85)(.85)\frac{3}{40}\frac{87}{87+40} = .037$$

$$\rho_{max} = .75\rho_b = .0278 > \rho_{act} \checkmark$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35.4.1.4 مثال 35.5: التحليل الدقيق

بوصفك مهندساً يفحص صلاحية معادلة ACI لقدرة الانحناء القصوى لكمرات الخرسانة المسلحة، حددت تجريبياً منحنى الإجهاد–الانفعال الآتي للخرسانة:

$$\sigma = \frac{2\frac{f'_c}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

حيث تقابل f'_c الانفعال ε_{max}.

نريد:

1. تحديد نسبة التسليح المتوازنة الدقيقة لكمرة خرسانة مسلحة لها $b = 10$"، و$d = 23$"، و$f'_c = 4,000$ psi، $f_y = 60$ ksi، $\varepsilon_{max} = 0.003$.
2. معادلة توزيع الإجهاد الدقيق على المقطع؛
3. تحديد قوة الضغط الكلية C وموضعها بدلالة موضع المحور المتعادل c؛
4. المقارنة مع ACI 318.

يسير الحل كما يأتي:

1. الإجهاد–الانفعال:

$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times10^6\varepsilon}{1+1.11\times10^5\varepsilon^2}$$

2. نفترض سحق الخرسانة عند الفشل، فيكون توزيع الانفعال:

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$

3. بدمج المعادلتين:

$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

4. قوة الضغط الكلية هي:

$$F = \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2}dy$$
$$= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Bigg|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Bigg|_0^c$$
$$= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc$$

5. يتطلب الاتزان $T = C$:

$$2,773bc = A_s f_y$$

من مخطط الانفعال:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29,000}+.003} = 13.6 \text{ in}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. بدمج المعادلتين الأخيرتين:

$$A_s = \frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000} = 6.28 \text{ in}^2$$

7. لتحديد العزم نحدد أولاً مركز قوة الضغط مقاساً من المحور المتعادل:

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y\sigma dy}{2,773bc} = \frac{b\int_0^c \frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}}{2,773bc} dy = \frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy \\
&= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right] \\
&= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c \\
&= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43 \text{ in}
\end{aligned}$$

8. ثم نحسب العزم:

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6,713 \text{ k.in}$$

9. باستعمال كود ACI:

$$\begin{aligned}
\rho_b &= .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285 \\
A_s &= \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55 \text{ in}^2 \\
a &= \frac{A_s f_y}{.85f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57 \text{ in} \\
M &= A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765 \text{ k.in} \\
c &= \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61
\end{aligned}$$

10. نلخص النتائج:

	دقيق	ACI
A_s	6.28	6.55
c	13.6	13.6
$\overline{y}'$	5.18	5.78
M	6,713	6,765

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35.4.2 تطبيق: المقاومة اللدنة لأعمدة الخرسانة المسلحة

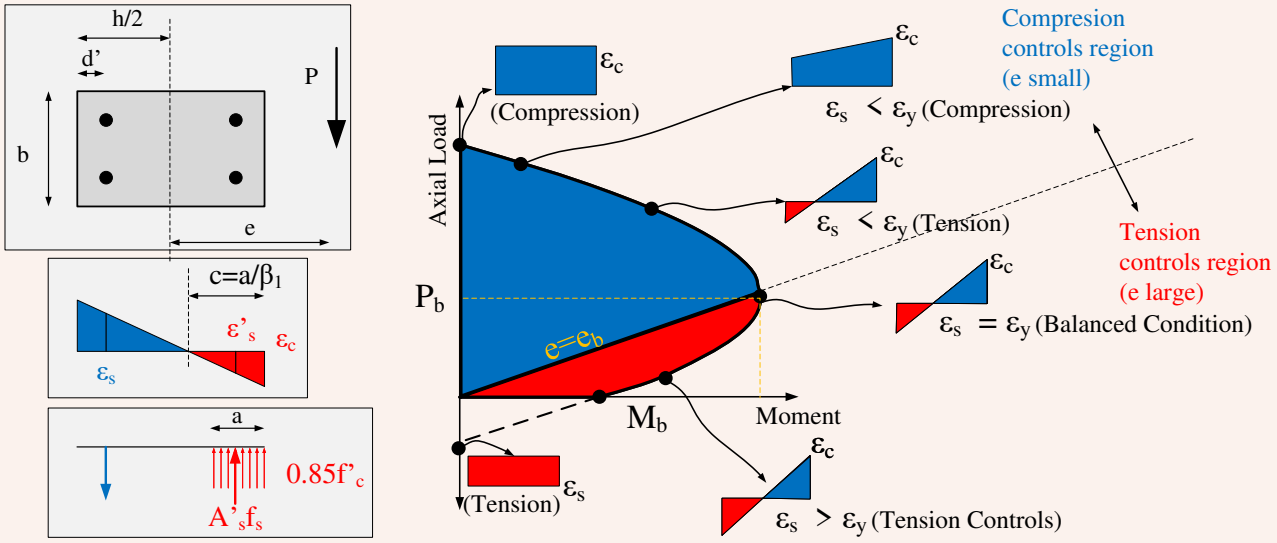
34 الأعمدة، أو بدقة أكبر *الأعمدة–الكمرات*، هي عناصر تتعرض لقوة محورية وانحناء ناتج من لا مركزية القوة المطبقة.

35 بحسب لا مركزية القوة المحورية توجد ثلاثة أنماط محتملة للفشل، الشكل 35.8a:

1. لا مركزية كبيرة للحمل ⇒ فشل بخضوع الفولاذ، أي سلوك كمرة أساساً؛
2. لا مركزية صغيرة ⇒ فشل بسحق الخرسانة؛
3. حالة متوازنة يتزامن فيها سحق الخرسانة وخضوع الفولاذ.

36 لأن الفشل ينتج من اجتماع الانحناء والقوة المحورية، يظهر غلاف فشل أو «شرط خضوع» شبيه بما نوقش في §54.2، ويسمى هنا مخطط *التفاعل*.

37 يبين الشكل 35.8a مخطط التفاعل، ويتضح مع دراسة أنماط الفشل الثلاثة.



(b) مخطط الجسم الحر (a) مخطط التفاعل

شكل 35.8: مخططا الجسم الحر والتفاعل للعمود

38 الافتراضات: $A'_s = A_s$؛ و$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}$؛ و$f'_s = f_y$.

الحالة المتوازنة

39 توجد لا مركزية محددة $e_b = \frac{M}{P}$ يبدأ عندها الفشل بخضوع الفولاذ وسحق الخرسانة معاً.

40 من مخطط الانفعال وتوافق انفعالي الخرسانة والفولاذ، الشكل 35.8b:

$$\varepsilon_c = .003$$
$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$
$$c = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d$$

مما يؤدي إلى:

$$\frac{\varepsilon'_s}{c - d'} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$
$$\Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{c - d'}{c} \varepsilon_c$$

ومن ثم يخضع فولاذ الضغط، أي $\varepsilon'_s = \varepsilon_y$، عند $\varepsilon_c = .003$.

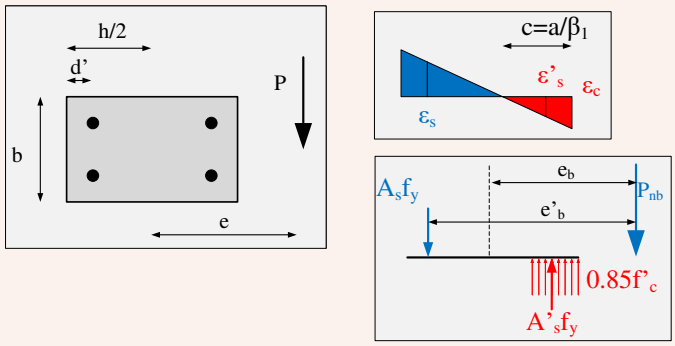
41 من الاتزان:

$$\left.\begin{array}{rl} P_n &= .85 f'_c ab + A'_s f'_y - A_s f_s \\ f_s &= f_y \\ A_s &= A'_s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} a &= \frac{P_n}{.85 f'_c b} \\ a &= \beta_1 c_b \\ c_b &= \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d \end{array}\right\} P_{n,b} = .85 \beta_1 f'_c b d \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003}$$

أو:

$$P_{nb} = .85 \beta_1 f'_c b d \frac{87,000}{f_y + 87,000}$$

42 لإيجاد M_{nb} نأخذ عزم القوى الداخلية حول مركز فولاذ الشد A_s؛ ويجب أن يساوي العزم الخارجي ويعاكسه، الشكل 35.9.



شكل 35.9: الجسم الحر للعمود في الحالة المتوازنة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$M_{nb} = \underbrace{P_{nb} e_b}_{M_{ext}} = \underbrace{.85 f'_c a b (d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')}_{M_{int}}$$

43 ملاحظة: تتلاشى العزوم الداخلية الناتجة من $A_s f_y$ و$A'_s f_y$ في الأعمدة المتناظرة.

فشل الشد

44 نميز حالتين:

الحالة الأولى: e معلومة و$e > e_b$

في هذه الحالة تكون a وP_n مجهولتين، ولكي يبدأ الفشل بوصول A_s إلى f_y يجب أن يكون $e > e_b$.

يمكن أيضاً افتراض $A_s f_y = A'_s f_y$.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_n = .85 f'_c a b \Rightarrow a = \frac{P_n}{.85 f'_c b}$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n e' = P_n (d - \frac{a}{2}) + A'_s f'_y (d - d')$$

يوجد نهجان:

1. حل المعادلتين تكرارياً:

(a) افترض a بحيث $a < \frac{h}{2}$.
(b) من توافق الانفعال احسب إجهاد الفولاذ المركزي f_{sc} إن وجد.
(c) من $\Sigma F_y = 0$ احسب P_n.
(d) من $\Sigma M = 0$ حول تسليح الشد احسب P_n.
(e) إذا لم تتقارب قيمتا P_n، كرر بحساب a من $\Sigma F_y = 0$.

2. ادمج المعادلتين في معادلة تربيعية في P_n:

$$P_n = .85 f'_c b d \left\{ -\rho - (\frac{e'}{d} - 1) + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2\rho \left[\mu \left(1 - \frac{d'}{d}\right) + \frac{e'}{d}\right]} \right\}$$

حيث:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}$$

$$\mu = \frac{f_y}{.85 f'_c}$$

الحالة الثانية: c معلومة و$c < c_b$؛ وP_n مجهولة

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في هذه الحالة لا يوجد إلا مجهولان: P_n وf'_s.

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &\stackrel{\text{def}}{=} f_y \\
f'_s &= \varepsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f'_c a b \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_y \\
M_n &= C\frac{h-a}{2} + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right) \\
e &= \frac{M_n}{P_n}
\end{aligned}
$$

يفضل هذا النهج عند إنشاء مخطط التفاعل.

فشل الضغط

45 نميز أيضاً حالتين:

الحالة الأولى: e معلومة و$e < e_b$؛ وP_n وa وf_s مجهولة

يحدث فشل الضغط إذا كان $e' < e'_b$، ومن ثم $\varepsilon_u = .003$؛ نفترض $f'_s = f_y$ و$f_s < f_y$.

من الهندسة:

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\varepsilon_u}{\frac{f_s}{E_s} + \varepsilon_u} d \\
\Rightarrow f_s &= E_s \varepsilon_u \frac{d - c}{c} \\
&= E_s \varepsilon_u \frac{d - \frac{a}{\beta_1}}{\frac{a}{\beta_1}} \\
P_n &= .85 f'_c a b + A'_s f_y - A_s f_s \\
P_n e' &= .85 f'_c a b (d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d')
\end{aligned}
$$

ينتج من ذلك معادلة تكعيبية في P_n يمكن حلها تحليلياً أو بالتكرار.

1. افترض a بحيث $a \simeq h$.
2. طبق $\Sigma M = 0$ حول تسليح الشد واحسب P_n.
3. من توافق الانفعال احسب f_s.
4. تحقق من $\Sigma F_y = 0$ واحسب a.
5. إذا كان $a^{i+1} \neq a^i$ فارجع إلى الخطوة 2.

الحالة الثانية: c معلومة و$c > c_b$؛ وf_s وf'_s وP_n مجهولة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في هذه الحالة:

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \le f_y \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \le f_y \\
C &= 0.85 f'_c a b \\
P_n &= C + A_s f_s + A'_s f'_s \\
M_n &= C\frac{h-a}{2} + A'_s f'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right)
\end{aligned}
$$

35.4.2.1 مثال 35.6: عمود خرسانة مسلحة مع معرفة c

عمود أبعاده 12 في 20 بوصة، مسلح عند كل زاوية بقضيب رقم 4 مساحته 1.0 in^2 . المعطيات $f'_c = 3.5$ ksi، و$f_y =$ 50 ksi، و$d' = 2.5$ in. حدد: 1) P_b وM_b؛ 2) الحمل والعزم عند $c = 5$ in؛ 3) الحمل والعزم عند $c = 18$ in؛ 4) مخطط التفاعل.

الحالة المتوازنة تُشتق النتيجة بالرجوع إلى المعادلات الأساسية، لا بمجرد التعويض في معادلة مشتقة سابقاً.

$$
\begin{aligned}
d &= h - d' = 20 - 2.5 = 17.5 \text{ in} \\
c_b &= \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d = \frac{.003}{\frac{50}{29{,}000} + .003} 17.5 = 11.1 \text{ in} \\
a &= \beta_1 c_b = (0.85)(11.1) = 9.44 \text{ in} \\
f_s &\overset{\text{def}}{=} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f_y = 50 \text{ ksi} \\
f'_s &= E_s \frac{c-d'}{c} \varepsilon_c = (29{,}000)(\frac{11.1-2.5}{11.1}(0.003) = 67.4 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f'_s = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f'_c a b = (0.85)(3.5)(9.44)(12) = 337 \text{ k} \\
P_{nb} &= C + A_s f_s - A'_s f_s = 337 + (2.0)(50) + (2.0)(-50) = 337 \text{ k} \\
M_{nb} &= .85 f'_c a b (d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 337\left(17.5 - \frac{9.44}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 5{,}807 \text{ k.in} = 484 \text{ k.ft} \\
e_b &= \frac{5{,}807}{337} = 17.23 \text{ in}
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فشل الشد، $c = 5$ in

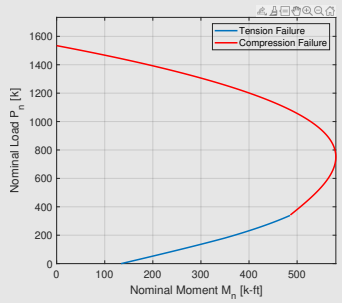
$$
\begin{aligned}
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi} \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{5.0 - 2.5}{5.0} = 43.5 \text{ ksi} \\
a &= \beta_1 c = 0.85(5.0) = 4.25 \text{ in} \\
C &= 0.85 f'_c ab \\
&= (0.85)(3.5)(4.25)(12) = 152 \text{ k} \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_y \\
&= 152 + (2.0)(43.5) - (2.0)(50) = 139 \text{ k} \\
M_n &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 152\left(17.5 - \frac{4.25}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 3,638 \text{ k.in} = 303 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{3,638}{139} = 26.3 \text{ in}
\end{aligned}
$$

فشل الضغط، $c = 18$ in

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c = 0.85(18) = 15.3 \text{ in} \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d - c}{c} \quad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{17.5 - 18.0}{18.0} = -2.42 \text{ ksi} \quad \text{تحت الضغط } {}_sA \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{18.0 - 2.5}{18.0} = 75 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f'_s = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f'_c ab = (0.85)(3.5)(15.3)(12) = 546 \text{ k} \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_s \\
&= 546 + (2.0)(50) - (-2.42)(2) = 650 \text{ k} \\
M_n &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 546\left(17.5 - \frac{15.3}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 6,880 \text{ k.in} = 573 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{5,809}{650} = 17.2 \text{ in}
\end{aligned}
$$

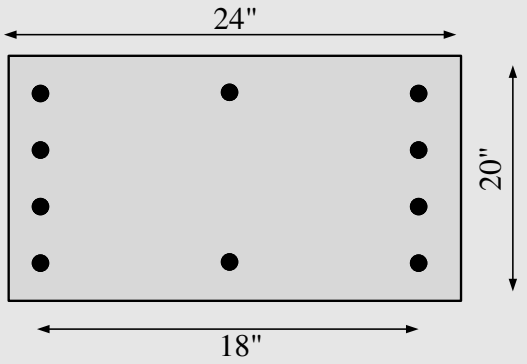
مخطط التفاعل يرد برنامج MATLAB®في الملحق I.2.13.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



35.4.2.2 مثال 35.7: عمود خرسانة مسلحة مع معرفة e

للعمود الآتي حدد e_b وP_b وM_b، ثم P_n وM_n عند $e = 0.1h$ وعند $e = h$. المعطيات $f'_c = 3,000$ psi و$f_y =$ 40,000 psi، ومساحة كل قضيب 1.56 in^2.



الحالة المتوازنة:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{40}{29,000} = .001379$$

$$c_b = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{.003 + .001379}.003 = 14.4 \text{ in}$$

$$a = \beta_1 c_b = (.85)(14.4) = 12.2 \text{ in}$$

$$C_c = .85 f'_c ab = (.85)(3)(12.2)(20) = 624 \text{ k}$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{c - h/2}{c} \varepsilon_u = \frac{14.4 - 12}{14.4}.003 = .0005$$

$$f_{sc} = (29,000)(.0005) = 15 \text{ ksi} \quad \text{القضبان المركزية}$$

$$C_s = (.0005)(29,000)(2)(1.56) = 46.8 \text{ k}$$

$$P_{nb} = 624 + 46.8 = 670.8 \text{ k}$$

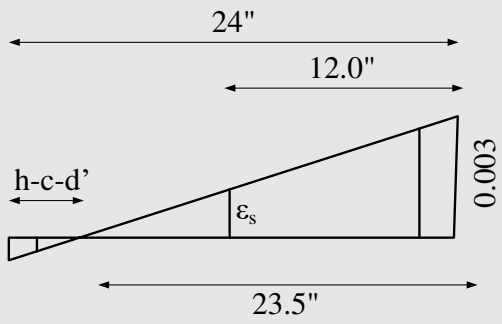
لاحظ أن فولاذ الضغط يخضع لأن $d' > 2$" و$c > 6$"، كما أُثبت سابقاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بأخذ العزم حول مركز المقطع:

$$\begin{aligned}
M_{nb} &= P_{nb}e \\
&= .85f'_c ab\left(\frac{h}{2}-\frac{a}{2}\right)+A_s f_y\left(\frac{h}{2}-d'\right)+A'_s f_y\left(\frac{h}{2}-d'\right) \\
&= (.85)(3)(12.2)(20)\left(12-\frac{12.2}{2}\right)+4(1.56)(9)(40)+4(1.56)(40-.85\times 3)(12-3) \\
&= 3,671+2,246+2,246 \\
&= 8,164 \text{ k.in}; 680 \text{ k.ft} \\
e_b &= \frac{8,164}{670.8} = 12.2 \text{ in}
\end{aligned}$$

e= .1 h $e=(.1)(24)=2.4 \text{ in} < e_b \Rightarrow$ يحدث الفشل بالضغط. وتكون P_n وa وf_s مجهولة. المعادلات المتاحة:
1) $\Sigma F=0$؛ 2) $\Sigma M=0$؛ 3) مخطط الانفعال. ويُحل بالتكرار.



1. افترض $a=20 \text{ in}$.

$$c=\frac{a}{\beta_1}=\frac{20}{.85}=23.5 \text{ in}$$

2. للفولاذ المركزي، من الهندسة:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_{sc}}{c-\frac{h}{2}} &= \frac{.003}{c} \\
\Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{c-\frac{h}{2}}{c}.003 \\
f_{sc} &= E_s\varepsilon_{sc} \\
&= E_s\frac{c-\frac{h}{2}}{c}.003 \\
&= 29,000\frac{23.5-12}{23.5}.003 = 42.5 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_{sc}=f_y
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. خذ العزم حول مركز قضيب فولاذ الشد:

$$\begin{aligned}
P_n e' &= 0.85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (h - 2d') + A_{sc} f_y (\frac{h}{2} - d') \\
P_n(9 + 2.4) &= (.85)(3)(20)(20)(21 - \frac{20}{2}) + 4(1.56)(40)(24 - 6) + 2(1.56)(40)(9) \\
&= 11,220 + 4,493 + 259.7 \\
\Rightarrow P_n &= 1,476 \text{ k}
\end{aligned}$$

4. احسب ε_s في قضيب الشد من مخطط الانفعال:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_s}{h - d' - 23.5} &= \frac{.003}{c} \\
\Rightarrow \varepsilon_s &= \frac{.003}{23.5}(24 - 3 - 23.5) \\
&= -.000319 \\
f_s &= E\varepsilon_s = (29,000)(0.000319) = 9.25 \text{ ksi}
\end{aligned}$$

5. طبق $\Sigma F = 0$ للتحقق من افتراض a:

$$\begin{aligned}
P_n &= 0.85 f'_c ab + A'_s f_y + A_{sc} f_{sc} + A_s f_y \\
1,476 \text{ k} &= (.85)(3)(a)(20) + (4)(1.56)(40) + (2)(1.56)(40) + (4)(1.56)(9.25) \\
1,476 &= 51a + 432.1 \\
\Rightarrow a &= 20.4 \text{ in} \checkmark \\
P_n &= 1,476 \text{ k} \\
M_n &= (1,476)(2.4) = 3,542 \text{ k.in} = 295 \text{ k.ft}
\end{aligned}$$

e=h

1. في هذه الحالة $e = 24 \text{ in} > e_b \Rightarrow$ يحدث الفشل بالشد، وتكون P_n وa مجهولتين. ولدينا معادلتان: (1) $\Sigma F = 0$؛ (2) $\Sigma M = 0$.
2. افترض $a = 7.9 \text{ in} \Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.9}{.85} = 9.3 \text{ in}$.
3. إجهاد الفولاذ عند المركز:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{.003} &= \frac{12 - c}{\varepsilon_{sc}} \\
\Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{12 - 9.3}{9.3}.003 = .00087 \\
\Rightarrow f_{sc} &= (29,000)(0.00087) = 25.3 \text{ ksi}
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. كرر:

$$\begin{aligned}\Sigma F = 0 \Rightarrow P_n &= (.85)f'_c ab + A_{sc} f_{sc} \\ &= (.85)(3)(7.9)(20) - 2(1.56)(25.3) \\ &= 403 - 79 = 324 \text{ k}\end{aligned}$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n(e + h/2 - d') = .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y(d - d') - A_{sc} f_{sc}(\frac{d - d'}{2})$$

$$\begin{aligned}P_n(24 + 9) &= (.85)(3)(7.9)(20)(21 - \frac{7.9}{2}) + 4(1.56)(40)(21 - 3) \\ &\quad + 2(1.56)(25.3)(9) \\ P_n(33) &= 6,870 + 4,493 - 710 = 10,653 \text{ k.in} \\ \Rightarrow P_n &= 323 \text{ k} \checkmark\end{aligned}$$

5. حدد M_n:

$$M_n = P_n e = (323)(24) = 7,752 \text{ k.in} = 646 \text{ k.ft}$$

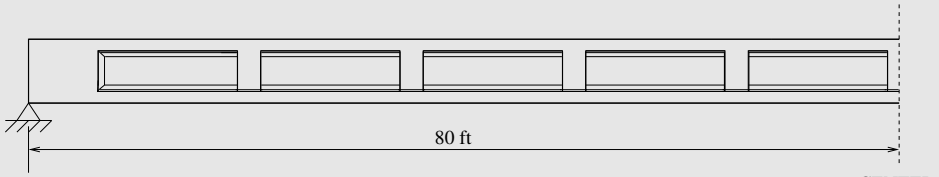
35.4.3 الخرسانة سابقة الإجهاد

35.4.3.1 مثال 35.8: دراسة حالة: جسر وولنت لين

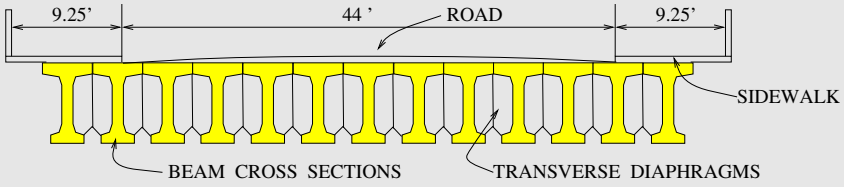
ةداملا ةيتآلا ةلوقنم نم Billington, 1983 Structural Studies.

يتكون جسر وولنت لين التاريخي، أول جسر رئيس من الخرسانة سابقة الإجهاد في الولايات المتحدة، من ثلاثة بحور: جانبيان طول كل منهما 74 قدماً، ووسطي طولها 160 قدماً. وُضعت ثلاث عشرة كمرة خرسانية سابقة الإجهاد جنباً إلى جنب لتكوين طريق عرضه الكلي 44 قدماً ورصيفين عرض كل منهما 9.25 قدماً. وبين الكمرات مقويات مستعرضة صُبت معها لتربطها جانبياً.

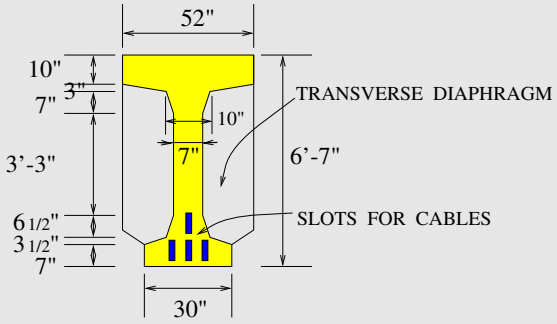
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ELEVATION OF BEAM HALF



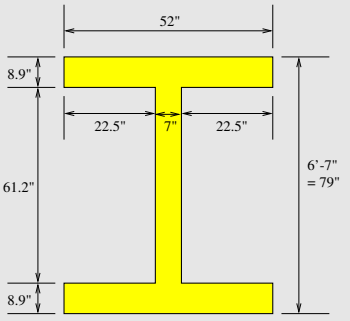
CROSS - SECTION OF BRIDGE



CROSS - SECTION OF BEAM

خواص المقطع

يبين الشكل أدناه مقطع الكمرة المبسط:



SIMPLIFIED CROSS - SECTION OF BEAM

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$A_c = 2(8.9)(52) + (7)(61.2) = 1,354 \text{ in}^2$$
$$I = 2\left[\frac{(52)(8.9)^3}{12} + (52)(8.9)\left(\frac{79}{2} - \frac{8.9}{2}\right)^2\right] + \frac{(7)(61.2)^3}{12}$$
$$== 1,277 \times 10^3 \text{ in}^4$$
$$c_1 = c_2 = \frac{h}{2} = \frac{79}{2} = 39.5 \text{ in}$$
$$S_1 = S_2 = \frac{I}{c} = \frac{1,277 \times 10^3}{39.5} = 32,329 \text{ in}^3$$
$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{1,277 \times 10^3}{1,354} = 943. \text{ in}^2$$

سبق الإجهاد

تُسبق إجهاد كل كمرة بكابلين مكافئين في الوسط وكابلين أفقيين خارجيين على طول الجناحين. وللكابلات الأربعة تقريباً لا مركزية واحدة عند منتصف البحر مقدارها 2.65 قدم أو 31.8 بوصة.

يتكون كل كابل من 64 سلكاً قطر كل منها 0.27 بوصة. ومن ثم تكون مساحة فولاذ سبق الإجهاد الكلية:

$$A_{wire} = \pi(d/2)^2 = 3.14(\frac{0.276 \text{ in}}{2})^2 = 0.0598 \text{ in}^2$$
$$A_{cable} = 64(0.0598) \text{ in}^2 = 3.83 \text{ in}^2$$
$$A_{total} = 4(3.83) \text{ in}^2 = 15.32 \text{ in}^2$$

مع أن مقاومة الشد القصوى للفولاذ المستعمل 247 ksi، شُدت الكابلات إلى 131 ksi فقط، ولذلك تكون قوة سبق الإجهاد الابتدائية P_i:

$$P_i = (131) \text{ ksi}(15.32) \text{ in}^2 = 2,000 \text{ k}$$

تبلغ الفواقد المعلنة 13%، فتكون القوة الفعالة:

$$P_e = (1 - 0.13)(2,000) \text{ k} = 1,740 \text{ k}$$

الأحمال

الوزن الذاتي للكمرة $q_0 = 1.72$ k/ft. سمك سطح الطريق الخرساني، كثافته 15. k/ ft^3 ، يساوي 0.45 قدم. ولذلك يكون الحمل الكلي على كمرة واحدة لعرض 44 قدماً:

$$q_{r,tot} = \frac{1}{13}(44) \text{ ft}(0.45) \text{ ft}(0.15) \text{ k/ ft}^3 = 0.23 \text{ k/ft}$$

وبالمثل، للرصيفين عرض 9.25 قدم وسمك 0.6 قدم:

$$q_{s,tot} = \frac{1}{13}(2)(9.25) \text{ ft}(0.60) \text{ ft}(0.15) \text{ k/ ft}^3 = 0.13 \text{ k/ft}$$

يمكن توزيع الوزن بالتساوي على الكمرات الثلاث عشرة بفضل الحواجز العرضية.

الحمل الميت الكلي:

$$q_{DL} = 0.23 + 0.13 = 0.36 \text{ k/ft}$$

ينتج الحمل الحي من المرور ويقدر بـ94 psf؛ وعلى عرض 62.5 قدم يعطي حملاً حياً منتظماً:

$$w_{LL} = \frac{1}{13}(0.094) \text{ k/}ft^2(62.5) \text{ ft} = 0.45 \text{ k/ft}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأخيراً يكون مجموع الحملين الميت والحي لكل كمرة:

$$w_{DL+LL} = 0.36 + 0.45 = 0.81 \text{ k/ft}$$

إجهادات الانحناء

1. قوة سبق الإجهاد P_i وحدها:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = 490. \text{ psi} \\ f_2 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = -3,445. \text{ psi} \end{aligned}$$

2. P_i وعزم الوزن الذاتي للكمرة M_0، الذي يجب احتسابه منذ لحظة تقوس الكمرة بفعل سبق الإجهاد:

$$M_0 = \frac{(1.72)(160)^2}{8} = 5,504 \text{ k.ft}$$

فتكون إجهادات الانحناء:

$$f_{1,2}^{w_0} = \mp\frac{M_0}{S_{1,2}} = \mp\frac{(5,50.4)(12,000)}{943.} = \mp 2,043 \text{ psi}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\ &= 490 - 2,043 = -1,553 \text{ psi} \\ f_{ti} &= 3\sqrt{f'_c} = +190\checkmark \\ f_2 &= \frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\ &= -3,445 + 2,043 = -1,402. \text{ psi} \\ f_{ci} &= .6f'_c = -2,400\checkmark \end{aligned}$$

3. P_e وM_0. عند فواقد 13% تكون القوة الفعالة $P_e = (1 - 0.13)(2\times 10^6) = 1.74\times 10^6$ lbs.

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\ &= -\frac{1.74\times 10^6}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) - 2,043. = -1,616 \text{ psi} \\ f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\ &= -\frac{1.74\times 10^6}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) + 2,043. = -954. \text{ psi} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. P_e و $M_0 + M_{DL} + M_{LL}$:

$$M_{DL} + M_{LL} = \frac{(0.81)(160)^2}{8} = 2,592 \text{ k.ft}$$

والإجهادات المناظرة:

$$f_{1,2} = \mp\frac{(2,592)(12,000)}{32,329} = \mp 962. \text{ psi}$$

ومن ثم:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0 + M_{DL} + M_{LL}}{S_1} \\ &= -1,616 - 962. = -2,578. \text{ psi} \\ f_{cs} &= .45 f'_c = -2,700 \checkmark \\ f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0 + M_{DL} + M_{LL}}{S_2} \\ &= -954 + 962. = +8. \text{ psi} \\ f_{ts} &= 6\sqrt{f'_c} = +380 \checkmark \end{aligned}$$

35.5 الهندسة القائمة على الأداء (PBE)

46 تُعرّف PBE بأنها اختيار معايير التصميم والنظم الإنشائية والترتيب والأبعاد والتفاصيل الملائمة للمنشأ ومكوناته غير الإنشائية ومحتوياته، وضمان جودة التنفيذ وصيانته الطويلة الأمد وضبطهما، بحيث لا يتجاوز الضرر حالات حدية معينة عند مستويات إثارة محددة وبموثوقية معلومة. تبدأ PBE مع أول تصور للمشروع وتستمر طوال عمر المنشأ (Bertero **and** Bertero, 2002).

47 يقيم التصميم الزلزالي القائم على الأداء صراحةً كيفية أداء المبنى المتوقع أمام الخطر المحتمل، مع مراعاة عدم اليقين في قياس الخطر وفي تقدير الاستجابة الفعلية للمبنى.

48 بخلاف LRFD، لا يقتصر هذا النهج على مستوى خطر واحد، بل يعالج مستويات متعددة.

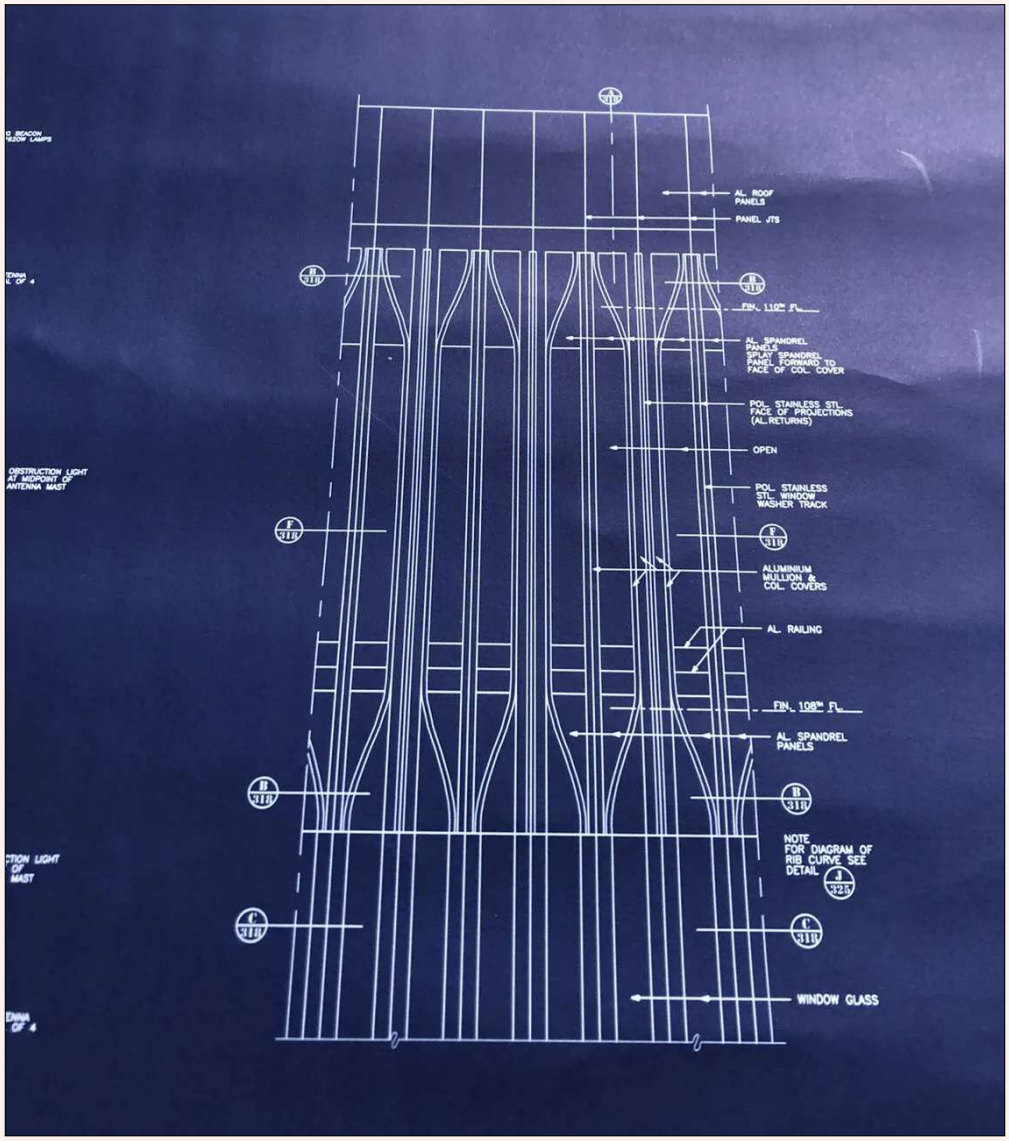
49 يُقاس الأداء باحتمال وقوع إصابات، وتكاليف الإصلاح والاستبدال، ومدة الإصلاح، واحتمال وسم المبنى بعدم الأمان.

50 يمكن تقييم الأداء لسيناريو زلزالي أو شدة محددة، أو لجميع الزلازل الممكنة واحتمال كل منها خلال مدة زمنية معينة.

51 يُعبر عن الأداء بسلسلة مستويات منفصلة: التشغيل، والإشغال الفوري، وسلامة الأرواح، ومنع الانهيار.

52 تتجاوز PBEE كلاً من التصميم والتحليل منفرداً، ويعالجها الفصل 70 بتفصيل أكبر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



مخططات مركز التجارة العالمي

يجسد المخطط الهندسي نظرية التصميم، إذ يوضح تحويل الأفكار التصورية إلى تمثيلات تقنية دقيقة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

36 تصميم قوس غير محدد سكونياً

ملخص

يعرض هذا الفصل مثالين تفصيليين لتحليل إنشائي مركب مطبق على منشآت حقيقية، ويوضح كيف يتبادل التحليل والتصميم التأثير ضمن عملية تكرارية. يُحلل ضلع قوس فولاذي ملحوم لحظيرة طائرات وقوس ذو مفصلين، لإظهار تطبيق طرائق التوافق على المنشآت القوسية غير المحددة سكونياً.

36.1 مثال 36.1: تصميم قوس غير محدد سكونياً 1232

36.2 مثال 36.2: التغيرات الحرارية في قوس 1238

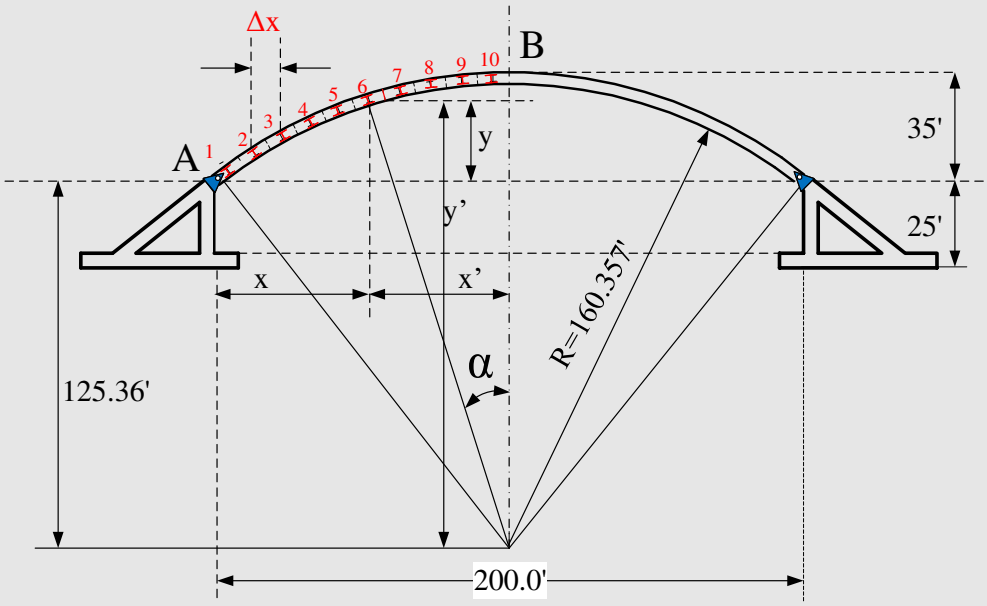
يعد المثالان الآتيان من أوضح تطبيقات التحليل المركب على منشآت حقيقية، ويكشفان بجلاء الترابط التكراري بين التحليل والتصميم.

36.1 مثال 36.1: تصميم قوس غير محدد سكونياً

نم لوقنم يتآلا مسقلا Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

نريد تصميم ضلع قوس فولاذي ملحوم مصمت ذي مفصلين لحظيرة. يتغير عزم قصور الضلع بحسب الحاجة. البحر بين مركزي المفصلين 200 قدم، وتباعد الأضلاع 35 قدماً بين المراكز، والارتفاع 35 قدماً. يُفترض أن وزن سطح السقف والمدادات والضلع 25 lb/ft^2 من سطح السقف، وحمل الثلج 40 lb/ft^2. توزع عشرون مدادة بالتساوي على الضلع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



1. يُتخذ خط مركز الضلع قوساً دائرياً. وبالحساب يكون نصف قطر الدائرة 160.357 قدم وطول القوس AB مقدار 107.984 قدم.

2. يُقسم القوس AB للتحليل إلى عشرة أجزاء طول كل منها 10.798 قدم. وتنقل المدادات حملاً مركزاً إلى مركز كل جزء، كما تبين الأرقام في الشكل.

3. بما أن مجموع الحمل الميت وحمل الثلج 65 lb/ft^2 من سطح السقف، تكون كل قوة مركزة:

$$P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k} \tag{36.1}$$

4. يبين الجدول 1 حساب إحداثيات مراكز الأجزاء نسبة إلى المفصل A، كما يبين Δx، أي الإسقاط الأفقي للمسافة بين مراكز الأجزاء.

الجزء	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
التاج					160.36	100.000	35.00	5.399

الجدول 1

5. إذا لم تتوفر خبرة كافية لتقدير التغير الأولي للمقطع على طول الضلع، يُنصح أن يفترض التحليل الأول عزم قصور ثابتاً. وكثيراً ما يجد المهندس الخبير أيضاً أن هذا أفضل إجراء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. بعد تحديد H تُحسب العزوم وقوى الدفع المحورية على طول الضلع، ثم تُصمم المقاطع لمقاومتها. ويُعاد حساب H والعزوم والدفع للضلع الجديد متغير المقطع، وتُفحص الإجهادات، وتكرر العملية عند الحاجة. سنتبع هذا الإجراء هنا.
7. بالطريقة العامة، مع افتراض أن الطرف A على بكرات:

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0 \tag{36.2}$$

8. تُحسب الإزاحات بالعمل الافتراضي، فتصبح المعادلة:

$$\sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta S + H_A \sum \delta\overline{M} \frac{\overline{M}}{EI} \Delta S = 0 \tag{36.3}$$

9. بما أن E وΔS ثابتان، وعزم القصور ثابت في التحليل الأول، يكون التعبير النهائي لـH_A:

$$H_A = -\frac{\sum M \delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}} \tag{36.4}$$

يبين الجدول 2 جميع الحسابات اللازمة للتقييم الأول لـH_A.

الجزء	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (k · ft)	(4) القص إلى اليمين (k)	(5) Δx (ft)	(6) زيادة M العزم (k · ft)	(7) M كمرة بسيطة الاستناد (k ·ft)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{M}\overline{M}$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
التاج	100.00	35.00	—	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

الجدول 2

فينتج:

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}\overline{M}} = -\frac{2 \times 2,158,100}{2 \times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{36.5}$$

10. يحسب الجدول 3 العزوم عند مراكز أجزاء الضلع باستعمال القيمة التقريبية المحددة لـH_A. ويُعد العزم موجباً إذا اتجه إلى إحداث ضغط على السطح العلوي للضلع.

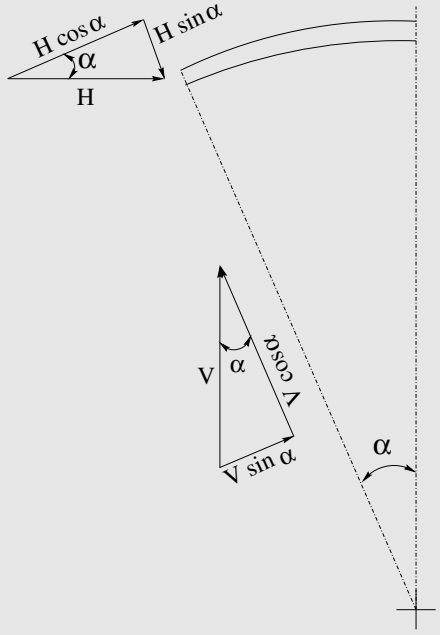
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجزء	y (ft)	M كمرة بسيطة الاستناد (k · ft)	$H_A y$ (k · ft)	M الكلي عند الجزء (k · ft)
A	0			
1	3.29	1,050	1,100–	50–
2	9.44	3,010	3,150–	140–
3	14.98	4,830	5,000–	170–
4	19.88	6,490	6,640–	150–
5	24.13	7,950	8,060–	110–
6	27.69	9,200	9,250–	50–
7	30.57	10,220	10,210–	10+
8	32.73	11,000	10,930–	70+
9	34.18	11,530	11,420–	110+
10	34.19	11,790	11,660–	130+
التاج	35.00	11,790	11,690–	100+

الجدول 3

11. يجب حساب الدفع N العمودي على المقطع عند مركز كل جزء قبل تحديد متطلبات المقطع. كما نحسب قيم القص الكلي S على المقطع عند مركز كل جزء.

12. تُستخرج N وS بتركيب مركبتي H والقص الرأسي V عند مركز كل جزء، كما يأتي:



يتضح من الشكل أن:

$$S = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$N = V\sin\alpha + G\cos\alpha$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13. يحسب الجدول 4 قيم S وN. وتبين قيم S صحة الملاحظة السابقة بأن قوى القص صغيرة في ضلع القوس المعتاد.

الجزء	(k) V	$V\cos\alpha$	$-H\sin\alpha$	(k) $= S$	$V\sin\alpha$	$+H\cos\alpha$	(k) $= N$
A	245.6	192	208-	16- =	153	261 +	414 =
1	221.1	177	199-	22- =	132	268+	400 =
2	196.5	165	181-	16- =	106	281+	387 =
3	172.0	150	162-	12- =	83	292+	375 =
4	147.4	133	142-	9- =	62	303+	365 =
5	122.8	114	121-	7- =	44	311+	355 =
6	98.3	94	100-	6- =	29	319+	348 =
7	73.7	72	78-	6- =	17	325+	342 =
8	49.1	48	56-	8- =	8	329+	337 =
9	24.6	244	34-	10- =	2	332+	334 =
10	0.0	0	11-	11- =	0	334+	334 =
التاج						334+	334 =

الجدول 4

14. يبين فحص قيم العزم M في الجدول 3 والدفع N في الجدول 4 أن الجزء 3 حرج في منطقة العزم السالب، والجزء 10 حرج في منطقة العزم الموجب. وقبل إكمال الجدول 5 يجب تحديد المقطعين اللازمين عند مركزيهما وفق مواصفات المعهد الأمريكي للإنشاءات الفولاذية.

15. أبعاد الجناحين 12 بوصة × 1 بوصة، وإجهاد الانحناء المسموح F_B=20 k/in^2. وسمك الجِسم $\frac{3}{4}$ بوصة، والإجهاد المحوري المسموح[a] هو F_A=17,000-0.485 L/r.

الجزء	(2) العمق الكلي (in.)	(3) المساحة (in^2)	(4) I (in^4)	(5) M (k · ft)	(6) الدفع المحوري N (k)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (k/in^2)	(8) $f_b = \frac{Mc}{I}$ (k/in^2)	(9) المسموح F_a (k/in^2)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$	+	(11) $\frac{f_b}{F_b}$	=	(12) كسر من القدرة
A	23.00	39.75	3483		414	10.4		15.88	0.66				0.66
1	23.00	39.75	3483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63		0.10		0.73
2	23.00	39.75	3483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61		0.28		0.89
3	23.00	39.75	3483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60		0.34		0.94
4	22.07	39.05	3172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59		0.32		0.91
5	21.13	38.35	2865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58		0.24		0.82
6	20.20	37.65	2585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58		0.11		0.70
7	19.27	36.95	2329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58		0.02		0.61
8	18.32	36.24	2071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58		0.19		0.77
9	17.40	35.55	1838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59		0.31		0.90
10	16.47	34.85	1631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60		0.40		1.00
التاج	16.00	34.50	1527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60		0.32		0.92

الجدول 5

16. يعتمد سمك صفائح الجناح والجسم وعرض صفائح الجسم على الحكم الهندسي. يُستعمل العمق الكلي المحدد عند مركز الجزء 3 من ذلك المركز حتى نهاية الضلع، ويُتخذ عمق الجزء 10 عمقاً للضلع عند التاج. ويتغير العمق الكلي خطياً من مركز الجزء 3 إلى التاج. ويفحص الجدول 5 كفاية المقاطع المحددة عند مراكز الأجزاء.

17. يلزم إعادة حساب H_A لأن عزم قصور الضلع أصبح متغيراً. تُعدل المعادلة 36.4 لإدخال I لكل جزء:

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}M/I} \tag{36.6}$$

18. يبين الجدول 6 تحديد القيمة المنقحة لـH_A. تُحسب قيم العمود (2) بقسمة $M\delta\overline{M}$ لكل جزء في العمود (8) من الجدول 2 على I الكلي لذلك الجزء من الجدول 5. وتُحسب قيم العمود (3)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بالطريقة نفسها من العمود (9) في الجدول 2. أما عزوم الكمرة البسيطة في العمود (5) فتُنقل مباشرة من العمود (7) في الجدول 2.

(1) الجزء	(2) $\frac{Mn}{I}$	(3) $\frac{m^2}{I}$	(4) منقح $H_A y$ (k · ft)	(5) M كمرة بسيطة الاستناد (k · ft)	(6) عزم منقح (k · ft)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	50-
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	150-
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	190-
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	170-
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	130-
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	70-
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	20-
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	40+
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	80+
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	100+
التاج			11,720	11,790	70+
$\sum$	1010.85	3.0192			

الجدول 6

19. إذن القيمة المنقحة لـH_A هي:

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} = -frac2 \times 1,010.852 \times 3.0192 = -334.81k \quad (36.7)$$

20. تُحسب القيم المنقحة للدفع المحوري N عند مراكز الأجزاء في الجدول 7.

الجزء	$V \sin \alpha$	$+$	$H \cos \alpha$	$=$	منقح N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
التاج			335		335

الجدول 7

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

21. يفحص الجدول 8 كفاية المقاطع المصممة سابقاً عند مراكز الأجزاء. ويبدو أن جميع مقاطع الضلع مرضية، لكن لا يمكن الجزم قبل دراسة الإجهادات الثانوية الناتجة من انحراف الضلع.

الجزء	$\frac{N}{A}$ (^{2}k/in)	$\frac{M_c}{I}$ (^{2}k/in)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	كسر of القدرة
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
التاج	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

الجدول 8

[a] تكون قيمة L في هذه المعادلة 10.798 لأن الأضلاع مقيدة جانبياً عند نقاط اتصال المدادات.

36.2 مثال 36.2: التغيرات الحرارية في قوس

نم لوقنم يتآلا مسقلا Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

حدد آثار تقصر الضلع والتغير الحراري في ضلع قوس المثال السابق، مع هبوط في الحرارة مقداره 100°F.

1. لتحديد أثر تقصر الضلع، نحسب أولاً الإزاحة الأفقية للطرف A إذا أُدخلت الانفعالات المحورية المرنة الناشئة في القوس المحمل فعلاً بينما يكون A على بكرات. ثم نحسب إزاحة A الأفقية الناتجة من قوة أفقية مقدارها 1 k عند A، مع مراعاة انفعالي الانحناء والمحور. الإزاحة الأفقية الناتجة من تقصر الضلع تحت الأحمال الحقيقية هي:

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L \tag{36.8}$$

حيث N الدفع المحوري من الجدول 7، و$\delta\overline{N}$ الدفع المحوري الناتج من قوة أفقية افتراضية 1 k عند A ويساوي $\cos\ \alpha$ في الجدول 1، وΔL طول كل جزء، وA مساحة مقطعه.

2. الإزاحة الأفقية لـA الناتجة من تقصر الضلع بفعل قوة أفقية 1 k عند A هي:

$$\sum \frac{\delta\overline{N}}{AE}\overline{N}\Delta L \tag{36.9}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. يبين الجدول 9 الحسابات اللازمة لهاتين الإزاحتين عند A.

الجزء	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (^{2}in)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

الجدول 9

4. الإزاحة الأفقية لـA الناتجة من تقصر الضلع تحت الحمل الحقيقي هي:

$$\sum \delta\overline{N}\frac{N}{AE}\Delta L = \frac{2 \times 87.88 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in} \tag{36.10}$$

5. أما الناتجة من تقصر الضلع تحت حمل أفقي 1 k عند A فهي:

$$\sum \delta\overline{N}\frac{\overline{N}}{AE}\Delta L = \frac{2 \times 0.2300 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in} \tag{36.11}$$

6. حُددت سابقاً في العمود (3) من الجدول 6 القيمة النسبية لإزاحة A الأفقية الناتجة من انفعال الانحناء بسبب قوة أفقية 1 k عند A. وقيمتها المطلقة:

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} \ . \tag{36.12}$$

7. ومن ثم تكون إزاحة A الكلية بسبب انفعالي الانحناء والمحور الناتجين من قوة أفقية 1 k عند A:

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in} \tag{36.13}$$

8. خفض H_A بسبب تقصر الضلع:

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k} \tag{36.14}$$

9. ينتج خفض إضافي في H_A من أي هبوط في حرارة الضلع دون حرارة تركيب القوس، بسبب التقصر الحراري الإضافي. ويكون النقص في طول الإسقاط الأفقي للضلع عند هبوط 100°F:

$$\delta L = 0.0000065 \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{36.15}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10. الخفض المناظر في H_A:

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k} \tag{36.16}$$

11. الخفض الكلي في H_A بسبب تقصر الضلع وهبوط الحرارة:

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k} \tag{36.17}$$

وسيؤدي ذلك إلى زيادة العزم قرب منتصف البحر.

12. يبين فحص العمود (6) من الجدول (8) ضرورة التحقق من احتمال فرط الإجهاد في الجزء 10 بسبب هذه الزيادة. زيادة العزم عند الجزء 10:

$$\Delta M = \Delta H_A(y10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{36.18}$$

13. عزم الجزء 10 المحسوب سابقاً، 100 k·ft، دقيق إلى منزلتين فقط؛ لذلك يكون عزمه الكلي المنقح:

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{36.19}$$

14. الدفع المحسوب سابقاً للجزء 10، 335 k، دقيق إلى ثلاث منازل. ولذلك يُقرب تغير H_A بسبب التقصر والحرارة إلى 1 k لتحديد الدفع المصحح في الجزء 10:

$$335 - 1 = 334 \text{ k} \tag{36.20}$$

15. إجهاد الليف الأقصى:

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2 \tag{36.21}$$

16. يُفحص مقطع الجزء 10 كما في الجدول (8) بالعلاقة:

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96 \tag{36.22}$$

ومن الواضح أن مقطع الجزء 10 كافٍ.

17. لم تُدرس آثار ارتفاع الحرارة، لأنه لا يحدث إلا صيفاً حين لا يوجد حمل ثلج؛ ومن ثم لا أهمية عملية لهذا الجانب من المسألة.

18. تنطبق طريقة التحليل الموضحة بالقدر نفسه على قوس ذي مفصلين من الخرسانة المسلحة أو الخشب. لكن، كما سبق، نادراً ما تُبنى الأقواس الخرسانية المسلحة بمفصلين.

19. تجدر الإشارة إلى أن انكماش الخرسانة في ضلع الخرسانة المسلحة يسبب تقصر الضلع أيضاً، إضافة إلى الانفعال المحوري وهبوط الحرارة. ينبغي تحديد معامل الانكماش للخلطة المستعملة وإدخاله في التحليل بالطريقة العامة نفسها الموضحة لمعامل الحرارة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

37 حلول فيرمي (التحليل التقريبي)

ملخص

يواجه المهندسون والمعماريون المتمرسون كثيراً تحدي إجراء حسابات تقريبية سريعة «على ظهر مظروف». وبدمج معادلات الميكانيكا والسكون الأساسية مع رسم دقيق للشكل المنحرف، يمكن تحويل منشأ غير محدد سكونياً إلى منشأ محدد وحساب قواه الداخلية. ويمكن كذلك تبسيط المباني لتحديد ردود أفعال القاعدة والإزاحات الجانبية عند القمة. يبدأ الفصل بمقارنة التحليل التقريبي بما يسمى مسائل فيرمي، ثم يدرس الاستجابة التقريبية للكمرات والإطارات تحت الأحمال الرأسية والأفقية لتحديد القوى الداخلية في منشآت عالية عدم التحديد. وبعد ذلك يعالج الاستجابة التقريبية لنظم الجدران والنوى لتحديد ردود أفعال القاعدة وانجراف القمة.

37.1 القوى الداخلية 1241
37.1.1 الأشكال المنحرفة ونقاط الانعطاف 1241
37.1.2 عزوم الكمرة بدلالة صلابة المساند 1244
37.1.3 طرائق التحليل 1244
37.2 الاستجابة الإنشائية 1266
37.2.1 النظام الفرعي للنواة 1266
37.2.2 جدار القص 1268
37.2.3 جدار القص الجملوني 1270
37.2.4 الانحرافات الجانبية 1272

1 مسألة فيرمي تقدير يستند إلى حل سريع لمسألة مركبة. وتتطلب تخمينات معقولة للكميات ولا تستهدف حلاً دقيقاً؛ فكثيراً ما تكفي رتبة المقدار.

2 يُروى أن فيرمي، أثناء مشاهدته تفجير أول قنبلة ذرية، ابتكر طريقة بسيطة لتقدير قوتها: أسقط قصاصات ورق أثناء موجة الانفجار وقاس المسافة التي قطعتها. وقدر الطاقة بـ10 كيلوطن، وهي ضمن رتبة المقدار للقيمة المقبولة 21 كيلوطن.

3 كان ذلك أصل ما يسمى مسألة فيرمي، التي تعتمد افتراضات وتقديرات معقولة للوصول إلى جواب تقريبي.

4 وهذا غرض الفصل: هل يمكن افتراض تقديرات معقولة لتحديد مقدار القوى الداخلية؟ من المفيد دائماً إجراء ذلك قبل تحليل مركب لتقييد نطاق الحل.

5 إنها بالفعل مسألة فيرمي مثالية.

37.1 القوى الداخلية

6 نبدأ بتحويل إطار غير محدد سكونياً إلى إطار محدد بمجرد تقدير مواضع نقاط الانعطاف في شكله المتشوه.

37.1.1 الأشكال المنحرفة ونقاط الانعطاف

7 تذكر من §22.3 أن:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث ρ نصف قطر التقوس. ومن ثم يقع العزم الصفري عند *نقطة انعطاف*، وكلما صغر نصف قطر التقوس كبر العزم.

8 نحدد نقاط العزم الصفري، إذ تحول المسألة غير المحددة سكونياً إلى محددة بإضافة معادلات شروط، §19.1.3.

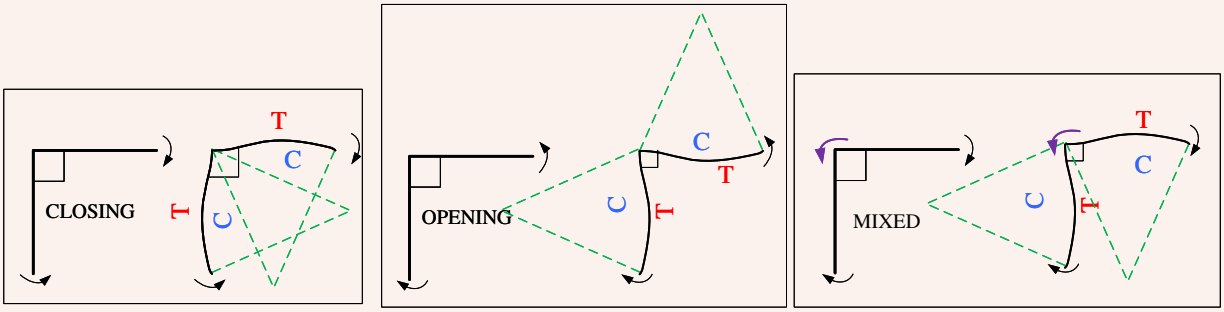
9 لكن يجب أولاً رسم الشكل المنحرف للمنشأ تحت الحمل المعطى رسماً صحيحاً.

10 نتبع القواعد الأساسية الآتية:

1. إهمال التشوهات المحورية لصغرها نسبة إلى الانحنائية، §52.2.1؛
2. تطبيق إزاحة جانبية صغيرة عند وجود حمل جانبي؛
3. تحقيق توافق دورانات الزوايا؛ فالزاوية القائمة تبقى قائمة، والطرف المثبت يبقى ثابتاً؛
4. جعل التشوه أملس إلا عند المفاصل الداخلية.

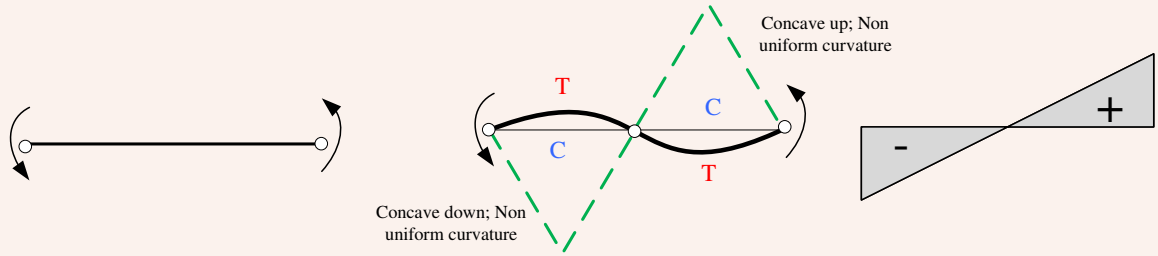
11 يمكن تحليل تشوه المنشأ إلى تشوهات:

عقد الزوايا يبين الشكل 37.1 ثلاثة أنماط: أ) الفتح، ب) الإغلاق، ج) المختلط.



شكل 37.1: دورانات الزوايا المتوافقة

الكمرات كما في الشكل 37.2.



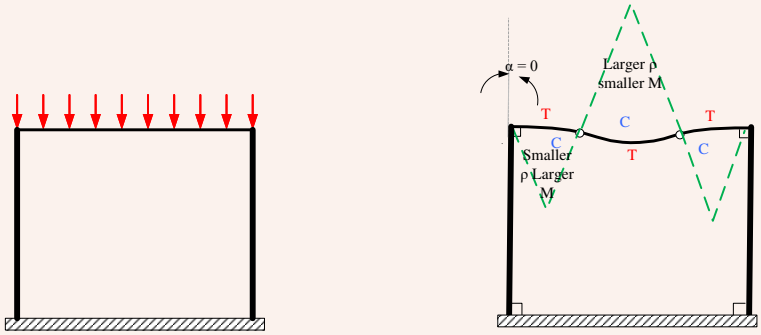
شكل 37.2: انحراف كمرة بسيطة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإطارات نميز مجموعتين من الأحمال:

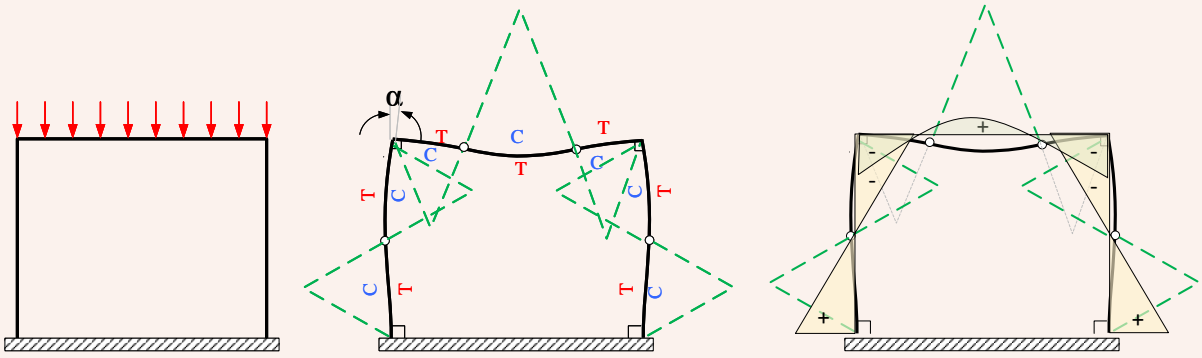
الحمل الرأسي يحتاج اهتماماً خاصاً لأن الشكل المنحرف يعتمد بقوة على الصلابة النسبية للأعمدة والكمرات، §27.3.1. لذلك نميز:

- أعمدة صلبة، الشكل 37.3. لاحظ أن العزم يزداد بنقص نصف القطر.



شكل 37.3: انحراف إطار بوابي ذي أعمدة صلبة تحت حمل رأسي

- كمرة صلبة: يكون انحناؤها صغيراً والقوى المحورية في الأعمدة كبيرة؛
- حالة وسطية، الشكل 37.4.

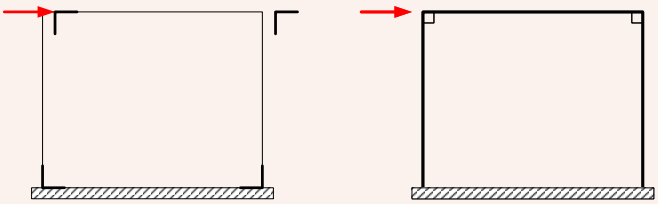


شكل 37.4: انحراف إطار بوابي تحت حمل رأسي

الحمل الجانبي كما في الشكل 37.5a. لاحظ الإزاحات الجانبية للزوايا العليا في الشكل 37.5b. نرسم الشكل المنحرف للعمود الأيسر مع مراعاة:

- المماس السفلي بزاوية 90°؛
- الشد على الخارج، ومن ثم التقعر إلى الداخل؛

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) إطار تحت حمل جانبي (b) عقد زوايا مزاحة

شكل 37.5: مثال لإطار بوابي تحت حمل جانبي

- العمود مقيد عند أعلاه. فإذا كانت الكمرة العرضية:
  - صلبة بلا حدود: يكون مماس أعلى العمود 90° أيضاً، وتوجد نقطة انعطاف؛
  - مرنة جداً: لا توجد نقطة انعطاف، ويكون التقعر كله إلى الداخل؛
  - محدودة الصلابة: يوجد دوران غير صفري في الأعلى ونقطة انعطاف.

للعمود الأيمن شكل مماثل، ويبين الشكل 37.6a الشكل المنحرف.

37.1.2 عزوم الكمرة بدلالة صلابة المساند

12 كثيراً ما نعد طرفي الكمرة إما مثبتين تماماً أو حرين، لكن الواقع قد يكون أعقد ويستحق عناية خاصة.[1]

13 إذا اتصلت الكمرة بعمود شديد الصلابة أمكن عملياً افتراض اتصالها مثبتاً. وإذا اتصلت بأعمدة مرنة نسبياً أمكن افتراض مساندها حرة الدوران.

14 يوضح الشكل 37.7 ذلك. ومع انتقال المسند من المرونة (الأحمر) إلى الصلابة (الأزرق)، تتحرك نقطتا الانعطاف إلى نحو $0.21L$، وينخفض مخطط العزم إلى $wL^2/12$ عند المسند. وتظهر الحالات الوسطية بالأخضر.

15 عند معرفة موضع نقطة الانعطاف يمكن تقسيم الكمرة إلى ثلاثة أجزاء: طرفان لا يتجاوز طول كل منهما $0.21L$ وجزء مركزي. وكل منها منشأ فرعي محدد سكونياً يمكن تحليله منفرداً.

37.1.3 طرائق التحليل

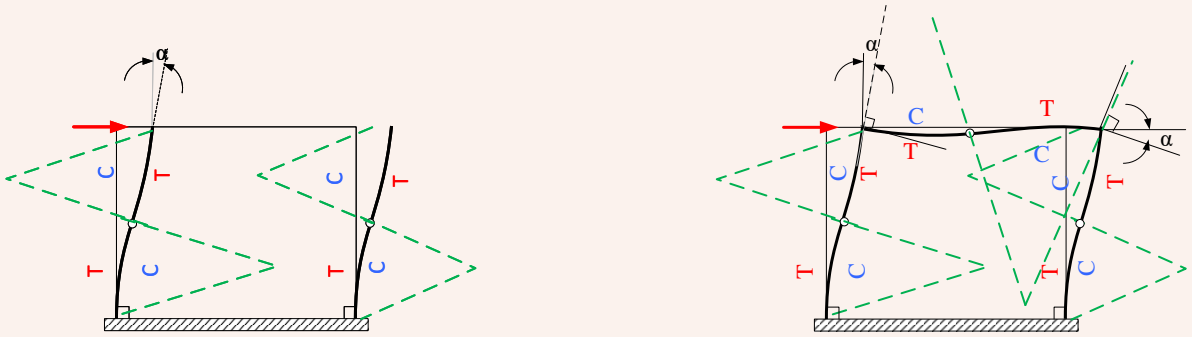
16 يمكن بسهولة إجراء الأبعاد الأولية لمبنى مستطيل أو تحقق سريع من تحليل حاسوبي باستعمال التحليل التقريبي للمباني.

17 يجب معالجة الأحمال الرأسية والأفقية منفصلة. وللأحمال الأفقية طريقتان:

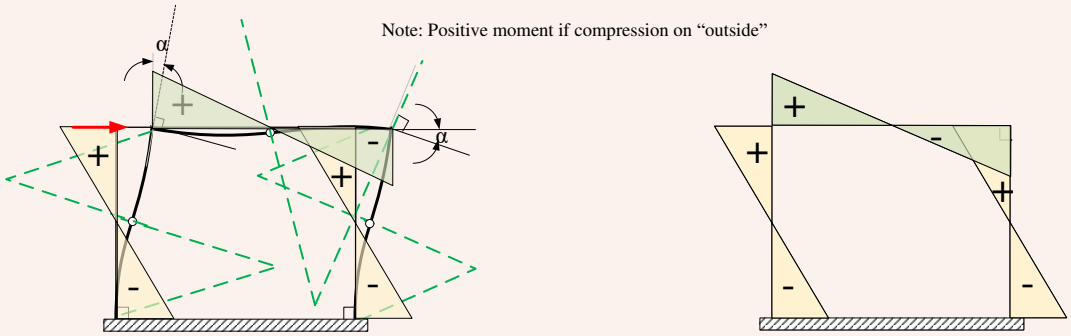
طريقة البوابة للمباني القصيرة التي يكون ارتفاعها أصغر من البعد الأفقي؛ ويهيمن تشوه القص على شكلها المنحرف.

[1] تُعالج النمذجة العددية للكمرات المتصلة بنوابض مرنة في §45.6.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



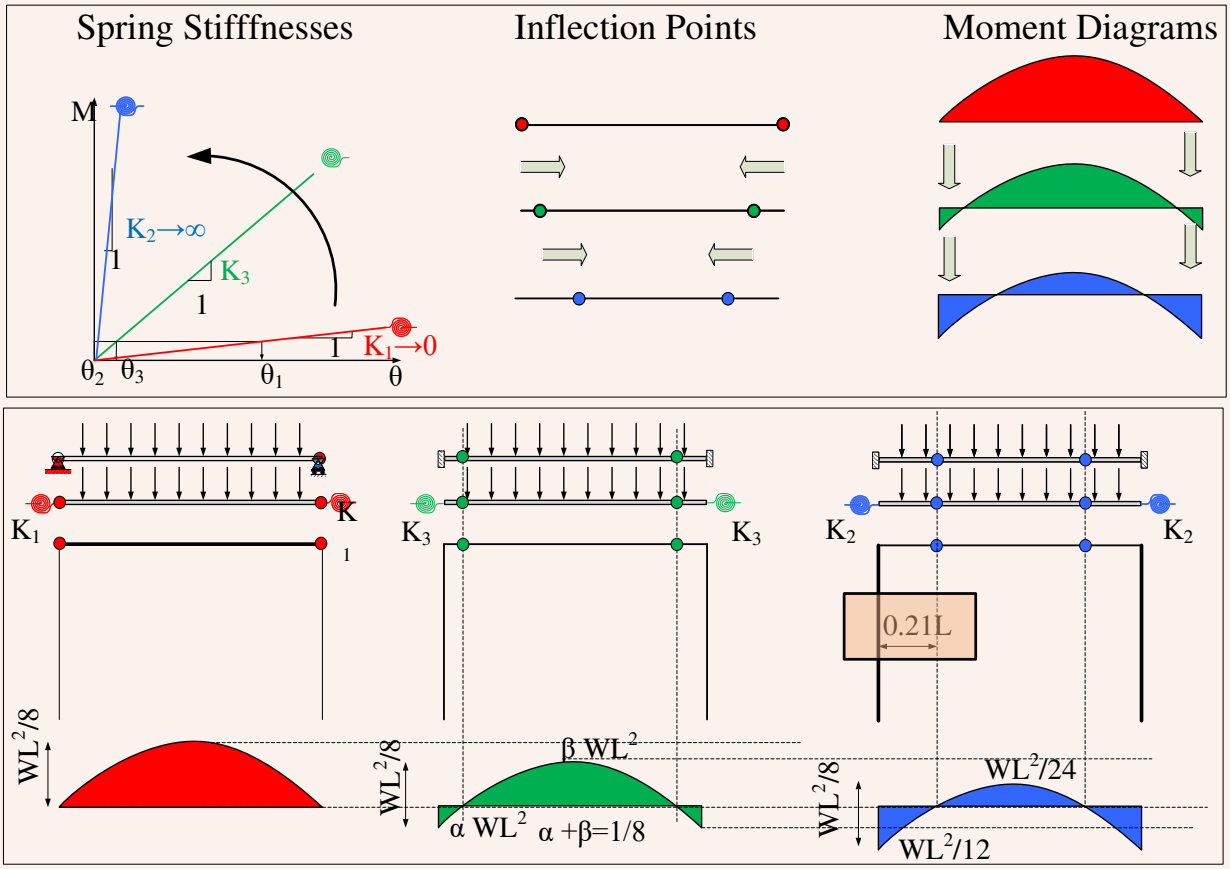
(a) الشكل المنحرف



(b) مخطط العزم

شكل 37.6: الشكل المنحرف ومخطط العزم لإطار بوابي تحت حمل جانبي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 37.7: انحرافات الكمرة بدلالة صلابة المساند

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

طريقة الكابولي للمباني العالية التي يزيد ارتفاعها عدة مرات على أصغر أبعادها الأفقية؛ ويهيمن الانحناء الكلي على شكلها المنحرف.

18 توجد ثلاثة أنواع رئيسة لنظم المباني:

نظام الجدران: جدران شديدة الصلابة من مبانٍ مصمتة أو خشب لوحي أو مدعم أو جمالونات فولاذية تشكل نظاماً فرعياً صلباً. يناسب المباني القصيرة فقط.

النوى الرأسية: أربعة جدران مصمتة أو جمالونية تشكل منشأً فراغياً أنبوبياً. قد تكون النواة داخلية تضم المصاعد والسلالم، أو خارجية، أو كليهما. وهي الأكفأ للمباني الشاهقة جداً.

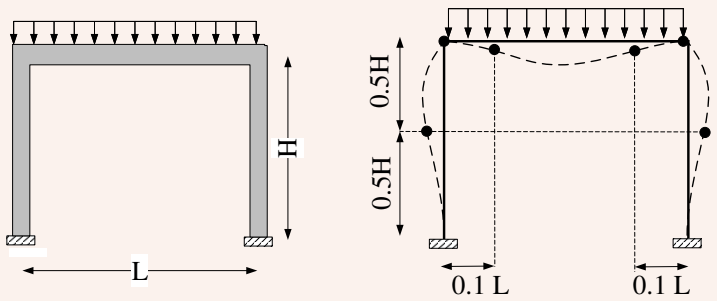
الإطار الصلب: عناصر رأسية خطية، أي الأعمدة، متصلة اتصالاً صلباً بعناصر أفقية صلبة، أي الكمرات والجسور. وليس هذا الشكل كفؤاً جداً في مقاومة أحمال الرياح والزلازل الجانبية.

37.1.3.1 الأحمال الرأسية

19 في إطار متعدد البحور والطوابق، تُعامل الجسور ككمرات مستمرة، وتقاوم الأعمدة عزوم الجسور غير المتزنة. ونفترض أيضاً:

1. تعمل جسور كل طابق ككمرات مستمرة تحمل حملاً منتظماً؛
2. تقع نقاط الانعطاف، الشكل 37.8، عند:

   (a) عُشر البحر من طرفي كل جسر؛
   (b) منتصف ارتفاع الأعمدة.



شكل 37.8: إطار تحت حمل رأسي: المواضع التقريبية لنقاط الانعطاف

3. إهمال الآثار المحورية؛
4. توزيع عزوم أطراف الجسور غير المتزنة عند كل عقدة على العمودين أعلاها وأسفلها.

20 تصبح جميع الكمرات محددة سكونياً وبحرها $L_s = 0.8L$. ويفترض ذلك نقطة انعطاف عند $0.1L$، بين الصفر للكمرة بسيطة الاستناد و$0.21L$ للكمرة صلبة الاتصال، الشكل 37.9.

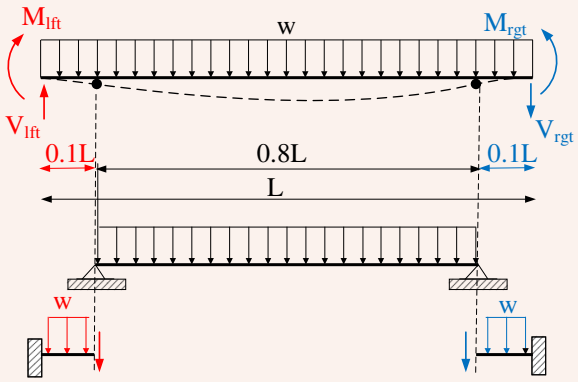
21 تسلسل الحساب، وهو مهم جداً:

1. العزم الموجب للجسر؛
2. العزم السالب للجسر؛
3. قص الجسر؛
4. القوى المحورية للأعمدة؛
5. عزوم الأعمدة؛
6. قص الأعمدة؛
7. القوى المحورية للجسور.

22 يرد الإجراء أدناه. لا حاجة إلى حفظ معادلة؛ يكفي استعمال معادلات الاتزان ومخططات الجسم الحر مع افتراض موجبية قصوص العناصر وعزوم أطرافها.

1. العزم الموجب للجسر

23 قياساً على الشكل 37.7، ومع افتراض نقاط الانعطاف عند $0.1L$ من المسند، نعتبر الشكل 37.9. ونقسم



شكل 37.9: التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية: عزوم الجسر

الجسر إلى ثلاثة أجزاء.

24 العزم الموجب الأقصى هو:

$$M^{+} = \frac{1}{8} w L_s^2 = w \frac{1}{8} (0.8)^2 L^2 = 0.08 w L^2$$

25 لاحظ أنه عند التثبيت الكامل ونقاط الانعطاف عند $0.21L$ يكون العزم الأقصى $wL^2/24 = 0.041667$.

2. العزم السالب للجسر

26 من الشكل 37.9 يكون العزم السالب الأقصى عند طرفي الجسر:

$$M^{left} = M^{rgt} = -\frac{w}{2}(0.1L)^2 - \frac{w}{2}(0.8L)(0.1L) = -0.045 w L^2$$

3. قص الجسر

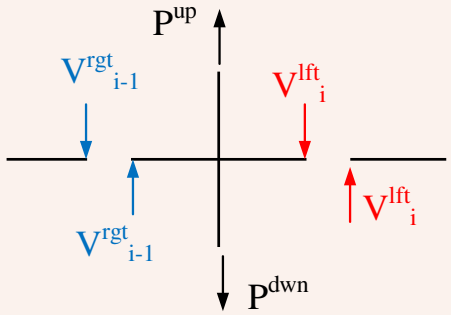
27 ومن الشكل 37.9 يُستخرج القص:

$$V^{lft} = \frac{wL}{2} \qquad V^{rgt} = -\frac{wL}{2}$$

28 لاحظ اتجاهات قوى القص؛ وتُرسم بيانياً موجبة دائماً.

4. القوة المحورية للعمود

29 تُحسب القوة المحورية للعمود بجمع قصوص الجسور المتصلة به، الشكل 37.10.



شكل 37.10: التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية: القوى المحورية للأعمدة

$$P^{dwn} = P^{up} + V^{rgt}_{i-1} - V^{lft}_{i}$$

5. عزم العمود

30 تُحدد عزوم الأعمدة من مخطط الجسم الحر للعقد، الشكل 37.11. وبالتناظر يتساوى عزما اليسار واليمين ويتعاكسان:

$$M^{bot} = -M^{top}$$

6. قص العمود

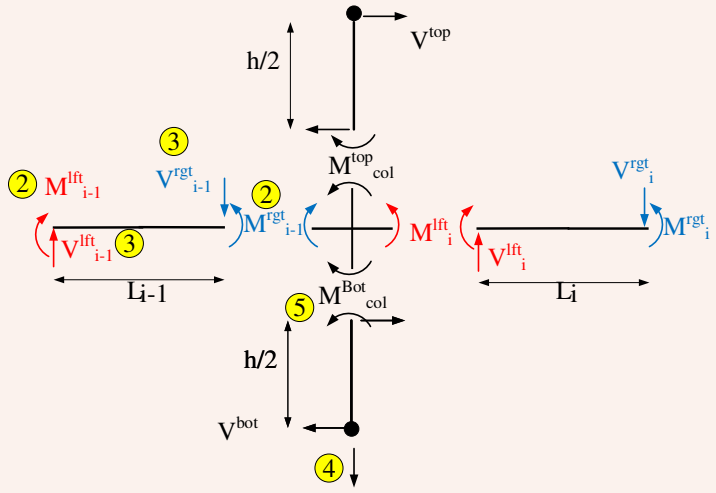
31 بما أننا افترضنا نقاط الانعطاف عند منتصف الارتفاع، إلا إذا كانت أعمدة الطابق الأول مفصلية القاعدة:

$$V = \frac{M^{top}}{\frac{h}{2}}$$

7. القوى المحورية للجسور

32 القوى المحورية في الجسور مهملة لصغرها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 37.11: التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال رأسية

37.1.3.2 الأحمال الأفقية

37.1.3.2.1 طريقة البوابة

33 تهيمن تشوهات القص على المباني القصيرة تحت الأحمال الجانبية، ولذلك يمكن تحليلها تقريبياً بالافتراضات الآتية:

1. من الشكل 37.6b نفترض نقاط الانعطاف، الشكل 37.12، عند:
   (a) منتصف ارتفاع جميع الأعمدة فوق الطابق الثاني؛
   (b) منتصف ارتفاع أعمدة الطابق إذا كانت قواعدها ثابتة، أو عند القاعدة إذا كانت مفصلية؛
   (c) مركز كل جسر.
2. يوزع القص الأفقي الكلي عند منتصف ارتفاع أعمدة أي طابق بحيث يحمل كل عمود خارجي نصف ما يحمله كل عمود داخلي.

34 يكون تسلسل الحساب:

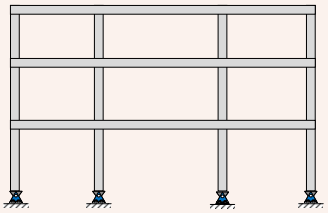
1. قص الأعمدة؛
2. عزوم الأعمدة؛
3. عزوم الجسور؛
4. قصوص الجسور؛
5. القوى المحورية للأعمدة؛
6. القوى المحورية للجسور.

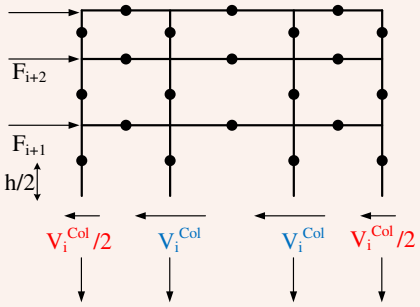
لاحظ أن هذا عكس ترتيب حالة الحمل الرأسي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. قص العمود

35 تُحدد القصوص بتمرير مقطع أفقي عند منتصف ارتفاع أعمدة كل طابق وكتابة اتزان القوى الجانبية.





شكل 37.12: التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال جانبية: قص الأعمدة

$$V_{ext}^{col} = \frac{\sum F^{lateral}}{\text{عدد البحور } 2}; \qquad V_{int}^{col} = 2V_{ext}^{col}$$

2. عزوم الأعمدة

36 يساوي عزم طرف العمود قصه مضروباً في نصف ارتفاعه، الشكل 37.13.

$$M_{col}^{top} = V^{col}\frac{h}{2} \qquad M^{bot} = -M^{top}$$

انتبه: عزوم الأعمدة الخارجية نصف عزوم الداخلية.

3. عزوم الجسور

37 تُحدد عزوم الجسور من مخطط الجسم الحر للوصلة، الشكل 37.13.

$$M_i^{lft} = M_{col}^{Top} - M_{col}^{Bot} + M_{i-1}^{rgt}; \qquad M_i^{rgt} = -M_i^{lft}$$

4. قصوص الجسور

38 لوجود نقطة انعطاف عند مركز الجسر، يُحسب قصه من مجموع العزوم حول تلك النقطة:

$$V^{lft} = -\frac{2M}{L} \qquad V^{rgt} = V^{lft}$$

5. القوى المحورية للأعمدة

39 تُحسب القوى المحورية للأعمدة بجمع قصوص الجسور والقوة المحورية القادمة من العمود الأعلى.

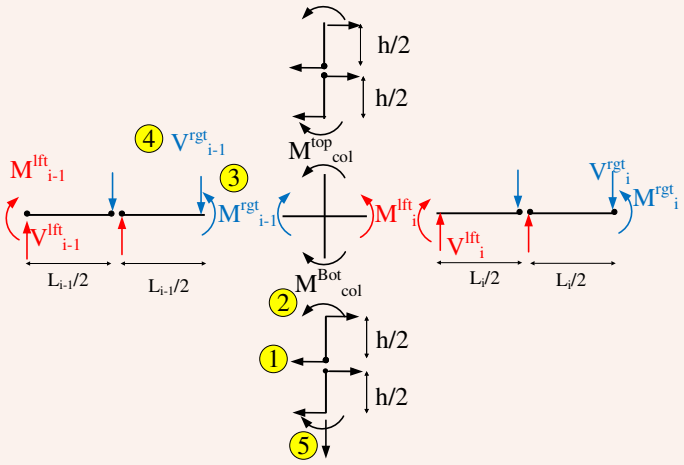
$$P = P^{above} - P^{rgt} + P^{lft}$$

6. القوة المحورية للجسر

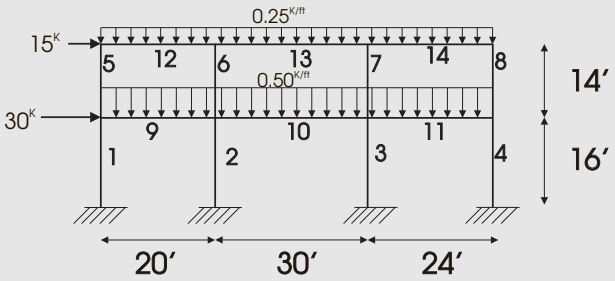
40 تُهمل القوى المحورية في الجسور.

37.1.3.2.1.1 مثال 37.1: طريقة البوابة: مبنى قصير

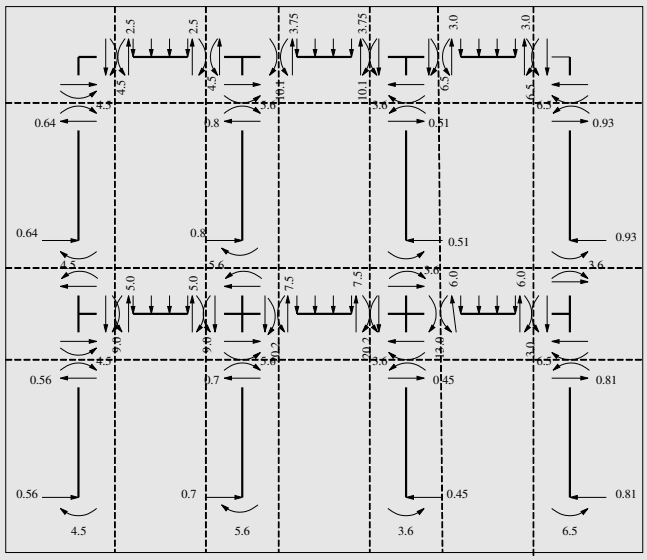
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 37.13: التحليل التقريبي لإطار تحت أحمال جانبية: عزم الجسر



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الحمل الرأسي

عزوم الجسور العليا

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.25)(20)^2 &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.25)(20)^2 &&= 8.0 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= -0.045 w_{13} L_{13}^2 = -(0.045)(0.25)(30)^2 &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{cnt} &= 0.08 w_{13} L_{13}^2 = (0.08)(0.25)(30)^2 &&= 18.0 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= M_{13}^{lft} &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= -0.045 w_{14} L_{14}^2 = -(0.045)(0.25)(24)^2 &&= -6.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{cnt} &= 0.08 w_{14} L_{14}^2 = (0.08)(0.25)(24)^2 &&= 11.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= M_{14}^{lft} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عزوم الجسور السفلى

$$
\begin{aligned}
M_9^{lft} &= -0.045 w_9 L_9^2 = -(0.045)(0.5)(20)^2 &&= -9.0 \text{ k.ft}\\
M_9^{cnt} &= 0.08 w_9 L_9^2 = (0.08)(0.5)(20)^2 &&= 16.0 \text{ k.ft}\\
M_9^{rgt} &= M_9^{lft} &&= -9.0 \text{ k.ft}\\
M_{10}^{lft} &= -0.045 w_{10} L_{10}^2 = -(0.045)(0.5)(30)^2 &&= -20.3 \text{ k.ft}\\
M_{10}^{cnt} &= 0.08 w_{10} L_{10}^2 = (0.08)(0.5)(30)^2 &&= 36.0 \text{ k.ft}\\
M_{10}^{rgt} &= M_{11}^{lft} &&= -20.3 \text{ k.ft}\\
M_{11}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.5)(24)^2 &&= -13.0 \text{ k.ft}\\
M_{11}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.5)(24)^2 &&= 23.0 \text{ k.ft}\\
M_{11}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -13.0 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

عزوم الأعمدة العليا

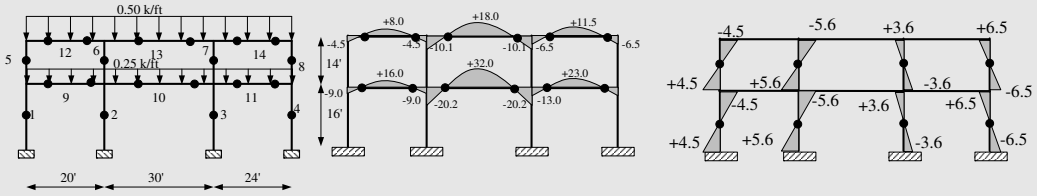
$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= +M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft}\\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} &&= 4.5 \text{ k.ft}\\
M_6^{top} &= -M_{12}^{rgt} + M_{13}^{lft} = -(-4.5) + (-10.1) &&= -5.6 \text{ k.ft}\\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} &&= 5.6 \text{ k.ft}\\
M_7^{top} &= -M_{13}^{rgt} + M_{14}^{lft} = -(-10.1) + (-6.5) &&= -3.6 \text{ k.ft}\\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} &&= 3.6 \text{ k.ft}\\
M_8^{top} &= -M_{14}^{rgt} = -(-6.5) &&= 6.5 \text{ k.ft}\\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

عزوم الأعمدة السفلى

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= +M_5^{bot} + M_9^{lft} = 4.5 - 9.0 &&= -4.5 \text{ k.ft}\\
M_1^{bot} &- M_1^{top} &&= 4.5 \text{ k.ft}\\
M_2^{top} &= +M_6^{bot} - M_9^{rgt} + M_{10}^{lft} = 5.6 - (-9.0) + (-20.3) &&= -5.6 \text{ k.ft}\\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} &&= 5.6 \text{ k.ft}\\
M_3^{top} &= +M_7^{bot} - M_{10}^{rgt} + M_{11}^{lft} = -3.6 - (-20.3) + (-13.0) &&= 3.6 \text{ k.ft}\\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} &&= -3.6 \text{ k.ft}\\
M_4^{top} &= +M_8^{bot} - M_{11}^{rgt} = -6.5 - (-13.0) &&= 6.5 \text{ k.ft}\\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

مخططات العزوم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



قص الجسور العليا

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= \frac{w_{12}L_{12}}{2} = \frac{(0.25)(20)}{2} &&= 2.5 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= -V_{12}^{lft} &&= -2.5 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= \frac{w_{13}L_{13}}{2} = \frac{(0.25)(30)}{2} &&= 3.75 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= -V_{13}^{lft} &&= -3.75 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= \frac{w_{14}L_{14}}{2} = \frac{(0.25)(24)}{2} &&= 3.0 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= -V_{14}^{lft} &&= -3.0 \text{ k}
\end{aligned}
$$

قص الجسور السفلى

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= \frac{w_{9}L_{9}}{2} = \frac{(0.5)(20)}{2} &&= 5.00 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= -V_{9}^{lft} &&= -5.00 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= \frac{w_{10}L_{10}}{2} = \frac{(0.5)(30)}{2} &&= 7.50 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= -V_{10}^{lft} &&= -7.50 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= \frac{w_{11}L_{11}}{2} = \frac{(0.5)(24)}{2} &&= 6.00 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= -V_{11}^{lft} &&= -6.00 \text{ k}
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قصوص الأعمدة

$$V_5 = \frac{M_5^{top}}{\frac{H_5}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{14}{2}} = -0.64 \text{ k}$$

$$V_6 = \frac{M_6^{top}}{\frac{H_6}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{14}{2}} = -0.80 \text{ k}$$

$$V_7 = \frac{M_7^{top}}{\frac{H_7}{2}} = \frac{3.6}{\frac{14}{2}} = 0.52 \text{ k}$$

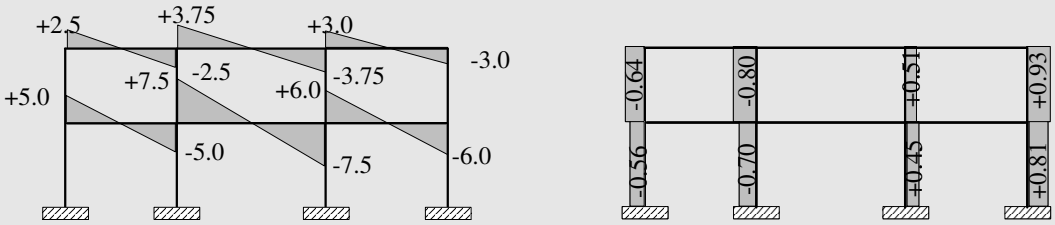
$$V_8 = \frac{M_8^{top}}{\frac{H_8}{2}} = \frac{6.5}{\frac{14}{2}} = 0.93 \text{ k}$$

$$V_1 = \frac{M_1^{top}}{\frac{H_1}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{16}{2}} = -0.56 \text{ k}$$

$$V_2 = \frac{M_2^{top}}{\frac{H_2}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{16}{2}} = -0.70 \text{ k}$$

$$V_3 = \frac{M_3^{top}}{\frac{H_3}{2}} = \frac{3.6}{\frac{16}{2}} = 0.46 \text{ k}$$

$$V_4 = \frac{M_4^{top}}{\frac{H_4}{2}} = \frac{6.5}{\frac{16}{2}} = 0.81 \text{ k}$$



القوى المحورية للأعمدة العليا

$$P_5 = V_{12}^{lft} = 2.50 \text{ k}$$

$$P_6 = -V_{12}^{rgt} + V_{13}^{lft} = -(-2.50) + 3.75 = 6.25 \text{ k}$$

$$P_7 = -V_{13}^{rgt} + V_{14}^{lft} = -(-3.75) + 3.00 = 6.75 \text{ k}$$

$$P_8 = -V_{14}^{rgt} = 3.00 \text{ k}$$

القوى المحورية للأعمدة السفلى

$$P_1 = P_5 + V_9^{lft} = 2.50 + 5.0 = 7.5 \text{ k}$$

$$P_2 = P_6 - V_{10}^{rgt} + V_9^{lft} = 6.25 - (-5.00) + 7.50 = 18.75 \text{ k}$$

$$P_3 = P_7 - V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 6.75 - (-7.50) + 6.0 = 20.25 \text{ k}$$

$$P_4 = P_8 - V_{11}^{rgt} = 3.00 - (-6.00) = 9.00 \text{ k}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

VERTICAL LOADS

Height	Span		L1		L2		L3	
			20		30		24	
14	Load		0.25		0.25		0.25	
16	Load		0.5		0.5		0.5	

MOMENTS

	Bay 1				Bay 2				Bay 3			
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft	Cnt	Rgt		Lft	Cnr	Rgt		Lft	Cnt	Rgt	
	-4.5	8.0	-4.5		-10.1	18.0	-10.1		-6.5	11.5	-6.5	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5
	-9.0	16.0	-9.0		-20.3	36.0	-20.3		-13.0	23.0	-13.0	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5

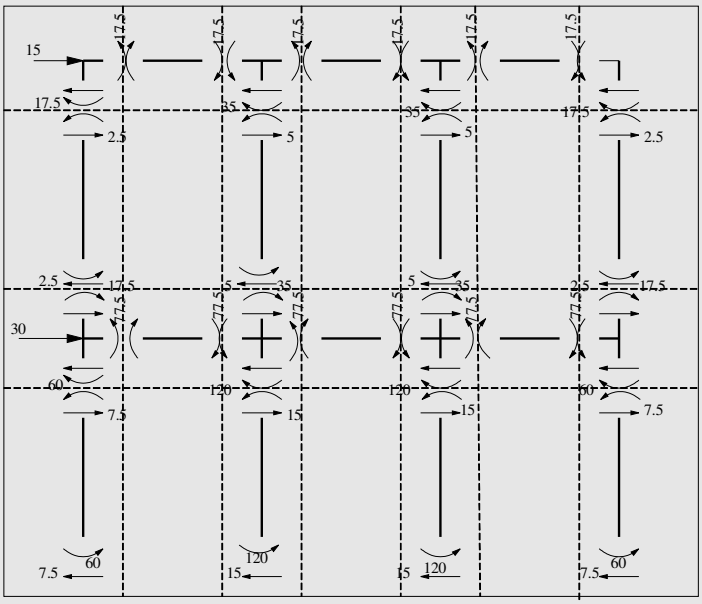
SHEAR

	Bay 1				Bay 2				Bay 3			
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft		Rgt		Lft		Rgt		Lft		Rgt	
	2.50		-2.50		3.75		-3.75		3.00		-3.00	
-0.64				-0.80				0.52				0.93
	5.00		-5.00		7.50		-7.50		6.00		-6.00	
-0.56				-0.70				0.46				0.81

AXIAL FORCE

	Bay 1			Bay 2			Bay 3	
Col	Beam	Column	Beam		Column	Beam		Col
	0.00		0.00			0.00		
2.50		6.25			6.75			3.00
	0.00		0.00			0.00		
7.50		18.75			20.25			9.00

الأحمال الأفقية



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قصوص الأعمدة

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \frac{15}{(2)(3)} && = 2.5\ \text{k} \\
V_6 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5\ \text{k} \\
V_7 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5\ \text{k} \\
V_8 &= V_5 && = 2.5\ \text{k} \\
V_1 &= \frac{15+30}{(2)(3)} && = 7.5\ \text{k} \\
V_2 &= 2(V_1) = (2)(7.5) && = 15\ \text{k} \\
V_3 &= 2(V_1) = (2)(2.5) && = 15\ \text{k} \\
V_4 &= V_1 && = 7.5\ \text{k}
\end{aligned}
$$

عزوم الأعمدة العليا

$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= \frac{V_1 H_5}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5\ \text{k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = -17.5\ \text{k.ft} \\
M_6^{top} &= \frac{V_6 H_6}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0\ \text{k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = -35.0\ \text{k.ft} \\
M_7^{top} &= \frac{V_7^{up} H_7}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0\ \text{k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = -35.0\ \text{k.ft} \\
M_8^{top} &= \frac{V_8^{up} H_8}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5\ \text{k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -17.5\ \text{k.ft}
\end{aligned}
$$

عزوم الأعمدة السفلى

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= \frac{V_1^{dwn} H_1}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60\ \text{k.ft} \\
M_1^{bot} &= -M_1^{top} && = -60\ \text{k.ft} \\
M_2^{top} &= \frac{V_2^{dwn} H_2}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120\ \text{k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = -120\ \text{k.ft} \\
M_3^{top} &= \frac{V_3^{dwn} H_3}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120\ \text{k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -120\ \text{k.ft} \\
M_4^{top} &= \frac{V_4^{dwn} H_4}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60\ \text{k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -60\ \text{k.ft}
\end{aligned}
$$

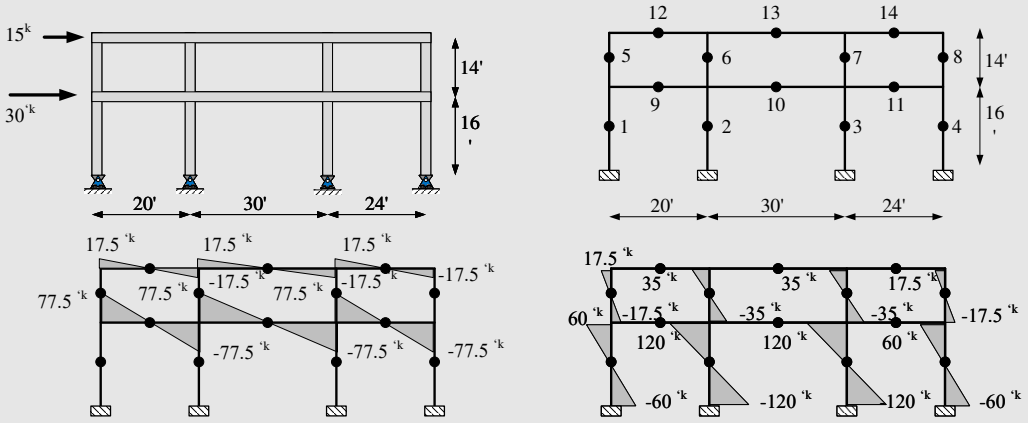
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عزوم الجسور العليا

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= M_{5}^{top} &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= -M_{12}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= M_{12}^{rgt} + M_{6}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= -M_{13}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= M_{13}^{rgt} + M_{7}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= -M_{14}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

عزوم الجسور السفلى

$$
\begin{aligned}
M_{9}^{lft} &= M_{1}^{top} - M_{5}^{bot} = 60 - (-17.5) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{9}^{rgt} &= -M_{9}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= M_{9}^{rgt} + M_{2}^{top} - M_{6}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= -M_{10}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= M_{10}^{rgt} + M_{3}^{top} - M_{7}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= -M_{11}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

قص الجسور العليا

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{12}} = -\frac{(2)(17.5)}{20} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= +V_{12}^{lft} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= -\frac{2M_{13}^{lft}}{L_{13}} = -\frac{(2)(17.5)}{30} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= +V_{13}^{lft} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= -\frac{2M_{14}^{lft}}{L_{14}} = -\frac{(2)(17.5)}{24} &&= -1.46 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= +V_{14}^{lft} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

قص الجسور السفلى

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{9}} = -\frac{(2)(77.5)}{20} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= +V_{9}^{lft} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= -\frac{2M_{10}^{lft}}{L_{10}} = -\frac{(2)(77.5)}{30} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= +V_{10}^{lft} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= -\frac{2M_{11}^{lft}}{L_{11}} = -\frac{(2)(77.5)}{24} &&= -6.46 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= +V_{11}^{lft} &&= -6.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

القوى المحورية للأعمدة العليا (الموجب شد، والسالب ضغط)

$$
\begin{aligned}
P_5 &= -V_{12}^{lft} &&= -(-1.75) \text{ k} \\
P_6 &= +V_{12}^{rgt} - V_{13}^{lft} = -1.75 - (-1.17) &&= -0.58 \text{ k} \\
P_7 &= +V_{13}^{rgt} - V_{14}^{lft} = -1.17 - (-1.46) &&= 0.29 \text{ k} \\
P_8 &= V_{14}^{rgt} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

القوى المحورية للأعمدة السفلى (الموجب شد، والسالب ضغط)

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_5 + V_{9}^{lft} = 1.75 - (-7.75) &&= 9.5 \text{ k} \\
P_2 &= P_6 + V_{10}^{rgt} + V_{9}^{lft} = -0.58 - 7.75 - (-5.17) &&= -3.16 \text{ k} \\
P_3 &= P_7 + V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 0.29 - 5.17 - (-6.46) &&= 1.58 \text{ k} \\
P_4 &= P_8 + V_{11}^{rgt} = -1.46 - 6.46 &&= -7.66 \text{ k}
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

# of Bays	3

# of Storeys					2
		Force		Shear	
	H	Lat.	Tot	Ext	Int
H1	14	15	15	2.5	5
H2	16	30	45	7.5	15

HORIZONTAL LOAD

	L1			L2			L3		
	20			30			24		
MOMENTS									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	17.5	-17.5		17.5	-17.5		17.5	-17.5	
17.5			35.0			35.0			17.5
-17.5			-35.0			-35.0			-17.5
	77.5	-77.5		77.5	-77.5		77.5	-77.5	
60.0			120.0			120.0			60.0
-60.0			-120.0			-120.0			-60.0

SHEAR									
	Bay 1			**Bay 2**			**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	-1.75	-1.75		-1.17	-1.17		-1.46	-1.46	
2.50			5.00			5.00			2.50
2.50			5.00			5.00			2.50
	-7.75	-7.75		-5.17	-5.17		-6.46	-6.46	
7.50			15.00			15.00			7.50
7.50			15.00			15.00			7.50

AXIAL FORCE						
Bay 1			**Bay 2**		**Bay 3**	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
1.75		-0.58		0.29		-1.46
	0.00		0.00		0.00	
9.50		-3.17		1.58		-7.92

الأحمال المركبة

استناداً إلى التحليلين التقريبيين للحملين الرأسي والجانبي، نحدد الآن معاملات تصميم الإطار.

الأعمدة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

COLUMNS				
العضو		رأسي	أفقي	قيم التصميم
1	العزم	4.50	60.00	64.50
	المحورية	7.50	9.50	17.00
	القص	0.56	7.50	8.06
2	العزم	5.60	120.00	125.60
	المحورية	18.75	15.83	34.58
	القص	0.70	15.00	15.70
3	العزم	3.60	120.00	123.60
	المحورية	20.25	14.25	34.50
	القص	0.45	15.00	15.45
4	العزم	6.50	60.00	66.50
	المحورية	9.00	7.92	16.92
	القص	0.81	7.50	8.31
5	العزم	4.50	17.50	22.00
	المحورية	2.50	1.75	4.25
	القص	0.64	2.50	3.14
6	العزم	5.60	35.00	40.60
	المحورية	6.25	2.92	9.17
	القص	0.80	5.00	5.80
7	العزم	3.60	35.00	38.60
	المحورية	6.75	2.63	9.38
	القص	0.51	5.00	5.51
8	العزم	6.50	17.50	24.00
	المحورية	3.00	1.46	4.46
	القص	0.93	2.50	3.43

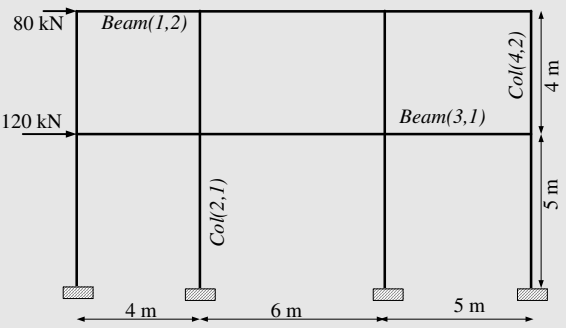
الكمرات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

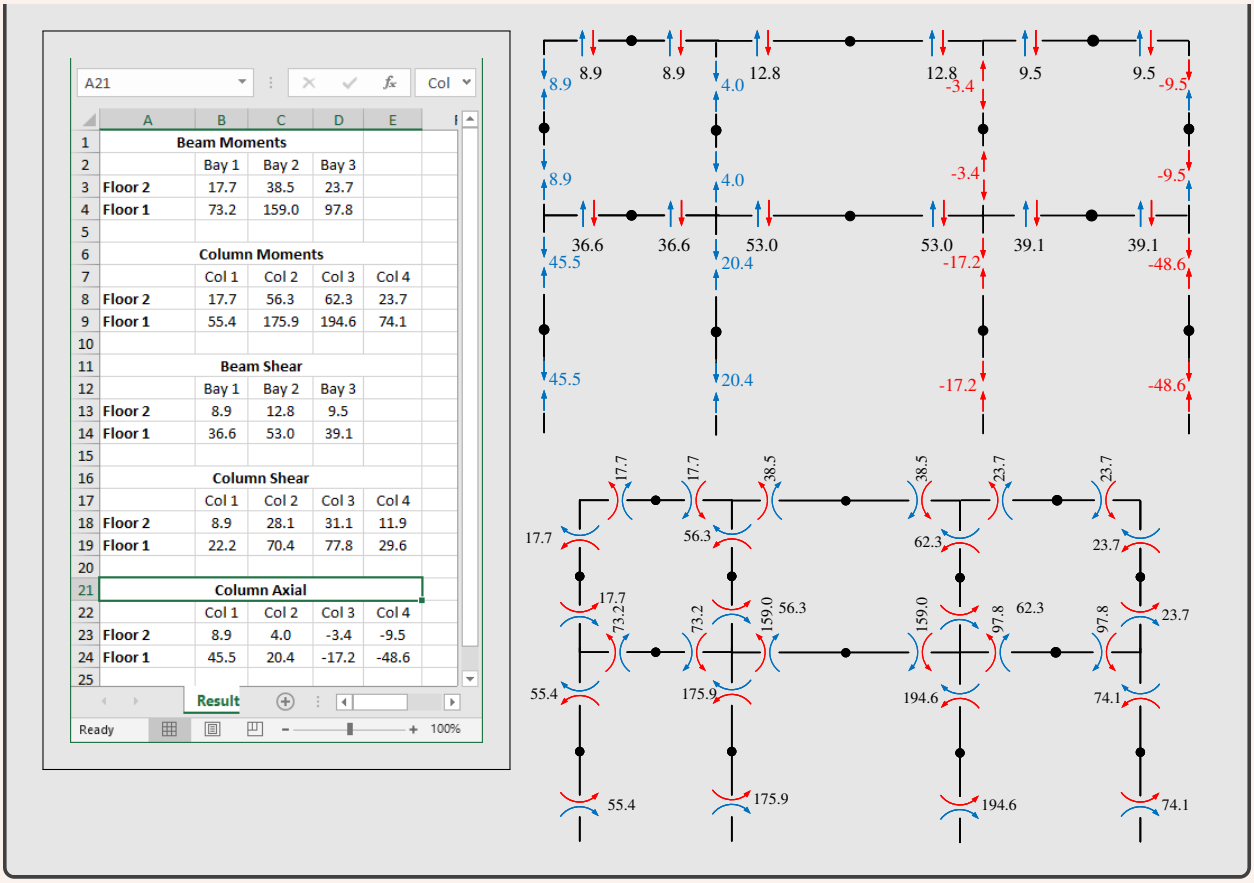
BEAMS				
العضو		رأسي	أفقي	قيم التصميم
9	عزم سالب	9.00	77.50	86.50
	عزم موجب	16.00	0.00	16.00
	القص	5.00	7.75	12.75
10	عزم سالب	20.20	77.50	97.70
	عزم موجب	36.00	0.00	36.00
	القص	7.50	5.17	12.67
11	عزم سالب	13.0	77.50	90.50
	عزم موجب	23.00	0.00	23.00
	القص	6.00	6.46	12.46
12	عزم سالب	4.50	17.50	22.00
	عزم موجب	8.00	0.00	8.00
	القص	2.50	1.75	4.25
13	عزم سالب	10.10	17.50	27.60
	عزم موجب	18.00	0.00	18.00
	القص	3.75	1.17	4.92
14	عزم سالب	6.50	17.50	24.00
	عزم موجب	11.50	0.00	11.50
	القص	3.00	1.46	4.46

37.1.3.2.1.2 مثال 37.2: حل ماتلاب

استُعمل برنامج MATLAB®الوارد في §I.2.2 لتحليل الإطار المجاور. ويُستحسن حل المسألة يدوياً ومقارنة النتائج بهذه الأشكال.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



37.1.3.2.2 طريقة الكابولي

41 تفترض الطريقة أن الإطار يعمل ككمرة كابولية، وأن مساحات مقاطع الأعمدة تمثل ألياف الكمرة. وبالتحديد:

1. تقع نقطة الانعطاف عند منتصف ارتفاع عمود كل طابق ومنتصف كل كمرة؛
2. تتناسب القوة المحورية في كل عمود مع بعده عن مركز ثقل مساحات مجموعة الأعمدة عند ذلك المستوى.

42 إجراء التحليل:

1. حدد مركز ثقل مجموعات الأعمدة من مساحاتها، ويمكن افتراض مساحة العمود واحداً؛
2. ادرس اتزان الطابق عند نقاط انعطاف الأعمدة. تُكتب القوى المحورية للأعمدة بدلالة قوة مجهولة واحدة لأنها تتناسب مع البعد عن مركز الثقل. ثم تُحدد القوى المجهولة بأخذ عزم الأحمال الخارجية وقوى الأعمدة حول أي نقطة في المقطع؛
3. احسب قص الكمرة من $\sum F_y = 0$ عند كل عقدة منفردة، بعد معرفة قوة العمود من الخطوة السابقة؛
4. احسب عزم طرف الكمرة بضرب قصها في نصف طولها لأن نقطة الانعطاف عند مركزها؛
5. حدد عزوم الأعمدة من $\sum M_z = 0$ عند كل عقدة، بعد معرفة عزوم أطراف الكمرات؛

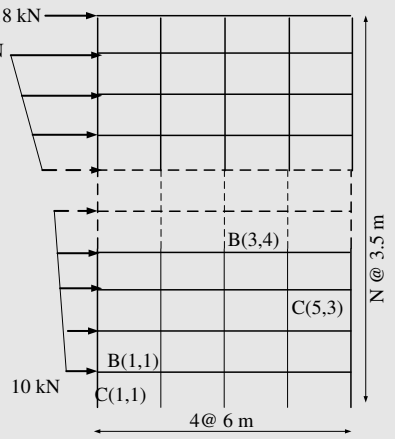
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. تحقق من $\sum F_x = 0$ و$\sum F_y = 0$ عند المساند.

43 يرد برنامج MATLAB®للتحليل التقريبي بطريقة الكابولي في §I.2.2.

37.1.3.2.2.1 مثال 37.3: طريقة الكابولي: مبنى شاهق

نستعمل برنامج MATLAB®نفسه، §I.2.2، لتحليل المبنى الشاهق المجاور المؤلف من أربعة بحور وخمسين طابقاً. يوضح المثال مرونة البرنامج في الملحق.

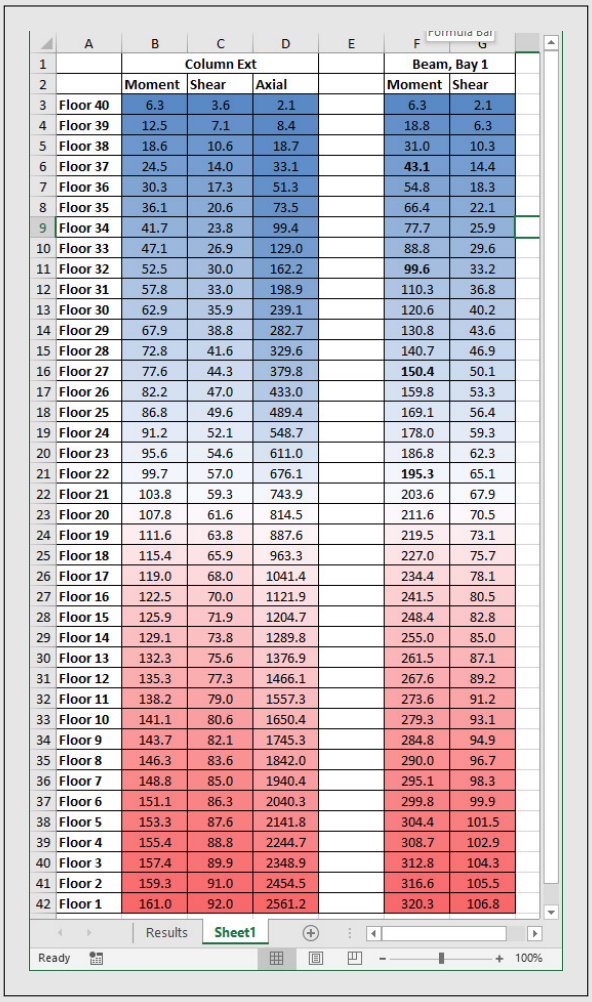


نستعمل برنامج MATLAB®:

```
;[1 1 1 1 1]=CArea;[6 6 6 6]=BaySpac;4=nBays
;(40,1)ones*3.5=HeightCol;40=nFloors
;39/idf*26+10=HorLoad;0:39=idf
```

وترد نتائج العمود 1 والبحر 1 في الجدول أدناه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



		Column Ext				Beam, Bay 1	
		Moment	Shear	Axial		Moment	Shear
3	Floor 40	6.3	3.6	2.1		6.3	2.1
4	Floor 39	12.5	7.1	8.4		18.8	6.3
5	Floor 38	18.6	10.6	18.7		31.0	10.3
6	Floor 37	24.5	14.0	33.1		**43.1**	14.4
7	Floor 36	30.3	17.3	51.3		54.8	18.3
8	Floor 35	36.1	20.6	73.5		66.4	22.1
9	Floor 34	41.7	23.8	99.4		77.7	25.9
10	Floor 33	47.1	26.9	129.0		88.8	29.6
11	Floor 32	52.5	30.0	162.2		**99.6**	33.2
12	Floor 31	57.8	33.0	198.9		110.3	36.8
13	Floor 30	62.9	35.9	239.1		120.6	40.2
14	Floor 29	67.9	38.8	282.7		130.8	43.6
15	Floor 28	72.8	41.6	329.6		140.7	46.9
16	Floor 27	77.6	44.3	379.8		**150.4**	50.1
17	Floor 26	82.2	47.0	433.0		159.8	53.3
18	Floor 25	86.8	49.6	489.4		169.1	56.4
19	Floor 24	91.2	52.1	548.7		178.0	59.3
20	Floor 23	95.6	54.6	611.0		186.8	62.3
21	Floor 22	99.7	57.0	676.1		**195.3**	65.1
22	Floor 21	103.8	59.3	743.9		203.6	67.9
23	Floor 20	107.8	61.6	814.5		211.6	70.5
24	Floor 19	111.6	63.8	887.6		219.5	73.1
25	Floor 18	115.4	65.9	963.3		227.0	75.7
26	Floor 17	119.0	68.0	1041.4		234.4	78.1
27	Floor 16	122.5	70.0	1121.9		241.5	80.5
28	Floor 15	125.9	71.9	1204.7		248.4	82.8
29	Floor 14	129.1	73.8	1289.8		255.0	85.0
30	Floor 13	132.3	75.6	1376.9		261.5	87.1
31	Floor 12	135.3	77.3	1466.1		267.6	89.2
32	Floor 11	138.2	79.0	1557.3		273.6	91.2
33	Floor 10	141.1	80.6	1650.4		279.3	93.1
34	Floor 9	143.7	82.1	1745.3		284.8	94.9
35	Floor 8	146.3	83.6	1842.0		290.0	96.7
36	Floor 7	148.8	85.0	1940.4		295.1	98.3
37	Floor 6	151.1	86.3	2040.3		299.8	99.9
38	Floor 5	153.3	87.6	2141.8		304.4	101.5
39	Floor 4	155.4	88.8	2244.7		308.7	102.9
40	Floor 3	157.4	89.9	2348.9		312.8	104.3
41	Floor 2	159.3	91.0	2454.5		316.6	105.5
42	Floor 1	161.0	92.0	2561.2		320.3	106.8

37.2 الاستجابة الإنشائية

44 نبدأ بدراسة الاستجابة الإنشائية للمباني تحت الأحمال الجانبية، مع التركيز على ثلاثة نظم إنشائية متميزة: النظام الفرعي للنواة، وجدار القص، وجدار القص الجملوني. ونناقش لكل منها طريقة عمله ومزاياه وعيوبه، كما يلخصها الجدول 37.1.

37.2.1 النظام الفرعي للنواة

45 تنقل هذه المنشأة المركزية الأحمال الجانبية عبر بلاطات الطوابق، وتعمل ككابولي رأسي يقاوم قوى القص وعزوم الانحناء. كما تمنح مقاومة ممتازة لأحمال الالتواء بسبب موقعها المركزي، وتؤدي صلابتها العالية إلى خفض انحراف المبنى تحت الأحمال الجانبية بدرجة كبيرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

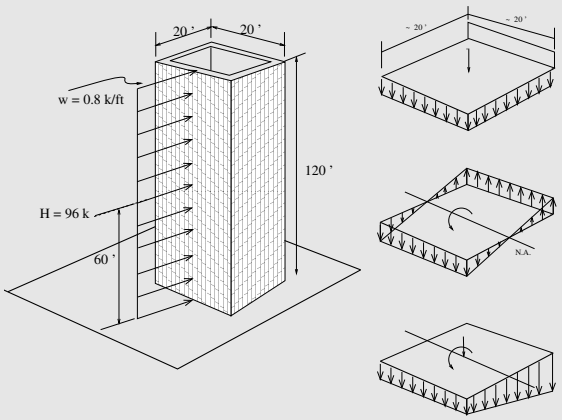
46 من الناحية الوظيفية، تضم النواة مسارات الحركة الرأسية، كالمصاعد والسلالم، والخدمات الأساسية. وغالباً ما توضع في مركز المبنى، فتزيد استقراره وتوفر نظاماً مركزياً لمقاومة الأحمال.

47 من أهم مزاياها الصلابة العالية التي تحد من الانحراف الجانبي، والمقاومة القوية للالتواء، والجمع بين الدورين الإنشائي والوظيفي. أما أبرز عيوبها فهي تعقيد التصميم الناتج من دمج الخدمات والعناصر الإنشائية، وشغل مساحة ملحوظة قد تؤثر في التخطيط المعماري.

37.2.1.1 مثال 37.4: النظام الفرعي للنواة

نم فرصتب سبتقم Lin **and** Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

نواة من الخرسانة المسلحة مربعة المسقط، ضلعها 20 قدماً وارتفاعها 120 قدماً وسماكة جدرانها قدم واحد. تتعرض لقوة جانبية مقدارها 0.8 كيب لكل قدم. أوجد الإجهادات.



1. بالمقارنة مع المنشأة المحللة في القسم 37.2.2.1، ازداد الحمل الرأسي الكلي المؤثر في القاعدة إلى

$$V = 4(400) = 1,600 \text{ k}$$

2. كما سبق، يساوي كل من العزم الأقصى والقص الأقصى، على الترتيب، 5,760 k.ft و96 k.

3. عزم العطالة للمقطع الأنبوبي هو

$$I = \Sigma \frac{bd^3}{12} = \frac{(20)(20)^3}{12} - \frac{(18)(18)^3}{12} = 4,600 \text{ ft}^4$$

4. إجهادات الانحناء القصوى:

$$\sigma_{fl} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{(5,760) \text{ k.ft}(20/2) \text{ ft}}{(4,600) \text{ ft}^4} = \pm 12.5 \text{ ksf} = \pm 87 \text{ psi}$$

5. إجهاد القص المتوسط هو

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96) \text{ k}}{2(20)(1) \text{ ft}^2} = 2.4 \text{ ksf} = 17 \text{ psi}$$

6. يولد الحمل الرأسي البالغ 1,600 كيب إجهاداً محورياً مقداره

$$\sigma_{ax} = \frac{P}{A} = \frac{-(1{,}600)\ \text{k}}{(4)(20)(1)\ \text{ft}^2} = -20\ \text{ksf} = -140\ \text{psi}$$

7. ومن ثم تكون الإجهادات الكلية

$$\sigma = \sigma_{ax} + \sigma_{fl}$$
$$\sigma_1 = -140 + 87 = -53\ \text{psi}$$
$$\sigma_2 = -140 - 87 = -227\ \text{psi}$$

ولذلك لا توجد إجهادات شد، وهذه الإجهادات أفضل كثيراً من القيم الناتجة من جدار قص منفرد.

37.2.2 جدار القص

48 تنتقل الأحمال الجانبية عبر بلاطات الطوابق إلى عناصر جدارية رأسية تقاوم بكفاءة قوى القص وعزوم الانحناء. ويوفر هذا النظام أيضاً صلابة كبيرة للتحكم في الانحرافات الجانبية.

49 تعمل الجدران أساساً كعناصر إنشائية، وقد تؤدي وظائف ثانوية كالقواطع. وتتيح مرونة التوزيع وضعها عند محيط المبنى أو في داخله.

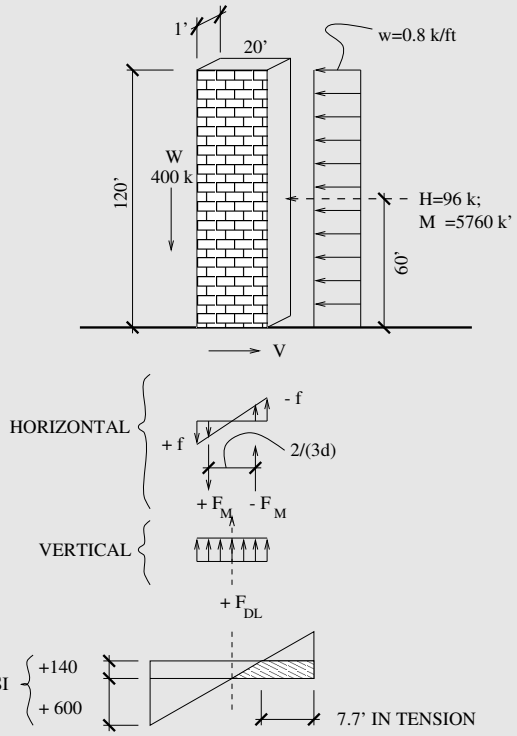
50 من مزاياه المقاومة الفعالة للقوى الجانبية، وبساطة التصميم والتنفيذ مقارنة بالنظم الأكثر تعقيداً، ومرونة اختيار مواضع الجدران لتحسين مقاومة الأحمال واستعمال المساحة. أما عيوبه فتشمل احتمال تقييد مواقع النوافذ والأبواب، وضعف مقاومة الالتواء ما لم تكن الجدران موزعة حول المركز توزيعاً مناسباً.

37.2.2.1 مثال 37.5: جدار قص خرساني

نم فرصتب سبتقم Lin **and** Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نعتبر جداراً من الخرسانة المسلحة عرضه 20 قدماً وسماكته قدم واحد وارتفاعه 120 قدماً، ويؤثر فيه عند القاعدة حمل رأسي مقداره 400 كيب. ونفترض أن الرياح تولد قوة أفقية منتظمة مقدارها 0.8 كيب لكل قدم من الارتفاع. المطلوب حساب إجهادات الانحناء والقص في الجدار لمقاومة حمل الرياح.



1. قوة القص وعزم الانحناء القصويان عند القاعدة

$$V_{max} = wL = (0.8)\ \text{k.ft}(120)\ \text{ft} = 96\ \text{k}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{2} = \frac{(0.8)\ \text{k.ft}(120)^2\ \text{ft}^2}{2} = 5{,}760\ \text{k.ft}$$

2. اللامركزية الناتجة هي

$$e_{\text{Actual}} = \frac{M}{P} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(400)\ \text{k}} = 14.4\ \text{ft}$$

3. اللامركزية الحرجة هي

$$e_{cr} = \frac{L}{6} = \frac{(20)\ \text{ft}}{6} = 3.3\ \text{ft} < e_{\text{Actual}} N.G.$$

ومن ثم ينشأ شد عند القاعدة.

4. عزم عطالة الجدار هو

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)\ \text{ft}(20)\ \text{ft}^3}{12} = 667\ \text{ft}^4$$

5. إجهادات الانحناء القصوى هي

$$\sigma_{max} = \pm\frac{Mc}{I} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}(10)\ \text{ft}}{(667)\ \text{ft}^4} = \pm(86.5)\ \text{ksf} = \pm(600)\ \text{psi}$$

6. إجهاد القص المتوسط هو

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = 4.8\ \text{ksf} = 33.3\ \text{psi}$$

تستطيع الخرسانة المزودة بتسليح قص اسمي أن تتحمل إجهاد قص لا يقل عن 100 رطل لكل بوصة مربعة، ولذلك فالإجهاد المحسوب مقبول.

7. الإجهاد المحوري عند قاعدة الجدار هو

$$\sigma = \frac{-(400)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = (20)\ \text{ksf} = \approx -140\ \text{psi}$$

8. ومن ثم تكون الإجهادات القصوى:

$$\sigma_1 = -140 + 600 = 460\ \text{psi} \quad \text{(شد)}$$
$$\sigma_2 = -140 - 600 = -740\ \text{psi} \quad \text{(ضغط)}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9. تستطيع الخرسانة تحمل إجهاد الضغط البالغ 740 رطلاً لكل بوصة مربعة بسهولة، أما إجهاد الشد البالغ 460 رطلاً لكل بوصة مربعة فيلزم أن يقاومه تسليح فولاذي.
10. لما كانت هذه إجهادات خدمة وليست إجهادات مُعامَلة، نعتمد طريقة التصميم بإجهادات التشغيل، ونستخدم إجهاداً مسموحاً مقداره 20 كيلورطل لكل بوصة مربعة، ثم نزيده بنسبة 4/3 لأحمال الزلازل والرياح،

$$\sigma_{all} = \frac{4}{3}(20) = 26.7 \text{ ksi}$$

11. توزيع الإجهاد خطي؛ ضغط عند أحد الطرفين وشد عند الآخر. ويُستخرج طول منطقة الشد من تشابه المثلثات:

$$\frac{x}{460} = \frac{20}{460+740} \Rightarrow x = \frac{460}{460+740}(20) = 7.7 \text{ ft}$$

12. قوة الشد الكلية في كتلة الإجهاد المثلثة هي

$$T = \frac{1}{2}(460) \text{ ksi}(7.7 \times 12) \text{ in} \underbrace{(12) \text{ in}}_{\text{العرض}} = 250 \text{ k}$$

13. مساحة التسليح الفولاذي الكلية المطلوبة هي

$$A_s = \frac{(250) \text{ k}}{(26.7) \text{ ksi}} = 9.4 \text{ in}^2$$

ينبغي توفير هذه الكمية من التسليح عند طرفي الجدار لأن الرياح أو الزلزال قد يؤثران في أي من الاتجاهين. كما يجب تصميم الأساسات لمقاومة قوى الرفع الشدية، وربما باستعمال الخوازيق.

37.2.3 جدار القص الجملوني

51 تنتقل الأحمال الجانبية عبر بلاطات الطوابق إلى العناصر الجملونية، فيجمع النظام بين قوة جدران القص وكفاءة الجمالونات في مقاومة القوى المحورية. ويمنح هذا الترتيب صلابة عالية تحد من الانحرافات بفاعلية.

52 وتُحسَّن مسارات الأحمال بواسطة التدعيمات القطرية، فتتكون عدة مسارات فعالة لتوزيع القوى.

53 يجمع جدار القص الجملوني مزايا جدران القص والجمالونات، فيحسن كفاءة توزيع الأحمال والأداء الزلزالي بفضل مطيليته وقدرته على تبديد الطاقة. إلا أن تصميمه قد يكون معقداً ويتطلب تخطيطاً وتفصيلاً دقيقين، كما قد تفرض عناصر التدعيم قيوداً معمارية تحد من استعمال المساحة ومرونة التصميم.

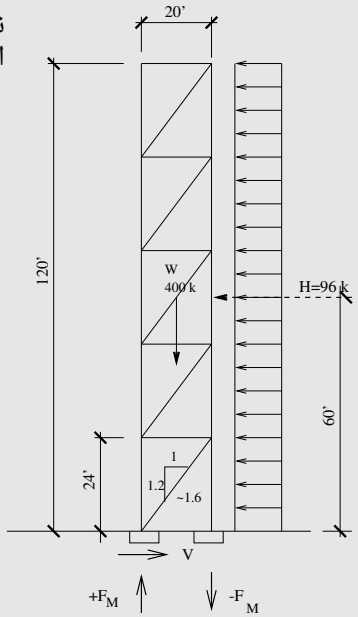
37.2.3.1 مثال 37.6: جدار قص جملوني

نم فرصتب سبتقم Lin **and** Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

جدول 37.1: مقارنة بين النظام الفرعي للنواة وجدار القص وجدار القص الجملوني

الخاصية	النظام الفرعي للنواة	جدار القص	جدار القص الجملوني
الاستجابة الإنشائية	صلابة عالية، ومقاومة ممتازة للالتواء، ونقل مركزي للأحمال	صلابة عالية ومقاومة فعالة للقص والعزم	صلابة عالية ومسارات حمل فعالة ومقاومة محسنة للقص والعزم
الوظيفة	متعدد الوظائف (إنشاء وخدمات)	إنشائي أساساً مع بعض القواطع	إنشائي أساساً مع تحسين توزيع الأحمال
المزايا	مقاومة عالية للالتواء، وتعدد الأغراض، واستقرار مركزي	مقاومة فعالة للأحمال، وبساطة، ومرونة في التوزيع	زيادة الصلابة والمقاومة، وكفاءة توزيع الأحمال، وتحسن الأداء الزلزالي
العيوب	تعقيد التصميم وشغل المساحة	قيود معمارية ومقاومة أقل للالتواء	تعقيد التصميم والتنفيذ وقيود معمارية

نعتبر المسألة نفسها التي حُللت سابقاً، ولكن باستعمال جدار قص جملوني بدلاً من الجدار الخرساني.



1. باستعمال العزم الأقصى البالغ $5,760$ كيب-قدم (المعادلة 37.1)، نحسب قوتي الضغط والشد في العمودين لذراع عزم طوله 20 قدماً.

$$F = \pm\frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(20)\ \text{ft}} = \pm 288\ \text{k}$$

2. إذا أضفنا الآن أثر الحمل الرأسي البالغ 400 كيب، تصبح القوتان

$$C = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} - 288 = -488\ \text{k}$$
$$T = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} + 288 = 88\ \text{k}$$

3. القوة في العضو القطري الذي يجب أن يقاوم قصاً قاعدياً مقداره 96 كيب هي، من تشابه المثلثات،

$$\frac{F}{96} = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20}(96) = 154\ \text{k}$$

4. يمكن تعديل التصميم لإلغاء قوى الشد في العمودين بزيادة عرض القاعدة، البالغ حالياً 20 قدماً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

37.2.4 الانحرافات الجانبية

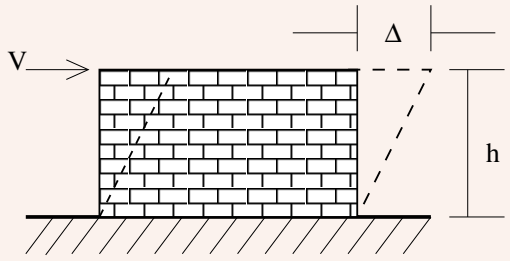
هذا القسم مقتبس بتصرف من Lin **and** Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

54 حتى في مرحلتي التصميم التصوري أو الأولي، من المهم تقدير الانحرافات الجانبية للمباني العالية للأسباب الآتية:

1. كثيراً ما تحد الأكواد الانحرافات الجانبية؛ فمثلاً $\Delta < h/500$ حيث h ارتفاع الطابق أو المبنى. وهذا مهم كيلا يتعرض الشاغلون لحركات أفقية مزعجة.
2. قد يعاني المبنى الذي ينحرف كثيراً تحت القوى الجانبية أضراراً مرتبطة بالاهتزاز، على نحو مماثل لأثر الانحرافات الرأسية في الجوائز.
3. يتيح تقييم الانحراف أيضاً تقدير النسب التي تحملها النظم الفرعية الرأسية المختلفة من الحمل الأفقي، مثل مقارنة نصيب النواة بنصيب الإطارات. ولأن جميع النظم متصلة، فلا بد أن تتحرك معاً، ويمكن من صلابتها، أي الحمل لكل وحدة تشوه، تحديد مساهمة كل نظام فرعي.

37.2.4.1 الجدار القصير

55 في المنشآت القصيرة، كما في الجوائز القصيرة، يهيمن انحراف القص الموضح في الشكل 37.14. ولحمل



شكل 37.14: تشوه القص في مبنى قصير، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

مركز، من المعادلة 23.7،

$$\Delta \approx \frac{1.2Vh}{GA}$$

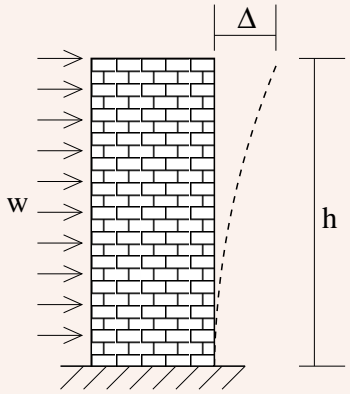
حيث $G \approx \frac{2}{5}E$ لكل من الخرسانة والفولاذ.

37.2.4.2 الجدار الطويل

56 أما في المبنى العالي، فتهيمن تشوهات الانحناء المبينة في الشكل 37.15.

$$\Delta \approx \frac{wh^4}{8EI}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

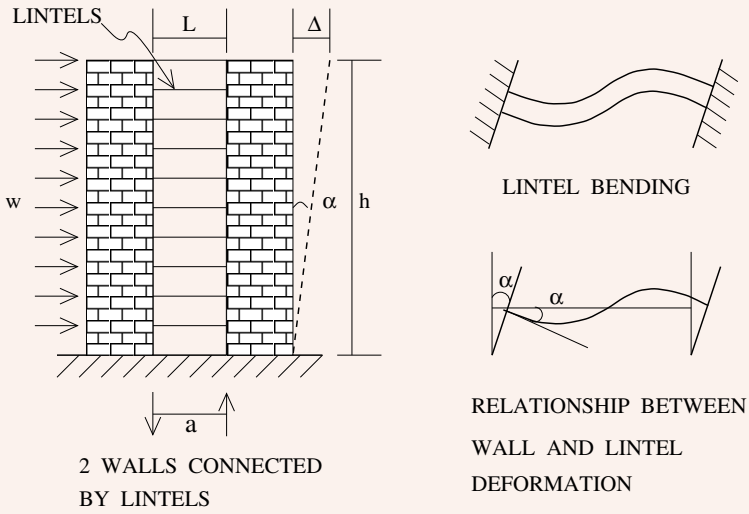


شكل 37.15: تشوه الانحناء في مبنى عال، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

وللمقاطع المستطيلة يكون عزم العطالة $I = \frac{bh^3}{12}$. وهذا ببساطة إزاحة طرف جائز كابولي معرض لحمل منتظم.

37.2.4.3 الجدران والجوائز الرابطة

57 عندما يصل بين جدارين نحيلين عدد من الجوائز الرابطة الثقيلة، يمكن للنظام الفرعي كله أن يعمل ككابولي واحد تثبته الأساسات، فتكون الانحرافات صغيرة. أما إذا كانت الجوائز الرابطة خفيفة، فإن تشوهها يفوق تشوه الجدران، كما في الشكل 37.16.



شكل 37.16: انحراف منشأة مبنى مؤلفة من جدارين نحيلين وجوائز رابطة، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58 في هذه الحالة يمكن تقدير الانحرافات من:

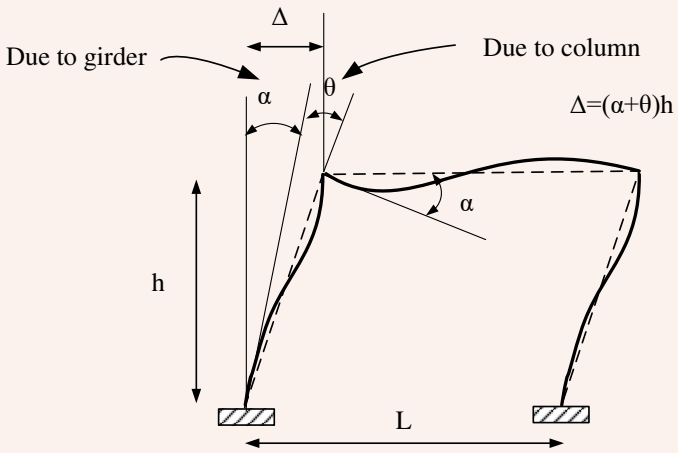
$$M_{max} = \frac{wh^2}{2}$$
$$T = C = \frac{M}{a}$$
$$\text{الجائز الرابط}/V \approx \frac{T}{\text{عدد الجوائز الرابطة}}$$
$$\alpha_{\text{wall}} = \alpha_{\text{lintel}} \approx \frac{VL^2}{12EI}$$

وكذلك

$$\delta \approx \alpha h$$

37.2.4.4 الإطارات

59 ينشأ انحراف الإطار الصلد أساساً من القص بين الطوابق، الذي يولد قوى قص رأسية في الجوائز. ويمكن تقدير هذه التشوهات بطريقة البوابة، كما في الشكل 37.17.



شكل 37.17: تشوه إطار عرضي واحد، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 يمكن تقريب تشوه الطابق الأول عند العقدة الخارجية من

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_E} h^3}{12 E I_{col_E}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_E} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_E} = \Delta_{col_E} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_E} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr} \right]$$

61 أما عند العقدة الداخلية:

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_I} h^3}{12 E I_{col_I}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_I} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

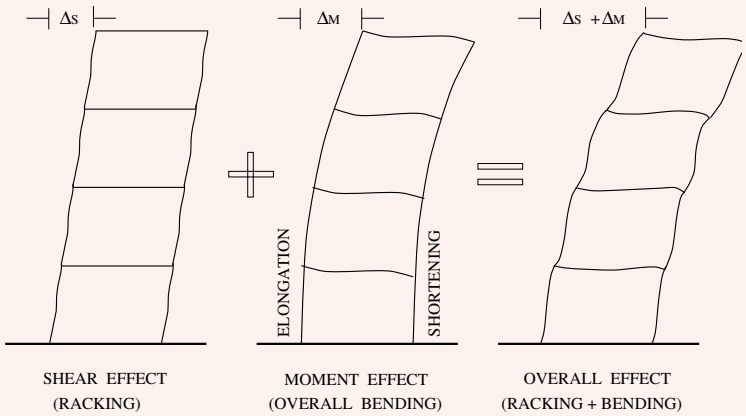
$$\Delta_{tot_I} = \Delta_{col_I} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_I} h^2}{12E} \left[\frac{h}{I_{col_I}} + \frac{L}{I_g dr} \right]$$

حيث يشير الرمزان السفليان E وI إلى العمودين الخارجي والداخلي. وتكون الإزاحة الكلية

$$\Delta_{tot} = n \frac{\Delta_{tot}}{2}$$

حيث n عدد الطوابق، وΔ_{tot} تخص العقد الداخلية أو الخارجية.

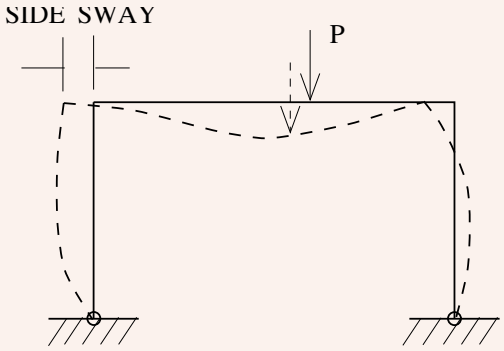
62 المصدران الرئيسيان للانحراف الجانبي هما انحناء الأعمدة عند مقاومتها القص الأفقي، وانحناء الجوائز عند مقاومتها القص الرأسي، كما في الشكل 37.18.



شكل 37.18: انحراف القص والانحناء لنظام فرعي من إطار صلد، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

63 يولد الحمل الرأسي غير المتناظر انحرافاً جانبياً في الإطارات، كما في الشكل 37.19.

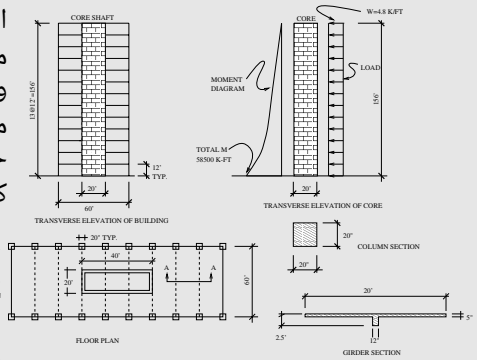
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 37.19: انحراف التمايل الجانبي الناتج من حمل رأسي غير متناظر، (Lin **and** Stotesbury, 1981)

37.2.4.4.1 مثال 37.7: التقدير التقريبي للانحراف العرضي لمبنى

نم فرصتب سبتقم Lin **and** Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



العناصر المقاومة للأحمال الجانبية هي النواة الخرسانية المركزية، ذات مقطع $20\text{ ft} \times 40\text{ ft}$ والمؤلفة من أربعة جدران سماكة كل منها 12 بوصة، والإطارات الخرسانية المسلحة سابقة الإجهاد، المؤلفة من جوائز ذات مقطع T أبعاده $12\text{ in} \times 30\text{ in}$ وعزم عطالة $I_{gdr} = 3.64\text{ ft}^4$، وأعمدة خرسانية مسلحة مربعة ضلعها 20 بوصة. نعتبر حمل رياح مقداره 4.8 كيب لكل قدم في الاتجاه العرضي، ونفترض ما يأتي:

1. خصائص مقاطع الأعمدة وارتفاعاتها ثابتة في جميع الطوابق.
2. سماكة جدران النواة ثابتة في جميع الطوابق، ونهمل فتحات الجدران.
3. حمل الرياح منتظم على ارتفاع المبنى.

يسير الحل كما يأتي:

1. نحسب تشوه الانحناء عند قمة النواة، ويمكن إهمال تشوهات القص لأن النواة نحيلة:

$$\Delta = \frac{wh^4}{8EI}$$

$$I = \frac{b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3}{12}$$

$$= \frac{(41)(21)^3 - (39)(19)^3}{12} = 9,400\text{ ft}^4$$

$$E = 3 \times 10^6\text{ psi} = 432,000\text{ ksf}$$

$$\Delta = \frac{(4.8)\text{ k.ft}(156)^4\text{ ft}^4}{8(432,000)\text{ ksf}(9,400)\text{ ft}^4} = 0.087\text{ ft}$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.087}{156} = \frac{1}{1,800} \checkmark$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

النسبة $\frac{\Delta}{h}$ أصغر بكثير من 1/500 المسموح بها في معظم أكواد المباني، وتقع ضمن المجال المعتاد للمباني الخرسانية، أي بين 1/1,000 و1/2,500.

إذا خُفضت سماكة الجدار وأُخذت فتحات الأبواب في الحسبان، تتغير قيمة الانحراف تبعاً لذلك.
يزداد الانحراف الناتج من العزم بسرعة قرب القمة. وتمثل القيمة 1/1,800 دليل الانجراف *المتوسط* للمبنى كله فقط، في حين قد يكون دليل انجراف *الطابق* أكبر، ولا سيما في الطابق العلوي.

2. ندرس بعد ذلك انحراف قمة الإطار. وبافتراض أن كل إطار يحمل 1/9 من حمل الرياح والقص الكليين، مع إهمال تقاصر الأعمدة، نحصل على:

$$\Delta = \frac{V_{col_E} h^2}{12E}\left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr}\right]$$

$$I_{col} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(20/12)(20/12)^3}{12} = 0.64 \text{ ft}^4$$

$$I_{gdr} = 3.64 \text{ ft}^4$$

$$V_{col_I}^{\text{ground}} = \frac{(4.8) \text{ k.ft}(156) \text{ ft}}{(2)(9)} = 41.7 \text{ k/col}$$

$$\Delta = \frac{(41.7) \text{ k}(12)^2}{12(432,000) \text{ ksf}}\left[\frac{(12) \text{ ft}}{(0.64) \text{ ft}^4} + \frac{2(60) \text{ ft}}{(3.46) \text{ ft}^4}\right]$$
$$= 0.00116(18.8 + 34.7) = 0.062 \text{ ft}$$

3. لما كان انجراف الطابق يتناسب مع قص الطابق، الذي يتناقص خطياً نحو القمة، فإن الانجراف المتوسط يساوي $0.062/2 = 0.031$ ft لكل طابق، ويكون انحراف قمة المبنى تقريباً

$$\Delta = (13)(0.031) = 0.40\text{ft}$$

مما يعطي نسبة انجراف مقدارها

$$\text{نسبة انجراف المبنى} = \frac{(0.4) \text{ ft}}{(156) \text{ ft}} = \frac{1}{400}$$

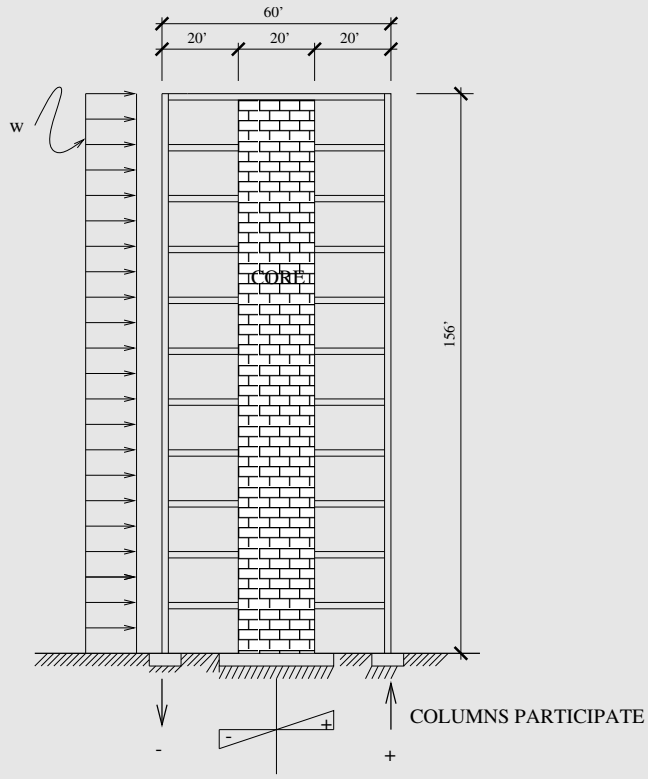
$$\text{نسبة انجراف الطابق الأرضي} = \frac{(0.062) \text{ ft}}{(12) \text{ ft}} = \frac{1}{194}$$

4. بمقارنة انحراف الإطار البالغ 0.40 ft بانحراف النواة البالغ 0.087 ft، يتبين أن الإطار أكثر مرونة من النواة بنحو خمس مرات، وأن صلابته لا تكفي لحمل كامل الحمل الجانبي منفرداً. وبتوزيع الحمل الجانبي بنسبة الصلابة النسبية، يحمل الإطار نحو سدس الحمل وتحمل النواة الأخماس الخمسة الباقية.

تؤدي زيادة مقطع العمود إلى زيادة صلابة الإطار، ولكن لكي يكون ذلك فعالاً حقاً ينبغي أيضاً زيادة صلابة الجوائز، لأنها تسهم بنحو ثلثي الانحراف. وعندئذ يمكن جعل الإطارات تحمل نسبة أكبر من الحمل. ويلاحظ أن شكلي الانحراف للنواة والإطارات مختلفان إلى حد بعيد، لذلك لا تمثل المقارنة البسيطة السابقة بين انحرافي القمة تقييماً دقيقاً.

وأخيراً، لم ندرس أثر تقوية النواة بالأعمدة الخارجية المتصلة اتصالاً صلداً بجدرانها، والتي ستعمل معها كوحدة واحدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ويكون هذا فعالاً جداً، لأن بلاطات الطوابق الأفقية تربط بينها وتجبرها على الانحراف معاً.

5. خلاصة القول أن هذا الترتيب يبدو عالي الكفاءة، ومن شأن التحليل التفصيلي اللاحق تحسينه والوصول به إلى التصميم الأمثل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لوحة «ميلانكوليا *الأولى*» لألبريخت دورر مرة أخرى *(1514)*

تصلح «ميلانكوليا الأولى» استعارةً للتحليل التقريبي، إذ يؤدي الحدس والتقدير والاستدلال الهندسي دوراً أساسياً في حل المسائل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38 التصاميم الأولية

ملخص

نتوقف في هذا الفصل لتطبيق بعض المفاهيم التي عُرضت سابقاً، وهي بسيطة أحياناً، في إجراء تحليل وتصميم أوليين جزئيين لعدد من المنشآت الشهيرة.

أُخذت كل دراسة من دراسات الحالة هذه من المراجع المتاحة، ثم كُيّفت، ولا سيما بتوحيد الرموز، لتناسب حاجات هذا الكتاب.

38.1 مثال 38.1: مطار دالاس 1280
38.2 مثال 38.2: برج إيفل 1287
38.3 مثال 38.3: مخازن ماجازيني جنرالي . . . 1294
38.4 مثال 38.4: جسر جورج واشنطن 1298
38.5 مثال 38.5: تصميم قوس ذي مفصلين . . 1305
38.6 مثال 38.6: التغيرات الحرارية في قوس 1313
38.7 مثال 38.7: قوس قطعي مع تغير قاطع الزاوية لـ *I* 1315

38.1 مثال 38.1: مطار دالاس

نم فرصتب سبتقم Howard, 1966 Structure: An Architect's Approach وWhitehead, 2020 *"Saarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction"*.

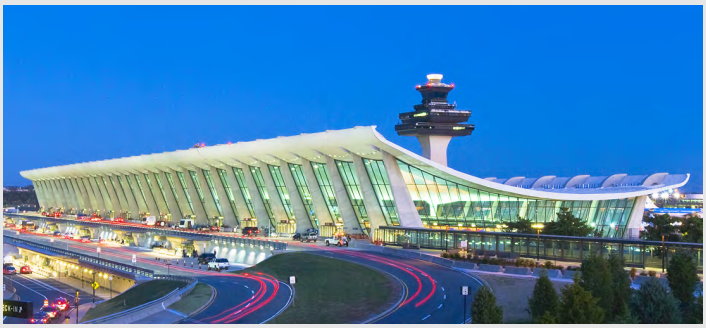
يجمع هذا الصرح الأمريكي الشهير، الذي صممه إيرو سارينن، مصمم قوس البوابة في سانت لويس في الفترة نفسها تقريباً، بين جمال متميز وكفاءة إنشائية.

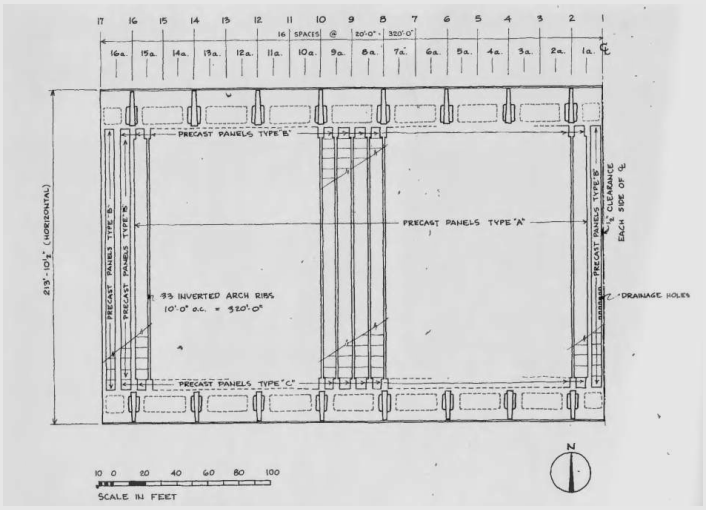
الوصف

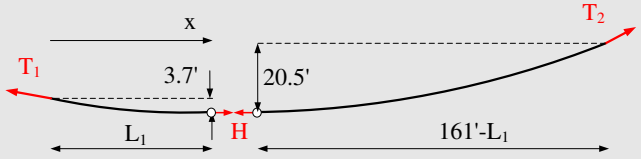
للمنشأة 16 عموداً على كل جانب من القاعة المفتوحة، تفصل بينها مسافات قدرها 40 قدماً (12 م). تميل الأعمدة إلى الخارج ولها قواعد كبيرة تساعد على مقاومة دفع السقف. وأنتج اختلاف ارتفاعات الأعمدة سقفاً معلقاً منحنياً واسعاً يغطي كامل المساحة البالغة 90,000 قدم مربعة (8,361 م^2)، وتحدد هندسته منحنيات السلسلة للكابلات المعلقة المحملة بانتظام.

عُلقت كابلات السقف بين بلاطتي الحافة الخرسانيّتين المصبوبتين في الموقع والمنحنيتين إلى أعلى والمتصلتين بالأعمدة. وعلى امتداد محيط بلاطة الحافة، عُلّق كل 10 أقدام (3 م) زوجان من الكابلات الفولاذية قطرها بوصة واحدة (2.54 سم)، يمتدان 160 قدماً (48.8 م) إلى جائز الحافة المقابل. ثم وُضعت تباعاً فوق الكابلات 1,800 لوحة خفيفة مسبقة الصب ذات خطافات معدنية صغيرة عند الجوانب. شُدت الكابلات مسبقاً إلى الشكل الحبلي الدقيق، ثم ثُقّل السقف بأكياس الرمل حتى أمكن تغليف الكابلات بين الألواح وصبة التغطية فوقها بخرسانة خفيفة مصبوبة. ولم تلزم شدات تحت السقف؛ فقد أدت الألواح ببراعة دور المنشأة ودور شدة صبة التغطية معاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.







مسقط جزئي للسقف

الشد

نظراً إلى صغر الترخيم، يمكن *افتراض* أن الشكل قطع مكافئ. وعند نقطة الترخيم الأقصى، التي لم تحدد بعد، تساوي المركبة الأفقية لشد الكابل H. وبالنظر إلى مخططي الجسم الحر الأيسر والأيمن وأخذ العزوم حول المساند:

$$3.7H = w\frac{L_1^2}{2}$$

$$20.5H = w\frac{(161 - L_1)^2}{20.5}$$

بالمساواة نحصل على $L_1 = 48.0'$ و$H = 311w$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزاويتان عند المسندين هما

$$\alpha = \arctan \frac{V}{H} = \arctan \frac{48w}{311w} = 8.77^\circ$$
$$\beta = \arctan \frac{V}{H} = \arctan \frac{(161-48)w}{311w} = 19.97^\circ$$

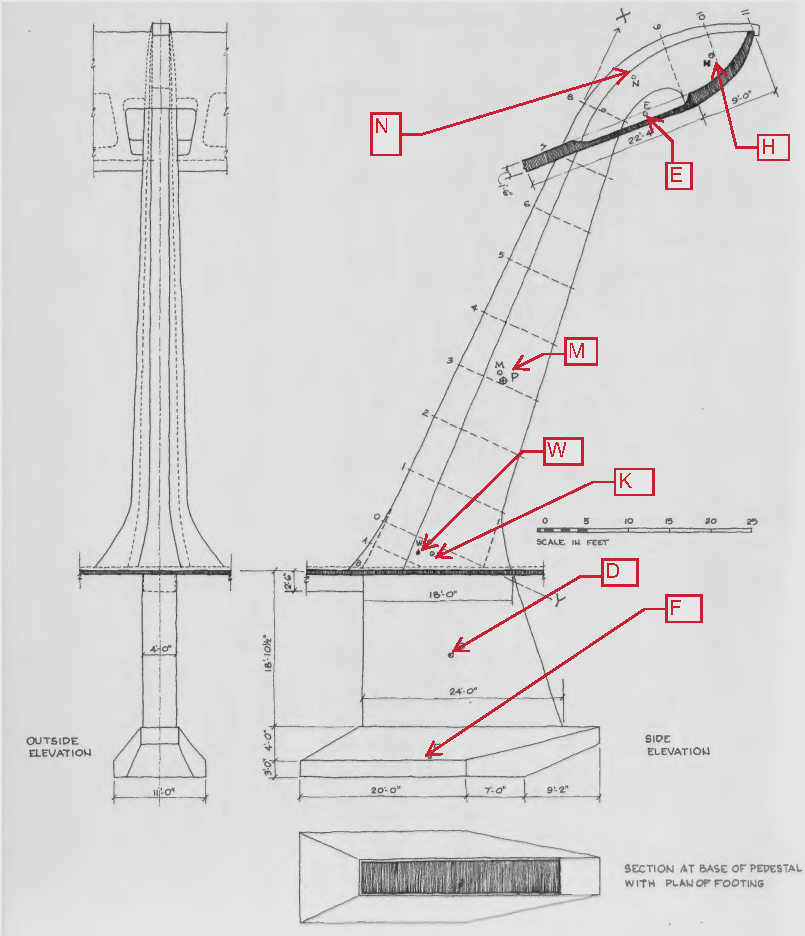
ومن ثم يكون الشدان عند اليسار واليمين

$$T_1 = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{311w}{\cos 8.77^\circ} = 315w$$
$$T_2 = \frac{H}{\cos\beta} = \frac{311w}{\cos 19.97^\circ} = 331w$$

الحمل w يساوي 0.33 كيب لكل قدم من البحر. لذلك يكون الشد الأقصى $T_{max} = (331)(0.33) = 109$ كيب. وأثناء التنفيذ يمثل هذا تقريباً الحمل الذي يحمله حبلا الجسر ذوا القطر بوصة واحدة، وسعة كل منهما 122 كيب، فيكون معامل الأمان $244/109 = 2.25$.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الأوزان ومراكز الثقل



لن نحسب العزوم وقوى القص في جائز الحافة، لأنها لا تؤثر في الصورة العامة للإطار الرئيس الذي نحلله. غير أن أبعاده في الجانب الشمالي، بحر 40 قدماً وعمق 32 قدماً مقاساً بموازاة خط القوة الرئيسة، تجعله من *الجوائز العميقة*.

أصبحت المركبتان الأفقية والرأسية لحمل السقف المعلق معلومتين، لكن يجب ضربهما في 4 لأن تباعد الإطارات 40 قدماً وتباعد الأضلاع 10 أقدام فقط. ولإكمال الصورة نحتاج إلى وزني جائز الحافة والإطار ومركزي ثقلهما[a]. المادة خرسانة حجرية وزنها 0.15 كيب/قدم^3، وترد الأبعاد الرئيسة أدناه.

لن نحسب العزوم وقوى القص في جائز الحافة لأنها لا تؤثر في الصورة العامة للإطار الرئيس.

[a] تورد الحسابات الآتية كما أجراها المهندس الإنشائي في ستينيات القرن العشرين. تستطيع برامج التصميم بمعونة الحاسوب اليوم تنفيذها بسهولة، لكن تتبعها يظل مراجعة مفيدة للتكامل العددي ومبادئ الاستاتيكا.

لكن أبعاده في الجانب الشمالي تجعله جائزاً عميقاً. والمركبتان الأفقية والرأسية لحمل السقف معلومتان الآن، مع ضربهما في 4 بسبب اختلاف تباعد الإطارات والأضلاع. ونحتاج إلى أوزان جائز الحافة والإطار ومراكز ثقلهما. المادة خرسانة حجرية وزنها 0.15 كيب/قدم^3، وترد الأبعاد الرئيسة أدناه. جائز الحافة:

$$(22.3)(1.5) + (9.0)(1.3) = 45.1 \text{ ft}^2 \times 37 \text{ ft} = 1,670 \text{ ft}^3$$

نطرح:

الفتحة حول العمود $(15)(5)(1.5)$	$= -112$
التجويف $(28)(14)(1.0)$	$= -392$
المجموع	$= -504$

الوزن الكلي

$$1,670 - 504 = 1,166 \text{ ft}^3 \times 0.15 \text{ kip/ft}^3 = 175 \text{ kip}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يُقدّر مركز ثقله عند النقطة E. أما حساب الإطار، أو العمود، فأطول. ويمكن تقسيمه إلى خمسة أجزاء: الجذع الرئيس، وهو قريب من هرم مبتور؛ وإسفين في الأسفل؛ وتنورة أو اتساع عند أسفل العنق؛ والعنق؛ والرأس. ويمكن إيجاد حجم الجذع الرئيس بدقة جيدة بالصيغة المنشورية

$$\frac{1}{4}h(A_0 + 4A_4 + A_8)$$

التي تعطي في هذه الحالة 2,220 قدم^3. لكننا نحتاج أيضاً إلى موضع مركز الثقل.

نستعمل قاعدة سمبسون الأولى، وهي طريقة عددية تقرب قيمة التكامل المحدد باستعمال دوال تربيعية.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

نقسم طول الجذع إلى ثمانية أجزاء متساوية بتسعة مقاطع تفصل بينها 7 أقدام. تُحسب مساحات المقاطع 0 و4 و8، وتُستكمل البقية بالاستيفاء. ويحدد مركز الثقل نسبة إلى المحورين X وY. ولأن مراكز ثقل المقاطع تقع تقريباً على خط مستقيم، فلا حاجة إلى حساب المسافة باتجاه Y.

المقطع (1)	المساحة قدم^2 (2)	معامل سمبسون (3)	$f(Vol)$ (3)(2) (4)	العزم الذراع (5)	$f(M)_y$ (5)(4) (6)
0	68.7	1	68.7	0	0
1	60.6	4	242.4	1	242.4
2	52.7	2	105.4	2	210.8
3	45.2	4	180.8	3	542.4
4	38.3	2	76.6	4	306.4
5	32.1	4	128.4	5	642.0
6	26.5	2	53.0	6	318.0
7	21.3	4	85.2	7	596.4
8	16.4	1	16.4	8	131.2
Σ			956.2		2,989.6

لتباعد s مقداره 7 أقدام، يكون الحجم

$$\text{الحجم} = f(vol) \times \frac{s}{3} = 956.9 \text{ ft}^2 \times \frac{7}{3} \text{ ft} = 2,210 \text{ ft}^3$$

ومن ثم يقع مركز الثقل عند

$$\overline{X} = \frac{(s^2/3)\Sigma f(M)_y}{(s)\Sigma f(vol)} = 7.0 \times \frac{2,989.6}{956.9} = 21.9 \text{ ft}$$

يُحسب حجم الإسفين السفلي من مساحة المقطع A وباستعمال الصيغة المنشورية.

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_A + A_B) = \frac{6.0}{6}(68.7 + 4(42.0) + 0) = 237 \text{ ft}^3$$

ويقع مركز ثقله عند النقطة W.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يُقرب حجم التنورة بضرب مساحة مثلث ارتفاعه 8.5 قدم وقاعدته 2.5 قدم في محيط قدره 48.0 قدماً. فيكون الحجم 510 قدم^3 ومركز الثقل عند K.

في الأعلى، يقرب حجم العنق بضرب مساحة المقطع 8 في طول قوس 10.7 قدم، فينتج 176 قدم^3 ومركز ثقل عند N. ويحسب الرأس من مساحات المقاطع $A_9 = 22.8$ و$A_{10} = 18.7$ و$A_{11} = 3.2$، فتعطي الصيغة المنشورية

$$\frac{10.8}{6}(22.8 + 4(18.7) + 3.2) = 182 \text{ ft}^3$$

ويُقدّر مركز الثقل عند H.

بجمع هذه الحجوم لإيجاد الحجم الكلي للإطار حتى منسوب الطابق الرئيس،

		الحجم قدم^3	$\overline{X}$	الحجم $\overline{X}\times$ قدم^4	$\overline{Y}$	الحجم $\overline{Y}\times$ قدم^4
التنورة	K	510	1.0-	510-	6.8	3,470
الإسفين	W	237	1.8-	427-	5.2	1,234
الجذع الرئيس	M	2,210	21.9	48,400	4.8	10,670
العنق	N	176	61.2	10,800	4.3	760
الرأس	H	182	67.5	12,280	11.5	2,090
		3,315		70,543		18,224

ومن ثم،

$$\begin{aligned}
\text{الوزن الكلي} &= 3,315 \times 0.5 = 497 \text{ k} \\
\text{للإطار كله } \overline{X} &= \frac{70,543}{3,315} = 21.3 \text{ ft} \\
\text{للإطار كله } \overline{Y} &= \frac{18,224}{3,315} = 5.51 \text{ ft}
\end{aligned}$$

يقع مركز الثقل عند P. ووزن الركيزة هو

$$\frac{18+24}{2}(19.0)(4.0) = 1,600 \text{ ft}^3 \times (0.15) \text{ k/ ft}^3 = 240 \text{ k}$$

ومركز ثقلها عند D.

وأخيراً، يبلغ وزن القاعدة المنفصلة نحو 225 كيب، ومركز ثقلها عند F.

ملخص القوى

يوضح الشكل القوى ومواضعها. ولأن $\Sigma F_y = 0$، يجب أن يكون رد الفعل الرأسي من الصخر الزيتي 1286 كيب، ويقع عند مركز مساحة القاعدة. وبافتراض أن رد الفعل الأفقي من الصخر يؤثر عند مركز المسقط الرأسي لنهاية القاعدة، يمكن قياس أذرع العزوم وحساب مقدار رد الفعل الأفقي من الشرط $\Sigma M_O = 0$، حيث O نقطة تقاطع محور الدعامة مع خط عمل رد الفعل الرأسي. وفي الواقع قد لا تمر خطوط عمل ردود الفعل الرأسية والأفقية بالنقاط المفترضة؛ فإذا تحرك محصل رد الفعل الرأسي إلى اليسار، صغر رد الفعل الأفقي وصغرت معه قوة الدعامة. لذلك لا يبين الشكل إلا تقريباً أولياً؛ اتجاه القوى وطبيعتها صحيحان، لكن خطوط عملها ومقاديرها قد تختلف بعض الشيء.

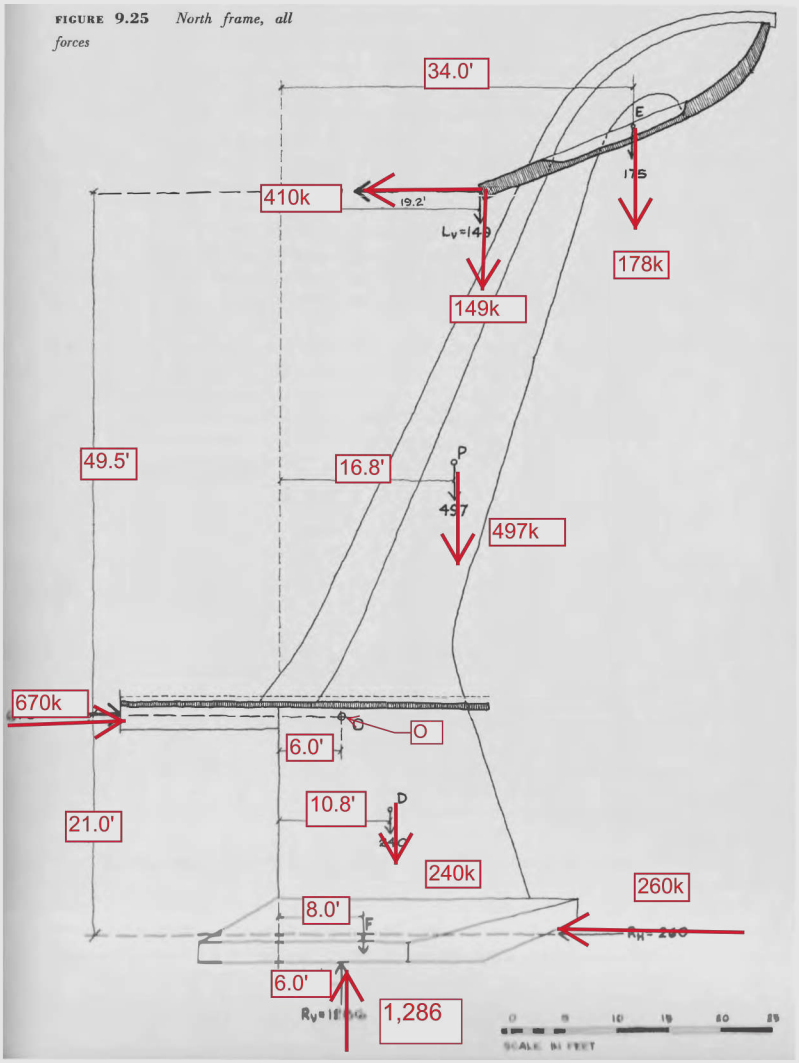
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر	القوة (كيب)	ذراع العزم (قدم)	العزم (كيب-قدم)
القاعدة F	225	2.0	450
الركيزة D	240	4.8	1,152
العمود المائل P	497	10.8	5,362
جائز الحافة E	175	28.0	4,900
المركبة الرأسية للسقف L_V	149	13.2	1,966
المجموع	$R_V = 1,286$		13,830
المركبة الأفقية للسقف L_H	410	49.5	19,295-

يجب أن يوازن عزم رد الفعل الأفقي R_H هذه المحصلة:

$$21R_H = 19,295 - 13,830 = 5,465 \Rightarrow R_H = 260 \text{ k}$$

ولأن $\Sigma F_H = 0$، يجب أن توفر الدعامة قوة أفقية مقدارها $260 + 410 = 670$ كيب.



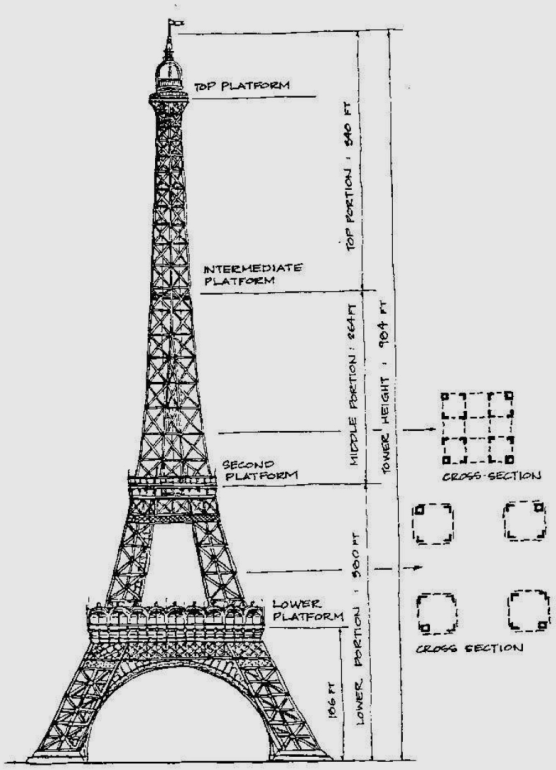
نلاحظ أن الميل الشديد للأعمدة، وهو ليس لغرض جمالي فحسب، لم يكن كافياً لجعل وزنها يوازن شد الكابلات ويلغي العزم عند قواعدها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38.2 مثال 38.2: برج إيفل

نم سبتقم يتآلا مسقلا Billington, 1983 Structural Studies.

المواد والهندسة



بُني البرج من الحديد المطاوع، وهو أقل كلفة من الفولاذ، وكانت خبرة إيفل بهذه المادة أوسع. المنشأة برج يتعرض أساساً لأحمال الجاذبية والرياح. وهي منشأة "خفيفة" نسبياً، ولذلك يكون الحمل الميت صغيراً مقارنة بحمل الرياح. ولمنع الانقلاب ينبغي أن تكون النسبة $\frac{M_{\text{الجاذبية}}}{M_{\text{الرياح}}}$ أكبر كثيراً من الواحد.

يمكن تحقيق ذلك بإحدى الوسائل الآتية:

1. زيادة الوزن الذاتي، كما في نصب واشنطن.
2. زيادة عرض القاعدة.
3. تصميم المسند لمقاومة الشد.
4. تطبيق شد لاحق على المسند.

ارتفاع البرج 984 قدماً وعرض قاعدته 328 قدماً. وكان اتساع القاعدة ضرورياً لتوفير الاستقرار الكافي تحت حمل الرياح.

يمكن افتراض أن شكل البرج قطع مكافئ. فإذا جعلنا المحور x على محور التناظر الرأسي، ومثّل y نصف العرض، فإن $y = 0$ عند $x = 984$، ونصف العرض عند $x = 0$ يساوي $328/2 = 164$. لذلك تُعطى معادلة نصف العرض بـ

$$y = \underbrace{164\left(\frac{984 - x}{984}\right)^2}_{av(x)^2}$$

نتذكر من التفاضل أنه إذا كان $y = v(x)$، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}ax^2 = 2ax$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم، لمسألتنا،

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{2(164)\frac{984-x}{984}}_{\frac{dy}{dv}}\underbrace{\left(-\frac{1}{984}\right)}_{\frac{dv}{dx}}$$
$$= \frac{984-x}{2,952}$$

وكذلك

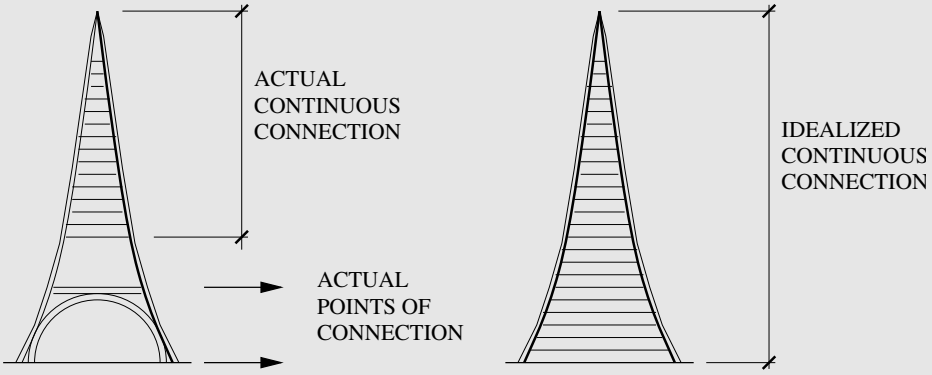
$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

حيث β الزاوية المقاسة من المحور x إلى مماس المنحنى.

يمكن الآن جدولة العرض والميل عند مناسيب مختلفة:

			العرض			
الموضع	الارتفاع	نصف العرض	المقدر	الفعلي	$\frac{dy}{dx}$	β
المسند	0	164	328		333.	^{o}18.4
المنصة الأولى	186	108	216	240	270.	^{o}15.1
المنصة الثانية	380	62	123	110	205.	^{o}11.6
المنصة الوسطى	644	20	40		115.	^{o}6.6
المنصة العليا	906	1	2		0264.	^{o}1.5
القمة	984	0	0		0.000	^{o}0

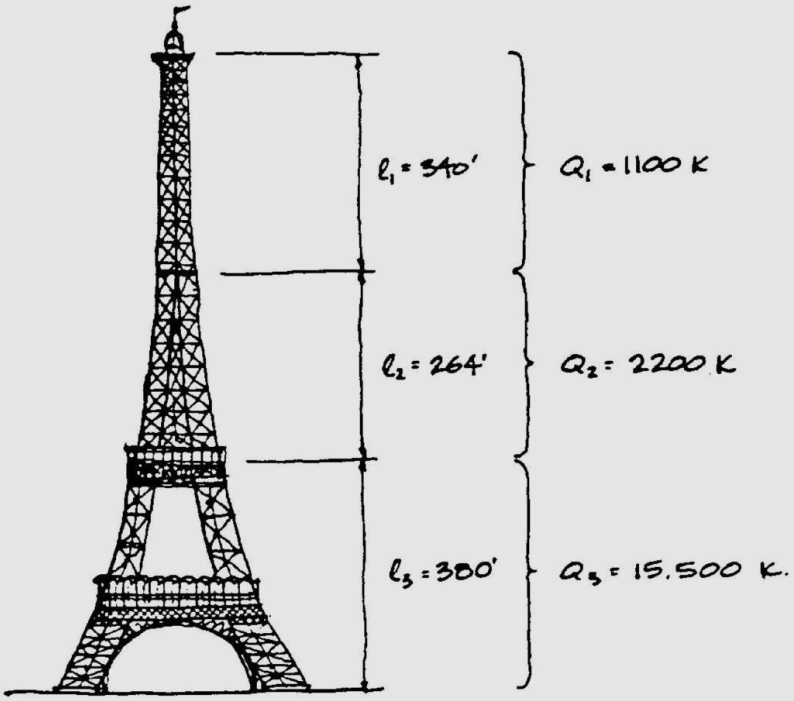
يحمل البرج أربعة مساند مائلة، مساحة مقطع كل منها $800\ \text{in}^2$. ويبين الشكل أدناه النموذج المثالي للبرج.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الأحمال

الوزن الكلي للبرج $18,800\ \text{k}$. ولا يتوزع الحمل الميت بانتظام، ويُقرب كما يأتي:



الموضع	الارتفاع	الوزن الميت
الأرض–المنصة الثانية	380 قدم	$15,500\ \text{k}$
المنصة الثانية–الوسطى	264 قدم	$2,200\ \text{k}$
المنصة الوسطى–القمة	340 قدم	$1,100\ \text{k}$
المجموع	984 قدم	$18,800\ \text{k}$

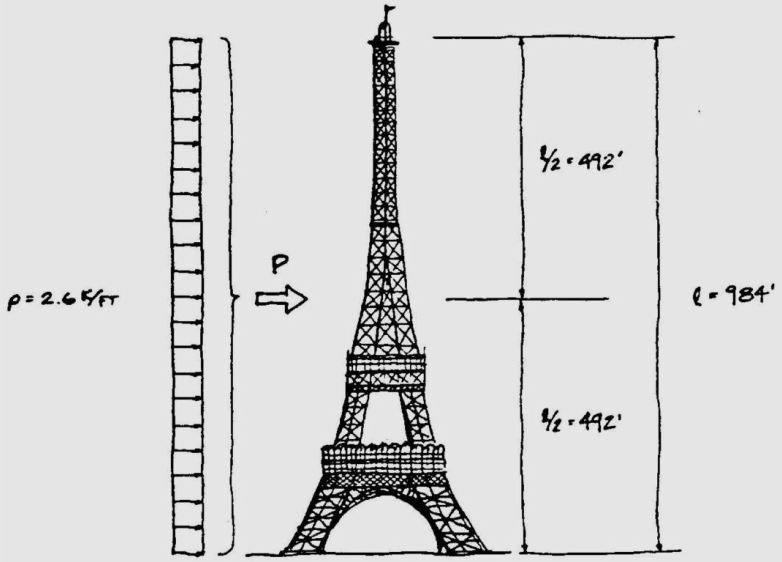
من العرض الفعلي للمنصتين السفليتين يمكن تقدير الأحمال الحية، إذ تكون أحمال المنصتين الوسطى والعليا مهملة بالمقارنة:

المنصة الأولى:	$(50)\ \text{psf}(240)^2\ \text{ft}^2 \frac{kip}{(1{,}000)\ \text{lbs}}$	$2,880\ \text{k}$
المنصة الثانية:	$(50)\ \text{psf}(110)^2\ \text{ft}^2 \frac{\text{k}}{(1{,}000)\ \text{lbs}}$	$600\ \text{k}$
المجموع:		$3,480\ \text{k}$

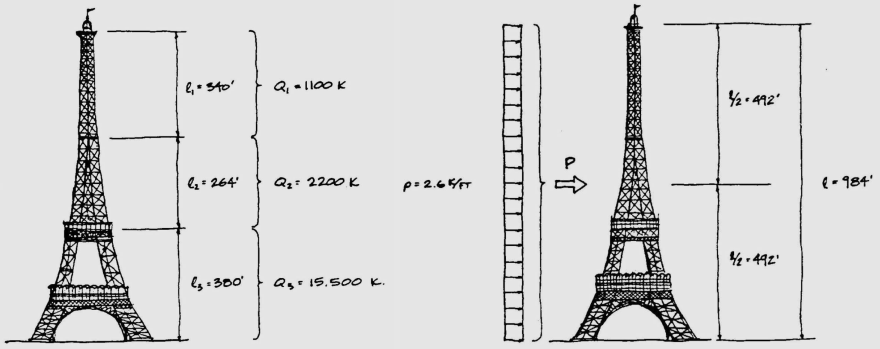
إذن الحمل الرأسي الكلي $P_{\text{رأسي}} = DL + LL = 18,800 + 3,480 = 22,280\ \text{k}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من المعروف أن ضغط الرياح يتوزع أيضاً وفق قطع مكافئ، وقيمته القصوى عند القمة، كما أن المساحة المعرضة للرياح تتغير قطعياً وتبلغ أقصاها عند القاعدة.



لذلك نبسط التحليل باعتبار قوة رياح مكافئة ناتجة من ضغط رياح ثابت لكل وحدة طول ومقطع عرضي ثابت. نفترض الضغط 2.6 كيب/قدم، فتكون قوة الرياح الجانبية

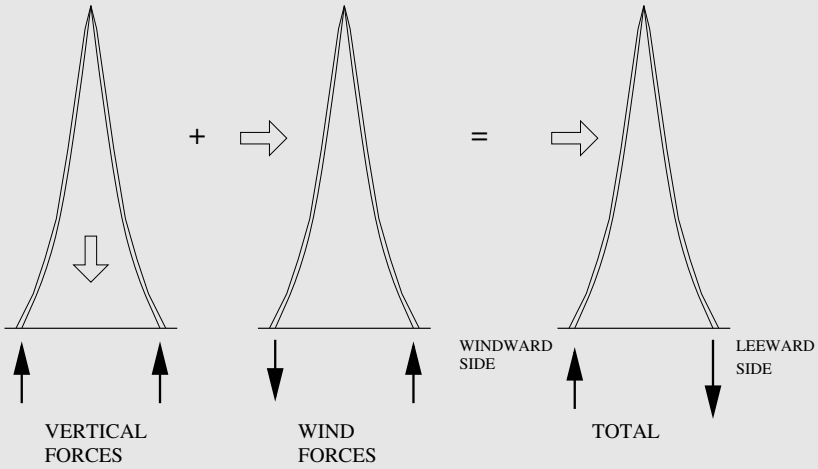


$$P_{\text{جانبي}} = (2.6)\ \text{k/ft}(984)\ \text{ft} = 2,560\ \text{k} \quad \text{وتؤثر عند} \frac{984}{2} = 492\ \text{ft}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ردود الأفعال

بتبسيط المنشأة ثلاثية الأبعاد ذات المساند الأربعة إلى منشأة ثنائية الأبعاد ذات مسندين، يسهل تحديد ردود الأفعال لهذه المنشأة المحددة استاتيكياً.



حمل الجاذبية

$$P_{\text{رأسي}} = 22,280 \downarrow$$
$$R^{\text{الجاذبية}}_{\text{رأسي}} = \frac{22,280}{2} = 11,140 \text{ k} \uparrow$$

الحمل الجانبي **العزم الجانبي** لدينا في الأساس جائز كابولي معرض لحمل منتظم. ويُعطى العزم عند مسافة x من مسند الكابولي المعرض لضغط منتظم p بـ

$$M_{\text{جانبي}} = \underbrace{p(L-x)}_{\text{القوة}} \underbrace{\frac{L-x}{2}}_{\text{ذراع العزم}} = p\frac{(L-x)^2}{2}$$

ومن ثم يكون العزم الجانبي الناتج من الرياح قطعياً. وعند القاعدة، حيث $x = 0$، يساوي العزم الأقصى

$$M_{\text{جانبي}} = p\frac{(L-x)^2}{2} = (2.6)\ \text{k/ft}\frac{(984-0)^2}{2}\ \text{ft}^2 = 1,260,000 \text{ k.ft} \hookleftarrow$$

نلاحظ أن مخطط العزم قطع مكافئ أيضاً مثل شكل البرج نفسه. وليس ذلك مصادفة؛ فالمنشآت القريبة من المثالية تتخذ شكلاً يقارب مخطط عزومها، مثل تغير عمق الجسور المستمرة طويلة البحور.

لتحديد القوى الداخلية الناتجة من عزم الرياح الجانبي، ومع وجود مسندين أحدهما تحت الشد والآخر تحت الضغط، نستعمل

$$R^{\text{الرياح}}_{\text{رأسي}} = \pm\frac{M}{d} = \frac{1,260,000 \text{ k.ft}}{328 \text{ ft}} = \pm 3,850 \text{ k} \uparrow\downarrow$$

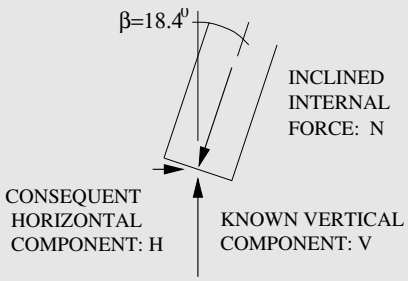
القوى الجانبية تقاومها مجموعتا المساند. وبالتناظر تتوزع القوة الجانبية بالتساوي بينهما، فتساوي

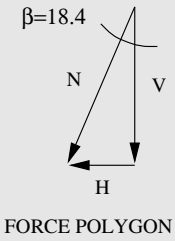
$$R^{\text{الرياح}}_{\text{جانبي}} = \frac{(2,560) \text{ k}}{2} = 1,280 \text{ k} \leftarrow$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القوى الداخلية

نحدد القوى الداخلية أولاً عند القاعدة. نبدأ بـ**أحمال الجاذبية** الناتجة من الحملين الميت والحي.





FORCE POLYGON

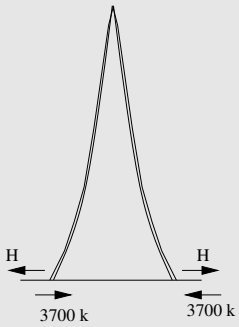
$$\cos\beta = \frac{V}{N} \Rightarrow \qquad N = \frac{V}{\cos\beta}$$

$$N = \frac{11,140\ \text{k}}{\cos 18.4^o} \qquad = 11,730\ \text{k}$$

$$\tan\beta = \frac{H}{V} \Rightarrow \qquad H = V\tan\beta$$

$$H = 11,140\ \text{k}(\tan 18.4^o) \qquad = 3,700\ \text{k}$$

هذه هي القوى الأفقية التي يجب أن تقاومها الأساسات.



لأن الحمل الرأسي يتناقص مع الارتفاع، تتناقص معه القوة المحورية.

عند المنصة الثانية يساوي الحمل الرأسي الكلي $Q = 1,100 + 2,200 = 3,300$ k، وتساوي الزاوية عند ذلك الارتفاع 11.6^o، لذلك تكون القوة المحورية لكل زوج من الأعمدة

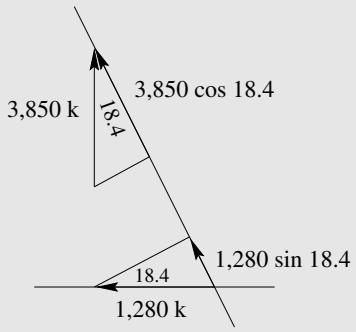
$$N_{\text{رأسي}} = \frac{\frac{3,300\ \text{k}}{2}}{\cos 11.6^o} = 1,685\ \text{k}$$

$$H_{\text{رأسي}} = \frac{3,300\ \text{k}}{2}(\tan 11.6^o) = 339\ \text{k}$$

وهذه أصغر بنحو سبع مرات من القوة المحورية عند القاعدة، مما يدفع المصمم، عند ثبات المقاومة المحورية، إلى تقليل المقطع أو جعله متناقصاً.

تقاوم القوى المحورية في المنصة الثانية نفسها القوة الأفقية. **حمل الرياح:** بعد تحديد القوتين الرأسية والأفقية الناتجتين من الرياح عند كل زوج من المساند، نحدد مركبتيهما المحوريتين على امتداد الساق المائلة:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



$$N_c = -R^{\text{الرياح}}_{\text{رأسي}} \cos\beta - R^{\text{الرياح}}_{\text{جانبي}} \sin\beta = -(3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) - (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= -4,050\ \text{k}\ \text{جهة ظل الرياح}$$
$$N_t = -R^{\text{الرياح}}_{\text{رأسي}} \cos\beta + R^{\text{الرياح}}_{\text{جانبي}} \sin\beta = (3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) + (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= 4,050\ \text{جهة مهب الرياح}\ \text{kip}$$

الإجهادات الداخلية

يمكن الآن تحديد القوى الكلية الناتجة من أحمال الجاذبية والأحمال الجانبية معاً:

$$N_L^{\text{الكلي}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{الجاذبية}} \underbrace{-(4,050)\ \text{k}}_{\text{جانبي}} = -15,780\ \text{كيب، جهة ظل الرياح}$$

$$N_W^{\text{الكلي}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{الجاذبية}} \underbrace{+(4,050)\ \text{k}}_{\text{جانبي}} = -7,630\ \text{كيب، جهة مهب الرياح}$$

نلاحظ أن جهة مهب الرياح تظل تحت الضغط حتى مع تأثير الرياح. وفي النموذج المثالي لهندسة البرج، مساحة كل زوج من الأعمدة المبسطة $1,600\ \text{in}^2$، ومن ثم يحدد الإجهاد الأقصى من

$$\sigma_{comp} = \frac{N_L^T}{A} = \frac{-15,780\ \text{k}}{1,600\ \text{in}^2} = -9.9\ \text{ksi}$$

مقاومة الحديد المطاوع 45 كيلورطلاً لكل بوصة مربعة، ولذلك يكون معامل الأمان

$$\text{معامل الأمان} = \frac{\text{الإجهاد الأقصى}}{\text{الإجهاد الفعلي}} = \frac{45\ \text{ksi}}{9.9\ \text{ksi}} = 4.5$$

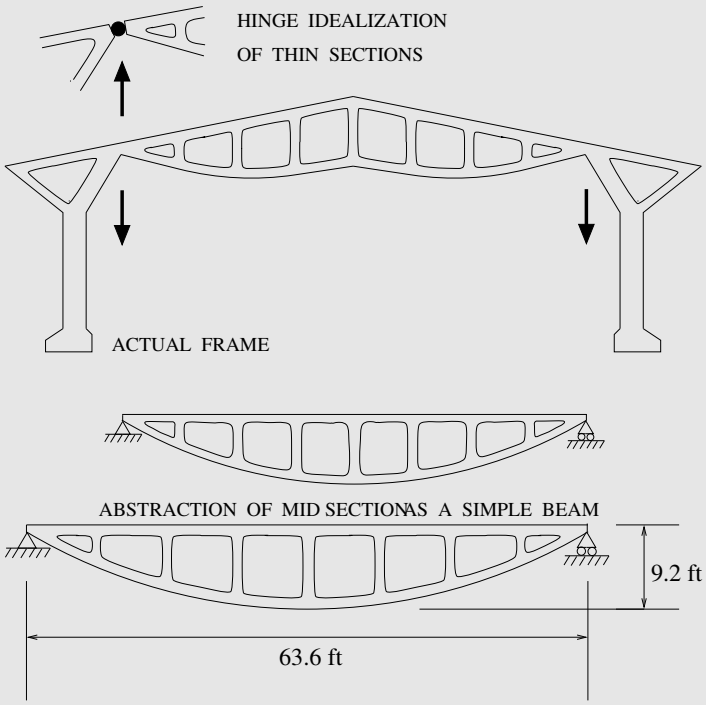
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38.3 مثال 38.3: مخازن ماجازيني جنرالي

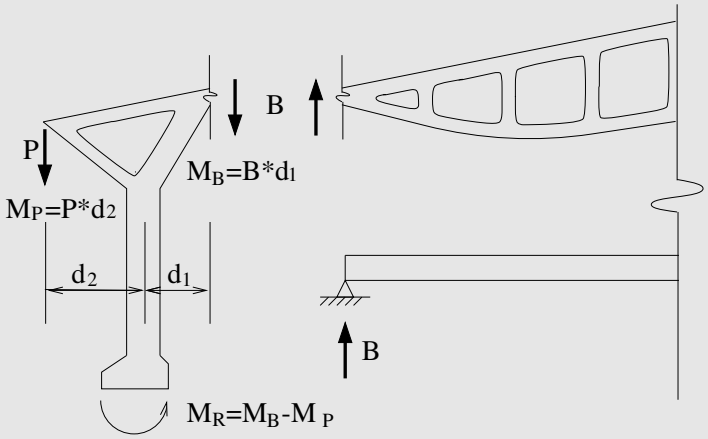
Billington, 1983 Structural Studies. نم سبتقم يتآلا مسقلا

الهندسة

يمثل هذا المخزن، الذي بناه مايّار في كياسو عام 1924، مثالاً جيداً على التزاوج بين الجمال والهندسة. وليست أبرز سمات ماجازيني جنرالي المنشأة نفسها، بل شكل إطاراتها الحاملة الداخلية.



يمكن تمثيل الإطار بجائز بسيط الاستناد معلق من مسندين عموديين كابوليين. ومع أن الجائز نفسه نموذج إنشائي بسيط، فقد صُمم البروز بحيث يقلل العزم الصافي المنقول إلى المساند، أي الأساسات.



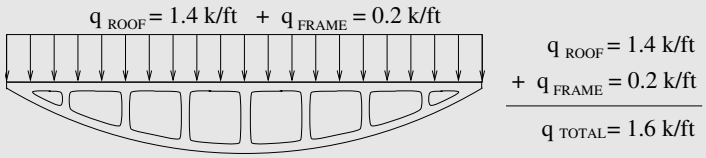
الأحمال

ينشأ الحمل المؤثر في الإطار من وزني بلاطة السقف والإطار نفسه. وبما أن المسافة بين الإطارات المتجاورة 14.7 قدماً، وحمل السقف 98 psf ، والوزن الكلي للإطار 13.6 كيب، يصبح الحمل المنتظم الكلي:

$$q_{roof} = (98)\ \text{psf}(14.7)\ \text{ft} = 1.4\ \text{k/ft}$$

$$q_{frame} = \frac{(13.6)\ \text{k}}{(63.6)\ \text{ft}} = 0.2\ \text{k/ft}$$

$$q_{total} = 1.4 + 0.2 = 1.6\ \text{k/ft}$$



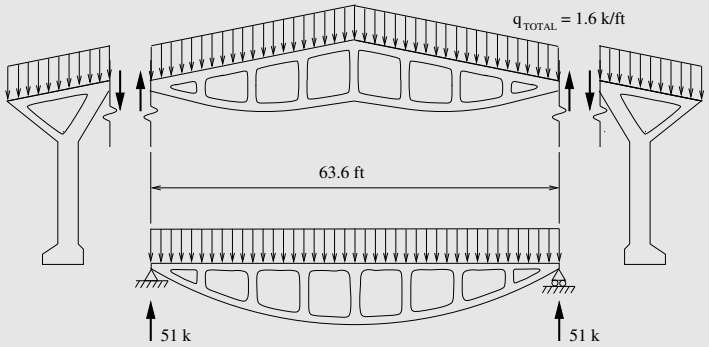
ردود الأفعال

تُحدد ردود أفعال الجائز أولاً بالاستفادة من التناظر.

$$W = (1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft} = 102\ \text{k}$$

$$R = \frac{W}{2} = \frac{102}{2} = 51\ \text{k}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

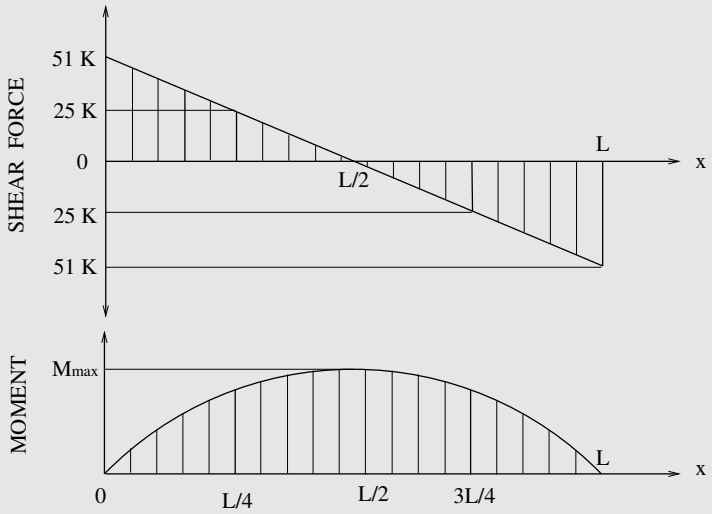


نلاحظ أن قوى القص الداخلية توفر ردود الأفعال هذه.

القوى

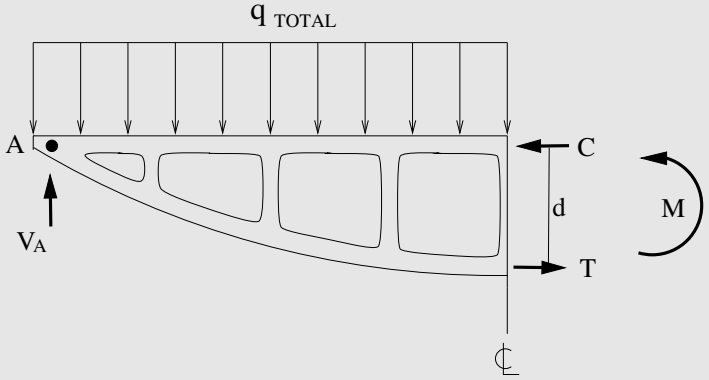
القوى الداخلية الرئيسة هي القص والعزوم، ويمكن تحديدها بسهولة لجائز بسيط الاستناد محمل بانتظام. يتغير القص خطياً من 51 كيب إلى -51 كيب ويمر بالصفر عند المنتصف، أما مخطط العزم فقطعي وتبلغ قيمته القصوى عند المنتصف:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft}^2}{8} = 808\ \text{k.ft}$$



يجب أن يقاوم العزم الخارجي عند منتصف البحر عزم داخلي مساوٍ له ومعاكس. ويتحقق ذلك بقوة ضغط في الألياف العليا وقوة شد في السفلى. وهكذا تكون القوة المحورية المحصلة صفراً، مع وجود مزدوجة داخلية صافية.

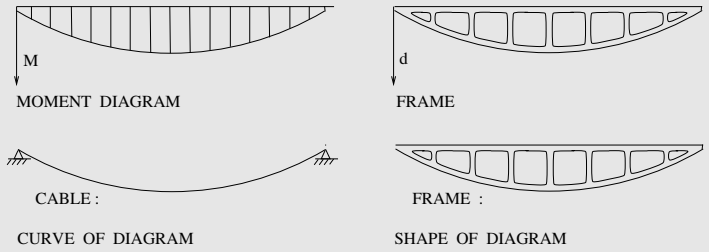
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



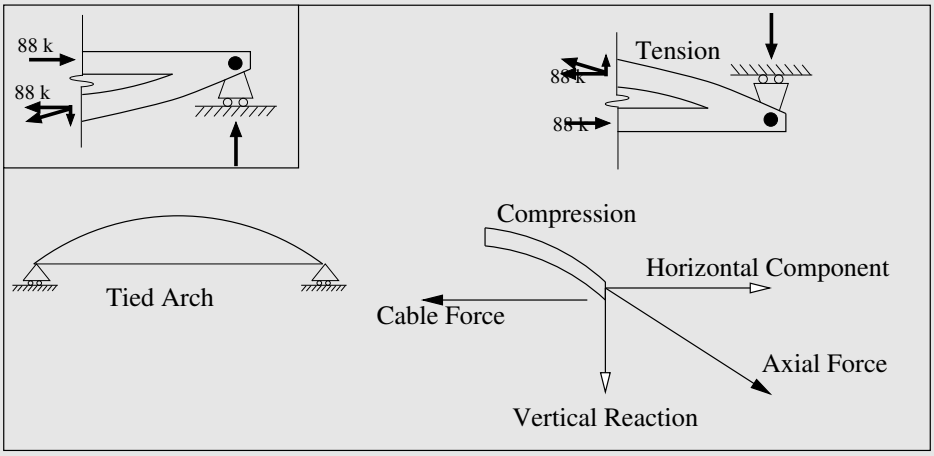
$$M_{ext} = Cd \Rightarrow C = \frac{M_{ext}}{d}$$

$$T = C = \frac{(808)\ \text{k.ft}}{(9.2)\ \text{ft}} = \pm 88\ \text{k}$$

لأن شكل الإطار، ومن ثم $d(x)$، قطع مكافئ تقريباً، ولأن العزم قطعي أيضاً، تكون القوى المحورية ثابتة على طول الإطار كله.



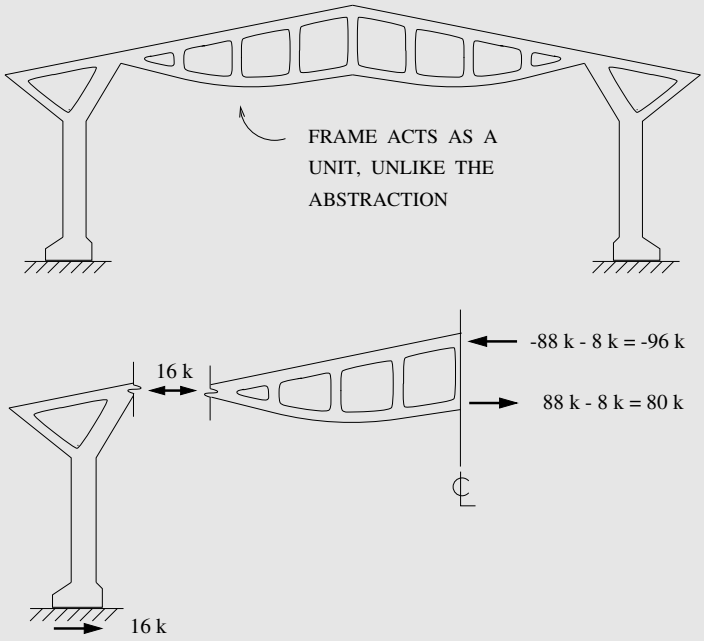
القوة المحورية عند نهاية الجائز غير متوازنة، ولذلك يجب نقل قوة الضغط البالغة 88 كيب إلى الوتر السفلي.



يماثل ذلك القوى التي ينقلها القوس المربوط إلى المسند.

أظهر تحليل حاسوبي دقيق أن المساند تسهم بقوة ضغط تقارب 8 كيب، وينبغي إضافتها إلى القيم المركزية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الإجهادات الداخلية

إجهاد الضغط الصافي لوتر علوي مساحة مقطعه 75 in^2 يساوي

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{(88)\ \text{k}}{(75)\ \text{in}^2} = 1.17\ \text{ksi}$$

وهو أقل كثيراً من إجهاد الضغط المسموح للخرسانة، الذي يقارب 1.35 كيلورطل لكل بوصة مربعة. وإذا صُب الإطار مع السقف صباً متكاملاً، كان هذا الإجهاد أقل أيضاً.

38.4 مثال 38.4: جسر جورج واشنطن

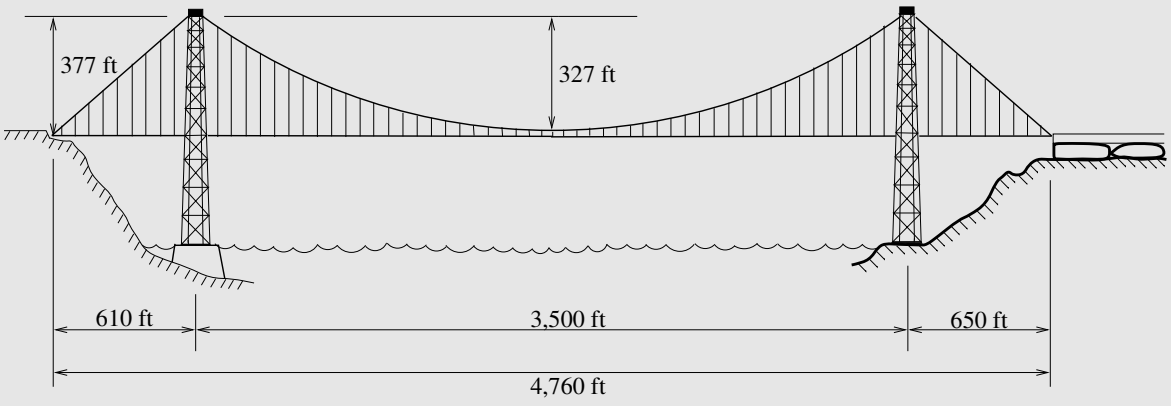
نم سبتقم يتآلا مسقلا Billington, 1983 Structural Studies.

جسر جورج واشنطن جسر معلق يعبر نهر هدسون من مدينة نيويورك إلى نيوجيرسي. اكتمل عام 1931 ببحر مركزي طوله 3,500 قدم، وكان آنذاك أطول بحر في العالم. صممه أو. هـ. أمان، المهاجر من سويسرا. وفي عام 1962 زيدت صلابة سطحه بإضافة طابق سفلي.

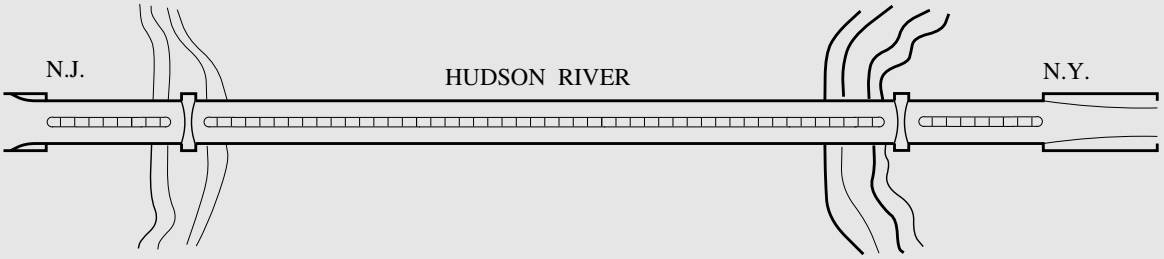
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الهندسة

يبين الشكل أدناه المسقط والمنظر الطولي للجسر.



ELEVATION



PLAN

للتبسيط نفترض في التحليل أن طول كل من بحري الاقتراب 650 قدماً.

يوجد على كل جانب من الجسر كابلان قطر كل منهما ثلاثة أقدام. المسافة بين مركزي الكابلين في كل زوج 9 أقدام، وبين الزوجين 106 أقدام. وسنفترض عرضاً للبحر مقداره 100 قدم.

تُمثل الكابلات على أنها مرتكزة على بكرات عند قمم الأبراج، ولذلك تتساوى المركبتان الأفقيتان للقوة على جانبي الكابل، بينما تتجمع المركبتان الرأسيتان.

تحمل الكابلات سطح الطريق المعلق منها بقضبان تعليق. ويتكون كل كابل من 26,474 سلكاً فولاذياً قطر كل منها 0.196 بوصة. وتمتد الكابلات باستمرار فوق مساند الأبراج وتثبت بإحكام في الضفتين بكتل خرسانية ضخمة هي المراسي.

لأن طول الكابلات أكبر بكثير من سماكتها، أي إن $\frac{I}{L}$ صغير، يمكن تمثيلها كعناصر تامة المرونة لا تقاوم القص أو الانحناء، لكنها ذات مقاومة محورية عالية.

يبلغ ارتفاع الأبراج 578 قدماً وترتكز على قيسونات خرسانية في النهر. وبسبب افتراض المساند البكرية للكابلات، لا تتعرض الأبراج إلا لقوى محورية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

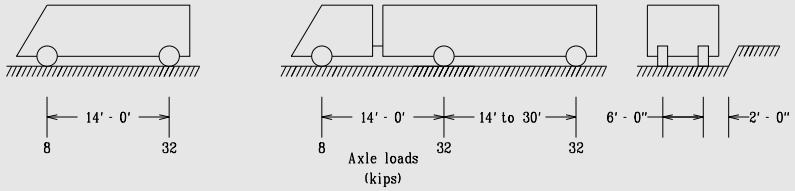
الأحمال

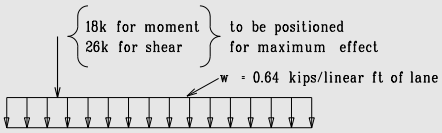
يتكون الحمل الميت من وزني السطح والكابلات، ويقدر بـ390 و400 رطل/قدم^2 للبحر المركزي والبحور الجانبية، على الترتيب. وبافتراض عرض متوسط 100 قدم، يكافئ ذلك

$$DL = (390)\ \text{psf}(100)\ \text{ft}\frac{\text{k}}{(1,000)\ \text{lbs}} = 39\ \text{k/ft}$$

للبحر الرئيس و40 k/ft للبحور الجانبية.

تحدد الجمعية الأمريكية لمسؤولي الطرق والنقل في الولايات، AASHTO، أحمال تصميم جسور الطرق. وكثيراً ما تستعمل شاحنة HS-20 لتصميم جسور الطرق الرئيسة. ويجب استعمال شاحنة التصميم بأحمال محاورها ومسافاتها المحددة **أو** الحمل المنتظم والحمل المركز المكافئين، مع وضع التحميل بحيث يولد الإجهادات القصوى.





H20 and HS20 Lane

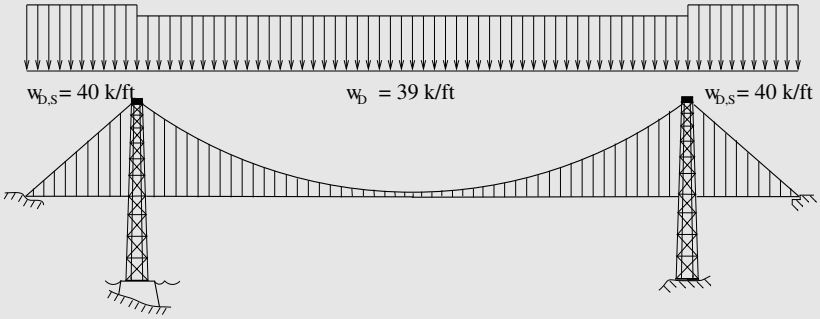
بوجود سطحين، نقدر أن العدد الكلي 12 حارة، ومن ثم

$$LL = (12)\text{حارة}(.64)\ \text{k/ ft/حارة} = 7.68\ \text{k/ft} \approx 8\ \text{k/ft}$$

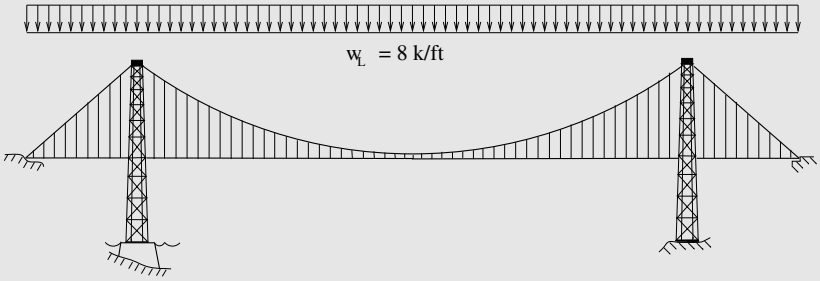
لا نأخذ أحمال الزلازل أو الرياح في هذا التحليل.

الحملان الميت والحي النهائيان هما $TL = 39 + 8 = 47$ k/ft

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



DEAD LOADS



قوى الكابلات

يُحدد الدفع H، أي المركبة الأفقية لقوة الكابل، من المعادلة 30.11:

$$\begin{aligned} H &= \frac{wL_{cs}^2}{8h} \\ &= \frac{(47)\ \text{k/ft}(3,500)^2\ \text{ft}^2}{(8)(327)\ \text{ft}} \\ &= 220,000\ \text{k} \end{aligned}$$

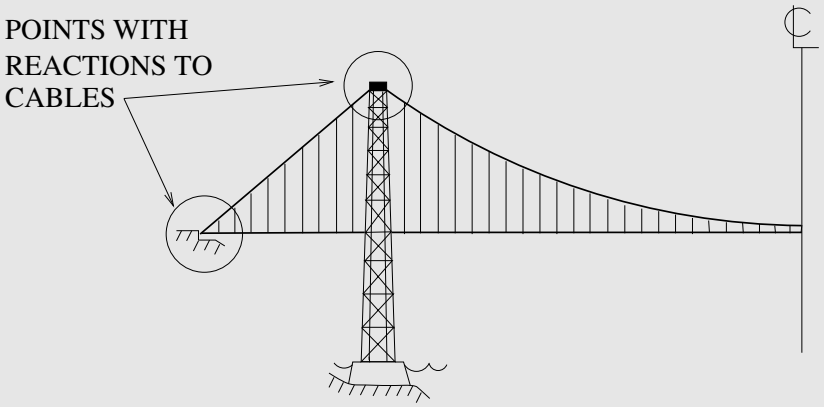
ومن المعادلة 30.44 يكون الشد الأقصى

$$\begin{aligned} r &= \frac{h}{L_{cs}} = \frac{327}{3,500} = 0.0934 \\ T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (220,000)\ \text{k}\sqrt{1+(16)(0.0934)^2} \\ &= (220,000)\ \text{k}(1.0675) = 235,000\ \text{k} \end{aligned}$$

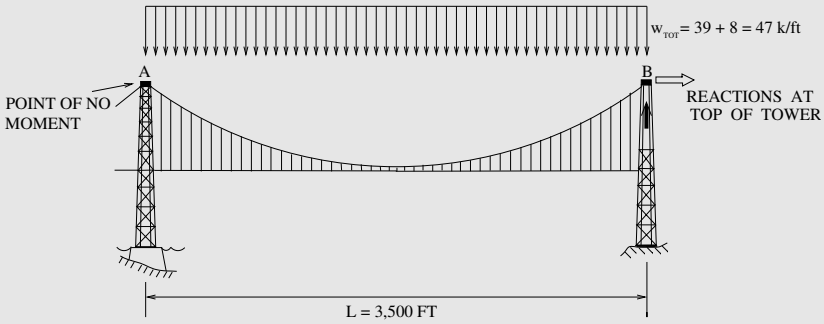
ردود الأفعال

تظهر ردود أفعال الكابل أدناه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



القوة الرأسية في الأعمدة الناتجة من البحر المركزي هي ببساطة رد فعل المسند.



$$V_{\text{cs}} = \frac{1}{2} w L_{\text{cs}} = \frac{1}{2}(47)\ \text{k/ft}(3,500)\ \text{ft} = 82,250\ \text{k}$$

يمكن التحقق من ذلك بحساب المحصلة المتجهة لـH وV، التي ينبغي أن تساوي $T_{\max}$:

$$\sqrt{V_{\text{cs}}^2 + H^2} = \sqrt{(82,250)^2 + (220,000)^2} = 235,000\ \text{k} \checkmark$$

على البحور الجانبية يكون الحمل الكلي $TL = 40 + 8 = 48$ k/ft. ونحدد رد الفعل الرأسي V_{SS} بأخذ مجموع العزوم حول المرساة اليسرى:

$$\Sigma M_D = 0; \circlearrowleft +; h_{\text{ss}} H + (w_{\text{ss}} L_{\text{ss}}) \frac{L_{\text{ss}}}{2} - V_{\text{ss}} L_{\text{ss}} = 0$$

$$= (377)\ \text{ft}(220,000)\ \text{k} + (48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} \frac{(650)\ \text{ft}}{2} - 650 V_{\text{ss}} = 0$$

$$V_{\text{ss}} = 143,200\ \text{k}$$

ملاحظة: استعملنا الاتزان لتحديد المركبة الرأسية لقوة الكابل. وكان من الخطأ إيجاد V_{ss} من $V_{ss} = 220,000 \frac{377}{650}$ كما في المثال السابق، لأن الكابل هنا محمل ولم يعد مستقيماً. ويلزم تحديد شكل الكابل ومماسه عند المسند، بدءاً من المعادلة 30.7:

$$-Hy = \frac{1}{2} w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$-y = \frac{w}{H} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{H} x + \frac{C_2}{H}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عند $x = 0$ يكون $y = 0$، ومن ثم $C_2 = 0$؛ وعند $x = 650$ يكون $y = -377$، ومع $H = 220,000\ \text{k}$ و$w = 48$:

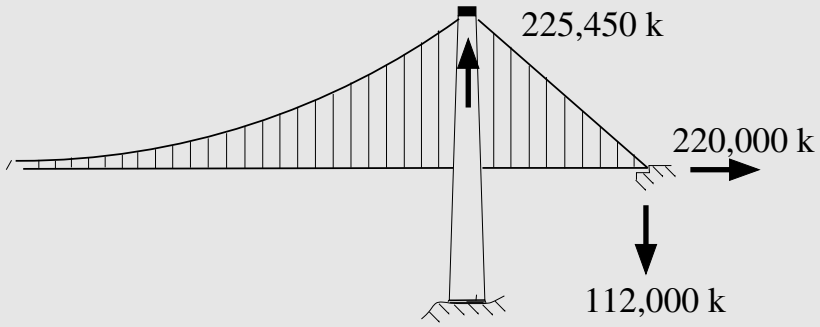
$$\begin{aligned}
y &= -\frac{(48)\ \text{k}}{\text{ft}(220,000)\ \text{k}}x^2 - \frac{C_1}{(220,000)\ \text{k}}x \\
&= -1.091 \times 10^{-4}x^2 - 4.545 \times 10^{-6}C_1 x \\
y\big|_{x=650} &= -377 = -1.091 \times 10^{-4}(650)^2 - 4.545 \times 10^{-6}C_1(650) \\
C_1 &= 112,000 \\
y &= -1.091 \times 10^{-4}x^2 - 0.501x \\
\frac{dy}{dx} &= -2.182 \times 10^{-4}x - 0.501 \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=650} &= -0.1418 - 0.501 = -0.6428 = \frac{V}{H} \\
V &= (220,000)(0.6428) = 141,423\ \text{k}
\end{aligned}$$

ولا يختلف ذلك إلا بنسبة 1%. ومن ثم تكون القوة المحورية الكلية المؤثرة في العمود

$$V = V_{\text{cs}} + V_{\text{ss}} = (82,250)\ \text{k} + (143,200)\ \text{k} = 225,450\ \text{k}$$

يُستخرج رد الفعل الرأسي عند المرساة من مجموع القوى في اتجاه y:

$$\begin{aligned}
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0;\ (w_{\text{ss}}L_{\text{ss}}) + V_{\text{ss}} + R_{\text{anchor}} &= 0 \\
-(48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} + (143,200)\ \text{k} + R_{\text{anchor}} &= 0 \\
R_{\text{anchor}} &= 112,000\ \text{k} \downarrow
\end{aligned}$$



تُحدد القوة المحورية في الكابل الجانبي من المحصلة المتجهة لردي الفعل الأفقي والرأسي.

$$\begin{aligned}
T^{\text{ss}}_{\text{anchor}} &= \sqrt{R^2_{\text{anchor}} + H^2} = \sqrt{(112,000)^2 + (220,000)^2} = 247,000\ \text{k} \\
T^{\text{ss}}_{\text{tower}} &= \sqrt{V^2_{\text{ss}} + H^2} = \sqrt{(143,200)^2 + (220,000)^2} = 262,500\ \text{k}
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأخيراً تُحدد إجهادات الكابل:

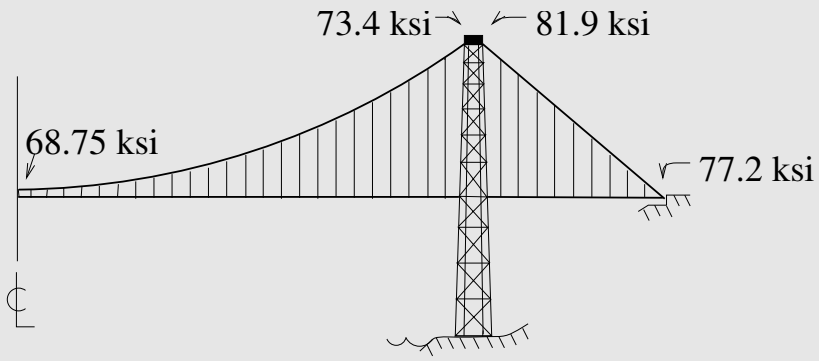
$$A_{wire} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(3.14)(0.196)^2}{4} = 0.03017 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = (4) \text{ كابلات } (26,474) \text{ سلكاً/كابل } (0.03017) \text{ in}^2/\text{سلك} = 3,200 \text{ in}^2$$

$$\sigma \text{ البحر المركزي} = \frac{H}{A} = \frac{(220,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 68.75 \text{ ksi}$$

$$\sigma^{ss}_{tower} \text{ برج البحر الجانبي} = \frac{T^{ss}_{tower}}{A} = \frac{(262,500) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 82 \text{ ksi}$$

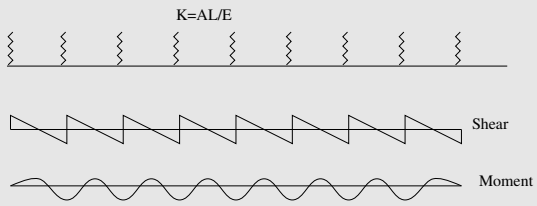
$$\sigma^{ss}_{tower} \text{ مرساة البحر الجانبي} = \frac{T^{ss}_{anchor}}{A} = \frac{(247,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 77.2 \text{ ksi}$$



إذا ثُبتت الكابلات في كتلة خرسانية، فينبغي ألا يقل حجمها عن $V = \frac{(112{,}000) \text{ k}(1{,}000) \text{ lbs/ k}}{150 \text{ lbs/ft}^3} = 747,000 \text{ ft}^3$، أي مكعب طول ضلعه نحو 91 قدماً.

لجميع الأغراض العملية، يمكن معاملة السطح كجائز مستمر تحمله نوابض مرنة صلابتها $K = AL/E$، حيث L طول كابل التعليق. وغالباً ما يمثل ذلك بجائز على أساس مرن، وتظهر أدناه مخططات القص والعزم لهذا النموذج.



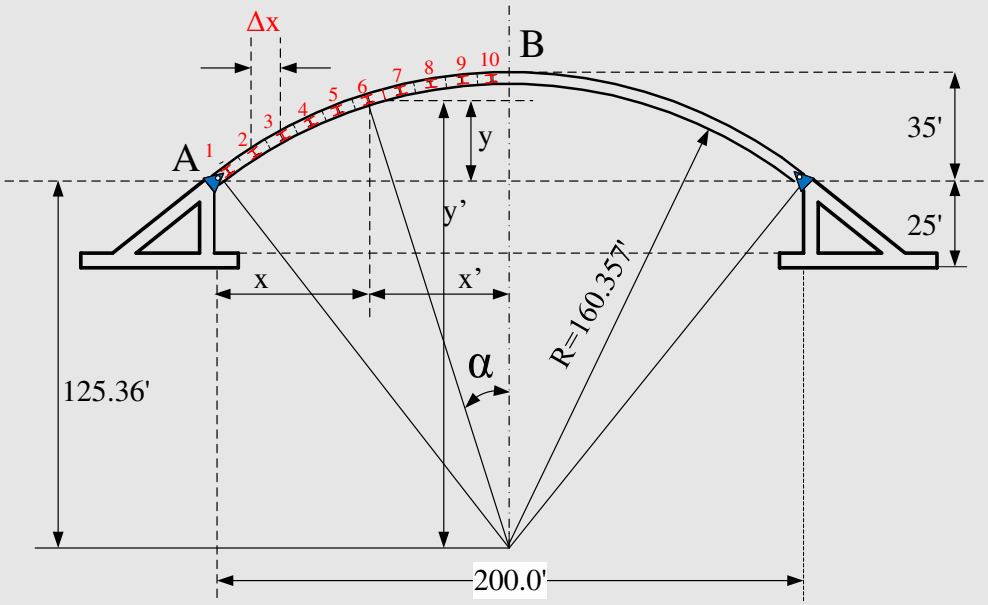


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38.5 مثال 38.5: تصميم قوس ذي مفصلين

نم سبتقم يتآلا مسقلا Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

نريد تصميم ضلع قوس ذي مفصلين من الفولاذ الملحوم المصمت لحظيرة. نفترض $F_y = 30$ كيلورطلاً لكل بوصة مربعة، ويتغير عزم عطالة الضلع حسب الحاجة. البحر بين مركزي المفصلين 200 قدم، وتباعد الأضلاع 35 قدماً وارتفاع القوس 35 قدماً. نفترض أن وزن سطح السقف والمدادات والضلع 25 رطلاً/قدم^2 من سطح السقف، وأن حمل الثلج 40 رطلاً/قدم^2. ويوزع عشرون مداداً بالتساوي على الضلع.



الهندسة

نأخذ محور الضلع قوساً دائرياً، ونصف قطر الدائرة هو

$$(R-35)^2 + (100)^2 = R^2 \Rightarrow R = 160.357 \text{ ft}$$

طول القوس هو

$$\theta = \arcsin \frac{100}{160.357} = 38.580^\circ \Rightarrow S = 160.357 \times \frac{\pi}{180} 38.580 = 107.98 \text{ ft}$$

للتحليل نقسم القوس AB إلى عشرة أجزاء طول كل منها

$$\Delta S = \frac{S}{10} = \frac{107.980}{10} = 10.798 \text{ ft}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم ينقل المداد عند مركز كل جزء حملاً مركزاً إلى الضلع.

لما كان مجموع الحمل الميت وحمل الثلج 65 رطلاً/قدم^2 من سطح السقف، فإن قيمة كل قوة مركزة هي

$$\Delta P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k}$$

(حيث يمثل 35 تباعد الأضلاع).

تظهر أدناه الحسابات اللازمة لإيجاد إحداثيات مراكز الأجزاء المختلفة نسبة إلى المفصل A، كما تظهر قيم Δx، أي الإسقاط الأفقي للمسافة بين مراكز الأجزاء.

الجزء	α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (قدم)	$y' = R\cos\alpha$ (قدم)	$x = 100 - x'$ (قدم)	$y = y' - 125.36$ (قدم)	Δx (قدم)
A	$38°34'49''$	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	$36°39'05''$	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	$32°47'36''$	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	$28°56'07''$	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	$25°04'38''$	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	$21°13'09''$	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	$17°21'40''$	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	$13°30'11''$	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	$09°38'42''$	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	$05°47'13''$	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	$01°55'44''$	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
القمة					160.36	100.000	35.00	5.399

الجدول 1

التصميم الأولي

إذا كانت الخبرة محدودة وتعذر على المهندس اختيار افتراضات أولية لتغير المقطع على طول الضلع، فيوصى بأن يقوم التحليل الأول على عزم عطالة ثابت. وكثيراً ما يجد المهندس الخبير أيضاً أن هذا أفضل إجراء.

بعد تحديد H يمكن حساب العزوم وقوى الدفع المحورية في الضلع كله، ثم تصميم مساحات المقاطع لمقاومتها. وبعد اختيار ضلع جديد متغير المقطع، تُحسب قيمة جديدة لـH وقيم منقحة للعزوم والدفع المحوري، وتُراجع الإجهادات وتكرر العملية عند الحاجة. سنتبع هذا الإجراء هنا.

الدفع الأفقي

بتطبيق طريقة المرونة، نحرر رد الفعل الأفقي عند A:

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0$$

ثم نحسب الإزاحات بالعمل الافتراضي. وفي هذا الجزء المنحني نستبدل

$$\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \qquad \text{بـ} \sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta S$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فتصبح العبارة

$$\sum \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\Delta s + H_A \sum \delta\overline{M}\frac{\overline{M}}{EI}\Delta S = 0$$

ولأن E وΔS ثابتان، وعزم العطالة ثابت في التحليل الأول، تكون العبارة النهائية لـH_A:

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}M}$$

تظهر أدناه الحسابات اللازمة للتقدير الأول لـH_A.

الجزء	(2) x (قدم)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (قدم · كيب)	(4) القص يميناً (كيب)	(5) Δx (قدم)	(6) M الزيادة (قدم · كيب)	(7) M جائز بسيط (قدم·كيب)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{M}M$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
القمة	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

الجدول 2

حيث

$$R_A = 100\Delta P = (100)(24.565) = 245.650$$
$$\delta\overline{M} = (1)(y) = 3.29$$
$$245.65 - 24.565 = 221.085$$
$$(245.65)(4.275) = 1,050$$
$$1,050 + 1,962 \simeq 3,010$$

ومنها

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}M} = -\frac{2 \times 2,158,100}{2 \times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{38.1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العزوم

تُحسب أدناه العزوم عند مراكز أجزاء الضلع باستعمال القيمة التقريبية المحددة لـH_A. ويُعد العزم موجباً إذا كان يميل إلى إحداث ضغط على السطح العلوي للضلع.

الجزء	y (ft)	M جائز بسيط (k · ft)	$H_A \cdot y$ (k · ft)	M الكلي عند الجزء (k · ft)
A	0			
1	3.29	1,050	1,100-	50-
2	9.44	3,010	3,150-	140-
3	14.98	4,830	5,000-	170-
4	19.88	6,490	6,640-	150-
5	24.13	7,950	8,060-	110-
6	27.69	9,200	9,250-	50-
7	30.57	10,220	10,210-	10+
8	32.73	11,000	10,930-	70+
9	34.18	11,530	11,420-	110+
10	34.19	11,790	11,660-	130+
القمة	35.00	11,790	11,690-	100+

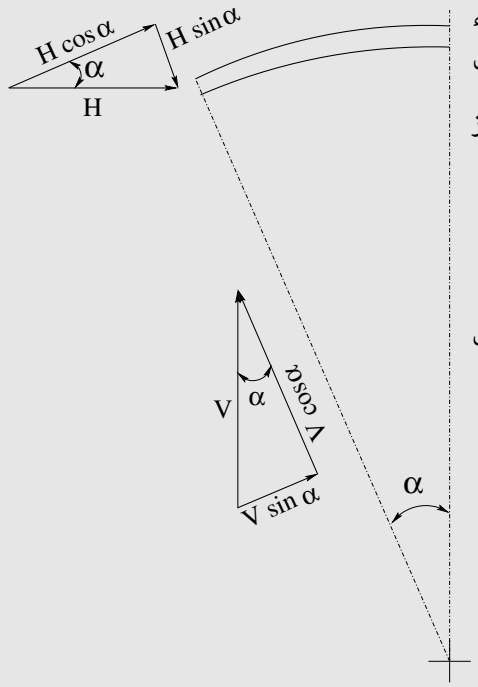
الجدول 3

حيث

$$-333.97(9.44) \simeq -3,150$$
$$3,010 - 3,150 = -140$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القوى العمودية وقوى القص



يجب حساب الدفع N العمودي على المقطع عند مركز كل جزء قبل تحديد متطلبات المقطع. ونحسب أيضاً قيم S، أي القص الكلي على المقطع، عند مركز كل جزء.
تُستخرج N وS بجمع مركبات H والقص الرأسي V عند مركز كل جزء كما هو مبين أدناه. ومن حساب المثلثات:

$$S = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$N = V\sin\alpha + G\cos\alpha$$

تُحسب قيم S وN تالياً. وقد أُدرجت قيم S لتأكيد أن قوى القص صغيرة عادةً في ضلع القوس.

الجزء	V (كيب)	$V\cos\alpha$	$H\sin\alpha$	S =(كيب)	$V\sin\alpha$	$+H\cos\alpha$	N = (كيب)
A	245.6	192	208-	16- =	153	261 +	414 =
1	221.1	177	199-	22- =	132	268+	400 =
2	196.5	165	181-	16- =	106	281+	387 =
3	172.0	150	162-	12- =	83	292+	375 =
4	147.4	133	142-	9- =	62	303+	365 =
5	122.8	114	121-	7- =	44	311+	355 =
6	98.3	94	100-	6- =	29	319+	348 =
7	73.7	72	78-	6- =	17	325+	342 =
8	49.1	48	56-	8- =	8	329+	337 =
9	24.6	244	34-	10- =	2	332+	334 =
10	0.0	0	11-	11- =	0	334+	334 =
القمة						334+	334 =

الجدول 4

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث

$$
\begin{aligned}
(221.1)(0.80229) &= 177 \\
(333.97)(0.59695) &= -199 \\
177 - 199 &= -22 \\
(221.1)(0.59695) &= 132 \\
(333.97)(0.80229) &= +268 \\
132 + 268 &= 400
\end{aligned}
$$

التصميم الأول

يبين فحص قيم العزم M والدفع N في الجدولين السابقين أن الجزء 3 حرج في منطقة العزم السالب، والجزء 10 حرج في منطقة العزم الموجب. ويجب تحديد مقطعي الضلع عند مركزي هذين الجزأين وفق مواصفات المعهد الأمريكي للإنشاءات الفولاذية (AISC) قبل إكمال الجدول.

أبعاد الجناحين 12 بوصة × 1 بوصة، وإجهاد الانحناء المسموح $F_B = 0.6F_y = (0.6)(30) = 20$ كيلورطلاً/بوصة^2 بعد التقريب وفق AISC. سماكة الجسد $\frac{3}{4}$ بوصة، والإجهاد المحوري المسموح $F_A = 17{,}000 - 0.485L/r^2$، وهي صيغة جونسون القطعية لـ$L/r > 120$ بوحدة رطل/بوصة^2. ويبدو أن معادلة كيني أسقطت تربيع r ولم تطبق شرط L/r. نأخذ $L = \Delta S = 10.798$ لأن الأضلاع مدعمة جانبياً عند نقاط اتصال المدادات.

يخضع اختيار سماكات صفائح الجناحين والجسد وعرض الجسد للحكم الهندسي. يُستعمل العمق الكلي المحدد عند مركز الجزء 3 من ذلك المركز حتى نهاية الضلع، ويُعتمد عمق الجزء 10 اعتباطياً عمقاً للضلع عند القمة. ويتغير العمق الكلي خطياً من مركز الجزء 3 إلى القمة. وتُراجع أدناه كفاية المقاطع المحددة عند مراكز الأجزاء.

الجزء	(2) العمق الكلي (بوصة)	(3) المساحة (بوصة^2)	(4) I (بوصة^4)	(5) M (قدم-كيب)	(6) القوة الدفع N (كيب)	(7) $f_a = \frac{N}{A}$ (كسي)	(8) $f_b = \frac{M_c}{I}$ (كسي)	(9) المسموح F_a (كسي)	(10) $\frac{f_a}{F_a}$	(11) $+ \frac{f_b}{F_b}$	(12) $=$ نسبة من السعة
A	23.00	39.75	3,483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3,483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3,483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3,483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3,172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2,865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2,585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2,329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2,071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1,838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1,631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
القمة	16.00	34.50	1,527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

الجدول 5

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث

$$23-(23-16.47)*(7-3)/(10-3)=19.27$$
$$2(12)(1)+0.75(19.27-2)=36.95$$
$$2(\underbrace{(12)(1)^3/12}_{bh^3/12}+\underbrace{(12)(1)(17.27/2+0.5)^2}_{Ad^2})+\underbrace{0.75(17.27/2)^3/12}_{bh^3/12}+\underbrace{0.75(17.27/2)(17.27/4)^2}_{Ad^2})=2,329$$

الجناح الجسد

$$343/36.95=9.3$$
$$(120)(19.27)/(2)(2329)=0.5$$
$$(17,000-0.485\times 10.798\times 12/(2329/36.95))/1000=17.0\neq 15.96$$
$$9.3/15.96=0.58$$
$$0.5/20=0.02$$
$$0.58+0.02=0.61$$

القيم المنقحة للدفع الأفقي

بعد أن أصبح عزم العطالة متغيراً، يجب إعادة حساب H_A باستعمال

$$H_A=-\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I}$$

تُحدد القيمة المنقحة لـH_A بسهولة كما يأتي. تُستخرج قيم العمود (2) بقسمة $M\delta\overline{M}$ للأجزاء المقابلة في العمود (8) من الجدول 2 على I الكلي لكل جزء في الجدول 5. وتُستخرج قيم العمود (3) من قيم العمود (9) في الجدول 2 بالطريقة نفسها. أما عزوم الجائز البسيط في العمود (5) من الجدول 6 فتؤخذ مباشرة من العمود (7) في الجدول 2.

(1) الجزء	(2) $\frac{M\delta\overline{M}}{I}$	(3) $\frac{\delta\overline{M}^2}{I}$	(4) منقح $H_A y$ (k · ft)	(5) M جائز بسيط (k · ft)	(6) منقح العزم (k · ft)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	50-
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	150-
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	190-
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	170-
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	130-
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	70-
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	20-
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	40+
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	80+
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	100+
القمة			11,720	11,790	70+
Σ	1010.85	3.0192			

الجدول 6

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم تكون القيمة المنقحة لـH_A:

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{MM}/I} = -\frac{2\times 1,010.85}{2\times 3.0192} = -334.81k$$

تُحسب القيم المنقحة للدفع المحوري N عند مراكز الأجزاء كما يأتي:

الجزء	$V \sin \alpha$	+	$H \cos \alpha$	=	منقح N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
القمة			335		335

الجدول 7

تُراجع كفاية المقاطع المصممة سابقاً عند مراكز الأجزاء. يبين الجدول أن جميع مقاطع الضلع مرضية، لكن لا يمكن الجزم بذلك قبل دراسة الإجهادات الثانوية الناتجة من انحراف الضلع.

الجزء	$\frac{N}{A}$ (كيب/بوصة^2)	$\frac{M_c}{I}$ (كيب/بوصة^2)	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	نسبة من السعة
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
القمة	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

الجدول 8

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38.6 مثال 38.6: التغيرات الحرارية في قوس

نم سبتقم يتآلا مسقلا Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

حدد أثري تقاصر الضلع والتغير الحراري في ضلع قوس المثال السابق (§38.5). اعتبر انخفاضاً في درجة الحرارة مقداره 100°F.

الإزاحة الأفقية

لتحديد أثر تقاصر الضلع، يجب أولاً إيجاد الإزاحة الأفقية للطرف A الناتجة من إدخال الانفعالات المحورية المرنة للقوس المحمل فعلياً في الضلع، مع وضع الطرف A على بكرات.

ثم نوجد الإزاحة الأفقية للطرف A الناتجة من قوة أفقية مقدارها 1 كيب تؤثر عنده، مع أخذ انفعالات الانحناء والانفعالات المحورية في الضلع. وتُعطى إزاحة A الناتجة من تقاصر الضلع تحت الأحمال الحقيقية بـ

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L$$

حيث N الدفع المحوري من الجدول 7 في المثال السابق، و$\delta\overline{N}$ الدفع المحوري الناتج من قوة أفقية افتراضية مقدارها 1 كيب عند A ويساوي $\cos\alpha$ في الجدول 1، وΔL طول كل جزء، وA مساحة المقطع المقابلة.

أما الإزاحة الأفقية لـA الناتجة من تقاصر الضلع تحت قوة أفقية مقدارها 1 كيب عند A فتُعطى بـ

$$\sum \frac{\delta\overline{N}^2}{AE}\Delta L \tag{38.2}$$

تظهر أدناه الحسابات اللازمة لتقييم إزاحتي A.

الجزء	N (كيب)	$\delta\overline{N}=\cos\alpha$ (كيب)	A (بوصة^2)	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

الجدول 9

إذن الإزاحة الأفقية لـA الناتجة من تقاصر الضلع تحت الحمل الحقيقي هي

$$\sum \delta\overline{N}\frac{N}{AE}\Delta L = \frac{2\times 87.88\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.760\text{ in}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما الناتجة من تقاصر الضلع تحت حمل أفقي مقداره 1 كيب عند A فهي

$$\sum \delta \overline{N} \frac{\overline{N}}{AE} \Delta L = \frac{2 \times 0.2300 \times 10.798 \times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in}$$

سبق أن حُددت القيمة النسبية لإزاحة A الأفقية الناتجة من انفعال الانحناء تحت قوة أفقية مقدارها 1 كيب عند A في العمود (3) من الجدول 6. وقيمتها المطلقة هي

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} .$$

ومن ثم تكون إزاحة A الكلية الناتجة من الانفعالين الانحنائي والمحوري تحت قوة أفقية مقدارها 1 كيب عند A:

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in}$$

النقص في H_A

في نظام خطي مرن، يكون النقص في H_A الناتج من تقاصر الضلع

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k}$$

ينشأ نقص إضافي في H_A إذا هبطت حرارة الضلع عن درجة الحرارة التي نُصب عندها القوس، بسبب التقاصر الحراري الإضافي. والنقص في طول الإسقاط الأفقي للضلع عند انخفاض الحرارة 100°F هو

$$\delta L = \underbrace{0.0000065}_{\alpha} \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \qquad (38.3)$$

ويكون النقص الناتج في H_A:

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k}$$

والنقص الكلي في H_A الناتج من تقاصر الضلع وانخفاض الحرارة هو

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k}$$

يؤدي ذلك إلى زيادة العزم قرب منتصف البحر.

الزيادة في العزم

يبين فحص العمود (6) من الجدول 8 ضرورة مراجعة الجزء 10 لاحتمال تجاوز الإجهاد المسموح بسبب هذه الزيادة.
الزيادة في العزم عند الجزء 10 هي

$$\Delta M = \Delta H_A((y \text{ (10 للجزء} = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

العزم 100 قدم-كيب المحدد سابقاً للجزء 10 دقيق إلى منزلتين فقط، ولذلك يكون العزم الكلي المنقح

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

الدفع 335 كيب المحدد سابقاً للجزء 10 دقيق إلى ثلاث منازل. لذلك يجب تقريب تغير H_A الناتج من التقاصر والحرارة إلى 1 كيب لتحديد الدفع المصحح في الجزء 10، وهو

$$335 - 1 = 334 \text{ k}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإجهادات القصوى

إجهاد الليف الأقصى هو

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2$$

يُراجع مقطع الجزء 10، كما في الجدول 8، بواسطة

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96$$

ومن الواضح أن مقطع الجزء 10 كافٍ.

لم يؤخذ أثر ارتفاع الحرارة، لأنه لا يحدث إلا في أشهر الصيف حين لا يوجد حمل ثلجي. ولذلك لا أهمية عملية لهذا الجانب من المسألة.

تنطبق طريقة التحليل المبينة بالقدر نفسه على قوس ذي مفصلين من الخرسانة المسلحة أو الخشب. لكن، كما ذُكر سابقاً، لا يُبنى إلا عدد قليل جداً من أقواس الخرسانة المسلحة بمفصلين.

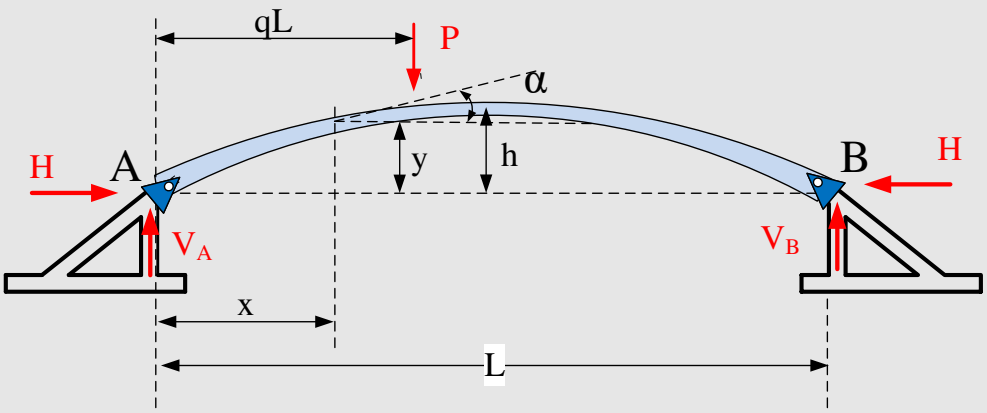
ويجدر التنبيه إلى أن انكماش الخرسانة في ضلع خرساني مسلح يسبب تقاصر الضلع أيضاً، إلى جانب الانفعال المحوري وانخفاض الحرارة. وينبغي تحديد معامل الانكماش للخلطة المستعملة وإدخاله في التحليل بالطريقة العامة نفسها المبينة أعلاه لمعامل الحرارة.

38.7 مثال 38.7: قوس قطعي مع تغير قاطع الزاوية لـ I

نم سبتقم يتآلا مسقلا Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

نعتبر قوساً قطعياً ذا مفصلين يتغير عزم عطالته بنسبة قاطع الزاوية. بُينت في §38.5 طريقة لتصميم ضلع قوس ذي مفصلين، واقترح أن يقوم التحليل الأول للمجهول الزائد H على افتراض عزم عطالة ثابت. ويتاح نهج بديل، إذ يمكن اشتقاق عبارة بسيطة لـH إذا فُرض شرطان على شكل الضلع ونسبه: أن يكون محور الضلع قطعاً مكافئاً، وأن يساوي عزم عطالة الضلع عند أي مقطع عزم العطالة عند القمة مضروباً في قاطع الزاوية α بين الأفقي ومماس محور القوس عند ذلك المقطع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



نعتبر الضلع محملاً بقوة مركزة واحدة P، ونفترض أن عزم عطالته يتغير بحيث

$$I = I_c \sec\alpha$$

حيث I_c عزم العطالة عند القمة وI عند أي مقطع. محور القوس قطع مكافئ، ومعادلته نسبة إلى A هي

$$y = 4h\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

نفترض أن الطرف A على بكرات. عندئذ

$$H = -\frac{\Delta_{Ah}}{\delta_{AhAh}} = -\frac{\int M\delta\overline{M}ds/EI}{\int \delta\overline{M}^2 ds/EI}$$

حيث Δ_{Ah} الإزاحة الأفقية لـA الناتجة من P، وδ_{aAhAh} الإزاحة الأفقية الناتجة من قوة أفقية مقدارها 1 كيب تؤثر إلى اليسار عند A. ويرمز M إلى عزم الضلع عند أي مقطع تحت P مع وضع A على بكرات، و$\delta\overline{M}$ إلى العزم الناتج من القوة الأفقية الوحدية عند A.

تنطبق في المعادلة السابقة العلاقات الآتية:

$$m = y, \quad ds = \sec\alpha dx, \quad I = I_c \sec\alpha$$

وبإجراء هذه التعويضات تُختزل عبارة H إلى

$$H = -\frac{\int Mydx}{\int y^2 dx}$$

وكذلك

$$\text{عندما } x < qL \quad M = P(l-q)x$$
$$\text{عندما } x > qL \quad M = P(l-q)x - P(x-qL) = Pq(L-x)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

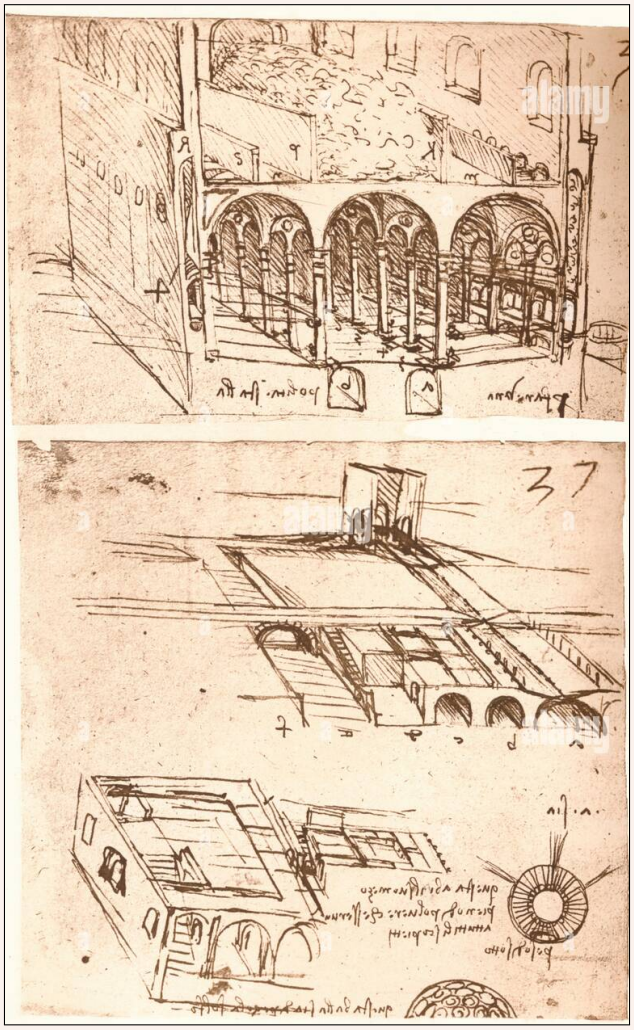
عند تعويض M وy في معادلة H وإجراء التكامل، تكون النتيجة

$$H = \frac{5PL}{8h}(q - 2q^3 + q^4)$$

مع أن المعادلة اشتقت لنوع الضلع الموصوف، فإنها تفيد في التحليل الأولي لأضلاع مصمتة ذات مفصلين لا تكون محاورها قطعية ولا يتناسب تغير I فيها مع قاطع α. تكون قيم H تقريبية بالطبع، لكنها تصلح لتحديد نسب ضلع تجريبي أول. فإذا طبقت المعادلة على ضلع المثال §38.5، تكون $H = 339.14$ كيب، في حين القيمة الصحيحة 334.81 كيب.

إذا كان مطلوباً خط تأثير لـH، نأخذ P مساوية للواحد ونعوض قيم q الموافقة للمقاطع التي نريد إحداثيات خط التأثير عندها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



رسوم معمارية، ليوناردو دا فينشي، أواخر القرن الخامس عشر.

تجسد مرحلة التصميم الأولي، حيث تتحول الأفكار الأولى إلى تصورات بصرية عبر رسوم عفوية واستكشافية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القسم III

متوسط: طرائق عددية

خلافاً للكتاب السابق، الذي ركّز على الحلول التحليلية، يعطي هذا الكتاب الأولوية للمقاربات العددية. ويمكن أن يحمل عنواناً مناسباً هو «تحليل العناصر المحددة للمنشآت الهيكلية».

يبدأ الكتاب بمقدمة إلى طريقة الصلابة المباشرة، مستعملاً عناصر مشتقة من علاقات الإزاحة–القوة في المنشآت الهيكلية. ثم تُعرض الطريقة التغايرية عرضاً منهجياً، بدءاً من معادلة أويلر، وصولاً إلى الإطار الشامل لطريقة العناصر المحددة.

وتناقش فصول الكتاب اعتبارات متعددة تتصل بهذه الطرائق، منها التحليل الديناميكي وصياغة العنصر متساوي المعلمات.

ويقتصر النطاق على المنشآت الخطية المرنة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

39 مقدمة إلى طريقة الصلابة المباشرة

ملخص

يضع الفصل الأول من الكتاب الثالث الأساس للتحليل العددي للمنشآت الهيكلية. ويعيد تناول عدد من المفاهيم التي سبق تعريفها في مواضع متفرقة. والأهم أن القسم الأخير يضع التحليل الإنشائي في سياق مسألة قيم حدية.

39.1 لماذا التحليل الإنشائي بالمصفوفات؟ . . . 1320
39.2 مثالية المنشأ . . . 1321
39.3 اصطلاح الإشارة . . . 1323
39.4 نظم الإحداثيات . . . 1324
39.5 المرونة مقابل الصلابة . . . 1324
39.6 درجات الحرية . . . 1325
39.7 عدم التحديد الاستاتيكي مقابل عدم التحديد الحركي . . . 1327
39.8 التحليل والميكانيكا الإنشائية: مسألة قيم حدية . . . 1328

39.1 لماذا التحليل الإنشائي بالمصفوفات؟

1 تتطلب معظم مناهج الهندسة المدنية من الطلاب دراسة مقررات في الاستاتيكا، ومقاومة المواد، والتحليل الإنشائي الأساسي. والمقرر الأخير جوهري، إذ يقدم التحليل الأساسي للمنشآت المحددة وغير المحددة استاتيكياً، بما في ذلك تعيين ردود الأفعال والانحرافات والقوى الداخلية.

2 وتُعرض أيضاً طرائق الطاقة، وتكون معظم الأمثلة، إن لم تكن كلها، ثنائية الأبعاد. ولأن التركيز ينصب على الحل اليدوي، نادراً ما تُحلل منشآت ثلاثية الأبعاد. كما أن الطرائق المدروسة تلائم في الغالب الحسابات التقريبية السريعة، ولا تكون بالضرورة مهيأة للتنفيذ الحاسوبي.

3 أما الطلاب الراغبون في التخصص في الهندسة الإنشائية أو الميكانيكا الإنشائية فيدرسون مقررات أكثر تقدماً، مثل التحليل الإنشائي بالمصفوفات و/أو تحليل العناصر المحددة.

4 يبني التحليل الإنشائي بالمصفوفات، الذي يسمى أيضاً التحليل الإنشائي المتقدم أو مقدمة إلى العناصر المحددة في الهندسة الإنشائية، على مقرر التحليل التمهيدي، ويركز على الطرائق الملائمة للتنفيذ الحاسوبي. وسنعطي في ذلك اهتماماً متساوياً للمنشآت ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد، ونطوّر فهماً متيناً للتحليل الإنشائي بمساعدة الحاسوب.

5 وهذا أمر أساسي لأن معظم التحليلات الإنشائية في الممارسة، إن لم تكن كلها، تُجرى بالحاسوب. ومن الضروري للمهندس الإنشائي أن يفهم ما بداخل تلك «الصناديق السوداء»، وأن يكتسب الثقة الكافية لفتحها وتعديلها لتنفيذ مهام محددة، والأهم أن يدرك حدودها.

6 مع ازدياد التركيز حديثاً على طريقة العناصر المحددة في برامج الدراسات العليا، مال كثير من الطلاب إلى تجاوز مقرر كهذا والانتقال مباشرة إلى مقرر العناصر المحددة. لذلك يجب فهم الصلة بين المقررين ودور كل منهما. تعالج طريقة العناصر المحددة الأوساط المستمرة ثنائية أو ثلاثية الأبعاد. وبذلك يكون المجهول الأساسي هو $\mathbf{u}$، أي الإزاحات العقدية، وتقتصر «القوى» الداخلية عادة على الإجهاد σ. والمنشأ الوحيد أحادي البعد المناظر هو الجملون.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7 ومع أن الأوساط المستمرة ثنائية وثلاثية الأبعاد ضرورية في الهندسة المدنية لنمذجة منشآت مثل السدود والقشريات والأساسات، فإن غالبية المنشآت المدنية تتكون من عناصر قضيبية أحادية البعد، مثل الكمرات والجوائز والأعمدة. وفي هذه العناصر تكون «الإزاحات» و«القوى» الداخلية أعقد مما هي عليه في عناصر الأوساط المستمرة.

8 وعلى خلاف العناصر المحددة للأوساط المستمرة، حيث تكاد الإزاحة تكون مرادفة للانتقال، قد تشمل الإزاحات المعممة في العناصر أحادية البعد، بحسب نوع المنشأ، الانتقال و/أو الدوران الانحنائي و/أو الفتلي. وبالمثل لا تكون «القوى الداخلية» إجهادات، بل قوى محورية وقوى قص و/أو عزوماً انحنائية أو فتلية. وهذه المفاهيم أوثق صلة بتحليل وتصميم معظم المنشآت المدنية.

9 لذلك يشكل التحليل الإنشائي بالمصفوفات جسراً حقيقياً بين التحليل التمهيدي ومقررات العناصر المحددة. وستُشتق مصفوفة صلابة العنصر $[\mathbf{k}]$ أولاً باستعمال طرائق قُدمت في التحليل الإنشائي الأساسي، ثم باستعمال مفاهيم قائمة على الطاقة. والطريقة الأخيرة هي المستعملة حصراً في طريقة العناصر المحددة.

10 تمثل البرمجة الحاسوبية عنصراً مهماً في هذا المقرر. فبعد شرح النظرية والخوارزميات شرحاً وافياً، يُتوقع من الطالب برمجتها في Matlab. وينفذ البرنامج تحليل الجمالونات والإطارات ثنائية وثلاثية الأبعاد، وقد استعمله كثير من الطلاب لاحقاً في ممارساتهم المهنية.

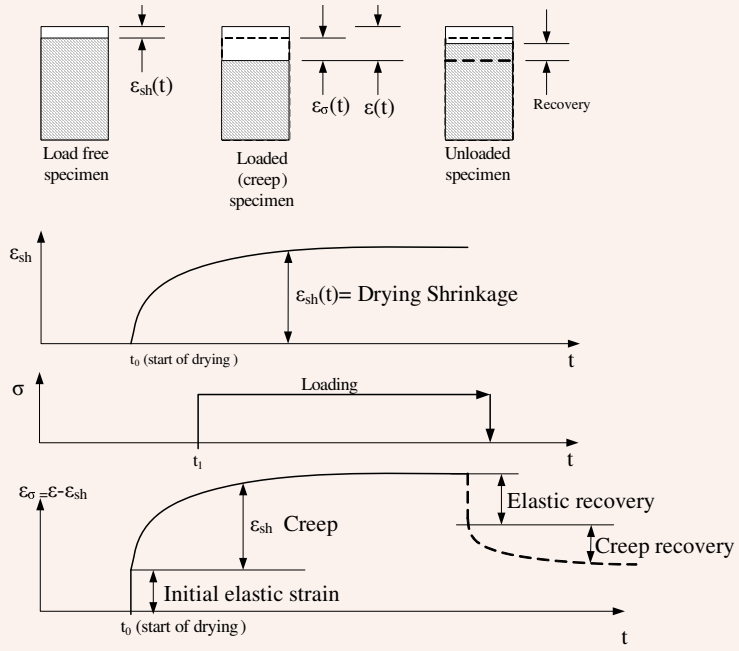
11 وستكون هناك مسألة حاسوبية يُطلب فيها إجراء عمليات رمزية بسيطة باستعمال Mathematica.

39.2 مثالية المنشأ

12 يجب قبل التحليل تمثيل المنشأ تمثيلاً مثالياً مناسباً للصياغة الرياضية. ولأن نمذجة كل تفصيل مفردة أمر غير ممكن عملياً، وغالباً غير ضروري، فلا بد من وضع افتراضات. ومن ثم فإن مثالية المنشأ فن بقدر ما هي علم. ومن الأسئلة التي تواجه المحلل:

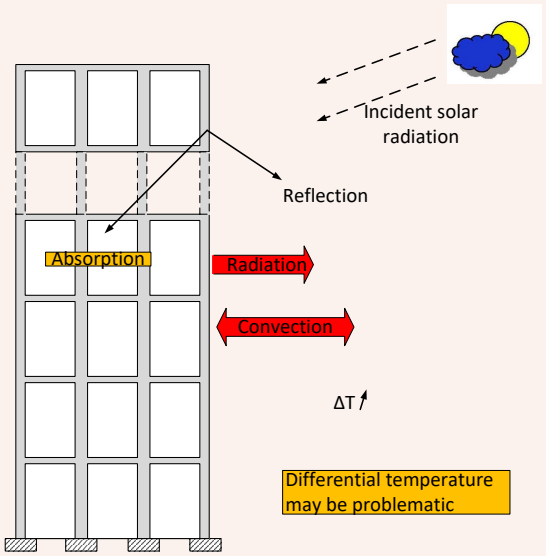
1. هل يكون النموذج ثنائي الأبعاد أم ثلاثي الأبعاد؟ وهل نمثل فتحة واحدة من المبنى أم المنشأ كله؟
2. هل نمثل المنشأ إطاراً أم جملوناً؟ وهل يمكن إهمال الصلابة الانحنائية؟
3. هل الوصلات صلبة أم شبه صلبة؟ وهذا مهم بوجه خاص في المنشآت الفولاذية.
4. هل المساند صلبة أم الأساسات مرنة؟ وهل تقع الأساسات على صخر صلب أم على طين قد يتصلد مع الزمن؟
5. هل تُدرج العناصر الثانوية، مثل الشدادات القطرية في التحليل ثلاثي الأبعاد، أم لا؟
6. هل يلزم تحليل ديناميكي؟ إذا كان تردد الحمل المطبق، أي الإثارة، أقل من نحو ثلث أدنى تردد طبيعي للمنشأ، أمكن إهمال آثار العطالة ومعاملة المسألة شبه سكونية؛ وإلا وجب إجراء تحليل ديناميكي. وقد يستلزم المنشأ شديد المرونة تحليلاً ديناميكياً حتى تحت حمل بطيء التطبيق.
7. هل توجد انفعالات معتمدة على الزمن، مثل زحف الخرسانة في الشكل 39.1، أو استرخاء كابلات سبق الإجهاد، أو آثار زمنية أخرى كالتآكل أو الكلال؟

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 39.1: الانفعال المعتمد على الزمن: الزحف والانكماش

8. هل تؤخذ الآثار الحرارية في الحسبان؟ فقد يلزم مثلاً تمثيل درجات حرارة غلاف المبنى، الشكل 39.2، لأنها تولد حملاً غير متناظر.



شكل 39.2: الأحمال الحرارية على المبنى

9. هل يُدرج التشوه المحوري أم يهمل؟ وهل يمكن مثلاً إهمال الصلابة المحورية لكمرة في مبنى؟

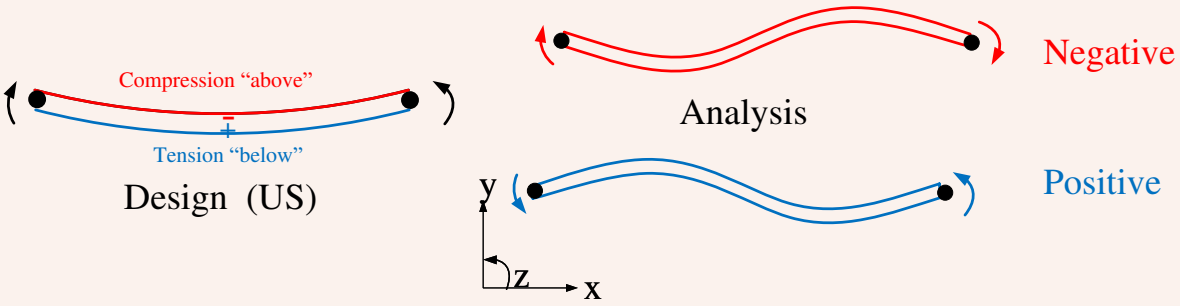
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10. ما خصائص المقطع العرضي، وما عزم القصور الذاتي لكمرة خرسانية مسلحة؟ انظر §45.6.3.
11. هل تُهمل التثخينات الموضعية أم لا؟ وهي توجد عادة في مناطق العزوم السالبة الكبيرة.
12. هل يكون التحليل خطياً أم لاخطياً؟ فالتحليل الخطي لا يتنبأ بالحمل الأقصى أو حمل الفشل، ويقلل تقدير التشوهات.
13. هل التشوه صغير، $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$، أم كبير، $\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2$، مع آثار $P-\Delta$؟ انظر الفصل 29. وفي تحليل مبنى شاهق خاضع للرياح ينبغي تضخيم العزوم بحاصل ضرب الحمل المحوري في الإزاحة الجانبية، أي بآثار $P-\Delta$.
14. هل يحدث انهيار جزئي أو خضوع موضعي؟ وهل يؤدي فشل عنصر واحد إلى فشل المنشأ كله؟
15. كيف يمثل حمل الرياح؟ فكثيراً ما يكون الانجراف الجانبي لمبنى شاهق تحت الرياح هو القيد الرئيس على زيادة ارتفاعه.
16. هل توجد إجهادات ثانوية، مثل الناتجة من اللحام؟ وهي موجودة في معظم المنشآت غير المحددة استاتيكياً.

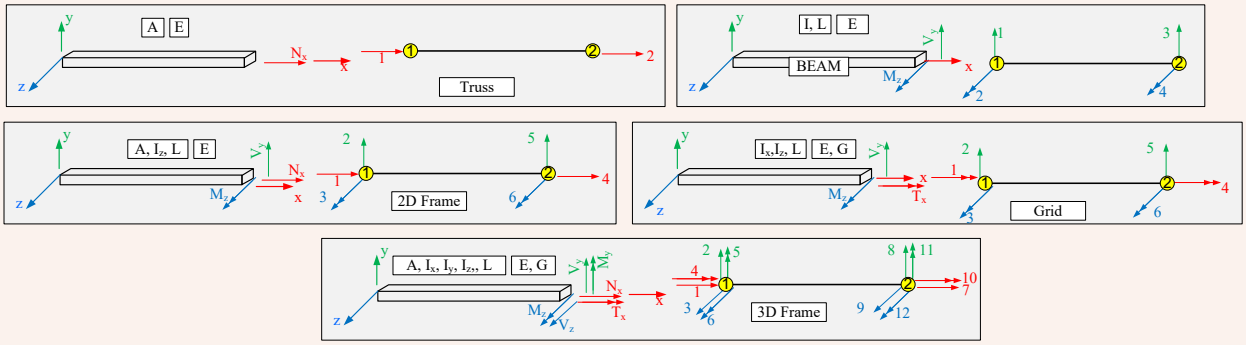
39.3 اصطلاح الإشارة

13 يختلف اصطلاح الإشارة في التحليل الإنشائي بالمصفوفات تماماً عن الاصطلاح المستعمل سابقاً في التحليل والتصميم، الشكل 39.3. فقد ركزنا سابقاً على الانحناء وعرّفنا العزم الموجب بأنه العزم الذي يسبب «شدّاً في الأسفل»، وهو اصطلاح غير ملائم للبرمجة.

14 أما في التحليل الإنشائي بالمصفوفات فيتفق اصطلاح الإشارة مع نظام الإحداثيات المعتمد. ولذلك نعرّف العزم الموجب بأنه العزم عكس اتجاه عقارب الساعة.



شكل 39.3: اصطلاح الإشارة في التصميم والتحليل، انظر الشكل 26.1



شكل 39.4: القوى الداخلية للعنصر ودرجات حريته المحلية

39.4 نظم الإحداثيات

15 يجب التمييز بين نظامي إحداثيات:

العام: يستعمل لوصف إحداثيات عقد المنشأ. ويمكن اختياره اعتباطياً بشرط أن يكون نظاماً يمينياً. وترمز محاوره بحروف كبيرة X, Y, Z، الشكل 39.7، أو بالأرقام 1، 2، 3 بوصفها مؤشرات متتابعة في البرنامج الحاسوبي.

المحلي: يرتبط بكل عنصر ويستعمل لوصف القوى الداخلية فيه. وترمز محاوره بحروف صغيرة x, y, z، أو بالأرقام 1، 2، 3، الشكل 39.4.

16 يُفترض أن يقع المحور x على امتداد العنصر، ويُختار اتجاهه من العقدة الأولى إلى العقدة الثانية، الشكل 39.4.

39.5 المرونة مقابل الصلابة

17 أبرزنا في §26.1 الفروق الأساسية بين طريقة المرونة، أي طريقة القوى، وطريقة الصلابة، أي طريقة الإزاحات. ويكمل هذا القسم تلك المناقشة.

18 في طريقة المرونة جعلنا المنشأ محدداً استاتيكياً وحللنا المنشأ كله. أما في طريقة الصلابة فنجعل المنشأ، أو العنصر، محدداً حركياً كما يأتي:

1. نفرض إزاحة وحدية عند كل درجة حرية j، §39.6، مع تقييد سائر درجات الحرية لتساوي الصفر.
2. نحدد ردود الأفعال المرتبطة بجميع درجات الحرية الأخرى i.

ومن ثم تمثل k_{ij} رد الفعل عند درجة الحرية i الناتج من تشوه وحدي، انتقالاً كان أو دوراناً، عند درجة الحرية j.

19 نبحث في طريقة المرونة عن الإزاحات بدلالة القوى الخارجية المطبقة، $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{F})$، وتُشتق العلاقة للمنشأ. أما في طريقة الصلابة فنبحث عن القوى الداخلية بدلالة الإزاحات الخارجية المفروضة، $\mathbf{F}(\boldsymbol{\Delta})$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

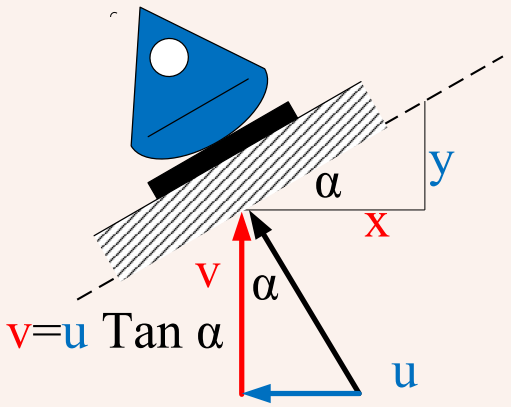
20 وقد اشتقت هذه العلاقات للعناصر في الفصل 26، ثم صيغت مصفوفياً في الفصل 40.

39.6 درجات الحرية

تعريف 39.1: درجة الحرية

درجة الحرية هي إزاحة عقدية معممة مستقلة، أو قوة معممة مستقلة، عند عقدة.

21 يجب أن تكون الإزاحات مستقلة خطياً، وألا ترتبط إحداها بالأخرى. فمثلاً يملك المسند الدحروجي على مستوى مائل ثلاث إزاحات، هي الدوران θ والانتقالان u وv. لكن الانتقالين مقيدان حركياً، لذلك لا توجد إلا إزاحتان مستقلتان، الشكل 39.5.



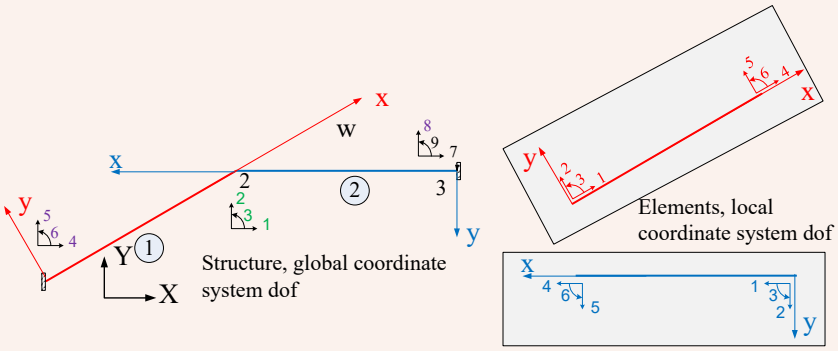
شكل 39.5: الإزاحات المستقلة

22 تُعرّف درجات حرية العنصر بالنسبة إلى نظام إحداثياته المحلي، وتُعرّف درجات حرية المنشأ بالنسبة إلى نظام الإحداثيات العام، الشكل 39.6.

23 نستعمل وصف الإزاحات «المعممة» ليشمل الانتقالات والدورانات معاً. وقد لا يوجد من هذه الإزاحات شيء، أو توجد واحدة أو أكثر، بحسب نوع المنشأ. ومن المؤسف أن مقررات التحليل التمهيدية تركز كثيراً على المنشآت ثنائية الأبعاد، ولا تعطي اهتماماً كافياً للمنشآت ثلاثية الأبعاد أو للمنشآت ثنائية الأبعاد ذات الفتل.

24 يكون عدد درجات الحرية في الإحداثيات المحلية مساوياً غالباً لعددها في النظام العام. والاستثناء البارز هو عنصر الجملون: ففي الإحداثيات المحلية لا يوجد إلا تشوه محوري واحد، بينما توجد عند كل عقدة في الإحداثيات العامة انتقالات اثنان في المستوي وثلاثة في الفراغ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 39.6: نظاما الإحداثيات ودرجات الحرية المحلية والعامة

25 لذلك لا بد من فهم درجات الحرية التي ترتبط بالأنواع المختلفة من المنشآت المكونة من عناصر قضيبية أحادية البعد.

تعريف 39.2: درجات حرية العناصر المختلفة

.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

النوع		العقدة 1	العقدة 2	$[\mathbf{k}^{(e)}]$ (محلي)	$[\mathbf{K}^{(e)}]$ (عام)
أحادي البعد					
كمرة	$\{\mathbf{p}\}$	M_{z2} ،F_{y1}	M_{z4} ،F_{y3}	4×4	4×4
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	θ_2 ،v_1	θ_4 ،v_3		
ثنائي الأبعاد					
جملون	$\{\mathbf{p}\}$	F_{x1}	F_{x2}	2×2	4×4
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	u_1	u_2		
إطار	$\{\mathbf{p}\}$	M_{z3} ،F_{y2} ،F_{x1}	M_{z6} ،F_{y5} ،F_{x4}	6×6	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	θ_3 ،v_2 ،u_1	θ_6 ،v_5 ،u_4		
شبكة	$\{\mathbf{p}\}$	M_{z3} ،F_{y2} ،T_{x1}	M_{z6} ،F_{y5} ،T_{x4}	6×6	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	θ_3 ،v_2 ،θ_1	θ_6 ،v_5 ،θ_4		
ثلاثي الأبعاد					
جملون	$\{\mathbf{p}\}$	F_{x1}،	F_{x2}	2×2	6×6
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	u_1،	u_2		
إطار	$\{\mathbf{p}\}$	F_{y3} ،F_{y2} ،F_{x1} M_{z6} ،M_{y5} ،T_{x4}	F_{y9} ،F_{y8} ،F_{x7} M_{z12} ،M_{y11} ،T_{x10}	12×12	12×12
	$\{\boldsymbol{\delta}\}$	w_3 ،v_2 ،u_1، θ_6 ،θ_5 ،θ_4	w_9 ،v_8 ،u_7، θ_{12} ،θ_{11} ،θ_{10}		

26 يجب التمييز بين درجات الحرية المحلية والعامة. ويتبع نظام الترقيم القاعدتين البسيطتين الآتيتين:

محلياً: نبدأ بالعقدة الأولى لعنصر معين، ونرقم درجات الحرية المحلية بالترتيب نفسه لمؤشرات نظام الإحداثيات المحلي، ثم نكرر ذلك للعقدة الثانية، الشكل 39.4.

عاماً: نبدأ بالعقدة الأولى للمنشأ كله، ونرقم درجات الحرية العامة غير المقيدة جميعاً، ثم ننتقل إلى العقدة التالية حتى تُرقم كل درجات الحرية العامة، الشكل 39.7.

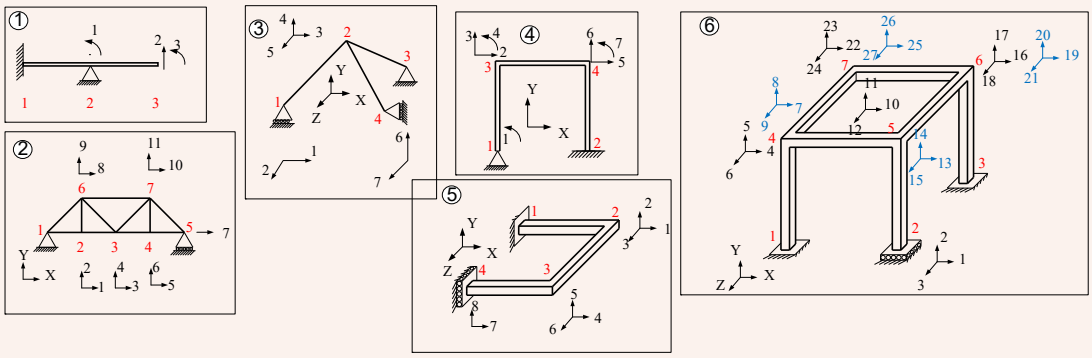
39.7 عدم التحديد الاستاتيكي مقابل عدم التحديد الحركي

27 عُرّفت درجة عدم التحديد الاستاتيكي سابقاً بأنها عدد القوى المجهولة التي لا يمكن تعيينها من معادلات الاتزان المناسبة، إضافة إلى معادلات الشروط.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28 وبالقياس، فإن درجة عدم التحديد الحركي هي العدد الكلي للإزاحات المجهولة في المنشأ. وهذا المفهوم أساسي لفهم طريقة الإزاحات التي ستُعرض في الفصول اللاحقة.

29 يبين الشكل 39.7 والجدول 39.1 درجتي عدم التحديد الاستاتيكي والحركي.



شكل 39.7: درجتا عدم التحديد الاستاتيكي والحركي

جدول 39.1: درجتا عدم التحديد الاستاتيكي والحركي

المعرف	درجة عدم التحديد الاستاتيكي	الحركي
1	1	3
2	0	11
3	0	7
4	2	7
5	2	6
6	9	27

39.8 التحليل والميكانيكا الإنشائية: مسألة قيم حدية

30 تحليل منشأ هو في جوهره حل مسألة قيم حدية، تحكمها معادلة تفاضلية في الحجم Ω، وتخضع لشروط حدية مكانية أو زمنية على الحد Γ.

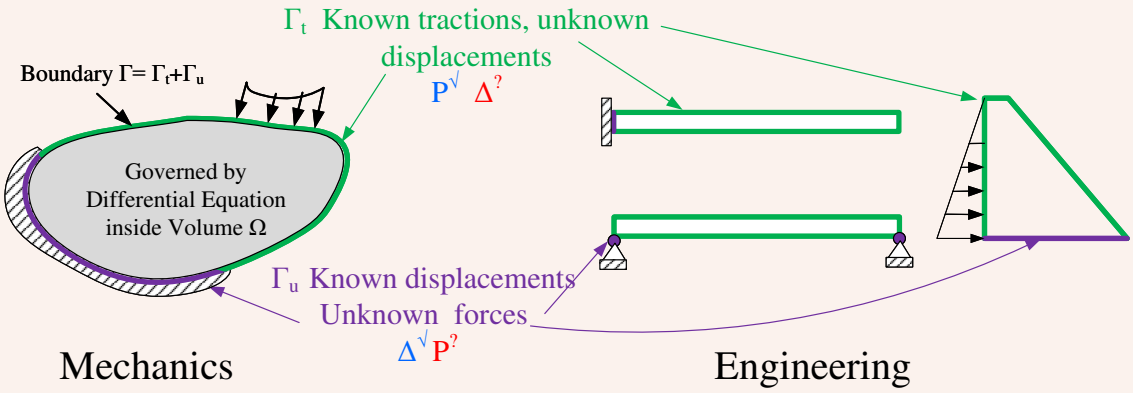
31 في حالتنا نجزئ المنشأ، وتكون معادلة الاتزان التفاضلية الحاكمة مضمّنة في $\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{P}$. ويمكن تفكيك الحد إلى $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$، كما في الجدول 39.2. وسيُفصل ذلك في §46.2.6.

32 يبين الشكل 39.8 أمثلة لمسائل قيم حدية مجزأة. بالنسبة إلى الكمرة والسد، نحتاج إلى تعيين الإزاحات على Γ_t والقوى، أي ردود الأفعال، على Γ_u.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

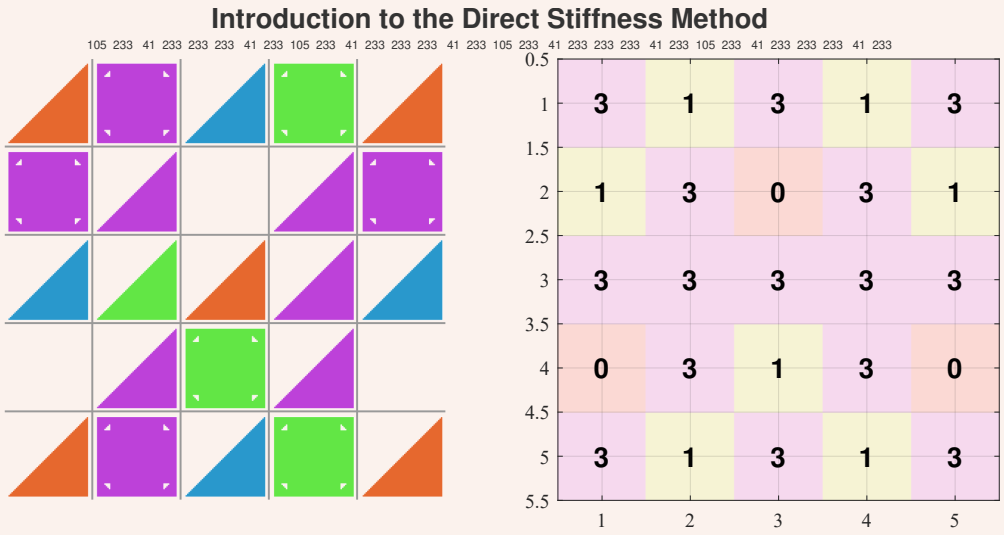
جدول 39.2: الشروط الحدية الأساسية والطبيعية

Γ	الشد السطحي	الإزاحة	رياضياً	إنشائياً	درجة الحرية
Γ_t	$\mathbf{P}_t^{\checkmark}$	$\boldsymbol{\Delta}_t^{?}$	نيومان	أساسي	حرة
Γ_u	$\mathbf{R}_u^{?}$	$\boldsymbol{\Delta}_u^{\checkmark}$	ديريشليه	طبيعي	مثبتة/مقيدة



شكل 39.8: مسألة قيم حدية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



بصمة بصرية خاصة بالفصل، انظر الملحق H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

40 مصفوفات صلابة العناصر $\mathbf{k}^{(e)}$

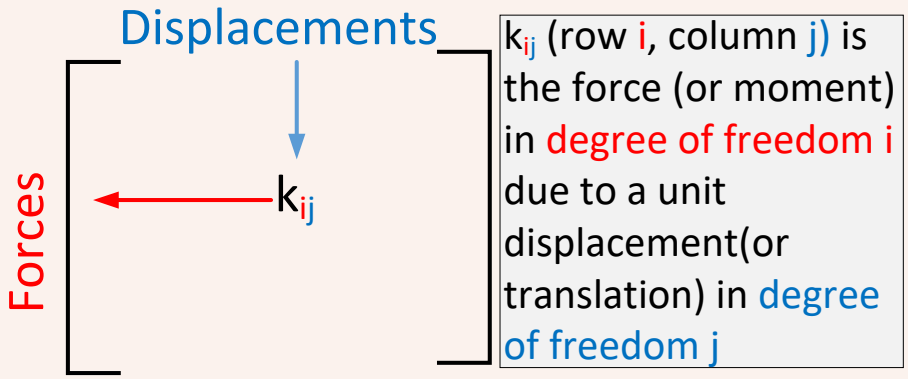
ملخص

اشتُقت في الفصل 26 تعبيرات القوى المتزنة بدلالة الإزاحات المتوافقة، واستُخدم كثير منها، لا كلها، في الفصل اللاحق الخاص بطريقة الميل والانحراف وتوزيع العزوم. وتمهيداً لطريقة الصلابة المباشرة، سنعيد ترتيب تلك التعبيرات في صورة مصفوفية، وبوجه أخص سنكوّن مصفوفات صلابة العناصر لأنواع مختلفة من العناصر. ثم نوسّع العرض ليشمل التواء سان-فنان والتواء فلاسوف، وكذلك كمرات تيموشينكو.

40.1 تعريف حد الصلابة 1331
40.2 عنصر الجمالون 1332
40.3 كمرة أويلر–برنولي 1333
40.4 عنصر إطار ثنائي الأبعاد (عنصر كمرة–عمود) 1333
40.5 عنصر الشبكة الإنشائية 1334
40.6 عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد 1334
40.7 كمرة تيموشينكو 1337
40.7.1 التشوه الإضافي 1337
40.7.2 تعديل مصفوفة صلابة العنصر 1338
40.8 التواء فلاسوف 1341

40.1 تعريف حد الصلابة

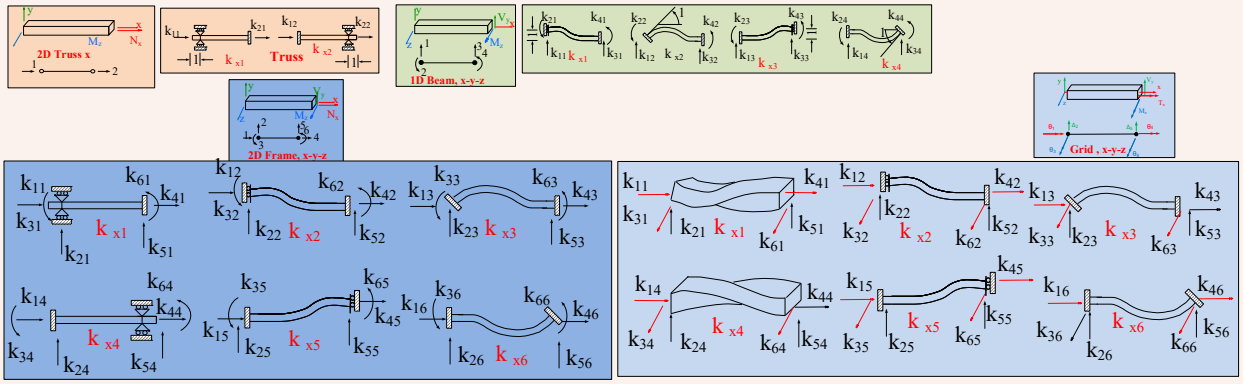
1 نعيد النظر في تعبيرات القوى بدلالة الإزاحات المعلومة المشتقة في الفصل 26، ونكتبها في صورة مصفوفية. وينتج من ذلك ما يسمى معاملات *الصلابة* k_{ij}، حيث يمثل المعامل القوة عند درجة الحرية i الناتجة من إزاحة وحدية عند درجة الحرية j، كما في الشكل 40.1.



شكل 40.1: تعريف حد الصلابة K_{ij}

2 يبين الشكل 40.2 معاملات الصلابة لأنواع مختلفة من العناصر. وهي تقابل القوى المبينة أدناه.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 40.2: معاملات الصلابة لأنواع مختلفة من العناصر

تعريف 40.1: القوى الداخلية لأنواع العناصر المختلفة

	القوى			العزوم		
	x	y	z	x	y	z
كمرة ثنائية الأبعاد		V_y				M_z
إطار ثنائي الأبعاد	N_x	V_y				M_z
شبكة إنشائية		V_y		T_x		M_z
إطار ثلاثي الأبعاد	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z

3 يجمع هذا الفصل إذن معاملات صلابة العناصر من الفصل 26، ويخزنها في صورة مصفوفات، هي مصفوفات صلابة العناصر.

40.2 عنصر الجمالون

4 يرتبط بكل عقدة من عنصر الجمالون، ثنائي الأبعاد كان أم ثلاثيه، درجة حرية واحدة فقط. ولذلك نحصل من المعادلة 26.1 على

$$\mathbf{k}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

40.3 كمرة أويلر–برنولي

5 باستخدام المعادلات 26.4 و26.5 و26.8 و26.9 يمكن تحديد القوى المقابلة لكل إزاحة وحدية:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{26.8 م.}(v_1=1) & \text{26.8 م.}(\theta_1=1) & \text{26.8 م.}(v_2=1) & \text{26.8 م.}(\theta_2=1) \\ \text{26.4 م.}(v_1=1) & \text{26.4 م.}(\theta_1=1) & \text{26.4 م.}(v_2=1) & \text{26.4 م.}(\theta_2=1) \\ \text{26.9 م.}(v_1=1) & \text{26.9 م.}(\theta_1=1) & \text{26.9 م.}(v_2=1) & \text{26.9 م.}(\theta_2=1) \\ \text{26.5 م.}(v_1=1) & \text{26.5 م.}(\theta_1=1) & \text{26.5 م.}(v_2=1) & \text{26.5 م.}(\theta_2=1) \end{bmatrix} \end{array}$$

6 وبالتعويض

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{40.1}$$

40.4 عنصر إطار ثنائي الأبعاد (عنصر كمرة–عمود)

7 عناصر الإطار ثنائي الأبعاد هي عناصر كمرية لها صلابة محورية مماثلة لصلابة الجمالون. ومن ثم $\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \mathbf{k}^{\mathrm{b}} \cup \mathbf{k}^{\mathrm{t}}$. ونلاحظ عدم وجود اقتران بين القوى المحورية وبين القص والعزم.

$$\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\mathrm{t}}_{11} & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

8 وبالتعويض

$$\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{40.2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

40.5 عنصر الشبكة الإنشائية

9 تشبه مصفوفة صلابة عنصر الشبكة الإنشائية مصفوفة عنصر الإطار ثنائي الأبعاد إلى حد كبير، غير أن المركبة المحورية تستبدل بمركبة الالتواء.

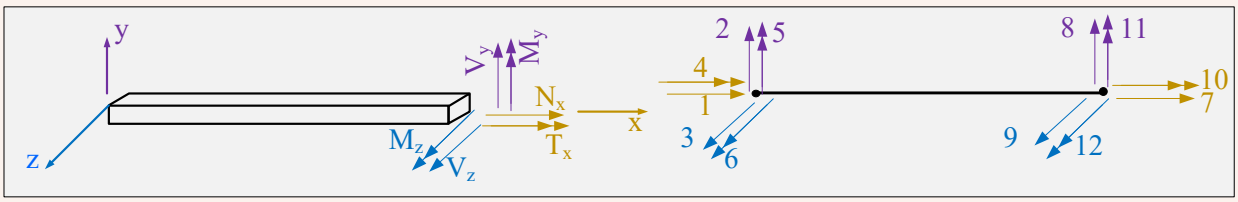
$$\mathbf{k}^{\mathrm{g}} = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 23.13 \text{ م.} & 0 & 0 & -23.13 \text{ م.} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ -23.13 \text{ م.} & 0 & 0 & 23.13 \text{ م.} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

10 وبالتعويض

$$[\mathbf{k}^{\mathrm{g}}] = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

40.6 عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد

11 نذكّر بدرجات الحرية الاثنتي عشرة لعنصر الكمرة–العمود ثلاثي الأبعاد، كما في الشكل 40.3.



شكل 40.3: درجات حرية عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد
+

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

12 يمكن الآن إعادة بناء مصفوفة صلابة العنصر من حدود سبق تقديمها في مصفوفات عناصر أبسط.

$$
\mathbf{k}^{\mathrm{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
k^{\mathrm{t}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{14} \\
0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{14} & 0 \\
0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{21} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{24} & 0 \\
0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{24} \\
k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{34} \\
0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{34} & 0 \\
0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{22} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{41} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & 0 & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{43} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{44} & 0 \\
0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{44}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13 وبالتعويض نحصل على

$$\mathbf{k}^{\text{3dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z & 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z \\ 0 & 0 & \beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 & 0 & 0 & -\beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z & 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z \\ 0 & 0 & -\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 & 0 & 0 & \beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z \end{bmatrix} \end{array}$$

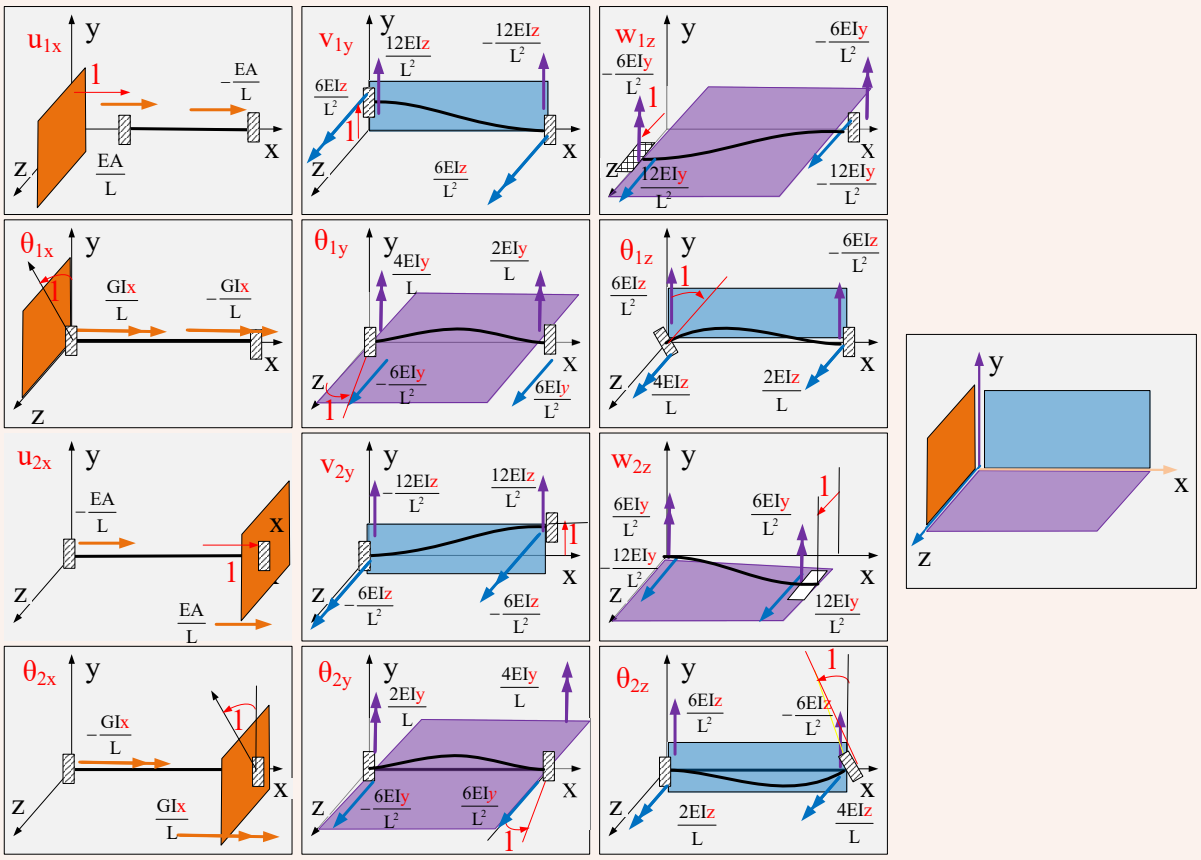
حيث

$$\alpha = \frac{EA}{L}; \quad \beta_i = \frac{12EI_i}{L^3}; \quad \gamma_i = \frac{6EI_i}{L^2}; \quad \delta_i = \frac{2EI_i}{L}; \quad \varepsilon = \frac{GI_x}{L};$$

و$i = [y|z]$.

14 يبين الشكل 40.4 معاملات الصلابة هذه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 40.4: حدود الصلابة المنفردة في عنصر كمرة–عمود ثلاثي الأبعاد

40.7 كمرة تيموشينكو

15 اشتُقت في §23.1 تعبيرات التشوه الإضافي "الطفيلي" الناتج من تشوهات القص. وسنأخذها هنا في الحسبان بتعديل صياغة كمرة أويلر–برنولي الأصلية.

40.7.1 التشوه الإضافي

16 وفق فكرة طريقة الصلابة، نفرض إزاحة وحدية، انتقالاً أو دوراناً، عند درجة الحرية المعنية، مع إبقاء جميع درجات الحرية الأخرى صفراً. غير أن اشتقاق الانحناء في §26.3 لم يأخذ تشوه القص في الحسبان، ولذلك تظهر في القوى الناتجة حدود "طفيلية". ويلزم تقويم أثرها عند فرض انتقال وحدي ثم دوران وحدي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الانتقال عند فرض انتقال وحدي، نبدأ بتعريف اعتباطي[1]

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \frac{12EI}{GA_sL^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_s}\left(\frac{r}{L}\right)^2.$$

وسيتبين لاحقاً أن v_s في المعادلة 23.11 مرتبط بـΦ. وبما أن $A_s = A/\lambda_s$ وفق المعادلة 23.4، فإن قوة القص الطرفية الناتجة من *انتقال رأسي* وحدي تُستخرج من المعادلة 26.8 بوضع $v_1 = 1$ و$\theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0$، أي $V = \frac{12EI_z}{L^3}$. وعند $x = 0$، من المعادلة 23.11، يكون

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{GA_s} \\ V &= \tfrac{12EI_z}{L^3} \end{aligned}\right\} v_s = \underbrace{\frac{12EI}{GA_sL^2}}_{\Phi}.$$

وهكذا يزيد تشوه القص الانتقال الكلي من 1 إلى $1+\Phi$.

الدوران نحدد بالطريقة نفسها التشوه الطفيلي المرتبط بدوران وحدي مفروض. مع أن الدوران θ_1 هو المفروض، فإنه يولّد قوة قص داخلية طفيلية، فتنتج بدورها تشوهات قص انتقالية يجب إلغاؤها، لأن درجة حرية واحدة فقط، هي الدوران هنا، يسمح لها بالتشوه، بينما يجب أن تبقى سائر الدرجات صفراً. تُستخرج قوة القص من المعادلة 26.8 بوضع $\theta_1 = 1$ و$\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$، فنحصل على $V = \frac{6EI_z}{L^2}$. وعند $x = 0$ يكون

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{A_sG} \\ V &= \tfrac{6EI_z}{L^2} \\ \Phi &= \tfrac{12EI}{GA_sL^2} \end{aligned}\right\} v_s = 0.5\Phi L.$$

ومن ثم يزيح تشوه القص طرف الكمرة، الذي كان يفترض أن يبقى انتقاله صفراً، إلى أسفل بمقدار $0.5\Phi L$.

40.7.2 تعديل مصفوفة صلابة العنصر

17 عند وجود تشوهات القص، يجب تعديل مصفوفة الصلابة في المعادلة 40.1 للأثرين الآتيين:

الانتقال: تُقسم، أو تُطبّع، معاملات العمودين الأول والثالث من مصفوفة الصلابة على $1+\Phi$، كي يصبح الانتقال الصافي عند الطرفين واحداً؛ وإلا كان الانتقال $1+\Phi$ بدلاً من 1.

الدوران: يؤخذ أثر تشوه القص كما يأتي:

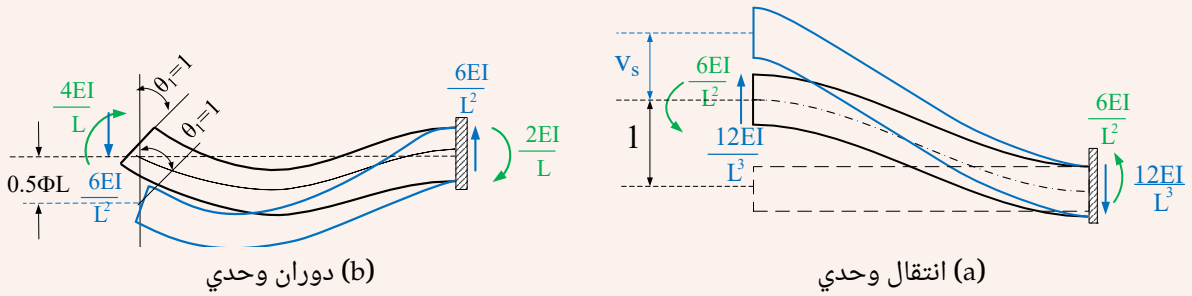
1. القوى المتولدة عند الطرفين من دوران وحدي عند الطرف 1، مع إهمال تشوه القص، هي

$$V_1 = -V_2 = \frac{6EI}{L^2}; \quad M_1 = \frac{4EI}{L}; \quad M_2 = \frac{2EI}{L}.$$

2. عند تطبيق دوران وحدي ينشأ عند الطرف 1 انتقال موجب صافٍ مقداره $0.5\Phi L$، من دون قوى إضافية.

[1] تذكّر أن $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ وأن $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) دوران وحدي (a) انتقال وحدي

شكل 40.5: تشوه القص الطفيلي الناتج من الإزاحات المفروضة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. يجب أن تكون جميع الإزاحات الأخرى صفراً عند تطبيق دوران وحدي ⇒، ولذلك ينبغي موازنة تشوه القص الطفيلي بتشوه مساوٍ له ومعاكس ⇒، أي تطبيق انتقال رأسي إضافي $\Delta = -0.5\Phi L$. وتكون القوى الإضافية المتولدة عند الطرفين، من العمود الأول، كما يأتي:

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 = \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^b_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s},$$

$$\Delta M_1 = \Delta M_2 = \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^b_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}.$$

وقد قُسمت المقامات مسبقاً على $1+\Phi$ في k^b.

4. بجمع جميع القوى، نحصل على القوى المتولدة من دوران وحدي عندما تؤخذ آثار تشوهي الانحناء والقص معاً في الحسبان.

$$V_1 = -V_2 = \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{\substack{\text{ناتج من}\\ \text{دوران وحدي}}} + \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^t_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{قص طفيلي}} = -\frac{6EI}{L^2}\frac{1}{1+\Phi},$$

$$M_1 = \underbrace{\underbrace{\frac{4EI}{L}}_{\substack{\text{ناتج من}\\ \text{دوران وحدي}}} + \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{قص طفيلي}} = \frac{4+\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L},$$

$$M_2 = \underbrace{\underbrace{\frac{2EI}{L}}_{\substack{\text{ناتج من}\\ \text{دوران وحدي}}} + \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{قص طفيلي}} = \frac{2-\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}.$$

18 تصبح مصفوفة صلابة العنصر المعطاة في المعادلة 40.1

$$\mathbf{k}^{\text{bv}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \end{bmatrix} \end{array}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

40.8 التواء فلاسوف

19 أعطت المعادلة 23.2.2 عزم الالتواء والعزم الثنائي بدلالة دورانات العقد الطرفية. وبتطبيق شروط حدود القوى الآتية، (Bhatt, 1986)

$$\begin{array}{lll} \text{الطرف } 1 & x=0, & T=-T_1, \quad B=-B_1, \\ \text{الطرف } 2 & x=L, & T=T_2, \quad B=B_2, \end{array}$$

نحصل على مصفوفة صلابة عنصر التواء مع تقييد الالتواء القطاعي، كما في الشكل 40.6:

$$\left\{\begin{array}{c} T_{x1} \\ B_{y1} \\ T_{x2} \\ B_{y2} \end{array}\right\} = \frac{GJ}{L} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} TW_{11} & TW_{12} & -TW_{11} & TW_{12} \\ & TW_{22} & -TW_{12} & TW_{24} \\ & & TW_{11} & -TW_{12} \\ & & & TW_{22} \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{\mathrm{V}}} \left\{\begin{array}{c} \beta_{x1} \\ \beta'_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \beta'_{y2} \end{array}\right\} \tag{40.3}$$

حيث

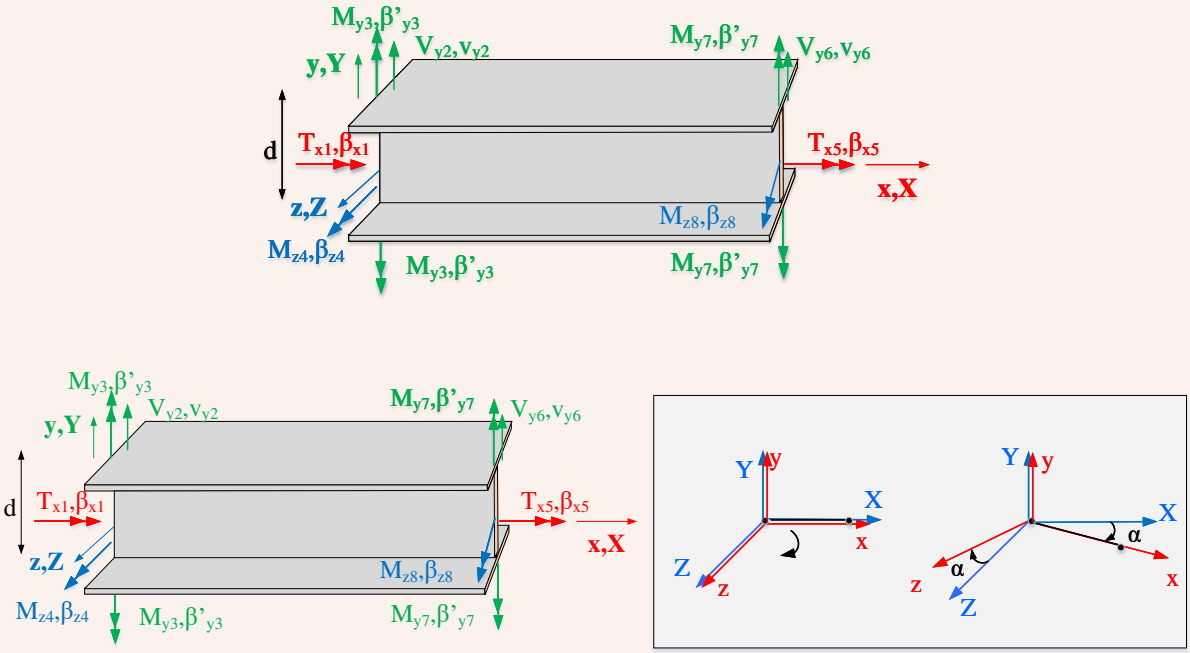
$$\begin{aligned} TW_{11} &= SpLD, \\ TW_{12} &= L(C-1)D, \\ TW_{22} &= L^2\left(C-\frac{S}{pL}\right)D, \\ TW_{24} &= L^2\left(\frac{S}{pL}-1\right)D, \\ D &= \frac{1.0}{\left[2(1-C)+SpL\right]}. \end{aligned}$$

20 لاحظ أن $B_1 = M_{y1}d$ و$B_2 = M_{y2}d$ وفق المعادلة 23.14.

21 غير أن هذه ليست مصفوفة صلابة العنصر الكاملة، إذ يجب إضافة حدود التواء سان-فنان ، أي $\mathbf{k}^{gw} = \mathbf{k}^{g} \cup \mathbf{k}^{V}$:

$$\left\{\begin{array}{c} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} \beta_{x1} & v_{y1} & \beta'_{y1} & \beta_{z1} & \beta_{x2} & v_{y2} & \beta'_{y2} & \beta_{z2} \\ TW'_{11}+\frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 & -TW'_{11}-\frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 \\ & \frac{12EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12}{EI}L^2 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ & & TW'_{22} & 0 & -TW'_{12} & TW'_{24} & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ & & & & TW'_{11}+\frac{GJ}{L} & 0 & -TW'_{12} & 0 \\ & & & & & \frac{12EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & & TW'_{22} & 0 \\ & & & & & & & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{gw}} \left\{\begin{array}{c} \beta_{x1} \\ v_{y2} \\ \beta'_{y3} \\ \beta_{z4} \\ \beta_{x5} \\ v_{y6} \\ \beta'_{y7} \\ \beta_{z8} \end{array}\right\}.$$

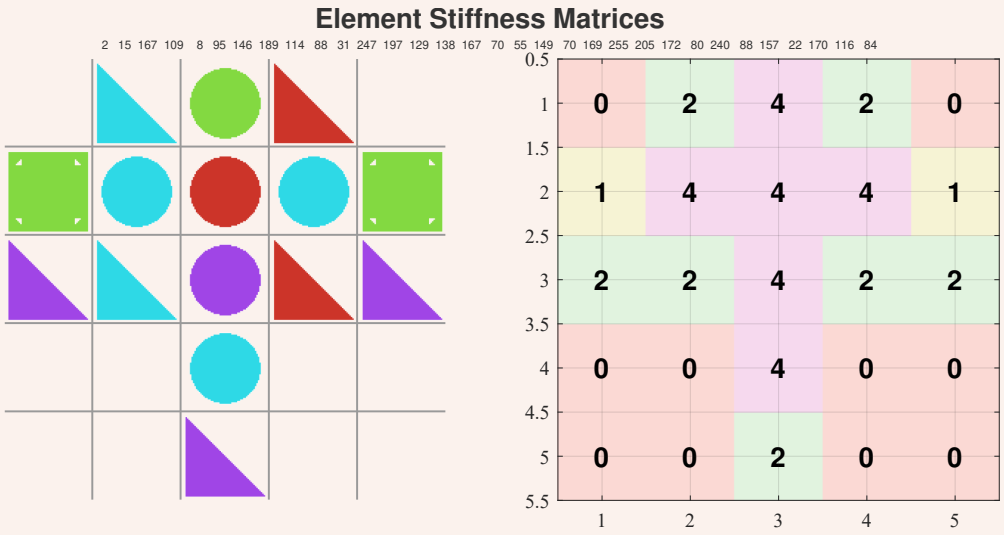
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 40.6: القوى والإزاحات الطرفية لعنصر التواء مع تقييد الالتواء القطاعي

حيث $TW'_{ij} = \frac{GJ}{L} TW_{ij}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الرمز التعريفي الخاص بهذا الفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

41 طريقة الصلابة؛ 1: المنشآت المتعامدة

ملخص

أصبح مفهوم مصفوفة صلابة العنصر واضحاً الآن. والخطوة التالية هي توسيع هذا المفهوم إلى مصفوفة صلابة المنشأ وتحليل منشأ كامل. غير أن علينا مواءمة مصفوفة صلابة العنصر مع نظام الإحداثيات العام للمنشأ. ومع أن المهمة تبدو مباشرة، نؤجلها إلى الفصل التالي، ونبسّط المسألة هنا بقصرها على المنشآت المتعامدة، حيث يمكن تعديل مصفوفة صلابة العنصر بالمعاينة. ويتيح هذا التبسيط تقديم طريقة منهجية لاتزان المنشأ كله بصورة تدريجية. وبعد حساب الإزاحات نستعيد القوى الداخلية في العناصر. لذلك يؤدي هذا الفصل دوراً محورياً في تقديم طريقة قابلة للبرمجة توسّع الحسابات اليدوية لطريقتي توزيع العزوم والميل والانحراف المقدمتين في الفصل 27.

41.1 مقدمة 1344
41.2 النظرية 1345
41.2.1 إعادة النظر في طريقة المرونة . 1345
41.2.2 طريقة الصلابة المباشرة 1346
41.2.3 من العنصر إلى المنشأ 1347
41.3 أمثلة 1347
41.3.1 مثال 41.1: كمرة متعامدة . . . 1347
41.3.2 مثال 41.2: إطار متعامد 1350
41.3.3 مثال 41.3: شبكة إنشائية . . . 1357
41.3.4 مثال 41.4: إطار هجين 1361
41.3.5 مثال 41.5: شبكة إنشائية هجينة 1365

41.1 مقدمة

1 اشتُقت في الفصل السابق أولاً علاقات الإزاحة–القوة لأنواع مختلفة من العناصر أحادية البعد أو القضيبية، ثم استُعملت هذه العلاقات لتعريف مصفوفات صلابة العناصر المفردة في إحداثياتها المحلية.

2 نسعى في هذا الفصل إلى إجراء عمليات مماثلة، ولكن لمنشأ متعامد في الإحداثيات العامة.

3 كانت نقطة البدء في الفصل السابق علاقات الإزاحة–القوة الأساسية التي أعطت مصفوفات صلابة العناصر $[\mathbf{k}]$.

4 أما نقطة البدء هنا فهي مصفوفات صلابة العناصر نفسها $[\mathbf{k}]$، والهدف تحديد مصفوفة صلابة المنشأ $[\mathbf{K}]$، التي يعطي معكوسها إزاحات العقد.

5 اشتُقت مصفوفات صلابة العناصر لعناصر مقيدة بالكامل.

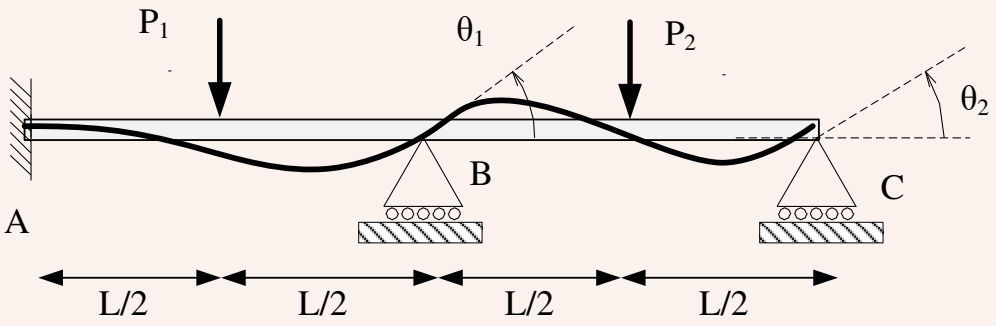
6 يقتصر هذا الفصل على المنشآت المتعامدة، ويأتي التعميم لاحقاً. كما تُقصر مصفوفات الصلابة على درجات الحرية غير المقيدة.

7 ستتضح من الأمثلة العلاقات المتبادلة بين مصفوفة صلابة المنشأ وإزاحات العقد وأفعال الأطراف المثبتة. ثم تُعمم الطريقة في الفصل 43 لتكوين خوارزمية تجمع مصفوفة الصلابة العامة للمنشأ من مصفوفات عناصره المفردة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

41.2 النظرية

8 نتخذ المسألة في الشكل 41.1 مدخلاً إلى طريقة الصلابة، ونلاحظ وجود إزاحتين مجهولتين فقط، أو بدقة أكبر درجتي حرية عامتين هما θ_1 وθ_2.



شكل 41.1: مثال كمرة للمقارنة بين طريقتي المرونة والصلابة

9 وبعبارة موجزة:

المرونة: ما القوى، أو ردود الأفعال، التي تحقق توافق الإزاحات عند درجات الحرية المحررة؟

الصلابة: ما الإزاحات التي تحقق الاتزان؟

41.2.1 إعادة النظر في طريقة المرونة

10 لو حُلّت المسألة بطريقة القوى، أو المرونة، لاتبعنا الخطوات الآتية:

1. نجعل المنشأ محدداً استاتيكياً بإزالة ردّي فعل اعتباطياً، شريطة بقاء المنشأ مستقراً، فتصبح الكمرة محددة استاتيكياً.
2. بافتراض إزالة المسندين المتدحرجين، نحسب الانحرافين المقابلين الناتجين من الحمل الفعلي، Δ_B وΔ_C.
3. نطبق حملاً وحدياً عند النقطة B ثم عند C، ونحسب الانحرافات f_{ij} عند العقدة i الناتجة من قوة وحدية عند العقدة j.
4. نكتب معادلة توافق الإزاحات:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

5. نعكس المصفوفة ونحل لإيجاد ردود الأفعال.

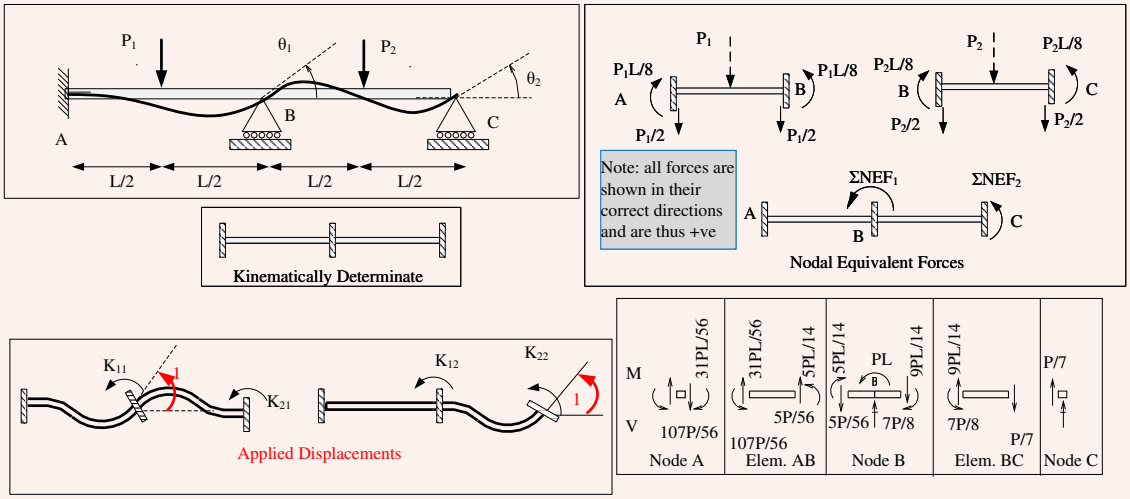
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

41.2.2 طريقة الصلابة المباشرة

للسياق التاريخي، انظر §12.2.5

11 نحل هذه المسألة البسيطة بطريقة الصلابة. ففي التقسيم لا نعالجها مسألة مستمرة بحل معادلة تفاضلية جزئية، بل مسألة متقطعة بالجبر الخطي. ويركز التقسيم على الكميات العقدية؛ فإذا وجد حمل على امتداد العنصر، حُسب حمله العقدي المكافئ، وهو مماثل لأفعال الأطراف المثبتة لكن بإشارة معاكسة.

1. الخطوة الأولى جعل المنشأ محدداً حركياً، بخلاف جعله محدداً استاتيكياً في طريقة المرونة. ويعني ذلك هنا تقييد جميع درجات الحرية ومنع دوران العقد، كما في الشكل 41.2.



شكل 41.2: مثال كمرة لتحديد درجة عدم التحديد الحركي

2. نحدد بعد ذلك أفعال الأطراف المثبتة الناتجة من حمل العنصر، ونجمعها عند كل درجة حرية: مجموع الحمل العقدي المكافئ ΣNEL_1 وΣNEL_2.
3. في الخطوة الثالثة نطبق إزاحة وحدية، وهي دوران هنا، على كل درجة حرية على حدة، ونحدد في كل حالة قوى رد الفعل الداخلية K_{11} وK_{21}، ثم K_{12} وK_{22}. ونستعمل $[\mathbf{K}]$ بدلاً من $[\mathbf{k}]$ لأن هذه قوى في نظام الإحداثيات العام. كما نركز فقط على قوى رد الفعل المقابلة لدرجة حرية عامة؛ ولذلك لا نحاول إيجاد رد الفعل عند العقدة A.
4. وأخيراً نكتب معادلة الاتزان عند كل عقدة:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Sigma\text{NEL}_1 \\ \Sigma\text{NEL}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}.$$

12 لاحظ أن أفعال الأطراف المثبتة تقع في الطرف الأيمن لأنها حُددت بوصفها ردود أفعال على الحمل المطبق. وبدقة، يجب أن يظهر الحمل في الطرف الأيسر، وهو الحمل العقدي المكافئ لحمل العنصر، كما سيتضح لاحقاً.

13 وكما في مصفوفة صلابة العنصر، يمثل كل مدخل K_{ij} في مصفوفة الصلابة العامة القوة الداخلية على امتداد درجة الحرية i الناتجة من إزاحة معممة وحدية على امتداد درجة الحرية j، وكلتاهما في نظام الإحداثيات العام.

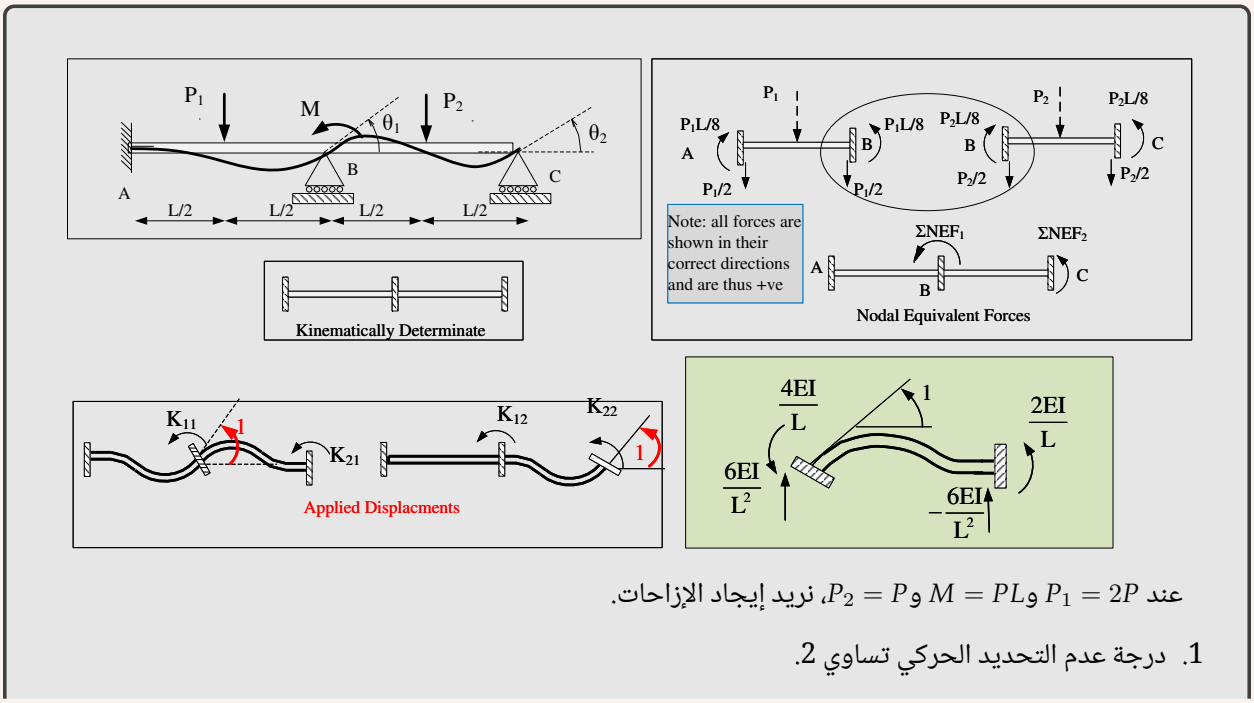
41.2.3 من العنصر إلى المنشأ

14 اشتُقت مصفوفات صلابة العناصر المفردة سابقاً في نظام الإحداثيات المحلي، ورمز إليها بحروف صغيرة **k**.

15 ويلزم الآن اشتقاق مصفوفة صلابة المنشأ في نظام الإحداثيات العام، ويرمز إليها بحروف كبيرة **K**. ولا يتناول هذا الفصل إلا المنشآت المتعامدة، حيث يكون التحويل من **k** إلى **K** بديهياً، وكذلك تحويل القوى والإزاحات.

41.3 أمثلة

41.3.1 مثال 41.1: كمرة متعامدة



عند $P_1 = 2P$ و$M = PL$ و$P_2 = P$، نريد إيجاد الإزاحات.

1. درجة عدم التحديد الحركي تساوي 2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. باستعمال اصطلاح الإشارة المحدد سابقاً، نحسب الحمل العقدي المكافئ للحمل المطبق على امتداد العضو:

$$\Sigma\text{NEF}_1 = \underbrace{\frac{P_1 L}{8}}_{BA} - \underbrace{\frac{P_2 L}{8}}_{BC} = \frac{2PL}{8} - \frac{PL}{8} = \frac{PL}{8},$$

$$\Sigma\text{NEF}_2 = \underbrace{\frac{PL}{8}}_{CB}.$$

3. إذا لزم $\frac{4EI}{L}$، أي k_{44}^{BA}، لتدوير BA، و$\frac{4EI}{L}$، أي k_{22}^{BC}، لتدوير BC، لزم مجموع قوة مقداره $\frac{8EI}{L}$ لتدوير BA وBC معاً. ومن ثم يكون مجموع صلابتي الدوران عند درجة الحرية العامة 1 هو $K_{11} = \frac{8EI}{L}$.

4. وبالمثل $K_{21} = \frac{2EI}{L}$، أي k_{42}^{BC}. وإذا دُوّرت درجة الحرية 2 بزاوية وحدية، كان $K_{22} = \frac{4EI}{L}$، أي k_{22}^{BC}، و$K_{12} = \frac{2EI}{L}$، أي k_{42}^{BC}. معادلة الاتزان:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{NEF}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

ولدينا $P_{ext} - P_{int} = 0$ لا $P_{ext} + P_{int} = 0$، لأن القوى الداخلية تقاوم الخارجية بمقدار مساوٍ واتجاه معاكس. وبالتعويض وإعادة الترتيب:

$$\begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}.$$

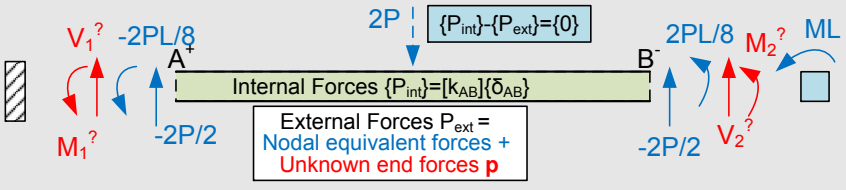
5. نعكس المصفوفة 2×2:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}.$$

6. نحدد بعد ذلك القوى الداخلية.

7. نتذكر أن $\{\delta\} = [\mathbf{k}]\{\mathbf{p}\}$ لكل عنصر، وفي هذه الحالة $\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\}$ و$\{\delta\} = \{\boldsymbol{\Delta}\}$ للعنصر AB. وقد اشتُقت مصفوفة صلابة العنصر سابقاً، ودرجات الحرية المحلية والعامة متطابقة هنا. ونحسب الآن القوى الداخلية للعنصر.

8. تكتب معادلة اتزان العنصر AB على مستوى العنصر كما يأتي، مع ضرورة إدراج الأحمال العقدية المكافئة للمحافظة على الاتزان:



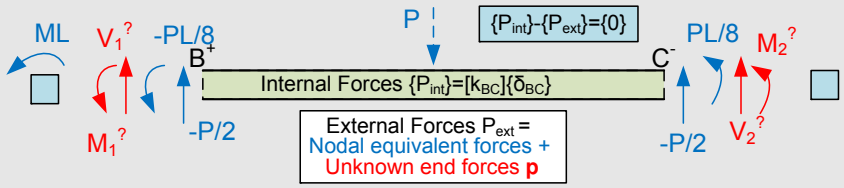
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{2P}{2} \\ -\frac{2PL}{8} \\ -\frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{AB}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{AB}\}}}_{p_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

تسمى هذه الخطوة استعادة القوى، أي تحديد القوى الداخلية من الإزاحات العقدية. وبالحل:

$$\lfloor\ V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\ \rfloor = \lfloor\ \tfrac{107}{56}P \quad \tfrac{31}{56}PL \quad \tfrac{5}{56}P \quad \tfrac{5}{14}PL\ \rfloor.$$

9. وبالمثل للعنصر BC:



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{BC}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{BC}\}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

أو

$$\lfloor\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4\ \rfloor = \lfloor\ \tfrac{7}{8}P \quad \tfrac{9}{14}PL \quad -\tfrac{P}{7} \quad 0\ \rfloor.$$

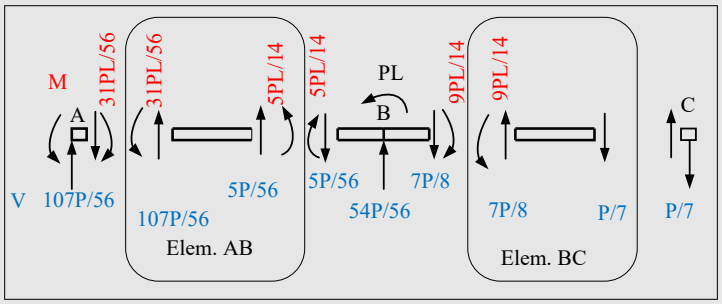
10. يقود هذا المثال البسيط إلى الملاحظات الآتية:

(a) تسهم في العقدة A مصفوفة العنصر AB وحدها، بينما تسهم في العقدة B مصفوفتا العنصرين AB وBC.

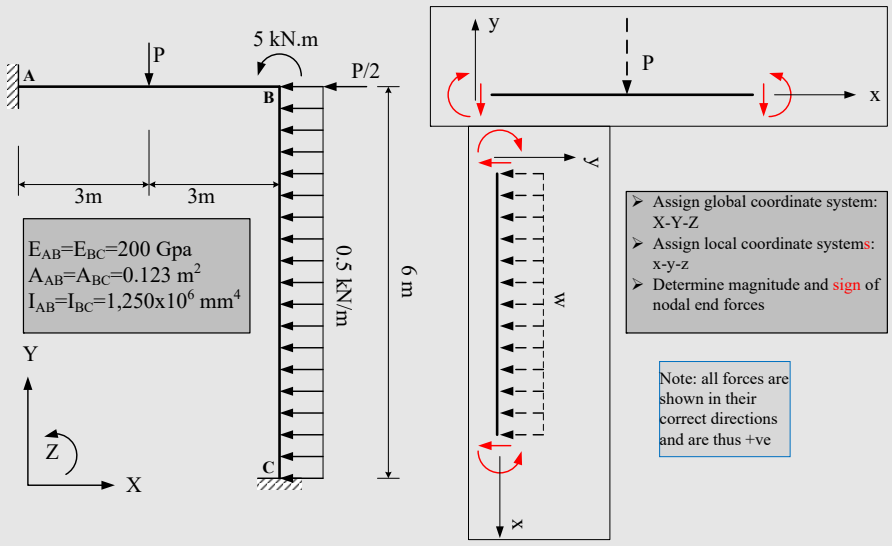
(b) نلاحظ أن $p_3^{AB} \neq p_1^{BC}$ مع أن كليهما يمثل قوة قص عند العقدة B، والفرق بينهما يساوي رد الفعل عند B. وبالمثل $p_4^{AB} \neq p_2^{BC}$ بسبب العزم الخارجي المطبق عند العقدة B.

(c) يجب إنهاء الحل بمخطط الجسم الحر ومخططي القص والعزم:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



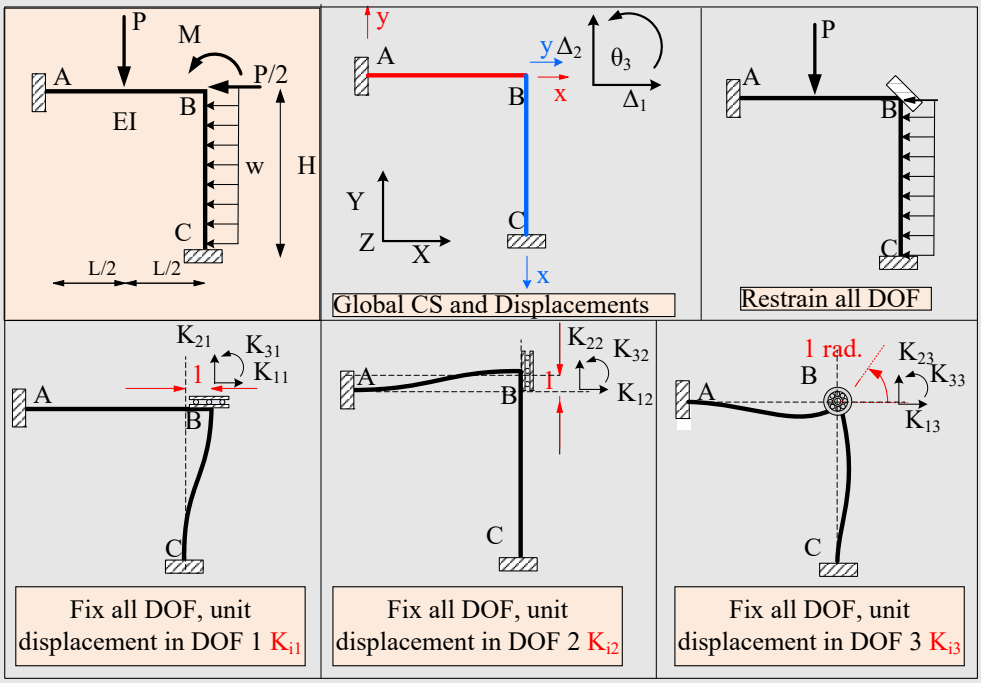
41.3.2 مثال 41.2: إطار متعامد



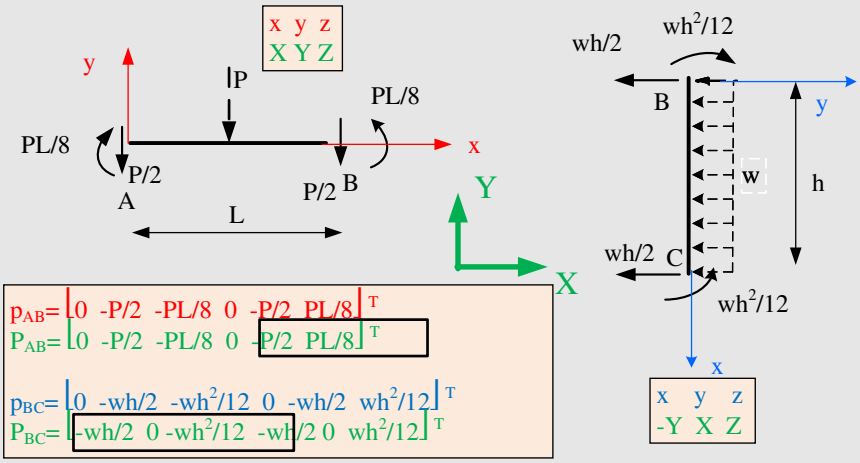
$P = 2$ كيلونيوتن، و$L = H = 6$ م، و$M = 5$ كيلونيوتن.م، و$w = 0.5$ كيلونيوتن/م، و$E = 2 \times 10^8$ كيلوباسكال، و$A = 0.123$ م^2، و$I^b = I^c = 0.00125$ م^4.

1. نرجع إلى الشكل الآتي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



2. مع أخذ التشوهات المحورية في الحسبان، توجد ثلاث درجات حرية عامة: Δ_1 وΔ_2 وθ_3.
3. نقيّد جميع درجات الحرية، فنجعل المنشأ محدداً حركياً.
4. نحدد الأحمال العقدية المكافئة لكل عنصر في نظام إحداثياته المحلي، مع افتراض تعريف العنصر 1 من A إلى B والعنصر 2 من B إلى C:



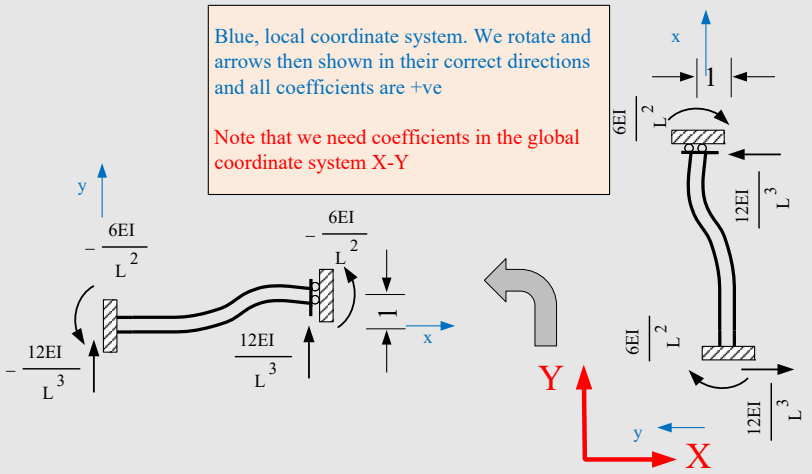
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\underbrace{\lfloor\ p_1^A \quad p_2^A \quad p_3^A \mid p_4^B \quad p_5^B \quad p_6^B\ \rfloor}_{AB} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8}\ \rfloor$$
$$= \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad -\tfrac{(2)(6)}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad \tfrac{(2)(6)}{8}\ \rfloor$$
$$= \lfloor\ 0 \quad -1.0 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.0 \quad 1.5\ \rfloor,$$
$$\underbrace{\lfloor\ p_1^B \quad p_2^B \quad p_3^B \mid p_4^C \quad p_5^C \quad p_6^C\ \rfloor}_{BC} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12}\ \rfloor$$
$$= \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad -\tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad \tfrac{(0.5)(6)^2}{12}\ \rfloor$$
$$= \lfloor\ 0 \quad -1.5 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.5 \quad 1.5\ \rfloor.$$

ويجب جمع القوى العقدية المكافئة عند العقدة B.

5. نطبق إزاحة وحدية على كل واحدة من درجات الحرية العامة الثلاث لتحديد مصفوفة صلابة المنشأ العامة. ويمثل كل مدخل K_{ij} القوة الداخلية عند درجة الحرية i الناتجة من إزاحة وحدية عند درجة الحرية j.

6. باستدعاء علاقات القوة–الإزاحة المشتقة سابقاً، نجمع مصفوفة الصلابة العامة من إسهامات العنصرين AB وBC:



7. نكمل الجدول الآتي؛ تمثل الأعمدة الإزاحات المفروضة عند درجة الحرية j، وتمثل الصفوف القوى الداخلية المتولدة في العناصر عند درجة الحرية i، وكلها في نظام الإحداثيات العام.
   - $K_{1,2} = 0$ لأن فرض إزاحة أفقية عند درجة الحرية 2 مع تقييد جميع الإزاحات الأخرى لا يولّد قوة داخلية في أي من العنصرين.
   - يمثل K_{31} القوى الداخلية، وهي عزوم هنا، الناتجة من إزاحة وحدية مفروضة عند درجة الحرية الأفقية 1. لا تفعّل هذه الإزاحة العنصر AB، لكنها تفعّل انحناء BC.
   - جميع الحدود القطرية موجبة، والجدول متناظر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} θ_3
K_{1j} (F_X)	AB	$\frac{EA}{L}$	0	0
	BC	$\frac{12EI^c}{H^3}$	0	$\frac{6EI^c}{H^2}$
K_{2j} (F_Y)	AB	0	$\frac{12EI^b}{L^3}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$
	BC	0	$\frac{EA}{H}$	0
K_{3j} (M_Z)	AB	0	$-\frac{6EI^b}{L^2}$	$\frac{4EI^b}{L}$
	BC	$\frac{6EI^c}{H^2}$	0	$\frac{4EI^c}{H}$

8. بجمع الإسهامات تكون مصفوفة الصلابة العامة للمنشأ $[\mathbf{K}]$:

$$[\mathbf{K}] = \begin{matrix} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{21}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{23}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{11}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{13}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{65}^{AB}+k_{31}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{33}^{BC} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

9. بالتعويض:

$$[\mathbf{K}] = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن الصلابة المحورية EA/L تساوي 4.1×10^6، بينما الصلابة الانحنائية $12EI/H^3$ تساوي 0.0071×10^6. والصلابة المحورية أعلى دائماً بكثير من الصلابة الانحنائية. ويلزم التعبير عن P_{ext} في نظام الإحداثيات العام. ومن المعادلات السابقة:

$$\underbrace{\lfloor\ p_1^A \quad p_2^A \quad p_3^A \mid p_4^B \quad p_5^B \quad p_6^B\ \rfloor}_{AB} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8}\ \rfloor,$$

$$\underbrace{\lfloor\ p_1^B \quad p_2^B \quad p_3^B \mid p_4^C \quad p_5^C \quad p_6^C\ \rfloor}_{BC} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12}\ \rfloor.$$

وبكتابتها في نظام الإحداثيات العام:

$$\underbrace{\lfloor\ P_1^A \quad P_2^A \quad P_3^A \mid P_4^B \quad P_5^B \quad P_6^B\ \rfloor}_{AB} = \lfloor\ 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8}\ \rfloor,$$

$$\underbrace{\lfloor\ P_1^B \quad P_2^B \quad P_3^B \mid P_4^C \quad P_5^C \quad P_6^C\ \rfloor}_{BC} = \lfloor\ -\tfrac{wH}{2} \quad 0 \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid -\tfrac{wH}{2} \quad 0 \quad \tfrac{wH^2}{12}\ \rfloor.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10. تكتب معادلة الاتزان العامة الآن كما يأتي، مع إبقاء w والعزم M عند العقدة B لأغراض الإيضاح:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} -\frac{P}{2} \\ 0 \\ M \end{array}\right\}}_{P_{ext}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} -\frac{wH}{2} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8}-\frac{wH^2}{12} \end{array}\right\}}_{NEL} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{array}\right]}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}.$$

11. بالتعويض:

$$\left\{\begin{array}{c} -0.5 \\ 0 \\ 5 \end{array}\right\} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} -1.5 \\ -0.5 \\ -0.75 \end{array}\right\}}_{NEL} = \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{array}\right]}_{[\mathbf{K}]} \left\{\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\}.$$

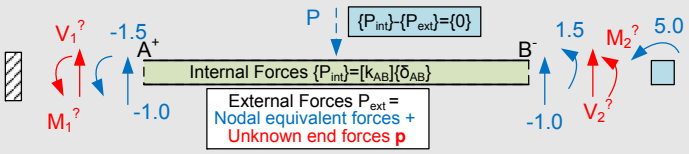
12. نحل لإيجاد الإزاحات:

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\} = 10^6 \left[\begin{array}{ccc} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{array}\right]^{-1} \left\{\begin{array}{c} -2 \\ -0.5 \\ 4.25 \end{array}\right\},$$

أو

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\} = 10^{-6} \left\{\begin{array}{c} -0.61 \text{ m} \\ 0.0084 \text{ m} \\ 12.82 \text{ radian} \end{array}\right\}.$$

13. للحصول على القوى الداخلية للعناصر، نضرب مصفوفة صلابة كل عنصر في إزاحاته المحلية. وتتطابق الإحداثيات المحلية والعامة للعنصر AB:



$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\}}_{P_{ext}} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{array}\right\} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right]}_{P_{int}} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} = \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & -4.1\times 10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & -13,889. & 41,667. \\ - & - & - & 0 & -41,667. & 83,333. \\ - & - & - & 4.1\times 10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 13,889. & -41,667 \\ - & - & -. & 0 & -41,667 & 166,667. \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{AB}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ 0.0084 \\ 12.82 \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\delta}^{AB}} - \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -0.5 \\ -0.75 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{array}\right\}}_{NEL^{AB}}.$$

أو

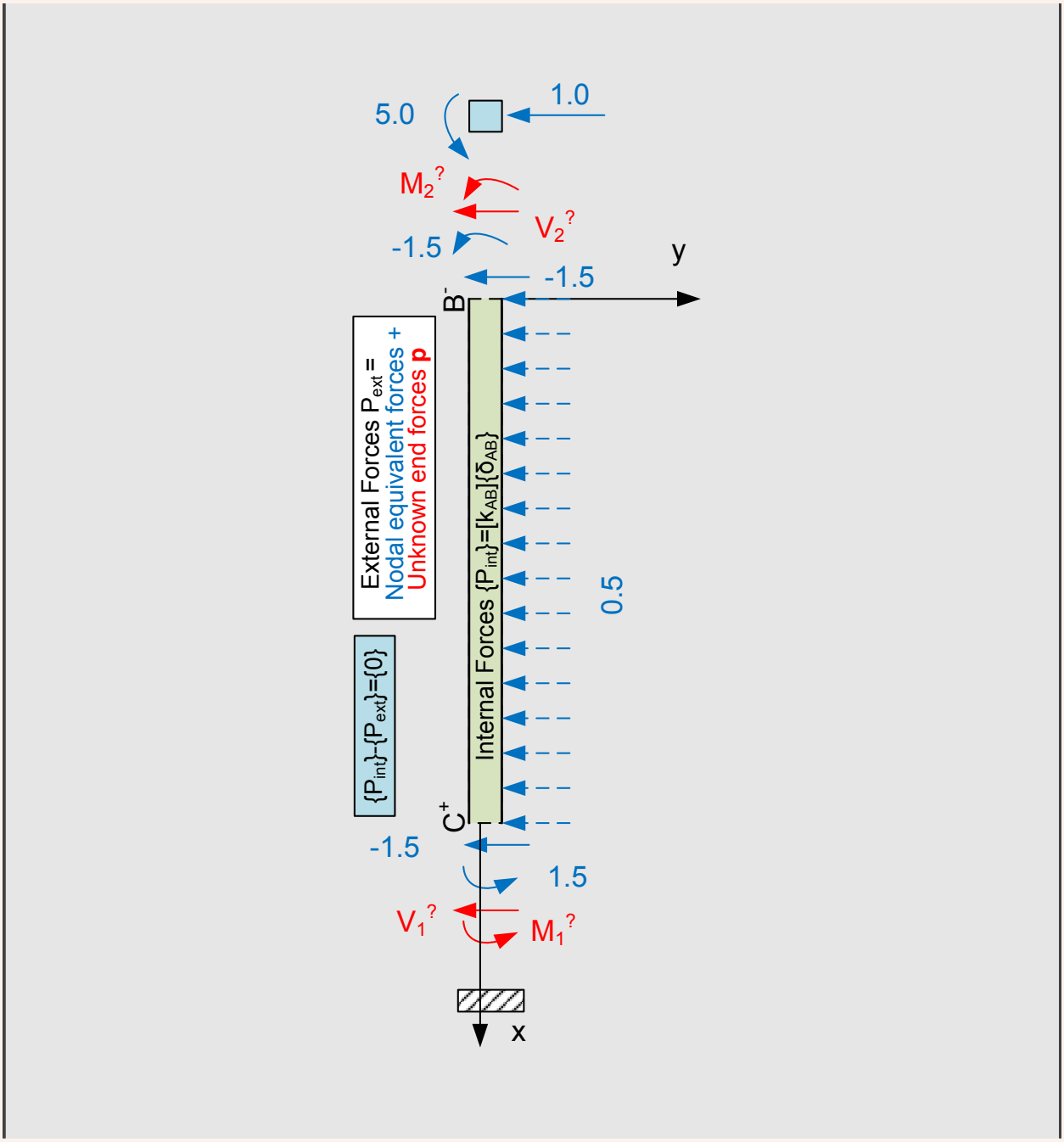
$$\left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 2.52\ \text{kN} \\ 1.03\ \text{kN} \\ 1.82\ \text{kN.m.} \\ -2.52\ \text{kN} \\ -0.034\ \text{kN} \\ 1.39\ \text{kN.m} \end{array}\right\}.$$

14. لا تتطابق الإحداثيات المحلية والعامة للعنصر BC، ولذلك يجب تحويل الإزاحات من مركباتها العامة إلى المحلية. وبالمعاينة:

المحلي	x	y	z
العام	$-Y$	$+X$	$+Z$

15. ومن ثم تكون القوى الداخلية للعنصر BC:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

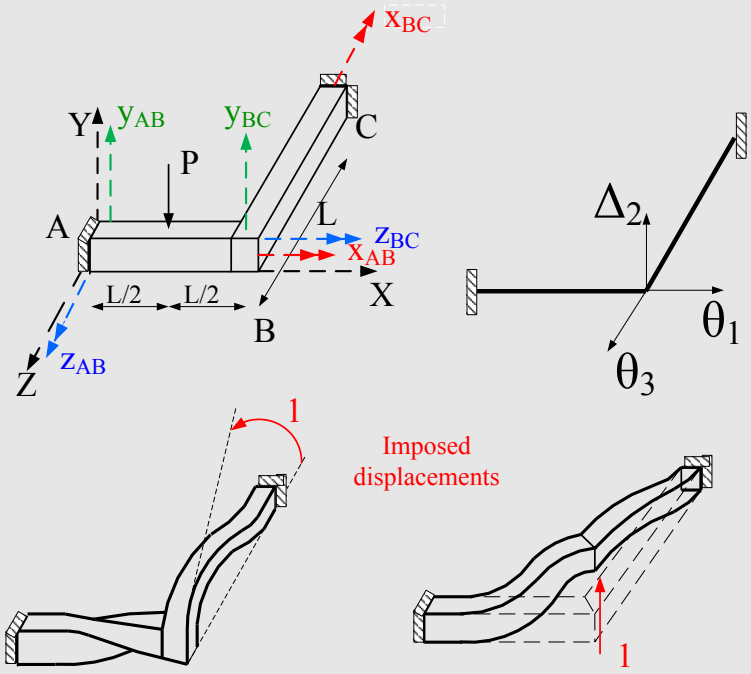
$$= \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 13,888.9 & 41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 16,6667. & - & - & - \\ -4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & -13,888.9 & -41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 83,333.3 & - & - & - \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{BC}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} -0.0084 \\ -0.61 \\ 12.82 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\delta}^{BC}} - \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -0.034\text{kN} \\ 2.026\text{kN} \\ 3.612\text{kN.m} \\ 0.0344\text{kN} \\ 0.974\text{kN} \\ -0.456\text{kN.m} \end{array}\right\}.$$

يُعطى كود MATLAB® لهذا المثال في §I.2.4.

41.3.3 مثال 41.3: شبكة إنشائية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



للعنصرين صلابتان متطابقتان للانحناء والالتواء، EI وGJ.

1. نحدد درجات الحرية الثلاث θ_1 وΔ_2 وθ_3.
2. نقيّد جميع درجات الحرية ونحدد الأحمال العقدية المكافئة:

$$\left\{\begin{array}{c} T_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{array}\right\}}_{\text{عند العقدة A}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{array}\right\}}_{\text{عند العقدة B}}.$$

3. نطبق إزاحة وحدية على امتداد كل درجة حرية ونحدد القوى الداخلية:

درجة الحرية العامة 1

(a) AB (التواء): $K_{11}^{AB} = \frac{GJ}{L}$، و$K_{21}^{AB} = 0$، و$K_{31}^{AB} = 0$.

(b) BC (انحناء): $K_{11}^{BC} = \frac{4EI}{L}$، و$K_{21}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$، و$K_{31}^{BC} = 0$.

درجة الحرية العامة 2

(a) AB (انحناء): $K_{12}^{AB} = 0$، و$K_{22}^{AB} = \frac{12EI}{L^3}$، و$K_{32}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$.

(b) BC (انحناء): $K_{12}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}$، و$K_{22}^{BC} = \frac{12EI}{L^3}$، و$K_{32}^{BC} = 0$.

درجة الحرية العامة 3

(a) AB (انحناء): $K_{13}^{AB} = 0$، و$K_{23}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$، و$K_{33}^{AB} = \frac{4EI}{L}$.

(b) BC (التواء): $K_{13}^{BC} = 0$، و$K_{23}^{BC} = 0$، و$K_{33}^{BC} = \frac{GJ}{L}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. نجمع مصفوفة صلابة المنشأ:

$$
\begin{aligned}
2\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k^{AB}_{44}+k^{BC}_{33} & k^{AB}_{45}+k^{BC}_{32} & k^{AB}_{46}+k^{BC}_{31} \\ k^{AB}_{54}+k^{BC}_{23} & k^{AB}_{55}+k^{BC}_{22} & k^{AB}_{56}+k^{BC}_{21} \\ k^{AB}_{64}+k^{BC}_{13} & k^{AB}_{55}+k^{BC}_{12} & k^{AB}_{66}+k^{BC}_{11} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{AB}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{BC}]} \\
&= \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \alpha L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha L^2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{Structure}]}.
\end{aligned}
$$

حيث $\alpha = \frac{GJ}{EI}$، وقد افترض في المعادلة الأخيرة أن العقدة 1 للعنصر BC هي C والعقدة 2 هي B.

5. معادلة اتزان المنشأ في الصورة المصفوفية:

$$
\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{P}_{nodes}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P^B_{el}}}_{\mathbf{P}_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \Delta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\Delta}\}}}_{\mathbf{P}_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.
$$

6. بعكس المصفوفة وحل الإزاحات:

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{16EI}\frac{5+2\alpha}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \\ -\frac{PL^3}{96EI}\frac{5+2\alpha}{1+\alpha} \\ -\frac{3PL^2}{16EI}\frac{1}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \end{Bmatrix}.
$$

7. الربط بين درجات الحرية المحلية والعامة:

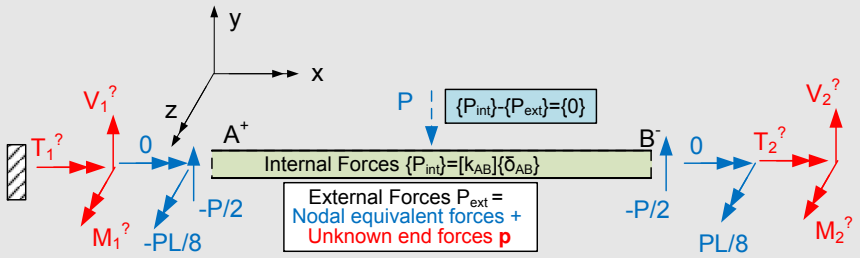
$$
\text{AB}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & X \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & Z \end{Bmatrix}; \qquad \text{BC}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & -Z \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & X \end{Bmatrix}.
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8. نحدد القوى الداخلية بضرب مصفوفة صلابة كل عنصر $[\mathbf{k}]$ في متجه إزاحاته العقدية $\{\delta\}$، على أن يكون كلاهما في نظام الإحداثيات المحلي. وللعنصرين AB وBC تكون متجهات الإزاحة العقدية:

$$\left\{\begin{array}{c}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ \hline \delta_4\\ \delta_5\\ \delta_6\end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\}}_{AB} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\theta_3\\ \Delta_2\\ \theta_1\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{BC}.$$

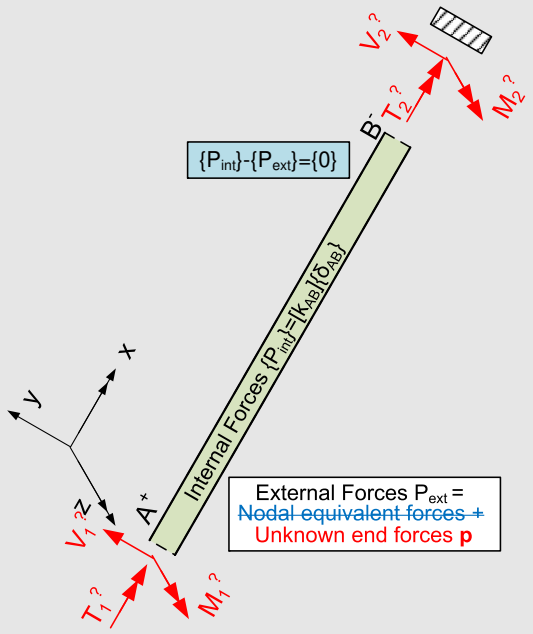
العنصر AB



$$\underbrace{\underbrace{\left\{\begin{array}{c}p_1^?\\ p_2^?\\ p_3^?\\ \hline p_4^?\\ p_5^?\\ p_6^?\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{int-for}^{AB}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ -P/2\\ -PL/8\\ \hline 0\\ -P/2\\ PL/8\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{el}^{BC}}}_{\mathbf{p}_{ext}^{AB}} - \underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccc}\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L}\\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L}\end{array}\right]\end{array}}_{\mathbf{p}_{int}^{AB}} \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}.$$

العنصر BC

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

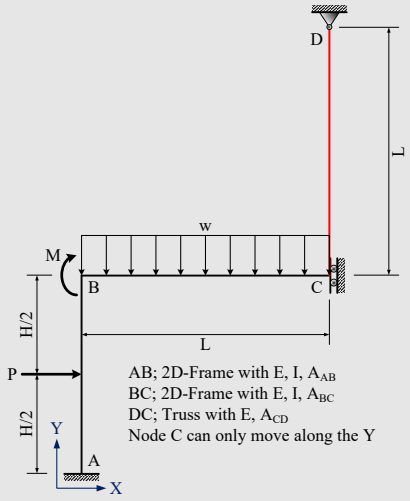


$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}^{BC}_{int-for}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}^{BC}_{el}}}_{\mathbf{p}^{BC}_{ext}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}^{BC}_{int}} \underbrace{\begin{Bmatrix} -\theta_3 \\ \Delta_2 \\ \theta_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}^{BC}_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

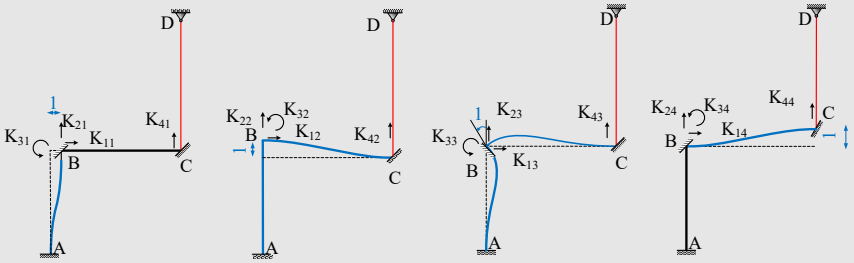
41.3.4 مثال 41.4: إطار هجين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نحلل هذا الإطار عند $E = 200$ غيغاباسكال، و$I = 200 \times 10^6$ مم^4، و$H = L_{AB} =$ 8 م، و$L_{BC} = L_{DC} =$ 10 م، و$A_{AB} =$ $A_{BC} =$ 5,000 مم^2، و$A_{DC} =$ 100 مم^2، و$P =$ 10 كيلونيوتن، و$M = P \cdot L_{BC}$، و$w =$ 1 كيلونيوتن/م. تُستعمل وحدات غيغاباسكال وكيلونيوتن ومليمتر.



1. درجات الحرية العامة هي Δ_1^{BH} وΔ_2^{BV} وΔ_3^{BZ} وΔ_4^{CV}.
2. نحدد درجات الحرية العامة ونرسم التشوه المقابل:



3. نجدول القوى الفعلية المقابلة لكل إزاحة وحدية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

		K_{i1}	K_{i2}	K_{i3}	K_{i4}
		Δ_1	Δ_2	θ_3	Δ_4
K_{1i}	AB	$\frac{12EI}{L_{AB}^3}$	0	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0
	BC	$\frac{EA_{BC}}{L_{BC}}$	0	0	0
	DC	0	0	0	0
K_{2i}	AB	0	$\frac{EA_{AB}}{L_{AB}}$	0	0
	BC	0	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	0
K_{3i}	AB	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0	$\frac{4EI}{L_{AB}}$	0
	BC	0	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{4EI}{L_{BC}}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$
	DC	0	0	0	0
K_{4i}	AB	0	0	0	0
	BC	0	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	$\frac{EA_{DC}}{L_{DC}}$

4. نجمع مصفوفة الصلابة العامة تحليلياً ونكتب معادلة الاتزان العامة:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_{AB}^3} + \frac{EA_{BC}}{L_{BC}} & 0 & \frac{6EI}{L_{AB}^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA_{AB}}{L_{AB}} + \frac{12EI}{L_{BC}^3} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} \\ \frac{6EI}{L_{AB}^2} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{4EI}{L_{AB}} + \frac{4EI}{L_{BC}} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{12EI}{L_{BC}^3} \frac{EA_{DC}}{L_{DC}} \end{bmatrix}}_{K_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}}_{\Delta}.$$

حيث NF قوى عقدية وNEF قوى عقدية مكافئة. ولتحديد Δ:

$$\Delta = [K_{tt}]^{-1}(NF + NEF).$$

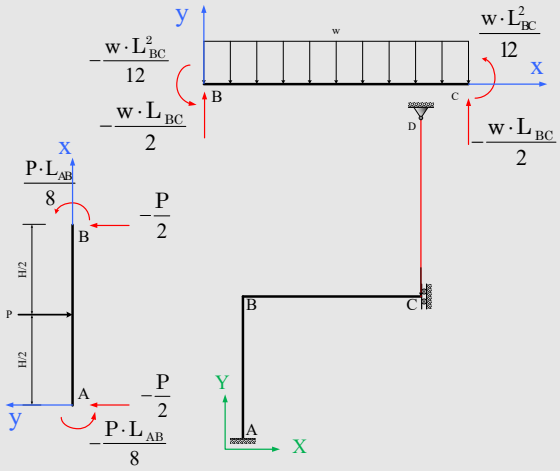
5. قبل حساب قوى الأطراف العقدية، نربط نظامي الإحداثيات المحلي والعام:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المحلي	x	y	z
AB	Y	X-	Z
BC	X	Y	Z

العام	X	Y	Z
AB	y-	x	z
BC	x	y	z

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}.$$



6. نعوّض بالقيم المعطاة، ثم نحدد قوى الأطراف العقدية ونحل لإيجاد الإزاحات العقدية. يوجد نص MATLAB® في §I.2.5:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1640\ [mm] \\ -2.36 \times 10^{-5}\ [mm] \\ -0.00308\ [radian] \\ -4.999\ [mm] \end{Bmatrix}.$$

7. نحدد القوى الداخلية في جميع الأعضاء.
8. نجمع الإزاحات العقدية والأحمال المكافئة لكل عنصر:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_2 \quad -\Delta_1 \quad \theta_3\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad 0.0 \quad 0.00 \quad -23.6e-006 \quad -164.03e-003 \quad -3.08e-003\ \rfloor^T, \\
\boldsymbol{NEF_{AB}} &= \lfloor\ 0 \quad -P/2 \quad -PL_{AB}ab/8; 0 \quad -P/2 \quad PL_{AB}/8\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -10,000.0 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 10,000\ \rfloor^T, \\
\boldsymbol{\delta}_{BC} &= \lfloor\ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_3 \quad 0 \quad \Delta_4 \quad 0\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 164.03e-003 \quad -23.6e-006 \quad -3.08e-003 \quad 0.0 \quad -5.00 \quad 0.0\ \rfloor^T, \\
\boldsymbol{NEF_{BC}} &= \lfloor\ 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad -wL_{BC}^2/12 \quad 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad wL_{BC}^2/12\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -8,333 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 8,333\ \rfloor^T.
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9. نحسب القوى الداخلية من:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} NEF_1 \\ NEF_2 \\ NEF_3 \\ \hline NEF_4 \\ NEF_5 \\ NEF_6 \end{array}\right\}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}.$$

10. وبالتعويض:

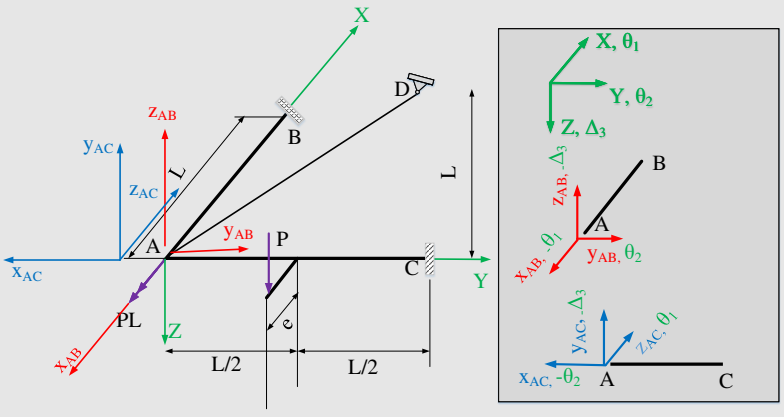
$$\mathbf{p}_{AB} = \left\{\begin{array}{c} P_A^x \\ V_A^y \\ M_A^z \\ \hline P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0.00295\ [kN] \\ -6.403\ [kN] \\ -20,203.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -0.00295\ [kN] \\ 16.403\ [kN] \\ -71,021.\ [kN \cdot mm] \end{array}\right\};$$

$$\mathbf{p}_{BC} = \left\{\begin{array}{c} P_B^x \\ V_B^y \\ M_B^z \\ \hline P_C^x \\ V_C^y \\ M_C^z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 16.403\ [kN] \\ 0.00295\ [kN] \\ -28,979.\ [kN \cdot mm] \\ \hline -16.403\ [kN] \\ 9.997\ [kN] \\ -20,991.\ [kN \cdot mm] \end{array}\right\},$$

$$\mathbf{p}_{DC} = \left\{\begin{array}{c} P_D^x \\ \hline P_C^x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -9.997\ [kN] \\ \hline 9.997\ [kN] \end{array}\right\} \text{ (شد).}$$

41.3.5 مثال 41.5: شبكة إنشائية هجينة

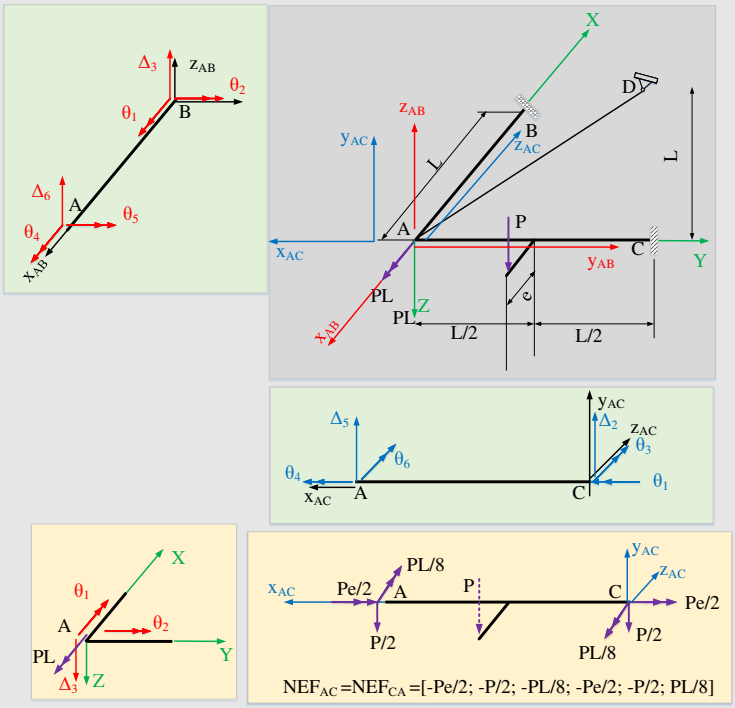
حلل الشبكة الآتية:



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحظ أن العضو AD كابل تحدده A وE ويقع في المستوى $Z–Y$. وتظهر بعض محاور الإحداثيات المحلية للعضوين باللونين الأحمر والأزرق. استعمل $L = 10$ م، و$E = 200$ غيغاباسكال، و$I = 200 \times 10^6$ مم^4، و$J = I_{xx} = 4 \times 10^6$ مم^4، و$A_{AD} = 100$ مم^2، و$e = 1$ م، و$P = 10$ كيلونيوتن. وتُستعمل وحدات غيغاباسكال وكيلونيوتن ومليمتر.

1. درجات الحرية العامة الثلاث هي θ_1^X وθ_2^Y وΔ_3^Z.



2. (a) يولّد الحمل المركز قصاً وعزماً والتواءً عند كل من الطرفين، ولذلك تكون القوى العقدية المكافئة في نظام الإحداثيات المحلي:

$$\begin{aligned} NEF_{CA} &= \lfloor\ -Pe/2 \quad -P/2 \quad -PL/8 \mid -Pe/2 \quad -P/2 \quad PL/8\ \rfloor^T \text{ العقدتان C وA} \\ &= \lfloor\ -5{,}000 \quad -5 \quad -12{,}500 \mid -5{,}000 \quad -5 \quad 12{,}500\ \rfloor^T, \\ NEF_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \text{ العقدتان A وB}, \\ NF &= \lfloor\ -PL \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T = \lfloor\ -100{,}000 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T. \end{aligned}$$

(b) دوران وحدي عند درجة الحرية 1:

$$\begin{array}{llccc} \text{AB} & \text{التواء} & K_{11} = \frac{GJ}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = 0 \\ \text{AC} & \text{الانحناء} & K_{11} = \frac{4EI}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = \frac{6EI}{L^2} \end{array}$$

(c) دوران وحدي عند درجة الحرية 2:

$$\begin{array}{llccc} \text{AB} & \text{الانحناء} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{4EI}{L} & K_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \\ \text{AC} & \text{الالتواء} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{GJ}{L} & K_{32} = 0 \end{array}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(d) إزاحة وحدية عند درجة الحرية 3:

AB	الانحناء	$K_{13}=0$	$K_{23}=-\frac{6EI}{L^2}$	$K_{33}=\frac{12EI}{L^3}$
AC	الانحناء	$K_{13}=\frac{6EI}{L^2}$	$K_{23}=0$	$K_{33}=\frac{12EI}{L^3}$
	الكابل		$K_{33}=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AE}{2L}$	

(e) نحدد نظام الإحداثيات المحلي لكل عنصر.

(f) نكتب معادلة الاتزان، مع ملاحظة إعادة محاذاة الحمل العقدي المكافئ إلى نظام الإحداثيات العام:

$$\left\{\begin{array}{c}-PL\\0\\0\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}PL/8\\Pe/2\\P/2\end{array}\right\}=\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{ccc}(4+\eta)L^2&0&6L\\0&(4+\eta)L^2&-6L\\6L&-6L&24+\frac{AE}{2L}\xi\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\\theta_2\\\Delta_3\end{array}\right\}.$$

حيث $\eta=\frac{GJ}{EI}$ و $\xi=\frac{L^3}{EI}$.

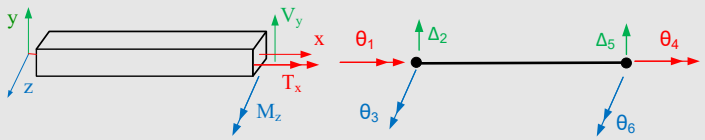
أو

$$\left\{\begin{array}{c}-100,000\\0\\0\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}12,500\\5,000\\5,000\end{array}\right\}=\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{ccc}1.6032\times10^7&0.&2400.\\0.&1.6032\times10^7&-2400.\\2400.&-2400.&1.\times10^8\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\\theta_2\\\Delta_3\end{array}\right\}.$$

ومن ثم

$$\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\\theta_2\\\Delta_3\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc}6.23752\times10^{-8}&-2.24103\times10^{-16}&-1.49701\times10^{-12}\\-2.24103\times10^{-16}&6.23752\times10^{-8}&1.49701\times10^{-12}\\-1.49701\times10^{-12}&1.49701\times10^{-12}&1\times10^{-8}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}-87,500\\5,000\\5,000\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{array}{c}-0.00545784\\0.000311884\\0.0000501385\end{array}\right\}.$$

3. لتحديد القوى الداخلية، نتذكر نظام الإحداثيات المحلي x,y,z المستخدم:



4. لاستعادة القوى الداخلية للعنصر AB نربط الإزاحات العامة بالمحلية:

$$\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\\theta_2\\\Delta_3\\\hline\theta_4\\\theta_5\\\Delta_6\end{array}\right\}\leftarrow\left\{\begin{array}{c}-\theta_1\\\theta_2\\-\Delta_3\\\hline0\\0\\0\end{array}\right\}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويمكن اشتقاق القوى من مصفوفة صلابة العنصر السابقة لأن أنظمة الإحداثيات متطابقة، أي θ_{1x} وΔ_{2y} وθ_{3z}:

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}.$$

وبالتعويض:

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -174.651 \\ 0.120482 \\ 802.965 \\ \hline 174.651 \\ -0.120482 \\ 0.748526 \end{array}\right\}.$$

5. نكرر الإجراء نفسه للعنصر CA، ونبدأ بربط الإزاحات العامة بالمحلية:

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}.$$

ومن مصفوفة صلابة العنصر السابقة:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -Pe/2 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ \hline -Pe/2 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{array}\right\}}_{P_{ext}} = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

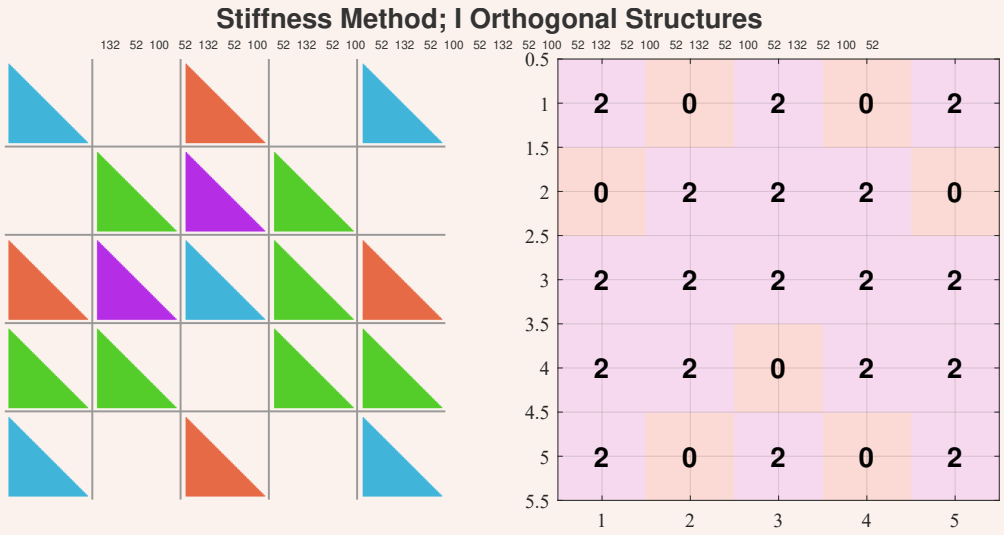
وبالتعويض:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -5,000 \\ -5 \\ -12,500 \\ \hline -5,000 \\ -5 \\ 12,500 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$\underbrace{-\begin{bmatrix} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0.0003118 \\ -0.00005013 \\ -0.005457 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\},$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5,009.98 \\ -8.09879 \\ -31,162.6 \\ \hline 4,990.02 \\ 18.0988 \\ -99,825.3 \end{array}\right\}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الرمز التعريفي الخاص بهذا الفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42 مصفوفات التحويل

ملخص

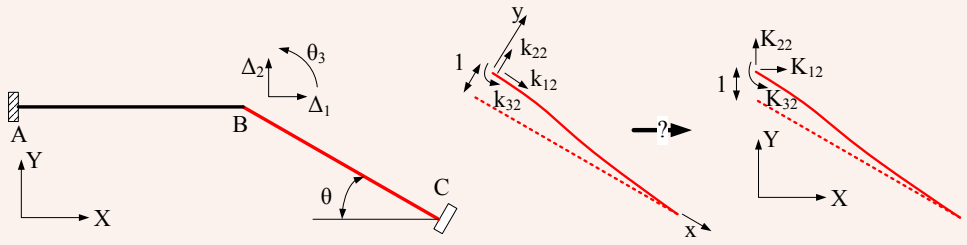
قدّمنا في الفصل السابق طريقة الصلابة المباشرة من خلال تحليل المنشآت المتعامدة. ولذلك اعتمدنا على دورانات بسيطة مقدارها $90°$ لتجميع مصفوفة الصلابة العامة أولاً (بالانتقال من الإحداثيات المحلية إلى العامة)، ثم للعودة من الإحداثيات العامة إلى المحلية عند استرجاع القوى. ومن الواضح أن ذلك لا يكفي للمنشآت العامة، لذا نحتاج إلى مصفوفة تحويل لتنفيذ هاتين العمليتين. وقد يكون التحويل بسيطاً للعناصر الأولية مثل عنصر الإطار ثنائي الأبعاد، لكنه يصبح أكثر تعقيداً في الشبكات الإنشائية، وأشد تعقيداً في عناصر الإطارات ثلاثية الأبعاد. يختص هذا الفصل بالصياغات الرياضية لمصفوفات التحويل لمختلف أنواع العناصر.

42.1 مقدمة 1371
42.2 بعض الأسس النظرية 1372
42.2.1 العلاقة بين $[\mathbf{k}^e]$ و$[\mathbf{K}^e]$ 1372
42.2.2 جيوب تمام الاتجاه 1373
42.3 مصفوفات التحويل للعناصر القضيبية . . . 1375
42.3.1 حالات ثنائية الأبعاد 1376
42.3.2 إطار ثلاثي الأبعاد 1379
42.3.3 دورانات أويلر 1380
42.3.4 فتل محور العنصر 1382
42.3.5 جمالون ثلاثي الأبعاد 1383

42.1 مقدمة

1 في الفصل السابق، حيث انصبّ الاهتمام على المنشآت المتعامدة، كان تجميع مصفوفة صلابة المنشأ $[\mathbf{K}^e]$ بدلالة مصفوفات صلابة العناصر مباشراً نسبياً.

2 ويتطلب تحديد مصفوفة صلابة العنصر بالإحداثيات العامة انطلاقاً من مصفوفة صلابته بالإحداثيات المحلية إدخال مصفوفة تحويل، كما في الشكل 42.1.

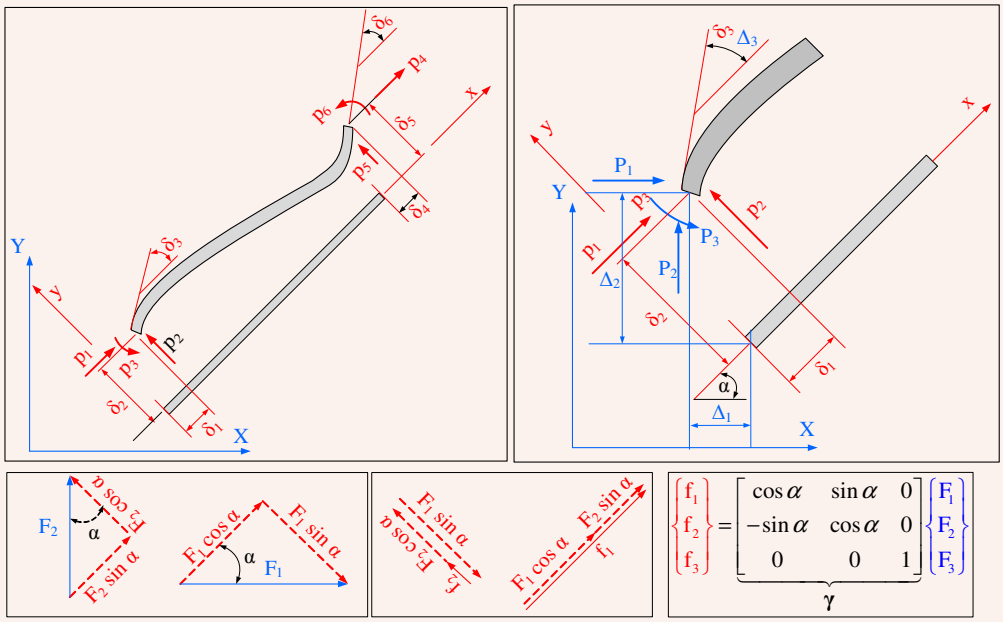


شكل 42.1: مصفوفتا صلابة العنصر المحلية $(\mathbf{k}^e)$ والعامة $(\mathbf{K}^e)$

3 يمكن إنجاز ذلك بسهولة لعنصر بسيط مثل عنصر الإطار، كما في الشكل 42.2. غير أننا نسعى إلى اشتقاق مصفوفات التحويل بصورة منهجية لأنواع مختلفة من العناصر، ويُعد الإطار ثلاثي الأبعاد أكثرها تحدياً.

4 يبحث هذا الفصل التحويلات الثنائية والثلاثية الأبعاد اللازمة للحصول على مصفوفة صلابة العنصر في نظام الإحداثيات العام قبل التجميع، الذي سيُناقش في الفصل التالي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 42.2: مصفوفة التحويل لعنصر كمرة–عمود ثنائي الأبعاد

42.2 بعض الأسس النظرية

42.2.1 العلاقة بين $[\mathbf{k}^e]$ و$[\mathbf{K}^e]$

5 نتذكر أن

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$
$$\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

6 نعرّف مصفوفة تحويل المتجه $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$ بحيث

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^{(e)} &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)} \\ \mathbf{p}^{(e)} &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)} \end{aligned} \tag{42.1}$$

7 وبالتعويض من المعادلة 42.1 في المعادلة 42.2.1 نحصل على

$$\mathbf{p}^e = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

وبالضرب المسبق في $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}$:

$$\mathbf{P}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8 ولأن مصفوفة الدوران متعامدة، فإن $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}$ (وكذلك $\boldsymbol{\Delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$)، ومن ثم

$$\mathbf{P}^{(e)} = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}}_{\mathbf{K}^{(e)}}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

أي

$$\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$$

وهي العلاقة العامة بين مصفوفتي صلابة العنصر في الإحداثيات المحلية والعامة.

42.2.2 جيوب تمام الاتجاه

9 الضرب القياسي لمتجهين هو

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

حيث $|\mathbf{A}|$ هو معيار (طول) المتجه $\vec{\mathbf{A}}$، وα الزاوية بين المتجهين.

10 يمكن تطبيع المتجه $\vec{\mathbf{V}}$ المعطى بـ

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$$

على الصورة

$$\vec{\mathbf{V}}_n = \frac{V_x}{|V|}\vec{\mathbf{i}} + \frac{V_y}{|V|}\vec{\mathbf{j}} + \frac{V_z}{|V|}\vec{\mathbf{k}} = \frac{x_2 - x_1}{L}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y_2 - y_1}{L}\vec{\mathbf{j}} + \frac{z_2 - z_1}{L}\vec{\mathbf{k}}$$

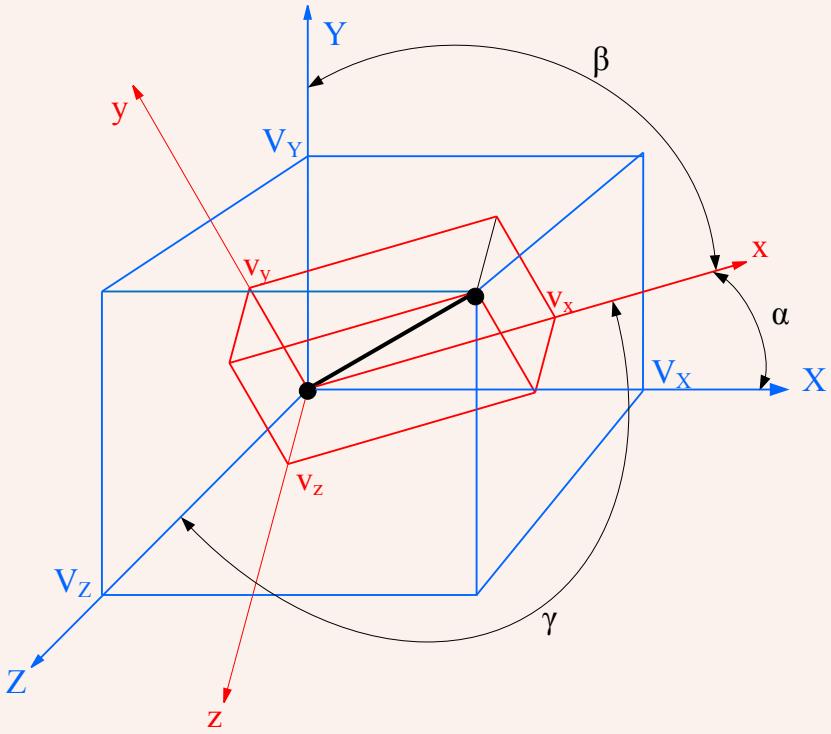
حيث $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. وللحصول على جيوب تمام الاتجاه الثلاثة للمتجه $\vec{\mathbf{V}}$ نأخذ الضرب القياسي لصورته المطبّعة في متجهات الوحدة الثلاثة المكوّنة لنظام الإحداثيات المتعامد:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{i}} &= \frac{x_2 - x_1}{L} = l_{vx} \\
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{j}} &= \frac{y_2 - y_1}{L} = l_{vy} \\
\vec{\mathbf{V}}_n \cdot \vec{\mathbf{k}} &= \frac{z_2 - z_1}{L} = l_{vz}
\end{aligned}$$

وبما أن المتجهين مطبّعان، فإن الضرب القياسي يساوي جيب تمام الاتجاه.

11 تتمثل المسألة التي نواجهها في التحويل العام للمتجه $\mathbf{V}$ من نظام الإحداثيات $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ إلى النظام $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$، كما في الشكل 42.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 42.3: تحويل اعتباطي لمتجه ثلاثي الأبعاد

حيث

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \end{bmatrix}}_{\gamma} \begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{Bmatrix} \tag{42.2}$$

وl_{ij} هو جيب تمام اتجاه المحور i بالنسبة إلى المحور j، حيث $l_{xX} = \cos(\alpha)$ و$l_{xY} = \cos(\beta)$. (نتذكر أن $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$، ولذلك لا يؤثر اتجاه قياس الزاوية.)

12 تنقلنا γ إذاً من نظام الإحداثيات العام إلى النظام المحلي. فعلى سبيل المثال

$$\begin{aligned} V_x &= V_X l_{xX} + V_Y l_{xY} + V_Z l_{xZ} \\ &= V_X \cos\alpha + V_Y \cos\beta + V_Z \cos\gamma \end{aligned}$$

13 تمثل جيوب تمام الاتجاه متجهات وحدة متعامدة تحقق العلاقات الآتية:

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أي

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1 \text{ or } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \delta_{11}$$

وكذلك

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{kj} = 0 \begin{cases} i = 1,2,3 \\ k = 1,2,3 \\ i \neq k \end{cases}$$

$$l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} + l_{13}l_{23} = 0 = \delta_{12}$$

14 ويبيّن الضرب المباشر لـ $[\gamma]^T$ في $[\gamma]$ أن $[\gamma]^T [\gamma] = [\mathbf{I}] \Rightarrow [\gamma]^T = [\gamma]^{-1} \Rightarrow [\gamma]$ مصفوفة متعامدة (أي متعامدة ومطبّعة).

15 أما التحويل العكسي، من المحلي إلى العام، فهو

$$\mathbf{V} = \gamma^T \mathbf{v}$$

16 وأخيراً، يُعطى الصف الأول من المعادلة 42.2 بدلالة المحاور المحلية $x - y - z$ كما يأتي:

$$l_{xX} = C_X = \frac{x_j - x_i}{L};\ l_{xY} = C_Y = \frac{y_j - y_i}{L};\ l_{xZ} = C_Z = \frac{z_j - z_i}{L} \tag{42.3}$$

42.3 مصفوفات التحويل للعناصر القضيبية

17 تعتمد مصفوفة الدوران $[\Gamma]$ بطبيعة الحال على نوع العنصر. وفي الحالة الأكثر عمومية، أي عنصر ثلاثي الأبعاد بست درجات حرية عند كل عقدة، نعرّف

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ \hline M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \gamma & & & \\ \hline & \gamma & & \\ \hline & & \gamma & \\ \hline & & & \gamma \end{array}\right]}_{\Gamma} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ \hline M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \\ \hline F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \\ \hline M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{Bmatrix} \tag{42.4}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

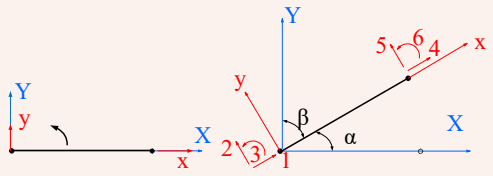
ويجب التمييز بين تحويل المتجه $[\gamma]$ ومصفوفة تحويل العنصر $[\Gamma]$.

18 سنبحث في المقاطع التالية مصفوفة التحويل لكل نوع من العناصر، فنبدأ بعنصر منطبق على المحور العام X ثم نديره إلى موضعه الحالي الذي يعرّف المحاور $x-y-z$.

42.3.1 حالات ثنائية الأبعاد

42.3.1.1 إطار ثنائي الأبعاد

19 لعنصر الإطار ثنائي الأبعاد الموضح في الشكل 42.4، تُعرّف مصفوفة دوران المتجه، وفق المعادلة 42.2،



شكل 42.4: دوران عنصر إطار ثنائي الأبعاد حول Z (أو z)

بتسعة جيوب تمام اتجاه لتسع زوايا مختلفة. غير أن أربع زوايا في الحالة الثنائية الأبعاد مترابطة، وهي $(l_{xX}, l_{xY}, l_{yX}, l_{yY})$، ويمكن التعبير عنها جميعاً بدلالة زاوية واحدة α تمثل اتجاه المحور المحلي x، الممتد على طول العنصر من العقدة الأولى إلى الثانية، بالنسبة إلى المحور العام X.

20 وترتبط الحدود الخمسة الباقية بالزاوية بين Z وz، وهي صفر، وبالزاوية بين Z ومستوى $x-y$، وهي $\pi/2$. لذلك تُكتب مصفوفة الدوران كما يأتي:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن الزوايا تُعرّف من الدليل السفلي الثاني إلى الأول، وأن الزوايا الموجبة تقاس عكس اتجاه عقارب الساعة.

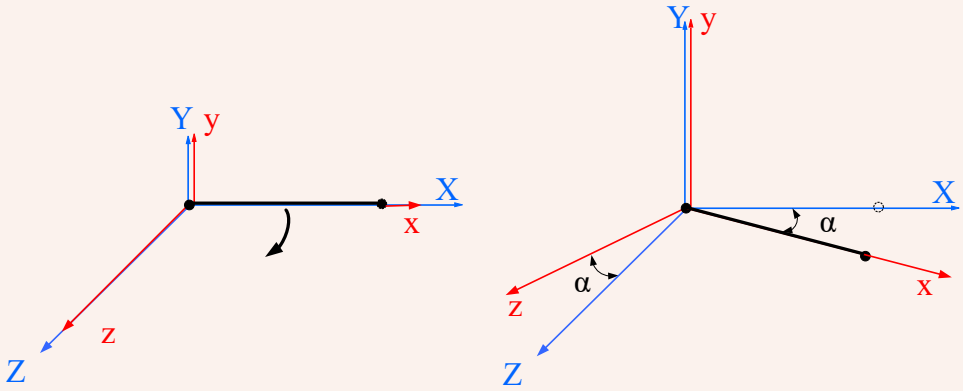
21 ومن ثم تكون مصفوفة دوران العنصر $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42.3.1.2 شبكة إنشائية

22 تشبه مصفوفة تحويل عنصر الشبكة الإنشائية، الشكل 42.5، مصفوفة عنصر الإطار إلى حد كبير، إلا أن الدوران هنا حول المحور y بدلاً من المحور z.



شكل 42.5: دوران عنصر الشبكة الإنشائية

23 وفق المعادلة 42.2، تُعرّف مصفوفة دوران المتجه بتسعة جيوب تمام اتجاه لتسع زوايا مختلفة. لكن أربع زوايا مترابطة، وهي $(l_{xX}, l_{xZ}, l_{zX}, l_{zZ})$، ويمكن التعبير عنها بدلالة زاوية واحدة α تمثل اتجاه المحور المحلي x بالنسبة إلى المحور العام X.

24 وترتبط الحدود الخمسة الباقية بالزاوية بين Y وy، وهي صفر، وبالزاوية بين Y ومستوى $x-z$، وهي $\pi/2$. لذلك

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ونلاحظ ثانيةً أن الزوايا تُعرّف من الدليل السفلي الثاني إلى الأول، وأن الزوايا الموجبة تقاس عكس اتجاه عقارب الساعة.

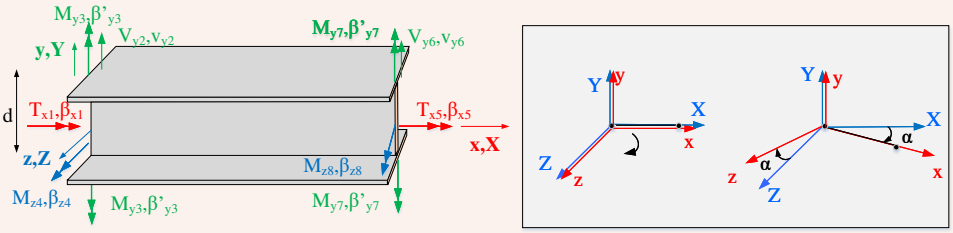
25 ومن ثم تكون مصفوفة دوران العنصر $[\boldsymbol{\Gamma}]$:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42.3.1.3 كمرة فلاسوف

26 أُعطيت مصفوفة صلابة عنصر الشبكة الإنشائية ذي الالتواء المقيّد بالمعادلة 40.3 (§40.8). وتشبه مصفوفة تحويله مصفوفة الشبكة الإنشائية، مع وجود درجة حرية إضافية الآن هي (M_y)، كما في الشكل 42.6.



شكل 42.6: مصفوفة التحويل لكمرة فلاسوف

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & 0 & l_{xZ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{zX} & 0 & 0 & l_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

27 ومن ثم تكون مصفوفة دوران العنصر $[\boldsymbol{\Gamma}]$:

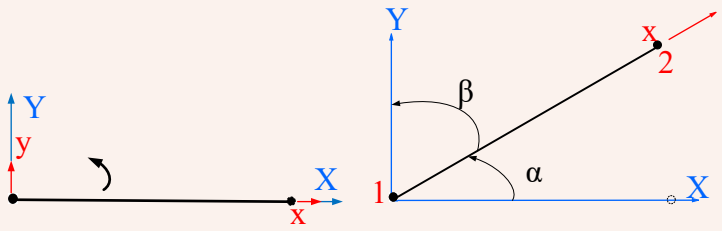
$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix}$$

42.3.1.4 جمالون ثنائي الأبعاد

28 في عنصر الجمالون ثنائي الأبعاد يكون نظام الإحداثيات العام ثنائي الأبعاد، بينما النظام المحلي أحادي البعد فقط. ولذلك تكون مصفوفة تحويل المتجه كما في الشكل 42.7.

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 42.7: دوران جمالون ثنائي الأبعاد

29 وتُجمّع مصفوفة دوران العنصر $[\boldsymbol{\Gamma}]$ من مصفوفة دوران المتجه $[\gamma]$:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

42.3.2 إطار ثلاثي الأبعاد

30 تُعرّف العناصر القضيبية بحيث ينطبق محورها المحلي x على محورها الطولي، ويُحدد العنصر بعقدتي طرفيه ذواتي الإحداثيات المعلومة. ومن تعريف جيوب تمام الاتجاه يتضح أن حساب الصف الأول وحده بسيط بدلالة C_X وC_Y وC_Z، حيث $C_X = l_{X_2X_1} = \frac{x_j - x_i}{L}$، و$C_Y = l_{X_2Y_1} = \frac{y_j - y_i}{L}$، و$C_Z = l_{X_2Z_1} = \frac{z_j - z_i}{L}$، و$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$. أما حساب الحدود الأخرى فأكثر تعقيداً.

31 أُنجز التحويل العام من $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ إلى $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ بخطوة واحدة في الحالة الثنائية الأبعاد، لكن يلزم تعريف أنظمة وسيطة في الحالة الثلاثية الأبعاد.

32 نبدأ بنظام الإحداثيات المرجعي (X_1, Y_1, Z_1) المطابق لنظام الإحداثيات العام، ونسعى إلى تحويل عنصر كان في الأصل على المحور X_1 إلى موضعه الجديد على المحور X_2 (أو x).

33 تحقق ذلك في الحالة الثنائية الأبعاد بدوران منفرد α، وعُرّفت جميع الزوايا الأخرى بدلالته.

34 أما في الحالة الثلاثية الأبعاد، فنريد الانتقال من الوضع الابتدائي $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ إلى الوضع النهائي $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2$. ويتطلب ذلك دورانين على الأقل، β وγ، وربما دوراناً ثالثاً α يختلف عن زاوية الحالة الثنائية الأبعاد، كما في الجدول 42.1. وتُسمى هذه الزوايا الثلاث أيضاً *زوايا أويلر*.

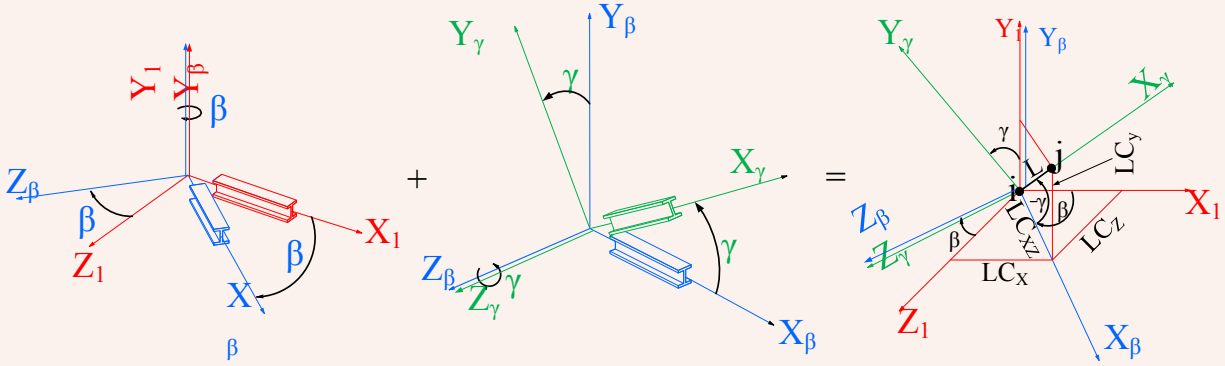
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42.3.3 دورانات أويلر

35 نبدأ بالصف الأول من مصفوفة التحويل، الذي يمثل جيوب تمام اتجاه المحاور المرجعية $(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Z_1})$ بالنسبة إلى $\mathbf{X_2}$. وهو يحدد الصف الأول من مصفوفة دوران المتجه $[\gamma]$:

$$\gamma = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

ويبقى تحديد الصفين الثاني والثالث. ويتحقق ذلك بدورانين متتاليين، بافتراض أن النظامين (X_1, Y_1, Z_1) و(X_2, Y_2, Z_2) متطابقان في البداية، وأن المحور الرأسي للعنصر يبقى رأسياً. يبيّن الشكل 42.8 تسلسل التحويلات المدرج في الجدول 42.1.



شكل 42.8: دوران ثلاثي الأبعاد مختزل

جدول 42.1: تحويلات العناصر الخطية ثلاثية الأبعاد

الزاوية	حول المحور	إلى	من
β	$Y_\beta \equiv Y_1$	$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	X_1, Y_1, Z_1
γ	$Z_\gamma \equiv Z_\beta$	$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$
اختياري			
α	$X_\alpha \equiv X_\gamma$	$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$

دوران بمقدار β حول المحور Y_1 ، $X_1 \rightarrow X_\beta$. تتكون مصفوفة الدوران $\mathbf{R}_\beta$ من جيوب تمام اتجاه محاور النظام β، أي $(X_\beta, Y_\beta, Z_\beta)$، بالنسبة إلى (X_1, Y_1, Z_1):

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_X}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_Z}{C_{XZ}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{42.5}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $\cos\beta = \frac{C_X}{C_{XZ}}$ و$\sin\beta = \frac{C_Z}{C_{XZ}}$، ومن المعادلة 42.3:

$$C_X = \frac{x_j - x_i}{L};\quad C_Y = \frac{y_j - y_i}{L};\quad C_Z = \frac{z_j - z_i}{L};\quad C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2}$$

دوران بمقدار γ حول المحور Z

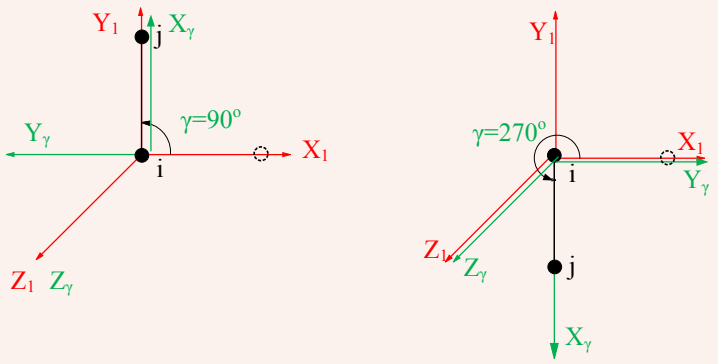
$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XZ} & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42.6}$$

حيث $\cos\gamma = C_{XZ}$ و$\sin\gamma = C_Y$.

36 وبدمج المعادلات 42.3 و42.5 و42.6 نحصل على

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y}{C_{XZ}} & C_{XZ} & \frac{-C_Y C_Z}{C_{XZ}} \\ \frac{-C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{42.7}$$

37 لا تصلح المصفوفة السابقة للعنصر الرأسي، الممتد على المحور العام Y، لأن C_{XZ} غير معرّف ($X_i = X_j \Rightarrow C_X = 0$ و$Z_i = Z_j \Rightarrow C_Z = 0$). ولا يحدث دوران بمقدار β؛ بل يكون الدوران حول المحور Z_1 بزاوية γ مقدارها 90° أو 270°. وتوجد حالتان، كما في الشكل 42.9:



شكل 42.9: الحالة الخاصة لتحويل عنصر رأسي ثلاثي الأبعاد

1. $x_\gamma \uparrow$: ينطبق المحور X_2 على $-Y_1$، وينطبق Y_2 على $-X_1$، وينطبق Z_2 على $-Z_1$.
2. $x_\gamma \downarrow$: ينطبق المحور X_2 على Y_1، وينطبق Y_2 على $-X_1$، وينطبق Z_2 على Z_1.

ومن ثم تشبه مصفوفة الدوران حول المحور y المصفوفة المشتقة سابقاً للدوران حول z، مع إعادة ترتيب الحدود:

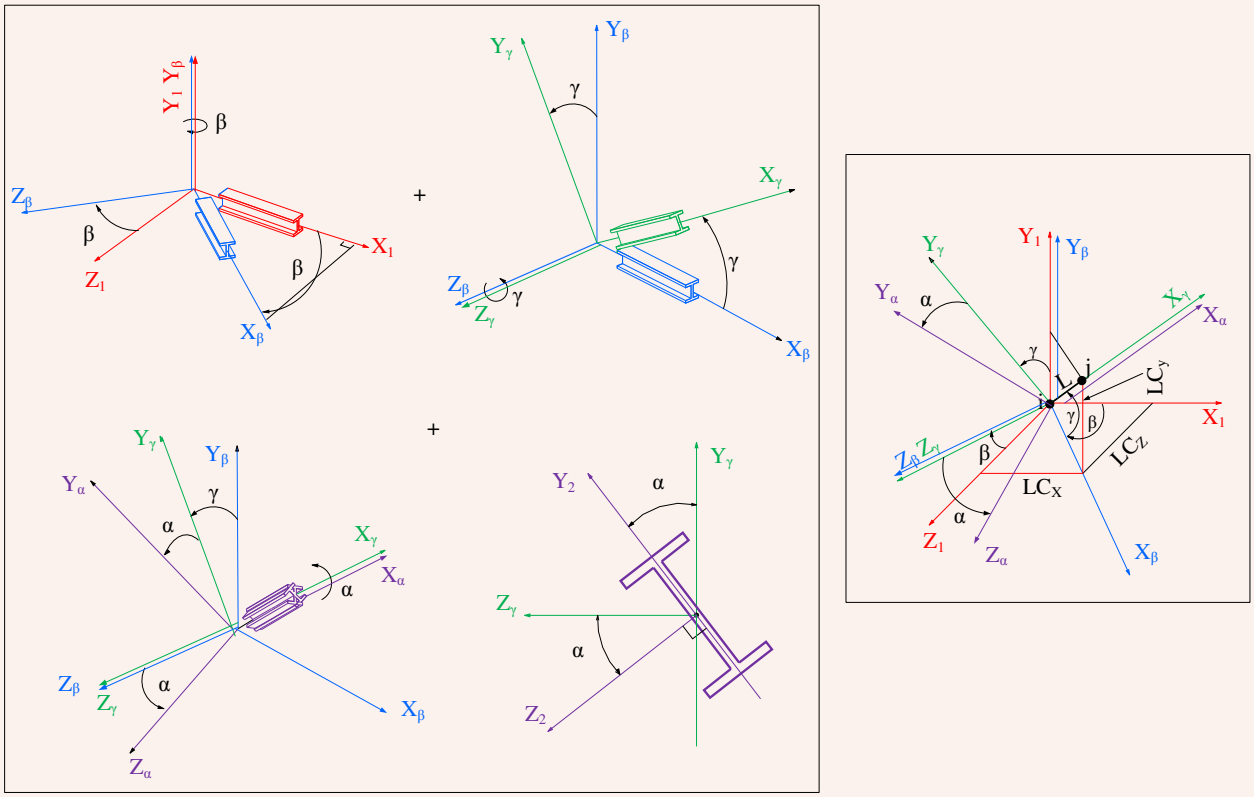
$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42.8}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهي صالحة للحالتين ($C_Y = 1$ عندما $\gamma = 90\,\text{deg}$، و$C_Y = -1$ عندما $\gamma = 270\,\text{deg}$).

42.3.4 فتل محور العنصر

38 إذا لزم تدوير المحاور الرئيسة، بما في ذلك فتل نهائي لمحور العنصر، وجب إضافة دوران بزاوية α حول المحور X_γ إلى التحويل السابق، كما في الشكل 42.10.



شكل 42.10: دوران ثلاثي الأبعاد مركب

39 يُعرّف هذا الدوران بحيث

1. ينطبق X_α على X_2 ويكون عمودياً على كل من Y_2 وZ_2.
2. يصنع Y_α الزوايا 0 وα و$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ مع X_2 وY_2 وZ_2 على الترتيب.
3. يصنع Z_α الزوايا 0 و$\frac{\pi}{2} + \alpha$ وα مع X_2 وY_2 وZ_2 على الترتيب.

40 وبملاحظة أن $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ وأن $\cos\beta = \sin\alpha$، تكون جيوب تمام اتجاه هذا التحويل

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{42.9}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فتنطبق محاور $Y_2 - Z_2$ على المحاور الرئيسة للمقطع، وينتج

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \tag{42.10}$$

$$= \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos\alpha - C_Z \sin\alpha}{C_{XZ}} & C_{XZ}\cos\alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos\alpha + C_X \sin\alpha}{C_{XZ}} \\ \frac{C_X C_Y \sin\alpha - C_Z \cos\alpha}{C_{XZ}} & -C_{XZ}\sin\alpha & \frac{C_Y C_Z \sin\alpha + C_X \cos\alpha}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{42.11}$$

41 وكما في الحالة الأبسط، لا تكون المعادلة السابقة معرّفة للعناصر الرأسية، ويلزم اشتقاق نظير للمعادلة 42.8. ويتم ذلك في خطوتين:

1. ندوّر العنصر بحيث
   (a) ينطبق المحور X_2 على Y_1.
   (b) ينطبق المحور Y_2 على $-X_1$.
   (c) ينطبق المحور Z_2 على Z_1.

   وقد أُنجز ذلك سابقاً وأعطى المعادلة 42.8:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42.12}$$

2. تتكون الخطوة الثانية من إجراء دوران بزاوية α حول المحور الجديد X_2 كما عُرّف في المعادلة 42.9.
3. أخيراً نضرب مصفوفتَي التحويل $[\mathbf{R}][\mathbf{R}]$ المعطاتين بالمعادلتين 42.12 و42.9، فنحصل على

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_Y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

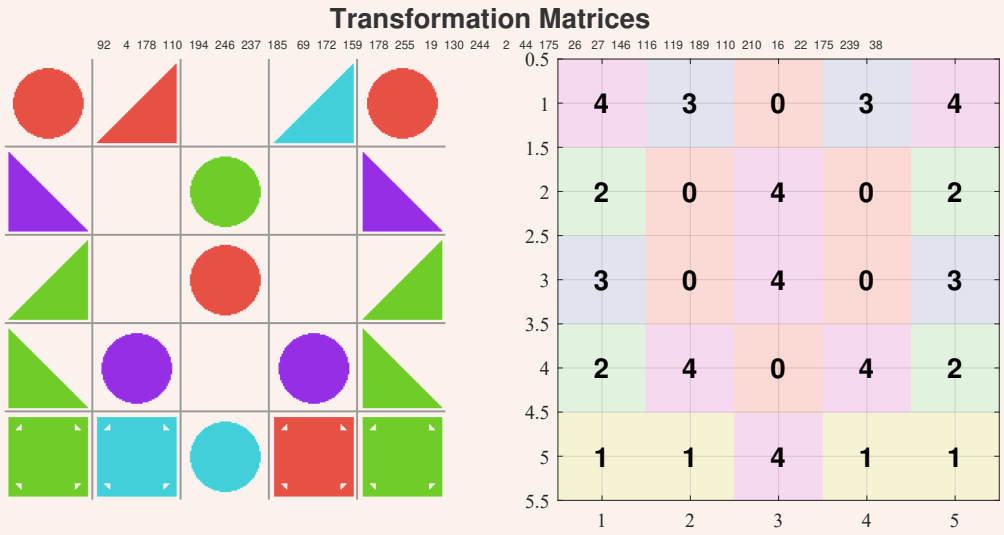
   ومع $\alpha = 0$ نستعيد المعادلة 42.8.
4. تكون مصفوفة الدوران النهائية وفق المعادلة 42.4 باستخدام γ المشتقة في هذا المقطع.

42.3.5 جمالون ثلاثي الأبعاد

42 بالرجوع إلى الجزء الأول من اشتقاق تحويل عنصر الإطار ثلاثي الأبعاد، تكون مصفوفة تحويل عنصر الجمالون ثلاثي الأبعاد

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لصفلاب صاخلا يرصبلا زمرلا، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43 طريقة الصلابة المباشرة

ملخص

قدّمنا في الفصل 41 لأول مرة مفهوم نظام الإحداثيات العام، ودرجات الحرية العامة، ومصفوفة صلابة المنشأ في نظام الإحداثيات العام. ثم قدّم الفصل 42 مفهوم مصفوفة التحويل التي تُستخدم لتحويل مصفوفات صلابة العناصر من أنظمة الإحداثيات المحلية إلى النظام العام. يعمّم هذا الفصل المنهج الذي بدأ في الفصل 41 ليشمل المنشآت ذات الهندسة الاعتباطية، أي غير المتعامدة. ومحتوى هذا الفصل أساسي لجميع برامج العناصر المحددة، التي تُحاط عادةً بواجهات رسومية سهلة الاستخدام.

43.1 الأهداف 1385
43.2 النظرية 1385
43.3 التقطيع 1388
43.3.1 درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة 1388
43.3.2 تقطيع المنشأ 1388
43.4 التنفيذ الحاسوبي 1389
43.4.1 الشروط الحدية ومصفوفة [id] 1389
43.4.2 متجه LM 1391
43.4.3 تجميع مصفوفة الصلابة العامة 1392
43.4.4 الإجراء خطوة بخطوة 1392
43.5 أمثلة 1394
43.5.1 مثال 43.1: إطار 1394
43.5.2 مثال 43.3: جمالون 1405

43.1 الأهداف

1 قدّمنا حتى الآن طريقة الصلابة المباشرة للمنشآت المتعامدة بإجراء "يدوي"، وجمّعنا مصفوفة الصلابة العامة بدلالة درجات الحرية الحرة، أي غير المقيّدة. كما قدّمنا مصفوفات التحويل لأنواع مختلفة من العناصر، وبات بالإمكان تحديد مصفوفة صلابة العنصر في نظام إحداثيات المنشأ، أي النظام العام، من العلاقة $\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$.

2 ويعمّم هذا الفصل طريقة الصلابة المباشرة من أجل

1. معالجة المنشآت ذات الهندسة الاعتباطية، أي غير المتعامدة.
2. تحديد ردود الأفعال باستخدام مصفوفة *الصلابة الموسّعة*.
3. وصف الخوارزميات اللازمة لأتمتة الإجراء بالكامل، أي لكتابة برنامج حاسوبي.

43.2 النظرية

3 جمّعنا سابقاً، في الفصل 41، مصفوفة الصلابة *المختزلة* المقابلة لدرجات الحرية الفعالة فقط، أي غير المقيّدة. وهي التي عُكست، أو على نحو أدق حُللت، لتحديد الإزاحات العقدية.

4 وفي التعميم الحالي نسعى إلى تجميع مصفوفة الصلابة *الموسّعة* بدلالة جميع درجات الحرية، المقيّدة وغير المقيّدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5 ثم نقسّم المصفوفة إلى جزأين: يحمل الأول الدليل السفلي "u" حيث تكون الإزاحات معلومة، صفراً أو غير ذلك، ويحمل الثاني t حيث تكون الأحمال معلومة، كما في الجدول 39.2.

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\checkmark\\ \hline \mathbf{R}_u?\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Delta}_t?\\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u\checkmark\end{array}\right\} \tag{43.1}$$

ونلاحظ أن $\mathbf{K}_{tt}$ تقابل مصفوفة صلابة المنشأ.

6 بالرجوع إلى §39.8، يقابل نوعا الأحمال، أو الإزاحات، الشروط الحدية *الأساسية* و*الطبيعية*.

7 تتيح المعادلة الأولى حساب الإزاحات المجهولة. ويتطلب ذلك عكس المصفوفة، وهو مكلف حسابياً، مع أن مصطلح تحليل المصفوفة أدق هنا.

$$\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\left(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u\right)$$

8 وتتيح المعادلة الثانية حساب ردود الأفعال:

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$$

ولا تتطلب إلا ضرب مصفوفات.

9 ولأغراض التنظيم الداخلي، وبما أننا نجمّع مصفوفة الصلابة *الموسّعة*، نرقّم درجات الحرية على مرحلتين:

1. نرقّم أولاً جميع درجات الحرية العامة غير المقيّدة.
2. ثم نرقّم بصورة منفصلة جميع درجات الحرية العامة المقيّدة، أي ذات الإزاحات المعلومة سواء كانت صفراً أم لا، مع ضرب أرقامها في -1. وسيتيح ذلك لاحقاً التمييز بين درجات الحرية المقيّدة وغير المقيّدة.

10 تُحدد أخيراً قوى العنصر الداخلية، أي القوى المحورية وقوى القص والعزوم عند طرفي العنصر، من

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

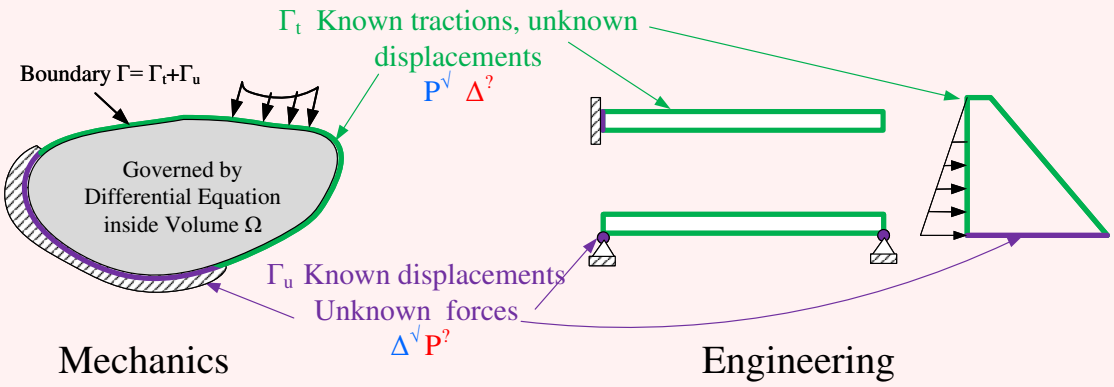
على مستوى العنصر، حيث $p_{int}^{(e)}$ متجه القوى الداخلية، و$\mathbf{k}^{(e)}$ مصفوفة صلابة العنصر في نظام الإحداثيات المحلي، و$\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ متجه الإزاحات العقدية المحلية. ويُحصل على هذا المتجه بتحديد الإزاحات في النظام العام أولاً، ثم ضربها مسبقاً في مصفوفة التحويل.

11 في المعادلة 43.1 تكون رتبة مصفوفة الصلابة الموسّعة $\mathbf{K}$، أي r، أصغر من n، بينما تحقق $\mathbf{K}_{tt}$ العلاقة $r = n$ (§L.3.1).

12 وتشبه هذه العملية استرجاع الإجهادات في العناصر المحددة المتصلة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 43.1: جوهر طريقة الصلابة المباشرة



- نظام الإحداثيات العام

$$\mathbf{K}^e = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{k}^e \boldsymbol{\Gamma}$$

$$\mathbf{K}^S = \sum_{e=1}^{e=nelem} \mathbf{K}^e$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_t^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{R}_u^{?} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu} \\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{array} \right]}_{\text{مصفوفة الصلابة الموسّعة}} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Delta}_t^{?} \\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u^{\checkmark} \end{array} \right\}$$

$\mathbf{K}_{tt} = \mathbf{f}^{-1}$; مصفوفة الصلابة المختزلة

$$\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \underbrace{(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u)}_{\mathbf{P}'_t}$$

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$$

- نظام الإحداثيات المحلي

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

لم يُدرج تأثير $\mathbf{P}_{el}$ حفاظاً على وضوح العرض.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

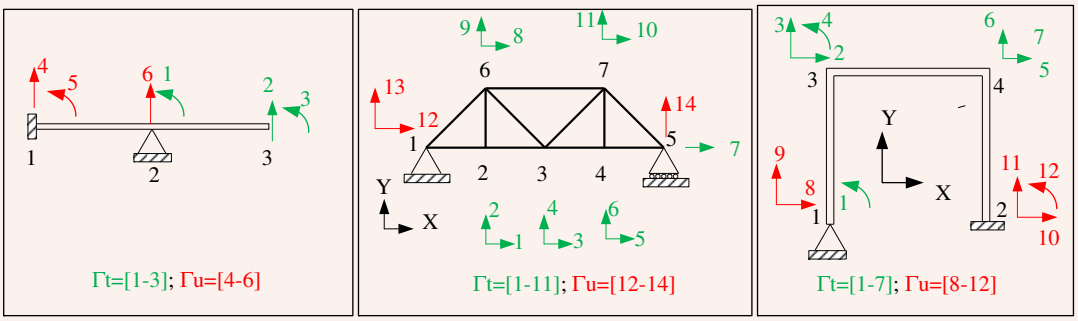
43.3 التقطيع

43.3.1 درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة

13 رقّمنا سابقاً درجات الحرية العامة المرتبطة بدرجات الحرية غير المقيّدة (Γ_t) فقط، ثم حسبنا الإزاحات بعكس مصفوفة صلابة المنشأ *المختزلة* المقابلة.

14 في الصيغة العامة لطريقة الصلابة المباشرة، المعادلة 43.1، نرقّم أولاً درجات الحرية على Γ_t، ثم درجات الحرية على Γ_u. ووفق الجدول 39.2، تقابلان على الترتيب شرطي نيومان/الأساسي وديريشليه/الطبيعي.

15 ينتج عن ذلك مصفوفة الصلابة *الموسّعة*. ويوضح الشكل 43.1 ترتيب الترقيم.



شكل 43.1: درجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة

43.3.2 تقطيع المنشأ

16 يعتمد تطبيق طريقة الصلابة المباشرة على تقطيع رياضي سليم للمنشأ، كما في الجدول 43.1.

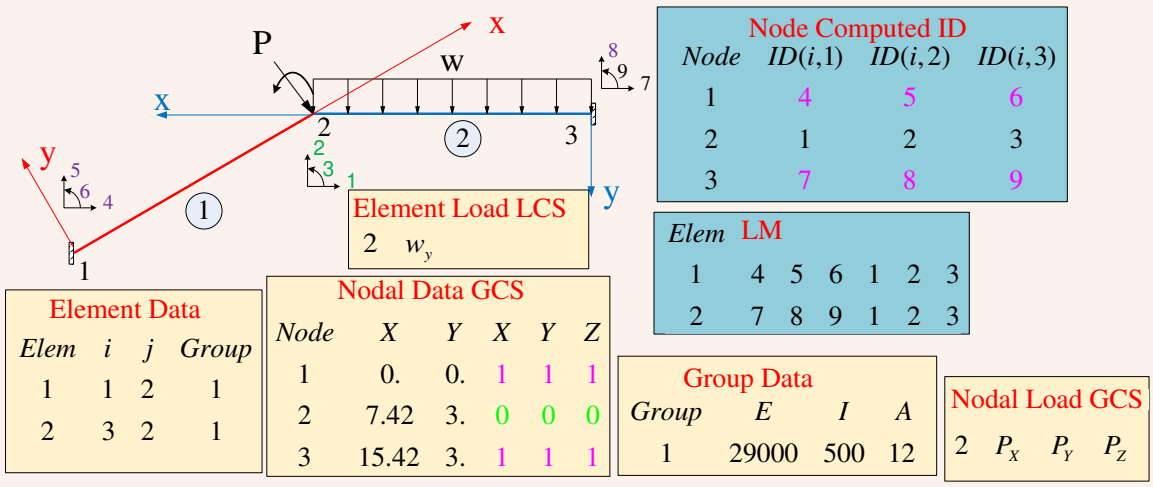
جدول 43.1: تقطيع المنشآت

الحمل	الشروط الحدية	الإحداثيات	العقد
الحمل	النوع	الاتصال	العناصر
	الخواص المرنة	الخصائص الهندسية	نوع العنصر

17 تتطلب النمذجة العددية للمنشأ وصفه رياضياً من حيث الهندسة والشروط الحدية والاتصال وخصائص العناصر والأحمال.

18 ويوضح المثال في الشكل 43.2 هذه الفكرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 43.2: مثال على تقطيع منشأ

19 يجب على المستخدم تعريف البيانات في الصناديق "الذهبية" السفلية، وعلى وجه التحديد:

بيانات العنصر تحدد العقدتين الأولى والثانية المتصلتين بالعنصر، ولا يؤثر ترتيبهما، كما تحدد رقم المجموعة.

بيانات العقدة تحدد لكل عقدة: أ) الإحداثيين أو الإحداثيات الثلاثة في النظام العام؛ ب) الشروط الحدية لكل درجة حرية مقابلة، راجع الصندوق 39.2. تعني القيمة 0 درجة حرية حرة، وتعني 1 أن الإزاحة المقابلة معلومة وليست صفراً بالضرورة.

بيانات المجموعة تحدد الخواص المرنة وخصائص المقطع لكل رقم مجموعة.

الحمل العقدي يسرد العقد ذات الأحمال المركزة على درجات حريتها العامة.

حمل العنصر يسرد العناصر التي تحمل أحمالاً موزعة على امتدادها.

43.4 التنفيذ الحاسوبي

20 بعد اكتمال تقطيع المنشأ، ووفق الصيغة العامة لطريقة الصلابة المباشرة (§43.2)، يتولى البرنامج الحاسوبي بقية الخطوات.

21 يرد في §I.2.7 تنفيذ للطريقة بلغة MATLAB®للإطارات ثنائية الأبعاد.

43.4.1 الشروط الحدية ومصفوفة [id]

22 بسبب قيود الشروط الحدية، يكون العدد الكلي لدرجات الحرية *الفعالة* في المنشأ، أي غير المقيّدة، أصغر من حاصل ضرب عدد العقد في عدد درجات الحرية لكل عقدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

23 ولتحديد رقم درجة الحرية العامة عند عقدة معينة، نعرّف مصفوفة [ID] بحيث

1. أبعاد [ID] هي $l \times k$، حيث l عدد درجات الحرية لكل عقدة وk عدد العقد.
2. تُهيّأ مصفوفة [ID] بالقيمة صفر.
3. في مرحلة الإدخال تُقرأ القيمة ID(idof,inod) لكل درجة حرية عند كل عقدة، بحيث

$$\texttt{ID}(\texttt{idof},\texttt{inod}) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كانت درجة الحرية غير مقيّدة} \\ 1 & \text{إذا كانت درجة الحرية مقيّدة} \end{cases}$$

4. بعد قراءة جميع الشروط الحدية للعقد، تُسند أرقام المعادلات تصاعدياً:

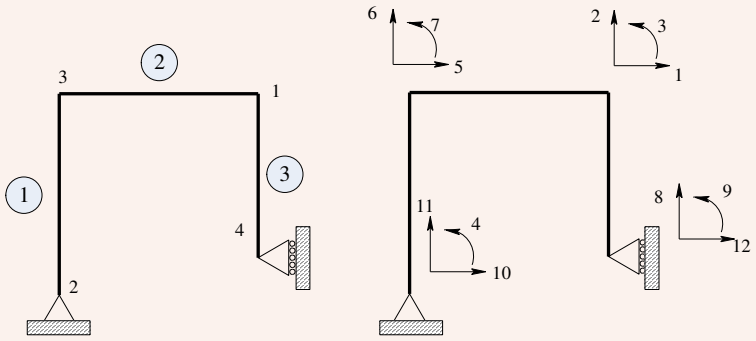
   (a) أولاً لجميع درجات الحرية الفعالة.

   (b) ثم لدرجات الحرية الأخرى المقيّدة بدءاً من -1، أو يمكن متابعة الترقيم بعد آخر درجة حرية غير مقيّدة.

   ويكون العدد الكلي لدرجات الحرية مساوياً لعدد العقد مضروباً في عدد درجات الحرية لكل عقدة NEQA.

5. يساوي أكبر رقم موجب لدرجة حرية عامة القيمة NEQ، أي عدد المعادلات، وهو رتبة المصفوفة المربعة المطلوب تحليلها.

24 على سبيل المثال، للإطار الموضح في الشكل 43.3:



شكل 43.3: مثال على تحديد مصفوفة [**ID**]

1. تكون مصفوفة **ID** الابتدائية

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. وبعد إسناد درجات الحرية العامة، أو *أرقام المعادلات*، تصبح

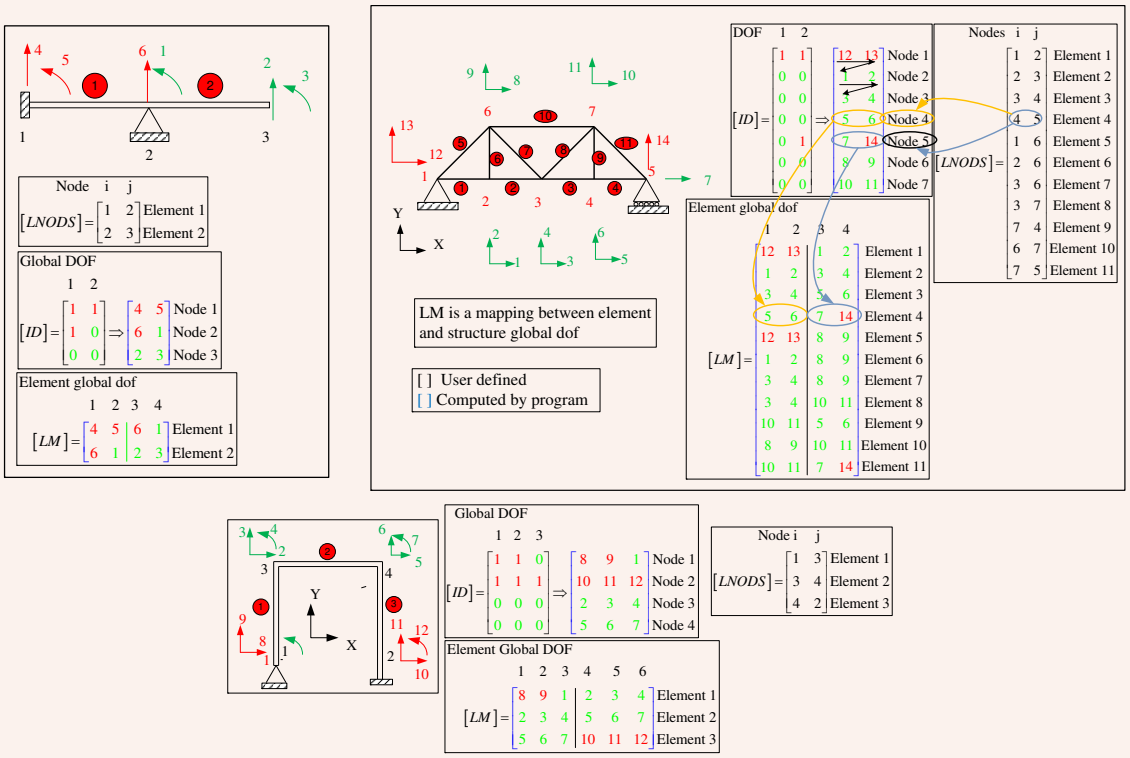
$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

43.4.2 متجه LM

25 تمثل مصفوفة *الموضع* **LM** خريطة الربط بين درجات الحرية المحلية والعامة لكل عنصر. وللمنشأ الموضح في الشكل 43.3 تكون

$$\mathbf{LM} = \begin{bmatrix} -10 & -11 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

26 يوضح الشكل 43.4 مصفوفات **LM** المقابلة للمنشآت المبينة في الشكل 43.1.



شكل 43.4: أمثلة على إسناد قيم **LM**

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43.4.3 تجميع مصفوفة الصلابة العامة

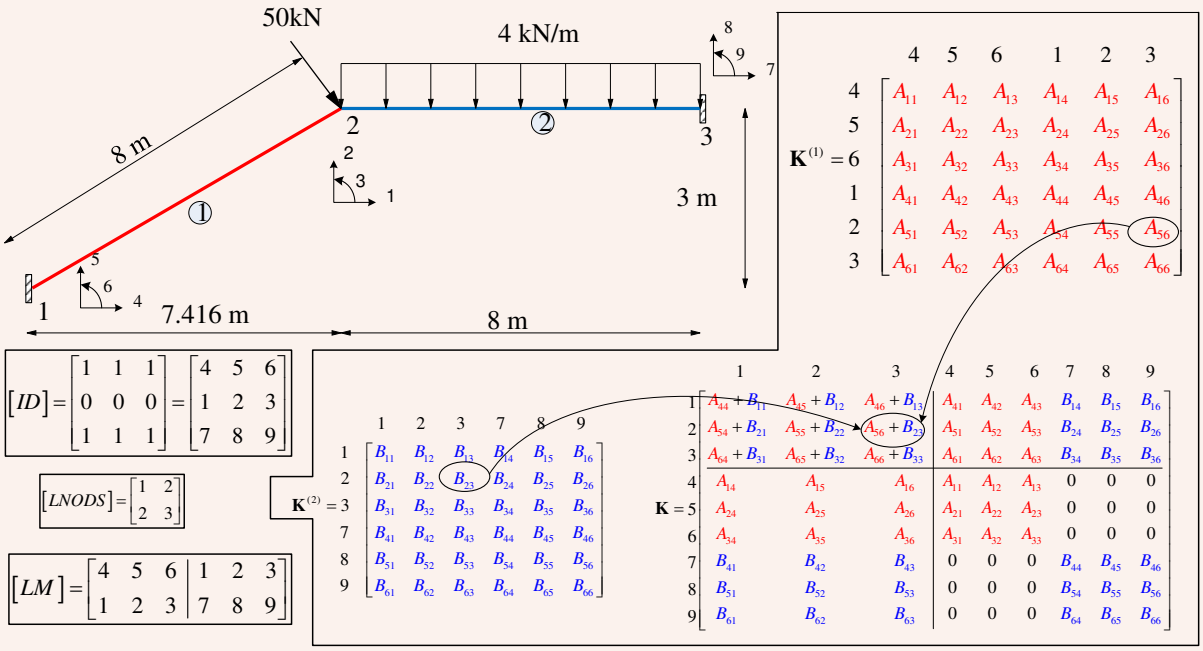
27 تُجمّع بعد ذلك مصفوفة الصلابة الموسّعة، أو العامة، $\mathbf{K}$ من مصفوفات صلابة العناصر المفردة في نظام الإحداثيات العام $\mathbf{K}^{(e)}$. يصف هذا المقطع إجراءً شائعاً للتجميع، بينما تُعرض طريقة بديلة تعتمد التحويل المتطابق في §45.5.

28 لكل حد K_{ij} نضيف مساهمة جميع العناصر القادرة على وصل درجة الحرية i بدرجة الحرية j، ويتم ذلك باستخدام مصفوفة **LM**.

29 نهيّئ أولاً مصفوفة الصلابة العامة بالقيمة $\mathbf{K}^S = \mathbf{0}$، ثم نمر على جميع العناصر ونجمع مساهماتها باستخدام **LM**.

$$K^{(e)}_{ij} \rightarrow K^{(S)}_{st} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} s = LM(e,i) \\ t = LM(e,j) \end{cases}$$

30 يوضح الشكل 43.5 عملية التجميع للإطار المبين في الشكل 43.2.



شكل 43.5: عملية تجميع مصفوفة الصلابة العامة

31 توجد طريقة بديلة لتجميع مصفوفة الصلابة العامة تعتمد *التحويل المتطابق*، وتُعرض في §45.5.

43.4.4 الإجراء خطوة بخطوة

32 تُلخّص خوارزمية طريقة الصلابة المباشرة في الخطوات الآتية:

التمهيدات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. قراءة النموذج الرياضي للمنشأ: النوع والإحداثيات والاتصال وخصائص المقاطع والمواد والأحمال.
2. تحديد عدد العقد (`nnode`) وعدد العناصر (`nelem`) وأكبر عدد من درجات الحرية لكل عقدة (`ndofpn`) ورتبة K_{tt} (`sizet`) والعدد الكلي لدرجات الحرية (`ndoft`)، ثم تحديث **ID** وتحديد مصفوفات **LM**.

التحليل في النظام العام

1. لكل عنصر، نحدد

   (a) المتجه **LM** الذي يربط درجات حرية العنصر المحلية بدرجات حرية المنشأ العامة.
   (b) مصفوفة صلابة العنصر $[\mathbf{k}^{(e)}]$.
   (c) مصفوفة التحويل $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$.
   (d) مصفوفة صلابة العنصر في الإحداثيات العامة $[\mathbf{K}^{(e)}] = [\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]^T [\mathbf{k}^{(e)}][\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$

2. تجميع مصفوفة الصلابة الموسّعة $[\mathbf{K}^{(S)}] = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{k}^{(e)}$ لدرجات الحرية غير المقيّدة والمقيّدة.
3. استخراج $[\mathbf{K}_{tt}]$ من $[\mathbf{K}^{(S)}]$ وعكسها.
4. متجه الحمل:

   (a) حساب متجهات القوى العقدية المكافئة لكل عنصر في النظام المحلي $\mathbf{p}_{El}^{(e)}$ وفي النظام العام $\mathbf{P}_{El}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T} \mathbf{p}_{El}^{(e)}$.
   (b) تجميع متجه الحمل العقدي ليشمل الأحمال العقدية والقوى العقدية المكافئة، مع ملاحظة أن $\mathbf{P}$ يخص المنشأ: $\mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{P}_{El}^{(e)} + \mathbf{P}_{nodes}(LM^{(e)}(i)); \forall LM^{(e)} \le \text{size}(K_{tt})$.

5. إجراء التعويض العكسي والحصول على الإزاحات العقدية في النظام العام، $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \mathbf{P}_t$.
6. استخراج $\mathbf{K}_{ut}$.
7. تحديد $\mathbf{P}_R$ الذي يخزن

$$\mathbf{P}_R(1{:}\text{ndof-sizet}) = \sum_{e=1}^{nelem} \Gamma^{(e)} \mathbf{p}_{el}^{(e)}; \forall LM^{(e)} > \text{size}(K_{tt})$$

وهي أحمال العناصر المحولة إلى النظام العام لدرجات الحرية المقيّدة، ولذلك تؤثر في ردود الأفعال.

8. حل ردود الأفعال، $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut} \boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu} \boldsymbol{\Delta}_u - \mathbf{P}_R$.

استرجاع القوى في النظام المحلي (القوى الداخلية): لكل عنصر

1. تحديد إزاحات عقد العنصر في النظام العام من الإزاحات العقدية العامة.
2. تحويل الإزاحات العقدية من الإحداثيات العامة إلى المحلية، $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}] \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

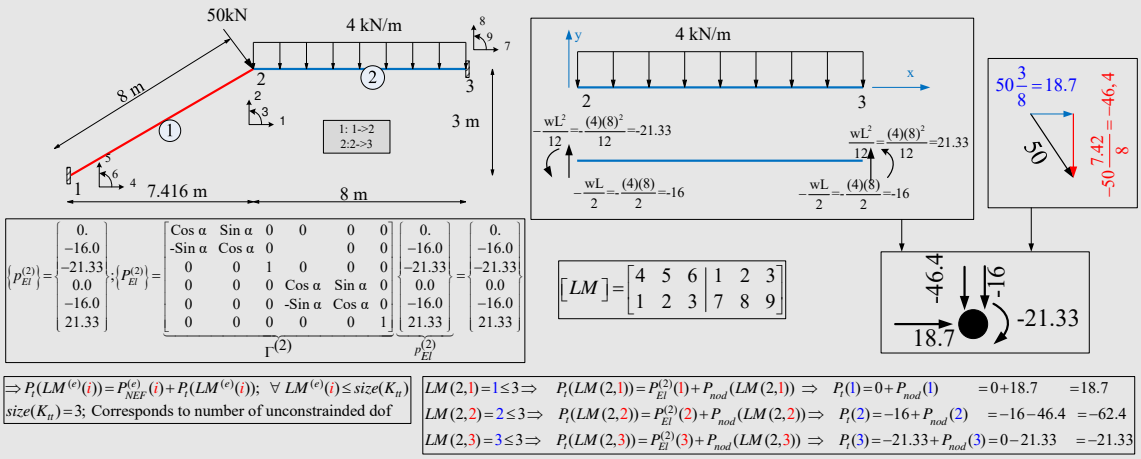
3. تحديد القوى الداخلية $\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} - \mathbf{p}_{El}^{(e)}$.

43.5 أمثلة

43.5.1 مثال 43.1: إطار

نعود إلى الإطار البسيط المدروس سابقاً وننفذ الحل الكامل خطوة بخطوة. وتساعد القيم الوسيطة المستخدمين على تصحيح برامجهم، كما يرد حل لهذه المسألة بلغة MATLAB® في §I.2.6.

43.5.1.1 تمهيدات



$$\left\{p_{El}^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0.0 \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}; \left\{P_{El}^{(2)}\right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{Cos}\,\alpha & \text{Sin}\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Sin}\,\alpha & \text{Cos}\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Cos}\,\alpha & \text{Sin}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{Sin}\,\alpha & \text{Cos}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{(2)}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0.0 \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{p_{El}^{(2)}} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0.0 \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$[LM] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_t(LM^{(e)}(i)) = P_{NEF}^{(e)}(i) + P_t(LM^{(e)}(i)); \quad \forall\, LM^{(e)}(i) \le size(K_{tt})$$

$size(K_{tt}) = 3$; Corresponds to number of unconstrainded dof

$$LM(2,1) = 1 \le 3 \Rightarrow \quad P_t(LM(2,1)) = P_{El}^{(2)}(1) + P_{nod}(LM(2,1)) \Rightarrow \quad P_t(1) = 0 + P_{nod}(1) \quad = 0 + 18.7 \quad = 18.7$$

$$LM(2,2) = 2 \le 3 \Rightarrow \quad P_t(LM(2,2)) = P_{El}^{(2)}(2) + P_{nod}(LM(2,2)) \Rightarrow \quad P_t(2) = -16 + P_{nod}(2) \quad = -16 - 46.4 \quad = -62.4$$

$$LM(2,3) = 3 \le 3 \Rightarrow \quad P_t(LM(2,3)) = P_{El}^{(2)}(3) + P_{nod}(LM(2,3)) \Rightarrow \quad P_t(3) = -21.33 + P_{nod}(3) = 0 - 21.33 \quad = -21.33$$

مصفوفات الصلابة $\mathbf{k}^{(e)}$

$$k_1 = k_2 = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مصفوفات التحويل Γ

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفات الصلابة $\mathbf{K}^{(e)} \leftarrow \mathbf{k}^{(e)}$

$$[K_1] = [\Gamma_1]^T [k_1] [\Gamma_1] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0.0141 & -0.0348 & 0.100 \\ -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & 1.2904 & 0.5182 & 0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0.5182 & 0.2190 & -0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.100 & 0.0141 & -0.0348 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [\Gamma_2]^T [k_2] [\Gamma_2] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

تجميع مصفوفة الصلابة العامة

$$[K_{Aug}] = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{tu} \\ K_{ut} & K_{uu} \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & -1.5000 & 0 & 0 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

متجهات القوى

$$p_{el}{}^{(1)(2)} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$P_{el}{}^{(2)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{p_{El}} = \begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 18.75 \\ -46.35 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{P_{Nodes}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{El}} = \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

الإزاحات

$$\{\Delta\} = [K_{tt}]^{-1} \{P\}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix}$$

$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0619 & -0.1405 & -0.0012 \\ -0.1405 & 0.7567 & -0.0002 \\ -0.0012 & -0.0002 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ردود الأفعال

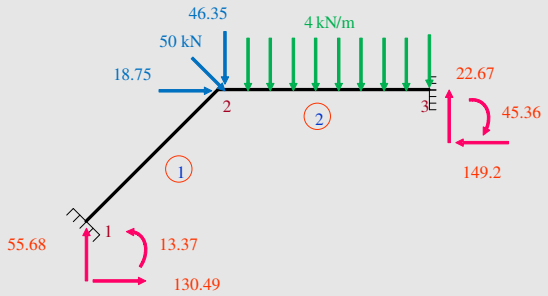
$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}_{ut}]\{\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EI}^{(2)}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 13049. \\ 55676. \\ 13374. \\ 149 - 24. \\ 22673. \\ 45 - 35. \end{Bmatrix}$$

التحقق

$$\Sigma F_x = 130.49 - 149.2 + 18.75 = 0.04 \checkmark$$
$$\Sigma F_y = 55.68 + 22.67 - 46.35 - (4)(8) = 0.0 \checkmark$$



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإزاحات المحلية $\delta \leftarrow \Delta$

$$[\delta_1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة التحويل}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{الإزاحات العامة}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{الإزاحات المحلية}}$$

$$[\delta_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة التحويل}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{الإزاحات العامة}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{الإزاحات المحلية}}$$

القوى الداخلية

$$[p_1] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة صلابة العنصر بالإحداثيات المحلية}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{الإزاحات المحلية}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}}_{P_{El}^{(1)}}$$

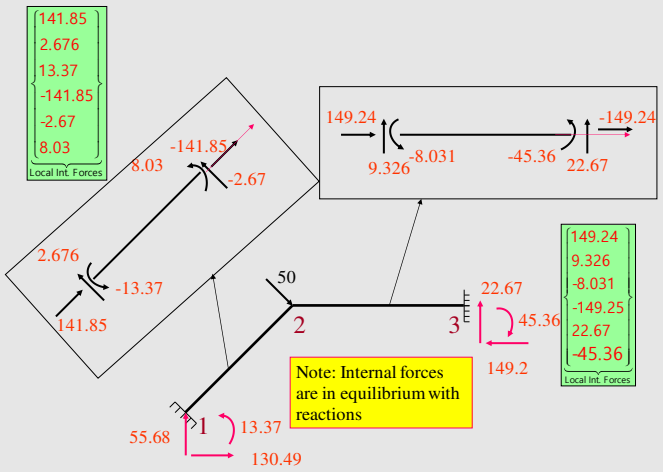
$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 141.85 \\ 2.676 \\ 13.37 \\ -141.85 \\ -2.67 \\ 8.03 \end{Bmatrix}}_{\text{القوى الداخلية المحلية}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$[p_2] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة صلابة العنصر بالإحداثيات المحلية}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{الإزاحات المحلية}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -16.00 \\ -21.33 \\ 0.00 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EL}^{(2)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 14924. \\ 9.326 \\ -8.031 \\ -149.25 \\ 22.67 \\ -45.36 \end{Bmatrix}}_{\text{القوى الداخلية المحلية}}$$

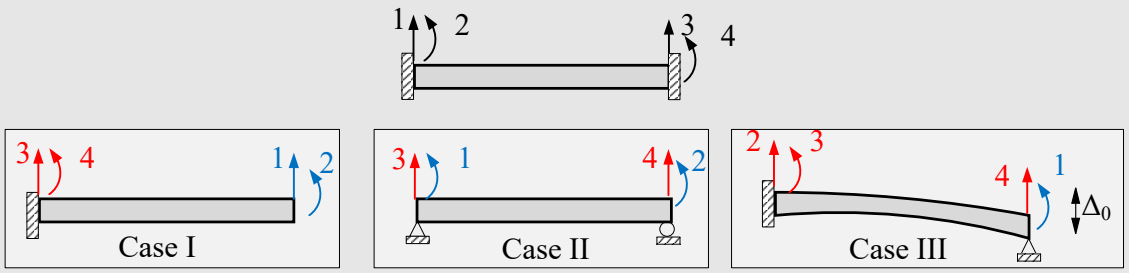
مخطط الجسم الحر النهائي



مثال 43.2: كمرة

لا يوضح هذا المثال طريقة الصلابة المباشرة فحسب، بل يبيّن أيضاً كيفية تخزين البيانات الداخلية في برنامج حاسوبي مدمج.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



تُعطى مصفوفة الصلابة الكاملة لعنصر الكمرة بـ

$$[\mathbf{k}^e] = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

وكما نعلم، هذه المصفوفة منفردة، رتبتها الجبرية 2 ورتبتها الحجمية 4، لأنها تتضمن حركتي جسم صلب. ومع ذلك يمكن تحليلها بدراسة الحالات الثلاث الآتية.

I كمرة كابولية وحمل مركز

1. مصفوفة صلابة *العنصر* هي

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. تُجمّع مصفوفة صلابة *المنشأ* الموسّعة:

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

3. يمكن إعادة كتابة المصفوفة العامة كما يأتي:

$$\left\{\begin{array}{c} -P\checkmark \\ 0\checkmark \\ \hline R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \theta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. تُعكس $\mathbf{K}_{tt}$، أو تُحلل فعلياً، وتُخزن في المصفوفة العامة نفسها:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right]$$

5. نحسب بعد ذلك الحمل المكافئ $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$، ونستبدل $\mathbf{P}_t$ بـ$\mathbf{P}'_t$:

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} \\ L^2/2EI & L/EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -P \\ 0 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. نحل الآن الإزاحات $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$، ونستبدل $\mathbf{P}_t$ بـ$\boldsymbol{\Delta}_t$:

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\Delta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} r$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-PL^3/3EI} \\ \boxed{-PL^2/2EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

7. أخيراً نحل ردود الأفعال $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$، ونستبدل $\boldsymbol{\Delta}_u$ بـ$\mathbf{R}_u$:

$$\left\{\begin{array}{c} -PL^3/3EI \\ -PL^2/2EI \\ \hline \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ L^2/2EI & L/EI & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-PL^3/3EI} \\ \boxed{-PL^2/2EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -PL^3/3EI \\ -PL^2/2EI \\ \hline \boxed{P} \\ \boxed{PL} \end{array}\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

II كمرة بسيطة الارتكاز وعزم طرفي

1. مصفوفة صلابة *العنصر* هي

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & 1 & -4 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. تُجمّع مصفوفة صلابة *المنشأ* الموسّعة:

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. يمكن إعادة كتابة مصفوفة الصلابة العامة كما يأتي:

$$\left\{\begin{array}{c} 0\checkmark \\ M\checkmark \\ \hline \\ R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. تُعكس $\mathbf{K}_{tt}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. نحسب الحمل المكافئ $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$، ونستبدل $\mathbf{P}_t$ بـ$\mathbf{P}'_t$:

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ -L/6EI & L/3EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ M \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. نحل الإزاحات $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$، ونستبدل $\mathbf{P}_t$ بـ$\boldsymbol{\Delta}_t$:

$$\begin{Bmatrix} \boxed{\theta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7. نحل ردود الأفعال $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$، ونستبدل $\boldsymbol{\Delta}_u$ بـ$\mathbf{R}_u$:

$$\begin{Bmatrix} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{R_1} \\ \boxed{R_2} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ -L/6EI & L/3EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{M/L} \\ \boxed{-M/L} \end{Bmatrix}$$

III كمرة كابولية وإزاحة ابتدائية وإزاحات معلومة

1. مصفوفة صلابة *العنصر* هي

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -3 & -4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. تُجمّع مصفوفة صلابة *المنشأ* الموسّعة:

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. يمكن إعادة كتابة المصفوفة العامة كما يأتي:

$$\begin{Bmatrix} M\checkmark \\ \hline R_2? \\ R_3? \\ R_4? \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_1? \\ \hline \Delta_2\checkmark \\ \theta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{Bmatrix}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. تُعكس $\mathbf{K}_{tt}$، أو تُحلل فعلياً، وتُخزن في المصفوفة العامة نفسها:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. نحسب بعد ذلك الحمل المكافئ $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$، ونستبدل $\mathbf{P}_t$ بـ $\mathbf{P}'_t$:

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{c|ccc} L/4EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. نحل الآن الإزاحات $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$، ونستبدل $\mathbf{P}_t$ بـ $\boldsymbol{\Delta}_t$:

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\theta_1} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \Delta^0 \end{array}\right\}$$

7. أخيراً نحل ردود الأفعال $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$، ونستبدل $\boldsymbol{\Delta}_u$ بـ $\mathbf{R}_u$:

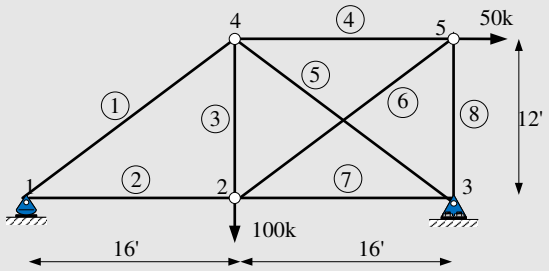
$$\left\{\begin{array}{c} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \hline \boxed{R_2} \\ \boxed{R_3} \\ \boxed{R_4} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L/4EI & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{ML/4EI + 3\Delta^0/2L} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} ML/4EI + 3\Delta^0/2L \\ \hline \boxed{3M/2L - 3EI\Delta^0/L^3} \\ \boxed{M/2 - 3EI\Delta^0/L^2} \\ \boxed{-3M/2L + 3EI\Delta^0/L^3} \end{array}\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43.5.2 مثال 43.3: جمالون



1. درجات الحرية وLM، مع تعريف الاتصال من رقم العقدة الأصغر إلى الأكبر:

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \\ 9 & 10 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{LM} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2. مصفوفة صلابة العنصر:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}; \quad s = \sin\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$$

3. بالتعويض:

العنصر 1: $L = 20'$,$c = \frac{16-0}{20} = 0.8$,$s = \frac{12-0}{20} = 0.6$,$\frac{EA}{L} = \frac{(30{,}000ksi)(10in^2)}{20'} = 15{,}000\ k/ft.$

$$[K_1] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9{,}600 & 7200 & -9{,}600 & -7{,}200 \\ 7{,}200 & 5{,}400 & -7{,}200 & -5{,}400 \\ -9{,}600 & -7{,}200 & 9{,}600 & 7{,}200 \\ -7{,}200 & -5{,}400 & 7{,}200 & 5{,}400 \end{bmatrix} \end{array}$$

العنصر 2: $L = 16'$, $c = 1$, $s = 0$, $\frac{EA}{L} = 18{,}750$ k/ft.

$$[K_2] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18{,}750 & 0 & -18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18{,}750 & 0 & 18{,}750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

العنصر 3 $L = 12'$, $c = 0$, $s = 1$, $\frac{EA}{L} = 25{,}000\ k/ft$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$[K_3] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,000 & 0 & -25,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

العنصر 8 $L = 12' , c = 0 , s = 1 , \frac{EA}{L} = 25,000\ k/ft$

$$[K_8] = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 9 & 10 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,000 & 0 & -25,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. تجميع مصفوفة الصلابة العامة بوحدة k/ft. نلاحظ أننا لا نجمّع مصفوفة الصلابة الموسّعة، بل مصفوفتها الجزئية $[\mathbf{K}_{tt}]$.

5. التحويل إلى k/in والتبسيط:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2,362.5 & -1,562.5 & 0.00 & -800 & -600 & 0 & 0 \\ & 3,925.0 & 600 & 0 & 0 & -800 & -600 \\ & & 2,533.33 & 0.00 & -2,083.33 & -600 & -450 \\ & & & 3,162.5 & 0 & -1,562.5 & 0 \\ & & \text{متناظرة} & & 2,983.33 & 0 & 0 \\ & & & & & 2,362.5 & 600 \\ & & & & & & 2,533.33 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_t}$$

6. عكس مصفوفة الصلابة وحل الإزاحات:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0223 \text{ in.} \\ 0.00433 \text{ in.} \\ -0.116 \text{ in.} \\ -0.0102 \text{ in.} \\ -0.0856 \text{ in.} \\ -0.00919 \text{ in.} \\ -0.0174 \text{ in.} \end{Bmatrix}$$

7. حل القوى الداخلية للعناصر، وهي هنا قوى محورية، في أنظمة الإحداثيات المحلية:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\frac{AE}{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}}\underbrace{\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}}\underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}}}_{\boldsymbol{\delta}}}$$

$$= \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر 1:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^1 = (15,000\text{kpf}) \left(\frac{1}{12}\frac{\text{.ft}}{\text{.in}}\right) \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0223 \\ 0.00 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 52.1\text{kip} \\ -52.1\text{kip} \end{Bmatrix} \text{ ضغط}$$

العنصر 2:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^2 = 18,750\text{ kpf} \left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft}}{\text{.in}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0233 \\ 0.00 \\ 0.00433 \\ -0.116 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -43.2\text{kip} \\ 43.2\text{kip} \end{Bmatrix} \text{ شد}$$

العنصر 3:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^3 = 25,000\text{kpf} \left(\frac{1}{12}\frac{\text{.ft}}{\text{.in}}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00433 \\ -0.116 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

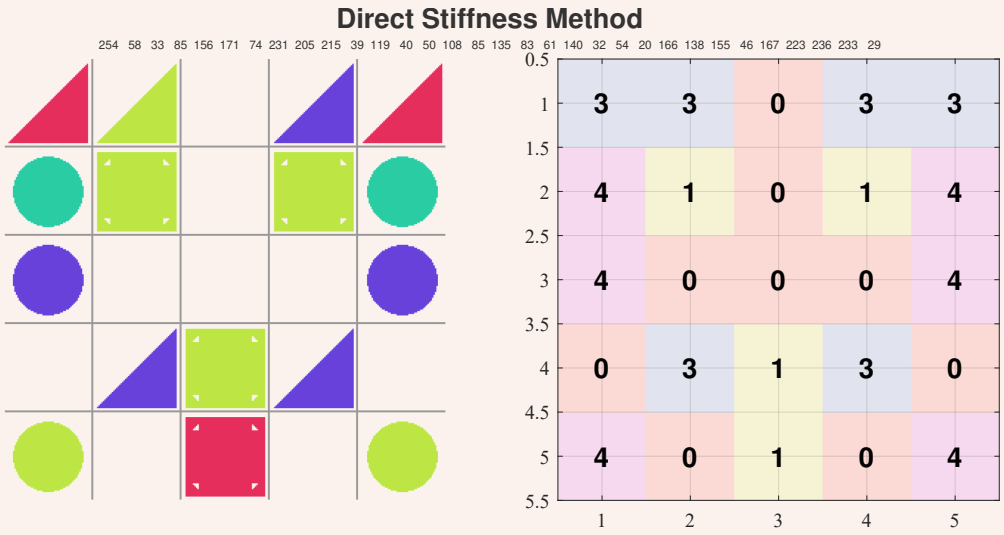
$$= \begin{Bmatrix} -63.3\text{kip} \\ 63.3\text{kip} \end{Bmatrix} \text{ شد}$$

العنصر 4:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^4 = 18,750\text{kpf} \left(\frac{1}{12}\frac{\text{.ft}}{\text{.in}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0102 \\ -0.0856 \\ -0.00919 \\ -0.0174 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.58\text{kip} \\ 1.58\text{kip} \end{Bmatrix} \text{ شد}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لصفلاب صاخلا يرصبلا زمرلا، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

44 الخصائص الرياضية لمصفوفة الصلابة؛ مسائل حسابية

ملخص

لا تمثل مصفوفة الصلابة مجرد تحويل بين الإزاحات والقوى، بل تحتوي أيضاً على معلومات إضافية كثيرة تكشف للمحلل دقة الحل. نبحث هذه المعلومات ونقدم مفهوم رقم الشرط. نبدأ بتحليل هذا التحويل بالتفصيل وتصوير العلاقة بين متجهي الدخل والخرج في بعدين، مما يقود إلى إجراءات تقلل سوء تكييف مصفوفة الصلابة العامة. ثم نعرض ملاحظة موجزة عن تحليل المصفوفة مقارنةً بعكسها. وأخيراً نبحث ترقيم العقد القريب من الأمثل لما له من أهمية كبيرة في تقليل الزمن الحسابي اللازم لتحديد $\mathbf{K}^{-1}$. ومع أن هذه المفاهيم ليست ضرورية للفهم الأساسي، فإنها مفيدة للمهندس الإنشائي المتمكن.

44.1 المصفوفات سيئة التكييف 1409
44.1.1 القيم الذاتية 1409
44.1.2 رقم الشرط 1414
44.1.3 مصفوفات الصلابة سيئة التكييف 1415
44.2 اعتبارات عددية 1419
44.2.1 العكس مقارنةً بالتحليل 1419
44.2.2 ترقيم العقد 1419

يستند هذا الفصل إلى Gavin, 2012، ويقدّر المؤلف عرضه الواضح والعميق للخصائص الرياضية لمصفوفات الصلابة. وقد وُسّع العرض وأعيد تنظيمه، كما تعود عدة أمثلة عددية إلى الأستاذ غافن.

44.1 المصفوفات سيئة التكييف

44.1.1 القيم الذاتية

1 يمكن النظر إلى مصفوفة الصلابة $[k]$، أو $[K]$، بوصفها تحويلاً لمتجه *الإزاحة* $\mathbf{u}$ *إلى* متجه قوة $\mathbf{p}$. ولا يلزم أن ينطبق اتجاه المتجهين، الشكل 44.1a.

2 على سبيل المثال، في الحالة

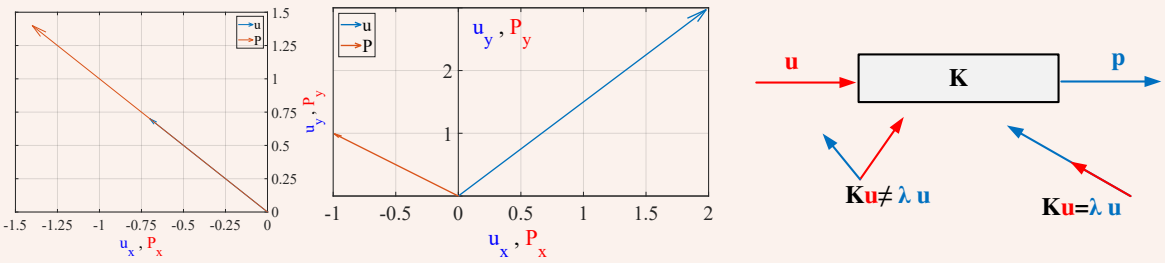
$$\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{truss}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

يظهر المتجهان $\mathbf{u}$ و$\mathbf{p}$ في الشكل 44.1b بافتراض $AE/L = 1$. أما في الحالة

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

فيكون المتجه الذاتي $\begin{matrix} 0.707 & -0.707 \end{matrix}$ ، وينطبق اتجاه $\mathbf{u}$ و$\mathbf{p}$، الشكل 44.1c.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) التحويل **Ku ≠ λu** (b) **Ku = λu** (c)

شكل 44.1: تحويل الإزاحات إلى قوى

3 يتضح المعنى الهندسي لهذا التحويل بالنظر إلى ما يحدث لمجموعة *كاملة* من متجهات الإزاحة في وقت واحد بدلاً من تتبع متجه مفرد. لنأخذ جميع متجهات الإزاحة **u** ذات الطول الواحد، أي كل **u** يحقق

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 = 1.$$

عند $N = 2$ ترسم نهايات هذه المتجهات دائرة الوحدة، وعند N العام ترسم كرة وحدة فائقة. ويؤدي تطبيق **K** على كل متجه، أي حساب $\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{u}$، إلى مجموعة جديدة من متجهات القوى. والحقيقة الهندسية الأساسية هي أن كرة وحدة *الإزاحات* تتحول تحت **K** إلى مجسم *إهليلجي للقوى*.

4 تساوي أطوال أنصاف محاور مجسم القوى الإهليلجي القيم الذاتية λ_i للمصفوفة **K**، وتتجه هذه المحاور وفق المتجهات الذاتية المقابلة $\mathbf{u}_i$. ولأن المتجهات الذاتية لمصفوفة حقيقية متناظرة متعامدة فيما بينها، تكون المحاور الرئيسة للمجسم متعامدة، الشكل 44.2. في المثال حسن التكييف في الجزء (a)،

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.54, \quad \lambda_2 = 2.16, \quad \kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4.0,$$

تكون القيمتان الذاتيتان موجبتين والقطع الناقص غير منحل. ونلاحظ أن $\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ و**u** لا يتجهان عموماً في الاتجاه نفسه؛ بل ينطبقان فقط عندما ينطبق **u** على أحد المتجهات الذاتية.

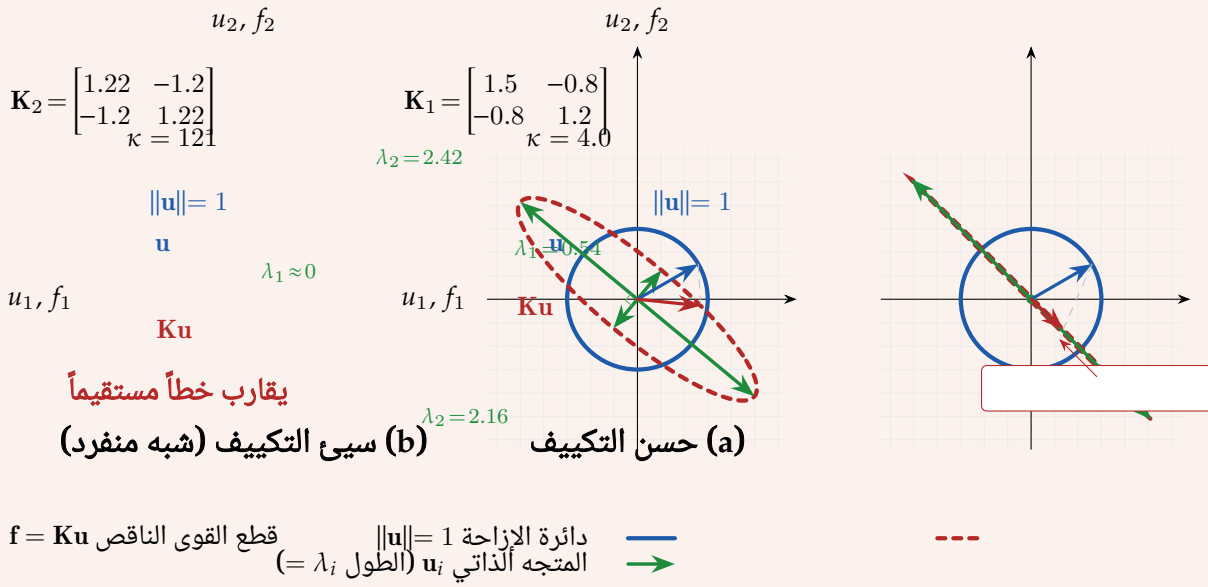
5 **المعنى الهندسي لقيمة ذاتية صفرية أو شبه صفرية.** إذا كانت إحدى القيم الذاتية صفراً تماماً، ينكمش أحد نصفي محوري مجسم القوى الإهليلجي إلى نقطة؛ وعند $N = 2$ ينحل القطع الناقص إلى قطعة مستقيمة. وهذا يعني أن عائلة كاملة من متجهات الإزاحة المنطبقة على المتجه الذاتي المقابل $\mathbf{u}_1$ تتحول إلى متجه القوة نفسه، أي المتجه الصفري $\mathbf{K}\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. ويمكن للمنشأ أن يتشوه وفق النمط $\mathbf{u}_1$ دون أن ينشأ أي رد استعادة؛ وهذه حركة جسم *صلب* أو *آلية*، وتكون **K** منفردة. وبالعكس لا يوجد إزاحة وحيدة لمتجه قوة معلوم عندما تكون **K** منفردة، فيصبح الحل غير محدد.

يبين الجزء (b) الحالة شبه المنفردة:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.02, \quad \lambda_2 = 2.42, \quad \kappa = 121.$$

القيمة الذاتية الصغرى ليست صفراً، لكنها ضئيلة قياساً بالكبرى. ويستطيل قطع القوى الناقص حتى يكاد يصبح قطعة مستقيمة، فتنتج متجهات إزاحة مختلفة جداً **u** متجهات قوى متقاربة **p**. والنتيجة العددية أن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 44.2: تحويل دائرة إزاحة الوحدة إلى قطع ناقص للقوى، (Gavin, 2012).

الحل المحسوب $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ غير موثوق، إذ تولد الأخطاء الصغيرة في $\mathbf{p}$، من التقريب أو نمذجة الحمل، أخطاء كبيرة في $\mathbf{u}$.

6 **التحديد الموجب والاستقرار الإنشائي.** تكون مصفوفة الصلابة $\mathbf{K}$ موجبة *التحديد* إذا وفقط إذا كانت جميع قيمها الذاتية موجبة تماماً:

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} > 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall\, i.$$

يمثل الطرف الأيسر طاقة الانفعال الداخلية، التي يجب أن تكون موجبة لأي تشوه غير صفري في منشأ مستقر وسلبي. ولإثبات التكافؤ نعوض $\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ ونستخدم $\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \sum u_j^2 > 0$:

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i\, \mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = \lambda_i \sum u_j^2.$$

ولأن $\sum u_j^2 > 0$، فإن إيجابية U تتطلب $\lambda_i > 0$. وتشير القيمة الذاتية الصفرية إلى نمط جسم صلب ذي طاقة انفعال صفرية، بينما تشير القيمة السالبة، وهي غير ممكنة فيزيائياً لمنشأ سلبي، إلى نمط يحرر طاقة. وإضافة إلى ذلك، لما كان محدد $\mathbf{K}$ يساوي حاصل ضرب قيمها الذاتية،

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

فإن المصفوفة موجبة التحديد تحقق $\det(\mathbf{K}) > 0$ وتكون قابلة للعكس، بينما تجعل أي قيمة ذاتية صفرية المصفوفة منفردة $(\det = 0)$.

7 **مسألة المصفوفة القاسية عددياً.** تسمى المصفوفة *قاسية* بالمعنى العددي إذا كان $\kappa(\mathbf{K}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$ حتى لو كانت جميع القيم الذاتية موجبة والمصفوفة قابلة للعكس شكلياً. والمصفوفة القاسية ليست منفردة،

لكنها سيئة التكييف؛ فقد يولد اضطراب نسبي مقداره ε في البيانات، كالأحمال أو الإحداثيات، اضطراباً نسبياً مقداره $\kappa\varepsilon$ في الحل. تظهر هذه الحالة غالباً عندما تشترك عناصر متفاوتة الصلابة جداً في عقدة، كاتصال كمرة مرنة بعمود شبه صلب، أو استخدام صلابة اصطناعية كبيرة لنمذجة وصلة صلبة. ويقيس رقم الشرط هذه الحساسية بدقة، كما سيُبحث في المقطع التالي.

44.1.1.1 التفسير الفيزيائي للقيم الذاتية

8 يمكن تحديد طاقة الانفعال الداخلية المخزنة في العنصر من

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{up} = \frac{1}{2}\,\mathbf{uku} \tag{44.1}$$

إذا اعتبرنا نظاماً يكون فيه الحمل $\{\mathbf{p}\}$ عند كل عقدة متناسباً مع إزاحة العنصر العقدية $\{\mathbf{u}\}$ بمعامل λ، فإن $\mathbf{ku} = \lambda\mathbf{u}$ أو $(\mathbf{k} - \lambda[\mathbf{I}])\,\mathbf{u} = 0$.

9 وهذه بالتعريف *مسألة قيم ذاتية*، ويكون عدد القيم الذاتية λ_i مساوياً لعدد درجات الحرية، أو صفوف $\mathbf{k}$، ويقابل كل قيمة ذاتية λ_i متجه ذاتي $\mathbf{u}_i$.

10 تُطبّع المتجهات الذاتية بحيث $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^t = 1$، ومن ثم

$$\mathbf{u}_i\mathbf{k}\mathbf{u}_i^t = \lambda_i$$

وبالمقارنة مع المعادلة 44.1 يتضح أن

تعريف 44.1: القيم الذاتية لمصفوفة الصلابة

تساوي القيمة الذاتية λ_i لمصفوفة الصلابة ضعفي طاقة الانفعال الداخلية المخزنة في عنصر يتشوه وفق النمط المطبّع $\mathbf{u}_i$.

11 في حركة الجسم الصلب تتحرك أو تدور جميع العقد بالمقدار نفسه ولا تنشأ انفعالات داخلية، ولذلك يجب أن تساوي طاقة الانفعال U، والقيمة الذاتية λ المقابلة، صفراً.

12 يجب أن يساوي عدد القيم الذاتية الصفرية عدد حركات الجسم الصلب المستقلة الممكنة، أي عدد معادلات الاتزان. ولذلك يكون للعنصر اللاغرانجي ثنائي الأبعاد ثلاث قيم ذاتية صفرية تقابل انتقالين ودوراناً واحداً.

13 يدل نقص عدد القيم الذاتية الصفرية على عجز العنصر عن تمثيل حركة جسم صلب بلا انفعال.

14 وتدل زيادتها على وجود آلية غير مرغوبة أو فشل.

15 عند مقارنة مصفوفتَي صلابة لعنصرين متماثلين بصياغتين مختلفتين، تكون الصياغة ذات طاقة الانفعال الأصغر $(\mathbf{trk} = \Sigma\lambda_i)$ أفضل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 44.2: خصائص مصفوفة صلابة العنصر

تتميز مصفوفة صلابة العنصر بما يأتي:

الرتبة الحجمية: تساوي عدد درجات الحرية، أي حجم المصفوفة.

الرتبة الجبرية: تساوي عدد المعادلات المستقلة خطياً، أي الرتبة الحجمية ناقص عدد حركات الجسم الصلب (§L.3.1).

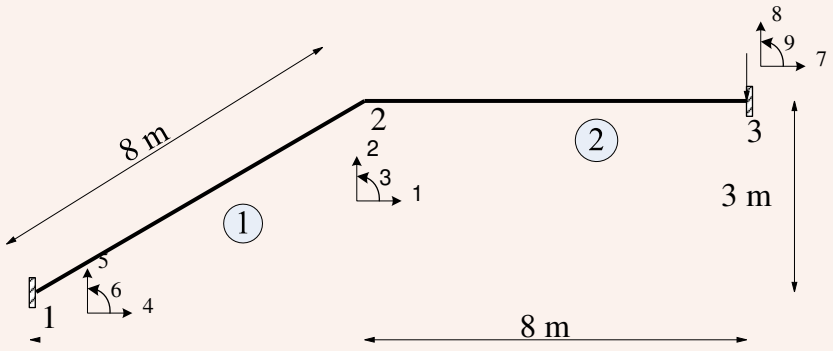
نقص الرتبة: يرتبط بعدد القيم الذاتية الصفرية.

16 سنشتق لاحقاً تعبير الصلابة الموسّعة في المعادلة 45.22:

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

حيث $\mathcal{B}$ مصفوفة الاتزان التي تربط القوى العقدية الخارجية بالقوى الداخلية، و$\mathbf{d}$ مصفوفة المرونة، و$\mathbf{d}^{-1}$ معكوسها أو مصفوفة الصلابة المختزلة. ومن الواضح أن مصفوفة الصلابة منفردة لأن "صفها" الثاني تابع خطياً للأول، بينما مصفوفة الصلابة المختزلة، وهي معكوس مصفوفة المرونة، ليست كذلك. ولذلك يساوي عدد القيم الذاتية الصفرية حجم $\mathcal{B}$.

17 للتوضيح نأخذ الشكل 44.3:



شكل 44.3: مسألة اختبار القيم الذاتية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وتُعطى مجموعات القيم الذاتية المقابلة بـ

$$\begin{aligned}
\lambda_{Kaug} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0059 \quad 0.1274 \quad 0.2201 \quad 0.4821 \quad 1.6109 \quad 4.3911 \ \rfloor \\
\lambda_{Ktt} &= 10^5 \lfloor\ 0.1275 \quad 0.3999 \quad 2.8913 \ \rfloor \\
\lambda_{k} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001 \ \rfloor \\
\lambda_{K^1} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001 \ \rfloor \\
\lambda_{K^2} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3187 \quad 3.0000 \ \rfloor
\end{aligned}$$

نلاحظ أن لكل من مصفوفة صلابة المنشأ الموسّعة ومصفوفة صلابة العنصر ثلاث قيم ذاتية صفرية فعلاً. كما أن للعنصرين القيم الذاتية نفسها لمصفوفة العنصر الأصلية في النظام المحلي.

44.1.2 رقم الشرط

تعريف 44.3: رقم الشرط

يُعرّف رقم شرط المصفوفة $\mathbf{K}$ كما يأتي:

$$\kappa(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|_2 \, \|\mathbf{K}^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

ويجب إصدار تحذير إذا كان رقم الشرط كبيراً، فهو يقيس أكبر تغير في الحل إزاء تغيرات صغيرة في بيانات المسألة، أي الحساسية.

18 يوجد سببان رئيسان لكبر رقم الشرط:

- نقص الاتصال: عناصر متجاورة يُفترض أن تشترك في عقدة، لكنها موصولة بعقد مختلفة متطابقة الموضع، مما يترك أحد العناصر غير مقيّد بما يكفي.
- وصل عناصر تختلف صلاباتها اختلافاً شديداً.

19 يمكن للقارئ الراغب في التعمق في دقة الخوارزميات العددية واستقرارها الرجوع إلى العرض الممتاز والواضح في Higham, 2002.

20 للتوضيح، نأخذ مصفوفة صلابة منشأ ذي درجتي حرية[1]

$$\begin{aligned}
K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 &= P_1 \\
K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 &= P_2
\end{aligned}$$

[1] جميع مصفوفات الصلابة متناظرة بحكم علاقة ماكسويل التبادلية $K_{ij} = K_{ji}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

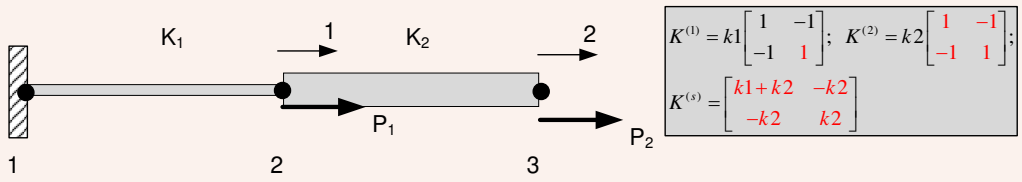
يمكن حل هاتين المعادلتين لإيجاد Δ_2 بدلالة Δ_1:

$$\Delta_2 = -\frac{K_{11}}{K_{12}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{12}}P_1$$
$$\Delta_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{22}}P_2$$

21 نعرض مثالاً عددياً لتوضيح دور κ.

44.1.3 مصفوفات الصلابة سيئة التكييف

22 نبني مصفوفة صلابة سيئة التكييف بوصل عنصر محوري شديد الصلابة بعنصر أكثر مرونة، الشكل 44.4.



شكل 44.4: تجميع عناصر ينتج مصفوفة **K** سيئة التكييف

تُعطى مصفوفة صلابة المنشأ ومعكوسها بـ

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{(K_1+K_2)K_2 - K_2^2}\begin{bmatrix} K_2 & K_2 \\ K_2 & K_1+K_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1K_2} \end{bmatrix}$$

23 حل متجه الإزاحة هو

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1K_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على معادلتين لـ $\Delta_2 = f(\Delta_1, 1/K_2)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_1 = K_1\Delta_1 - P_2 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1K_2} \end{aligned}\right\} \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{1}{K_2}P_2$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالمثل

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_2 = K_1\Delta_1 - P_1 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1K_2}\end{aligned}\right\} \Delta_2 = \frac{K_1+K_2}{K_2}\Delta_1 - \frac{1}{K_2}P_1$$

أو

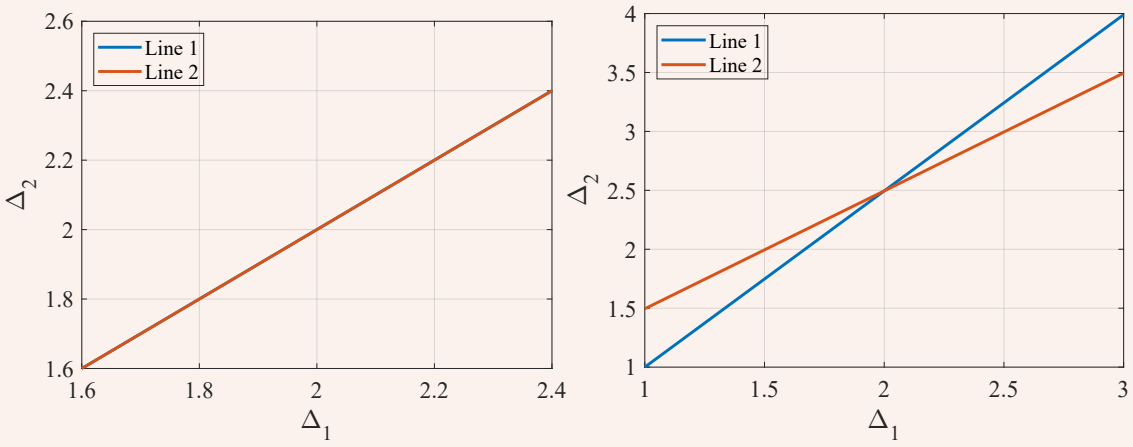
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K_1+K_2}{K_2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_2} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix}$$

نلاحظ الحد السفلي خارج القطر، فهو الذي يتحكم في رقم شرط المصفوفة.

24 للتوضيح نأخذ الحالتين الآتيتين:

$$\begin{aligned} 3 \quad K_1 \quad K_2 \quad &= \quad 1 \quad 2 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.5000 & -1.0000 \end{bmatrix} \\ K_1 \quad K_2 \quad &= \quad 1 \quad 10,000 \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.0001 & 1.0000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ونرسم حلول Δ_2 بدلالة Δ_1 عند $P_1 \quad P_2 \quad = \quad 1 \quad 1$ ، الشكل 44.5.



1 10,000 (b) 1 2 (a)

شكل 44.5: المصفوفات سيئة التكييف بدلالة $K_1 \quad K_2$

وتُلخص النتائج في الجدول 44.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 44.1: تأثير المصفوفات سيئة التكييف

	حسنة التكييف		سيئة التكييف	
	K_1	K_2	K_1	K_2
5-2	1.0	2.0	1.0	10,000
5-2 (Δ_2, Δ_1)	(5.0000, 4.0000)		(2.000099999999668, 1.999999999999668)10^4	
(λ_2, λ_1)	(2.2247-, 0.2247)		(2.000049998750063-, 0.000049998750062)	
$\kappa(\mathbf{K})$	9.9		4.0e+04	

MATLAB®، 64 بت، eps=2.2204e-16

25 نفقد الدقة عندما يكون رقم الشرط كبيراً جداً.

تعريف 44.4: الدقة وسوء التكييف

كقاعدة تقريبية، تُعد المصفوفة سيئة التكييف عندما يكون رقم شرطها في حدود $1/(\text{eps})$ أو أكبر من مقلوب دقة الآلة، مثل 10^7 للحساب أحادي الدقة 32 بت و10^{16} للحساب 64 بت. وللمصفوفات شديدة السوء تُستخدم تقنيات تحليل القيم المفردة.

26 يُفضّل تحليل المصفوفات سيئة التكييف بعد تهيئة مسبقة (§L.3.4).

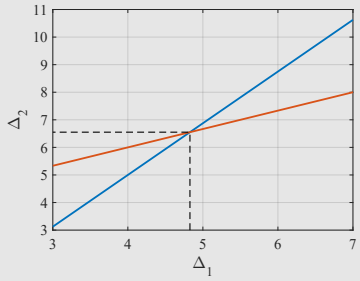
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

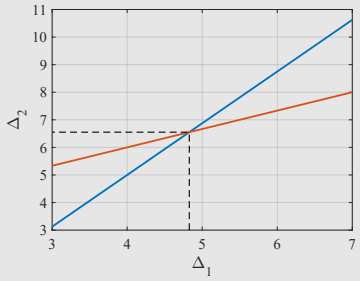
44.1.3.1 مثال 44.1: مصفوفة سيئة التكييف

نأخذ الحالات الأربع الآتية:

حسنة التكييف

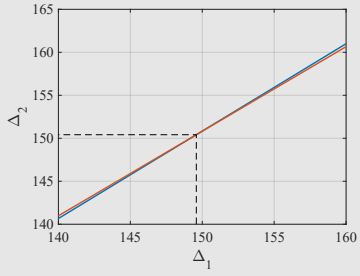
	ابتدائية	بعد الاضطراب
$[K]$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.79 \\ -0.79 & 1.2 \end{bmatrix}$
$\Delta_1 \quad \Delta_2$	4.8276 6.5517	4.7283 6.4461
$\lambda_1 \quad \lambda_2$	0.5361 2.1639	0.5459 2.1541
$\kappa(\mathbf{K})$	4.04	3.95

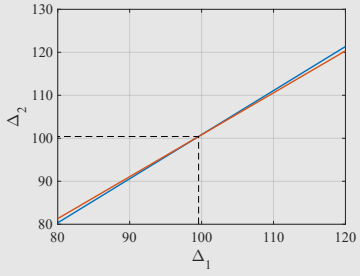




سيئة التكييف

	ابتدائية	بعد الاضطراب
$[K]$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.19 \\ -1.19 & 1.22 \end{bmatrix}$
$\Delta_1 \quad \Delta_2$	149.5868 150.4132	99.5851 100.4149
$\lambda_1 \quad \lambda_2$	0.0200 2.4200	0.0300 2.4100
$\kappa(\mathbf{K})$	121.00	80.33





نلاحظ الارتباط بين سوء تكييف المصفوفة وكبر رقم الشرط، وتأثير الاضطراب الصغير في رقم الشرط.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

44.2 اعتبارات عددية

44.2.1 العكس مقارنةً بالتحليل

27 يجب إيجاد معكوس مصفوفة صلابة المنشأ العامة $\mathbf{K}_{tt}$، أي $\mathbf{K}_{tt}^{-1}$. ولا يكون العكس الصريح عملياً إلا بقاعدة كرامر لمصفوفة 2×2؛ أما المصفوفات الأكبر فتُحلل إلى حاصل ضرب LU أو LDU باستخدام صور من حذف غاوس (§L.2.2). وتنقسم طرائق التحليل إلى

1. طرائق مباشرة ذات عدد ثابت من العمليات العددية. في الحالة العامة نستخدم تحليل $\mathbf{L.U}$، وإذا كانت المصفوفة متناظرة وموجبة التحديد نستخدم تحليل تشولسكي $\mathbf{L.L}^T$.
2. طرائق غير مباشرة، أي تكرارية، لا يكون عدد عملياتها ثابتاً مثل غاوس–سايدل، وهي أنسب للمصفوفات الكبيرة جداً.

28 تُعرض بعض هذه الطرائق في §L.2.1.

29 في الحالات الخاصة ذات المصفوفة القاسية، أي رقم الشرط الكبير، ينبغي استخدام *تحليل القيم المفردة* (§L.2.2.5) أو التهيئة المسبقة (§L.3.4).

30 في معظم الحالات لا يحتاج المستخدم إلى الانشغال باستراتيجية الحل، إذ تستدعى بسهولة في برامج مثل MATLAB®. ومن الدوال ذات الصلة:

`vni`()	غاوس–جوردان
`ul`()	تحليل LU
`lohc`()	تحليل تشولسكي
`mcrmys` ()	ترتيب كاثيل–ماكي العكسي للمصفوفات المتناثرة
`yps`()	رسم نمط تناثر المصفوفة

وتُراجع بالتفصيل في الفصل L.

44.2.2 ترقيم العقد

31 تكون $\mathbf{K}$ متناثرة عموماً، أي تحتوي أصفاراً كثيرة. وعند التحليل تُكتب جميع الحدود K_{ij} الواقعة تحت "خط الأفق" سواء كانت صفراً أم لا، بينما تبقى الحدود الصفرية فوقه دون معالجة. وخط الأفق هو موضع أدنى حد غير صفري في العمود.

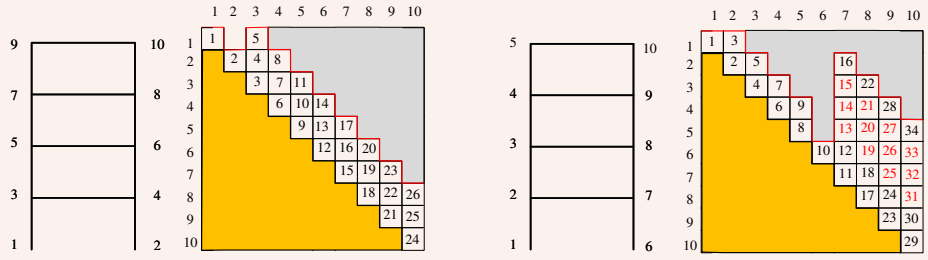
32 يفيد تجميع الحدود غير الصفرية قرب القطر في تقليل التخزين والزمن الحسابي. وبافتراض درجة حرية واحدة لكل عقدة في مبنى من فتحة واحدة وأربعة طوابق، يعرض الشكلان 44.6a و44.6b مثالين لترقيم سيئ وآخر ملائم.

33 تقع الخلايا الملونة تحت القطر ولا يلزم تخزينها بسبب التناظر، كما لا تُخزن الخلايا الرمادية فوق خط الأفق. أما الحدود غير الصفرية فمبيّنة بالأسود، والحدود الصفرية تحت خط الأفق بالأحمر، وكلاهما يخضع لعمليات التحليل.

34 يستفيد التخزين والجهد الحسابي من "حزم" أكبر عدد من الحدود غير الصفرية قرب القطر. وتتولى

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مولدات الشبكات هذه المهمة تلقائياً، وقد تستخدم داخلياً خوارزمية كاثيل–ماكي العكسية (RCMH) لإعادة الترقيم (Cuthill **and** McKee, 1969).

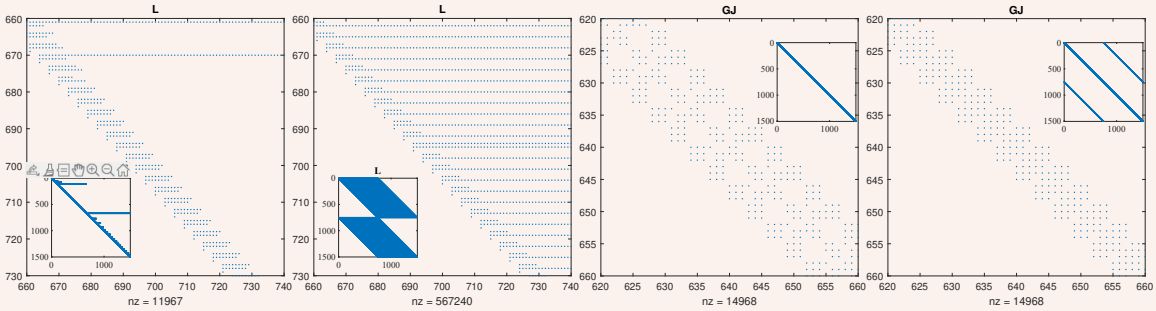


(a) ترقيم سيئ (b) ترقيم ملائم

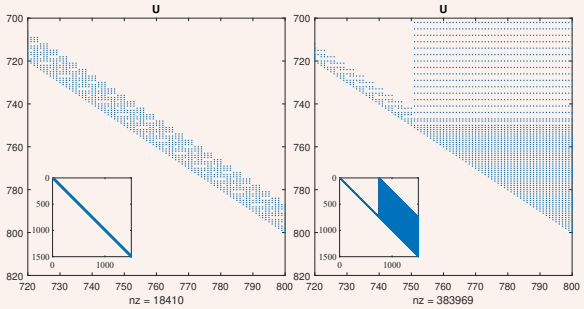
شكل 44.6: أهمية ترقيم العقد

35 لإبراز طبيعة مصفوفة الصلابة المتناثرة وأثرها في التخزين والكلفة الحسابية، نأخذ إطاراً من فتحة واحدة و250 طابقاً، أي 1500 معادلة ($3 \times 2 \times 250$). نقارن توزيع الحدود غير الصفرية باستراتيجيات غاوس–جوردان وتحليل LU وتشولسكي، مع خوارزمية RCMH ومن دونها. ويظهر عدد الحدود غير الصفرية بالرمز `nz` تحت كل شكل.

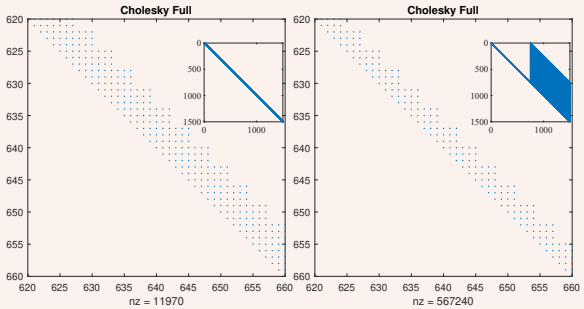
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) غاوس–جوردان (b) غاوس–جوردان مع RCMH (c) تحليل L (d) تحليل L مع RCMH



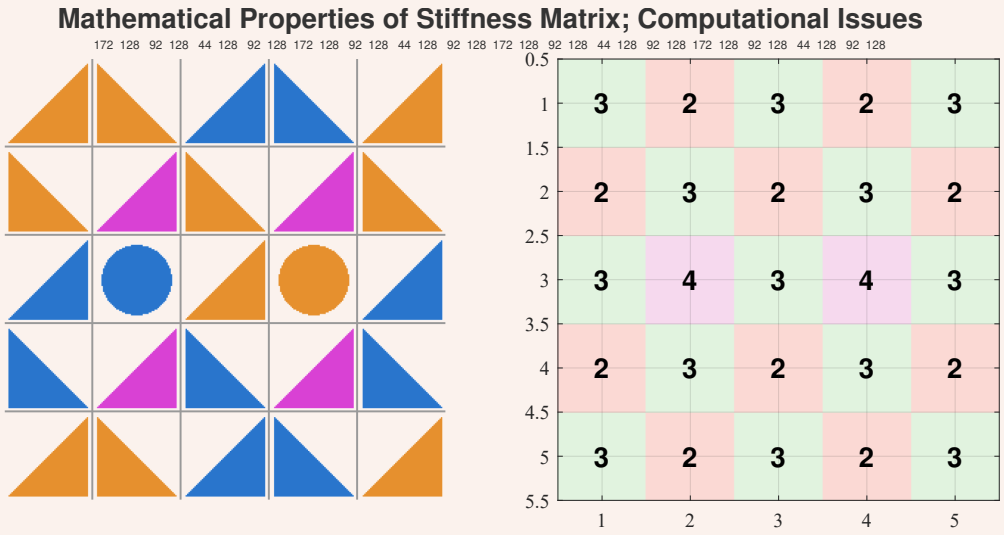
(e) تحليل U (f) تحليل U مع RCMH



(g) تشولسكي (h) تشولسكي مع RCMH

شكل 44.7: متطلبات تخزين مصفوفة صلابة المنشأ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



لصفلاب صاخلا يرصبلا زمرلا، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45 موضوعات خاصة

ملخص

يجمع هذا الفصل طائفة من الموضوعات المتنوعة المرتبطة بالتحليل الإنشائي المصفوفي. نبدأ بالتكثيف وتقسيم المنشأ إلى منشآت فرعية، مع أن استخدامهما قلّ حالياً لانخفاض كلفة ذاكرة الحاسوب. ثم نقدم مفهومي مصفوفتَي الاتزان والحركة. وتُستخدم هذه المفاهيم لاشتقاق علاقات الصلابة والمرونة، والتحليل المصفوفي للجمالونات (§20.4)، وصياغة العنصر القائم على المرونة (§60.4.1.1). بعد ذلك نعرض التحويل المتطابق بوصفه طريقة بديلة لتجميع مصفوفة الصلابة الموسّعة (§43.4.3)، وهي مفضلة في بعض برامج العناصر المحددة. ويختتم الفصل بثلاثة أنواع خاصة من عناصر الكمرة–العمود: أ) كمرات ذات إزاحات طرفية صلبة، ب) كمرات شبه صلبة مدعومة بنوابض، ج) كمرات متغيرة المقطع.

45.1 التكثيف وتقسيم المنشأ 1423
45.2 معادلات الاتزان والحركة 1424
45.2.1 مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$ 1424
45.2.2 مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$ 1432
45.2.3 العلاقة بين مصفوفتَي الاتزان والحركة 1434
45.3 العلاقات الحركية من معكوس مصفوفة الاتزان 1435
45.4 علاقات الصلابة والمرونة 1436
45.4.1 من الصلابة إلى المرونة 1436
45.4.2 من المرونة إلى الصلابة 1438
45.4.3 الثنائية بين طريقتي المرونة والصلابة 1442
45.5 منهج التحويل المتطابق لاستخراج $\mathbf{K}$ . . 1442
45.5.1 مثال 45.9: التحويل المتطابق . 1444
45.5.2 مثال 45.10: التحويل المتطابق لإطار 1446
45.6 عناصر خاصة 1448
45.6.1 الإزاحة الصلبة 1448
45.6.2 الكمرات شبه الصلبة 1450
45.6.3 المقاطع المتغيرة 1455
45.7 مصادر الانجراف الجانبي في الإطارات المقاومة للعزوم 1458

45.1 التكثيف وتقسيم المنشأ

1 التكثيف هو تقليل عدد درجات الحرية بالتعويض. فعلى مستوى العنصر قد نرغب في تكثيف عقدة داخلية، كما في العنصر اللاغرانجي، أما على المستوى العام فيرتبط ذلك ارتباطاً وثيقاً بتقسيم المنشأ إلى منشآت فرعية.

2 لنأخذ $\mathbf{kd} = \mathbf{p}$ ونقسّم $\mathbf{d}$ إلى

$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\}$$

حيث يشير الدليلان السفليان r وc إلى درجات الحرية المحتفظ بها والمكثفة على الترتيب.

3 عند تقسيم المنشأ يشير r وc إلى درجات حرية الواجهة والداخل، ومن ثم

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{rr} & \mathbf{k}_{rc} \\ \mathbf{k}_{cr} & \mathbf{k}_{cc} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_c \end{array} \right\}$$

CC BY-NC-SA 4.0 © 2026
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو

$$\mathbf{k}'\mathbf{d}_r = \mathbf{p}'$$

حيث

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr}$$
$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_r - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{p}_c$$

4 من الصورة المشتركة للمعادلتين السابقتين نستنتج أن التكثيف يمكن اعتباره تحويلاً من النظام $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{k}$ إلى النظام $\mathbf{d}_r, \mathbf{p}', \mathbf{k}'$ وفق

$$\mathbf{k}' = \boldsymbol{\Gamma}_c^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Gamma}_c$$
$$\mathbf{p}' = \boldsymbol{\Gamma}_c^T \mathbf{p}$$

حيث

$$\boldsymbol{\Gamma}_c = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{I} \end{array} \right\}$$

5 تكون $\mathbf{k}'$ مصفوفة من الرتبة r في c، بينما كانت $\mathbf{k}$ من الرتبة $(r+c)$ في $(r+c)$، مع بقاء الحاجة إلى تحليل $\mathbf{k}_{cc}$ ذات الرتبة c في c بصورة منفصلة.

45.2 معادلات الاتزان والحركة

45.2.1 مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$

45.2.1.1 الاشتقاق

هذا المقطع مقتبس من *Matrix Structural Analysis* لـ McGuire **and** Gallagher, 1979[a].

[a] للأسف حُذف المقطع الأصلي من الطبعة الثانية.

45.2.1.2 محدد استاتيكياً

6 تربط مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$ متجه جميع القوى العقدية للمنشأ $\mathbf{P}$ في الإحداثيات العامة بجميع القوى المجهولة $\mathbf{F}$، أي قوى العناصر الداخلية في أنظمتها المحلية وردود الأفعال الخارجية، من خلال علاقات الاتزان، وتُعرّف بـ

$$\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F} \tag{45.1}$$

7 يكون عدد صفوف $\mathcal{B}$ مساوياً للعدد الكلي لمعادلات الاتزان المستقلة، وعدد أعمدتها مساوياً لعدد القوى الداخلية المستقلة. وهي تشبه مصفوفة الاتزان الناتجة من تحليل الجمالونات بطريقة العقد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

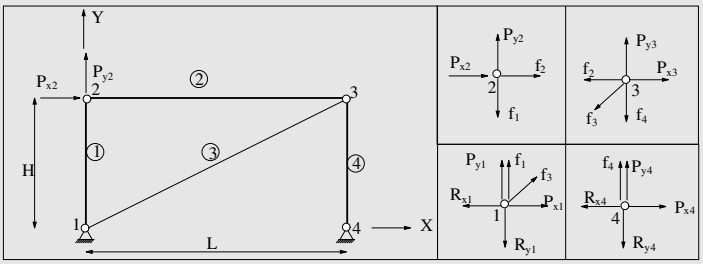
جدول 45.1: تعريف قوى العناصر الداخلية في مصفوفة الاتزان

معادلات الاتزان	القوى الداخلية	النوع
$\Sigma F_X = 0, \Sigma F_Y = 0$	قوة محورية عند طرف واحد	جمالون
$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$	قص وعزم عند طرف واحد	كمرة 1
$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma F_y^B = 0$	قص عند كل طرف	كمرة 2
$\Sigma M_z^A = 0, \Sigma M_z^B = 0$	عزم عند كل طرف	كمرة 3
$\Sigma F_x^A = 0, \Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$	محوري وقص وعزم عند طرف واحد	إطار ثنائي الأبعاد 1

8 تختلف قوى العناصر الداخلية ومعادلات الاتزان باختلاف نوع المنشأ، كما في الجدول 45.1. وكما في طريقة المرونة، يمكن اختيار أكثر من مجموعة للقوى الداخلية المستقلة في العنصر.

9 تكون $\mathcal{B}$ مربعة للمنشأ المحدد استاتيكياً، ومستطيلة ذات أعمدة أكثر من الصفوف في غير ذلك.

45.2.1.2.1 مثال 45.1: مصفوفة اتزان جمالون محدد استاتيكياً



لهذا الجمالون ثماني قوى مجهولة، أربع قوى داخلية وأربعة ردود أفعال خارجية، وثماني معادلات اتزان، معادلتان عند كل عقدة من العقد الأربع. وبافتراض أن قوى العناصر شد، وردود الأفعال كما في الشكل، تكون معادلات الاتزان:

العقدة	$\Sigma F_X = 0$	$\Sigma F_Y = 0$
العقدة 1	$\underbrace{P_{x1}}_{0} + F_3 C - R_{x1} = 0$	$0 = \underbrace{P_{y1}}_{0} + F_1 + F_3 S - R_{y1}$
العقدة 2	$P_{x2} + F_2 = 0$	$P_{y2} - F_1 = 0$
العقدة 3	$\underbrace{P_{x3}}_{0} - F_2 - F_3 C = 0$	$\underbrace{P_{y3}}_{0} - F_4 - F_3 S = 0$
العقدة 4	$\underbrace{P_{x4}}_{0} + R_{x4} = 0$	$\underbrace{P_{y4}}_{0} + F_4 - R_{y4} = 0$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $C = \frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}}$ و$S = \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} = \sin\alpha$. ويمكن كتابة معادلات الاتزان في الصورة المصفوفية

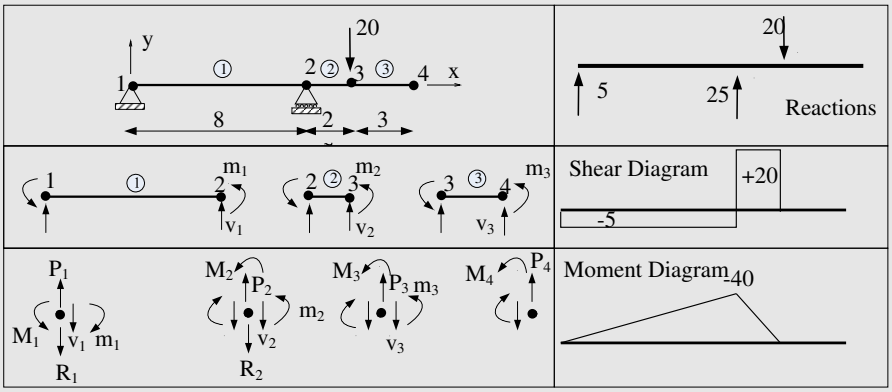
$$\begin{array}{l} \Sigma F_x^1: \\ \Sigma F_y^1: \\ \Sigma F_x^2: \\ \Sigma F_y^2: \\ \Sigma F_x^3: \\ \Sigma F_y^3: \\ \Sigma F_x^4: \\ \Sigma F_y^4: \end{array} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} \tag{45.2}$$

وتُحدد القوى وردود الأفعال المجهولة بعكس $\mathcal{B}$:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} P_{y2} \\ -P_{x2} \\ \frac{P_{x2}}{C} \\ -\frac{S}{C}P_{x2} \\ \hline P_{x2} \\ \frac{S}{C}P_{x2} + P_{y2} \\ 0 \\ -\frac{S}{C}P_{x2} \end{Bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة $\mathcal{B}$ مستقلة تماماً عن الحمل الخارجي، ويمكن بعد عكسها استخدامها لحالات حمل متعددة بجهد حسابي ضئيل.

45.2.1.2.2 مثال 45.2: مصفوفة اتزان كمرة



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تتكون من ثلاثة عناصر، لكل منها مجهولان داخليان (v, m)، إضافة إلى ردّي فعل مجهولين، فيكون المجموع ثمانية مجاهيل. ولدينا معادلتان للاتزان عند كل من العقد الأربع. اخترنا القص والعزم عند الطرف الأيمن لكل عنصر مجاهيل أساسية، ويمكن استرجاع مركبات الطرف الأيسر من الاتزان. ومن ثم

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Sigma F_1: \\ \Sigma M_1: \\ \Sigma F_2: \\ \Sigma M_2: \\ \Sigma F_3: \\ \Sigma M_3: \\ \Sigma F_4: \\ \Sigma M_4: \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \\ P_4 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ m_1 \\ v_2 \\ m_2 \\ v_3 \\ m_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

ويعطي عكس هذه المصفوفة 8×8:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ m_1 \\ v_2 \\ m_2 \\ v_3 \\ m_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{13}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -40 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 5 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

45.2.1.3 غير محدد استاتيكياً

10 للمنشأ غير المحدد استاتيكياً يمكن تعميم المعادلة 45.1 كما يأتي:

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \end{array}\right\}_{(2n+r)\times 1} \tag{45.3}$$

حيث $\mathcal{B}_0$ مصفوفة مربعة، و$\{\mathbf{F}_0\}$ متجه قوى العناصر الداخلية أو ردود الأفعال الخارجية المجهولة، و$\mathbf{F}_x$ متجه القوى الداخلية أو ردود الأفعال *الزائدة* المجهولة.

11 ومن ثم يمكن تحديد $\{\mathbf{F}_0\}$ من

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathcal{B}_0^{-1}\mathbf{P} - \mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x\mathbf{F}_x \\ &= C_{1\,2n\times 2n}\mathbf{P} - C_{2\,2n\times r}\mathbf{F}_x \end{aligned} \tag{45.4}$$

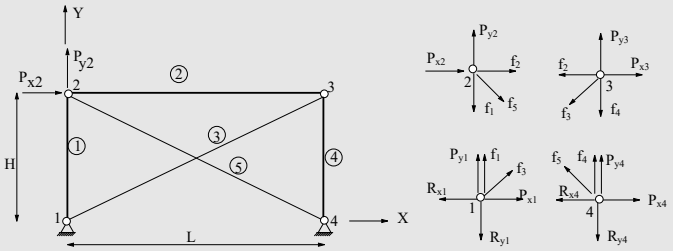
12 نلاحظ التعريفات الآتية التي ستُستخدم لاحقاً:

$$\mathcal{B}_0^{-1} \equiv C_1 \tag{45.5}$$

$$-\mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x \equiv C_2 \tag{45.6}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.2.1.3.1 مثال 45.3: مصفوفة اتزان جمالون غير محدد استاتيكياً



نعود إلى المثال الأول، لكن بعد إضافة عضو يجعله غير محدد استاتيكياً؛ أصبح له الآن تسع قوى مجهولة، خمس قوى داخلية وأربعة ردود أفعال خارجية، مقابل ثماني معادلات اتزان فقط. وباختيار قوة العنصر الخامس قوةً زائدة، ومع $r=1$، نكتب المعادلة 45.3:

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\end{array}\right\}_{(2n+r)\times 1}$$

$$\mathbf{P} = [\mathcal{B}_0]\{\mathbf{F}_0\} + [\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\begin{matrix}\Sigma F_x^1:\\ \Sigma F_y^1:\\ \Sigma F_x^2:\\ \Sigma F_y^2:\\ \Sigma F_x^3:\\ \Sigma F_y^3:\\ \Sigma F_x^4:\\ \Sigma F_y^4:\end{matrix}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ P_{x3}\\ P_{y3}\\ P_{x4}\\ P_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{0\,2nx2n}}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}_{2nx1}}
+
\underbrace{\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{xnx1}}
\underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}$$

يمكن حل القوى الداخلية بدلالة القوة الزائدة التي ما زالت مجهولة:

$$\{\mathbf{F}_0\} = [\mathcal{B}_0]^{-1}\mathbf{P} - [\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_0^{-1}\equiv C_1}
\left[
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}}
-
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{array}\right\}}_{[\mathcal{B}_x]}
\underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}
\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو باستخدام العلاقتين $[C_1] \equiv [\mathcal{B}_0]^{-1}$ و$[C_2] \equiv [\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]$ – نحصل على

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -S \\ -C \\ 1 \\ -S \\ C \\ 0 \\ -C \\ 0 \end{Bmatrix}}_{C_2} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \tag{45.7}$$

لا تكفي هذه المعادلة لحل القوى المجهولة، إذ يجب إيجاد $\mathbf{F}_x$ من علاقات القوة–الإزاحة ($\mathbf{D}$) أو ($\mathbf{K}$).

45.2.1.4 تحديد القوى الزائدة

13 بينما كان تحديد القوى الزائدة في التحليل اليدوي يتم بمجرد فحص المنشأ، يمكن أتمتة هذه العملية. نبدأ من

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{(2n+r)\times 1}$$
$$\mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{2n+r\times 1} - \mathbf{I}_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} = \mathbf{0}$$
$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B} & -\mathbf{I} \end{array}\right]_{2n\times(4n+r)} \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \hline \mathbf{P} \end{array}\right\} = \mathbf{0}$$

حيث تمثل $\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B} & -\mathbf{I} \end{array}\right]$ *المصفوفة الموسّعة*. وإذا طبقنا حذف غاوس–جوردان عليها تحولت المعادلة إلى

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{2n\times 2n} & -C2_{2n\times r} & -C1_{2n\times 2n} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \\ \hline \mathbf{P} \end{array}\right\}_{4n+r\times 1} = \{\mathbf{0}\}$$

أو

$$\{\mathbf{F}_0\}_{2n\times 1} = [C_1]_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} + [C_2]_{2n\times r}\{\mathbf{F}_x\}_{r\times 1}$$

وهي مطابقة للمعادلة 45.4. وكما سبق تمثل $\mathbf{F}_x$ القوى الزائدة، ويعتمد حلها على الخواص المرنة للعناصر.

45.2.1.4.1 مثال 45.4: اختيار القوى الزائدة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نعود إلى جمالون المثال السابق بعد إضافة عنصر خامس، فيصبح غير محدد استاتيكياً من الدرجة الأولى. وتُكتب معادلة الاتزان 45.2 كما يأتي:

$$\begin{array}{c} \\ \Sigma F_x^1 : A \\ \Sigma F_y^1 : B \\ \Sigma F_x^2 : C \\ \Sigma F_y^2 : D \\ \Sigma F_x^3 : E \\ \Sigma F_y^3 : F \\ \Sigma F_x^4 : G \\ \Sigma F_y^4 : H \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|cccc||cc} 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{cc} \mathcal{B} & \| & -\mathbf{I} \end{array}\right]} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \\ \hline\hline P_{x2} \\ P_{y2} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}}$$

نظراً إلى أن الحمل مطبق عند العقدة 2 فقط، فقد أخذنا جزءاً من مصفوفة الوحدة $\mathbf{I}$.

1. نبدأ بالمصفوفة الآتية:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x1} & R_{y1} & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

2. نبدّل الأعمدة:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. نجري العمليات المبينة:

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B'=B+DB \\ C \\ D \\ E'=\frac{E+C}{C} \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -S & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. نجري العمليات المبينة:

$$\begin{array}{r} \\ A'=A+CE' \\ B''=B'+SE' \\ C'=-C \\ D \\ E' \\ F'=F-SE' \\ G \\ H'=H+F' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S & 0 & 0 & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S/C & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. نبدّل الأعمدة ونلاحظ أن F_5 هي القوة الزائدة المختارة.

$$\begin{array}{r} \\ A' \\ B'' \\ C' \\ D \\ E' \\ F' \\ G \\ H' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & R_{x4} & R_{y4} & F_5 & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & S/C & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

من المعادلة 45.4 لدينا

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ F_2 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S/C & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/C & 0 \\ -S/C & 0 \\ 0 & 0 \\ -S/C & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} C \\ 0 \\ -C \\ -S \\ 1 \\ -S \\ -C \\ 0 \end{Bmatrix}}_{C_2} \underbrace{\{F_5\}}_{\mathbf{F}_x}$$

وهي مطابقة لنتائج المعادلة 45.7 عدا ترتيب الحدود.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.2.1.5 عدم الاستقرار الحركي

14 ينشأ عدم الاستقرار الحركي في منشأ غير مقيّد بما يكفي بحيث يمكن حدوث حركة جسم صلب. وينتج عنه مصفوفة منفردة يؤدي تحليلها إلى قسمة على صفر وتعطل البرنامج. لذلك يُستحسن في المنشآت "الكبيرة" تحديد عدم الاستقرار الحركي مسبقاً قبل إجراء التحليل.

15 يمكن صياغة شروط التحديد الاستاتيكي وعدم الاستقرار بدلالة رتبة $\mathcal{B}$. فإذا كان لـ$\mathcal{B}$ عدد n من الصفوف، يقابل معادلات الاتزان، وعدد u من الأعمدة، يقابل القوى الداخلية وردود الأفعال، ورتبتها r، تُلخص الشروط في الجدول 45.2.

جدول 45.2: شروط التحديد الاستاتيكي وعدم الاستقرار الحركي

$n > u$ غير مستقر حركياً	
$n = u$ محدد استاتيكياً	
مستقر	$n = u = r$
غير مستقر وله $n - r$ أنماط عدم استقرار حركي	$n = u > r$
$n < r$ غير محدد استاتيكياً (الدرجة $u - n$)	
مستقر	$n = r$
غير مستقر وله $n - r$ أنماط عدم استقرار حركي	$n > r$

16 لا يعني عدم الاستقرار الحركي دائماً انهيار المنشأ. ففي بعض الحالات لا يُستعاد الاتزان إلا بعد تغير الهندسة تغيراً كاملاً، كما في المنشآت الكبلية المرنة، وعندها يجب إعادة كتابة معادلات الاتزان وفق الهندسة الجديدة.

45.2.2 مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$

17 تربط مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$ جميع *الإزاحات الكلية* لعقد المنشأ في الإحداثيات العامة Δ بـ*الإزاحات النسبية* للعناصر في أنظمتها المحلية وإزاحات المساند، التي قد لا تكون صفراً عند حدوث هبوط، أي $\boldsymbol{\Upsilon}$، وتُعرّف بـ

$$\boldsymbol{\Upsilon} \equiv \mathcal{A}\Delta \tag{45.8}$$

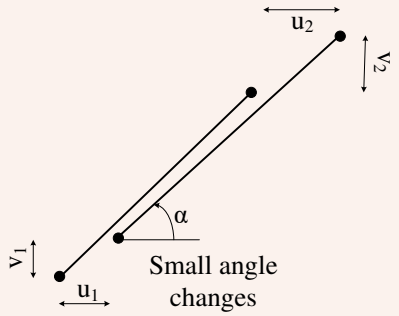
18 $\mathcal{A}$ مصفوفة مستطيلة؛ عدد صفوفها يساوي عدد الإزاحات الداخلية للعناصر، وعدد أعمدتها يساوي عدد الإزاحات العقدية.

19 بخلاف مصفوفة الدوران السابقة التي تحول إزاحات عنصر مفرد من الإحداثيات العامة إلى المحلية، تنطبق مصفوفة الحركة على المنشأ كله.

20 ويمكن بيان أن الجمالونات، حيث يقابل التشوه قصر العنصر أو استطالته مع تغير صغير في الزاوية α، تحقق

$$\Upsilon^{(e)} = (u_2 - u_1)\cos\alpha + (v_2 - v_1)\sin\alpha$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.1: حركة عنصر جمالون

45.2.2.1 مثال 45.5: مصفوفة الحركة: مثال جمالون

بالعودة إلى الجمالون المحدد استاتيكياً في المثال السابق، تكون مصفوفة الحركة:

$$\Delta_1^{(e)} = v_2 - v_1; \quad \Delta_2^{(e)} = u_3 - u_2; \quad \Delta_3^{(e)} = (u_3 - u_1)C + (v_3 - v_1)S; \quad \Delta_i^{(e)} = \cdots$$

أو في الصورة المصفوفية:

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1^{(e)} \\ \Delta_2^{(e)} \\ \Delta_3^{(e)} \\ \Delta_4^{(e)} \\ \hline u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\}$$

بتطبيق القيود $u_1 = 0$ و$v_1 = 0$ و$u_4 = 0$ و$v_4 = 0$ نحصل على

$$\left\{\begin{array}{c} \Delta_1^{(e)} \\ \Delta_2^{(e)} \\ \Delta_3^{(e)} \\ \Delta_4^{(e)} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right\}$$

نلاحظ أن $\mathcal{A}$ هي منقول المصفوفة $\mathcal{B}$ في المعادلة 45.2.1.4.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.2.3 العلاقة بين مصفوفتَي الاتزان والحركة

21 بعد تعريف مصفوفتَي الاتزان $\mathcal{B}$ والحركة $\mathcal{A}$، من الطبيعي وجود علاقة بينهما. نحدد هذه العلاقة للحالتين المحددة وغير المحددة استاتيكياً.

45.2.3.1 محدد استاتيكياً

22 يُعرّف الشغل الخارجي بـ

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \end{aligned}\right\} W_{ext} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta}$$

23 أما الشغل الداخلي فيُعطى بـ

$$\left.\begin{aligned} W_{int} &= \frac{1}{2}\mathbf{F}\{\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\} W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

24 بمساواة الشغل الخارجي بالداخلي $W_{ext} = W_{int}$ نحصل على

$$\frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

أو

$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A} \tag{45.9}$$

25 والنظير على مستوى الوسط المتصل هو

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

أو $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ حيث إن $\mathbf{L}$ هو المؤثر الخطي (المعادلة O.7)، و

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0$

45.2.3.2 غير محدد استاتيكياً

26 بينما استخدمنا في الحالة السابقة المعادلة 45.1 للمصفوفة $\mathcal{B}$، فإننا في الحالة الأعم للمنشآت غير المحددة استاتيكياً نستطيع البدء من المعادلة 45.3 وكتابة:

$$\mathbf{P}=\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_x\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\end{array}\right\}$$

حيث تقابل $\mathbf{F}_x$ القوى الزائدة. وعندئذ يكون الشغل الخارجي

$$W_{ext}=\frac{1}{2}\left\lfloor\begin{array}{c|c}\mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_x\end{array}\right\rfloor\left[\begin{array}{c}[\mathcal{B}_0]^t\\ \hline [\mathcal{B}_x]^t\end{array}\right]\boldsymbol{\Delta}$$

27 ومرة أخرى يمكن تعميم المعادلة 45.8 وكتابة

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Upsilon}_0\\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_x\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c}\mathcal{A}_0\\ \hline \mathcal{A}_x\end{array}\right]\boldsymbol{\Delta}\tag{45.10}$$

حيث إن $\boldsymbol{\Upsilon}_0$ و$\boldsymbol{\Upsilon}_x$ هما الإزاحتان النسبيتان المقابلتان لكل من $\mathbf{F}_0$ و$\{\mathbf{F}_x\}$، على الترتيب.

28 ومن ثم يُعطى الشغل الداخلي بالعلاقة:

$$W_{int}=\frac{1}{2}\left\lfloor\begin{array}{c|c}\mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_x\end{array}\right\rfloor\left[\begin{array}{c}[\mathcal{A}_0]\\ \hline [\mathcal{A}_x]\end{array}\right]\boldsymbol{\Delta}$$

29 وكما سبق، بمساواة الشغل الخارجي بالداخلي $W_{ext}=W_{int}$ والتبسيط نحصل على:

$$\mathcal{B}_0^T=\mathcal{A}_0$$
$$\mathcal{B}_x^T=\mathcal{A}_x$$

IFYVER

45.3 العلاقات الحركية من معكوس مصفوفة الاتزان

30 نشتق الآن بعض العلاقات الإضافية بين الإزاحات باستعمال معكوس مصفوفة الاتزان. وستُستخدم هذه العلاقات لاحقاً في طرائق المرونة، ولا تطبيق مباشر لها هنا. بإعادة كتابة المعادلة 45.10 بالشكل

$$\boldsymbol{\Delta}=[\mathcal{A}_0]^{-1}\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}=\left[[\mathcal{B}_0]^t\right]^{-1}\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}=\left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}\tag{45.11}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يمكن إيجاد $\{\mathbf{F}_0\}$ من المعادلة 45.4

$$\{\mathbf{F}_0\} = \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}}_{[C_1]}\mathbf{P} - \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]}_{[C_2]}\{\mathbf{F}_x\}$$

31 بدمج هذه المعادلة مع $[\mathcal{B}_0]^{-1} = [C_1]$ من المعادلة 45.5، ومع المعادلة 45.11 نحصل على

$$\boldsymbol{\Delta} = [C_1]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}$$

32 وبالمثل يمكن الرجوع إلى المعادلة 45.10 وكتابة

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = [\mathcal{A}_x]\boldsymbol{\Delta}$$

بدمج المعادلة السابقة مع الطرف الأيمن من المعادلتين 45.3 و45.11 نحصل على

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = [\mathcal{B}_x]^t\left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}$$

33 ومن ثم، باستعمال $[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] = -[C_2]$ من المعادلة 45.6

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = -[C_2]^t\{\boldsymbol{\Upsilon}_0\} \tag{45.12}$$

تربط هذه المعادلة الإزاحات النسبية المجهولة بالإزاحات النسبية المعلومة.

45.4 علاقات الصلابة والمرونة

الأهداف

34 بعد عرض طريقتي الصلابة والمرونة، نبحث بدقة العلاقة بين المصفوفتين $\mathbf{K}$ و$[\mathbf{D}]$ على مستوى المنشأ.

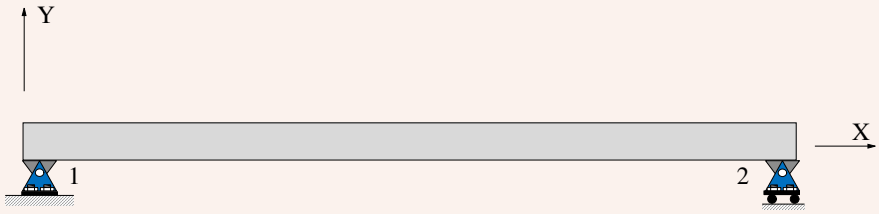
35 نقطة البدء في اشتقاقاتنا هي المعادلة 43.1

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\\ \hline \mathbf{P}_u\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Delta}_t\\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u\end{array}\right\}$$

45.4.1 من الصلابة إلى المرونة

36 للحصول على $\mathbf{d}$ يجب إسناد المنشأ بطريقة مستقرة ومحددة استاتيكياً، كما في الكمرة المبينة في الشكل 45.2. وفي هذه الحالة يكون:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.2: عنصر مستقر ومحدد استاتيكياً

$$\boldsymbol{\delta}_f = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \text{ and } \boldsymbol{\delta}_s = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_t = \left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_s = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\}$$

37 بما أن $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ فإن المعادلة السابقة تختزل إلى:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{p}_s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{k}_{tt} \\ \mathbf{k}_{ut} \end{array} \right] \boldsymbol{\delta}_f$$

ومن ثم يكون:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt} \boldsymbol{\delta}_t \tag{45.13}$$

تعريف 45.1: علاقة الصلابة والمرونة

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}_{tt}^{-1}$$

45.4.1.1 مثال 45.6: مصفوفة المرونة

هذه حالة مباشرة؛ إذ انطلاقاً من الشكل 45.2 تُعطى علاقة العزم بالدوران كما يأتي

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{EI}{L} \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{k}_{tt}} \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

ومن ثم:

$$\mathbf{k}_{tt}^{-1} = \mathbf{d} = \frac{L}{EI} \frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right] = \frac{L}{6EI} \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.4.2 من المرونة إلى الصلابة

38 نبدأ من

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{p}_s^{?} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tu} \\ \hline \mathbf{k}_{ut} & \mathbf{k}_{uu} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\delta}_f^{?} \\ \hline \boldsymbol{\delta}_s^{\checkmark} \end{array} \right\} \tag{45.14}$$

ونسعى إلى اشتقاق كل حد من حدود مصفوفة الصلابة على حدة.

39 $\mathbf{k}_{tt}$: من المعادلة 45.14 قُسّمت $\mathbf{k}$ إلى درجات حرية حرة ومقيدة، وقد بيّنا أن $\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1}$، أو $\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt}\boldsymbol{\delta}_t$، لكن ما يزال علينا تحديد $\mathbf{k}_{tu}$ و$\mathbf{k}_{ut}$ و$\mathbf{k}_{uu}$.

40 $\mathbf{k}_{ut}$: بما أن $\mathbf{d}$ تُستخرج لمنشأ مستقر ومحدد استاتيكياً، يكون:

$$\mathbf{p}_u = \mathcal{B} \underbrace{\mathbf{p}_t}_{\text{Eq. 45.13}} \tag{45.15}$$

$$= \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{k}_{tt}}_{\mathbf{k}_{ut}} \boldsymbol{\delta}_t \tag{45.16}$$

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} \tag{45.17}$$

حيث إن $\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F}$ هي معادلة الاتزان الاستاتيكي (المعادلة 45.1).

41 $\mathbf{k}_{tu}$: بمساواة الشغل الخارجي بالشغل الداخلي:

1. الشغل الخارجي: $W_{ext} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_t\mathbf{p}_t$
2. الشغل الداخلي: $W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_u\boldsymbol{\delta}_u$

بمساواة W_{ext} مع W_{int} ودمج النتيجة مع

$$\mathbf{p}_u = \boldsymbol{\delta}_t\mathbf{k}_{ut}^T \tag{45.18}$$

من المعادلة 45.14، مع $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ (إزاحات المساند صفرية)، نحصل على:

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{k}_{ut}^T = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T$$

42 $\mathbf{k}_{uu}$: يُستخرج هذا الحد الأخير من

$$\mathbf{p}_s = \mathcal{B}\mathbf{p}_f \tag{45.19}$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{k}_{tu}\boldsymbol{\delta}_s \tag{45.20}$$

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \tag{45.21}$$

بدمج المعادلات 45.19 و45.20 و45.21 نحصل على:

$$\mathbf{p}_u = \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T}_{\mathbf{k}_{uu}} \boldsymbol{\delta}_u$$

43 وخلاصة ذلك:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 45.2: علاقة المرونة والصلابة

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right] \tag{45.22}$$

44 من الملاحظات المهمة أن مصفوفة الصلابة مفردة بوضوح، لأن "الصف" الثاني يعتمد خطياً على الصف الأول (من خلال $\mathcal{B}$)، ومن ثم يساوي محددها صفراً.

45.4.2.1 مثال 45.7: من المرونة إلى الصلابة

بالرجوع إلى الشكل 45.2، ومع افتراض أن كلاً من M_1 وM_2 موجب (عكس اتجاه عقارب الساعة):

1. تُعطى مصفوفة المرونة بالعلاقة:

$$\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\ \theta_2\end{array}\right\} = \underbrace{\frac{L}{6EI}\left[\begin{array}{cc}2 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right]}_{\mathbf{d}} \left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$

2. تُعطى مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$ التي تربط القوى الخارجية بالداخلية بالعلاقة:

$$\left\{\begin{array}{c}V_1\\ V_2\end{array}\right\} = \underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & -1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$

3. $\mathbf{k}_{tt}$: تُعطى ببساطة بالعلاقة:

$$\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1} = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]$$

4. $\mathbf{k}_{tu}$: الحد العلوي خارج القطر

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right] = \frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc}6 & -6\\ 6 & -6\end{array}\right]$$

5. $\mathbf{k}_{ut}$: الحد السفلي خارج القطر

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} = \frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & -1\end{array}\right]\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right] = \frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc}6 & 6\\ -6 & -6\end{array}\right]$$

6. $\mathbf{k}_{uu}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{uu} &= \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T = \mathbf{k}_{ut}\mathcal{B}^T \\ &= \frac{EI}{L^2}\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}6 & 6\\ -6 & -6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right] = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc}12 & -12\\ -12 & 12\end{array}\right]\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نلاحظ أنه يمكن إعادة كتابة:

$$\left\{\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \hline V_1 \\ V_2 \end{array}\right\} = \frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc} 4L^2 & 2L^2 & 6l & -6l \\ 2L^2 & 4L^2 & 6l & -6l \\ \hline 6l & 6l & 12 & -12 \\ -6l & -6l & -12 & 12 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \hline v_1 \\ v_2 \end{array}\right\}$$

إذا أعدنا ترتيب مصفوفة الصلابة نحصل على:

$$\left\{\begin{array}{c} V_1 \\ M_1 \\ \hline V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \underbrace{\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{-6}{L} & 2 \\ \hline \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{array}\right]}_{\mathbf{k}}\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \\ \hline v_2 \\ \theta_2 \end{array}\right\}$$

وهي مصفوفة الصلابة نفسها التي اشتُقت سابقاً. ويُظهر التعبير الآتي للمصفوفة نفسها الاعتماد الخطي بين الصفوف والأعمدة.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & k^r_{11} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{12} \\ -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & k^r_{21} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{22} \end{bmatrix}$$

حيث تقابل k^r المصفوفة k_{tt}.

45.4.2.2 مثال 45.8: مصفوفة صلابة عنصر منحنٍ

نسعى إلى تحديد مصفوفة صلابة قوس دائري نصف قطره R وزاويته θ. نحدد أولاً مصفوفة مرونة القوس الكابولي من

$$\delta U = \int_s \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{R}{EI}\int_0^\theta \delta\overline{M}M d\phi$$

حيث إن M هو العزم الحقيقي عند نقطة اعتباطية A الناتج عن الأحمال، و$\delta\overline{M}$ هو العزم الافتراضي عند A الناتج عن حمل وحدي.

45 ومن ثم تُعطى مصفوفة المرونة بالعلاقة:

$$\left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} N \\ V \\ M \end{array}\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

و

$$M = M_3 + N(R - R\cos\phi) + V(R_2 \sin\phi)$$

$$\delta\overline{M}+ \qquad 1_3 = R(1-\cos_1\phi) + R\sin_2\phi$$

f_{ij} = الإزاحة في درجة الحرية i الناتجة عن حمل وحدي في درجة الحرية j

$$f_{11} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta \delta M_{p1}\cdot M_{D1} d\phi$$
$$= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2(1-\cos\phi)^2 d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\phi - 2\sin\phi + \phi/2 = 1/4\sin 2\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin\phi(1-\cos\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (\sin\phi - \cos\phi\sin\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[-\cos\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^3}{EI}\left[(-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta) - (-1-0)\right]$$
$$= f_{21} = \frac{R^3}{EI}\left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R(1-\cos\phi) d\phi$$
$$= \frac{R^2}{EI}\left[\phi - \sin\phi\right]_o^\theta$$
$$= \frac{R^2}{EI}\left[\theta - \sin\theta\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$
\begin{aligned}
f_{22} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2 \sin^2\phi d\phi \\
&= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{\phi}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_o^\theta \\
&= f_{22}\frac{R^3}{EI}\left[\frac{\theta}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right] \\
f_{23} = f_{32} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R\sin\phi d\phi \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\phi\right]_o^\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\theta + 1\right] \\
f_{33} &= \frac{R}{EI}\int_o^\theta d\theta \\
&= \frac{R\theta}{EI}
\end{aligned}
$$

45.4.3 الثنائية بين طريقتي المرونة والصلابة

الصلابة	المرونة	
حركي	استاتيكي	**عدم التحديد**
اتزان	حركية	**المعادلة الحاكمة**
الإزاحات العقدية	القوى العقدية	**المجاهيل الأساسية**
الإزاحة الافتراضية	القوة الافتراضية	**المبدأ التغايري**
$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}$	$\mathbf{P} = \mathcal{B}'\mathbf{P}$	
$\mathbf{K}$	$\mathbf{d}$	
$\mathbf{K} = \Sigma\boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}$	$D = \mathcal{B}^T\mathbf{d}\mathcal{B}$	
$\begin{Bmatrix}\mathbf{p}^{\surd}\\ \mathbf{R}^{?}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ff} & \mathbf{D}_{fr}\\ \mathbf{D}_{rf} & \mathbf{D}_{rr}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_f^{?}\\ \boldsymbol{\Delta}_r^{\surd}\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_P^{?}\\ \boldsymbol{\Delta}_R^{\surd}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12}\\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}^{\surd}\\ \mathbf{R}^{?}\end{Bmatrix}$	
$\boldsymbol{\Delta}_f = K_{ff}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{fr}\boldsymbol{\Delta}_r)$	$\mathbf{R} = D_{22}^{-1}(\boldsymbol{\Delta}_R - \mathbf{D}_{21}\mathbf{P})$	
$\mathbf{R} = K_{rf}\boldsymbol{\Delta}_f + \mathbf{k}_{rr}\boldsymbol{\Delta}_r$	$\boldsymbol{\Delta}_P = D_{11}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})$	
$\mathbf{P} = \mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}$	$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{P}$	

45.5 منهج التحويل المتطابق لاستخراج K

ملاحظة: يعتمد هذا القسم إلى حد كبير على القسم 3.3 من (Gallagher, 1975).

45 عرضنا في §43.4.3 إجراء تجميع مصفوفة الصلابة الموسعة. ويصف هذا القسم منهجاً بديلاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

46 لمنشأ اعتباطي مكوّن من n عنصراً، يمكن تعريف متجهي الأحمال والإزاحات العقدية غير *المتصلة* في الإحداثيات العامة كما يأتي

$$\mathbf{P}^{(e)} = \lfloor\ P^1 \quad P^2 \quad \dots \quad P^n\ \rfloor^T$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}^{(e)} = \lfloor\ \Upsilon^1 \quad \Upsilon^2 \quad \dots \quad \Upsilon^n\ \rfloor^T$$

حيث إن $\{\mathbf{P}^i\}$ و$\{\Delta^i\}$ هما صفيفتا الأحمال والإزاحات العقدية للعنصر i. ويساوي حجم كل مصفوفة فرعية (أو، بدقة أكبر، كل صفيف فرعي) العدد الكلي لدرجات حرية العنصر i في الإحداثيات العامة.

47 وبالمثل يمكن تعريف مصفوفة الصلابة العامة غير المتصلة (أو غير المجمعة) للمنشأ بالرمز $[\mathbf{K}^{(e)}]$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\{\boldsymbol{\Upsilon}\}$$
$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & & \\ & & \mathbf{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}^n \end{bmatrix}$$

48 نلاحظ أن جميع الحدود الأخرى في هذه المصفوفة تساوي صفراً، ولا يوجد تداخل بين المصفوفات الفرعية المختلفة. لذلك لا تعكس هذه المصفوفة اتصال العناصر بعضها ببعض.

49 نسترجع العلاقات الآتية (المعادلات 45.1 و45.8 و45.9، على الترتيب)

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$
$$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{F}$$
$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A}$$

ندمج الآن هذه المصفوفات مع تعريف مصفوفة الصلابة:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{A}^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \mathcal{A}^T\mathbf{F} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\}$$

تعريف 45.3: التحويل المتطابق

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$$

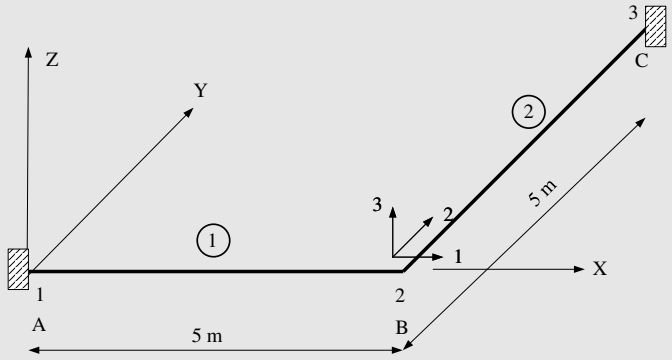
50 وهكذا عرّفنا تحويلاً متطابقاً لمصفوفة الصلابة العامة غير المتصلة المكتوبة بدلالة $[\mathbf{K}^{(e)}]$ للحصول على مصفوفة صلابة المنشأ. ونلاحظ ما يأتي:

1. إذا عُبّر عن $\mathbf{K}^{(e)}$ بالإحداثيات العامة، فإن $\mathcal{A}$ مصفوفة منطقية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. إذا كانت $\mathbf{K}^{(e)}$ بالإحداثيات المحلية، فيجب أن تتضمن $\mathcal{A}$ التحويل من نظام إحداثيات العنصر إلى النظام العام، ولا تعود مصفوفة منطقية.
3. تراعي $\mathbf{K}$ الشروط الحدية، إذ لا تُدرج الحدود المرتبطة بدرجات الحرية المقيدة.
4. نلاحظ التشابه بين طريقة الصلابة المباشرة: $\mathbf{K} = \sum \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Gamma}$ ومنهج التحويل المتطابق: $\mathbf{K} = \mathcal{A}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{A}$.
5. إذا كان المنشأ إطاراً مكوّناً من n عنصراً، يكون لدينا $\mathbf{K}_{neq \times neq} = \sum_1^n \boldsymbol{\Gamma}^T_{6\times 6} \mathbf{K}_{6\times 6} \boldsymbol{\Gamma}_{6\times 6}$ وفي منهج التحويل المتطابق: $\mathbf{K}_{neq \times neq} = \mathcal{A}^T_{neq \times 6n} \mathbf{K}^{(e)}_{6n \times 6n} \mathcal{A}_{6n \times neq}$.
6. يبدو منهج التحويل المتطابق أقل كفاءة من طريقة الصلابة المباشرة، لأن كلاً من $\mathbf{K}^{(e)}$ و$\mathcal{A}$ أكبر من $\mathbf{K}$.

45.5.1 مثال 45.9: التحويل المتطابق



نسعى إلى تجميع مصفوفة الصلابة العامة للشبكة الموضحة أعلاه باستعمال طريقة الصلابة المباشرة وطريقة التحويل المتطابق. تُعطى مصفوفتا صلابة العنصرين في نظام الإحداثيات العامة كما يأتي:

$$\mathbf{K}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0. & 0. & -7.692 & 0. & 0. \\ & .4\times 10^5 & -12. & 0. & .2\times 10^5 & 12. \\ & & .0048 & 0. & -12. & -.0048 \\ \hline & & & 7.692 & 0. & 0. \\ & & & & .4\times 10^5 & 12. \\ & & & & & .0048 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}_{BC} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1\times 10^5 & 0. & 18.75 & .5\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & 14.423 & 0. & 0. & -14.423 & 0. \\ & & .00469 & 18.75 & 0. & -.00469 \\ \hline & & & 1\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & & & .00469 \end{array}\right]$$

نحدد مصفوفة الصلابة العامة باستعمال المنهجين:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مصفوفة المواضع LM

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LM}^1 = \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{LM}^2 = \lfloor\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (7.692 + 1 \times 10^5) & (0. + 0.) & (18.75 + 0.) \\ (0. + 0.) & (.4 \times 10^5 + 14.423) & (12. + 0.) \\ (0. + 18.75) & (12. + 0.) & (.0048 + .00469) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 10^5 & 0. & 18.75 \\ 0. & .4 \times 10^5 & 12. \\ 18.75 & 12. & .00949 \end{bmatrix}$$

التحويل المتطابق

1. تُعطى مصفوفة الصلابة غير المجمعة $\mathbf{K}^{(e)}$ عند العقدة 2 بالعلاقة:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^1 \\ M_y^1 \\ F_z^1 \\ \hline M_x^2 \\ M_y^2 \\ F_z^2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0 & 0 & & & \\ & .4 \times 10^5 & 12. & & 0. & \\ \text{sym} & & .0048 & & & \\ \hline & & & 1 \times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & 0. & & & 14.423 & 0. \\ & & & \text{sym} & & .00469 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Theta_x^1 \\ \Theta_y^1 \\ W_z^1 \\ \hline \Theta_x^2 \\ \Theta_y^2 \\ W_z^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{العنصر 1} \\ \hline \\ \\ \text{العنصر 2} \end{matrix}$$

نلاحظ أن الشروط الحدية تؤخذ ضمنياً بالحسبان بإهمال درجات الحرية المقيدة، لكن هذه المصفوفة لا تعكس اتصال العناصر.

2. تُعطى مصفوفة الحركة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A} \boldsymbol{\Delta}$$

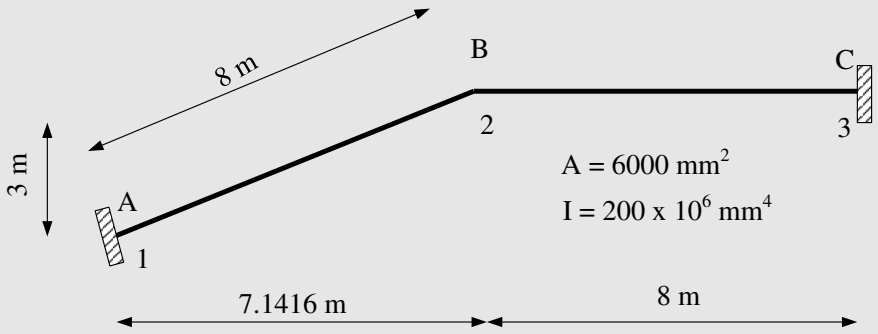
$$\begin{Bmatrix} \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ w_z^1 \\ \hline \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \\ w_z^2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w_z \end{Bmatrix}$$

في مصفوفة الحركة نربط الإزاحات المحلية لكل عنصر بالإزاحات العامة. لذلك تماثل هذه المصفوفة مصفوفة الاتصال؛ فبينما عكست مصفوفة الاتصال المعرّفة سابقاً اتصال العناصر، تعكس هذه المصفوفة الاتصال بين جميع درجات الحرية غير المقيدة.

3. بأخذ حاصل الضرب $\mathcal{A}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{A}$ نستعيد $\mathbf{K}$ كما هو موضح أعلاه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

45.5.2 مثال 45.10: التحويل المتطابق لإطار



نسعى الآن إلى تجميع مصفوفة صلابة الإطار باستعمال مصفوفة المواضع، وكذلك منهجي التحويل المتطابق. تُعطى مصفوفتا صلابة العنصرين AB وBC في نظام الإحداثيات المحلية بالعلاقة:

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BC} = 200 \begin{bmatrix} .75 & 0. & 0. & -.75 & 0. & 0. \\ & .00469 & 18.75 & 0 & -.0048 & 18.75 \\ & & 1\times10^5 & 0 & -18.75 & .5\times10^5 \\ & & & .75 & 0. & 0. \\ \text{sym} & & & & .00469 & -18.75 \\ & & & & & 1\times10^5 \end{bmatrix}$$

بينما تُعطى مصفوفة الدوران بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} .9272 & .375 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -.375 & .927 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1 & 0. & 0. & 0. \\ \hline 0. & 0. & 0. & .9272 & .375 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{BC} = \mathbf{I}$$

وعندئذ تُعطى مصفوفات صلابة العناصر في الإحداثيات العامة بالعلاقة:

$$\mathbf{K}_{AB} = \boldsymbol{\Gamma}_{AB}^T \mathbf{K}_{AB} \boldsymbol{\Gamma}_{AB}$$

$$= 200 \begin{bmatrix} .645 & .259 & -7.031 & -.645 & -.259 & -7.031 \\ & .109 & 17.381 & -.259 & -.109 & 17.381 \\ & & 1\times10^5 & 7.031 & -17.381 & .5\times10^5 \\ & & & .645 & .259 & 7.031 \\ & \text{sym} & & & .109 & -17.381 \\ & & & & & 1\times10^5 \end{bmatrix}$$

و$\mathbf{K}_{BC} = \mathbf{K}_{BC}$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مصفوفة المواضع: يمكن تجميع مصفوفة الصلابة العامة مباشرة:

$$\mathbf{K} = 200\begin{bmatrix} (.645+.75) & (.259+0.) & (7.031+0.) \\ & (.109+.00469) & (-17.38+18.75) \\ \text{sym} & & (1+1)\times 10^5 \end{bmatrix}$$
$$= 200\begin{bmatrix} 1.395 & .259 & 7.031 \\ & .1137 & 1.37 \\ \text{sym} & & 2\times 10^5 \end{bmatrix} \tag{45.23}$$

التحويل المتطابق، المحاور العامة، مصفوفة منطقية $\mathcal{A}$

1. نبدأ بمصفوفة الصلابة العامة غير المتصلة في نظام الإحداثيات العامة:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}$$
$$\left\{\begin{array}{c} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ M_Z^1 \\ \hline P_X^2 \\ P_Y^2 \\ M_Z^2 \end{array}\right\} = 200\left[\begin{array}{ccc|ccc} .645 & .259 & 7.031 & & & \\ & .109 & -17.381 & & 0 & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0. \\ & 0 & & & .00469 & 18.75 \\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} U_X^1 \\ V_Y^1 \\ \Theta_Z^1 \\ \hline U_X^2 \\ V_Y^2 \\ \Theta_Z^2 \end{array}\right\}$$

2. ثم نحدد مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$
$$\left\{\begin{array}{c} u^1 \\ v^1 \\ \theta^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ \theta^2 \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \end{array}\right\}$$

3. أخيراً، إذا أخذنا حاصل الضرب $\underbrace{\mathcal{A}^T}_{3\times 6}\underbrace{\mathbf{K}^{(e)}}_{6\times 6}\underbrace{\mathcal{A}}_{6\times 3}$ نحصل على مصفوفة الصلابة العامة للمنشأ $\mathbf{K}$ في المعادلة 45.23.

التحويل المتطابق (المحاور المحلية):

1. مصفوفة الصلابة غير المتصلة في الإحداثيات المحلية:

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$
$$\left\{\begin{array}{c} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ M_Z^1 \\ \hline P_X^2 \\ P_Y^2 \\ M_Z^2 \end{array}\right\} = 200\left[\begin{array}{ccc|ccc} .75 & 0. & 0. & & & \\ & .00469 & -18.75 & & & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0. \\ & & & & .00469 & 18.75 \\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. تُعطى الآن مصفوفة الحركة $[\mathcal{A}]$ بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} .9272 & .375 & 0. \\ -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \\ \hline 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_X \\ V_Y \\ \Theta_Z \end{array}\right\}$$

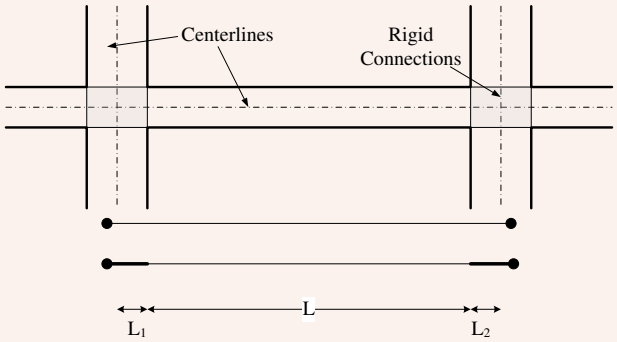
3. بأخذ حاصل الضرب $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ نستعيد مصفوفة الصلابة العامة للمنشأ.

45.6 عناصر خاصة

45.6.1 الإزاحة الصلبة

51 افترضنا حتى الآن أن جميع الأعضاء متصلة اتصالاً صلباً، وأن خطوط مراكزها تتلاقى. وفي حالات كثيرة قد توجد مفصلة أو وصلة شبه صلبة، وقد نرغب في أخذ إزاحة العضو في الحسبان، كما في الشكل 45.3.

مخطط الجسم الحر



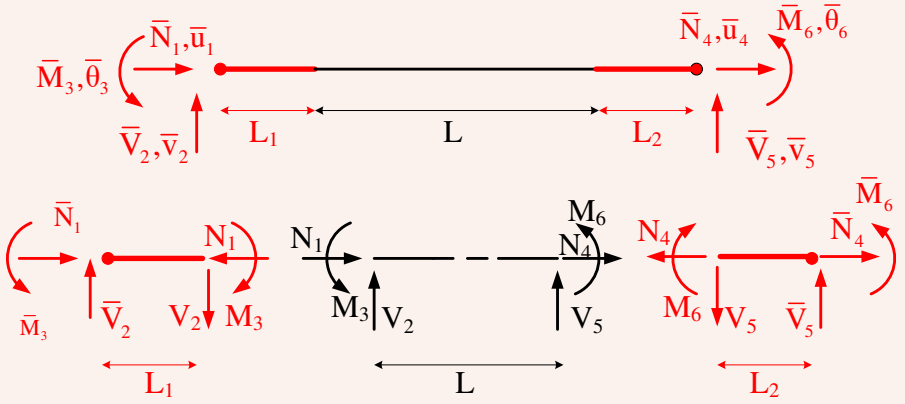
شكل 45.3: كمرة ذات إزاحة صلبة

52 يقود مخطط الجسم الحر المقابل، الشكل 45.4، إلى

$$\mathbf{p} = \lfloor\ N_1 \quad V_2 \quad M_3 \quad N_4 \quad V_5 \quad M_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \lfloor\ \overline{N}_1 \quad \overline{V}_2 \quad \overline{M}_3 \quad \overline{N}_4 \quad \overline{V}_5 \quad \overline{M}_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{u}} = \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\theta}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{\theta}_6\ \rfloor$$

وتمثل هذه، على الترتيب، القوى المؤثرة على الجانبين الداخلي والخارجي للوصلة الصلبة، والإزاحات الخارجية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.4: مخطط الجسم الحر لكمرة ذات إزاحة صلبة

الاتزان

53 يجب أن تكون القوى الخارجية والداخلية في حالة اتزان

$$\overline{N}1 = N_1; \quad \overline{V}_2 = V_2; \quad \overline{M}_3 = L_1 V_2 + M_3$$
$$\overline{N}4 = N_4; \quad \overline{V}_5 = V_5; \quad \overline{M}_6 = -L_2 V_5 + M_6$$

أو

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathcal{B}\mathbf{p} \tag{45.24}$$

$\mathcal{B}$ هي مصفوفة *الاتزان* (المعادلة 45.1)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

54 وبالمثل يمكن تعريف مصفوفة الحركة $\mathcal{A}$ (المعادلة 45.8) بحيث

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}\bar{\mathbf{u}} \tag{45.25}$$

ونعلم من المعادلة 45.9 أن $\mathcal{A} = \mathcal{B}^T$.

مصفوفتا الصلابة وقوى النهايات العقدية

55 يمكننا الآن تحديد صلابة عنصر الكمرة ذي الإزاحة الصلبة بدلالة المعلوم

$$\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku} \tag{45.26}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إذا ضربنا الطرفين في $\mathcal{B}$ وعوضنا بالمعادلتين 45.24 و45.25 في 45.26:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} &= \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{A}\bar{\mathbf{u}}\\ \mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} &= \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{B}^T\bar{\mathbf{u}}\\ \bar{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{NEF}} &= \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

حيث

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & \alpha_1 & 0-12 & \alpha_2 & \\ 0 & \alpha_1 & \gamma & 0-\alpha_1 & \beta & \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -\alpha_1 & 012 & -\alpha_2 & \\ 0 & \alpha_2 & \beta & 0 & -\alpha_2 & \gamma \end{bmatrix}$$

و$\alpha_i = 6L + 12L_i$، و$\beta = 2L^2 + 6LL_1 + 6LL_2 + 12L_1L_2$، و$\gamma = 4L^2 + 12LL_2 + 12L_2^2$.

[56] وعندئذ تُعطى قوى النهايات العقدية بالعلاقة

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FN_1} \\ \overline{FV_2} \\ \overline{FM_3} \\ \overline{FN_4} \\ \overline{FV_5} \\ \overline{FM_6} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FN_1 \\ FV_2 \\ FM_3 \\ FN_4 \\ FV_5 \\ FM_6 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

45.6.2 الكمرات شبه الصلبة

ملاحظة: مقتبس من (Kassimali, 2021, pg. 532).

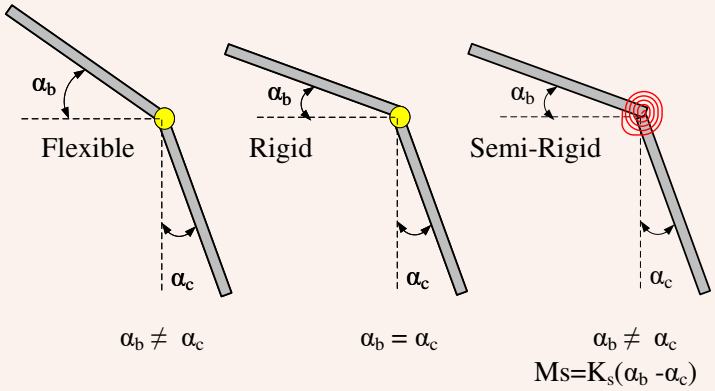
[52] كثيراً ما لا تكون وصلة الكمرة مرنة تماماً ولا صلبة تماماً، بل شبه صلبة (كما في الوصلة الفولاذية من النوع الثاني)، الشكل 45.5.

[53] يمكن التعبير عن مصفوفة صلابة عنصر كمرة عادي كما في المعادلة 40.1:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{NEF}} = \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{45.27}$$

أو ببساطة $\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku}$.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.5: كمرات ذات وصلات مرنة وصلبة وشبه صلبة

54 نسعى الآن إلى تحديد صلابة عنصر كمرة ذي وصلة شبه صلبة

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

بدلالة $\mathbf{k}$ و$\mathbf{NEF}$ وصلابتي النابضين k^s_{lft} وk^s_{rgt} عند طرفي العضو الأيسر والأيمن (العقدتان الأولى والثانية).

مخطط الجسم الحر

55 بالرجوع إلى الشكل 45.6، نرمز بالمتجهات الآتية إلى

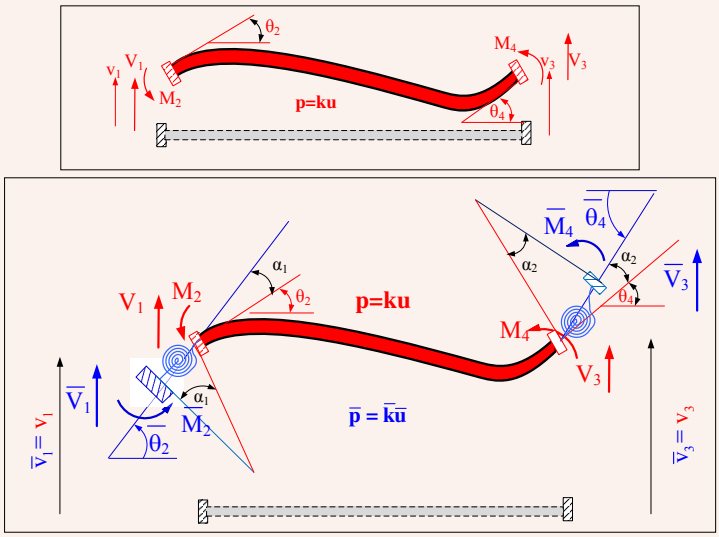
$$\mathbf{p} = \lfloor\ V_1 \quad M_2 \quad V_3 \quad M_4\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \lfloor\ \overline{V}_1 \quad \overline{M}_2 \quad \overline{V}_3 \quad \overline{M}_4\ \rfloor$$
$$\mathbf{u} = \lfloor\ v_1 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_4\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{u}} = \lfloor\ \overline{v}_1 \quad \overline{\theta}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{\theta}_4\ \rfloor$$

القوى المؤثرة على الجانبين الداخلي والخارجي للنوابض، والإزاحات العقدية للجانبين الداخلي والخارجي للنوابض، على الترتيب.

الاتزان

56 يقتضي الاتزان أن $\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.6: تشوهات كمرة شبه صلبة

57 أما الإزاحات، فبافتراض أن أبعاد النوابض متناهية الصغر، يكون لدينا

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \overline{v}_1 \\
\theta_2 + \alpha_{\text{lft}} = \overline{\theta}_2 \Rightarrow \theta_2 &= \overline{\theta}_2 - \underbrace{\frac{M_2}{k^s_{\text{lft}}}}_{\alpha_{\text{lft}}} \\
v_3 &= \overline{v}_3 \\
\theta_4 + \alpha_{\text{rgt}} = \overline{\theta}_4 \Rightarrow \theta_4 &= \overline{\theta}_4 - \underbrace{\frac{M_4}{k^s_{\text{rgt}}}}_{\alpha_{\text{rgt}}}
\end{aligned}
\tag{45.28}
$$

حيث إن k^s_{lft} وk^s_{rgt} صلابتَا النابضين الأيسر والأيمن، على الترتيب.

58 بالتعويض من المعادلة 45.28 في المعادلة 45.27 نحصل على

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1 + FV_1 &= \frac{EI}{L^3}\left[12\overline{v}_1 + 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 12\overline{v}_3 + 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{M}_2 + FM_2 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 4L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 2L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{V}_3 + FV_3 &= \frac{EI}{L^3}\left[-12\overline{v}_1 - 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) + 12\overline{v}_3 - 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\
\overline{M}_4 + FM_4 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 2L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 4L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{45.29}$$

59 هذه المعادلات الأربع مقترنة (إذ يظهر كل من M_2 وM_4 داخل مصفوفة الصلابة وخارجها)، لذا نفصلها ونعبر عن القوى بدلالة الإزاحات وحدها.

$$\begin{aligned}
\overline{M}_2 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_b}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 4L^2(3-2\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 + 2L^2\phi_{\text{rgt}}\overline{\theta}_4\right] \\
&\quad + \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})FM_2 - 2(1-\phi_{\text{rgt}})FM_4\right] \\
\overline{M}_4 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_1 + 2L^2\phi_{\text{lft}}\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_3 + 4L^2(3-2\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\right] \\
&\quad + \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2 + (4-3\phi_{\text{lft}})FM_4 - 2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2\right]
\end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{lft}} &= \frac{k^s_{\text{lft}}L}{EI + k^s_{\text{lft}}L} \\
\phi_{\text{rgt}} &= \frac{k^s_{\text{rgt}}L}{EI + k^s_{\text{rgt}}L} \\
\Phi &= 12 - 8\phi_{\text{lft}} - 8\phi_{\text{rgt}} + 5\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}
\end{aligned}$$

يمكن تفسير ϕ بوصفه معامل *الصلابة*. ففي الوصلة الصلبة $\phi = 1$، بينما في الوصلة المفصلية $\phi = 0$.

60 نعوض بعد ذلك بالمعادلتين الأخيرتين في المعادلتين الأولى والثالثة من 45.29 فنحصل على:

$$\begin{aligned}\overline{V}_1 &= \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1+6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2-12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3\\ &\quad +6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big]+FV_1-\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})FM_2+(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})FM_4\right]\\ \overline{V}_3 &= \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[-12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1-6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2+12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3\\ &\quad -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big]+FV_3+\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})FM_2+(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})FM_4\right]\end{aligned}$$

مصفوفة الصلابة

61 يمكن كتابة هذه العلاقات بالشكل

$$\overline{P}=\overline{\mathbf{k}}\overline{u}+\overline{\mathbf{NEF}}$$

حيث

$$\overline{\mathbf{k}}=\frac{EI}{\Phi L^3}\begin{bmatrix}12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & -12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}})\\ 6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 4L^2\phi_{\text{lft}}(3-2\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}\\ -12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2-\phi_{\text{rgt}}) & 12(\phi_{\text{lft}}+\phi_{\text{rgt}}-\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_b)\\ 6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} & -6L\phi_{\text{rgt}}(2-\phi_{\text{lft}}) & 4L^2\phi_{\text{rgt}}(3-2\phi_{\text{lft}})\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\overline{FV_1}\\ \overline{FM_2}\\ \overline{FV_3}\\ \overline{FM_4}\end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}}=\begin{bmatrix}1-\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})\right] & 0 & -\frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})\right] & \\ 0 & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})\right] & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{rgt}})\right] & \\ 0 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{lft}})(2-\phi_{\text{rgt}})\right] & 1 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1-\phi_{\text{rgt}})(2-\phi_{\text{lft}})\right]\\ 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})\right] & 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})\right]\end{bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix}FV_1\\ FM_2\\ FV_3\\ FM_4\end{Bmatrix}}_{NEF}$$

62 من الواضح أنه في الوصلات الصلبة تماماً، حيث $\phi=1$، نستعيد مصفوفة الصلابة الأصلية للكمرة، المعادلة 45.27.

63 إذا عُبّر عن صلابة النابض k^s بالشكل $k^s=\alpha EI/L$، فإن $\phi=\alpha/(1+\alpha)$. يوضح الشكل 45.7 اعتماد المعامل $\overline{K}_{22}$ على α (مع افتراض تساوي صلابتي النابضين).

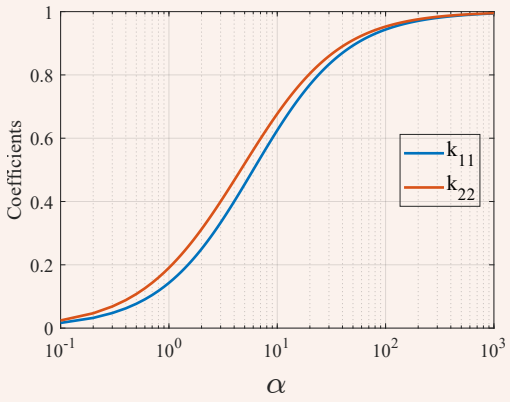
ملاحظات

64 في الوصلات الصلبة تماماً، $\phi=1$، نستعيد مصفوفة الصلابة الأصلية للكمرة.

65 إذا وضعنا $\phi_1=0$ و$\phi_2=1$، توجد مفصلة عند اليسار ووصلة صلبة عند اليمين، وتكون مصفوفة الصلابة المقابلة:

$$\overline{\mathbf{k}}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}3 & 0 & -3 & 3L\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 3 & -3L\\ 3L & 0 & -3L & 3L^2\end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.7: المعامل $\overline{K}_{22}$ للوصلات شبه المرنة

66 وعندئذ تكون مصفوفة صلابة كمرة-عمود ذات مفصلة عند طرفها الأيمن:

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت المفصلة عند الطرف الأيسر

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

67 تنبيه: لا ينبغي أن تكون درجة الحرية العامة المقابلة لدرجة حرية محلية صفرية مساوية للصفر؛ أي ينبغي لعنصر آخر أن "يسهم" في الحد العام.

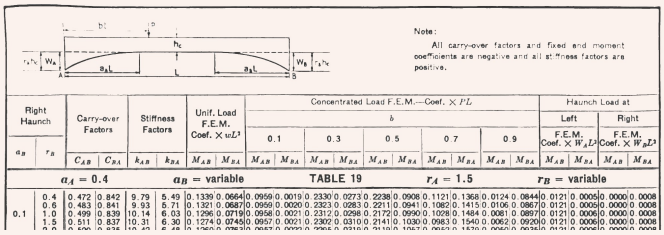
68 إذا عُبّر عن صلابة النابض k^s بالشكل $k^s = \alpha EI/L$، فإن $\phi = \alpha/(1+\alpha)$. ويُدرس اعتماد المعامل $\overline{K}_{22}$ على α بافتراض تساوي صلابتي النابضين.

45.6.3 المقاطع المتغيرة

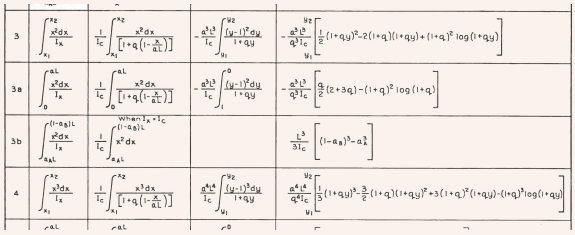
69 تكون العزوم السالبة عند المساند عادة أكبر من العزوم الموجبة عند الوسط. لذلك من المفيد زيادة عزم القصور الذاتي للكمرة عند المسند بزيادة عمقها. وهذه محاولة عملية لجعل شكل الكمرة قريباً من مخطط العزم تحت حمل منتظم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

70 ومن ثم يلزم تحديد مصفوفة صلابة هذه العناصر. وبحسب علم المؤلف لا يوجد منشور يقدم حلاً بسيطاً لهذه المسألة، ويُعد المرجع (Portland Cement Association, 1947) أكثر المراجع موثوقية. ويستحق هذا الدليل التنويه لثلاثة أسباب: (أ) الحلول التحليلية المعقدة والأنيقة لتكاملات صعبة، الشكل 45.8a؛ (ب) ستة وعشرون جدولاً تغطي 1320 عضواً بخمس وعشرين مجموعة مختلفة من الأبعاد، الشكل 45.8b؛ (ج) سهولة الاستعمال. وقد أُنجزت هذه الحسابات عام 1947، قبل عصر الحاسوب بزمن طويل! بالرجوع إلى



(b) قيم عددية



(a) تكاملات تحليلية معقدة

شكل 45.8: مقتطفات من دليل ثوابت الإطارات (Portland Cement Association, 1947)

الشكل 45.9 نعرّف

a	نسبة طول الجزء المتغير عند الطرف A إلى طول البحر
b	نسبة طول الجزء المتغير عند الطرف B إلى طول البحر
h_a	الارتفاع عند المسند A
h_b	الارتفاع عند المسند B
h_c	الارتفاع عند منتصف البحر
I_c	عزم قصور المقطع عند منتصف البحر
I_x	عزم قصور أي مقطع يبعد مسافة x عن A
r_a	$(h_A - h_c)/h_c$ للمقطع المستطيل عند الطرف A
r_b	$(h_B - h_c)/h_c$ للمقطع المستطيل عند الطرف B
x	المسافة من النقطة المتغيرة إلى الطرف A

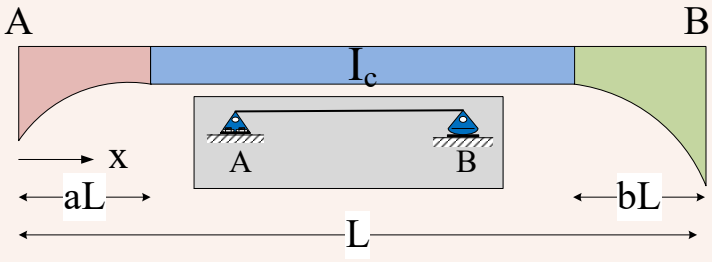
ونستعمل المعادلات الآتية لعزم القصور المتغير:

$$I_x = \begin{cases} Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)^2\right]^3 & \text{تغيرات قطع مكافئ} \\ Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)\right]^3 & \text{تغيرات خطية} \end{cases} \tag{45.30}$$

71 تُشتق مصفوفة صلابة العنصر من مصفوفتَي المرونة والاتزان ($\mathbf{d}$ و$\mathcal{B}$)، كما في المعادلة 45.22:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.9: كمرة ذات مقطع متغير

72 تُعطى مصفوفة الاتزان $\mathcal{B}$ التي تربط القوى الخارجية بالداخلية لكمرة بسيطة الارتكاز بالعلاقة

$$\begin{Bmatrix} R_1 = V_1 \\ R_2 = V_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

73 وقد اشتُقت مصفوفة المرونة في الفصل 25، حيث تُعطى علاقات القوة–الإزاحة كما يأتي

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

باستعمال الشغل الافتراضي المتمم (الفصل 24) يكون لدينا

$$d_{ij} = \int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx \tag{45.31}$$

وهذا مباشر للعضو ذي العمق الثابت.

74 أما الأعضاء متغيرة العمق، فيلزم التعويض بعزم القصور المعطى في المعادلة 45.30 ضمن المعادلة 45.31، وتقسيم التكامل إلى ثلاثة أجزاء:

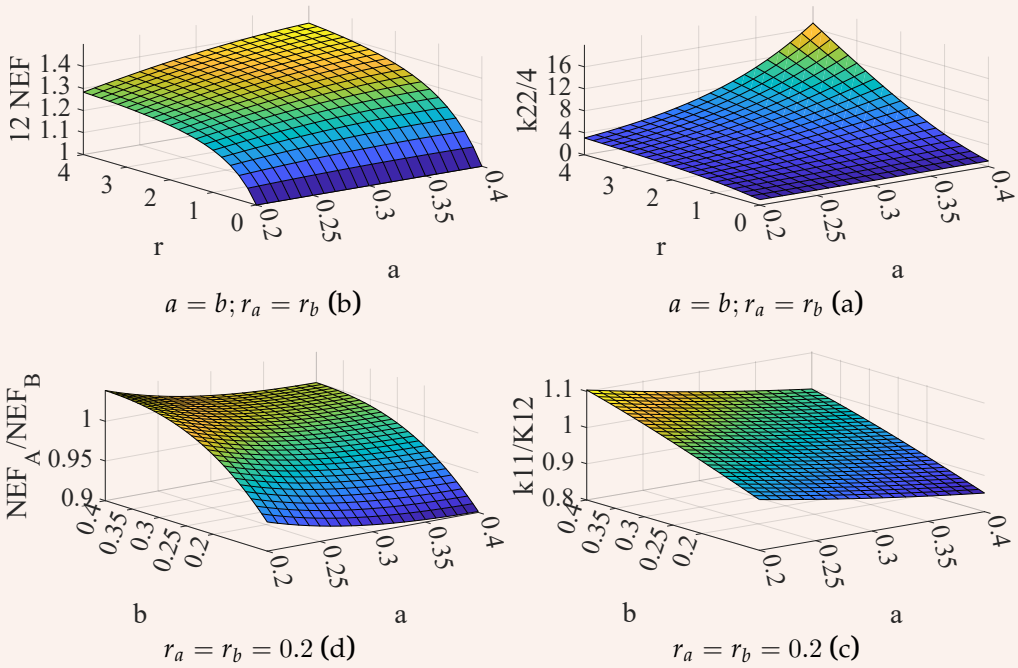
$$\begin{aligned} d_{ij} = &\int_0^{aL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,a,L,r_a}} dx && \text{الجزء المتغير الأيسر} \\ &+ \int_{aL}^{L-al} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_c} dx && \text{الجزء الأوسط} \\ &+ \int_0^{bL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,b,L,r_b}} dx && \text{الجزء المتغير الأيمن} \end{aligned}$$

75 جرت محاولة حل هذه المعادلات ببرنامج Mathematica، لكن الحل التحليلي الناتج كان معقداً وغير

عملي. لذلك يجب الحصول على الحل عددياً. ولهذا كُتب برنامج MATLAB®(I.2.9§) لتعديل المعادلة 40.1 بما يعكس وجود تغيرات قطع مكافئ أو تغيرات خطية.

$$\mathbf{k}^b = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

واستُخدم ذلك لتوليد المنحنيات المبينة في الشكلين 45.10 و45.11 مع $L = I_z = w = 1$. ونلاحظ أن k_{22} و**NEF** طُبّعا بالقيمتين 4 و12، على الترتيب، وهما معاملا المقطع الثابت.



$a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$ (a)

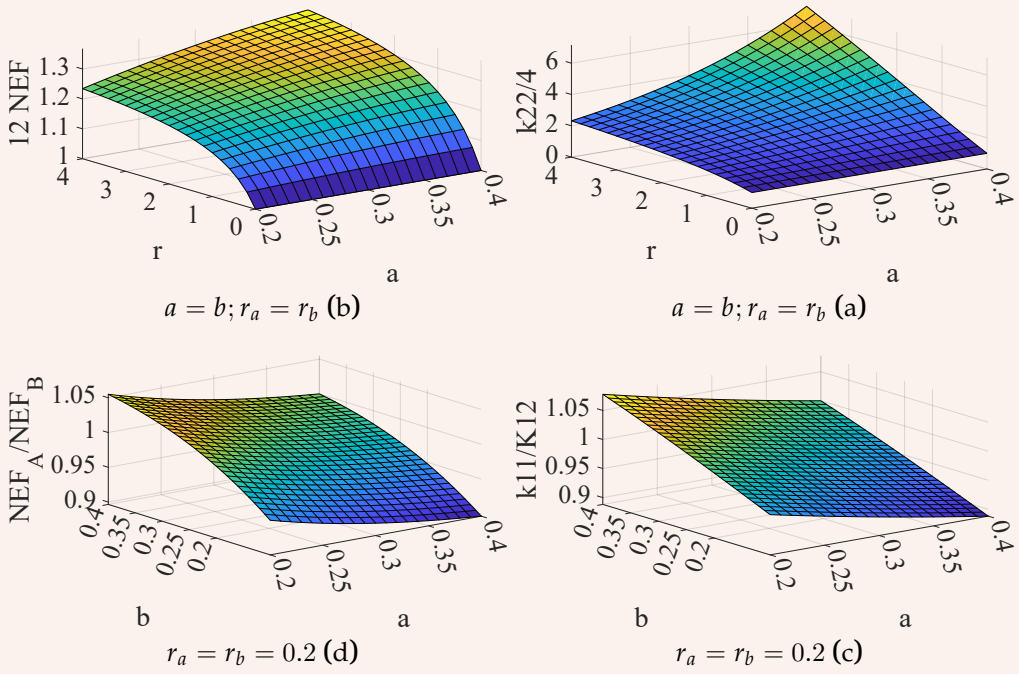
$r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$ (c)

شكل 45.10: مقطع ذو عمق متغير خطياً؛ دراسة بارامترية

45.7 موزعلل ةمواقملا تاراطإلا يف يبناجلا فارجنالا ردامص

ةيلازلزلا هتباجتسا وأ هطامنأ لاكشأ وأ يعيبطلا هنمز داجيإل — ننبم راطإل يكيمانيدلا ليلحتلا ءارجإ لبق [76] يأو ،لماكلاب ةيمكلا هذه همكحت $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ يعيبطلا نمزلاف .k ةيبناجلا هتبالص مهف ألوأ بجي — فارجنالا ردامص قيقد ليلحتب مسقلا اذه أدبي كلذل .يلي ام مهف ءوس بلإ أمتح دوقي k ردصمل مهف ءوس .ةيكيمانيدلا تاريثأتلا وأ ةلاطعلا بوق لاخدإ لبق موزعلل مواقم راطإ يف يبناجلا

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 45.11: مقطع ذو عمق متغير قطعياً مكافئاً؛ دراسة بارامترية

77 يئاشنإلا ليلحتلا ميلعت نأ اهيف رأ، Powell, 2008 لـ ةرثؤم ةلاقم انه ةحورطملا ةلئسألا مهلتست عيمجتو ،موزعلا عيزوتو ،فارحنالاو ليملا تالداعم — ةيديلقتلا ةيوديلا قئارطلل أطرفم أدهج سركي ةجيتنلا زييمتو ةبوسحملا ةجيتنلل يئايزيفلا نعملا مهف :أيلمع مهي امل أليلق أدهجو — ةبالصلا ةفوفصم .ةئطاخلا

78 ةيددع براجتب يئايزيفلا مهفلا ةيمنتو ،لوألا مويلا ذنم بلاطلا دي يف يبوساح جمانرب عضو لواب حرتقا قفتنو .راركتلا مث ،رح مسج ططخمب نازتالا نم ققحتلاو ،فارجنالا ةظحالمو ،ةرمكلا ةبالص رييغت :ةهجوم .بثك نع هتينب هاندأ ةلئسألا عبتتو ،ةفسلفلا هذه عم

79 أفلتخم أراسم ،لوألا ئدابملا نم يئاشنإلا كولسلا مهف يف بغري نم بلإ هجوملا ،باتكلا اذه يف عبتن اننكل V راطإلا تالماعم ةلالدب ةقلغم ةيليلحت ألولح قتشن ،ةيبوساح براجت ربع ئراقلا ةدايق نم ألدبف .دصق نع .بوساحلا هيفخي ام ربجلا رهظيُ :طيسب ببسلاو .EI_b وEI_c وL وH

80 ربع ةدمعألاو تارمكلا ةنورم لعافتت فيكو ،فارجنالا يف مكحتي يذلا لماعملا أروف قلغملا ريبعتلا نيبي يتبالص نيب ةعبرألا لماعم ردصمو ،ةرمكلا ريغت دنع دومعلا يف بالقنالا ةطقن كرحتت اذاملو ،ةدقعلا نازتا .ةتبثملاو ةيلصفملا ةدعاقلا

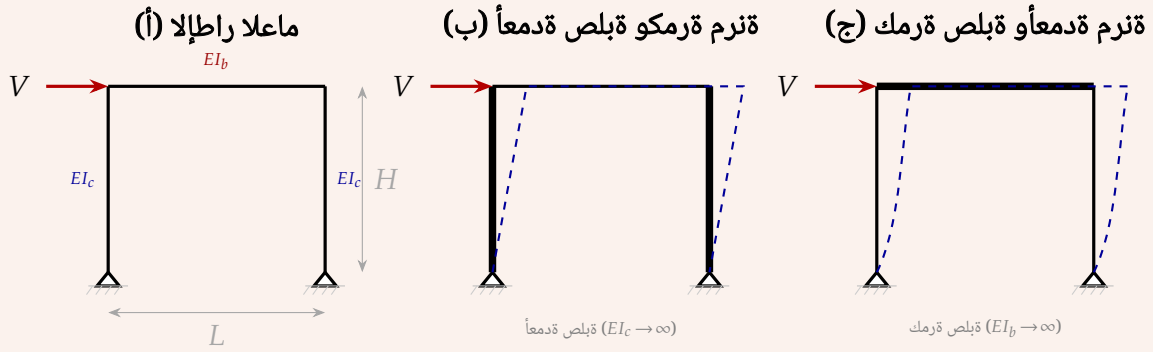
81 أديج رسفملا يليلحتلا قاقتشالا نأ نرنو ؛اهمهف نيسدنهملل لواب ديري يتلا ةيئايزيفلا قئاقحلا يه هذهو .ةيرتمارابلا ةيددعلا ةساردلا نم أتابثو ةرشابم رثكأ ةروصب مهفلا كلذ بلإ يضايرلا ليملا يذ ئراقلا لصوي

82 تاجرخم يف D ةميق ةغيص بلإ أروف فرعتيس ةرم ربجلا سردي نمف .ناسفانتم ال نالماكتم ناجهنملا ةلئاهلا ةبالصلا دسفت اذامل مهفيو ،دومعلا ططخم يف بالقنالا ةطقن عضوم ةيلوقعم ميّقيو ،بوساحلا

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ةقيقحلا ناملّعت هاندأ ةيليلحتلا ةجلاعملاو ةيبوساحلا لواب ةبرجتو .يددعلا لحلا "بلص" رصنع بلإ ةدنسملا .اهيلإ قيرطلا يف الإ نافلتخت الو ،اهسفن ةيئايزيفلا

دنع n بلإ ضرألا دنع 1 نم قباوطلا مقرتُ .روحب mو قباوط n وذ موزعلل مواقم راطإ سوردملا راطإلا [83] دنع ةرمكللو $EI_{c,ij}$، يه (i,j) دومعلل ءانحنالا ةبالص L_j. وه j رحبلا ضرعو h_i وه i قباطلا عافترا ؛فقسلا وه i نوتسملا دنع قباطلا صقو ،قباط لك دنع $\{F_i\}$ ةيبناجلا لامحألا رثؤت .$EI_{b,ij}$ يه j رحبلاو i نوتسملا مل ام ةتبثم دعاوقلاو ،نرم يطخ ليلحتلاو ةيروشنم ءاضعألا عيمج .$\hat{V}_i = \sum_{k=i}^{n} F_k$، هقوف لامحألا عومجم H، عافترالاو V، فقسلا لمحو ،$(n = m = 1$ دحاولا رحبلاو دحاولا قباطلا ةلاح مدختستُو .كلذ فالخ ركذيُ .قباوطلا ةددعتم تاراطإلل أيعون ةمهملا تاميمعتلا نايب عم ،أيساسأ ألاثم L) ضرعلاو



ةيساسأ تاسارد

السؤال 1 — التحليل الكامل للإطار

حلّل الإطار مع قابلية الكمرات والأعمدة للتشوه. حدّد درجات الحرية، واكتب بنية الصلابة الجانبية، وأوجد انجراف السقف Δ وعزوم نهايات الأعمدة وقص الأعمدة بدلالة V وH وL وEI_c وEI_b. وللتعميم متعدد الطوابق، صف بنية مصفوفة الصلابة ومعادلات انجراف الطوابق.

الحل

درجات الحرية. للإطار ذي البحر والطابق الواحد ثلاثة درجات حرية مستقلة: انتقال السقف Δ ودورانا عقدتي الكمرة–العمود θ_L وθ_R. وبالتماثل $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$، فيختزل النظام إلى مجهولين $(\Delta,\ \theta)$.

معادلات الميل والانحراف. لكل عمود (طوله H، ودوران وتره $\psi = \Delta/H$، ودوران طرفه القريب θ، ودوران طرفه البعيد صفر عند القاعدة المثبتة):

$$M_{\text{top}} = \frac{2EI_c}{H}(2\theta - 3\psi),$$
$$M_{\text{bot}} = \frac{2EI_c}{H}(\theta - 3\psi).$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وللكمرة (لا دوران للوتر، ودوران الطرف البعيد $-\theta$ بسبب التناظر العكسي):

$$M_{\text{beam}} = \frac{2EI_b}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

اتزان العقدة ($\sum M = 0$ عند مستوى الكمرة):

$$2M_{\text{top}} + M_{\text{beam}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

الاتزان الجانبي ($\sum Q = V$، وقص كل عمود $Q = (M_{\text{top}} + M_{\text{bot}})/H$):

$$\boxed{\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.}$$

قص العمود: $Q = V/2$ (تناظر عكسي). وعزوم نهايات العمود:

$$M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+\rho/3}{1+\rho/6}, \qquad M_{\text{top}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+2\rho/3}{1+\rho/6}.$$

التعميم متعدد الطوابق. مع بلاطات طابقية صلبة، تكون درجات الحرية الجانبية هي إزاحات الطوابق n، $\{u_i\}$. وعند ترتيبها في متجه تكون مصفوفة الصلابة الجانبية العامة ثلاثية القطر:

$$\mathbf{K}_{\text{sway}} = \begin{bmatrix} k_1{+}k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2{+}k_3 & -k_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k_n & k_n \end{bmatrix},$$

حيث k_i صلابة الطابق عند المستوى i (مجموع صلابات الأعمدة بعد تعديلها لمرونة الكمرات كما سبق). وتُستخرج انجرافات الطوابق $\delta_i = u_i - u_{i-1}$ من $\mathbf{K}_{\text{sway}}\mathbf{u} = \mathbf{F}$.

السؤال 2 — حد مبنى القص: كمرات لا نهائية الصلابة

لتكن $EI_b \to \infty$ (الشكل ج). اشتق الصلابة الجانبية وانجراف السقف ومخطط عزوم الأعمدة، واشرح الشكل المتشوه، ثم عمم إلى n طوابق.

الحل

عندما $EI_b \to \infty$ تُمنع دورانات العقد ($\theta = 0$، و$\rho \to \infty$). ويتصرف كل عمود كعضو مثبت–مثبت ذي تقوس مزدوج.

الصلابة الجانبية والانجراف:

$$k^{\infty} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \boxed{\Delta^{\infty} = \frac{VH^3}{24EI_c}.}$$

عزوم الأعمدة (متساوية أعلى وأسفل، ونقطة الانقلاب عند منتصف الارتفاع):

$$M_{\text{top}} = M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}.$$

الشكل المتشوه. تنتقل الكمرة كجسم صلب من دون دوران، ويتشوه العمودان بتقوس مزدوج على هيئة S، مع نقطة انقلاب عند منتصف الارتفاع تماماً. وهذا هو افتراض *مبنى القص* الشائع في التصميم الأولي.
الحالة متعددة الطوابق. صلابة الطابق عند المستوى i هي مجموع صلابات الأعمدة $m{+}1$ جميعها:

$$k_i = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}.$$

يحمل كل عمود قصاً يتناسب مع صلابته؛ ومخطط عزم الانحناء في كل عمود خطي ونقطة الانقلاب عند منتصف الارتفاع، بصرف النظر عن عدد الطوابق. ولإطار منتظم تحت حمل سقف واحد V، ينجرف كل طابق بالمقدار نفسه $\delta = V/k$، فينتج توزيع إزاحة خطي.

السؤال 3 — حد مرونة الكمرة ونمط الكابولي

لتكن $EI_c \to \infty$ للانحناء مع إبقاء الصلابة المحورية EA_c محدودة (الشكل ب). بيّن أن الإطار يتشوه الآن بنمط كابولي *انحنائي* تحركه الفروق في التشوه المحوري للأعمدة. اشتق انجراف السقف المقابل، وناقش متى يصبح هذا النمط مهماً مقارنة بنمط مبنى القص.

الحل

إسهام مرونة الكمرة (طابق واحد). عندما تكون الأعمدة صلبة انحنائياً لا يحدث فيها انحناء، وتتحكم مرونة الكمرة بالكامل في دورانات العقد θ. وبوضع $EI_c \to \infty$ في معادلة اتزان العقدة نحصل على

$$\theta = \frac{VH^2\,L}{12\,EI_b},$$

والانجراف الناتج من دوران العقدة وحده ("انجراف مرونة الكمرة"):

$$\Delta^{\text{beam}} = \theta H = \frac{VH^3}{12\,EI_b/L \cdot H^2}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

النمط الكابولي (المحوري). في إطار متعدد الطوابق ذي أعمدة صلبة انحنائياً، يتأرجح الإطار حول قاعدته ككابولي رأسي. وتكون الصلابة الانحنائية المكافئة لنظام الأعمدة المحوري

$$EI_{\text{eq}} = \sum_{j} E A_{c,j}\, s_j^2,$$

حيث s_j بُعد العمود j عن المحور المركزي. وعندئذ يطابق انجراف السقف انجراف الكابولي:

$$\boxed{\Delta^{\text{ax}} = \frac{V H^3}{3\, EI_{\text{eq}}}.}$$

متى يهم هذا النمط؟ تقارب نسبة الانجراف المحوري إلى انجراف مبنى القص

$$\frac{\Delta^{\text{ax}}}{\Delta^{\infty}} \propto \frac{I_c\, H^2}{A_c\, s^2},$$

وتزداد مع نحافة الإطار H/B حيث B عرض البحر. في الإطارات المنخفضة ($H/B < 3$) يُهمل النمط المحوري. أما الإطارات العالية النحيفة ($H/B > 6$–8) فقد يسهم بنسبة 30–50 % من الانجراف الكلي، ويلزم التحكم فيه بزيادة مساحات الأعمدة أو إضافة نواة صلبة.

السؤال 4 — تراكب مركبات الانجراف

بيّن أن الانجراف الكلي يمكن تحليله تقريباً بالشكل

$$\Delta \approx \Delta^{\text{col}} + \Delta^{\text{beam}} + \Delta^{\text{ax}},$$

واشرح لماذا هذا التحليل تقريبي لا دقيق، وناقش قيمته العملية.

الحل

ثلاثة مصادر. يمكن كتابة الانجراف الكامل من السؤال 1 إلى الرتبة الأولى كما يأتي:

(i) **انحناء الأعمدة** Δ^{col}: الانجراف عندما تكون الكمرة صلبة (السؤال 2).

(ii) **مرونة الكمرة** Δ^{beam}: الانجراف الإضافي من دوران العقدة عندما تكون الأعمدة صلبة (السؤال 3).

(iii) **التشوه المحوري للأعمدة** Δ^{ax}: نمط التأرجح الناتج من اختلاف استطالة الأعمدة (السؤال 3).

يعطي جمع هذه المركبات الصيغة التقريبية؛ لكن النتيجة الدقيقة من السؤال 1 تبين تفاعل المصادر الثلاثة عبر اتزان العقدة، فتظهر حدود اقتران يهملها الجمع البسيط. ويكون خطأ التقريب الجمعي عادة 5–15 % لنسب الإطارات العملية.

لماذا ليس دقيقاً؟ يولد انحناء الأعمدة دورانات عقدية تزيد عزوم الكمرات؛ وتخفض مرونة الكمرات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عزوم الأعمدة وتحرك نقطة الانقلاب؛ ويغير التشوه المحوري الارتفاع الفعال للعمود قليلاً. ولا يلتقط هذه التفاعلات بدقة إلا حل الصلابة الكامل.

القيمة العملية. على الرغم من التقريب، يُعد هذا التحليل أداة تشخيص مفيدة جداً؛ فهو يحدد فوراً المصدر المسيطر وموضع زيادة الصلابة: زيادة صلابة الأعمدة لخفض Δ^{col}، والكمرات لخفض Δ^{beam}، وزيادة مساحات الأعمدة أو إضافة جدار قص لخفض Δ^{ax}. ولا تنقل مخرجات الحاسوب، مهما تفصلت، هذا الفهم الفيزيائي مباشرة.

السؤال 5 — فحوص الاتزان

استعمل مخططات الجسم الحر للتحقق من أن: (أ) مجموع قص الأعمدة يساوي الحمل الجانبي المطبق؛ (ب) قص الأعمدة متسق مع عزوم نهاياتها؛ (ج) اتزان عزوم العقد متحقق عند وصلات الكمرة–العمود. عمم ذلك إلى إطار متعدد الطوابق.

الحل

(أ) الاتزان الأفقي العام. يبين قطع أفقي للإطار عند أي مستوى أن مجموع قص الأعمدة يساوي القوة الجانبية الكلية فوق القطع. ولإطار طابق واحد: $Q_L + Q_R = V$. وبالتناظر العكسي $Q_L = Q_R = V/2$. ولإطار متعدد الطوابق عند الطابق i: $\sum_j Q_{ij} = \hat{V}_i = \sum_{k \geq i} F_k$. ✓

(ب) اتساق العزم–القص. بعزل عمود ارتفاعه h كجسم حر:

$$Q = \frac{M_{\text{top}} + M_{\text{bot}}}{h}.$$

يؤكد التعويض بعزوم السؤال 1 أن $Q = V/2$ لكلا العمودين. ✓

(ج) اتزان عزوم العقدة. عند عقدة الكمرة–العمود (مستوى السقف، العمود الأيسر):

$$M_{\text{col,top}} + M_{\text{beam,left}} = 0,$$

أي يجب أن يساوي عزم قمة العمود عزم نهاية الكمرة عند العقدة ويعاكسه. وبالتعويض من السؤال 1، تتحقق $M_{\text{col,top}} + \dfrac{6EI_b}{L}\theta = 0$ مباشرة من معادلة اتزان العقدة للميل والانحراف. ✓

اتزان العقدة في إطار متعدد الطوابق. عند عقدة داخلية (الطابق i، خط الأعمدة j):

$$M^{\text{col,top}}_{ij} + M^{\text{col,bot}}_{i+1,j} + M^{\text{left}}_{b,ij} + M^{\text{right}}_{b,ij} = 0.$$

يجب التحقق من ذلك عند كل عقدة؛ وأي إخلال يدل على خطأ في النموذج. وفحوص الاتزان من هذا النوع هي أكثر أدوات كشف أخطاء النموذج الحاسوبي موثوقية، ويعدها باول (Powell, 2008) بحق مهارة هندسية لا غنى عنها.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السؤال 6 — التحقق بالهندسة المباشرة

لحد مبنى القص (السؤال 2)، تحقق من الانجراف باستعمال $\delta = PL^3/12EI$ لعمود مثبت الطرفين. ولإسهام مرونة الكمرة (السؤال 3)، استعمل صيغة دوران نهاية الكمرة $\theta = ML/6EI_b$ لتقدير الانجراف الإضافي. بيّن كيف يندمجان لإعطاء تقريب قيمة D.

الحل

انجراف مبنى القص بالهندسة المباشرة. ينشأ في عمود مثبت الطرفين ارتفاعه H وتحت قص $Q = V/2$ نقطة انقلاب عند منتصف الارتفاع. ويتصرف كل نصف ككابولي مثبت طوله $H/2$ تحت الحمل Q:

$$\Delta = 2 \times \frac{Q(H/2)^3}{3EI_c} = \frac{VH^3}{24EI_c},$$

وهو ما يؤكد السؤال 2 بدقة. ✓

تصحيح مرونة الكمرة. للكمرة المنحنية بتناظر عكسي تحت عزمي نهاية متساويين ومتعاكسين M دوران نهاية $\theta = ML/6EI_b$. ويضيف دوران العقدة انجرافاً θH إلى انجراف انحناء الأعمدة. بوضع $M = M_{\text{top}}$ من الحل الكامل والتعبير عن النتيجة كمعامل تصحيح لانجراف الكمرة الصلبة نحصل على قيمة D للعمود (i, j):

$$D_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{K_{c,ij}}{K_{c,ij} + \frac{1}{2}(K_{b,ij}^{\text{above}} + K_{b,ij}^{\text{below}})},$$

حيث $K_c = EI_c/h$ و$K_b = EI_b/L$. وعندئذ يكون انجراف الطابق شاملاً مرونة الكمرة:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}}.}$$

تستعيد طريقة قيمة D النتيجة الدقيقة عندما $\alpha = 1$ (كمرة صلبة)، وتعطي تقريباً موثوقاً لجميع نسب الصلابة العملية، يكون عادة ضمن 5–10 % من نتيجة مصفوفة الصلابة.

السؤال 7 — دورانات وعزوم نهايات الكمرات

باستخدام انجراف السقف Δ من السؤال 1، احسب دوران العقدة θ وتحقق من توافق عزوم نهايات الكمرة المحسوبة من صلابتها مع العزوم الناتجة من التحليل العام. عمم إلى إطار متعدد الطوابق، واكتب معادلة اتزان العقدة عند عقدة داخلية عامة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحل

إطار من طابق واحد. من اتزان العقدة المشتق في السؤال 1:

$$\theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

عزم نهاية الكمرة (انحناء بتناظر عكسي، ودوران الطرف البعيد $-\theta$):

$$M_{\text{beam}} = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

بالتعويض عن θ ثم Δ من السؤال 1 نستعيد M_{top} بدقة. ✓
إطار متعدد الطوابق. عند عقدة داخلية عامة (الطابق i، خط الأعمدة j)، تكون معادلة اتزان العقدة:

$$\left(\frac{4EI_{c,ij}}{h_i} + \frac{4EI_{c,i+1,j}}{h_{i+1}} + \frac{4EI_{b,ij}}{L_j} + \frac{4EI_{b,i,j-1}}{L_{j-1}}\right)\theta_{ij} = \text{حدود النقل} + \text{حدود دوران الوتر}.$$

تنشأ حدود النقل من دورانات العقد المجاورة، وتتناسب حدود دوران الوتر مع انجرافات الطوابق δ_i وδ_{i+1}. ويعطي تجميع هذه المعادلة عند كل عقدة واقترانها بمعادلات اتزان الطوابق نظام الصلابة الكامل المحلول في السؤال 1.

ةيفاضإ تاسارد

السؤال A1 — القواعد المفصلية والمثبتة

لإطار من طابق واحد بكمرة صلبة، قارن الصلابة الجانبية عند قواعد أعمدة مفصلية ومثبتة. أثبت تحليلياً أن الإطار ذا القاعدة المفصلية أكثر مرونة بأربعة أضعاف تماماً. ارسم وفسر مخططي عزوم الانحناء للحالتين، وعمم إلى إطار متعدد الطوابق وناقش أثر شرط القاعدة في الطوابق العليا.

الحل

قواعد مثبتة، كمرة صلبة. كل عمود مثبت الطرفين؛ ومن السؤال 2:

$$k^{\text{fixed}} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{fixed}} = \frac{VH^3}{24EI_c}.$$

قواعد مفصلية، كمرة صلبة. كل عمود مفصلي عند القاعدة ومثبت عند القمة (لا دوران، كمرة صلبة): كابولي مثبت–مفصلي. والصيغة القياسية لعمود مثبت في الأعلى ومفصلي عند القاعدة:

$$k^{\text{pinned}}_{\text{col}} = \frac{3EI_c}{H^3}, \qquad k^{\text{pinned}} = \frac{6EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{pinned}} = \frac{VH^3}{6EI_c}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نسبة المرونة:

$$\frac{\Delta^{\text{pinned}}}{\Delta^{\text{fixed}}} = \frac{VH^3/6EI_c}{VH^3/24EI_c} = 4. \qquad \checkmark$$

تنتج نسبة 4 مباشرة من نسبة معاملي الصلابة: $12EI/H^3$ (مثبت–مثبت) مقابل $3EI/H^3$ (مثبت–مفصلي).

مخططات عزم الانحناء. مع القواعد المثبتة يحمل العمودان عزوم قمة وقاعدة متساوية $M = VH/4$ في تقوس مزدوج ونقطة انقلاب عند منتصف الارتفاع. ومع القواعد المفصلية يكون العزم صفراً عند القاعدة ويزداد خطياً إلى $M = VH/2$ عند مستوى الكمرة، ويتشوه العمود بتقوس مفرد بلا نقطة انقلاب. ويكون عزم نهاية الكمرة مع القواعد المفصلية ضعف نظيره مع القواعد المثبتة.

إطار متعدد الطوابق. ينطبق معامل 4 على *الطابق* الأول وحده؛ أما الطوابق العليا فتحدها كمرات من أعلى وأسفل وتظل مثبتة الطرفين بصرف النظر عن شرط القاعدة. لكن انجراف الطابق الأول الأكبر يزيد طلب العزم في كمرات الطابق الأول؛ فمع القواعد المفصلية تقاوم هذه الكمرات ضعفي عزم نهاية حالة القواعد المثبتة، وقد يحكم ذلك تصميم الكمرات في الإطارات المنخفضة.

السؤال A2 — أثر تغير أحجام الأعضاء

ناقش تغير توزيع الانجراف وعزوم الأعمدة عندما (أ) تتناقص أحجام الأعمدة في الطوابق العليا، و(ب) تتغير أحجام الكمرات بين الطوابق. حدّد نسبة الصلابة $\rho = EI_b H/(EI_c L)$ بوصفها المعامل الحاكم، وصف سلوكها الحدي.

الحل

المعامل الحاكم. من السؤال 1، يكون الانجراف الكامل:

$$\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.$$

نمط عزم العمود	الانجراف	ρ	الحالة الحدية
تقوس مزدوج، $M_{\text{top}} = M_{\text{bot}}$	$VH^3/24EI_c$	$\rho \to 0$	كمرة صلبة
تقوس مفرد، $M_{\text{bot}} = VH/2$	$VH^3L/(12EI_bH^2)$	$\rho \to \infty$	عمود صلب
مختلط، نقطة الانقلاب أعلى منتصف الارتفاع	متوسط	$\rho \approx 1$–6	عملي

أحجام أعمدة متغيرة (متعدد الطوابق). إذا تناقصت أحجام الأعمدة في الطوابق العليا أسرع من تناقص قص الطابق، أصبحت الطوابق العليا أكثر مرونة نسبياً وتركز توزيع الانجراف في الأعلى. ويحافظ الإطار الجيد التناسب على نسب انجراف δ_i/h_i شبه منتظمة عند جميع المستويات.

موضع نقطة الانقلاب. ترتفع نقطة الانقلاب في العمود (i,j) فوق منتصف الارتفاع عندما تكون الكمرة أسفله أصلب من الكمرة أعلاه (أو قرب قاعدة مفصلية)، وتهبط نحو منتصف الارتفاع كلما تقاربت صلابات الكمرات. وتتبع موضع نقطة الانقلاب فحص نوعي موثوق لمعقولية مخطط العزم الحاسوبي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

السؤال A3 — مناطق نهايات صلبة عند وصلات الكمرة–العمود

أضف مناطق نهايات صلبة طولها $a = d_c/2$ عند كل نهاية كمرة لمراعاة عرض العمود المحدود d_c. بيّن كيف يغير البحر الصافي الفعال $L' = L - d_c$ معامل صلابة الكمرة وقيمة D وانجراف الطابق. وهل يصبح التصحيح أهم في الإطارات العالية؟

الحل

معاملات الصلابة المعدلة. باستبدال البحر الكامل L بالبحر الصافي $L' = L - d_c$ في جميع تعبيرات صلابة الكمرة:

$$K_b' = \frac{EI_b}{L'} > K_b = \frac{EI_b}{L},$$

ينتج α' أكبر وقيمة D أكبر، ومن ثم انجراف أصغر:

$$\delta' = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}'} < \delta.$$

لإطار فولاذي نموذجي حيث $d_c \approx 0.4$ m و$L = 6$ m، يكون التصحيح $L'/L = 5.6/6 \approx 0.93$، فيعطي $K_b'/K_b \approx 1.07$ (زيادة صلابة الكمرة 7 %) وانخفاضاً في الانجراف بنحو 5–8 %.

أهم في الإطارات العالية. يكون تصحيح ارتفاع العمود أهم نسبياً في الإطارات العالية. فإذا كان $h = 3.5$ m و$d_b = 0.5$ m (عمق الكمرة)، فإن ارتفاع العمود الصافي $h' = 3.0$ m ونسبة صلابة العمود $(h/h')^3 = (3.5/3.0)^3 \approx 1.59$، أي زيادة 59 % في صلابة الانحناء لا يجوز إهمالها في تحليل جاد. وعادة يبالغ إهمال مناطق الألواح في إطار متعدد الطوابق في تقدير الانجراف الجانبي بنسبة 15–30 %.

السؤال A4 — أعمدة هائلة الصلابة: الدقة العددية

ضع $EI_c = \alpha\, EI_b$ مع $\alpha \gg 1$ لمحاكاة أعمدة صلبة. بيّن كيف يزداد عدد شرط مصفوفة الصلابة مع α، وقدر فقد الدقة العددية، وحدد العتبة العملية التي تصبح بعدها النتائج غير موثوقة.

الحل

عدد الشرط. يتناسب عدد شرط مصفوفة الصلابة المجمعة مع $\kappa(\mathbf{K}) \sim \alpha = EI_c/EI_b$. وعندما $\alpha = 10^n$ يفقد الحل نحو n خانات عشرية من الدقة. وفي الحساب مزدوج الدقة القياسي (نحو 15 رقماً معنوياً) تنخفض الدقة القابلة للاستعمال إلى $15 - n$ رقماً.

استعادة القوى. حتى عندما تبقى الإزاحات دقيقة بدرجة مقبولة، تُحسب قوى العضو شديد الصلابة كحاصل ضرب الصلابة في الإزاحة: عدد كبير في عدد صغير جداً، ما يسبب *إلغاء كارثياً* في حساب الفاصلة العائمة. وتكون قوى الأعضاء المرنة (الكمرات) موثوقة عموماً، بخلاف قوى الأعمدة هائلة الصلابة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العتبة العملية. النسب حتى $\alpha \approx 10^{3}$–10^{4} آمنة للحلالات القياسية مزدوجة الدقة في إطارات حتى 50 طابقاً. وبعد ذلك يكون العلاج المفضل قيود الوصلات الصلبة (السؤال A5)، لا زيادة الدقة العددية.
التفسير الفيزيائي. حتى قبل الفشل العددي، فإن جعل الأعمدة أصلب من الكمرات بمئة مرة أو أكثر يعطي نتائج لا يمكن تمييزها فيزيائياً عن حد العمود الصلب الحقيقي؛ ولا تؤثر الصلابة الإضافية عملياً في الانجراف أو عزوم الكمرات. وفي هذا النطاق يصف نموذج مبنى القص الإطار بدقة شبه تامة.

السؤال A5 — قيود الوصلات الصلبة: قيم دقيقة لـ P وMg وV

استبدل الأعمدة هائلة الصلابة في السؤال A4 بـقيود وصلات *صلبة* (قيود حركية رئيس–تابع). اشرح لماذا هذا المنهج مستقر عددياً ودقيق فيزيائياً، ولماذا تختلف قيم P وMg وV المحسوبة في العضو المقيد عن قيم السؤال A4. وحدد الغشاء الصلب بوصفه الحالة الخاصة الأكثر شيوعاً.

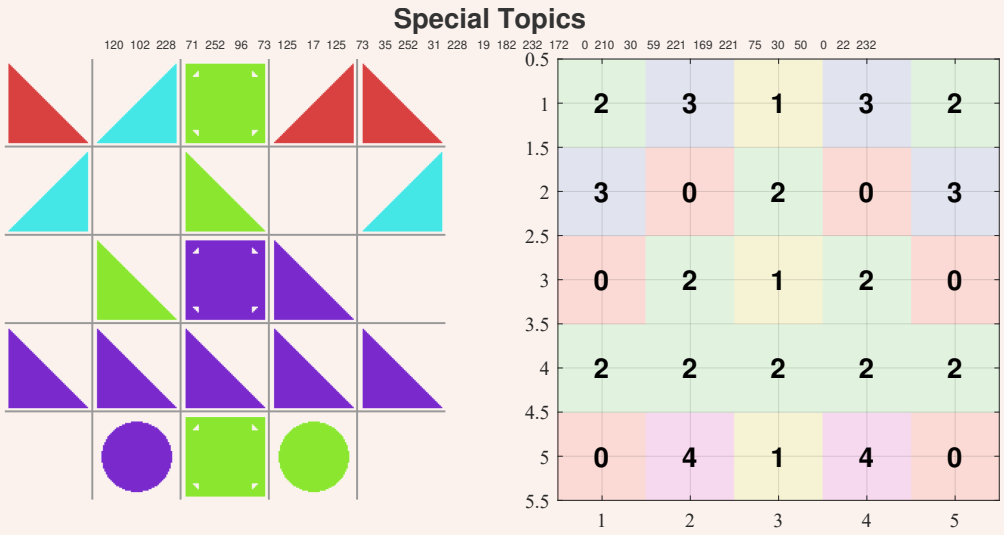
الحل

القيد الحركي. تفرض وصلة صلبة بين العقدة الرئيسة A والعقدة التابعة B

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{T}_{AB}\,\mathbf{u}_A,$$

حيث $\mathbf{T}_{AB}$ تحويل الجسم الصلب. تُحذف درجات حرية التابع من النظام العام، وتُستعاد قوى القيد من اتزان *الأعضاء المرنة المجاورة* وحدها، فلا تظهر صلابة كبيرة في الحساب. والنتيجة دقيقة عددياً ومستقلة تماماً عن نسبة الصلابة.
سبب اختلاف قيم P وMg وV عن السؤال A4. في نموذج الصلابة الكبيرة تُحسب قوى العمود من $F = K_c\,\delta$، أي حاصل ضرب عدد كبير في عدد صغير، ولا تتقارب إلى القيمة الصحيحة إلا عندما $\alpha \to \infty$ وتعاني الإلغاء الكارثي عند الدقة المحدودة. أما مع الوصلة الصلبة، فقوة القيد هي رد الفعل الاستاتيكي الدقيق اللازم لفرض التوافق، وتُحسب مباشرة من اتزان الأعضاء المرنة المتصلة. وعند استعمال قيود الوصلات الصلبة يبلغ الحاسوب عن P وMg وV داخلية صفرية في العنصر المقيد لأنه لا يتشوه، وتظهر القوى كلها كردود أفعال للقيود؛ وهي نتيجة دقيقة فيزيائياً ومستقرة عددياً.
الغشاء الصلب. غشاء الطابق الصلب، المستعمل في معظم نماذج المباني متعددة الطوابق، هو مجموعة قيود وصلات صلبة تفرض على جميع عقد الطابق الانتقال الأفقي نفسه مع دوران جسم صلب. وتُستعاد قوى الغشاء داخل مستواه (القوى المحورية والقص) كردود أفعال للقيود: دقيقة وحسنة الشرط ومستقلة عن صلابة البلاطة المسندة في النموذج. وينبغي تطبيق المبدأ نفسه كلما أريد لعنصر إنشائي أن يكون صلباً حقاً: يُنمذج بقيود، لا بصلابات كبيرة غير واقعية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



chapter H ،لصفلاب صاخ يفيرعت زمر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

46 حساب التغايرات في الميكانيكا: إطار أويلر–لاغرانج

ملخص

يطوّر هذا الفصل الإطار النظري للطرائق التغايرية في الميكانيكا، ويوفر أساساً للمناهج المعتمدة على الطاقة التي تُبحث في الفصل التالي.

يبدأ بمقدمة تقارن المنهجين النيوتني واللاغرانجي في التحليل الإنشائي، مع إبراز دور المبادئ التغايرية في الميكانيكا. ويقدم قسم أويلر حساب التغايرات، فيعرّف الدواليات ويشتق معادلات أويلر–لاغرانج المركزية في الاستاتيكا والديناميكا. كما يوضح الفرق بين الصيغة القوية (المعادلات التفاضلية) والصيغة الضعيفة (العبارات التكاملية) وأهميتهما في الميكانيكا.

ثم يبحث الفصل الشروط الحدية، ويميز بين الشروط الأساسية والطبيعية وآثارهما في الصياغات التغايرية.

ويُعرض مبدأ الطاقة الكامنة الكلية بوصفه ركناً أساسياً للطرائق المعتمدة على الطاقة، ويقود إلى مبدأ الشغل الافتراضي. وأخيراً يُقدم مبدأ هاملتون الذي يوسع المنهج التغايري إلى الأنظمة الديناميكية، ثم تُناقش المبادئ التغايرية متعددة الحقول، ومنها صياغة هو–واشيزو.

مع أن هذا الفصل يستند بدرجة كبيرة إلى (Reddy, 2017; Sokolnikoff, 1956; Pilkey and Wunderlich, 1994)، فقد وُحّدت الرموز قدر الإمكان لتحقيق الاتساق هنا وفي الفصول اللاحقة. والمادة موجهة إلى القراء ذوي الاهتمام الرياضي القوي بالميكانيكا الإنشائية؛ أما المهتمون بالتطبيقات وحدها فيمكنهم الانتقال مباشرة إلى الفصل التالي.

46.1 مقدمة 1471
46.2 أويلر 1472
46.2.1 تمهيدات 1472
46.2.2 الصيغة التفاضلية لـ $\delta\Pi$ 1474
46.2.3 معادلة أويلر 1475
46.2.4 $\delta\Pi$ 1476
46.2.5 ملاحظات 1476
46.2.6 الشروط الحدية 1477
46.3 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية 1481
46.4 هاملتون 1484
46.4.1 الديناميكا: أويلر/لاغرانج 1484
46.4.2 مثال 46.3: هاملتون 1488
46.5 مبدأ هو–واشيزو التغايري العام 1491
46.6 مخططات "شبه تونتي" 1495
46.6.1 مبدأ دالمبير 1495
46.6.2 معادلات هاملتون 1495
46.6.3 معادلات لاغرانج 1496

46.1 مقدمة

1 أُنجز تحليل المنشآت حتى الآن بحل مسائل قيم حدية محددة، معبراً عنها بمعادلات تفاضلية جزئية.

2 لكن يمكن تناول الهندسة الإنشائية (والميكانيكا) من زاويتين مختلفتين:

المنهج النيوتني اتزان كمية الحركة (الاتزان).

المنهج اللاغرانجي اتزان الطاقة (الديناميكا الحرارية).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3 يطوّر هذا الفصل المنهج الثاني، مستفيداً من مبادئ القيم الدنيا التي تميز حالات اتزان الأجسام المرنة. وهو منهج يعتمد الطرائق المباشرة في حساب التغايرات التي اقترحها أولاً رايلي وريتز، ثم كورانت وغاليركن وغيرهم.

4 يهدف هذا الفصل إلى:

1. تقديم إطار دقيق للطرائق التغايرية التي تقوم عليها ما يسمى طرائق "الطاقة"، مع صياغة تعريف الشروط الحدية الطبيعية والأساسية.
2. جمع طرائق "الطاقة" المختلفة وبيان أنها متكافئة في جوهرها.
3. تطوير *مبدأ الإزاحة الافتراضية* تمهيداً لطريقة العناصر المحددة.
4. بيان الثنائية بين ما يسمى الصيغة القوية (المعادلة التفاضلية) والصيغة الضعيفة (تحقيق مبدأ بمعنى متوسط).

46.2 أويلر

46.2.1 تمهيدات

5 يتناول حساب التفاضل دالة في متغير واحد أو أكثر، بينما يتناول حساب التغايرات دالة في دالة، أي دالية.

6 وتتمثل المسألة الأساسية في حساب التغايرات في إيجاد دالة $u(x)$ بحيث

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{46.1}$$

وتكون مستقرة

$$\delta\Pi = 0$$

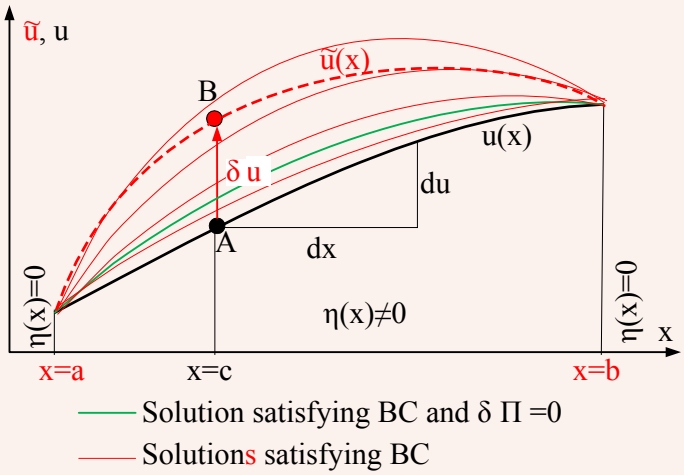
حيث يدل δ على مؤثر *التغاير* (ولا ينبغي الخلط بينه وبين المشتقة).

7 نعرّف $u(x)$ دالة في x على المجال (a,b)، وF دالة حقيقية معلومة (مثل كثافة الطاقة)، ونعرّف مجال الدالية بأنه مجموعة الدوال المقبولة المنتمية إلى صنف من الدوال في فضاء الدوال، لا منطقة في فضاء الإحداثيات كما في حالة الدالة العادية.

8 نبحث عن الدالة $u(x)$ التي تجعل Π قصوى أو دنيا. ولتكن $\tilde{u}(x)$ عائلة من المسارات المجاورة للدالة المتطرفة $u(x)$، ونفترض تطابقها عند النهايتين $x = a, b$.

9 نعرّف $u(\tilde{x})$ مجموع المسار المتطرف وتغاير اعتباطي، الشكل 46.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 46.1: مؤثرا التغاير والتفاضل

$$\tilde{u}(x,\varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x) \tag{46.2}$$

حيث ε معامل صغير، و$\delta u(x)$ هو تغاير $u(x)$:

$$\begin{aligned}\delta u &= \tilde{u}(x,\varepsilon) - u(x)\\ &= \varepsilon\eta(x)\end{aligned}$$

وتكون $\eta(x)$ قابلة للتفاضل مرتين، وسعتها غير محددة، لكنها تحقق $\eta(a) = \eta(b) = 0$. ونلاحظ أن $\tilde{u}$ تطابق u إذا كان $\varepsilon = 0$.

10 نلاحظ ما يأتي:

- الشرط الضروري لجعل قيمة قصوى أو دنيا في حساب التفاضل هو انعدام المشتقة الأولى، وفي حساب التغايرات انعدام التغاير الأول.
- ناتج التطرف متغير منفرد x في حساب التفاضل، ودالة $u(x)$ في حساب التغايرات.

11 يماثل مؤثر التغاير δ المؤثر δ المرتبط لاحقاً بالإزاحة الافتراضية.

12 يمكن بيان أن مؤثري التغاير والاشتقاق تبادليان:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\\ \delta u' &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\end{aligned}\right\} \frac{d}{dx}(\delta u) = \delta\left(\frac{du}{dx}\right)$$

13 يمكن استعمال مؤثر التغاير δ ومؤثر حساب التفاضل d بطريقة متشابهة، أي

$$\delta(u')^2 = 2u'\delta u'$$
$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v$$
$$\delta\left(\int u dx\right) = \int (\delta u) dx$$
$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y$$

لكن معناهما مختلف بوضوح؛ إذ يرتبط du بنقطة مجاورة تبعد dx، أما δu فهو تغير اعتباطي صغير في الدالة u عند x معطاة، ولا يقابله δx.

14 عند الحدود التي تُحدد عليها u يجب أن يكون تغايرها صفراً، ويكون اعتباطياً في غيرها. ويقال إن تغاير u، أي δu، يخضع لتغير افتراضي.

46.2.2 الصيغة التفاضلية لـ $\delta\Pi$

15 نحوّل الصياغة التغايرية ($\delta\Pi = 0$) إلى صياغة تفاضلية $\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ ونستعمل حساب التفاضل الأساسي.

16 نعرّف $\Phi(\varepsilon)$ كما يأتي

$$\Phi(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \Pi(u + \varepsilon\eta(x)) = \int_a^b F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))dx \tag{46.3}$$

وسيشار إلى ذلك بوصفه *الصيغة الضعيفة* (“ضعيفة” لأنها تحتاج مشتقة من رتبة أقل).

17 بما أن $\tilde{u}(x) \to u(x)$ عندما $\varepsilon \to 0$، فإن الشرط الضروري لتطرف Π هو

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

18 من المعادلة 46.2، $\tilde{u} = u + \varepsilon\eta$ و$\tilde{u}(x)' = u'(x) + \varepsilon\eta'(x)$، وبتطبيق قاعدة السلسلة

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}}\frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'}\frac{d\tilde{u}'}{d\varepsilon}\right)dx = \int_a^b \left(\eta\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} + \eta'\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'}\right)dx$$

وعند $\varepsilon = 0$ يكون $\tilde{u} = u$، ومن ثم

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\eta\frac{\partial F}{\partial u} + \eta'\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx = 0 \tag{46.4}$$

19 يقود التكامل بالأجزاء ($\int fg'dx = fg - \int f'gdx$) للحد الثاني إلى

$$\int_a^b \left(\eta'\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx = \eta\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b - \int_a^b \eta(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

20 بالتعويض نحصل على

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I}\ (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II}\ (x=a,b)} = 0 \tag{46.5}$$

21 يجب أن يساوي كل حد صفراً.

1. يعطي الجزء الأول معادلة *أويلر*.
2. يتيح الجزء الثاني تعريف *الشروط الحدية*.

46.2.3 معادلة أويلر

22 تنص اللمة الأساسية لحساب التغايرات على أنه إذا كانت $\Psi(x)$ متصلة في $a \le x \le b$، وكانت $\eta(x)$ دالة متصلة اعتباطية تنعدم عند a وb، فإن

$$\int_a^b \eta(x)\Psi(x)dx = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = 0$$

ومن ثم يعطي الجزء I من المعادلة 46.5 الصيغة القوية:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{في} a < x < b \tag{46.6}$$

23 تُسمى هذه المعادلة التفاضلية معادلة *أويلر–لاغرانج* المرتبطة بـΠ، وهي شرط ضروري لكي تجعل $u(x)$ الدالية Π قصوى أو دنيا.

24 نلاحظ أن الصيغة الضعيفة بدلالة u' (المعادلة 46.3)، والصيغة القوية بدلالة u'' (المعادلة 46.6).

25 يمكن تعميم المعادلة السابقة لدالية Π تعتمد متغيري حقل $u = u(x,y)$ و$v = v(x,y)$:

$$\Pi = \iint F(x,y,u,v,u_{,x},u_{,y},v_{,x},v_{,y},\cdots,v_{,yy})dxdy \tag{46.7}$$

ويكون عدد معادلات أويلر مساوياً لعدد متغيرات الحقل التابعة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,yy}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,yy}} = 0 \end{cases} \tag{46.8}$$

26 نلاحظ أن الدالية ومعادلات أويلر المقابلة، أي المعادلتين 46.1 و46.6 أو المعادلتين 46.7 و46.8، تصفان المسألة نفسها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

27 تقابل معادلات أويلر عادة المعادلة التفاضلية الحاكمة، ويشار إليها بالصيغة القوية (أو الكلاسيكية).

28 ويشار إلى الدالية بالصيغة الضعيفة (أو الحل المعمم).

29 في الميكانيكا يُفرض الاتزان بمعنى متوسط على الجسم؛ ويُشتق متغير الحقل m مرات في الصيغة الضعيفة و$2m$ مرات في الصيغة القوية، كما في المعادلة 46.3 مقابل المعادلة 46.6.

30 يمكن بيان أن معادلات أويلر هي معادلات الاتزان في مبدأ الإزاحات الافتراضية، بينما تكون معادلات التوافق في مبدأ القوى الافتراضية.

31 معادلات أويلر معادلات تفاضلية لا يمكن حلها دائماً بطرائق دقيقة. ويتمثل البديل في تجاوزها والانتقال مباشرة من العبارة التغايرية للمسألة إلى حلها.

32 سنبين أن صياغة العناصر المحددة تقوم على الصيغة الضعيفة، بينما تقوم صياغة الفروق المحددة على الصيغة القوية.

46.2.4 $\delta\Pi$

33 بيّنا في القسم السابق أن $d\Phi(\varepsilon)/d\varepsilon$ يقود إلى معادلة *أويلر–لاغرانج* (المعادلة 46.5):

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\mathrm{I}\ (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\mathrm{II}\ (x=a,b)} = 0$$

ويبقى تعريف $\delta\Pi$.

34 التغاير الأول لتعبير دالي هو

$$\left.\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \\ \delta\Pi &= \int_a^b \delta F\,dx\end{aligned}\right\} \delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'\delta u'}\right)dx \tag{46.9}$$

يعطي التكامل بالأجزاء (المعادلة R.3) للحد الثاني، كما في المعادلة 46.4:

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta u\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx \tag{46.10}$$

46.2.5 ملاحظات

35 بيّنا أن إيجاد القيمة المستقرة لـΠ بوضع $\delta\Pi = 0$ يكافئ إيجاد قيمتها المتطرفة بوضع $\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ مساوياً للصفر.

36 وبالمثل يمكن بيان أن التغاير الثاني $\delta^2\Pi$، كالمشتقة الثانية في حساب التفاضل، يميز التطرف بوصفه قيمة صغرى أو كبرى.

37 ومن الملاحظات المهمة أن الصياغة التغايرية قياسية، بينما صياغة أويلر متجهية.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

46.2.6 الشروط الحدية

38 بالرجوع إلى الجزء الثاني من المعادلة 46.5،

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\mathrm{I}\,(x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\mathrm{II}\,(x=a,b)} = 0$$

يمكن تعريف الشروط الحدية، الشكل 46.1.

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{أساسي}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{طبيعي}}}_{\text{الشروط الحدية}} = 0 \tag{46.11}$$

ويمكن تحقيق ذلك بالتوليفات الآتية:

$\eta(a)=0$	و	$\eta(b)=0$	أساسي	Γ_u
$\eta(a)=0$	و	$\frac{\partial F}{\partial u'}(b)=0$	مختلط	$\Gamma_u \cup \Gamma_t$
$\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0$	و	$\eta(b)=0$	مختلط	$\Gamma_u \cup \Gamma_t$
$\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0$	و	$\frac{\partial F}{\partial u'}(b)=0$	طبيعي	Γ_t

39 بصورة عامة، لمسألة ذات متغير حقل واحد وأعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية الحاكمة من الرتبة $2m$ (أو الرتبة m في الدالية المقابلة)، يكون لدينا، الشكل 46.2:

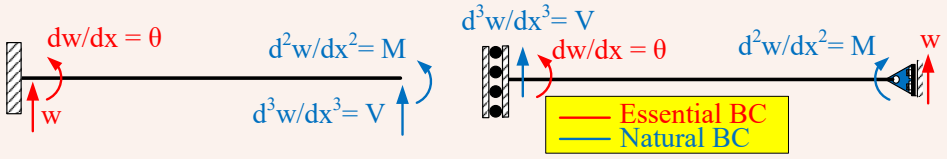
الشروط الأساسية (أو المفروضة أو الهندسية)، لأن تحققها أساسي لاشتقاق معادلة أويلر، وذلك إذا كان $\eta(a)$ أو $\eta(b)=0$. وتشمل مشتقات الرتب من صفر (متغير الحقل نفسه) إلى $m-1$. وتقابل رياضياً مسائل ديريشليه للقيم الحدية.

الشروط الطبيعية (أو الاستاتيكية)، فإذا تُركت η اعتباطية لزم أن تكون $\frac{\partial F}{\partial u'}=0$ عند $x=a$ أو b. وتشمل مشتقات الرتبة m فما فوق. ويُفهم هذا الشرط من تحقق العبارة التغايرية من دون وروده صراحة في الدالية. ويقابل رياضياً مسائل نيومان للقيم الحدية.

مسائل القيم الحدية المختلطة هي التي تحدد فيها الشروط الأساسية والطبيعية على أجزاء متكاملة من الحد مثل Γ_u وΓ_t.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المسألة	عضو محوري حمل موزع	عضو انحنائي حمل موزع
المعادلة التفاضلية	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
الشروط الأساسية $[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
الشروط الطبيعية $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ أو $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^3w}{dx^3}$ و $\frac{d^2w}{dx^2}$ أو $M = EIw_{,xx}$ و $V = EIw_{,xxx}$



شكل 46.2: أمثلة على الشروط الحدية الأساسية والطبيعية

46.2.6.1 مثال 46.1: أويلر: عضو محوري

تُعطى الطاقة الكامنة Π لعضو محوري (L وE وA) مثبت عند طرفه الأيسر وتؤثر فيه قوة محورية P عند الطرف الأيمن بالعلاقة

$$\Pi = \underbrace{\int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{\text{طاقة الانفعال}} \underbrace{-Pu(L)}_{\text{الشغل}}$$

أوجد معادلة أويلر باشتراط أن تكون Π قيمة صغرى.

الحل I

نتبع الإجراء المستخدم في اشتقاق معادلات أويلر؛ فيكون التغاير الأول لـΠ:

$$\delta\Pi = \int_0^L \underbrace{\frac{EA}{2}2\left(\frac{du}{dx}\right)}_{a} \underbrace{\delta\left(\frac{du}{dx}\right)}_{b'} dx - P\delta u(L)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بالتكامل بالأجزاء (المعادلة R.3):

$$\delta\Pi = + \underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{a}\underbrace{\delta u}_{b}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{a'}\underbrace{\delta u}_{b}\,dx - P\delta u(L) = 0$$

$$= -\int_0^L \delta u \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{\text{معادلة أويلر}}dx + \underbrace{\left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} - P\right]}_{\text{الشرط الحدي}}\delta u(L)$$

$$\underbrace{-\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\underbrace{\delta u(0)}_{0}}_{0}$$

نتذكر أن δ مؤثر اعتباطي يمكن إسناد أي قيمة إليه؛ لذا نضع معاملات δu داخل $(0, L)$ وعند $x = L$ مساوية للصفر كل على حدة، فنحصل على:

- معادلة أويلر:

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad 0 < x < L$$

نلاحظ أن الدالية بدلالة u'، بينما معادلة أويلر بدلالة u''.

- الشرط الحدي الطبيعي:

$$EA\frac{du}{dx} - P = 0 \quad \text{عند} x = L$$

الحل II

نستعمل نتائج الاشتقاق السابق (المعادلة 46.6): لقد اشتققنا:

$$F(x, u, u') = \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

(نلاحظ أن P حمل مطبق عند نهاية العضو، لذلك لا يظهر جزءاً من $F(x, u, u')$). نحدد بعد ذلك معادلة أويلر من المعادلة 46.6:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx}(EAu') = -EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \text{ معادلة أويلر}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وأخيراً تُستخرج الشروط الحدية من المعادلة 46.11:

$$\underbrace{\eta(x)}_{\text{أساسي}} \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_a^b}_{\text{طبيعي}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = EAu'$$

$$EA\frac{du}{dx} = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

46.2.6.2 مثال 46.2: أويلر: الانحناء

تُعطى الطاقة الكامنة الكلية لكمرة تحمل حملاً منتظماً p بالعلاقة

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right) dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F} dx$$

ونسعى إلى اشتقاق التغاير الأول لـΠ. بتمديد المعادلة 46.9 والتكامل بالأجزاء مرتين (المعادلة R.3):

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w\right) dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w\right] dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{طبيعي}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{أساسي}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{طبيعي}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{أساسي}}}_{\text{الشروط الحدية}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p\right]}_{\text{معادلة أويلر}} \delta w dx = 0
\end{aligned}$$

أو

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{لكل x}$$

وهي المعادلة التفاضلية الحاكمة للكمرات، وتُعطى الشروط الحدية كما يأتي:

طبيعي		أساسي
$EIw'' = -M = 0$	أو	$\delta w' = 0$
$(EIw'')' = -V = 0$	أو	$\delta w = 0$

46.3 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية

40 يُعطى تعبير الطاقة الكامنة الكلية بالعلاقات

$$\begin{aligned}
\Pi &\overset{\text{def}}{=} U - W_e \\
W_e &\overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma + \mathbf{uP} \\
U &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومنها تُستخرج الدالية للصيغة العامة لمبدأ الطاقة الكامنة التغايري:

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega}_{U} \underbrace{- \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma - \mathbf{u}\mathbf{P}}_{-W_e} \tag{46.12}$$

41 تُستخرج العبارة التغايرية بأخذ التغاير الأول لـΠ ووضع هذه الكمية القياسية مساوية للصفر.

42 العبارة التغايرية للصيغة العامة لدالية الطاقة الكامنة، أي المعادلة 46.12، هي

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{46.13}$$

وهذا هو مبدأ *الشغل الافتراضي*.

43 نعيد كتابة علاقات الانفعال–الإزاحة بدلالة **مؤثر تفاضلي خطي** $\mathbf{L}$ (المعادلة O.2.3.2):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

حيث $\mathbf{L}$ مؤثر تفاضلي خطي و$\mathbf{u}$ متجه الإزاحة المعرّف في المعادلة O.7:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

44 لأن المؤثر التفاضلي $\mathbf{L}$ خطي، يمكن التعبير عن تغاير الانفعالات $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ بدلالة تغاير الإزاحات $\delta\mathbf{u}$:

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) = \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \tag{46.14}$$

45 نبحث صيغتين للعبارة التغايرية:

1. **بدلالة الانفعالات:** وهي الأنسب لاشتقاق معادلات أويلر المقابلة،

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega}_{\delta U} \underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0 \tag{46.15}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. بدلالة الإزاحات: باستعمال المعادلة 46.14، وهي الأنسب للتقسيم اللاحق.

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}(\mathbf{Lu})\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega}_{\delta U}$$
$$\underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0$$

46 لاستخراج معادلات أويلر للصيغة العامة لمبدأ الطاقة الكامنة التغايري، يجب تكامل تكاملات الحجم التي تعرّف طاقة الانفعال الافتراضية δU في المعادلة 46.15 بالأجزاء، لتحويل تغاير الانفعالات $\delta(\mathbf{Lu})$ إلى تغاير الإزاحات $\delta\mathbf{u}$.

47 يعطي التكامل بالأجزاء باستعمال مبرهنة غرين (المعادلة R.6):

$$\int_\Omega R\frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial x} S\mathrm{d}\Omega + \oint_\Gamma RSn_x \mathrm{d}\Gamma$$

العلاقات

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Omega \tag{46.16}$$
$$\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Omega$$
$$\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega$$

حيث $\mathbf{G}$ مصفوفة تحويل تحتوي جيوب تمام اتجاه متجه الوحدة العمودي، بحيث تُعرّف شدود السطح $\mathbf{t}$ بالعلاقة $\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$، وتمتد التكاملات السطحية على سطح الجسم الكامل Γ.

48 بالتعويض من المعادلة 46.16 في المعادلة 46.15 تصبح العبارة التغايرية:

$$\delta\Pi = -\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{L}^T \underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}\}\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0$$

49 بما أن $\delta\mathbf{u}$ اعتباطية، يجب أن يساوي التعبيران داخل القوسين في التكاملين صفراً كي تكون $\delta\Pi = 0$. وبملاحظة أن علاقة الإجهاد–الانفعال تظهر في تكاملَي الحجم والسطح، تكون معادلات أويلر:

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{على } \Omega \quad \text{الاتزان} \tag{46.17}$$
$$\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{على } \Gamma_t \quad \text{الشرط الحدي الطبيعي} \tag{46.18}$$

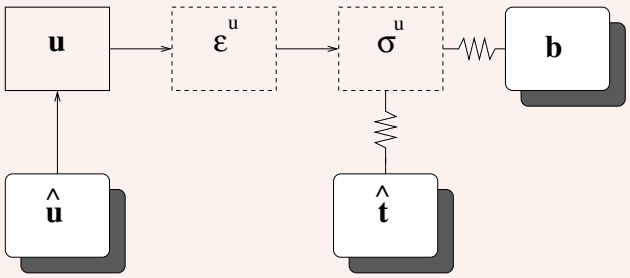
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث معادلة أويلر الأولى هي معادلة الاتزان، وتعرّف الثانية الشروط الحدية الطبيعية. وتُعرّف هذه الشروط على Γ_t لا على Γ لأن شدود السطح المطبقة $\hat{\mathbf{t}}$ وحاصل الضرب $\mathbf{G}\sigma$ يساويان صفراً خارج Γ_t.

50 عموماً، لا تكون سوى صيغ معينة من المعادلات التفاضلية معادلات أويلر لدالية تغايرية.

51 في مسألة الاستاتيكا المرنة يمكن البدء من معادلات أويلر ثم اشتقاق دالية الطاقة الكامنة الكلية بتنفيذ العمليات السابقة بترتيب عكسي.

52 يوضح الشكل 46.3 مخطط تونتي للطاقة الكامنة الكلية. تمثل الخطوط المتصلة الروابط القوية، والرموز الشبيهة بالنوابض الروابط الضعيفة، والصناديق ذات الخطوط المتصلة الحقل المجهول الأساسي، والصناديق المتقطعة الحقول المشتقة داخلياً، والمظللة الحقول المفروضة.



شكل 46.3: مخطط تونتي لطريقة الطاقة الكامنة الكلية

53 يوسّع §47.4.1 هذا العرض.

46.4 هاملتون

46.4.1 الديناميكا؛ أويلر/لاغرانج

46.4.1.1 نظام متقطع

54 إذا اعتبرنا جسيماً منفرداً كتلته m يتحرك تحت تأثير قوة $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$، فيجب أن يحقق المسار $\mathbf{r}(t)$ الذي يتبعه الجسيم قانون نيوتن الثاني للحركة:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

55 يُعبّر عن مسار يختلف عن المسار الفعلي بالشكل $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$، حيث $\delta\mathbf{r}$ تغاير المسار عند زمن ثابت t. ونفترض اختلاف المسارين إلا عند زمنين متميزين t_1 وt_2، أي $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$.

56 بأخذ الضرب القياسي للمعادلة السابقة في التغاير $\mathbf{r}$ والتكامل زمنياً بين t_1 وt_2 نحصل على

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\delta\mathbf{r}\,dt = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويعطي تكامل الحد الأول بالأجزاء (المعادلة R.3):

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r}\right)dt+\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{46.19}$$

ينعدم الحد الثاني لأن $\delta\mathbf{R}(t_1)=\delta\mathbf{r}(t_2)=0$. ونلاحظ أيضاً أن

$$\delta K\overset{\text{def}}{=}m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}=\delta\left[\frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$$

ومن ثم تصبح المعادلة 46.19:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K+\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r})dt=0 \tag{46.20}$$

وهذه هي بدقة *الصيغة العامة لمبدأ هاملتون* لجسيم منفرد.

57 إذا كانت القوة $\mathbf{F}$ محافظة، أي إن مجموع طاقتيها الكامنة والحركية ثابت، أمكن استبدالها بتدرج طاقة كامنة (مبرهنة كاستيليانو الأولى):

$$\mathbf{F}=-\nabla\Pi$$

حيث $\mathcal{W}=\mathcal{W}(\mathbf{r})$ طاقة الجسيم الكامنة. وعندئذ يمكن إعادة كتابة المعادلة 46.20 بالشكل

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(K-\Pi)dt=0 \tag{46.21}$$

لأن

$$\nabla\Pi\cdot\delta\mathbf{r}=\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial\Pi}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial\Pi}{\partial x_3}\delta x_3=\delta\Pi(x_1,x_2,x_3)$$

58 يُسمى الفرق بين طاقتي الحركة والكامنة دالة *لاغرانج* :

$$\mathcal{L}\overset{\text{def}}{=}K-\Pi$$

والمعادلة 46.21 هي مبدأ هاملتون للحركة المحافظة لجسيم.

تعريف 46.1: مبدأ هاملتون

تكون حركة جسيم تؤثر فيه قوى محافظة بين لحظتين اعتباطيتين t_1 وt_2 بحيث يصبح التكامل الخطي لدالة لاغرانج متطرفاً بالنسبة إلى مسار الحركة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

59 وبعبارة أخرى: من بين جميع *المسارات الممكنة التي يستطيع الجسيم سلوكها* من موضعه عند t_1 إلى موضعه عند t_2، يكون مساره الفعلي هو الذي يجعل

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

قيمة متطرفة.

60 إذا أمكن تعريف المسار بدلالة الإحداثيات المعممة [1] q_i، حيث $i = 1, 2, 3$، فإن

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \mathrm{d}t = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t\end{aligned}$$

ويمكن اشتقاق الحد بين القوسين المربعين بسهولة بإجراء مماثل لما في §46.2.4.

61 إذا كانت جميع q_i مستقلة خطياً، أي لا قيود بينها، فإن التغايرات δq_i مستقلة عن t عدا انعدامها عند t_1 وt_2. لذلك تنعدم معاملات δq_1 وδq_2 وδq_3 كل على حدة، فنحصل على معادلات *لاغرانج للحركة*، المعروفة أيضاً باسم معادلات *أويلر–لاغرانج*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

وهي مماثلة بالطبع للمعادلة 46.6.

62 للقوى غير المحافظة يُرجع إلى (Reddy, 2017, pg. 148).

46.4.1.2 نظام متصل

63 باتباع الإجراء نفسه تقريباً الذي طُوّر للأنظمة المتقطعة، يمكن تطوير مبدأ هاملتون لديناميكا الأجسام القابلة للتشوه. ومع أن قانون نيوتن الثاني يبقى مطبقاً، فإن قابلية الجسم للتشوه تستلزم معادلة مادية.

64 نبدأ من

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

ويتغير المسار الفعلي $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ لجسيم مادي عند الموضع $\mathbf{x}$ بما يتسق مع الشرط الحدي الحركي (الأساسي) إلى $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$، حيث $\delta\mathbf{u}$ هو التغاير المقبول أو الإزاحة الافتراضية للمسار.

65 كما سبق، نفترض اختلاف المسار المتغاير عن الفعلي عدا عند t_1 وt_2. ومن ثم يحقق التغاير المقبول $\delta\mathbf{u}$ الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= 0 \qquad \text{على} \qquad \Gamma_u \text{ لكل } t \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) &= \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) \qquad \text{لكل} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{46.22}$$

[1] الإحداثيات المعممة مجموعة معاملات تمثل حالة النظام في فضاء التكوين، ويجب أن تحدد تكوينه تحديداً فريداً بالنسبة إلى حالة مرجعية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث Γ_u جزء سطح الجسم الذي يُحدد عليه متجه الإزاحة $\mathbf{u}$.

66 الشغل المبذول على الجسم عند الزمن t بواسطة القوة المحصلة خلال الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{u}$ هو

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega$$

حيث $\mathbf{b}$ متجه قوة الجسم، و$\mathbf{t}$ الشد المحدد، و$\boldsymbol{\sigma}$ و$\boldsymbol{\varepsilon}$ موترًا الإجهاد والانفعال. ويمثل الحد الأخير الشغل الافتراضي للقوى الداخلية المخزنة في الجسم، ولذلك إشارته سالبة.

67 الشغل المبذول بواسطة قوة العطالة $m\mathbf{a}$ خلال الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{u}$ هو

$$\int_{\Omega} \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega$$

حيث ρ كثافة الكتلة.

68 ومن ثم نكتب

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{\Omega}\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega - \left(\int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega + \int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma - \int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega\right)\right]dt = 0\\
&\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{\Omega}\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial t}d\Omega - \left(\int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega + \int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma - \int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega\right)\right]dt = 0
\end{aligned} \tag{46.23}$$

استُخرج الحد الأول في التعبير الثاني بالتكامل بالأجزاء، وتنعدم الحدود المتكاملة بسبب الشرطين الابتدائي والنهائي في المعادلة 46.22.

69 المعادلة 46.23 هي الصيغة العامة لمبدأ هاملتون لوسط متصل، سواء كان محافظاً ومرناً أم لا.

70 ويُعرّف جهد الشغل الخارجي بدوره كما في المعادلة 47.6:

$$\delta\mathcal{W}_e = -\int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}d\Omega - \int_{\Gamma_t}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma$$

71 وبما أن $\Pi = U + \mathcal{W}_e$ هي الطاقة الكامنة الكلية، فإن استعمال المعادلة 47.6 لجسم ساكن يختزل مبدأ هاملتون إلى مبدأ الإزاحات الافتراضية. ولأن $\mathbf{b}$ و$\mathbf{t}$ محافظتان في جسم مرن مثالي، توجد طاقة انفعال U_0 تحقق

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \text{حيث} U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$$

(بتطبيق المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{و} F'(x) = f(x)$$

على المعادلة 47.3).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

72 بالتعويض بهذه المعادلة في المعادلة 46.23 نحصل على

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (\mathcal{W}_e + U)]\, dt = 0 \tag{46.24}$$

حيث K وU طاقتا الحركة والانفعال:

$$K = \int_\Omega \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\partial t} d\Omega, \qquad U = \int_\Omega U_0 d\Omega$$

73 تمثل المعادلة 46.24 مبدأ هاملتون لجسم مرن، خطياً كان أو غير خطي.

74 لأن $\Pi = U + \mathcal{W}_e$ هي الطاقة الكامنة الكلية، فإن مبدأ هاملتون لجسم ساكن، أي تطبق عليه القوى ببطء كاف لإهمال اعتماد الحركة على الزمن وقوى العطالة، يختزل إلى مبدأ الإزاحة الافتراضية.

75 يمكن استخراج معادلات أويلر–لاغرانج المرتبطة بلاغرانجيان $L = K - \Pi$ من المعادلة 46.24:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(u_i, \dot{u}_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t} - \widehat{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \right] dt \end{aligned}$$

حيث $\widehat{\mathbf{t}}$ شد السطح المحدد على Γ_t. وتُستخرج المعادلة الأخيرة من 46.24 بالتكامل بالأجزاء ومبرهنات التدرج والمعادلة 46.22.

76 بما أن $\delta \mathbf{u}$ اعتباطية عندما $t_1 < t < t_2$ ولـ$\mathbf{x}$ داخل Ω وعلى Γ_t، ينتج

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad &\text{في} \quad \Omega \\ t - \widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad &\text{على} \quad \Gamma_t \end{aligned}$$

وهذه معادلات أويلر–لاغرانج لجسم مرن.

46.4.2 مثال 46.3: هاملتون

لقضيب منتظم المقطع طوله L ومساحته A ومعامل يونغ له E وكثافته ρ، مثبت عند طرف ومتصل بمسند صلب عند الطرف الآخر بنابض صلابته k:



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نهتم بتحديد الحركة الدورية التي تأخذ الصورة

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

حيث ω تردد الاهتزاز الطبيعي، و$u_0(x)$ السعة. تُعطى طاقتا الحركة والانفعال بالعلاقتين

$$K = \int_\Omega \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{\rho A}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$U = \int_\Omega \frac{E}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{k}{2}[u(L)]^2$$

في غياب جهد للشغل الخارجي، تعطي المعادلة 46.24 مع $\mathcal{W} = 0$:

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta\int_{t_1}^{t_2}(K - \Pi)dt \\ &= \frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - k[u(L)]^2\right\}\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

نفترض

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

حيث ω تردد الاهتزاز الطبيعي و$u_0(x)$ السعة، ونعوض لنحصل على

$$\delta\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2[u_0(x)]^2 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} = 0$$

حيث أُخرج العامل غير الصفري $\int_{t_1}^{t_2}\exp^{2i\omega t}\,\mathrm{d}t$. وبدلاً من استعمال الصيغة المشتقة سابقاً، نعيد اشتقاق معادلة أويلر المقابلة:

$$\delta\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2(u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} =$$

$$\int_0^L\left[\rho A\omega^2 u_0\delta u_0 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

بالتكامل بالأجزاء (المعادلة R.3):

$$\int_0^L \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta u_0}_{v}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u'}\underbrace{\delta u_0}_{v}\mathrm{d}x$$

وبالتعويض:

$$\begin{aligned}&\int_0^L\left[\rho A\omega^2[u_0(x)] - EA\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L) \\ &= \int_0^L \rho A\omega[u_0(x)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\underbrace{- EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)\delta u_0\Big|_0^L}_{0} - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)+\rho A\omega^2 u_0=0 \quad \text{عندما} \quad 0<x<L$$

$$\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}+ku_0\right)=0 \quad \text{عندما} \quad x=L$$

بالتعويض بـ $\overline{x}=\frac{x}{L}$ و $\mathrm{d}x=L\mathrm{d}\overline{x}$ و $\overline{u}=\frac{u_0}{L}$ و $\alpha=\frac{kL}{EA}$ و $\lambda=\frac{\omega^2\rho L^2}{E}$، يكون

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2(u_0)^2-EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\\
&=\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda EA}{L^2}(L\overline{u})^2-EA\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]L\mathrm{d}\overline{x}-\frac{k}{2}\left[L\overline{u}_0(1)\right]^2\\
&=\int_0^1 \frac{1}{2}EAL\left[\lambda(\overline{u})^2-\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\frac{kL^2}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\\
&=\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1\left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\\
&\Rightarrow \delta\left[\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1\left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\right]=0\\
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left[\lambda(\overline{u})^2-\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\frac{\alpha}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}=0
\end{aligned}$$

باستعمال طريقة رايلي–ريتز مع

$$u=c_1x+c_2x^2$$

وإعادة كتابة المعادلة السابقة بدلالة u:

$$\begin{aligned}
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left[\lambda(u)^2-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{2}\left[u(1)\right]^2\right\}=0\\
&\int_0^1\left[\lambda(c_1x+c_2x^2)(\delta c_1x+\delta c_2x^2)-(c_1+2c_2x)(\delta c_1+2\delta c_2x)\right]\mathrm{d}x\\
&-(c_1+c_2)(\delta c_1+\delta c-2)=0
\end{aligned}$$

بجمع معاملات δc_1 وδc_2 ووضع كل منها مساوياً للصفر، نحصل على

$$\delta c_1:\int_0^1\left[\lambda(c_1x+c_2x^2)x-(c_1+2c_2x)\right]\mathrm{d}x-(c_1+c_2)=0$$

$$\delta c_2:\int_0^1\left[\lambda(c_1x+c_2x^2)x^2-(c_1+2c_2x)2x\right]\mathrm{d}x-(c_1+c_2)=0$$

وبالتكامل والاختزال:

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & \frac{7}{3}\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يوجد حل غير تافه إذا وفقط إذا

$$\begin{vmatrix} 2-\frac{\lambda}{3} & 2-\frac{\lambda}{4} \\ 2-\frac{\lambda}{4} & \frac{7}{3}-\frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = 0$$

أو

$$15\lambda^2 - 640\lambda + 2400 = 0$$

ولهذه المعادلة التربيعية جذران:

$$\lambda_1 = 4.1545 \qquad \lambda_2 = 38.512$$

يقابلان

$$\omega_1 = \frac{2.038}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{6.206}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

بينما يُعطى الحل الدقيق بالعلاقة

$$\lambda + \tan\lambda = 0$$

وأول جذريه هما

$$\omega_1 = \frac{2.02875}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{4.91318}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

46.5 مبدأ هو–واشيزو التغايري العام

القسم الآتي منقول من Reich, 1993 *“On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams”*.

77 المبدأ التغايري متعدد *الحقول* هو الذي يضم أكثر من حقل رئيس أو متغير حالة؛ أي إن أكثر من حقل مجهول يخضع لتغايرات مستقلة.

78 في الاستاتيكا المرنة الخطية يمكن أن تكون الإزاحة $\mathbf{u}$ أو الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$ أو الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$ حقولاً رئيسة محتملة. لذلك توجد سبع توليفات، (Felippa, 2000)، كما في الجدول 46.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاسم	σ	ε	$\mathbf{u}$
حقل واحد			
الطاقة الكامنة الكلية			نعم
الطاقة الكامنة المتممة الكلية	نعم		
بلا اسم		نعم	
حقلان			
هيلنغر–رايسنر	نعم		نعم
دي فوبك		نعم	نعم
بلا اسم	نعم	نعم	
ثلاثة حقول			
هو–واشيزو	نعم	نعم	نعم

جدول 46.1: الدواليات في المرونة الخطية

79 مبدأ هو–واشيزو التغايري مبدأ ثلاثي الحقول، تُعامل فيه *الإزاحات والانفعالات والإجهادات* بوصفها حقولاً *مستقلة*، بخلاف الإزاحة وحدها في مبدأ الطاقة الكامنة الكلية.

80 تظهر متغيرات الحقل الإضافية لا في الدالية وحدها بل في نظام المعادلات المتقطع أيضاً. لذلك يكون النظام المشتق من مبدأ هو–واشيزو أكبر بكثير من نظيره المشتق من مبدأ الطاقة الكامنة الكلية للمجال والتقسيم نفسيهما.

81 مقابل زيادة عدد المعادلات، يمكن تحقيق تحسن مهم في دقة الحل المتقطع. وهذا يعني إمكان استعمال تقسيمات خشنة مع صيغة هو–واشيزو للحصول على دقة تماثل ما يتطلب تقسيمات أدق بكثير في مبدأ الطاقة الكامنة الكلية.

82 تُشتق دالية هو–واشيزو من دالية الطاقة الكامنة الكلية بفرض معادلة الانفعال–الإزاحة قيداً فرعياً منتهياً باستعمال طريقة مضاعفات لاغرانج.

83 يُكتب القيد في صيغة الباقي:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \tag{46.25}$$

ويُفرض بمعنى متوسط على الجسم الكامل Ω.

84 يؤدي فرض معادلة الانفعال–الإزاحة قيداً إلى انفعالات وإجهادات متصلة من الرتبة C^0 في الصيغة المتقطعة، بخلاف الانفعالات والإجهادات غير المتصلة في الصيغة المتقطعة لمبدأ الطاقة الكامنة الكلية.

85 تُكتب الدالية المقيدة بالشكل

$$\Pi_{HW} = \Pi_{\mathrm{TPE}} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^{T} \left(\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{46.26}$$

حيث $\boldsymbol{\lambda}$ مضاعف لاغرانج. وللاتساق مع تكاملات دالية الطاقة الكامنة الكلية في المعادلة 46.12، يجب أن تكون وحداته وحدات إجهاد. لذلك يُستعمل σ بدلاً من $\boldsymbol{\lambda}$ لإظهار معناه الفيزيائي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

86 ومن ثم تصبح دالية مبدأ هو–واشيزو:

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} \;=\; &\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega}_{U} \\ &\underbrace{-\int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma}_{-W_e} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T\left(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}\right)\mathrm{d}\Omega}_{\text{القيد}}\end{aligned} \tag{46.27}$$

87 تُستخرج العبارة التغايرية بأخذ التغاير الأول للدالية ووضعه مساوياً للصفر.

88 التغاير الأول لدالية هو–واشيزو، مع ترتيب الحدود بحسب متغير الحقل المتغاير، هو

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HW} \;=\; &\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ &+\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \\ &+\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T\left(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}\right)\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{46.28}$$

نلاحظ أن الحدين الرابع والسابع أضيفا ويلغي أحدهما الآخر.

89 بما أن $\mathbf{u}$ و$\boldsymbol{\epsilon}$ و$\boldsymbol{\sigma}$ متغيرات حقل مستقلة، يجب أن يكون مجموع الحدود التي تتضمن تغاير كل منها صفراً على حدة. لذلك تُجمع في ثلاث عبارات تغايرية منفصلة، على غرار فصل المتغيرات في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{46.29}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}]\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{46.30}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon})\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{46.31}$$

90 لاستخراج معادلات أويلر المقابلة للصيغة العامة لمبدأ هو–واشيزو، يجب تكامل تكامل الحجم في المعادلة 46.29 الذي يحتوي تغاير الانفعالات $\delta(\mathbf{Lu})$ بالأجزاء باستعمال مبرهنة غرين (المعادلة R.2.6)، للحصول على عبارة بدلالة تغاير الإزاحات $\delta\mathbf{u}$.

91 يعطي التكامل بالأجزاء (المعادلة R.3):

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \tag{46.32}$$

حيث $\mathbf{G}$ مصفوفة تحويل تحوي جيوب تمام اتجاه متجه الوحدة العمودي، بحيث $\mathbf{t}=\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$، ويمتد التكامل السطحي على سطح الجسم الكامل Γ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

92 بالتعويض من المعادلة 46.32 في المعادلة 46.29 تصبح العبارة التغايرية الأولى:

$$-\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}-\hat{\mathbf{t}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{46.33}$$

وبما أن $\delta\mathbf{u}$ اعتباطية، يجب أن يساوي التعبيران داخل القوسين صفراً. وبالمثل، لأن $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ و$\delta\boldsymbol{\sigma}$ اعتباطيتان، يجب أن تتعدم التعبيرات المقابلة في المعادلتين 46.30 و46.31.

93 معادلات أويلر لدالية هو–واشيزو هي

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \text{على } \Omega \qquad \text{الاتزان} \tag{46.34}$$

$$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0} \quad \text{على } \Omega \qquad \text{الإجهاد–الانفعال} \tag{46.35}$$

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0} \quad \text{على } \Omega \qquad \text{الانفعال–الإزاحة} \tag{46.36}$$

$$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}-\hat{\mathbf{t}}=\mathbf{0} \quad \text{على } \Gamma_t \qquad \text{الشرط الحدي الطبيعي} \tag{46.37}$$

المعادلة الأولى هي الاتزان، والثانية علاقة الإجهاد–الانفعال، والثالثة علاقة الانفعال–الإزاحة، والرابعة تعرّف الشروط الحدية الطبيعية.

94 تُعرّف الشروط الطبيعية على Γ_t لا Γ لأن $\hat{\mathbf{t}}$ و$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ يساويان صفراً خارج Γ_t. ويمكن اشتقاق دالية هو–واشيزو من معادلات أويلر بإجراء العمليات السابقة بترتيب عكسي.

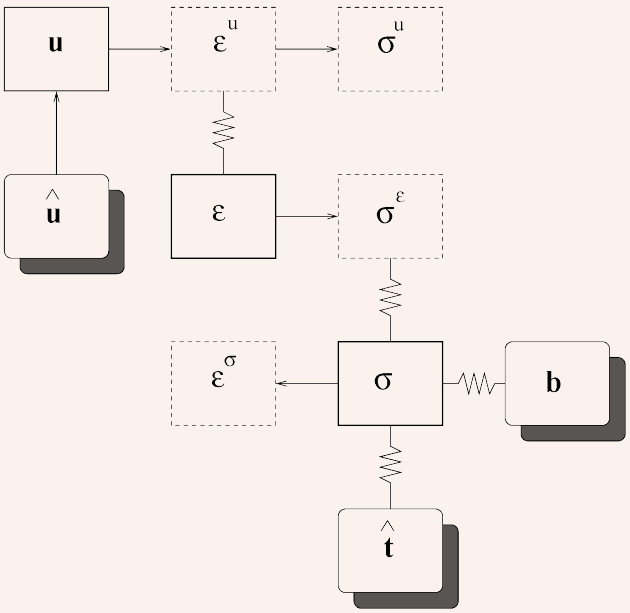
95 ينبغي مقارنة مجموعة معادلات أويلر الأربع هذه بالمعادلتين 46.17 و46.18 الناتجتين من الطاقة الكامنة الكلية. تدخل المعادلتان الإضافيتان علاقتي الإجهاد–الانفعال والانفعال–الإزاحة. وبينما تعتمد الصياغة الأصلية (المعادلتان 46.17 و46.18) الإزاحة $\mathbf{u}$ وحدها، تعتمد صياغة هو–واشيزو ثلاثة متغيرات مستقلة $\mathbf{u}$ و$\boldsymbol{\sigma}$ و$\boldsymbol{\varepsilon}$، الجدول 46.2.

			TPE	HW
معادلات أويلر				
الاتزان	$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$	Ω	نعم	نعم
الإجهاد–الانفعال	$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$	Ω	لا	نعم
الانفعال–الإزاحة	$\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0}$	Ω	لا	نعم
الشرط الحدي الطبيعي	$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}-\hat{\mathbf{t}}=\mathbf{0}$	Γ_t	نعم	نعم
المتغيرات				
الإزاحة		$\mathbf{u}$	نعم	نعم
الانفعال		$\boldsymbol{\varepsilon}$	لا	نعم
الإجهاد		$\boldsymbol{\sigma}$	لا	نعم

جدول 46.2: مقارنة بين صياغتَي الطاقة الكامنة الكلية وهو–واشيزو

96 يوضح الشكل 46.4 مخطط تونتي (القسم O.8) لمبدأ هو–واشيزو التغايري.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 46.4: مخطط تونتي لهو–واشيزو، (Červenka, 1994)

46.6 مخططات “شبه تونتي”

46.6.1 مبدأ دالمبير

97 مبدأ دالمبير إعادة صياغة لقانون نيوتن الثاني، تدخل قوى العطالة وتحول النظام الديناميكي إلى صورة اتزانٍ شبه استاتيكية. وهو جسر بين الميكانيكا النيوتنية واللاغرانجية، إذ يعبر عن معادلات الحركة بوصفها اتزاناً بين القوى المطبقة وردود أفعال العطالة.

98 يضع مخطط تونتي لمبدأ دالمبير، الشكل 46.5c، هذا المبدأ عقدة مركزية تصل قوانين نيوتن بالشغل الافتراضي ومعادلات لاغرانج، وتوضح تطور الأنظمة الميكانيكية عبر الإحداثيات المعممة. ويضم أيضاً القوى المعممة وقوى العطالة (ma) وطاقة الحركة (T) والطاقة الكامنة (V)، مبيناً اندماجه في صيغ الميكانيكا القائمة على القوة والطاقة.

46.6.2 معادلات هاملتون

99 تنشأ معادلات هاملتون من تحويل لوجاندر لمعادلات لاغرانج، فتنقل الميكانيكا من صياغة قائمة على التكوين إلى تمثيل فضاء الطور.

100 يربط مخطط تونتي لمعادلات هاملتون، الشكل 46.5b، قوانين نيوتن ومبدأ دالمبير ومعادلات لاغرانج بالإحداثيات المعممة q والسرعات المعممة $\dot{q}$ والعزوم المعممة p. كما يربط دالة هاملتون H، التي تمثل الطاقة الكلية، بتعبيرات طاقتي الحركة والكامنة. وتبرز هذه البنية قوة ميكانيكا هاملتون في الديناميكا الكلاسيكية وتطبيقها المباشر في التحويلات القانونية والهندسة السمبلكتية وميكانيكا الكم.

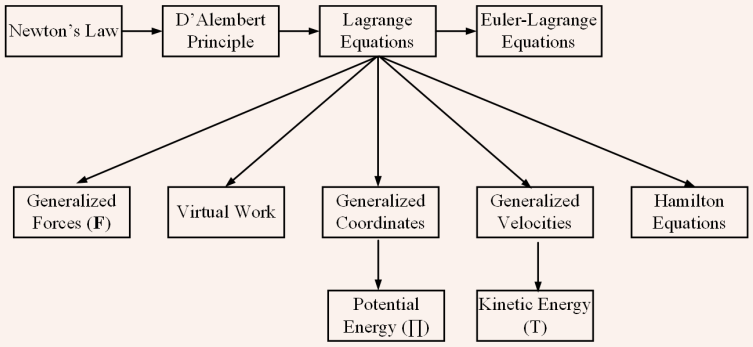
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

46.6.3 معادلات لاغرانج

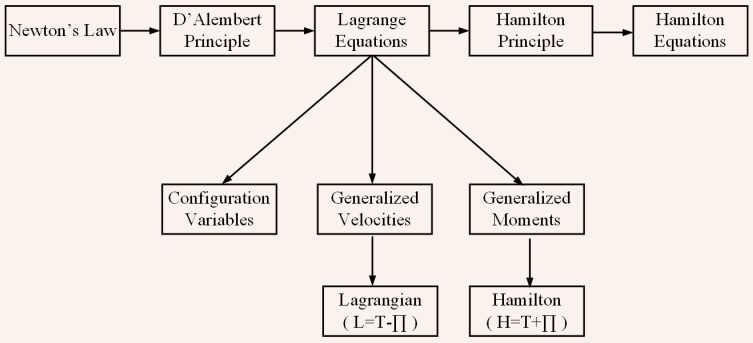
101 تشكل معادلات لاغرانج أساس الميكانيكا التغايرية، وتقدم صياغة أنيقة تعبر عن الديناميكا بدلالة الإحداثيات المعممة q والسرعات $\dot{q}$ وحدها.

102 يربط مخطط تونتي لمعادلات لاغرانج، الشكل 46.5a، هذه المعادلات بالميكانيكا النيوتنية عبر مبدأ دالمبير، وبالشغل الافتراضي وطرائق الطاقة. كما يصلها بمعادلات هاملتون عبر تحويل لوجاندر، وبمعادلات أويلر–لاغرانج، مبرزاً صلتها العميقة بحساب التغايرات. ويبين الانتقال من الوصف القائم على القوة إلى المنهج القائم على الطاقة كيف توحد ميكانيكا لاغرانج الميكانيكا الكلاسيكية في إطار تحليلي قوي.

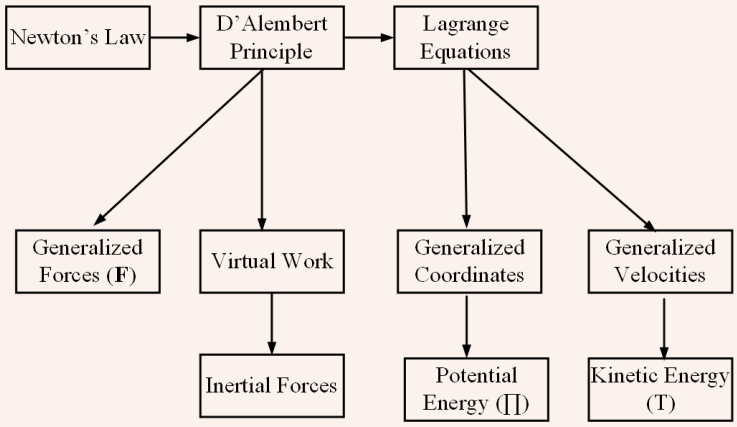
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) لاغرانج



(b) هاملتون



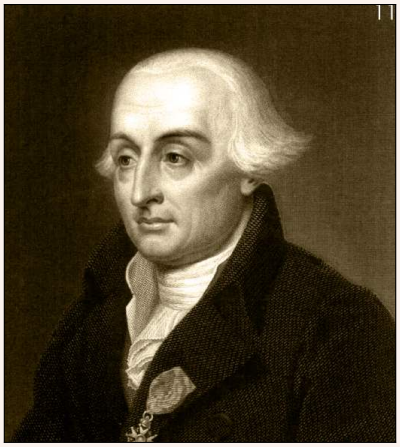
(c) دالمبير

شكل 46.5: مخططات تونتي للاغرانج وهاملتون ودالمبير

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(1707–1783) رليوأ



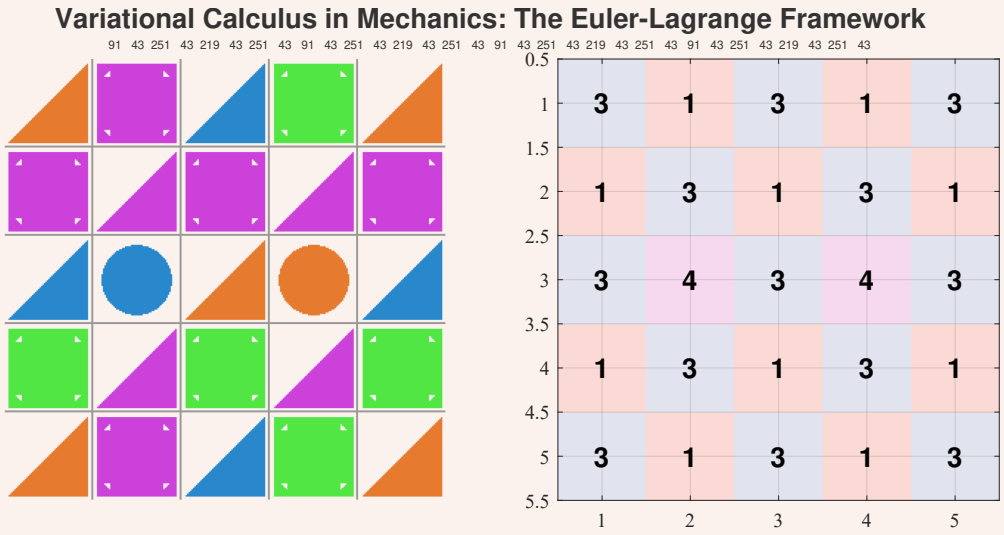
(1736–1813) جنارغال



(1805–1865) نوتلماه



(1717–1813) ريبملاد



لصفلاب صاخ يفيرعت زمر، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47 المبادئ التغايرية ومبادئ الطاقة في التحليل الإنشائي

ملخص

يقدم هذا الفصل مخطط حل مختلفاً جذرياً عن المنهج النيوتني القائم على الاتزان الذي اعتُمد سابقاً (الفصل 43).

ويتبنى مفهوم سكون الدالية المشتق من المبادئ التغايرية التي نوقشت في الفصل السابق. ويُشار إلى هذه الفئة من الحلول بالصياغات اللاغرانجية.

تُشتق عدة طرائق مترابطة، إذ يمكن اشتقاق أي منها من الأخرى. وتشمل مبدأ الشغل الافتراضي، ومبدأ الطاقة الكامنة الكلية الدنيا، وطريقة ريتز، ومبرهنتَي كاستيليانو. وقد يكون بعضها مألوفاً للقارئ من الفصل 24.

وأخيراً يضع مبدأ الإزاحة الافتراضية أساس طريقة العناصر المحددة المعروضة في الفصل 49.

47.1 مقدمة 1500
47.1.1 الديناميكا الحرارية 1501
47.1.2 العلاقات الأساسية 1501
47.1.3 تعريفات 1502
47.1.4 الكميات الحقيقية 1502
47.1.5 العبارات الافتراضية 1504
47.1.6 ملاحظات 1505
47.1.7 تطبيقات على عناصر أحادية البعد 1507
47.1.8 ملخص الشغل الافتراضي والشغل الافتراضي المتمم . . . 1511
47.2 المناهج 1513
47.3 الشغل الافتراضي 1514
47.3.1 مبدأ الشغل الافتراضي المتمم (PCVW) 1514
47.3.2 مثال 47.2: قوس نصف دائري ثلاثي المفاصل 1518
47.3.3 مبدأ الشغل الافتراضي (PVW) 1519
47.4 مبادئ الطاقة الكامنة 1523
47.4.1 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية (PTPE) 1523
47.4.2 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية المتممة (PTCPE) 1526
47.5 مبرهنتا كاستيليانو 1526
47.5.1 المبرهنة الأولى 1526
47.5.2 المبرهنة الثانية 1529
47.6 طريقة رايلي–ريتز 1532
47.6.1 الاشتقاق 1532
47.7 الملخص 1541

---

[1] يستند هذا الفصل بدرجة كبيرة إلى (Pilkey **and** Wunderlich, 1994) و(Reddy, 2017).

47.1 مقدمة

[2] يسرد هذا القسم تعريفات متعددة من غير محاولة ربط أزواج المصطلحات بعضها ببعض. وسيتم ذلك لاحقاً بعد اتضاح معنى كل مصطلح.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.1.1 الديناميكا الحرارية

3 يُعرّف الشغل بأنه حاصل ضرب القوة في الإزاحة:

$$W \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{s}$$
$$\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y$$

4 الطاقة كمية تمثل القدرة على أداء الشغل. ويتناسب تغير الطاقة مع مقدار الشغل المؤدى. ولأن التغير وحده هو المهم، يمكن اختيار أي مستوى مرجعي لقياس الطاقة؛ ومن ثم لا تُخلق الطاقة ولا تُستهلك.

تعريف 47.1: ينص القانون الأول للديناميكا الحرارية على أن

المعدل الزمني لتغير الطاقة الكلية، أي مجموع الطاقة الحركية K والطاقة الداخلية U، يساوي مجموع معدل شغل القوى الخارجية W_e ومعدل تغير المحتوى الحراري H:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U) = W_e + H \tag{47.1}$$

حيث K الطاقة الحركية، وU طاقة الانفعال الداخلية، وW الشغل الخارجي، وH الحرارة الداخلة إلى النظام.

5 في نظام أديباتي لا يتبادل الحرارة، ومع تطبيق الأحمال بطريقة شبه ساكنة فلا توجد طاقة حركية، تتبسط العلاقة السابقة إلى:

$$W_e = U \tag{47.2}$$

6 يبقى تعريف U وW_e في سياق الميكانيكا الإنشائية، وهو ما يأتي الآن.

47.1.2 العلاقات الأساسية

7 قبل البدء نعرّف عدداً من العبارات التي سنحتاج إليها ونرجع إليها لاحقاً.

علاقة الإجهاد–الانفعال $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$

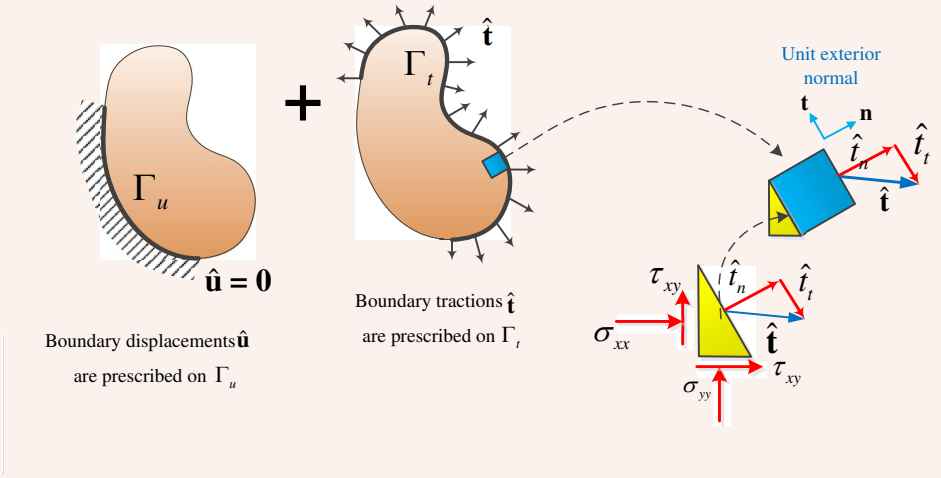
حيث $\mathbf{D}$ مصفوفة الخواص؛ و$\boldsymbol{\varepsilon}$ متجه الانفعال الناجم عن الإزاحات $\mathbf{u}$؛ و$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ متجه الانفعال الابتدائي؛ و$\boldsymbol{\sigma}_0$ متجه الإجهاد الابتدائي؛ و$\boldsymbol{\sigma}$ متجه الإجهاد.

8 تنشأ الانفعالات والإجهادات الابتدائية من ظروف مثل تسخين النظام أو تبريده أو وجود ضغط مسامي فيه.

القوى لا يوجد في الميكانيكا الإنشائية إلا نوعان من القوى:

الشد السطحي $\hat{\mathbf{t}}$، الشكل 47.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 47.1: تعريف الشد السطحي

ملاحظة: ترتبط القوة النقطية بالشد السطحي بدالة ديراك $\delta(z-d)=0, z\neq d$، ولذلك:

$$\int_{\infty}^{\infty}\delta(z-d)dz=1$$

$$\int_{0}^{L}\delta(z-d)dz=1$$

$$\int_{0}^{L}f(z)\delta(z-d)dz=f(d)$$

قوة الجسم b، مثل الجاذبية أو القوة الكهرومغناطيسية.

قوة/عزم نقطي

$$W_e=\int_0^{\Delta_f}Pd\Delta+\int_0^{\theta_f}Md\theta$$

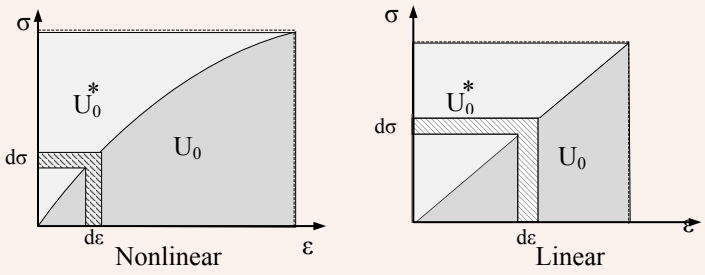
47.1.3 تعريفات

47.1.4 الكميات الحقيقية

كثافة طاقة الانفعال الداخلية

$$U_0\overset{\text{def}}{=}\int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{47.3}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 47.2: كثافتا طاقة الانفعال وطاقة الانفعال المتممة

كثافة طاقة الانفعال المتممة
$$U_0^* \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

طاقة الانفعال
$$U \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0 d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

للنظام المرن الخطي:

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega$$

حيث Ω حجم النظام.

طاقة الانفعال المتممة
$$U^* \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0^* d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

الشغل الخارجي

$$W_e \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$
$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P \mathrm{d}\Delta + \int_0^{\theta_f} M \mathrm{d}\theta$$

للأنظمة المرنة الخطية وتحت أحمال نقطية:

$$\left.\begin{aligned} P &= K\Delta \\ W_e &= \int_0^{\Delta_P} P \mathrm{d}\Delta \end{aligned}\right\} W_e = K\int_0^{\Delta_P} \Delta \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2} K \Delta_P^2$$

وبدمج المعادلة الأخيرة مع $P = K\Delta_P$ نحصل على

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta_P \tag{47.4}$$

حيث K صلابة المنشأ. وبالمثل، للعزم المطبق:

$$W_e = \frac{1}{2} M \theta_M \tag{47.5}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جهد الشغل الخارجي

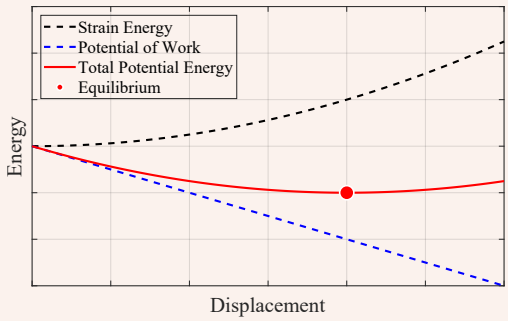
$$\mathcal{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \tag{47.6}$$

ليست الطاقة الكامنة للقوى الخارجية هي شغل الأحمال المتزايدة الخارجية، الذي يزداد مع الإزاحة. بل هي شغل قوى ثابتة تعبر إزاحة؛ ولذلك تختلف الكميتان بعامل $1/2$.

الطاقة الكامنة

$$\Pi \overset{\text{def}}{=} U - \mathcal{W}_e = \int_\Omega U_0 d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right) \tag{47.7}$$

الطاقة الكامنة هي مجموع طاقة الانفعال وجهد الشغل الخارجي، لا الشغل نفسه. وكما يبين الشكل 47.3، تزداد طاقة الانفعال تربيعياً مع الإزاحة، بينما ينخفض جهد الشغل الخارجي بازديادها.



شكل 47.3: الطاقة الكامنة

الطاقة الكامنة المتممة

$$\Pi^* \overset{\text{def}}{=} U^* - \mathcal{W}_e^* = \int_\Omega U_0^* d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{uP} \right)$$

47.1.5 العبارات الافتراضية

9 تسبق الكميات الافتراضية العلامة δ. ولا نعطي هذه العلامة هنا دلالة رياضية خاصة، مع أن δ نفسها ستستعمل لاحقاً للدلالة على مؤثر التفاضل في مبدأ الطاقة الكامنة الكلية الدنيا، أو المتممة.

طاقة الانفعال الافتراضية الداخلية $\delta \overline{U} = -\delta \overline{W}_i \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega$

طاقة الانفعال الافتراضية المتممة $\delta \overline{U}^* = -\delta \overline{W}_i^* \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega$

الشغل الافتراضي الخارجي $\delta \overline{W}_e \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_t} \delta \bar{\mathbf{u}}^t \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_\Omega \delta \bar{\mathbf{u}}^t \mathbf{b} d\Omega$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الشغل الافتراضي الخارجي المتمم

$$\delta\overline{W}_e^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}^t \, \delta\bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \tag{47.8}$$

47.1.6 ملاحظات

47.1.6.1 الشغل الداخلي وطاقة الانفعال

10 أثناء زيادة الانفعال، يكون الشغل الذي تؤديه القوى الداخلية في عنصر تفاضلي سالب الشغل الذي تؤديه عليه الإجهادات:

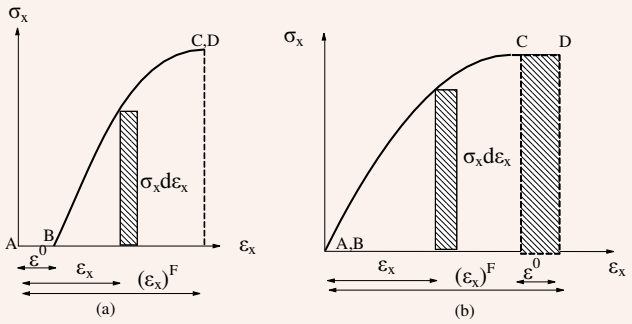
$$W_i \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega$$

11 إذا سُمح لجسم مرن مشوه بالعودة ببطء إلى حالته غير المشوهة، أعاد الجسم الشغل الذي أدته القوى الخارجية، نتيجة تحرير طاقة الانفعال المختزنة فيه.

12 لذلك، في غياب الانفعالات الابتدائية:

$$U = -W_i$$

13 يعتمد الشغل الداخلي على تاريخ التحميل. ويوضح ذلك عضو محوري خاضع لحالتَي تحميل في الشكل 47.4: في الحالة (أ) يسبق الانفعال الحراري الابتدائي، من غير زيادة إجهاد مقابلة، تطبيق القوة الخارجية؛



شكل 47.4: تأثير تاريخ التحميل في U وW_i

وفي الحالة (ب) تسبق القوة الخارجية الانفعال الحراري. وفي الحالتين يساوي الشغل الداخلي المساحة تحت المنحنى ABCD.

$$U_i = \int_0^L \left(\int_0^{(\varepsilon_x)_F} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x$$

$$W_i^a = -U_i$$

$$W_i^b = -U_i - \int_0^L \left(\int_0^{\varepsilon^0} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x$$

ومن ثم لا يكون W_i مساوياً دائماً لـ$-U_i$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.1.6.2 استقلال الشغل الخارجي عن المسار

14 نبرهن هنا أن الشغل الكلي للانتقال من الحالة A إلى الحالة B مستقل عن المسار.

15 في بعدين، العبارة التفاضلية للشغل هي

$$\mathrm{d}W_e = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{47.9}$$

16 ومن حساب التفاضل، الشرط الضروري والكافي لكي تكون $\mathrm{d}W_e$ تفاضلاً تاماً هو

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{47.10}$$

17 إذا تحركت القوة على مسار مغلق Γ، أو من A إلى B ثم عادت إلى A على مسار اعتباطي، فإن مبرهنة غرين، المعادلة R.2.6، تعطي

$$\oint (R\mathrm{d}x + S\mathrm{d}y) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{47.11}$$

وبوضع $R = F_x$ و$S = F_y$:

$$W_e = \oint (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{47.12}$$

18 من المعادلة 47.10 يساوي الشغل صفراً. وإذا فُكك المسار:

$$W_e = \oint = \int_A^B + \int_B^A = 0 \Rightarrow \int_A^B = -\int_B^A \tag{47.13}$$

فإن تكامل الشغل يصبح

$$W_e = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) \tag{47.14}$$

وهو مستقل عن المسار.

19 إذا لم يُبذل شغل صافٍ في الدوران على مسار مغلق كان النظام محافظاً، كما في الأنظمة المرنة الخالصة. أما عند وجود احتكاك أو تشوهات لدنة أو مخمدة، فيكون النظام غير محافظ.

47.1.7 تطبيقات على عناصر أحادية البعد

47.1.7.1 الطاقة المتممة المرنة الخطية U^*

العناصر المحورية

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon\sigma d\Omega \\ \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U^* = A\int_\Omega\int_0^L \frac{P}{AE}\frac{dP}{A}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE}dx$$

عناصر الانحناء

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon E\delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} U^* = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2(x)}{EI_z}dx \tag{47.15}$$

47.1.7.2 الطاقة المرنة الخطية U

العناصر المحورية

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon\sigma d\Omega \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \sigma &= \frac{1}{E}\frac{du}{dx} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U = \frac{A}{E}\int_\Omega\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}dx = \frac{A}{2E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عناصر الانحناء

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{E I_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \\ \frac{M(x)}{EI} &= \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned}\right\} U = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \int_0^L EI_z y''\frac{EI_z y''}{EI_z}dx = EI_z\int_0^L (y'')^2 dx$$

47.1.7.3 طاقة الانفعال الافتراضية المتممة δU^*

العناصر المحورية

20 الإجهادات والقوى هي الكميات الافتراضية المميزة بالعلامة δ.

نظام مرن

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}\varepsilon d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$$

نظام مرن خطي

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon\delta\overline{\sigma} d\Omega \\ \delta\overline{\sigma} &= \frac{\delta\overline{P}}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{``\delta\overline{\sigma}''} \underbrace{\frac{P}{AE}}_{``\varepsilon''} dx$$

عناصر الانحناء

نظام مرن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\left.\begin{aligned}
\delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}_{xx}\varepsilon_x d\Omega \\
\delta\overline{M}(x) &= \int_A \delta\overline{\sigma}_x y dA \Rightarrow \frac{\delta\overline{M}(x)}{y} = \int_A \delta\overline{\sigma}_x dA \\
\phi &= \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \phi y = \varepsilon_x \\
d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx
\end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\phi dx$$

نظام مرن خطي

$$\left.\begin{aligned}
\delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}}_{\delta\overline{\sigma}} d\Omega \\
\sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\
\varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\
d\Omega &= dAdx \\
\int_A y^2 dA &= I_z
\end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}(x)}_{``\delta\overline{\sigma}''} \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{``\varepsilon''} dx$$

عناصر الالتواء

نظام مرن

$$\left.\begin{aligned}
\delta U^* &= \int_\Omega \varepsilon\delta\sigma d\text{ vol} \\
\delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy}\gamma_{xy} d\text{ vol} \\
\tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\
\mathrm{d}\Omega &= Adx
\end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \frac{\delta T}{J}\gamma_{xy}\mathrm{d}x \tag{47.16}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نظام مرن خطي

$$\left.\begin{aligned}\delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy}\, \underbrace{G\tau_{xy}}_{\gamma_{xy}}\, d\,\text{vol}\\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\\ \mathrm{d}\Omega &= r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x\\ J &= \int_o^r\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \underbrace{\delta T}_{``\delta\sigma''}\,\underbrace{\frac{T}{GJ}}_{``\varepsilon''}\,\mathrm{d}x \qquad (47.17)$$

47.1.7.4 طاقة الانفعال الافتراضية δU

21 تُعبر طاقة الانفعال الافتراضية الداخلية بدلالة الانفعال أو الإزاحات الداخلية، وتقود إلى الصياغة التي تقوم عليها طريقة العناصر المحددة.

العناصر المحورية

22 الانفعالات والإزاحات هي الكميات الافتراضية المميزة بالعلامة δ.

نظام مرن

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x\delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega\\ d\Omega &= A dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = A\int_0^L \sigma_x\delta\overline{\varepsilon}_x dx$$

نظام مرن خطي

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x\delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega\\ \sigma_x &= E\varepsilon_x = E\frac{du}{dx}\\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{d(\delta\overline{u})}{dx}\\ d\Omega &= A dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{"\sigma"}\,\underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"}\,\underbrace{A dx}_{d\Omega}$$

عناصر الانحناء

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نظام مرن

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ M(x) &= \int_A \sigma_x y dA \Rightarrow \frac{M(x)}{y} = \int_A \sigma_x dA \\ \delta\overline{\phi} &= \frac{\delta\overline{\varepsilon}_x}{y} \Rightarrow \delta\overline{\phi} y = \delta\overline{\varepsilon}_x \\ d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L M(x)\delta\overline{\phi} dx$$

نظام مرن خطي

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \sigma_x = \frac{M(x)y}{I_z} \\ M(x) = \frac{d^2v}{dx^2} E I_z \end{aligned}\right\} \sigma_x = \underbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}_{\kappa} Ey \left.\begin{aligned} \\ \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\overline{\sigma}_x}{E} = \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \int_A \frac{d^2v}{dx^2} Ey \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y dA dx$$

وبما أن $\int_A y^2 dA = I_z$، فإن

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{EI_z \frac{d^2v}{dx^2}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} dx$$

47.1.8 ملخص الشغل الافتراضي والشغل الافتراضي المتمم

23 يقدم الجدول 47.1 نظرة شاملة إلى العبارات التي عُرفت سابقاً.

ملاحظة: يلزم اشتقاق الطاقة الكامنة بدلالة الإزاحات في العرض والكتاب

ةممتملاو ةنماكلا ةقاطلاو ممتملاو يضارتفالا لغشلا تالداعم صخلم :47.1 جدول

طاقات الانفعال الافتراضية الداخلية				
	طاقة الانفعال المتممة: $\delta\overline{U}^*$		طاقة الانفعال $\delta\overline{U}$	
	مرن خطي	مرن	مرن خطي	مرن
محوري	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\delta\overline{\sigma}} \underbrace{\frac{P}{AE}}_{\varepsilon} dx$	$A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$	$\int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{\sigma} \underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{\delta\overline{\varepsilon}} \underbrace{Adx}_{d\Omega}$	$A\int_0^L \sigma\delta\overline{\varepsilon}dx$
انحناء	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}}_{\delta\overline{\sigma}} \underbrace{\frac{M}{EI_z}}_{\varepsilon} dx$	$\int_0^L \delta\overline{M}\phi dx$	$\int_0^L \underbrace{EI_z\frac{d^2v}{dx^2}}_{\sigma} \underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{\delta\overline{\varepsilon}} dx$	$\int_0^L M\delta\overline{\phi}dx$
الشغل الافتراضي الخارجي				
P	$\sum_i^n \delta\overline{P}_i\Delta_i$		$\sum_i^n P_i\delta\overline{\Delta}_i$	
M	$\sum_i^n \delta\overline{M}_i\theta_i$		$\sum_i^n M_i\delta\overline{\theta}_i$	
w	$\int_0^L \delta\overline{w}(x)v(x)dx$		$\int_0^L w(x)\delta\overline{v}(x)dx$	
الطاقة				
	الطاقة المتممة U^* (القوة)		الطاقة U (الإزاحة)	
محوري	$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE}dx$		$\frac{1}{2}\frac{A}{E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$	
انحناء	$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$	

يرجى ملاحظة أن هذا القسم يحتوي على عناصر عائمة (أشكال و/أو جداول) يجب طباعتها قبل القسم التالي. لذلك قد تظهر هنا مساحات أو فجوات فارغة.

47.2 المناهج

24 لقد عُرّف الآن كل مكوّن في المعادلات التي ستُشتق، لكنه ظل حتى هذه النقطة مستقلاً عن سائر المكونات.

25 لذلك، قبل الخوض في التفاصيل، ننظر إلى منهجين ممكنين: مبدأ الشغل الافتراضي (PVW) ومبدأ الشغل الافتراضي المتمم (PCVW)، اللذان يربطان:

أنظمة القوى التي تحقق متطلبات الاتزان.
أنظمة التشوه التي تحقق المتطلبات الحركية.

26 يمكن بوضوح اتباع مسارين للجمع بين الكميات الافتراضية والحقيقية، كما في الجدول 47.2 والشكل 47.5، لاشتقاق المبدأين.

جدول 47.2: ممتملا هئدبمو يضارتفالا لغشلا أدبمل ناليدبلا ناراسملا

حقيقي			افتراضي			المبدأ
يحقق		المطلوب	يحقق		البداية	
الشروط الحدية	تماماً		الشروط الحدية	وسطياً	بـ	
الأساسية Γ_u	التوافق	الإزاحات	الطبيعية Γ_t	الاتزان	القوى	$\delta\overline{U}^* = \delta\overline{W}_e^*$ CVW
الطبيعية Γ_t	الاتزان	القوى	الأساسية Γ_u	التوافق	الإزاحات	$\delta\overline{U} = \delta\overline{W}_e$ VW

27 المقصود بالتوافق هو

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

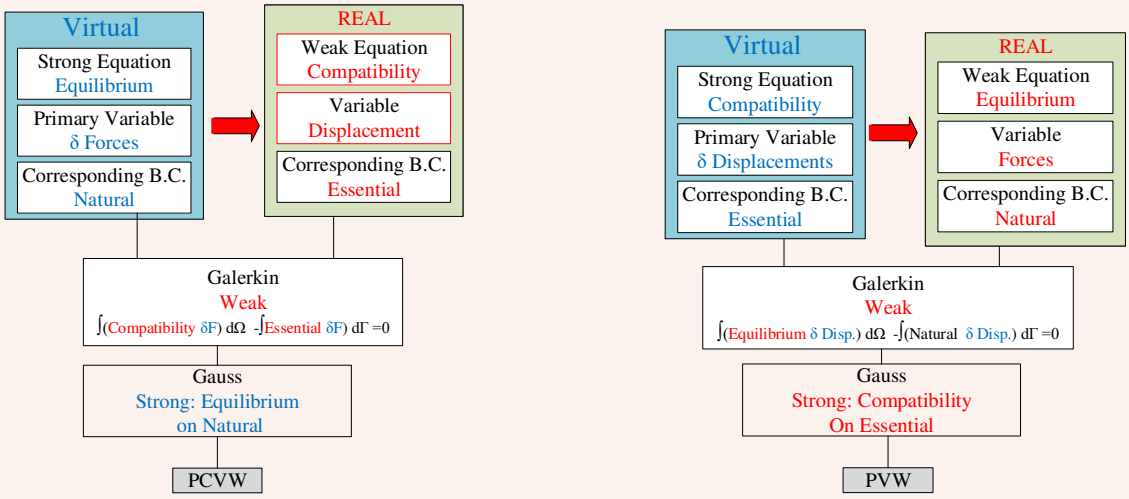
والمقصود بالاتزان هو

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

28 قبل المتابعة ينبغي استيعاب المفاهيم الآتية في الشكل 47.5:

الصيغة القوية والضعيفة في القسم 46.2.3.
الشروط الحدية الأساسية والطبيعية في القسم 46.2.6.
معادلات المرونة الأساسية في القسم O.8.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) ممتملا يضارتفالا لغشلا (b) يضارتفالا لغشلا

ممتملاو يضارتفالا لغشلا يأدبمل نايحيضوت ناططخم :47.5 شكل

47.3 الشغل الافتراضي

47.3.1 مبدأ الشغل الافتراضي المتمم (PCVW)

29 نبدأ باشتقاق مبدأ الشغل الافتراضي المتمم؛ فالطريقة مألوفة للقارئ في حساب الإزاحات، وقد قُدمت تخطيطياً في القسم 24.2.

47.3.1.1 الاشتقاق

30 يبدأ الاشتقاق بمجموعة قوى افتراضية مقبولة استاتيكياً تحقق الاتزان وشروطها الحدية الطبيعية. ونبحث عن الإزاحات الحقيقية المقابلة المقبولة حركياً والمحققة للشروط الحدية الأساسية، الجدول 47.2 والشكل 47.5a.

31 شرط التوافق الحركي، أي علاقة الانفعال–الإزاحة، هو

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

32 ويمكن إعادة كتابته كما في المعادلة O.7:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

وستُكتب معادلة الاتزان لاحقاً، في اشتقاق مبدأ الشغل الافتراضي، كما في المعادلة O.9:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = 0$$

أو

$$\underbrace{\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}}_{\text{div } \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = 0.$$

33 تُعبر الشروط الحدية الطبيعية كما يأتي:

$$u_i = \hat{u} \quad \text{على} \Gamma_u$$

حيث $\hat{u}$ إزاحات معلومة على Γ_u. وتُعاد كتابة المعادلتين في صورة

$$\varepsilon_{ij} - u_{i,j} = 0; \qquad u_i - \hat{u} = 0.$$

34 نحقق هاتين المعادلتين التفاضليتين القويتين بمعنى متوسط، أي ضعيف على تكامل، باستعمال طريقة غالركن. نضرب المعادلة الأولى مسبقاً في حقل الإجهاد الافتراضي $\delta\overline{\sigma}_{ij}$ ونكامل على الحجم، ونضرب الثانية في الشدود الافتراضية المقابلة $\delta\bar{t}_i$ ونكامل على السطح المقابل، فنحصل على الصيغة الضعيفة:

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\varepsilon_{ij} - u_{i,j}\right) \delta\overline{\sigma}_{ij}}_{\text{التوافق}} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \underbrace{\left(u_i - \hat{u}\right) \delta\bar{t}_i}_{\text{الشرط الحدي الأساسي}} \; d\Gamma = 0 \tag{47.18}$$

35 نركز على $\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma$:

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_t} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ينعدم الحد الثاني في الطرف الأيمن لأن

$$\delta\bar{t}_i = 0 \quad \text{على} \Gamma_t$$

لتحقيق الشروط الحدية الطبيعية. ولذلك

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i \delta(\overline{\sigma}_{ij} n_j) d\Gamma \tag{47.19}$$

36 نعالج الحد $u_i \delta\bar{t}_i$ بتطبيق مبرهنة غاوس، القسم R، مع $t_i = \sigma_{ij} n_j$:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i) n_j d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) d\Omega.\end{aligned}$$

ومن ثم تتحول المعادلة 47.19 إلى تكامل حجمي:

$$\int_{\Gamma} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_i \delta\overline{\sigma}_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\overline{\sigma}_{ij} d\Omega.$$

37 يجب أن تكون الإجهادات الافتراضية المفترضة مقبولة استاتيكياً، أي متزنة داخل Ω. وفي المقابل يجب أن تكون الإزاحات الافتراضية في مبدأ الشغل الافتراضي مقبولة حركياً. وفي غياب قوى الجسم:

$$\delta\overline{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad \text{في} \Omega,$$

ومن ثم

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\overline{\sigma}_{ij} d\Omega.$$

38 بدمج هذه المعادلة مع المعادلة 47.18:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega = 0, \tag{47.20}$$

فتتبسط إلى

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma = 0. \tag{47.21}$$

39 كل حد عبارة شغل؛ الأول هو الشغل الافتراضي الداخلي المتمم، والثاني الشغل الافتراضي الخارجي المتمم، المعادلة 47.8:

$$-\delta W_i^* - \delta W_e^* = 0, \tag{47.22}$$

أو

$$\delta U_i^* = \delta W_e^* \tag{47.23}$$

وهذا هو مبدأ الشغل الافتراضي المتمم، أو مبدأ القوى الافتراضية.

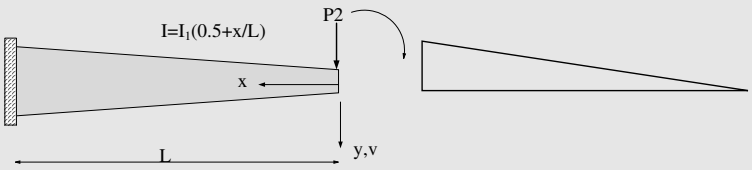
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 47.2: مبدأ الشغل الافتراضي المتمم

يحقق النظام القابل للتشوه جميع المتطلبات الحركية، المعادلة 47.2، إذا كان مجموع الشغلين الافتراضيين الخارجي والداخلي المتممين صفراً لكل إجهاد افتراضي مقبول استاتيكياً $\delta\overline{\sigma}_{ij}$.

ويقود هذا المبدأ إلى مصفوفة المرونة.

47.3.1.2 مثال 47.1: مبدأ الشغل الافتراضي المتمم؛ كمرة كابولية متدرجة



$$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\text{داخلي}} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{خارجي}}$$

هنا $\delta\overline{M}$ و$\delta\overline{P}$ هما القوتان الافتراضيتان، و$\frac{M}{EI_z}$ وΔ هما الإزاحتان الحقيقيتان.

إذا كان $\delta\overline{P}=1$، فإن $\delta\overline{M}=x$ و$M=P_2x$، ولذلك:

$$(1)\Delta = \int_0^L x\frac{P_2x}{EI_1(.5+\frac{x}{L})}dx = \frac{P_2}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{\frac{L+x}{2L}}dx = \frac{P_2 2L}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{L+x}dx.$$

ومن برنامج Mathematica نعلم أن

$$\int \frac{x^2}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)dx\right].$$

وبالتعويض بـ $a=L$ و$b=1$:

$$\Delta = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[\frac{1}{2}(L+x)^2 - 2L(L+x) + L^2\ln(L+x)\right]\Big|_0^L = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[L^2(\ln 2 - \frac{1}{2})\right] = \frac{P_2L^3}{2.5887EI_1}.$$

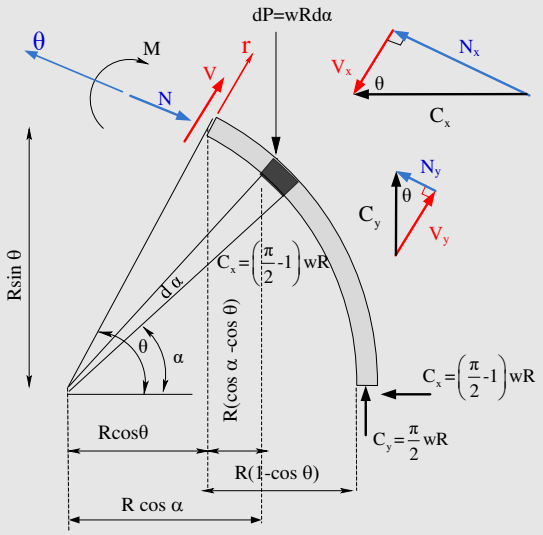
وبالمثل:

$$\theta = \int_0^L \frac{M(1)}{EI_1\left(.5+\frac{x}{L}\right)} = \frac{2ML}{EI_1}\int_0^L \frac{1}{L+x} = \frac{2ML}{EI_1}\ln(L+x)\,|_0^L = \frac{ML}{.721EI_1}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.3.2 مثال 47.2: قوس نصف دائري ثلاثي المفاصل

نريد تحديد الإزاحة الرأسية لتاج قوس نصف دائري محدد استاتيكياً وثلاثي المفاصل تحت وزنه الذاتي w.
نحدد أولاً التعبير التحليلي لمخطط العزم. ومن الاستاتيكا تكون ردود الفعل الرأسية والأفقية $R_v = \frac{\pi}{2}wR$ و $R_h = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR$.
وباعتبار مخطط الجسم الحر للقوس وجمع القوى في الاتجاه الشعاعي، $\Sigma F_R = 0$:



$$-\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR\cos\theta + \frac{\pi}{2}wR\sin\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta + V = 0$$
$$V = wR\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cos\theta + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\right].$$

وبالمثل، من جمع القوى في الاتجاه المحوري، $\Sigma F_T = 0$:

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR\sin\theta + \frac{\pi}{2}wR\cos\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta + N = 0$$
$$N = wR\left[\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\theta\right].$$

ومن معادلة الاتزان الثالثة، $\Sigma M_\theta = 0$:

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR\cdot R\sin\theta - \frac{\pi}{2}wR^2(1-\cos\theta) +$$
$$\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha - \cos\theta) + M = 0$$
$$M = wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right].$$

يُستخرج التقوس الحقيقي ϕ بقسمة العزم على EI:

$$\phi = \frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right].$$

القوة الافتراضية δP هي قوة نقطية رأسية وحدية في اتجاه الإزاحة المطلوبة، وتولد عزماً داخلياً افتراضياً:

$$\delta M = \frac{R}{2}\left[1 - \cos\theta - \sin\theta\right] \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن تطبيق معادلة الشغل الافتراضي:

$$\underbrace{1}_{\delta P}\cdot\Delta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]}_{\phi}\cdot\underbrace{\frac{R}{2}\left[1-\cos\theta-\sin\theta\right]}_{\delta M}\underbrace{R\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{wR^4}{16EI}\left[7\pi^2-18\pi-12\right]$$
$$= 0337\frac{wR^4}{EI}.$$

47.3.3 مبدأ الشغل الافتراضي (PVW)

47.3.3.1 الاشتقاق

40 يبدأ اشتقاق مبدأ الشغل الافتراضي بوجود إزاحات افتراضية مقبولة حركياً تحقق التوافق والشرط الحدي الأساسي المقابل. ونبحث عن مجموعة القوى الحقيقية المقابلة المقبولة استاتيكياً والمحققة للشروط الحدية الطبيعية.

41 تكون الإجهادات الداخلية متزنة إذا كان

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{b}=0 \tag{47.24}$$

42 والشرط الحدي الأساسي المقابل هو

$$\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}=0 \quad \text{شرط حدي أساسي على } \Gamma_t \tag{47.25}$$

حيث $\hat{t}$ شد معلوم على Γ_t. وتشكل المعادلتان 47.24 و47.25 حقل إجهاد مقبولاً استاتيكياً.

43 نفرض تحقق شرط الاتزان الموضعي، المعادلة 47.24، وشرط الحد الاستاتيكي، المعادلة 47.25، في صيغة كلية أو تكاملية ضعيفة بضرب المعادلتين في إزاحة افتراضية $\delta\overline{\mathbf{u}}$.

44 ومن ثم تكون الصيغة الضعيفة

$$-\int_{\Omega}\delta\overline{\mathbf{u}}^T\underbrace{\left(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}\right)}_{\text{الاتزان}}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\delta\overline{\mathbf{u}}^T\underbrace{\left(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}\right)}_{\text{الشرط الحدي الأساسي}}d\Gamma=0 \tag{47.26}$$

45 يجب أن تحقق الإزاحات الافتراضية التوافق، في حين كان يلزم أن تكون الإجهادات في المبدأ المتمم مقبولة استاتيكياً. كما يجب أن تحقق الإزاحات الافتراضية الشرط الحدي الأساسي:

$$\mathbf{L}\delta\overline{\mathbf{u}}=\text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}=\delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{47.27}$$

46 نركز على $\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$:

$$\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma.$$

نحوّل العبارة إلى تكامل حجمي بمبرهنة غاوس. وباستدعاء تعريف متجه الشد

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \quad \text{أو} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j,$$

يعطي تطبيق مبرهنة غاوس:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathrm{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} d\Omega.\end{aligned}$$

وبما أن $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}$، فإن

$$\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathrm{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega.$$

47 بعد خطوات جبرية تعطي المعادلة السابقة مبدأ الشغل الافتراضي، أو الإزاحات الافتراضية:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{-\delta\overline{W}_i = \delta\overline{U}_i} \underbrace{- \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{-\delta\overline{W}_e} = 0 \tag{47.28}$$

أو

$$\delta\overline{U}_i = \delta\overline{W}_e.$$

تعريف 47.3: مبدأ الإزاحة الافتراضية

يكون النظام القابل للتشوه في حالة اتزان، المعادلة 47.24، إذا كان مجموع الشغلين الافتراضيين الخارجي والداخلي صفراً لإزاحات افتراضية $\delta\overline{\mathbf{u}}$ تحقق المعادلة الحركية وشروط الحدود الحركية، المعادلة 47.27.

48 للعناصر أحادية البعد يختزل ذلك إلى

$$\underbrace{\int \sigma \delta\overline{\varepsilon} d\Omega}_{\delta\overline{U}} = \underbrace{P\delta\overline{v}}_{\delta\overline{W}}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بوضع $\delta U - \delta W = 0$ يمكن جمع معاملات كل δv_i ووضعها مساوية للصفر:

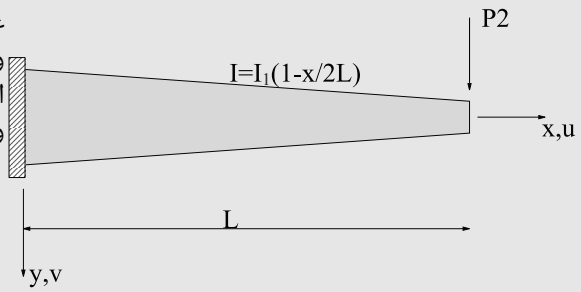
$$A_1 \delta v_1 + A_2 \delta v_2 + \cdots + A_n \delta v_n = 0.$$

ولأن δv_i يمكن اختيارها اعتباطياً، يجب أن يكون كل A_i صفراً، فنحصل على نظام من n معادلات خطية:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta v_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta v_n \end{bmatrix}}_{\text{يُهمل}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{يُحل}}. \tag{47.29}$$

47.3.3.2 مثال 47.3: مبدأ الشغل الافتراضي؛ كمرة كابولية متدرجة

عند تطبيق المبدأ نحتاج إلى تقريب للإزاحة الحقيقية v والإزاحة الافتراضية $\delta \overline{v}$. ويجب أن يحقق التعبيران الشروط الحدية الأساسية، أي الإزاحة والميل للكمرة.
والحلّان التقريبيان المقترحان هما



$$v = \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) v_2 \tag{47.30}$$

$$v = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] v_2. \tag{47.31}$$

ويحققان الشرطين الأساسيين $v = v' = 0$ عند $x = 0$.

نعتبر ثلاث حالات:

الحل	الحقيقي	الافتراضي
1	المعادلة 47.30	المعادلة 47.31
2	المعادلة 47.30	المعادلة 47.30
3	المعادلة 47.31	المعادلة 47.31

- يتطلب تطبيق المبدأ تقييم المشتقتين الثانيتين للدالتين.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

	مثلثي، المعادلة 47.30	كثير حدود، المعادلة 47.31
v	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)v_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_2$
$\delta\overline{v}$	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\delta\overline{v}_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\delta\overline{v}_2$
v''	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}v_2$	$\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)v_2$
$\delta\overline{v}''$	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2$	$\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2$

$$\delta\overline{U}=\int_0^L EI_z\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}dx;\qquad \delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2.$$

الحل 1:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)v_2}_{v''}\underbrace{\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx$$

$$=\frac{3\pi EI_1}{2L^3}\left[1-\frac{10}{\pi}+\frac{16}{\pi^2}\right]v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2.$$

ومنها

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.648EI_1}.$$

الحل 2:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L \underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}v_2}_{v''}\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx$$

$$=\frac{\pi^4EI_1}{32L^3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2.$$

ومنها

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.57EI_1}.$$

الحل 3:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L \underbrace{\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]v_2}_{v''}\underbrace{\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx=\frac{9EI}{L^3}v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومنها

$$v_2 = \frac{P_2 L^3}{9EI_1}.$$

47.4 مبادئ الطاقة الكامنة

49 نقدم الآن منهجاً مختلفاً تماماً لكنه مرتبط بما سبق. فبدلاً من مزج الكميات الحقيقية والافتراضية، نبحث مباشرة عن تصغير الطاقة الكامنة الكلية أو المتممة. ويُشتق المبدآن من مبادئ طاقة الانفعال الافتراضية، كما يمكن طبيعياً إجراء الاشتقاق العكسي.

50 هنا تستعيد العلامة δ معناها الرياضي الكامل، أي التفاضل، بينما كانت تدل سابقاً على كمية افتراضية.

51 مبدأ الطاقة الكامنة المتممة محدود الأهمية هنا، ولذلك لن يُناقش تفصيلاً.

47.4.1 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية (PTPE)

52 نعود إلى هذا المبدأ الذي عولج سابقاً في القسم 46.3.

47.4.1.1 الاشتقاق

53 تذكير: التفاضل هو الطريقة الرياضية لحساب التغير حول نقطة.

54 إذا كانت U_0 دالة جهد، نأخذ تفاضلها $\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}$، وتنص المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل على أن $\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = f(x)$. ومن ثم

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ U_0 &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ \frac{\delta}{\delta \varepsilon_{ij}} \int_0^x \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

55 يمكن الآن إعادة كتابة مبدأ الشغل الافتراضي، المعادلة 47.28:

$$\int_\Omega \delta \overline{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega \delta \overline{u}_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \overline{u}_i \hat{t}_i d\Gamma = 0,$$

في الصورة

$$\int_\Omega \delta U_0 d\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma = 0.$$

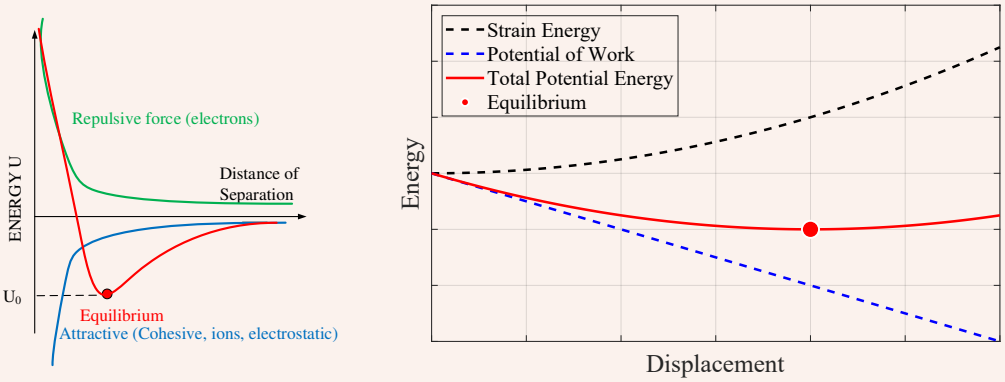
56 كانت δ حتى الآن تشير إلى كمية افتراضية، أما من هنا فتعني التغاير. وإذا لم تغير الشدود السطحية ولا قوى الجسم مقاديرها أو اتجاهاتها أثناء التشوه، تتبسط العبارة إلى

$$\delta \left[\overbrace{\int_\Omega U_0 d\Omega}^{U} \overbrace{- \int_\Omega u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \hat{t}_i d\Gamma}^{-\mathcal{W}_e} \right] = 0 \tag{47.32}$$

57 بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة 47.7 نستنتج أن تغاير الطاقة الكامنة يساوي صفراً:

$$\delta \Pi = 0. \tag{47.33}$$

يوضح الشكل 47.6b ذلك، إذ تقابل حالة الاتزان القيمة الدنيا للطاقة الكامنة الكلية. وتماثل هذه الحالة اتزان القوى بين الذرية في ميكانيكا الكم، الشكل 47.6a.



(a) مكلا اكيناكيم (b) ةيكيسالكلا اكيناكيملا

ةيكيسالكلاو ةيمكلا اكيناكيملا يف ريغصتلا :47.6 شكل

تعريف 47.4: مبدأ القيمة الساكنة للطاقة الكامنة

من بين جميع التشوهات المقبولة حركياً، أي الإزاحات المحققة للشروط الحدية الأساسية، تكون التشوهات الحقيقية، المقابلة لإجهادات تحقق الاتزان، هي التي تأخذ عندها الطاقة الكامنة الكلية قيمة ساكنة.

58 للمسائل متعددة درجات الحرية:

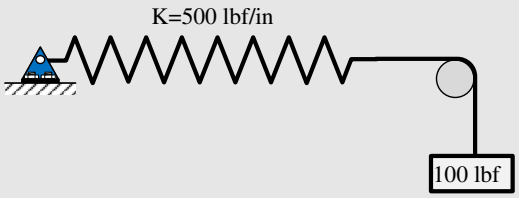
$$\delta \Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1}}_{0} \delta \Delta_1 + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2}}_{0} \delta \Delta_2 + \cdots \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_n}}_{0} \delta \Delta_n = 0, \tag{47.34}$$

أي n معادلات في n مجاهيل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.4.1.2 مثال 47.4: مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ نابض وكتلة

نريد تحديد موضع اتزان الكتلة.
بمنهج نيوتن: $\Delta = \frac{F}{K} = \frac{100}{500} = 0.2$ in.
وبمنهج لاغرانج تُعطى طاقة الانفعال U وجهد الشغل الخارجي W بالعلاقتين



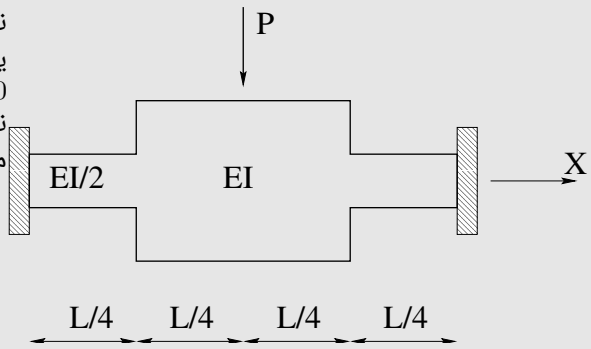
$$U = \frac{1}{2}u(Ku) = 250u^2 \qquad W_e = mgu = 100u.$$

لا يوجد عامل $1/2$ في W_e لأن القوة ثابتة أثناء أداء الشغل. والطاقة الكامنة الكلية $\Pi = U - W_e = 250u^2 - 100u$، ويجب أن تكون ساكنة:

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{du} = 0 \Rightarrow 500u - 100 = 0 \Rightarrow u = 0.2 \text{ in}.$$

47.4.1.3 مثال 47.5: مبدأ الطاقة الكامنة الكلية؛ كمرة مثبتة ذات I متغير

نفترض أن $v = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.
يجب أن يحقق الحل الشرطين الأساسيين $v = v' = 0$ عند $x = 0$، وكذلك $v = v_{max}$ و$v' = 0$ عند $x = L/2$.
نفرض ذلك بتحديد المعاملات الأربعة بدلالة مجهول وحيد، من أربع معادلات وأربعة شروط حدية:



$$\begin{array}{llll}
@x=0 & v=0 & & \Rightarrow a_4 = 0 \\
@x=0 & \frac{dv}{dx}=0 & & \Rightarrow a_3 = 0 \\
@x=\frac{L}{2} & v = v_{max} & \Rightarrow v_{max} = a_1\frac{L^3}{8} + a_2\frac{L^2}{4} & \\
@x=\frac{L}{2} & \frac{dv}{dx}=0 & \Rightarrow \frac{3}{4}a_1L^2 + a_2L = 0 & \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}a_1L
\end{array}$$

وبالتعويض نحصل على

$$v = \left(-\frac{16x^3}{L^3} + \frac{12x^2}{L^2}\right)v_{max}.$$

وهكذا يكتب الحل بدلالة مجهول وحيد v_{max}.

لتطبيق مبدأ الطاقة الكامنة الدنيا، نقيم طاقة الانفعال الداخلية U. ولعنصر الانحناء يجب كتابتها بدلالة الإزاحة:

$$U = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{L/2} E\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 I_z dx\right].$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم نحتاج إلى $\frac{d^2v}{dx^2}$:

$$\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{48x^2}{L^3} + \frac{24x}{L^2}\right) v_{max}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{24}{L^2}\left(1 - \frac{4x}{L}\right) v_{max}.$$

وبالتعويض:

$$\frac{U}{2} = \frac{E}{2}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{24^2}{L^4}\left(1 - \frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 \frac{I_z}{2} dx + \frac{E}{2}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \frac{24^2}{L^4}\left(1 - \frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 I_z dx$$
$$U = \frac{72EI_z}{L^3} v_{max}^2.$$

أما جهد الشغل الخارجي لقوة نقطية فهو $W_e = Pv_{max}$. وأخيراً:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial v_{max}} - \frac{\partial W_e}{\partial v_{max}} = 0 \quad \frac{144EI_z}{L^3} v_{max} = P \quad \Rightarrow v_{max} = \frac{PL^3}{144EI_z}.$$

47.4.2 مبدأ الطاقة الكامنة الكلية المتممة (PTCPE)

59 باتباع منهج مماثل لمنهج الطاقة الكامنة الكلية يمكن بسهولة إثبات أن

$$\delta \Pi^* = \delta U^* - \delta \mathcal{W}_e^* \tag{47.35}$$

47.5 مبرهنتا كاستيليانو

للسياق التاريخي، انظر §11.4.3

مع أن مبرهنتَي كاستيليانو تماثلان أساساً مبدأ الشغل الافتراضي، فإنهما غالباً الطريقة المفضلة لحل مسائل معينة، كما توضح الأمثلة. لا تفصل الطريقة بين الكميات الحقيقية والافتراضية، بل تقدم تعبيراً واحداً لطاقة الانفعال بدلالتهما ثم تشتقه بالنسبة إلى الكمية الافتراضية.

47.5.1 المبرهنة الأولى

60 تقوم مبرهنة كاستيليانو الأولى على مبدأ الطاقة الكامنة الكلية. ويمكن إعادة كتابة المعادلة 47.33 في الصورة

$$\delta \Pi = \delta U - \delta \mathcal{W}_e = 0.$$

ويُعبر عن الحد الثاني بـ

$$\delta \mathcal{W}_e = F\delta u + \frac{1}{2}\Delta F \delta u + \cdots.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالدمج[1] نحصل على

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u} - F\right)\delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u} = F,$$

وهي مبرهنة كاستيليانو الأولى:

تعريف 47.5: مبرهنة كاستيليانو الأولى

تساوي المشتقة الجزئية الأولى للطاقة الداخلية الكلية، أي طاقة الانفعال، في منشأ بالنسبة إلى مركبة إزاحة معينة عند نقطة ما القوة المطبقة عند تلك النقطة وفي الاتجاه المقابل لمركبة الإزاحة.

61 تنطبق هذه المبرهنة على المنشآت المرنة خطياً أو لاخطياً ذات درجة الحرارة الثابتة والمساند غير القابلة للهبوط.

62 يمكن تعميم نظام القوة الواحدة إلى نظام يحوي N قوى:

$$\mathcal{W}_e = \sum_{i=1}^{N} F_i u_i.$$

وتكون الطاقة الكامنة الكلية

$$\Pi = U - \mathcal{W}_e = U(u_1, u_2, \cdots, u_N) - \sum_{i=1}^{N} F_i u_i.$$

لأي تغاير افتراضي δu_i في الإزاحة u_i يجب أن ينعدم تغاير الطاقة الكامنة الكلية:

$$\delta\Pi = \frac{\partial U}{\partial u_i}\delta u_i - F_i \delta u_i = \left(\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i\right)\delta u_i = 0.$$

ولأن التغايرات $\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_N$ مستقلة:

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

وهذه هي الصيغة العامة للمبرهنة: إذا أمكن التعبير عن طاقة انفعال نظام إنشائي بدلالة N إزاحات مستقلة $u_1, u_2, \cdots, u_N$ تقابل N قوى محددة $F_1, F_2, \cdots, F_N$، فإن المشتقة الجزئية الأولى لطاقة الانفعال بالنسبة إلى الإزاحة u_i الواقعة تحت القوة F_i تساوي القوة F_i في اتجاه u_i.

[1] تذكر أن $\delta F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

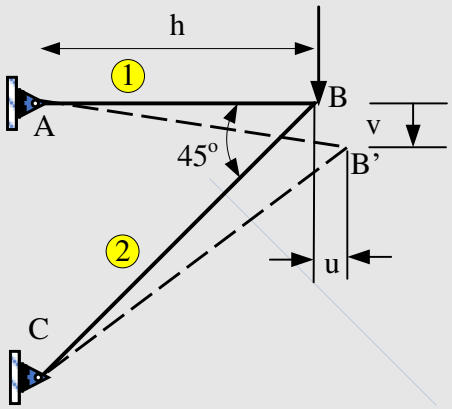
47.5.1.1 مثال 47.6: جملون مرن لاخطي

عن (Reddy, 2017).

نريد تحديد الإزاحتين الأفقية والرأسية للعقدة B في الجملون المفصلي المجاور تحت الحمل P. والقضبان مصنوعة من مادة مرنة لاخطية علاقة الإجهاد–الانفعال فيها:

$$\sigma = \begin{cases} K\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon \geq 0 \\ -K\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon \leq 0 \end{cases},$$

ومساحة مقطع كل عضو A.



من حركيات الجملون، أي هندسة التشوه، يكون الانفعال في كل عضو:

$$\varepsilon_1 = \frac{AB' - AB}{AB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + v^2}{h^2}} - 1$$
$$\varepsilon_2 = \frac{CB' - CB}{CB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + (h-v)^2}{2h^2}} - 1.$$

ولصغر الإزاحات، $u^2 \simeq 0$ و$v^2 \simeq 0$، تتبسطان إلى

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\frac{u}{h}} - 1 \simeq \frac{u}{h}$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{(u-v)}{h}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{h}\right).$$

كثافة طاقة الانفعال للمنشأ $U_0 = U_{01} + U_{02}$:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_2} \sigma d\varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_1} K\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_2} -K\sqrt{-\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2K}{3}(\varepsilon_1)^{3/2} + \frac{2K}{3}(-\varepsilon_2)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}K\left[\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}\right]. \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

اعتُبر العضو 2 مضغوطاً. وطاقة الانفعال الكلية $U = U_1 + U_2$:

$$U = Ah\frac{2}{3}K\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + A\sqrt{2}h\frac{2}{3}K\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}$$
$$= \frac{AK}{3\sqrt{h}}\left[2u\sqrt{u} + (v-u)\sqrt{v-u}\right].$$

وباستخدام مبرهنة كاستيليانو الأولى:

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 0 = \frac{AK}{2\sqrt{h}}(2\sqrt{u} - \sqrt{v-u})$$
$$\frac{\partial U}{\partial v} = P = \frac{AK}{2\sqrt{h}}\sqrt{v-u}.$$

وبحل المعادلتين:

$$u = \frac{P^2 h}{A^2K^2}, \qquad v = \frac{5P^2 h}{A^2K^2}.$$

47.5.2 المبرهنة الثانية

63 تقوم مبرهنة كاستيليانو الثانية على مبدأ الطاقة الكامنة الكلية المتممة. وبإعادة كتابة المعادلة 47.35:

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta\mathcal{W}_e^* \Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial F}\delta F - u\delta F = 0,$$

أو

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = u.$$

64 وتُعمم المعادلة إلى نظام إنشائي:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعريف 47.6: مبرهنة كاستيليانو الثانية

تساوي المشتقة الجزئية الأولى للطاقة الداخلية الكلية في منشأ بالنسبة إلى القوة المطبقة عند أي نقطة الإزاحة عند نقطة تطبيق تلك القوة وفي اتجاه خط عملها.

65 باستعمال عبارة U^* من القسم 47.1.7.1:

$$U^* = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE} \\ \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \end{cases},$$

فإن

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{P}{AE}\frac{\partial P}{\partial P_i} \\ \theta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i} \end{aligned} \tag{47.36}$$

47.5.2.1 مثال 47.7: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ كمرة كابولية

نريد إزاحة طرف كمرة كابولية محملة بقوة نقطية.

من المعادلة 47.15 تكون طاقة الانفعال المتممة $U^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x$، ويكون الشغل الخارجي لقوة نقطية $\mathcal{W}^*_e = P\Delta$.
ومن ثم طاقة النظام الكامنة:

$$\begin{aligned} \Pi^* &= U^* - \mathcal{W}^*_e \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\mathrm{d}x - P\Delta. \end{aligned} \tag{47.37}$$

ولأن $M = Px$ للقوة النقطية، فإن

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2x^2}{EI}\mathrm{d}x - P\Delta \\ &= \frac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI} - P\Delta \\ \frac{\mathrm{d}\Pi^*}{\mathrm{d}P} &= \frac{1}{3}\frac{PL^3}{EI} - \Delta = 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \frac{1}{3}\frac{PL^3}{EI}. \end{aligned} \tag{47.38}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

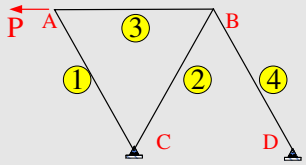
47.5.2.2 مثال 47.8: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة كمرة موزعة الحمل بانتظام

لكمرة بسيطة الارتكاز موزعة الحمل بانتظام، نريد إزاحة منتصف البحر.

نُدخل قوة وهمية R عند منتصف البحر، فيكون العزم $M(x)=\frac{wL}{2}x+\frac{R}{2}x-w\frac{x^2}{2}$. وطاقة الانفعال المتممة $U^*=2\int_0^{L/2}\frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$، والإزاحة:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial U^*}{\partial R}\Big|_{R=0}\\ &= \left(\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M\frac{\partial M}{\partial R}\mathrm{d}x\right)\Big|_{R=0}\\ &= \left\{\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left[\left(\frac{wL}{2}+\frac{R}{2}\right)x-w\frac{x^2}{2}\right]\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right\}\Big|_{R=0}\\ &= \frac{5wL^4}{384EI}.\end{aligned} \tag{47.39}$$

47.5.2.3 مثال 47.9: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ جملون لاخطي



يتكون الجملون المتساوي الأضلاع المجاور من قضبان ذات علاقة لاخطية بين الإزاحة والقوة $u=k_1F+k_2F^2$.

ولأن المادة لاخطية، فإن $U_i^*\neq U_i$، ويجب استعمال طاقة الانفعال المتممة:

$$U_i^*=\sum\int_0^F u\,dF.$$

من الاتزان الاستاتيكي:

$$\lfloor\ F_1\quad F_2\quad F_3\quad F_4\ \rfloor=\lfloor\ 0\quad -P\quad P\quad P\ \rfloor.$$

ومن ثم

$$\lfloor\ u_1\quad u_2\quad u_3\quad u_4\ \rfloor=\lfloor\ 0\quad -k_1P+k_2P^2\quad k_1P+k_2P^2\quad k_1P+k_2P^2\ \rfloor.$$

فتصبح طاقة الانفعال المتممة الكلية للمنشأ

$$U_i^*=2\left(\frac{k_1P^2}{2}+\frac{k_2P^3}{3}\right)+\left(\frac{k_1P^2}{2}-\frac{k_2P^3}{3}\right)=\frac{3k_1P^2}{2}+\frac{k_2P^3}{3}.$$

ولذلك

$$v_A^H=\frac{\partial U_i^*}{\partial P}=3k_1P+k_2P^2.$$

47.5.2.4 مثال 47.10: مبرهنة كاستيليانو الثانية؛ إزاحة نابض

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

للنابض الحلزوني الضاغط المجاور، المصنوع من سلك دائري يتعرض لإجهاد قص التواء وقص عرضي مع إهمال الانحناء، تكون طاقة الانفعال المتممة الكلية:

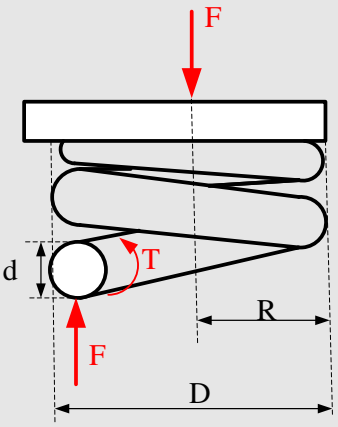
$$U^* = U^*_T + U^*_S = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG},$$

حيث L طول السلك. وبالتعويض بـ $T = FD/2$ و $L = N\pi D$ و $J = \pi d^4/32$ و $A = \pi d^2/4$:

$$U^* = \frac{4NF^2D^3}{d^4G} + \frac{2NF^2D}{d^2G},$$

حيث N عدد اللفات الفعالة. ثم نطبق المبرهنة الثانية لتحديد إزاحة النابض:

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{8NFD^3}{d^4G} + \frac{4NFD}{d^2G}.$$



47.6 طريقة رايلي–ريتز

للسياق التاريخي، انظر §12.3.1

47.6.1 الاشتقاق

66 عند تصغير الطاقة الكامنة الكلية، عبّرنا عن الطاقة الكامنة بدلالة كميات فيزيائية، أي إزاحات ودورانات عند عقد معينة، ثم فرضنا سكونها:

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1}\delta\Delta_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2}\delta\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_n}\delta\Delta_n.$$

67 في منهج أعم، لكنه يظل تقريبياً، نعبر عن الإزاحات ومن ثم الطاقة الكامنة بدلالة معاملات مجهولة في دالة مثل

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i + \Phi_0,$$

حيث a_i معاملات غير محددة، وΦ_i دوال موضعية ملائمة ومحددة مسبقاً؛ وستصبح لاحقاً دوال الشكل N_i في صياغة العناصر المحددة.

68 في مبدأ الطاقة الكامنة الكلية كان لدينا حقل إزاحة واحد بدلالة n متغيرات، أما الآن فلنا تعبيرات متعددة للحقل بدلالة n معاملات a_i.

69 يجب أن تحقق Φ_i ثلاثة شروط:

1. أن تكون مستمرة.
2. أن تكون مقبولة، أي تحقق الشروط الحدية الأساسية. أما الشروط الطبيعية فهي متضمنة في العبارة التغايرية، لكن تحققها أيضاً يحسن النتائج.
3. أن تكون مستقلة وكاملة، أي يمكن مطابقة الإزاحة الدقيقة ومشتقاتها الواردة في Π اعتباطياً عند استعمال عدد كافٍ من الحدود، مع تضمين الحدود ذات الرتب الدنيا.

70 تكون Φ عادة كثيرة حدود أو دالة مثلثية. ونحدد المعاملات a_i من شرط سكون Π لتغايرات اعتباطية δa_i:

$$\delta\Pi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i}\delta a_i = 0.$$

ولأن التغايرات مستقلة واعتباطية:

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2}_{0} + \ldots + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\delta a_n}_{0} = 0. \tag{47.40}$$

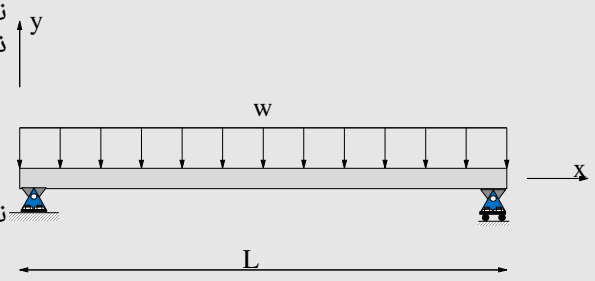
قارن ذلك بالمعادلة 47.34.

71 نحصل على n معادلات آنية مستقلة خطياً. وبعد إيجاد الإزاحات نحدد الانفعالات والإجهادات أو القوى الداخلية. وهكذا استُبدلت مسألة لا نهائية درجات الحرية بمسألة محدودة.

47.6.1.1 مثال 47.11: رايلي–ريتز؛ كمرة بسيطة الارتكاز موزعة الحمل بانتظام

نريد تحديد الإزاحة العظمى للكمرة المجاورة باستعمال الحل ذي المتسلسلة اللانهائية:

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \ldots.$$



نحتفظ في هذا الحل بالحد الأول فقط:

$$v(x) = a_1 x(L-x).$$

نلاحظ ما يأتي:

1. تتحقق الشروط الحدية الأساسية الهندسية مباشرة عند $x = 0$ و$x = L$.
2. يمكن إبقاء v بدلالة a_1 ووضع $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$. ولو أُبقي الحدّان a_1 وa_2 للزم وضع المشتقتين بالنسبة إليهما مساويتين للصفر.
3. أو يمكن حل a_1 بدلالة v_{max} عند $x = L/2$ ووضع $\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$
\begin{aligned}
\Pi(a_1) &= U(a_1) - W_e(a_1) \\
&= \int_0^L \frac{EI_z}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv(x)dx \\
&= \int_0^L \left[\frac{EI_z}{2}(-2a_1)^2 - a_1 wx(L-x)\right] dx \\
&= \frac{EI_z}{2} 4a_1^2 L - a_1 w\frac{L^3}{2} + a_1 w\frac{L^3}{3} \\
&= 2a_1^2 EI_z L - \frac{a_1 wL^3}{6}.
\end{aligned}
$$

بوضع $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$:

$$
\begin{aligned}
4a_1 EI_z L - \frac{wL^3}{6} &= 0 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{24EI_z}.
\end{aligned}
$$

وبعد تحديد حقل الإزاحة بدلالة a_1، تكون v_{max} عند $L/2$:

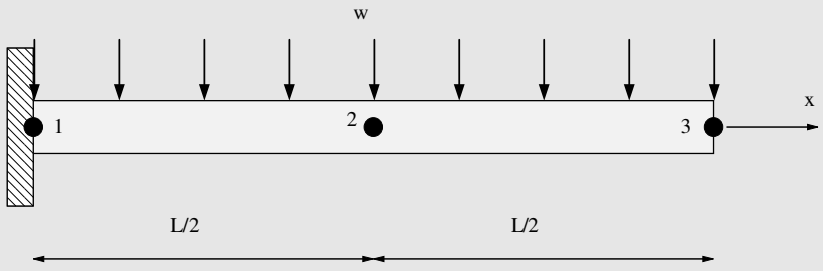
$$
v = \underbrace{\frac{wL^4}{24EI_z}}_{a_1}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) = \frac{wL^4}{96EI_z}.
$$

تُقارن النتيجة بالقيمة الدقيقة $v_{max}^{exact} = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_z} = \frac{wL^4}{76.8EI_z}$، أي بخطأ يقارب 17%.

ملاحظة: إذا احتُفظ بالحدين $a_1 x(L-x) + a_2 x^2(L-x)^2$ نحصل على $a_1 = \frac{wL^2}{24EI_z}$ و$a_2 = \frac{w}{24EI_z}$، وتساوي v_{max} القيمة الدقيقة. لماذا؟

47.6.1.2 مثال 47.12: الطرائق التغايرية

للكمرة الكابولية المبينة أدناه:



وتحت حمل ثابت، نحل المسألة نفسها بالطرائق الآتية:

1. **مبدأ الشغل الافتراضي المتمم** باستعمال قوة نقطية افتراضية وحدية، ثم:
   (a) تحديد الإزاحة الرأسية للنقطة 3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(b) حساب الطاقة الكامنة المتممة الكلية $\left(\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx\right)$.

2. **مبدأ الشغل الافتراضي** باستعمال العبارة الآتية للنظامين الافتراضي والحقيقي:

$$v = a_1 x^2 + a_2 x^3,$$

ثم:

(a) تحديد الإزاحة الرأسية للعقدة 3.

(b) رسم مخطط العزم من المشتقة الثانية للإزاحة ومخطط القص من مشتقة العزم.

(c) حساب الطاقة الكامنة الكلية للنظام.

(d) مقارنة النتائج بنتائج المسألة 1، أي الحل الدقيق، ومناقشتها.

وينبغي أولاً ملاءمة a_1 وa_2 مع إزاحتَي النقطتين 2 و3، أي v_2 وv_3.

3. **مبدأ الطاقة الكامنة الكلية الدنيا**.

4. **رايلي–ريتز**.

5. **مبدأ الشغل الافتراضي؛ إزاحة مثلثية**

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right) a_2,$$

بدلاً من تقريب الإزاحة بكثيرة حدود.

الحل

حل واجب كاثرين سوفكا

يُعطى هنا الحل خطوة خطوة بإذن كاثرين سوفكا. أما حل Mathematica لحمل متغير خطياً ففي الملحق I.2.14.

1. مبدأ الشغل الافتراضي المتمم الإزاحة الرأسية عند النقطة 3، مع $\delta U^* = \delta W^*$:

$$\delta U^* = \int_0^L \delta\bar{M}\frac{M}{EI}dx$$
$$\delta M = x$$
$$M = \frac{wx^2}{2}$$
$$\delta U^* = \int_0^L x\frac{wx^2}{2EI}dx = \frac{w}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \frac{w}{2EI}[\frac{x^4}{4}]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$
$$\delta W^* = \delta P\Delta$$
$$\delta P = 1$$
$$\delta W^* = \Delta$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{wL^4}{8EI}.$$

والطاقة الكامنة المتممة الكلية:

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(wx^2)^2}{4EI}dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4 dx$$

$$\Pi^* = \frac{w^2 L^5}{40EI}.$$

2. مبدأ الشغل الافتراضي

1. الإزاحة الرأسية للنقطة 3، حيث $v = a_1 x^2 + a_2 x^3$.
نكتب v بدلالة إزاحتَي النقطتين 2 و3:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1\frac{L^2}{4} + a_2\frac{L^3}{8}$$
$$v_3 = v(L) = a_1 L^2 + a_2 L^3.$$

وبحل a_1 وa_2 بدلالة الإزاحتين:

$$a_1 = \frac{8v_2 - v_3}{L^2}$$
$$a_2 = \frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}.$$

ومن ثم

$$v = \left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{dv}{dx} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x + 3\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^2$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x.$$

وبالمثل:

$$\delta v = \left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = 2\left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x.$$

2. من $\delta U = \delta W$:

$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx = \frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3)$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx = \frac{2wL\delta v_2}{3} + \frac{wL\delta v_3}{6}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. نضع $\delta U - \delta W = 0$:

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3) - \frac{2wL\delta v_2}{3} - \frac{wL\delta v_3}{6} = 0$$

$$\left[\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3}\right]\delta v_2 + \left[\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6}\right]\delta v_3 = 0$$

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3} = 0$$

$$64v_2 - 20v_3 = \frac{wL^4}{6EI}$$

$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6} = 0$$

$$\frac{4EI}{L^3}\left[-20\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) + 7v_3\right] - \frac{wL}{6} = 0$$

$$\frac{3v_3}{4} = \frac{3wL^4}{32EI}$$

$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}.$$

4. مخططا القص والعزم:

$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$

$$v'' = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$

$$M(x) = EIv'' = \frac{5wL^2}{12} - \frac{wLx}{2}$$

$$V(x) = M'(x) = \frac{-wL}{2}.$$

5. الطاقة الكامنة الكلية:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv\,dx$$

$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$

$$\Pi = \frac{7w^2L^5}{8EI} - \frac{7w^2L^5}{144EI}$$

$$\Pi = \frac{119w^2L^5}{144EI}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. مبدأ الطاقة الكامنة الكلية الدنيا $\delta \Pi = 0$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2)$$

$$W = \int_0^L wv\,dx = \frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}$$

$$\Pi = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2) - \left(\frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}\right)$$

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial v_2}\delta v_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = \frac{2EI}{L^3}(128v_2 - 40v_3) - \frac{2Lw}{3} = 0$$

$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_3} = \frac{2EI}{L^3}(-40v_2 + 14v_3) - \frac{Lw}{6} = 0$$

$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. رايلي–ريتز $\delta \Pi = 0$

$$
\begin{aligned}
v &= a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \\
\phi_1 &= x^2 \text{ و } \phi_2 = x^3 \\
v &= a_1 x^2 + a_2 x^3 \\
\frac{dv}{dx} &= 2a_1 x + 3a_2 x^2 \\
\frac{d^2v}{dx^2} &= 2a_1 + 6a_2 x \\
\Pi &= U - W \\
U &= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = 2EI(a_1^2 L + 3a_2^2 L^3 + 3a_1 a_2 L^2) \\
W &= \int_0^L wv\,dx = \frac{a_1 wL^3}{3} + \frac{a_2 wL^4}{4} \\
\delta\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= EI(4a_1 L + 6a_2 L^2) - \frac{wL^3}{3} = 0 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2 L}{2} \\
\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= 6EI(2a_2 L^3 + a_1 L^2) - \frac{wL^4}{4} = 0 \\
a_2 &= -\frac{wL}{12EI} \\
a_1 &= \frac{wL^2}{24EI} \\
v &= \frac{wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3 \\
v_3 &= \frac{-wL^4}{8EI}.
\end{aligned}
$$

إشارة v_3 سالبة لأن الإزاحة في اتجاه y السالب.

5. مبدأ الشغل الافتراضي بإزاحة مثلثية ، بمساعدة Mathematica:

$$
v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2.
$$

نكتب v بدلالة v_2 وv_3:

$$
\begin{aligned}
v_2 &= v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1(1 - \sqrt{2}/2) + a_2(1 + \sqrt{2}/2) \\
v_3 &= v(L) = a_1 + a_2 \\
a_1 &= \frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2} \\
a_2 &= \frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}.
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم

$$v = \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}\right) + \left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}\right)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}v_2 - v_3 + \sqrt{2}v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$

$$\delta v = \left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right) + \left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right)$$

$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}\delta v_2 - \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$

$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx$$

$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41+20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123-80\sqrt{2})v_3\delta v_3]$$

$$\delta W = \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2-4\sqrt{2}+3\pi)\delta v_3].$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41+20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123-80\sqrt{2})v_3\delta v_3] - \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2-4\sqrt{2}+3\pi)\delta v_3] = 0.$$

$$\left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})\right]\delta v_2 + \left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)\right]\delta v_3 = 0.$$

وبجمع معاملات δv_2 وδv_3 وحلهما:

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2}) = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi) = 0.$$

$$82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI}$$

$$v_2 = \frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3$$

$$2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$

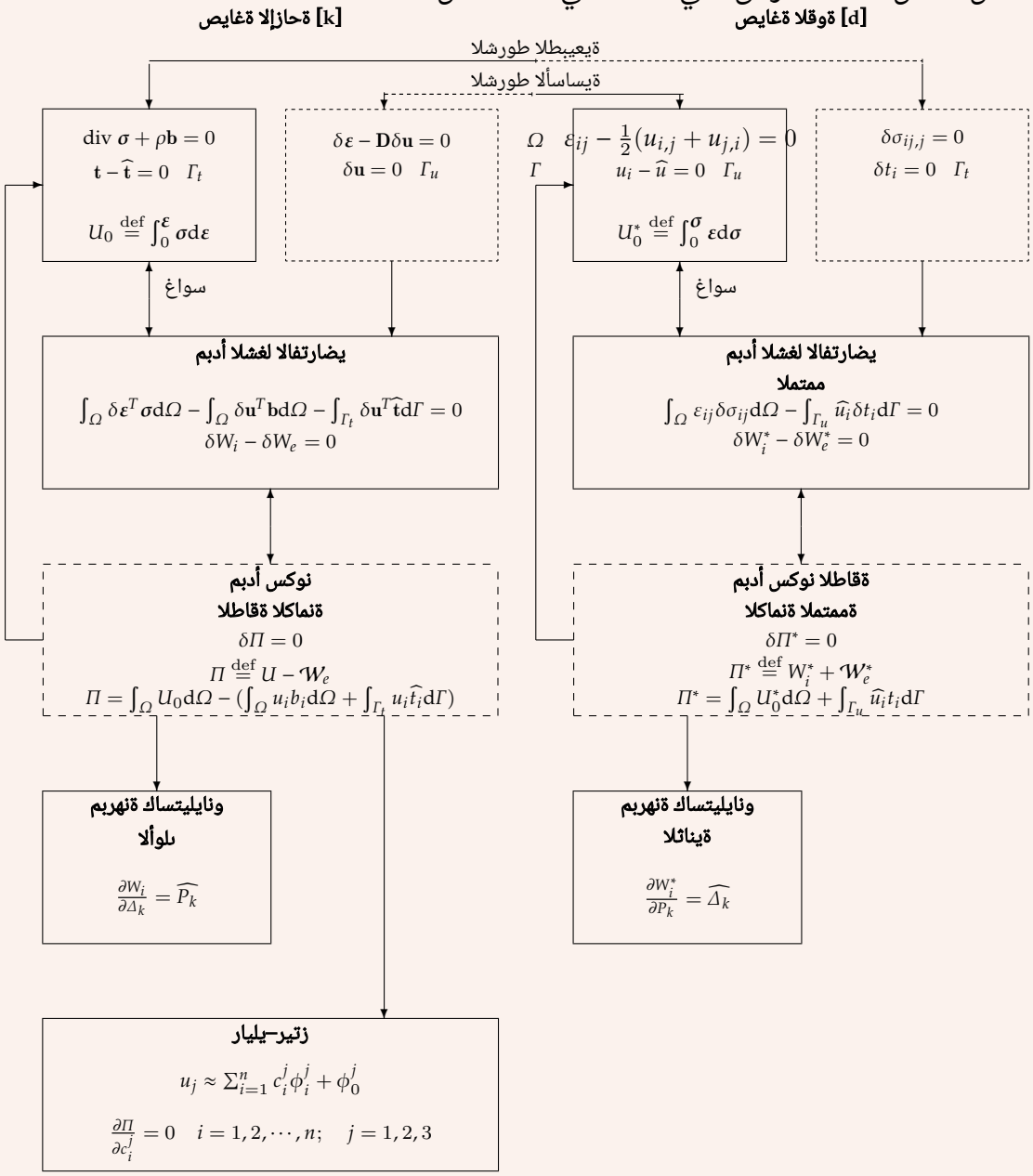
$$1.9756v_3 = 75.1432\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$

$$v_3 = 0.1243\frac{wL^4}{EI}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47.7 الملخص

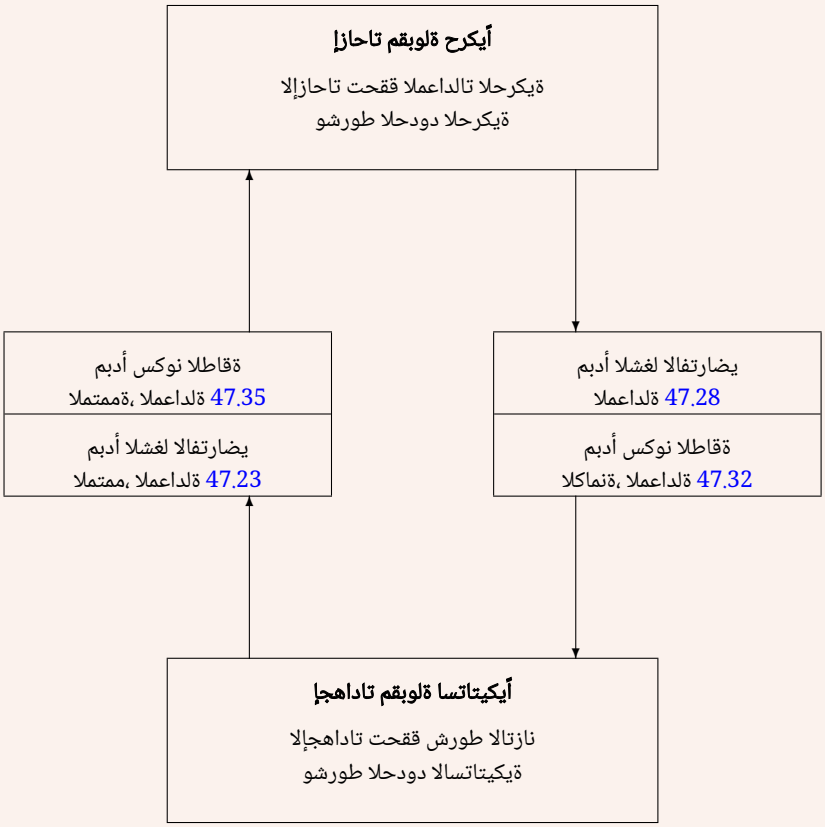
72 يلخص الشكل 47.7 الطرائق التي قُدمت في هذا الفصل.



ةيرياغتلا قئارطلا صخلم :47.7 شكل

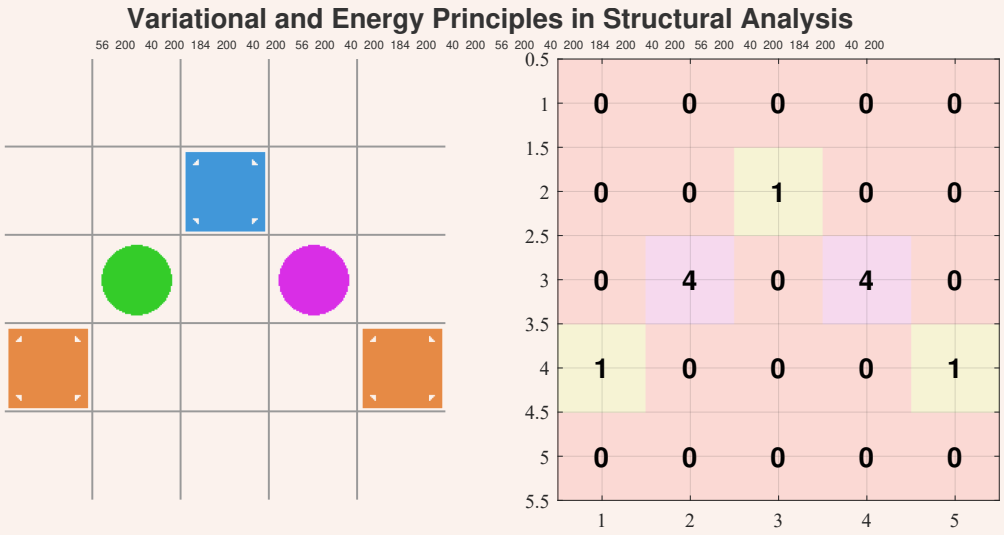
73 يوضح الشكل 47.8 الازدواج بين المبدأين التغايريين. فبدءاً بإزاحات مقبولة حركياً يوفر مبدأ الشغل الافتراضي حلولاً مقبولة استاتيكياً؛ وبالمثل يقود مبدأ الشغل الافتراضي المتمم، بدءاً بإجهادات مقبولة استاتيكياً، إلى حلول مقبولة حركياً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 47.8: ةيرياغتلا ئدابملا جاودزا

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



chapter H، لصفلاب صاخلا يفيرعتلا زمرلا

48 دوال الاستيفاء

ملخص

في طريقة رايلي–ريتز حللنا المسألة التغايرية باستعمال تقريب دالي لحقل الإزاحة (§47.6)، إلا أن المعاملات المستعملة لم يكن لها مدلول فيزيائي. نقدم في هذا الفصل تقريبات متعددة الحدود للإزاحة بدلالة الإزاحات العقدية المعلومة. وتُعرف دوال الاستيفاء هذه باسم دوال الشكل.

نستعرض استيفاءات بدرجات متعددة الحدود المختلفة، باستعمال أنظمة الإحداثيات الديكارتية والمثلثية والطبيعية، في بعد واحد وكذلك في بعدين وثلاثة أبعاد لعناصر الأوساط المستمرة المحددة.

وكما قدمنا مصفوفات التحويل قبل عرض طريقة الصلابة المباشرة، نمهد هنا لطريقة العناصر المحددة بمناقشة دوال الشكل.

48.1 مقدمة 1544
48.1.1 خصائص دوال الشكل 1544
48.1.2 مثلث باسكال 1545
48.1.3 أنظمة الإحداثيات 1546
48.1.4 الاستمرارية 1551
48.2 دوال الشكل 1551
48.2.1 الصياغة المباشرة 1551
48.2.2 دوال الاستيفاء اللاغرانجية . . . 1557
48.2.3 دوال الاستيفاء الهرميتية 1563

48.1 مقدمة

48.1.1 خصائص دوال الشكل

1 ذكرنا في طريقة رايلي–ريتز (§47.6) أن الدالة Φ يجب أن تكون مستمرة، وأن تحقق الشروط الحدية، وأن تكون مستقلة وكاملة.

2 عند الانتقال إلى طريقة العناصر المحددة تُستبدل معاملات Φ بـ*دوال الشكل* $\mathbf{N}$.

3 دالة الشكل دالة رياضية تستعمل لاستيفاء حل متغير الحقل، مثل الإزاحة أو درجة الحرارة، داخل العنصر. وهي تحدد تغير هذا المتغير داخل العنصر انطلاقاً من قيمه عند عقد العنصر.

4 تشمل الخصائص الأساسية لدوال الشكل ما يأتي:

الاستيفاء: تستوفي دوال الشكل متغير الحقل بين العقد؛ فإذا عُرفت قيمته عند العقد أمكن حسابه عند أي نقطة داخل العنصر.

القيم العقدية: تكون قيمة دالة الشكل N_i مساوية للواحد عند العقدة i، وللصفر عند بقية عقد العنصر، وبذلك يكون الاستيفاء تاماً عند العقد.

الاستمرارية: تعتمد استمرارية دوال الشكل على نوع العنصر وطبيعة المسألة. فالعناصر الخطية ذات دوال شكل مستمرة، وقد تكون مشتقات دوال العناصر الأعلى رتبة مستمرة أيضاً.

حركة الجسم الصلب: يجب تمثيلها، أي مثلاً $v = a_1 + \dots$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الانفعال الثابت: يجب تمثيله أيضاً.

الاعتماد على البعد: تتغير دوال الشكل باختلاف بعد العنصر.

48.1.2 مثلث باسكال

توجد صلة بين دوال الشكل ومثلث باسكال من خلال البنية الرياضية وخواص دوال الشكل متعددة الحدود، ولا سيما في العناصر الأعلى رتبة.

يمكن ربط معاملات دوال الشكل القائمة على متعددات الحدود بمعاملات ذات الحدين التي تظهر في مثلث باسكال.

يعطي مثلث باسكال معاملات ذات الحدين في توسع متعددات الحدود. فمثلاً تتضمن مفكوكات $(a+b)^n$ معاملات تساوي تماماً عناصر مثلث باسكال. وبالمثل يمكن في بعدين كتابة دوال الشكل بحدود متعددة الحدود التي تضم تراكيب من x وy، وتتبع معاملات هذه الحدود عند التوسع نمط معاملات ذات الحدين.

لعنصر مثلثي تربيعي قد تُكتب دوال الشكل على الصورة:

$$N_1(x,y) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 xy + f_1 y^2$$

$$N_2(x,y) = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 x^2 + e_2 xy + f_2 y^2$$

$$N_3(x,y) = a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 x^2 + e_3 xy + f_3 y^2$$

تُحدد المعاملات $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ من القيم العقدية، ويمكن ربطها بمعاملات ذات الحدين.

يبين الجدول 48.1 تفسيراً تخطيطياً لدوال الشكل بدلالة حدود سلاسل متعددات الحدود وفق مثلث باسكال. يبين الجدول 48.2 حدود متعددات الحدود الموجودة في صيغ العناصر المختلفة.

جدول 48.1: تفسير دوال الشكل بدلالة سلاسل متعددات الحدود في بعد واحد وبعدين.

ثابت						a_1								
خطي					$a_2 x$			$a_3 y$						
تربيعي				$a_4 x^2$			$a_5 xy$			$a_6 y^2$				
تكعيبي			$a_7 x^3$			$a_8 x^2 y$			$a_9 xy^2$			$a_{10} y^3$		
رباعي	$a_{11} x^4$			$a_{12} x^3 y$			$a_{13} x^2 y^2$			$a_{14} xy^3$			$a_{15} x^4$	

يحتوي متعدد الحدود *الكامل* على جميع الحدود الواقعة فوق خط معين في مثلث باسكال. وكلما زاد عدد الحدود ازدادت الدقة. فمثلاً $u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_5 xy$ أدق من $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$، لكن معدل التقارب لا يتغير لأن التقريب الثاني ليس تربيعياً كاملاً.

تسمى حدود التقريب التي لا تحسن معدل التقارب بالحدود *الطفيلية*.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 48.2: حدود متعددات الحدود في صيغ العناصر المختلفة في بعد واحد وبعدين

عدد العقد (الحدود)	الحدود	العنصر
2	a_1, a_2	خطي
3	a_1, a_2, a_4	تربيعي
3	a_1, a_2, a_3	ثنائي الخطية (مثلث)
4	a_1, a_2, a_3, a_5	ثنائي الخطية (رباعي)
8	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9	ثنائي التربيع (سيرنديبتي)
9	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{13}	ثنائي التربيع (لاغرانجي)

48.1.3 أنظمة الإحداثيات

48.1.3.1 الإحداثيات الديكارتية

12 يمكن لأي عنصر، محدوداً كان أو غير محدود، كتابة الإزاحة المعممة (انتقالاً أو دوراناً) u عند أي نقطة بدلالة جميع إزاحاته العقدية $\overline{\mathbf{u}}$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(X)\overline{\Delta}_i = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

حيث:

1. $\overline{u}_i$ الإزاحة العقدية المعممة الموافقة لدرجة الحرية i.
2. N_i دالة استيفاء، أو *دالة شكل*، ولها الخاصيتان:
   (a) $N_i = 1$ عند $\overline{u}_i$.
   (b) $N_i = 0$ عند $\overline{u}_j$ حيث $i \neq j$.
3. يمكن اشتقاق $\mathbf{N}$ على أساس:
   (a) حالة تشوه مفترضة تُعرّف بدلالة سلسلة متعددة الحدود.
   (b) دالة استيفاء لاغرانجية أو هرميتية.

13 نميز بين فئتين من المسائل:

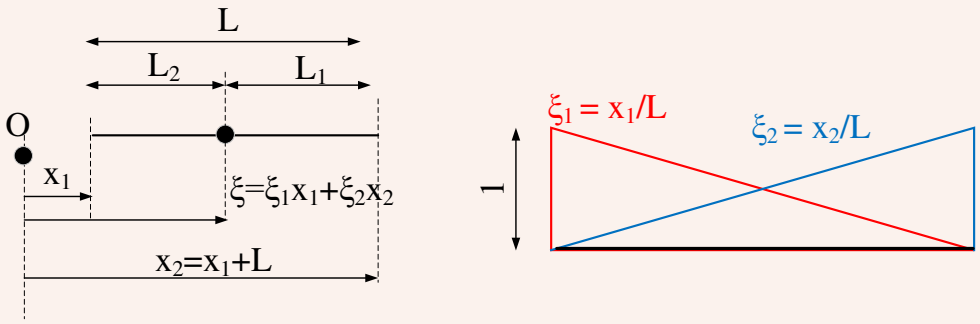
C^0 يلزم فيها ضمان استمرارية الإزاحة فقط بين العناصر، مثل الجمالونات واللي والجهد أو الانفعال المستوي والمرونة ثلاثية الأبعاد.

C^1 يلزم فيها ضمان استمرارية كل من الإزاحات ومشتقاتها، مثل الكمرات والبلاطات والقشريات.

48.1.3.2 الإحداثيات الطبيعية

14 نعرّف الإحداثيين الطبيعيين ξ_1 وξ_2 كما في الشكل 48.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 48.1: نظام الإحداثيات الطبيعية على خط مستقيم

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \quad \text{and} \quad \xi_2 = \frac{L_2}{L}$$

وبما أن $L_1 + L_2 = L$ فإن

$$\xi_1 + \xi_2 = 1.$$

نلاحظ أن $\xi_i = 1$ عند العقدة i وصفر عند جميع العقد الأخرى.

15 لأي نقطة اعتباطية P إحداثيها x:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2.$$

ومن ثم تقابل كل نقطة x مجموعة من الإحداثيات الطبيعية غير المستقلة ξ_1, ξ_2. ويمكن كتابة هذه المعادلات كما يأتي:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \left[\begin{array}{cc} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\}.$$

16 يمكن إجراء الاستيفاء بالإحداثيات الطبيعية:

$$\phi = \underbrace{\lfloor \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \rfloor}_{\mathbf{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\phi}_1 \\ \overline{\phi}_2 \end{array} \right\}.$$

17 يتم تكامل متعددات الحدود في ξ_1 وξ_2 باستعمال العلاقة الآتية، وسيُشتق برهانها الصارم أدناه في المعادلة 48.1:

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \mathrm{d}L = L \frac{k!\, l!}{(1+k+l)!}.$$

كذلك:

$$\begin{array}{rcll} \int_L x \mathrm{d}L & = & \int_L (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \mathrm{d}L & = \frac{L}{2}(x_1 + x_2) \\ \int_L \xi_1 \xi_2^2 \mathrm{d}L & = & L \frac{2}{4!} & = \frac{L}{12} \end{array}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

48.1.3.3 الإحداثيات المثلثية

18 الإحداثيات الطبيعية بلا أبعاد، وتُعرّف بالنسبة إلى طول العنصر أو مساحته أو حجمه بدلاً من نظام الإحداثيات العام.

19 تُستعمل غالباً في صياغة عناصر *السيمبلكس*؛ ففي فضاء بعده n يوجد $n+1$ رؤوس و$n+1$ أسطح بعد كل منها $n-1$.

20 تسمح العناصر المثلثية باستعمال متعدد حدود كامل بالإحداثيات الديكارتية لمتغير الحقل، كدرجة الحرارة أو الإزاحة. ولذلك تُستعمل جميع حدود مثلث باسكال المبتور في دوال الشكل. ولا ينطبق ذلك على العنصر الرباعي ثنائي الخطية.

21 نسعى إلى تحديد $\phi = \sum N_i \overline{\phi}_i$، حيث $\overline{\phi}_i$ درجات الحرية العقدية و$N_i = N_i(L_1, L_2, L_3)$.

نبدأ من $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i L_1^q L_2^r L_3^s$، حيث تتغير q, r, s على التراكيب الممكنة وعددها n التي تحقق $q+r+s = p$، وp رتبة متعدد الحدود. مثلاً:

عنصر خطي:

$$\phi = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y$$

عنصر تربيعي:

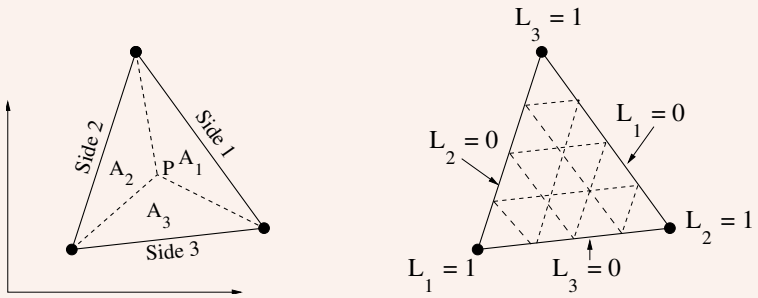
$$\phi = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2 + a_3 L_3^2 + a_4 L_1 L_2 + a_5 L_2 L_3 + a_6 L_3 L_1 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y + a'_4 x^2 + a'_5 xy + a'_6 y^2$$

22 دوال الشكل للمثلث الخطي هي إحداثيات المساحة نفسها:

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3.$$

وتساوي كل دالة الواحد عند عقدة واحدة، والصفر عند العقدتين الأخريين، وتتغير خطياً.

23 تقسم أي نقطة P على سطح مثلثي المثلث 1–2–3 إلى المساحات الجزئية الثلاث A_1, A_2, A_3، الشكل 48.2. ومن ثم نعرّف إحداثيات المساحة بنسب المساحات:



شكل 48.2: نظام الإحداثيات الطبيعية للمثلث

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_{21}}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A},$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث A مساحة المثلث 1–2–3. وبما أن $A = A_1 + A_2 + A_3$ فإن

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1,$$

ويقع مركز المساحة عند $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$.

24 معادلات القيد مرة أخرى هي:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right]}_{\mathbf{a}} \left\{ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right\}.$$

وبأخذ المعكوس:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right\} &= \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{array} \right]}_{\mathbf{a}^{-1}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{ccc} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

حيث $x_{ij} = x_i - x_j$.

25 نلاحظ أن المساحة تساوي نصف المحدد:

$$2A = |\mathbf{A}| = x_2 - x_1y_3 - y_1 - x_{31}y_{21},$$

وإذا عُكست أرقام العقد بحيث يكون الترتيب 1–2–3 مع اتجاه عقارب الساعة أصبح المحدد سالباً.

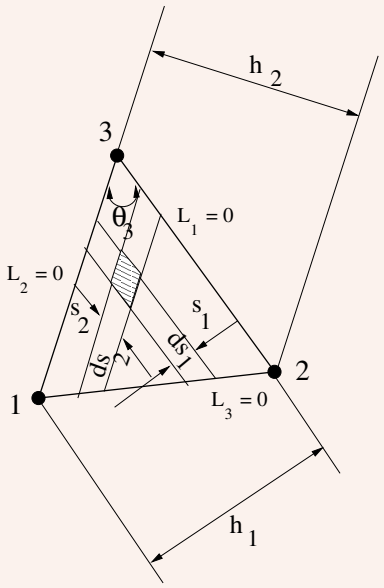
26 يمكن التعبير عن الدالة ϕ بدلالة إحداثيات المساحة:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(L_1, L_2, L_3) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y} \end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{array}{lllllll} \frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{y_2 - y_3}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{2A}; \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{x_3 - x_2}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{2A}; \end{array}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 48.3: التكامل على مثلث

27 يتطلب تكوين مصفوفة الصلابة تكامل عبارات بإحداثيات المساحة من الصورة $\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A$. ولإجراء هذا التكامل، وبالرجوع إلى الشكل 48.3، نتبع (Eisenberg **and** Malvern, 1973):

$$\begin{aligned} dA &= (\mathrm{d}s_1)\csc\theta_3(\mathrm{d}s_2) \\ &= (h_1\mathrm{d}L_1)\csc\theta_3(h_2\mathrm{d}L_2) \\ &= 2A\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2. \end{aligned}$$

ومن ثم:

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\int_0^1 \left[\int_0^{1-L_1} L_1^k L_2^l (1-L_1-L_2)^m \mathrm{d}L_2\right]\mathrm{d}L_1.$$

نعوض بعد ذلك $L_2 = t(1-L_1)$ و$\mathrm{d}L_2 = (1-L_1)\mathrm{d}t$ فنحصل على:

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\int_0^1 L_1^k (1-L_1)^{l+m+1}\mathrm{d}L_1 \int_0^1 t^l (1-t)^m \mathrm{d}t.$$

كل تكامل في الطرف الأيمن من صورة دالة بيتا (Abramowitz **and** Stegun, 1970):

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

حيث تشير Γ إلى دالة غاما التي تحقق $\Gamma(n+1) = n!$ للأعداد الصحيحة $n \geq 0$. ومن ثم:

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+l+m+3)}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولأن k, l, m أعداد صحيحة غير سالبة:

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A \frac{k!\, l!\, m!}{(k+l+m+2)!}. \tag{48.1}$$

28 لا تُستعمل العلاقة السابقة إلا للعناصر ذات الأضلاع المستقيمة التي يمكن اشتقاق صيغتها تحليلياً. أما إذا كان أحد الأضلاع منحنياً فلا تُستعمل هذه الصيغة، ويُكامل العنصر عددياً ضمن صياغة متساوية المعلمات.

48.1.4 الاستمرارية

29 تشير استمرارية C^0 إلى وجوب استمرار الدالة عبر حدود العناصر المحددة المتجاورة، من غير اشتراط استمرار مشتقتها الأولى أو المشتقات الأعلى، كما في مسائل الشد المحوري أو اللي.

30 تشير استمرارية C^1 إلى وجوب استمرار الدالة ومشتقتها الأولى معاً عبر حدود العناصر المحددة المتجاورة، كما في عناصر الانحناء عادة.

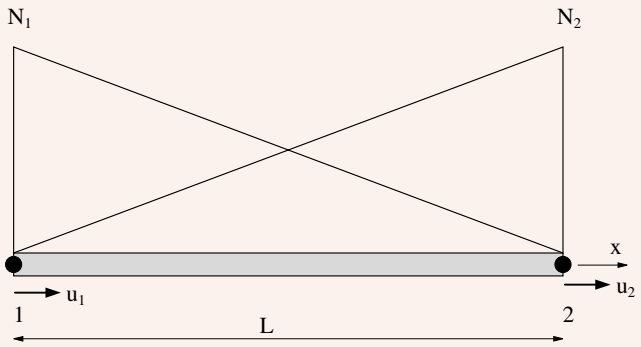
48.2 دوال الشكل

48.2.1 الصياغة المباشرة

48.2.1.1 عنصر جمالون خطي

31 نبدأ بعنصر الجمالون البسيط، ونشتق دالة الشكل صراحة، ثم نستنتج صيغة تعميمها.

32 بالرجوع إلى الشكل 48.4:



شكل 48.4: عنصر محدد محوري

نبدأ من:

$$\begin{aligned} u &= N_1 \overline{u}_1 + N_2 \overline{u}_2 \\ \theta_x &= N_1 \overline{\theta}_{x1} + N_2 \overline{\theta}_{x2}. \end{aligned}$$

33 لأن لدينا درجتي حرية نفترض حالة تشوه خطية:

$$u = a_1 x + a_2, \tag{48.2}$$

حيث يمكن أن تمثل u إما الإزاحة u أو الدوران θ، والشروط الحدية هي $u = \overline{u}_1$ عند $x = 0$ و$u = \overline{u}_2$ عند $x = L$. لذلك:

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= a_2 \\ \overline{u}_2 &= a_1 L + a_2. \end{aligned}$$

34 بحل a_1, a_2 بدلالة $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ نحصل على:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L} \\ a_2 &= \overline{u}_1. \end{aligned}$$

35 بالتعويض وإعادة ترتيب هذه العبارات في المعادلة 48.2:

$$\begin{aligned} u &= (\frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L})x + \overline{u}_1 \\ &= \underbrace{(1 - \frac{x}{L})}_{N_1} \overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \overline{u}_2, \end{aligned}$$

أي:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= \tfrac{x}{L} \end{aligned} \tag{48.3}$$

48.2.1.2 التعميم

36 يمكن تعميم الاشتقاق السابق بكتابة:

$$u = a_1 x + a_2 = \underbrace{\lfloor \; x \quad 1 \; \rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \tag{48.4}$$

حيث تمثل $\mathbf{p}$ التقريب متعدد الحدود، و$\mathbf{a}$ متجه المعاملات.

37 نطبق الشروط الحدية:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ L & 1 \end{array} \right]}_{\mathcal{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبأخذ معكوس $\mathcal{L}$:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array}\right\}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ L & 0 \end{array}\right]}_{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}.$$

38 بالتعويض في المعادلة 48.4 نحصل على:

$$u = \underbrace{\lfloor\ (1-\tfrac{x}{L}) \quad \tfrac{x}{L}\ \rfloor}_{\underbrace{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}_{\mathbf{N}}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}.$$

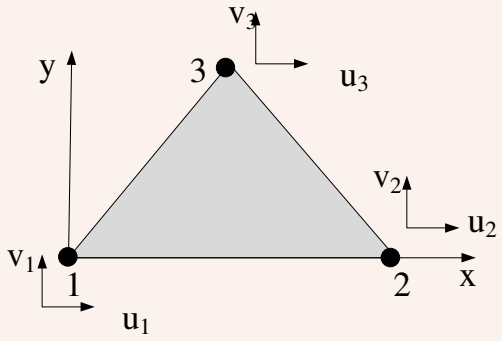
وعليه تُستخرج دوال الشكل $\mathbf{N}$ مباشرة من:

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}.$$

39 يتعذر أحياناً إيجاد $\mathcal{L}^{-1}$، وقد ينطوي ذلك في حالات أخرى على صعوبات جبرية كبيرة للهندسات الاعتباطية. لذلك سنقدم لاحقاً دوال الاستيفاء اللاغرانجية والهرميتية.

48.2.1.3 عنصر المثلث ثابت الانفعال

40 ندرس الآن العنصر المثلثي في الشكل 48.5: بحقل إزاحة *ثنائي الخطية* في كل من x وy:



شكل 48.5: عنصر المثلث ثابت الانفعال

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \\ u &= \underbrace{\lfloor\ 1 \quad x \quad y\ \rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\right\}}_{\{\mathbf{a}\}}. \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

41 كما سبق، نبحث أولاً عن دوال الشكل، فنطبق الشروط الحدية عند العقد على إزاحات u:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \tag{48.5}$$

نضرب بعد ذلك معكوس $\mathcal{L}$ في المعادلة 48.5 بـ $\mathbf{p}$ فنحصل على:

$$u = N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + N_3\overline{u}_3,$$

حيث:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) \\ N_2 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x y_3 - x_3 y) \\ N_3 &= \frac{y}{y_3}. \end{aligned}$$

وتساوي كل دالة من دوال الشكل الثلاث الواحد عند عقدتها الموافقة، والصفر عند العقدتين الأخريين.

42 تُشتق دوال الشكل نفسها للإزاحة v:

$$v = N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + N_3\overline{v}_3.$$

43 ومن ثم يُعطى حقل الإزاحة بـ:

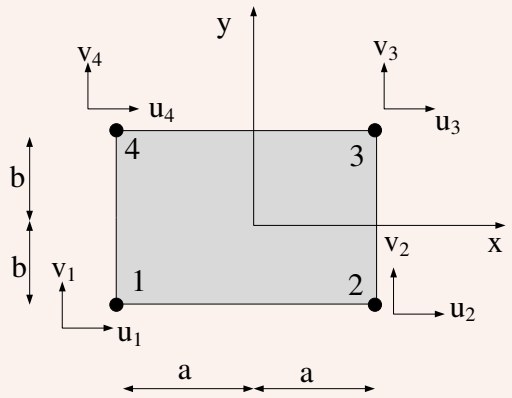
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \end{Bmatrix}.$$

ويسمى العنصر الموافق *مثلث الانفعال الثابت* (CST)، لأن حقل إزاحته خطي ومن ثم انفعاله ثابت.

48.2.1.4 العنصر المستطيل ثنائي الخطية

44 ندرس الآن العنصر الرباعي في الشكل 48.6: بحقل إزاحة *ثنائي الخطية* في x وy. وباستعمال دالة الاستيفاء اللاغرانجية في المعادلة 48.6، وبدءاً بإزاحة u، نجري استيفاءين: الأول على الحافة السفلى 1–2، والثاني على الحافة العليا 4–3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 48.6: عنصر مستطيل ثنائي الخطية

45 من المعادلة 48.6 مع $m = 1$:

$$\begin{aligned}\overline{u}_{12} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_2 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_2.\end{aligned}$$

وبالمثل:

$$\begin{aligned}\overline{u}_{43} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_4 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_3 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_3.\end{aligned}$$

46 نستوفي بعد ذلك في اتجاه y على الضلعين 1–4 و2–3 بين $\overline{u}_{12}$ و$\overline{u}_{43}$. ونستعمل المعادلة 48.6 ثانية، لكن نستبدل y بـx:

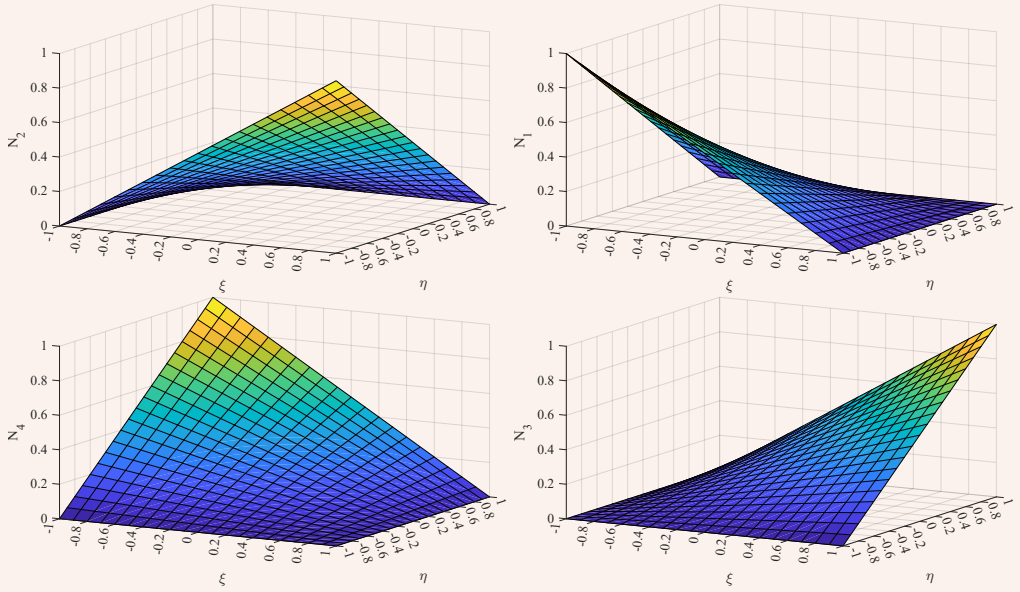
$$\begin{aligned}u &= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\overline{u}_{12} + \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}\overline{u}_{43} \\ &= \frac{b - y}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{b - y}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 + \frac{y + b}{2b}\frac{a - x}{2a}\overline{u}_4 + \frac{y + b}{2b}\frac{x + a}{2a}\overline{u}_3 \\ &= \underbrace{\frac{(a - x)(b - y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{(a + x)(b - y)}{4ab}}_{N_2}\overline{u}_2 + \underbrace{\frac{(a + x)(b + y)}{4ab}}_{N_3}\overline{u}_3 + \underbrace{\frac{(a - x)(b + y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_4\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

47 يسهل التحقق من أن $N_i = 1$ عند العقدة i، وأن دوال الشكل الأخرى تساوي صفراً، وأن $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1$ عند أي نقطة. لذلك:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{Bmatrix}.$$

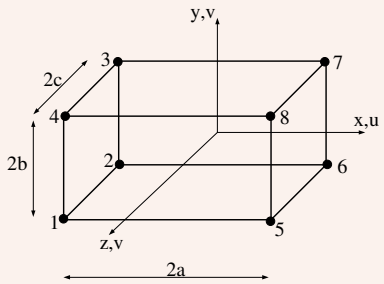
48 يبين الشكل 48.7 دوال الشكل للعنصر الرباعي متساوي المعلمات ذي العقد الأربع.



شكل 48.7: دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد الأربع

48.2.1.5 عنصر متوازي المستطيلات ثلاثي الخطية

49 بتعميم الاشتقاق السابق، تكون دوال الشكل لعنصر صلد مستطيل ثلاثي الخطية، الشكل 48.8: كما يأتي:



شكل 48.8: عنصر صلد مستطيل ثلاثي الخطية

$$\left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{w}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \\ \overline{w}_4 \end{array}\right\},$$

حيث:

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc}.$$

48.2.2 دوال الاستيفاء اللاغرانجية

48.2.2.1 العناصر الرباعية

50 حُصل في المنهج السابق على دوال الشكل بالخطوات:

1. افتراض دالة متعددة الحدود $u = \mathbf{pa}$.
2. تطبيق الشروط الحدية $\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{L}\mathbf{a}$.
3. حساب معكوس $\mathcal{L}$.
4. وأخيراً $\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$.

باتباع هذه العمليات نكون قد عرّفنا بالفعل *دوال الاستيفاء اللاغرانجية* لمسائل استمرارية C^0 بين العناصر، أي استمرارية الإزاحة وحدها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51 يحدد الاستيفاء اللاغرانجي معاملات تمثيل دالة بسلسلة متعددة الحدود، وهي $\mathbf{N}$ هنا، بدلالة القيم المعرفة عند نقاط منفصلة، أي العقد هنا. وللنقاط الواقعة على خط:

$$N_i = \frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{m+1}(x-x_j)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{m+1}(x_i-x_j)} \tag{48.6}$$

وبتوسيع المعادلة السابقة:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{m+1})} \\ N_2 &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{m+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{m+1})} \\ N_{m+1} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{(x_{m+1}-x_1)(x_{m+1}-x_2)\cdots(x_{m+1}-x_m)}. \end{aligned}$$

52 للعضو المحوري، $m=1$ و$x_1=0$ و$x_2=L$، فتنتج:

$$u = \frac{(x-L)}{-L}\overline{u}_1 + \frac{x}{L}\overline{u}_2 = \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2,$$

وهي مطابقة للمعادلة 48.3.

48.2.2.2 المثلثات

53 يمكن اشتقاق دوال الشكل للعناصر الأخرى من دالة الاستيفاء اللاغرانجية في المعادلة 48.6:

$$\begin{aligned} l_k^n &= \frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L-L_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L_k-L_i)} \\ &= \frac{(L-L_0)(L-L_1)\cdots(L-L_{k-1})(L-L_{k+1})\cdots(L-L_n)}{(L_k-L_0)(L_k-L_1)\cdots(L_k-L_{k-1})(L_k-L_{k+1})\cdots(L_k-L_n)}. \end{aligned}$$

54 إذا رمزنا إلى العقدة النموذجية i بالأعداد الثلاثة q,r,s الموافقة لمواضع الإحداثيات L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}، أمكن كتابة دوال الشكل بدلالة ثلاث دوال استيفاء لاغرانجية:

$$N_i = l_q^q(L_1)l_r^r(L_2)l_s^s(L_3).$$

55 باستعمال هذه الصيغة تكون دوال الشكل للعناصر الأعلى رتبة:

مثلث خطي:

$$N_i = L_i$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

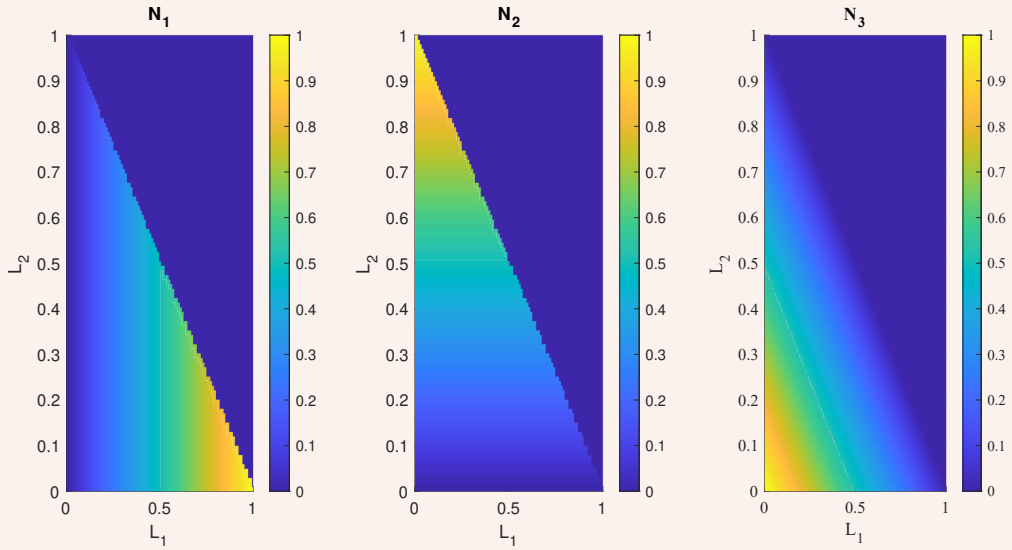
مثلث تربيعي:

$$\begin{aligned} N_i &= L_i(2L_i - 1) && \text{العقد الركنية} \\ N_j &= 4L_iL_k && \text{عقد منتصف الضلع، و} i,j,k \text{ على الضلع نفسه} \end{aligned}$$

مثلث تكعيبي:

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{2}L_i(3L_i - 1)(3L_i - 2) && \text{العقد الركنية} \\ N_j &= \tfrac{9}{2}L_iL_k(3L_i - 1) && \text{عقد منتصف الضلع، و} i,j,k \text{ على الضلع نفسه} \\ N_{10} &= 27L_1L_2L_3 && \text{العقدة الداخلية} \end{aligned}$$

56 يبين الشكل 48.9 دوال الشكل للمثلث الخطي ذي العقد الثلاث. وفي إحداثيات المساحة لا يمكن تصور دوال الشكل إلا بعد تحديد **N** بدلالة L_1, L_2.

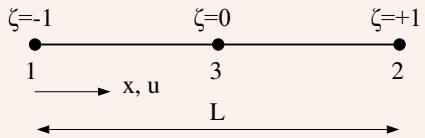


شكل 48.9: دوال الشكل للعنصر المثلثي الخطي ذي العقد الثلاث

48.2.2.3 عنصر جمالون تربيعي

57 نطبق الآن دالة الاستيفاء اللاغرانجية لاشتقاق دوال الشكل لعنصر جمالون تربيعي.

58 نبين العنصر التربيعي ذا العقد الثلاث في الشكل 48.10.



شكل 48.10: عنصر قضيب تربيعي ذو ثلاث عقد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

59 تُستخرج دوال الشكل من دالة الاستيفاء اللاغرانجية في المعادلة 48.6 بعد استبدال ξ بـx. ويكون الحد k في متعدد حدود رتبته $n-1$:

$$\begin{aligned} N_k^n &= \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi-\xi_i)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi_k-\xi_i)} \\ &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)(\xi_k-\xi_2)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\cdots(\xi_k-\xi_n)}. \end{aligned}$$

60 لعنصر تربيعي ذي ثلاث عقد تكون $\xi_1=-1$ و$\xi_2=+1$ و$\xi_3=0$. وبالتعويض نحصل على دوال الشكل الثلاث:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{(\xi-1)(\xi-0)}{(-1-1)(-1-0)} = \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-\xi^2. \end{aligned}$$

ومن ثم:

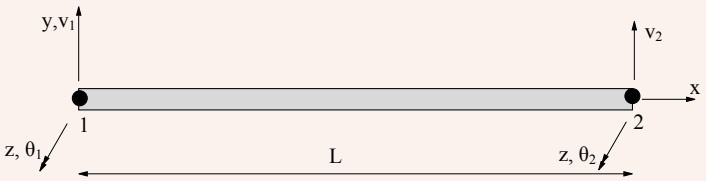
$$x(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \overline{x}_3\ \rfloor^T \quad \text{and} \quad u(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3\ \rfloor^T \tag{48.7}$$

حيث:

$$\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \lfloor\ \tfrac{1}{2}(\xi^2-\xi) \quad \tfrac{1}{2}(\xi^2+\xi) \quad 1-\xi^2\ \rfloor \tag{48.8}$$

48.2.2.4 الكمرة

61 نستعمل المعادلات المشتقة في §48.2.1.2 مع الرجوع إلى الشكل 48.11. لدينا أربع درجات حرية



شكل 48.11: عنصر محدد للانحناء

$\{\mathbf{u}\}_{4\times1}$، ومن ثم نحتاج إلى دوال الشكل الأربع N_1 إلى N_4 التي تُستخرج من أربعة شروط حدية. ولذلك نفترض تقريباً متعدد الحدود للإزاحات من الدرجة الثالثة:

$$\begin{aligned} v &= a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \\ \theta &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3a_1x^2+2a_2x+a_3. \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يمكن إعادة كتابة v كما يأتي:

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \tag{48.9}$$

62 نطبق الآن الشروط الحدية:

1. $v = \overline{v}_1$ عند $x = 0$.
2. $v = \overline{v}_2$ عند $x = L$.
3. $\theta = \overline{\theta}_1 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ عند $x = 0$.
4. $\theta = \overline{\theta}_2 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ عند $x = L$.

أي:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}}.$$

وبأخذ المعكوس:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{48.10}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63 بدمج المعادلتين 48.10 و48.9 نحصل على:

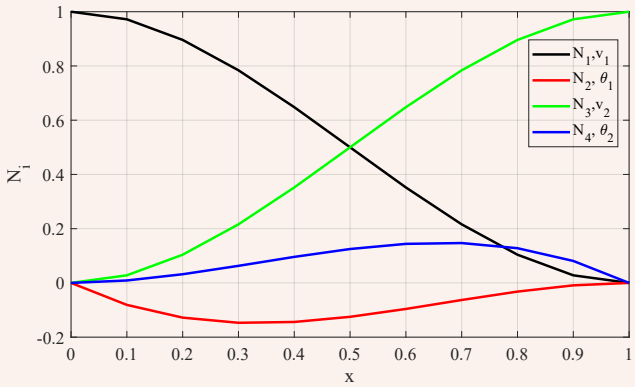
$$
\begin{aligned}
u &= \underbrace{\lfloor\, x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\
&= \underbrace{\lfloor\, \underbrace{(1+2\xi^3-3\xi^2)}_{N_1} \quad \underbrace{x(1-\xi)^2}_{N_2} \quad \underbrace{(3\xi^2-2\xi^3)}_{N_3} \quad \underbrace{(\xi^2-\xi)}_{N_4} \,\rfloor}_{\underbrace{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}_{\mathbf{N}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ v_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}}.
\end{aligned}
$$

حيث $\xi = \frac{x}{l}$.

64 وعليه تكون دوال الشكل لعنصر الانحناء:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= (1+2\xi^3-3\xi^2) \\
N_2 &= x(1-\xi)^2 \\
N_3 &= (3\xi^2-2\xi^3) \\
N_4 &= x(\xi^2-\xi)
\end{aligned}
\tag{48.11}
$$

وهي مبينة في الشكل 48.12. يبين الجدول 48.3 خصائص دوال الشكل هذه.



شكل 48.12: دوال الشكل لانحناء عنصر كمرة منتظم

65 سنعيد أدناه اشتقاق دوال الشكل نفسها (§48.2.3.1) باستعمال دوال الاستيفاء الهرميتية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

	$\xi=0$		$\xi=1$	
الدالة	N_i	$N_{i,x}$	N_i	$N_{i,x}$
$N_1=(1+2\xi^3-3\xi^2)$	1	0	0	0
$N_2=x(1-\xi)^2$	0	1	0	0
$N_3=(3\xi^2-2\xi^3)$	0	0	1	0
$N_4=x(\xi^2-\xi)$	0	0	0	1

جدول 48.3: خصائص دوال الشكل لعنصر الكمرة

48.2.3 دوال الاستيفاء الهرميتية

66 في المسائل التي تتضمن المشتقة الأولى لدالة الشكل، أي ذات استمرارية C^1 بين العناصر، مثل الانحناء حيث يلزم استمرار الميل، ينبغي استعمال دوال الاستيفاء الهرميتية بدلاً من اللاغرانجية.

67 دوال الاستيفاء الهرميتية دوال تكعيبية متعددة القطع تحقق شرطي استمرارية الإزاحة والميل، أي C^0 وC^1. وهي شائعة في التصميم بمساعدة الحاسوب بوصفها منحنيات بيزييه.

68 الاستيفاء الهرميتي نوع من الاستيفاء متعدد الحدود يقدر قيمة دالة اعتماداً على قيم الدالة ومشتقاتها عند نقاط الاستيفاء، أي العقد. وهو يضمن مطابقة متعدد الحدود المستوفى لقيم الدالة المعطاة عند العقد، وكذلك مطابقة مشتقاته الأولى، وربما الأعلى، عند هذه العقد. وينتج عن ذلك تقريب أكثر نعومة ودقة، ولا سيما عندما تكون مشتقات الدالة معلومة.

69 مثالاً على ذلك، نريد استيفاء دالة $f(x)$ عند النقطتين x_0, x_1 باستعمال الاستيفاء الهرميتي. نعرف قيمتي الدالة $f(x_0), f(x_1)$ ومشتقتيها الأوليين $f'(x_0), f'(x_1)$.

70 يمكن إنشاء متعدد حدود الاستيفاء الهرميتي $H(x)$ من الدرجة الثالثة كما يأتي:

$$H(x)=h_0(x)f(x_0)+h_1(x)f(x_1)+h_2(x)f'(x_0)+h_3(x)f'(x_1).$$

وتُعرّف دوال الأساس $h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ بما يضمن تحقق شروط الاستيفاء.

71 تُنشأ دوال الأساس لتحقيق شروط الاستيفاء عند العقد. وللعقدتين x_0, x_1 يمكن تعريفها بـ:

$$h_0(x)=(1-2(x-x_0)\frac{d}{dx}L_0(x))(L_0(x))^2$$

$$h_1(x)=(1-2(x-x_1)\frac{d}{dx}L_1(x))(L_1(x))^2$$

$$h_2(x)=(x-x_0)(L_0(x))^2$$

$$h_3(x)=(x-x_1)(L_1(x))^2$$

حيث $L_0(x), L_1(x)$ متعددا حدود أساس لاغرانج الخطيان:

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

48.2.3.1 إعادة اشتقاق دوال شكل الكمرة

72 اشتققنا في §48.2.2.4 دوال شكل الكمرة باستعمال الطريقة المطورة في §48.2.1.2 وبالرجوع إلى الشكل 48.11.

73 في نظرية كمرة أويلر–برنولي يكون المجهولان الأساسيان الإزاحة المستعرضة w والدوران، أو الميل، $\theta = \frac{dw}{dx}$. ولتمثيل سلوك الكمرات تحت الانحناء يجب أن تضمن دوال الشكل استمرارية الإزاحة والميل عبر حدود العناصر، ودوال الشكل الهرميتية ملائمة لهذا الغرض.

74 لعنصر كمرة بعقدتين x_0, x_1 درجتا حرية عند كل عقدة: الإزاحة المستعرضة w والدوران $\theta = \frac{dw}{dx}$. وتُنشأ متعددات حدود الاستيفاء الهرميتية بحيث يستمر كل من الإزاحة والميل عبر حدود العناصر.

75 يمكن كتابة متعدد حدود الاستيفاء الهرميتي $H(x)$ لعنصر كمرة على الصورة:

$$H(x) = h_0(x)w_0 + h_1(x)\theta_0 + h_2(x)w_1 + h_3(x)\theta_1,$$

حيث:

- w_0, θ_0 الإزاحة والميل عند العقدة x_0.
- w_1, θ_1 الإزاحة والميل عند العقدة x_1.
- $h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ دوال الشكل الهرميتية.

76 لتحديد دوال الشكل h_0, h_1, h_2, h_3 نفرض الشروط الآتية عند العقد:

1. $H(x_0) = w_0$.
2. $\frac{dH}{dx}(x_0) = \theta_0$.
3. $H(x_1) = w_1$.
4. $\frac{dH}{dx}(x_1) = \theta_1$.

77 لإنشاء دوال الأساس نستعمل الإحداثي المعياري $\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. وتُعرّف دوال الأساس كما يأتي:

1. $h_0(\xi)$: الإزاحة عند x_0.
2. $h_1(\xi)$: الميل عند x_0.
3. $h_2(\xi)$: الإزاحة عند x_1.
4. $h_3(\xi)$: الميل عند x_1.

$h_0(x)$

$$h_0(x_0) = 1, \quad h_0'(x_0) = 0, \quad h_0(x_1) = 0, \quad h_0'(x_1) = 0$$

ونشئ $h_0(\xi)$ كما يأتي:

$$h_0(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$h_1(x)$

$$h_1(x_0) = 0, \quad h_1'(x_0) = 1, \quad h_1(x_1) = 0, \quad h_1'(x_1) = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ونشئ $h_1(\xi)$ كما يأتي:

$$h_1(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$h_2(x)$

$$h_2(x_0) = 0, \quad h_2'(x_0) = 0, \quad h_2(x_1) = 1, \quad h_2'(x_1) = 0$$

ونشئ $h_2(\xi)$ كما يأتي:

$$h_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$h_3(x)$

$$h_3(x_0) = 0, \quad h_3'(x_0) = 0, \quad h_3(x_1) = 0, \quad h_3'(x_1) = 1$$

ونشئ $h_3(\xi)$ كما يأتي:

$$h_3(\xi) = \xi^2 - \xi^3$$

وبجمع النتائج يكون متعدد حدود الاستيفاء الهرميتي لعنصر الكمرة:

$$H(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_0 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(x - x_0)\theta_0 + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_1 + (\xi^2 - \xi^3)(x - x_1)\theta_1,$$

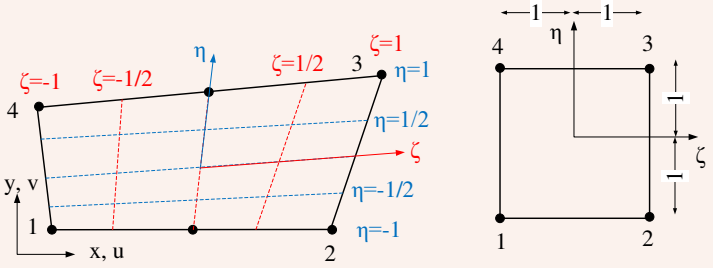
حيث $\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. وهذه الدوال مطابقة لما اشتُق سابقاً في §48.2.2.4.

48.2.3.2 العناصر الرباعية

48.2.3.2.1 العنصر الرباعي الخطي (q4)

78 سبق أن اشتققنا مصفوفة صلابة عنصر مستطيل محاذٍ لمحوري الإحداثيات، وتعمم الصياغة الحالية ذلك الاشتقاق إلى شكل رباعي اعتباطي.

79 يبين الشكل 48.13 العنصر.



شكل 48.13: عنصر متساوي المعلمات ذو أربع عقد

80 في الحالة ثنائية الأبعاد:

$$u(\xi, \eta) = \sum N_{ij}\overline{u}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_j(\xi)N_i(\eta)\overline{u}_k,$$

حيث $k=(i-1)m+j$. ولعنصر ثنائي الخطية $n=m=2$ يمكن إعادة الكتابة:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \lfloor\ N_1(\xi)\quad N_2(\xi)\ \rfloor \begin{bmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_3 \\ \overline{u}_2 & \overline{u}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\xi^T \overline{\mathbf{u}} \mathbf{N}_\eta \\ &= N_1(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_2 + N_1(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_4 + N_2(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_3 \\ &= N_1(\xi,\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi,\eta)\overline{u}_2 + N_3(\xi,\eta)\overline{u}_3 + N_4(\xi,\eta)\overline{u}_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i \overline{u}_i. \end{aligned}$$

81 بتطبيق معادلة الاستيفاء اللاغرانجي 48.7 نحصل على:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)} = \frac{(\xi-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)} = \frac{(\xi+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_1(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)} = \frac{(\eta-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ N_2(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)} = \frac{(\eta+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\eta). \end{aligned}$$

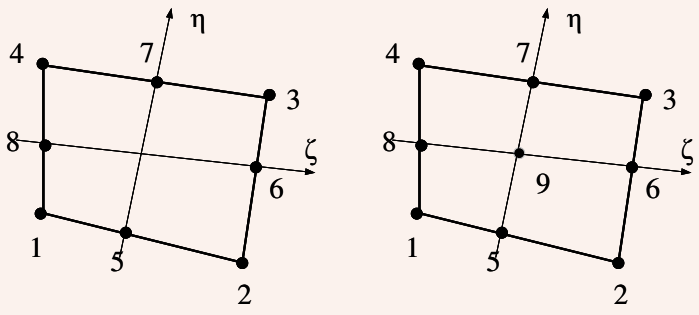
بالتعويض في المعادلة 48.12:

$$\begin{array}{rclrcl} N_1(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{array} \tag{48.12}$$

وفي هذه الحالة البسيطة كان يمكن تحديد دوال الشكل بالملاحظة المباشرة.

48.2.3.2.2 العناصر الرباعية التربيعية

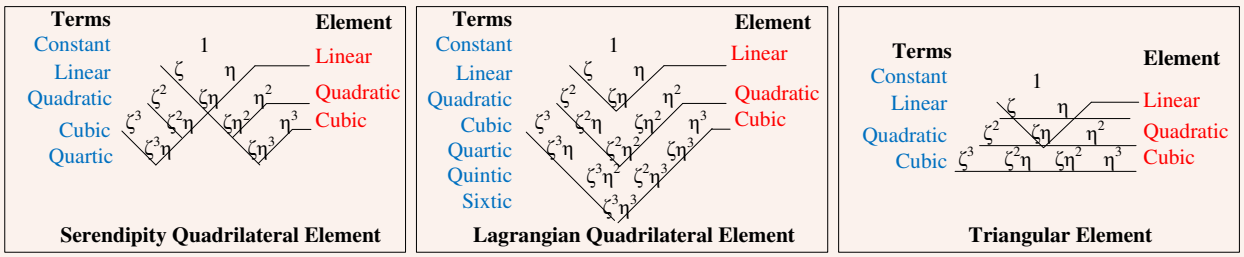
82 للعنصر الرباعي التربيعي احتمالان كما في الشكل 48.14.



شكل 48.14: العنصران الرباعيان التربيعيان من نوع سيرنديبتي ولاغرانج

83 سيُستعمل مثلث باسكال، الشكل 48.15، لاحقاً لتبرير اختيار حدود حقل الإزاحة في العناصر متساوية المعلمات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



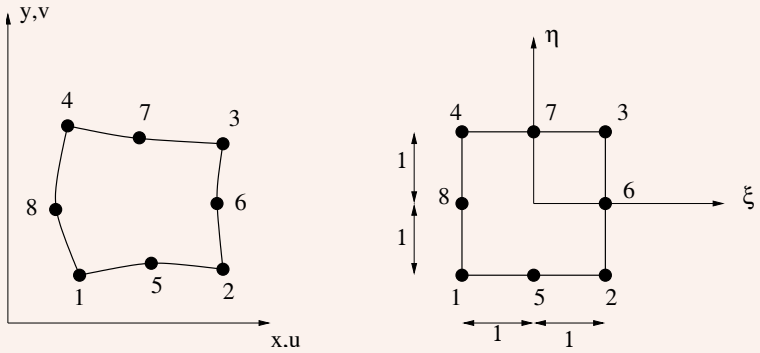
شكل 48.15: مثلثا باسكال للعناصر الرباعية والمثلثية

48.2.3.2.2.1 عنصر سيرنديبتي (q8)

84 وفق مثلث باسكال يُعطى حقل الإزاحة بـ:

$$u = \underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x + a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y + a_9xy^2}_{\boxed{3}}.$$

85 يغيب في هذه الصياغة الحد x^2y^2، وتقابل الحدود الثمانية في التوسع متعدد الحدود المفترض العقد الثماني: أربع ركنية وأربع في منتصف الأضلاع.



شكل 48.16: عنصر محدد تربيعي متساوي المعلمات من نوع سيرنديبتي: العنصر العام والأب

86 بالقياس إلى الجدولين 48.1 و48.2 يمكن إيجاد دوال الشكل بالملاحظة المباشرة:

$$\begin{aligned}
N_i &= \tfrac{1}{4}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta\eta_i\right)\left(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1\right) && i=1,2,3,4\\
N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta\eta_i\right) && i=5,7\\
N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta^2\right) && i=6,8.
\end{aligned}$$

وهي مدونة في الجدول 48.4.

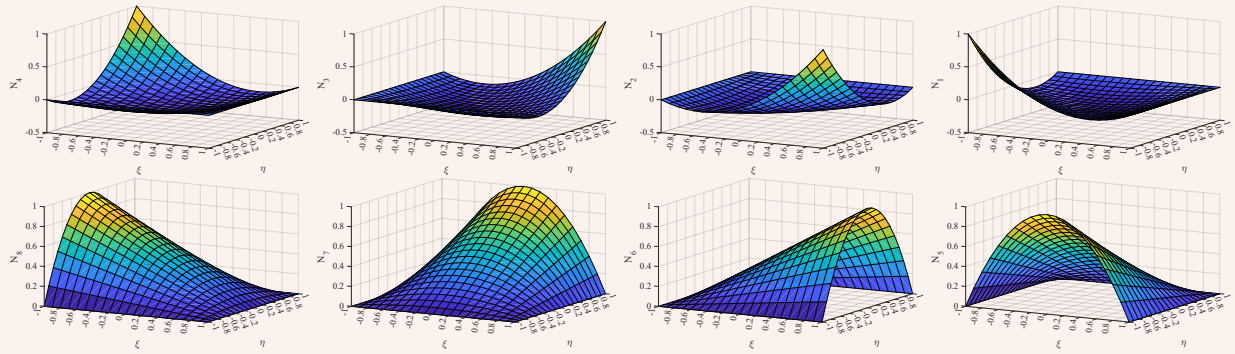
87 يبين الشكل 48.17 دوال الشكل للعقد الركنية وعقد منتصف الأضلاع.

48.2.3.2.2.2 العنصر اللاغرانجي (q9)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 48.4: دوال الشكل ومشتقاتها الطبيعية للعنصر q8

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$



شكل 48.17: دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد الثماني

88 يُعطى حقل الإزاحة في هذا العنصر بـ:

$$u = \underbrace{\underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x + a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y + a_9xy^2}_{\boxed{3}}}_{\text{Serendipity}} + \underbrace{a_{12}x^2y^2}_{\boxed{4}}.$$

89 تظهر جميع الحدود التربيعية، ولذلك يحوي التوسع متعدد الحدود تسعة حدود وتقابل العقدة التاسعة عقدة داخلية.

90 تُستخرج دوال الشكل مباشرة من دوال الاستيفاء اللاغرانجية.

91 للعنصر Q9 تسع عقد ودوال شكل تربيعية في اتجاهي ξ, η، وتُشتق باستيفاء لاغرانج.

92 يبين الجدول 48.5 عقد العنصر وإحداثياتها الطبيعية (ξ, η).

93 دوال شكل لاغرانج لعنصر تربيعي أحادي البعد هي:

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 48.5: الإحداثيات العقدية الطبيعية للعنصر q9

العقدة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ξ	1-	0	1	1	1	0	1-	1-	0
η	1-	1-	1-	0	1	1	1	0	0

94 للعنصر التربيعي ذي العقد عند $\xi = -1, 0, 1$ تكون دوال الشكل:

دالة الشكل $N_0(\xi)$ **عند** $\xi = -1$

$$N_0(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

دالة الشكل $N_1(\xi)$ **عند** $\xi = 0$

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{-1} = 1 - \xi^2$$

دالة الشكل $N_2(\xi)$ **عند** $\xi = 1$

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

95 دوال شكل لاغرانج ثنائية الأبعاد للعنصر Q9 هي حواصل ضرب دوال لاغرانج أحادية البعد في اتجاهي ξ, η:

$$N_{ij}(\xi, \eta) = N_i(\xi) \cdot N_j(\eta).$$

96 نبني الآن دوال الشكل:

1. عند $(\xi, \eta) = (-1, -1)$:

$$N_{11}(\xi, \eta) = N_0(\xi) N_0(\eta) = \left(\frac{\xi(\xi - 1)}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)}{4}$$

2. عند $(\xi, \eta) = (0, -1)$:

$$N_{21}(\xi, \eta) = N_1(\xi) N_0(\eta) = (1 - \xi^2)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)}{2}$$

3. عند $(\xi, \eta) = (1, -1)$:

$$N_{31}(\xi, \eta) = N_2(\xi) N_0(\eta) = \left(\frac{(\xi + 1)\xi}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta - 1)}{2}\right) = \frac{(\xi + 1)\xi\eta(\eta - 1)}{4}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. عند $(\xi,\eta)=(1,0)$:

$$N_{32}(\xi,\eta)=N_2(\xi)N_1(\eta)=\left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)(1-\eta^2)=\frac{(\xi+1)\xi(1-\eta^2)}{2}$$

5. عند $(\xi,\eta)=(1,1)$:

$$N_{33}(\xi,\eta)=N_2(\xi)N_2(\eta)=\left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right)=\frac{(\xi+1)\xi(\eta+1)\eta}{4}$$

6. عند $(\xi,\eta)=(0,1)$:

$$N_{23}(\xi,\eta)=N_1(\xi)N_2(\eta)=(1-\xi^2)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right)=\frac{(1-\xi^2)(\eta+1)\eta}{2}$$

7. عند $(\xi,\eta)=(-1,1)$:

$$N_{13}(\xi,\eta)=N_0(\xi)N_2(\eta)=\left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right)=\frac{\xi(\xi-1)(\eta+1)\eta}{4}$$

8. عند $(\xi,\eta)=(-1,0)$:

$$N_{12}(\xi,\eta)=N_0(\xi)N_1(\eta)=\left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)(1-\eta^2)=\frac{\xi(\xi-1)(1-\eta^2)}{2}$$

9. عند $(\xi,\eta)=(0,0)$:

$$N_{22}(\xi,\eta)=N_1(\xi)N_1(\eta)=(1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

97 تسمى دالة الشكل الأخيرة غالباً *دالة الفقاعة*.

98 تختلف دوال الشكل هذه قليلاً عن دوال عنصر سيرنديبتي.

99 يبين الشكل 48.18 دوال الشكل.

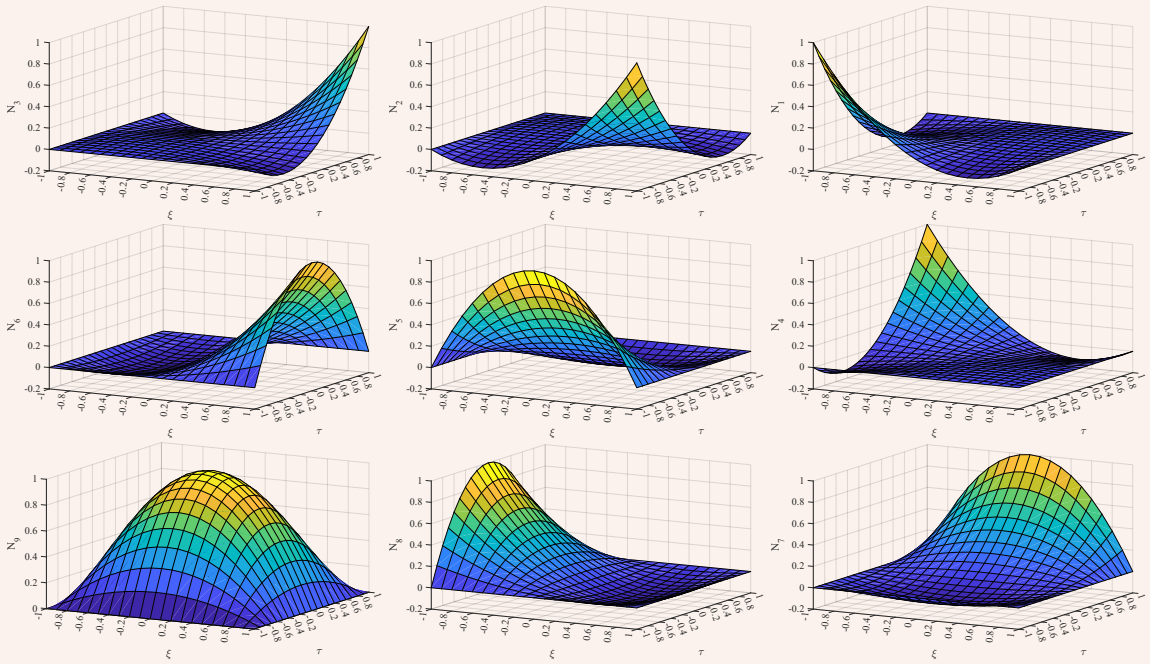
100 يكون أداء عناصر Q9 أفضل كثيراً من Q8 عندما لا تكون الحواف متوازية أو عندما تكون منحنية قليلاً.

48.2.3.3 العنصر المتغير (الهرمي)

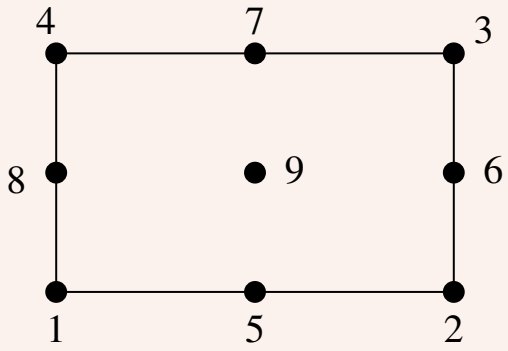
101 يمكن تعميم الصياغة السابقة إلى عنصر رباعي بعدد متغير من العقد. وقد تختلف رتبة التغير على حوافه المختلفة، مما يفيد في تدريج شبكة العناصر المحددة.

102 في أبسط صياغة له أربع عقد وتغير خطي على جميع الأضلاع، وفي الحالة الأعم يكون عنصراً تربيعياً كاملاً. وتُستخرج دوال الشكل من الجدول **??**. وهذه الدوال للعنصر الهرمي الذي تُرقم فيه العقد الركنية أولاً ثم عقد منتصف الأضلاع، الشكل 48.19.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 48.18: دوال الشكل للعنصر الرباعي ذي العقد التسع



شكل 48.19: ترقيم العقد في العناصر متساوية المعلمات

جدول 48.6: دوال الشكل للعناصر ذات العدد المتغير من العقد

		فقط إذا كانت العقدة i موجودة				
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
N_1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$\frac{1}{4}N_9$
N_3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$\frac{1}{4}N_9$
N_4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

48.2.3.4 العنصر المثلثي (T6)

103 يمكن كتابة دوال الشكل التربيعية للإزاحة بالإحداثيات الطبيعية:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i. \tag{48.13}$$

حيث حُصل على دوال الشكل في المعادلة 48.2.2.2:

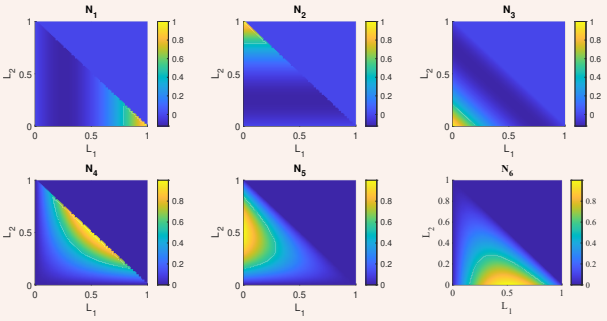
$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 \qquad N_4 = 4L_1L_2 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 \qquad N_5 = 4L_2L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 \qquad N_6 = 4L_3L_1 \end{aligned} \tag{48.14}$$

104 بدلاً من ذلك كان يمكن اشتقاق دوال الشكل بافتراض

$$u(L_1, L_2) = a_1 + a_2L_1 + a_3L_2 + a_4L_1^2 + a_5L_1L_2 + a_6L_2^2, \tag{48.15}$$

ثم تحديد المعاملات من تحقيق الشروط الحدية الملائمة.

105 يعطي الجدول 48.7 دوال الشكل ومشتقاتها بالنسبة إلى الإحداثيين الطبيعيين L_1, L_2، بدلالة L_1, L_2, L_3، ويبين الشكل 48.20 تمثيلها البياني.

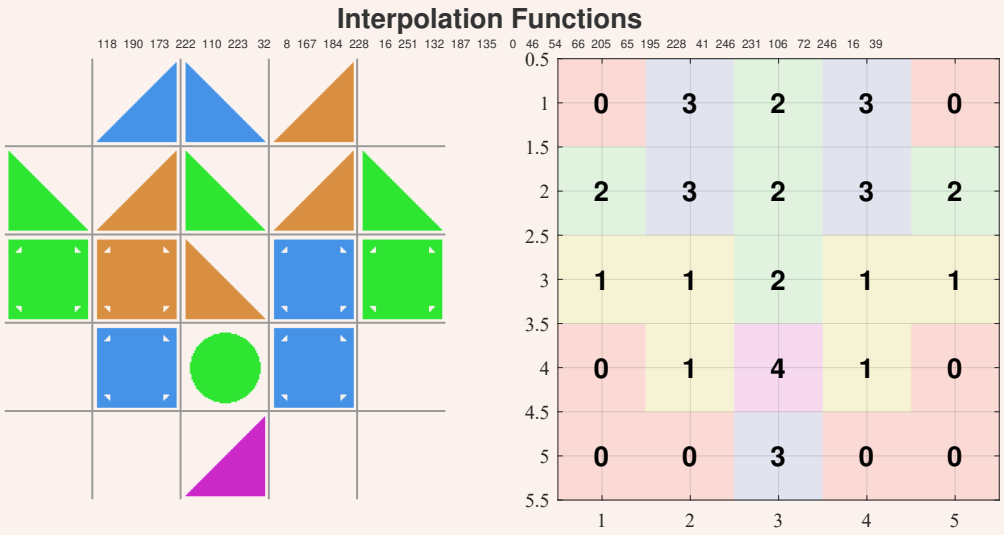


شكل 48.20: دوال الشكل للعنصر المثلثي التربيعي ذي العقد الست

i	N_i	N_{i,L_1}	N_{i,L_2}	N_{i,L_3}
1	$(2L_1 - 1)L_1$	$4L_1 - 1$	0	0
2	$(2L_2 - 1)L_2$	0	$4L_2 - 1$	0
3	$(2L_3 - 1)L_3$	0	0	$4L_3 - 1$
4	$4L_1L_2$	$4L_2$	$4L_1$	0
5	$4L_2L_3$	0	$4L_3$	$4L_2$
6	$4L_1L_3$	$4L_3$	0	$4L_1$

جدول 48.7: دوال الشكل ومشتقاتها للعنصر T6

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الهوية البصرية الخاصة بالفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49 صياغة العناصر الخطية

ملخص

قدمنا في الفصول السابقة الطرائق التغايرية، ولا سيما مبدأ الإزاحة الافتراضية، وناقشنا دوال استيفاء حقل الإزاحة بدلالة القيم العقدية.

نطبق الآن هذه المفاهيم لصياغة طريقة العناصر المحددة. يقدم هذا الفصل صياغة عامة للعناصر أحادية البعد، كالكمرات والجمالونات، ولعناصر الأوساط المستمرة.

وهذا ليس المنهج الوحيد؛ إذ ندرس في فصل لاحق طريقة غاليركن (§51) التي تؤدي عملياً إلى صياغة مطابقة في الميكانيكا.

49.1 مقدمة 1574
49.2 العنصر المحدد 1575
49.2.1 مقدمة 1575
49.2.2 علاقات الانفعال–الإزاحة 1575
49.2.3 الإزاحات والانفعالات الافتراضية 1576
49.2.4 صياغة مصفوفة صلابة العنصر . 1576
49.2.5 استرجاع الإجهادات 1578
49.3 تطبيقات 1578
49.3.1 عنصر الجمالون 1578
49.3.2 عنصر الانحناء 1579
49.4 المتطلبات العامة للعنصر 1579
49.5 خطأ التجزئة ومعدل التقارب 1581
49.6 طبيعة الحد الأدنى لحلول الطاقة الكامنة الدنيا 1582
49.7 الاتزان والتوافق في الحل 1583

49.1 مقدمة

درسنا حتى الآن أنظمة مستمرة، ونسعى في هذا الفصل إلى تطبيق العلاقات المشتقة سابقاً على أنظمة مجزأة. تُحسب الحلول الأساسية عند *العقد* فقط بدلاً من حل مستمر داخل Ω. يتطلب تطبيق مبدأ الإزاحة الافتراضية حقل إزاحة مفترضاً. ويمكن تقريب هذا الحقل بدوال استيفاء مكتوبة بدلالة:

1. معاملات متعددة حدود مجهولة، وهي الأنسب للأنظمة المستمرة وطريقة رايلي–ريتز. مثلاً:

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$

ومن عيوب هذا المنهج أن المعاملات ليس لها معنى فيزيائي.

2. تشوهات عقدية مجهولة، وهي الأنسب للأنظمة المنفصلة وللصيغ القائمة على الطاقة الكامنة:

$$v(\overline{\mathbf{u}}_i) = u = N_1 \overline{\mathbf{u}}_1 + N_2 \overline{\mathbf{u}}_2 + \dots + N_n \overline{\mathbf{u}}_n ,$$

حيث $\overline{\mathbf{u}}_i$ الإزاحة المعلومة عند درجة الحرية i.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49.2 العنصر المحدد

49.2.1 مقدمة

2 اشتققنا في الفصل 40 مصفوفات صلابة عناصر القضيب أحادية البعد، لكن المنهج المستعمل لا يمكن تعميمه على العنصر المحدد العام. أما اشتقاق هذا الفصل فينطبق على عناصر القضيب أحادية البعد، أو شبه المستمرة، وعلى عناصر الأوساط المستمرة ثنائية وثلاثية الأبعاد.

3 أعطى المنهج السابق لاشتقاق مصفوفة الصلابة حلاً دقيقاً، لكنه لا يعمم على عناصر الأوساط المستمرة ثنائية وثلاثية الأبعاد. أما المنهج المعروض هنا فتقريبي، مع أنه يعطي مصفوفة الصلابة الدقيقة لعناصر الانحناء أحادية البعد. وتنتج طريقة العناصر المحددة، على الرغم من تقريبها، نتائج ممتازة عند استعمال عدد كافٍ من العناصر.

49.2.2 علاقات الانفعال–الإزاحة

4 يمكن كتابة الإزاحة u عند أي نقطة داخل العنصر بدلالة دوال الشكل $\mathbf{N}$ والإزاحات العقدية $\overline{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{u}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}.$$

5 يُعرّف الانفعال بعد ذلك بـ:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{u}} \tag{49.1}$$

حيث $\mathbf{B}$ المصفوفة التي تربط الإزاحات العقدية بحقل الانفعال، وتُكتب بدلالة مشتقات $\mathbf{N}$.

49.2.2.1 الأعضاء المحورية

6 باستعمال دوال الشكل المشتقة في المعادلة 48.3، تعطي المعادلة 49.1:

$$u(x) = \underbrace{\lfloor \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1} \quad \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \rfloor}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\left[\underbrace{-\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_1}{\partial x}} \quad \underbrace{\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_2}{\partial x}} \right]}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49.2.2.2 أعضاء الانحناء

7 باستعمال دوال الشكل لعناصر الانحناء المشتقة في المعادلة 48.11:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{y}{\rho} = y\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = y\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}x^2}\overline{\mathbf{v}} \\ &= \underbrace{y\left[\underbrace{\frac{6}{L^2}(2\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-2)}_{\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}} \quad \underbrace{\frac{6}{L^2}(-2\xi+1)}_{\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}}\right]}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix}\overline{v}_1\\ \overline{\theta}_1\\ \overline{v}_2\\ \overline{\theta}_2\end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}}\end{aligned} \tag{49.2}$$

49.2.3 الإزاحات والانفعالات الافتراضية

8 تمهيداً لتطبيق مبدأ الإزاحة الافتراضية، نعرّف متجهي الإزاحة والانفعال الافتراضيين بدلالة الإزاحات العقدية ودوال الشكل:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x)\delta\overline{\mathbf{u}} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \mathbf{B}(x)\delta\overline{\mathbf{u}}.\end{aligned}$$

49.2.4 صياغة مصفوفة صلابة العنصر

9 نطبق الآن مبدأ الإزاحة الافتراضية ونعيد ذكر بعض العلاقات المعلومة، مع الانتباه إلى ترتيب المصفوفات:

$$\delta U = \delta W \tag{49.3}$$

$$\delta U = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega \tag{49.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{49.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \tag{49.6}$$

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\delta\overline{\mathbf{u}} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T\end{aligned} \tag{49.7}$$

بدمج المعادلات 49.3 و49.4 و49.5 و49.7 و49.6، تُعطى طاقة الانفعال الداخلية الافتراضية بـ:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}}_{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0}_{\boldsymbol{\sigma}^0}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega.\end{aligned} \tag{49.8}$$

10 ويُعطى الشغل الخارجي الافتراضي بـ:

$$\delta W = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}}_{\text{الإزاحة العقدية الافتراضية}} \quad \underbrace{\overline{\mathbf{F}}}_{\text{القوة العقدية}} + \int_l \delta\mathbf{u}q(x)\mathrm{d}x.$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

11 بدمج هذه المعادلة مع $\{\delta\mathbf{u}\} = \mathbf{N}\{\delta\overline{\mathbf{u}}\}$:

$$\delta W = \delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}}\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\,\mathrm{d}x \tag{49.9}$$

12 بمساواة طاقة الانفعال الداخلية في المعادلة 49.8 بالشغل الخارجي في المعادلة 49.9 نحصل على:

$$\underbrace{\underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega}_{\overline{\mathbf{F}}^0}}_{\delta U} = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\overline{\mathbf{F}} + \delta\overline{\mathbf{u}}\underbrace{\int_0^l \mathbf{N}^T\, q(x)\,\mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{F}}^e}}_{\delta W}}} \tag{49.10}$$

أو:

$$\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^o = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e \tag{49.11}$$

13 بعد اختصار الحد $\delta\overline{\mathbf{u}}$ نحصل على معادلة الاتزان نفسها المكتوبة سابقاً. فهي تربط الإزاحة العقدية المجهولة $\overline{\mathbf{u}}$، ومصفوفة صلابة المنشأ $\mathbf{k}$، ومتجه القوى العقدية الخارجية $\overline{\mathbf{F}}$، وقوى العنصر الموزعة $\overline{\mathbf{F}}^e$، ومتجه الإزاحة الابتدائية.

14 ومن هذه العلاقة نعرّف:

تعريف 49.1: مصفوفة الصلابة وقوى العنصر

مصفوفة صلابة العنصر:

$$\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega \tag{49.12}$$

متجه القوة الابتدائية للعنصر:

$$\overline{\mathbf{F}}^0 = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega \tag{49.13}$$

متجه الحمل المكافئ للعنصر:

$$\overline{\mathbf{F}}^e = \int_0^L \mathbf{N}\, q(x)\,\mathrm{d}x \tag{49.14}$$

15 يمكن كتابة معادلة الاتزان العامة:

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^0}_{F_{\text{int}}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e}_{F_{\text{ext}}} = 0.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهذه هي معادلة أويلر المجزأة، أي معادلة الاتزان، الموافقة للمسألة التغايرية المعرفة بمبدأ الشغل الافتراضي.

49.2.5 استرجاع الإجهادات

16 اشتققنا في القسم السابق علاقة عامة تكون فيها الإزاحات العقدية هي المجاهيل الأساسية. ونريد الآن تحديد الإجهادات الداخلية المعممة التي تُطلب غالباً في التصميم. نتذكر أن:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}.\end{aligned}$$

وبعد معرفة متجه الإزاحات العقدية $\bar{\mathbf{u}}$ تعطي المعادلتان:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}.$$

نلاحظ أن المتغيرات الثانوية، أي الانفعالات والإجهادات، مشتقات للمتغير الأساسي، أي الإزاحة، ولذلك قد لا تُحسب بالدقة نفسها.

49.3 تطبيقات

49.3.1 عنصر الجمالون

17 دوال شكل عنصر الجمالون المشتقة في المعادلة 48.3 هي:

$$\begin{aligned}N_1 &= 1-\frac{x}{L}\\ N_2 &= \frac{x}{L}.\end{aligned}$$

18 وعلاقة الانفعال–الإزاحة الموافقة $\mathbf{B}$ هي:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{dN_1}{\mathrm{d}x} & \frac{dN_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}\\ &= \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}.\end{aligned}$$

تختزل المصفوفة التأسيسية $\mathbf{D}$ لعنصر الجمالون إلى العدد E. وبالتعويض في المعادلة 49.12 مع $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A\mathrm{d}x$، ولعنصر ذي مساحة مقطع ثابتة:

$$\mathbf{k} = A\int_0^L \begin{Bmatrix}-\frac{1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{Bmatrix}\cdot E\cdot \begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\mathrm{d}x.$$

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L^2}\int_0^L \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\mathrm{d}x = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

49.3.2 عنصر الانحناء

19 لعنصر الكمرة اشتُقت دوال الشكل في المعادلة 48.11 والمصفوفة **B** في المعادلة 49.2. وبالتعويض في المعادلة 49.12:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, y^2 \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}x.$$

وبما أن $\int_A y^2 \mathrm{d}A = I_z$ تختزل المعادلة 49.12 إلى:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} I_z \, \mathrm{d}x.$$

وفي هذه الحالة البسيطة $\mathbf{D} = E$، ومن ثم:

$$\mathbf{k} = E I_z \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, \mathrm{d}x.$$

20 بتغيير متغير التكامل من $\mathrm{d}x$ إلى $\mathrm{d}\xi$ نحصل على:

$$\mathbf{k} = E I_z \int_0^1 \begin{Bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi - 1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi - 2) \\ \frac{6}{L^2}(-2\xi + 1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi - 1) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi - 1) & -\frac{2}{L}(3\xi - 2) & \frac{6}{L^2}(-2\xi + 1) & -\frac{2}{L}(3\xi - 1) \end{bmatrix} \underbrace{L \mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}x}.$$

أي:

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overline{v}_1 & \overline{\theta}_1 & \overline{v}_2 & \overline{\theta}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}.$$

وهي بالفعل مطابقة للمصفوفة المشتقة سابقاً في المعادلة 40.1.

21 لقد مررنا بأربعة فصول، بدءاً من الفصل 46 حتى الفصل الحالي 49، لنصل إلى اشتقاق هذه المصفوفة بمنهج عام يمكن تطبيقه على أي نوع من العناصر المحددة. وسنستعمله في الفصل التالي لاشتقاق مصفوفة صلابة العناصر متساوية المعلمات.

49.4 المتطلبات العامة للعنصر

22 يجب أن يحقق العنصر المحدد، وهو مجرد حقل إزاحة تقريبي في صياغة رايلي–ريتز، متطلبين أساسيين:

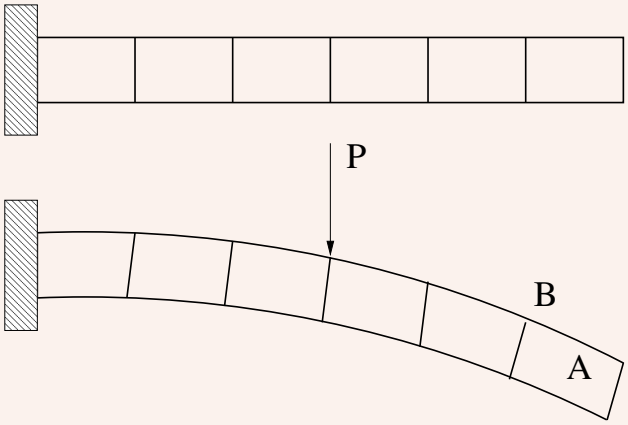
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاكتمال: يجب أن يمثل تجزؤ العناصر المحددة على الأقل الإزاحة الثابتة والانفعال الثابت، أو درجة الحرارة الثابتة وتدرجها الثابت. ويتحقق ذلك في المسائل ثنائية الأبعاد بإدراج:

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + \text{ حدود إضافية محتملة.}$$

التوافق أو المطابقة: يجب أن يكون تقريب الحقل مستمراً عبر حدود العناصر، باستمرارية C^0 أو C^1. ومعظم العناصر المحددة مطابقة، لكن بعضها غير مطابق.

23 في الشكل 49.1 مثلاً يجب أن يكون العنصر A قادراً على حركة جسم صلب من دون انفعالات أو إجهادات داخلية، ويجب عند العقدة B استمرار الإزاحة، دون اشتراط استمرار الميل لهذا العنصر.



شكل 49.1: الاكتمال والتوافق

24 إذا تحقق المتطلبان ضُمن *التقارب*. تعطي طريقة العناصر المحددة حلولاً تقريبية، وكلما زاد عدد العناصر ازدادت دقة الحل. وفي النهاية، عندما تتناقص أبعاد العناصر بلا حد، يجب أن يقترب الحل بلا حد من الحل الدقيق. ومن ثم يضمن الاكتمال والتوافق التقارب.

25 مبرهنة لاكس للتكافؤ:

تعريف 49.2: معيار التقارب

معيار التقارب = متطلب الاكتمال + متطلب التوافق.

26 ثمة متطلبان عمليان أساسيان:

اختبار الرقعة: يمكن تقييم الاكتمال باختبار الرقعة الذي سيُناقش لاحقاً.

طاقة الانفعال الصفرية: في المسائل الإنشائية يجب أن تساوي طاقة الانفعال صفراً عندما يخضع العنصر لحركة جسم صلب. ومصفوفة الصلابة مفردة لأنها تجسد علاقات القوة–الإزاحة ومعادلات الاتزان معاً. ويقابل كل واحدة من هذه المعادلات نمط جسم صلب يمكن كشفه بتحليل القيم الذاتية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49.5 خطأ التجزئة ومعدل التقارب

27 يؤدي التقريب إلى الحل الدقيق في النهاية عندما يقترب حجم العنصر h من الصفر.

28 قد يُحصل في بعض الحالات على الحل الدقيق بعدد محدود من العناصر، بل بعنصر واحد، إذا استطاع التوسع متعدد الحدود في العنصر تمثيل الحل الصحيح تماماً؛ مثل عناصر الجمالون والكمرة وعنصر الجهد المستوي في صفيحة تحت حمل محوري صرف.

29 يمكن دائماً توسيع الحل الدقيق في جوار أي عقدة i بمتعدد حدود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots$$

إذا استُعمل داخل عنصر حجمه h متعدد حدود درجته p، أمكن تمثيل متسلسلة تايلور حتى تلك الدرجة، وكان الخطأ من الرتبة $O(h^{p+1})$.

30 لذلك يكون معدل تقارب العنصر الخطي من الرتبة $O(h^2)$، أي إن تنصيف الشبكة يخفض خطأ الإزاحة إلى ربع قيمته الأصلية.

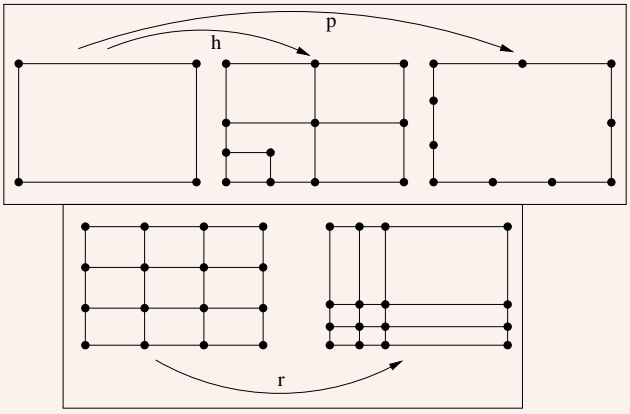
31 ويمكن إظهار أن الانفعالات أو الإجهادات المعطاة بالمشتقات من الرتبة m للإزاحة تتقارب بخطأ $O(h^{p+1-m})$، وأن خطأ طاقة الانفعال، المربعة في الإجهادات، يكون $O(h^{2(p+1-m)})$.

32 تساعد معرفة رتبة التقارب على استقراء الحلول إلى القيمة الصحيحة. فإذا تقاربت الإزاحة بمعدل $O(h^2)$، وكان لدينا الحلان التقريبيان u_1, u_2 من شبكتين حجماهما $h, h/2$، نكتب:

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4,$$

حيث u القيمة المستقرأة.

33 يمكن تسريع التقارب إلى الحل الدقيق كما في الشكل 49.2.



شكل 49.2: تقارب h وp وr

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

h خفض حجم العناصر، أي تنعيم الشبكة.

p زيادة درجة متعدد الحدود، مع إبقاء عدد العناصر وزيادة عدد العقد ودرجات الحرية.

r إعادة موضعة عقد شبكة العناصر المحددة من دون تغيير طوبولوجيا الشبكة.

في تنعيم r يُحتفظ بعدد العقد والعناصر نفسه، لكن تُزاح الشبكة لزيادة كثافتها في مناطق تدرج الإجهاد العالي.

34 يمكن تسريع إجراءات التقارب السابقة ضمن برنامج يدعم تقنيات إعادة التشبيك التكيفية.

35 وقد تنشأ أخطاء إضافية من التقريب العددي داخل الحاسوب.

49.6 طبيعة الحد الأدنى لحلول الطاقة الكامنة الدنيا

36 يكون الحل العددي المشتق من مبدأ الطاقة الكامنة الكلية الدنيا حلاً ذا حد *أدنى* لأن طاقة الانفعال أصغر من القيمة الدقيقة الناتجة من عدد لا نهائي من العناصر.

37 يمكن إظهار ذلك بدراسة الإزاحة u_i الناتجة من حمل P_i يزداد من الصفر إلى قيمته المحددة. يساوي الشغل $P_i u_i/2$، ويجب أن يساوي طاقة الانفعال الداخلية U. أما جهد الحمل المطبق فهو $P_i u_i$، ومن ثم تكون الطاقة الكامنة الدقيقة:

$$\Pi_{\text{exact}} = \frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2} - P_i u_i^{\text{exact}} = -\frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2}.$$

وبالمثل القيمة التقريبية:

$$\Pi_{\text{approx}} = -\frac{P_i u_i^{\text{approx}}}{2}.$$

نعلم أن تقريب Π أعلى جبرياً من القيمة الدقيقة لأن القيمة الدقيقة حد أدنى، ولذلك:

$$\underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{exact}}}}{2}}_{\Pi_{\text{exact}}} < \underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{approx}}}}{2}}_{\Pi_{\text{approx}}},$$

أي:

$$u_i^{\text{approx}} < u_i^{\text{exact}} \tag{49.15}$$

وبعبارة أخرى يكون الحل شديد *الصلابة*.

38 نلاحظ التشابه مع طريقة رايلي–ريتز، إذ أدى أيضاً نقص الحدود في التقريب متعدد الحدود إلى حل شديد الصلابة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49.7 الاتزان والتوافق في الحل

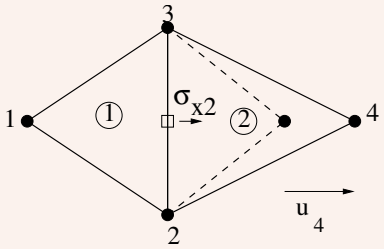
39 في الحل الدقيق يتحقق الاتزان والتوافق على كل عنصر تفاضلي.

40 أما في تجزئة العناصر المحددة فلا يكون ذلك مضموناً دائماً:

اتزان القوى العقدية: يتحقق تلقائياً بالتعريف عند العقد، $\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} = 0$.

التوافق عند العقد: للعناصر المتصلة الإزاحات نفسها عند العقدة المشتركة على درجات الحرية الموافقة.

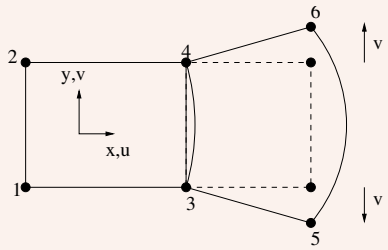
استمرارية الإجهاد بين العناصر: لا تتحقق عادة، أي لا يلزم أن يتحقق الاتزان عبر حدود العناصر. فمثلاً في الشكل 49.3: إذا أُزيحت العقدة 4 وحدها مع ثبات بقية العقد، ينقطع σ_{xx} عبر الحد 2–3 بين



شكل 49.3: استمرارية الإجهاد بين العناصر

العنصرين.

توافق الإزاحات بين العناصر: تحققه معظم العناصر. ويُسمى العنصر الذي لا يحققه غير متوافق أو غير مطابق، الشكل 49.4.

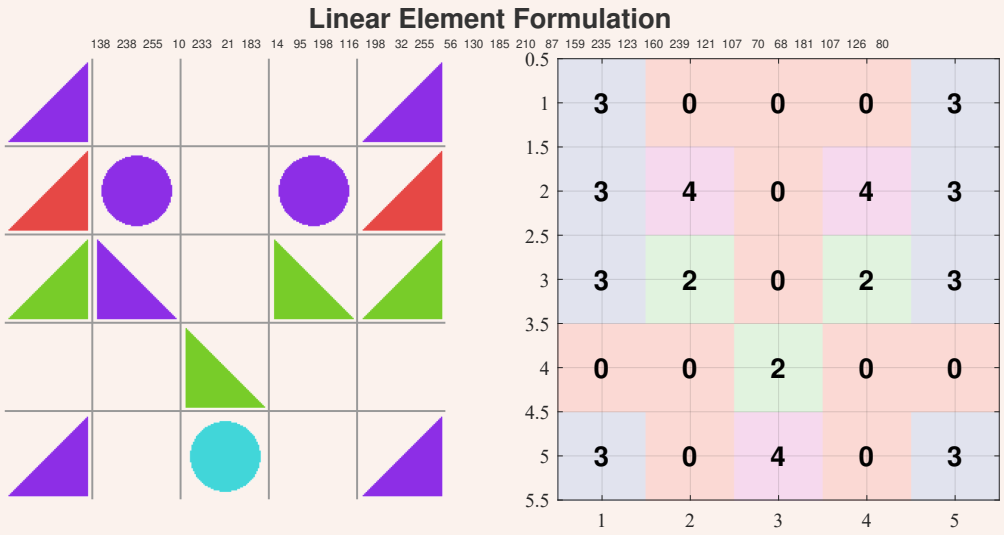


شكل 49.4: استمرارية الانفعال بين العناصر

الاتزان داخل العناصر: لا يتحقق دائماً. فتحقيق الاتزان عند كل نقطة يفرض عموماً علاقات بين درجات الحرية لا تنتج بالضرورة من $\mathbf{k}^e\overline{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} = 0$.

توافق الإزاحة داخل العنصر: يتحقق لأن المطلوب فقط أن تكون إزاحة العنصر مستمرة ووحيدة القيمة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الهوية البصرية الخاصة بالفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

50 العناصر متساوية المعلمات

ملخص

مع أن هذا الكتاب يركز أساساً على العناصر أحادية البعد، فإن النظرية الكامنة في قسم العناصر المحددة تنطبق أيضاً على عناصر الأوساط المستمرة. ومن أكثرها شيوعاً العنصر القائم على الصياغة متساوية المعلمات.

تستعمل العناصر متساوية المعلمات دوال الشكل نفسها للإزاحات والهندسة، مما يسمح بحواف منحنية ويعطي مرونة أكبر في تشبيك المنشأ.

اشتُقت دوال الشكل في الفصل السابق. ونشتق هنا بدقة مصفوفة صلابة هذا النوع من العناصر، وبخاصة العنصر $Q4$، ويمكن اتباع الإجراء نفسه للعناصر الأخرى.

قد تبدو الصياغة في البداية مطولة ومربكة، لكنها تقود إلى تنفيذ برمجي بسيط، وتنطبق على تحليل الإجهاد ثنائي وثلاثي الأبعاد وعلى المسائل غير الإنشائية أيضاً.

تُقيّم مصفوفة صلابة العنصر بالتكامل العددي، ولذلك يعالج الجزء الثاني من الفصل التكامل العددي بالتفصيل.

50.1 مقدمة 1585
50.2 صياغة العنصر 1587
50.2.1 عنصر القضيب 1587
50.2.2 العنصر الرباعي (q4): صياغة مفصلة 1589
50.2.3 العناصر المثلثية 1592
50.2.4 مثال 50.1: المؤثرات اليعقوبية 1595
50.3 التكامل العددي 1596
50.3.1 نيوتن–كوتس 1597
50.3.2 تربيع غاوس–ليجاندر 1598
50.3.3 المناطق المستطيلة والمنشورية 1600
50.3.4 المناطق المثلثية 1601
50.4 استرجاع الإجهادات: الإجهادات العقدية . . 1601
50.5 الأحمال العقدية المكافئة 1603
50.5.1 حمل الجاذبية 1604
50.5.2 حمل الشد السطحي 1605
50.5.3 الانفعالات والإجهادات الابتدائية؛ الحمل الحراري 1606
50.5.4 رتبة التكامل 1607
50.6 القص الطفيلي والعناصر غير المتوافقة . 1610
50.6.1 Q4: المشكلة 1610
50.6.2 Q6: الحل 1611
50.6.3 Qm6: تحسينات إضافية . . . 1611
50.7 درجات الحرية الدورانية 1612

50.1 مقدمة

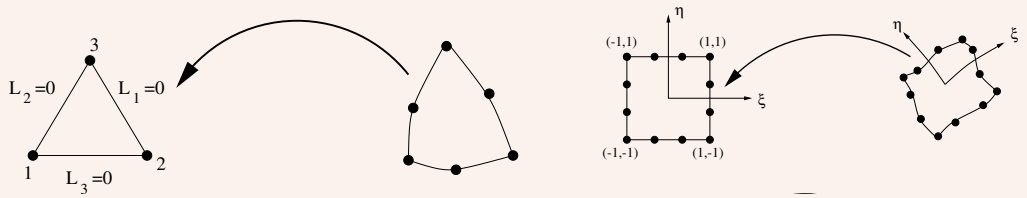
1 درسنا سابقاً عناصر محددة بسيطة، ونشوّه هنا تلك العناصر إلى أشكال اعتباطية أكثر عمومية.

2 وعند رسم الإحداثيات الطبيعية في الفضاء الديكارتي x, y, z تتشوه بدورها إلى مجموعات منحنية جديدة، الشكل 50.1.

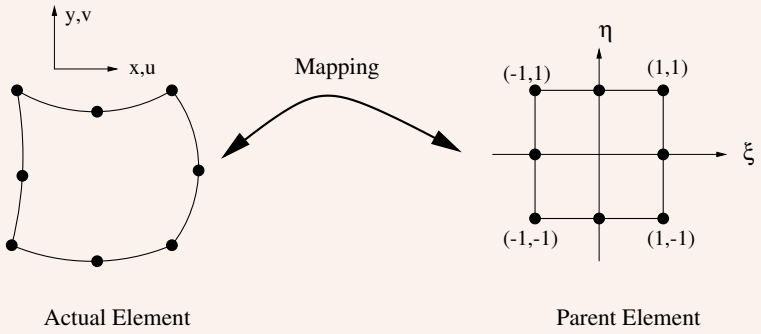
3 تُكتب الإزاحات في الصياغة متساوية المعلمات بدلالة الإحداثيات الطبيعية، لكن يجب اشتقاقها بالنسبة إلى الإحداثيات الديكارتية x, y, z. ويتم ذلك بمصفوفة التحويل $\mathbf{J}$، ولا يعود التكامل قابلاً للحساب التحليلي بل يلزم إجراؤه عددياً.

4 تتراوح الإحداثيات الطبيعية من -1 إلى $+1$، الشكل 50.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.1: تحويل ثنائي الأبعاد لبعض العناصر



شكل 50.2: العنصر الحقيقي والعنصر الأب

5 يمكن كتابة الإزاحات عند أي نقطة داخل العنصر بدلالة الإزاحات العقدية المعلومة ودوال الشكل:

$$
\begin{aligned}
u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e\\
v &= N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}_e\\
w &= N_1\overline{w}_1 + N_2\overline{w}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{w}_1\\ \overline{w}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{w}}_e.
\end{aligned}
$$

أو:

$$
\mathbf{u} = \lfloor\ u \quad v \quad w\ \rfloor^T = [\mathbf{N}]\overline{\mathbf{u}}_e.
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

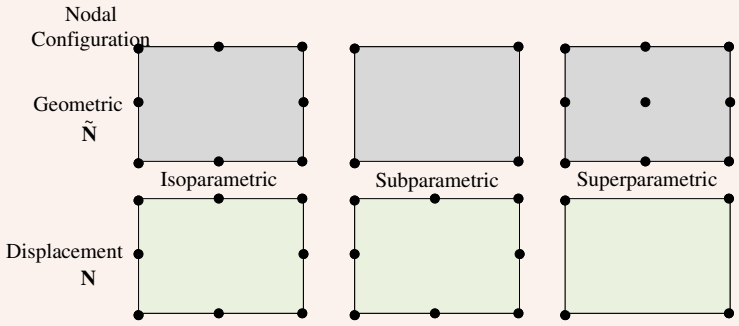
6 عندما تكون العناصر مشوهة يمكن *أيضاً* التعبير عن إحداثيات أي نقطة بدلالة الإحداثيات العقدية:

$$
\begin{aligned}
x &= \tilde{N}_1\overline{x}_1 + \tilde{N}_2\overline{x}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{x}}\\
y &= \tilde{N}_1\overline{y}_1 + \tilde{N}_2\overline{y}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{y}_1\\ \overline{y}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{y}}\\
z &= \tilde{N}_1\overline{z}_1 + \tilde{N}_2\overline{z}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{z}_1\\ \overline{z}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{z}}.
\end{aligned}
$$

أو:

$$
c = \lfloor\ x \quad y \quad z\ \rfloor^T = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{c}} \tag{50.1}
$$

7 مصفوفتا دوال الشكل $\mathbf{N}, \tilde{\mathbf{N}}$ دالتان في ξ, η, ζ. ومن ثم تنشأ الحالات الثلاث في الشكل 50.3.



شكل 50.3: العناصر المتساوية والفوقية والتحتية المعلمات

متساوي المعلمات: تكون $\mathbf{N}$ و$\tilde{\mathbf{N}}$ متطابقتين.

تحتي المعلمات: تكون درجة $\mathbf{N}$ أعلى من درجة $\tilde{\mathbf{N}}$.

فوقي المعلمات: تكون درجة $\mathbf{N}$ أدنى من درجة $\tilde{\mathbf{N}}$.

8 نادراً جداً ما تُستعمل العناصر التحتية أو الفوقية المعلمات.

50.2 صياغة العنصر

50.2.1 عنصر القضيب

9 اشتُقت دوال الشكل في §48.2.2.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 تُعطى علاقة الانفعال–الإزاحة بـ $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_e$، والمؤثر التفاضلي $\mathbf{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. وتختزل الحالة أحادية البعد إلى:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{L} \lfloor \mathbf{N} \rfloor}_{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{Bmatrix} \tag{50.2}$$

11 نطبق قاعدة السلسلة لأن دوال الشكل مكتوبة بدلالة الإحداثيات الطبيعية:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} \tag{50.3}$$

يتوفر الحد الأول مباشرة من دوال الشكل في المعادلة 48.8، أما الثاني فلا يتوفر.

12 مع أن $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$ غير متاح، يمكن حساب معكوسه $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}$ من المعادلة 48.7، ونرمز إليه بـ J أو *اليعقوبي*. المؤثر اليعقوبي J معامل قياس يربط الإحداثيات الديكارتية بالطبيعية وفق $\mathrm{d}x = J\mathrm{d}\xi$.

$$J(\xi) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor \begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\lfloor \ \tfrac{1}{2}(2\xi-1) \quad \tfrac{1}{2}(2\xi+1) \quad -2\xi \ \rfloor}_{\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}} \begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{Bmatrix}}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}}.$$

13 نعيد كتابة المعادلة 50.3:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}}_{J^{-1}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}.$$

وبالتعويض في المعادلة 50.2:

$$\lfloor \mathbf{B}(\xi) \rfloor = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \frac{1}{J}\lfloor \ \tfrac{1}{2}(2\xi-1) \quad \tfrac{1}{2}(2\xi+1) \quad -2\xi \ \rfloor.$$

14 الحجم التفاضلي هو:

$$d\Omega = A\mathrm{d}x = AJd\xi.$$

15 وبالتعويض تُستخرج مصفوفة صلابة العنصر من المعادلة 49.12:

$$\mathbf{K}_e(\xi) = \int_0^L \mathbf{B}^T(\xi)AE\mathbf{B}(\xi)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\xi)AE\mathbf{B}(\xi)J(\xi)d\xi.$$

16 نلاحظ أن $\mathbf{B}$ تحوي عموماً حدوداً في ξ في البسط والمقام، ولذلك لا يمكن تكامل العبارة تحليلياً. كما أصبحت حدود التكامل من -1 إلى $+1$، وسنبين لاحقاً كيفية حسابه عددياً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

50.2.2 العنصر الرباعي (q4): صياغة مفصلة

17 تُعطى الإحداثيات والإزاحات بـ:

$$\begin{aligned} x &= \sum N_i(\xi,\eta)\overline{x}_i; \quad y = \sum N_i(\xi,\eta)\overline{y}_i \\ u &= \sum N_i(\xi,\eta)\overline{u}_i; \quad v = \sum N_i(\xi,\eta)\overline{v}_i. \end{aligned} \tag{50.4}$$

حيث اشتُقت دوال الشكل في المعادلة 48.12.

18 علاقة الانفعال–الإزاحة هي:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{50.5}$$

أما الإزاحات فتُستخرج من المعادلة 50.4:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{array}\right]}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{50.6}$$

19 بدمج المعادلتين 50.5 و50.6:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{LN}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\xi,\eta) \\ \varepsilon_{yy}(\xi,\eta) \\ \gamma_{xy}(\xi,\eta) \end{Bmatrix} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned} \tag{50.7}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{array}\right]}_{\mathbf{B}} \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{J}^{-1}}. \tag{50.8}$$

20 لمجموعتي الإحداثيات المحلية ξ, η والعامة x, y تعطي قاعدة السلسلة:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array}\right]}_{\mathbf{J}} \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array}\right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array}\right\}$$

والمعادلة الأخيرة هي المفتاح لاستخراج جميع مركبات المصفوفة $\mathbf{B}$.

21 بتوسيع تعريف اليعقوبي:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array}\right]}_{\mathbf{J}} \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array}\right\}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ \hline N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \overline{x}_1 & \overline{y}_1 \\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2 \\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3 \\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array}\right\} \tag{50.9}$$

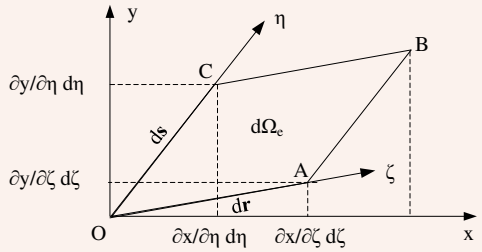
22 ومن ثم:

$$\mathbf{J}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array}\right] = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array}\right].$$

23 إذا كان ξ, η إحداثيين منحنيين اعتباطيين، الشكل 50.4: فإن:

$$d\mathbf{r} = \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{array}\right\} d\xi, \qquad d\mathbf{s} = \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array}\right\} \mathrm{d}\eta,$$

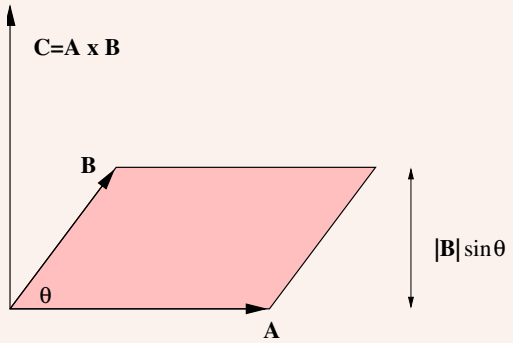
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.4: عنصر تفاضلي في نظام إحداثيات منحنية

وهما متجهان مماسان لخطي $\xi =$ ثابت و$\eta =$ ثابت على الترتيب.

24 يعطي الجبر المتجهي حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين في المستوى $x–y$، الشكل 50.5:



شكل 50.5: حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\
&= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(A_xB_y - B_xA_y)}_{\text{المساحة}}\mathbf{k} \\
|\mathbf{C}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta.
\end{aligned}$$

ومن ثم يساوي العنصر التفاضلي للمساحة طول المتجه الناتج من $d\mathbf{r}\times d\mathbf{s}$:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{50.10}$$

25 وأخيراً تُحسب مصفوفة صلابة العنصر من:

$$\mathbf{k}_{8\times8} = \int\int \mathbf{B}^T_{8\times3}\mathbf{D}_{3x3}\mathbf{B}_{3\times8}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}t\,\det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26 يتضمن تقييم مصفوفة الصلابة dA. فإذا اعتبرنا عنصراً متناهياً في الصغر طولا ضلعيه dr وds عند أحد رؤوس العنصر، كان الضلعان واقعين على حدّي العنصر. ومن المعادلة 50.10:

$$dA = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\sin\theta.$$

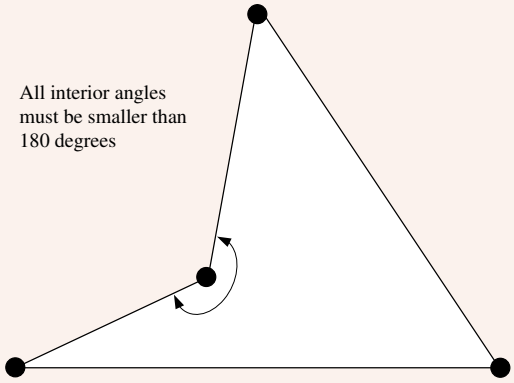
لكن من المعادلة 50.10 لدينا $dA = \det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta$، ومن ثم

$$\det\mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}\sin\theta.$$

إذا كانت θ صغيرة أو قريبة من $180°$ صار $\det\mathbf{J}$ صغيراً جداً، وإذا تجاوزت $180°$ صار المحدد سالباً، مما يعني صلابة سالبة ويؤدي عادة إلى توقف تحليل العناصر المحددة.

27 يوصى عموماً بأن $30° < \theta < 150°$.

28 يوجد معكوس اليعقوبي ما دام العنصر غير مشوه بشدة ولا ينطوي على نفسه، الشكل 50.6.



شكل 50.6: عنصر ذو يعقوبيات قد تصبح مفردة

وفي تلك الحالات لا توجد علاقة وحيدة بين الإحداثيات.

29 يكون اليعقوبي ثابتاً لمتوازيات الأضلاع، وغير ثابت لغيرها. وهو عموماً مؤشر لمقدار تشوه العنصر بالنسبة إلى مربع 2×2؛ فقد يكون ثابتاً أو يتغير داخل العنصر.

50.2.3 العناصر المثلثية

50.2.3.1 مثلث T3

17 دوال الشكل لهذا المثلث معطاة في §48.2.2.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18 تُستخرج المصفوفة $\mathbf{B}$ من:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array} \right\} \tag{50.11}$$

أي:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}}_i \\ \overline{\mathbf{v}}_i \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ثيح:

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}_L] &= \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \frac{\partial N_3}{\partial L_1} & \frac{\partial N_4}{\partial L_1} & \frac{\partial N_5}{\partial L_1} & \frac{\partial N_6}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \frac{\partial N_3}{\partial L_2} & \frac{\partial N_4}{\partial L_2} & \frac{\partial N_5}{\partial L_2} & \frac{\partial N_6}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \frac{\partial N_3}{\partial L_3} & \frac{\partial N_4}{\partial L_3} & \frac{\partial N_5}{\partial L_3} & \frac{\partial N_6}{\partial L_3} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccccc} 4L_1-1 & 0 & 0 & 4L_2 & 0 & 4L_3 \\ 0 & 4L_2-1 & 0 & 4L_1 & 4L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4L_3-1 & 0 & 4L_2 & 4L_1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

19 يمكن تبسيط المعادلة السابقة إلى:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{N}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_y \\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}} \end{array} \right\}.$$

حيث:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{N}_x^T | \mathbf{N}_y^T \right] &= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial L_1}{\partial x}(4L_1-1) & \frac{\partial L_1}{\partial y}(4L_1-1) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x}(4L_2-1) & \frac{\partial L_2}{\partial y}(4L_2-1) \\ \frac{\partial L_3}{\partial x}(4L_3-1) & \frac{\partial L_3}{\partial y}(4L_3-1) \\ 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_1 & 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_2 + 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_1 \\ 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_2 & 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_3 + 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_2 \\ 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_3 & 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_1 + 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_3 \end{array} \right] \\ \lfloor \overline{\mathbf{u}} \quad \overline{\mathbf{v}} \rfloor &= \lfloor \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{u}_5 \quad \overline{u}_6 \mid \overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{v}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{v}_6 \rfloor. \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

20 يمكن تكامل هذه العبارة تحليلياً باستعمال المعادلة 48.1، لكن يُفضل عموماً التكامل العددي متساوي المعلمات (القسم 50.2.3).

50.2.3.2 مثلث T6

21 للمثلث ذي العقد الست يمكن التعبير عن مشتقات المتغير ϕ بالنسبة إلى x, y كما يأتي (Felippa, 2000):

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right\} \tag{50.12}$$

22 بأخذ منقول طرفي المعادلة نحصل على

$$\lfloor \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \rfloor \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \lfloor \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rfloor.$$

23 نجعل الآن ϕ يساوي بالتتابع 1 وx وy:

$$\left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{array} \right].$$

24 بما أن $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$، وأن $\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ لأن x وy إحداثيان مستقلان، ولأن جميع عناصر الصف الأول ثابتة ومتساوية (وقيمتها 3 لعنصر T6)، يمكن تطبيع ذلك الصف والحصول على المؤثر اليعقوبي لهذا العنصر:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right].$$

25 بالتعويض من الجدول 48.7 نحصل على

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1(4L_1-1)+4x_4L_2+4x_6L_3 & x_2(4L_2-1)+4x_5L_3+4x_4L_1 & x_3(4L_3-1)+4x_6L_1+4x_5L_2 \\ y_1(4L_1-1)+4y_4L_2+4y_6L_3 & y_2(4L_2-1)+4y_5L_3+4y_4L_1 & y_3(4L_3-1)+4y_6L_1+4y_5L_2 \end{array} \right]}_{\mathbf{J}}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right].$$

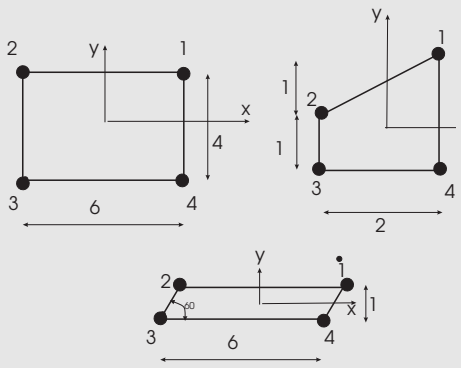
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

26 بعد ذلك نعكس المصفوفة لحساب مشتقات الإحداثيات المثلثية الست، وتُعوض النتائج في المعادلة 50.12 لتحديد $\mathbf{B}$ في المعادلة 50.7:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3) \\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3) \\ \gamma_{xy}(L_1,L_2,L_3) \end{array} \right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^{6} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}.$$

50.2.4 مثال 50.1: المؤثرات اليعقوبية

نسعى إلى تحديد المؤثرات اليعقوبية $\mathbf{J}$ للعناصر ثنائية الأبعاد المجاورة.
تُعطى الإحداثيات بالمعادلة 50.1، ودوال الشكل بالمعادلة 48.12، واليعقوبي بالمعادلة 50.9.



العنصر 1:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-3) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathbf{J}] &= \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

نلاحظ أن $A = 24 = \det[J](2 \times 2) = 6 \times 4$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العنصر 2:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-(3+1/(2\sqrt{3}))) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3-1/(2\sqrt{3})) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3+1/(2\sqrt{3})) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-(3-1/(2\sqrt{3}))) \\
y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\
[\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

العنصر 3:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1) + \frac{1}{4}(1-\xi)(-1) \\
y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(5/4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1/4) \\
[\mathbf{J}] &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & (1+\eta) \\ 0 & (3+\xi) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

50.3 التكامل العددي

27 فهم التكامل العددي ضروري لتكامل عائلة العناصر متساوية المعلمات، ويساعد أيضاً على فهم طرائق البواقي الموزونة في الفصل 51.

28 يُكتب التكامل العددي في الصياغة متساوية المعلمات على الصورة:

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad \text{أو} \qquad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

وعملياً نحسبه عددياً من:

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_i \mathbf{W}_i\mathbf{F}(\xi_i) + \mathbf{R}_n, \qquad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_i\sum_j \mathbf{W}_{ij}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j) + \mathbf{R}_n.$$

تمتد المجاميع على جميع i, j، و$\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{ij}$ معاملات وزن، وتُقيّم $\mathbf{F}$ عند نقاط التكامل المحددة. أما $\mathbf{R}_n$ فمصفوفات الخطأ ولا تُحسب عادة.

29 في تقييم مصفوفة صلابة العنصر المحدد تكون $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}$، ويُكامل كل عنصر على حدة.

30 يعتمد تكامل $\int_a^b F(\xi)d\xi$ على تمرير متعدد حدود $P(\xi)$ عبر قيم معلومة للدالة $F(\xi)$ ثم استعمال:

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \int_a^b P(\xi)d\xi.$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

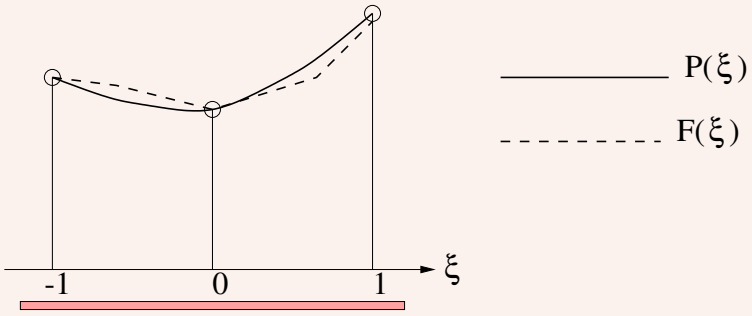
31 بجعل $P(\xi) = F(\xi)$ عند n نقاط، واستعمال خواص استيفاء لاغرانج:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= l_1(\xi)F(\xi_1) + l_2(\xi)F(\xi_2) + \cdots + l_n(\xi)F(\xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i). \end{aligned}$$

وعند $\xi = \xi_i$ يكون $l_i = 1$ وتساوي بقية الدوال صفراً.

50.3.1 نيوتن–كوتس

32 يفترض تكامل نيوتن–كوتس أن نقاط أخذ العينات متساوية *التباعد*، الشكل 50.7. ومن ثم:



شكل 50.7: التكامل العددي بطريقة نيوتن–كوتس

$$\int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi\, F(\xi_i). \tag{50.13}$$

أي:

$$\begin{array}{l|rcl} \text{التقريب} & \int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi & = & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{الأوزان} & W_i^{(n)} & = & \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = (b-a)C_i^{(n)} \end{array}$$

حيث $C_i^{(n)}$ أوزان تربيع نيوتن–كوتس باستعمال n نقاط متساوية التباعد.

33 يعطي الجدول 50.1 ثوابت نيوتن–كوتس وبواقيها الموافقة (Bathe, 1996).

34 تسمح الطريقة بالتكامل الدقيق لمتعدد حدود رتبته $n-1$، وإذا كان n فردياً أمكن تكامل متعدد حدود رتبته n تماماً؛ لذلك تُستعمل غالباً قيم فردية لـn.

35 عند $n = 2$ على $[-1, 1]$ نختار $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1$، فنحصل على:

$$\begin{aligned} l_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi), \qquad l_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi = 1, qquad W_2^{(2)} = \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 \\ \int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx F(-1) + F(1), \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 50.1: أوزان صيغ تربيع نيوتن–كوتس

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	الخطأ
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3F^{II}(\xi)$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-6}(b-a)^7F^{VI}(\xi)$

وهي قاعدة شبه المنحرف.

36 عند $n=3$ نختار $\xi_1=-1, \xi_2=0, \xi_3=1$، فتكون:

$$\begin{aligned} l_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \qquad l_2(\xi)=-(1+\xi)(\xi-1), \qquad l_3(\xi)=\frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ W_1^{(3)} &= \frac{1}{3}, qquad W_2^{(3)}=\frac{4}{3}, qquad W_3^{(3)}=\frac{1}{3} \\ \int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \frac{1}{3}[F(-1)+4F(0)+F(1)], \end{aligned}$$

وهي قاعدة سمبسون.

50.3.2 تربيع غاوس–ليجاندر

37 لا تكون النقاط ثابتة أو متساوية التباعد في تربيع غاوس–ليجاندر، بل تُختار لتحقيق أفضل دقة.

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i).$$

لكن كلاً من $W_i^{(n)}$ وξ_i مجهول، فيكون لدينا $2n$ مجهولاً.

38 عند نقاط التكامل $P(\xi_i)=F(\xi_i)$، أما بين النقاط فيُكتب الفرق:

$$F(\xi)=P(\xi)+\underbrace{\chi(\xi)(\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2+\cdots)}_{0 \text{ عند } \xi=\xi_i}.$$

نعرّف:

$$\chi(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_n),$$

وهو متعدد حدود رتبته n يساوي صفراً عند نقاط التكامل. ويجب اختيار β_i بما يقلل الفرق بين F, P بين تلك النقاط.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

39 بالتكامل نحصل على

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi.$$

نفصل الحد الأخير إلى

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi.$$

وبتر الحدود الأخيرة من التوسع:

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi \tag{50.14}$$

نفرض:

$$\int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = 0, qquadj = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{50.15}$$

فتنتج n معادلات متزامنة في نقاط التكامل المجهولة.

40 بالعودة إلى المعادلة 50.14:

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i).$$

أي

$$\begin{array}{r|rcl} \text{التقريب} & \int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi & \approx & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{الأوزان} & W_i^{(n)} & = & \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \text{نقاط غاوس} & \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi & = & 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{array}$$

41 يعطي الجدول 50.2 نقاط التكامل وأوزانها (Bathe, 1996).

جدول 50.2: نقاط التكامل وأوزان تربيع غاوس على المجال $[-1, 1]$

n	ξ_i	$W_i^{(n)}$	الخطأ
1	0	2	$\frac{1}{3}F^{(2)}(\xi)$
2	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	1 1	$\frac{1}{135}F^{(4)}(\xi)$
3	$-\sqrt{3/5}$ 0 $\sqrt{3/5}$	5/9 8/9 5/9	$\frac{1}{15750}F^{(6)}(\xi)$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

50.3.2.1 متعدد حدود ليجاندر

42 نقاط غاوس هي جذور متعدد حدود ليجاندر:

$$\begin{aligned} L_0(\xi) &= 1 \\ L_1(\xi) &= \xi \\ L_k(\xi) &= \tfrac{2k-1}{k}\xi L_{k-1}(\xi) - \tfrac{k-1}{k}\xi L_{k-2}(\xi), \quad 2 \le k \le n. \end{aligned}$$

وتُعطى الأوزان بـ:

$$W_i^{(n)} = \frac{2(1-\xi_i^2)}{[nL_{n-1}(\xi_i)]^2}.$$

50.3.2.2 تربيع غاوس–ليجاندر عند $n = 2$

43 نحدد أولاً نقاط التكامل عند $n = 2$، حيث $\chi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$، وتكون المعادلتان الناتجتان

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^0 \mathrm{d}\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{1} (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi^1 \mathrm{d}\xi &= 0. \end{aligned}$$

وبعد التكامل نحصل على

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{3}, \qquad \xi_1 + \xi_2 = 0,$$

ومن ثم

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

وتكون معاملات الوزن

$$\begin{aligned} W_i^{(n)} &= \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = 1.0 \\ W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\mathrm{d}\xi = \frac{-2\xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = 1.0. \end{aligned}$$

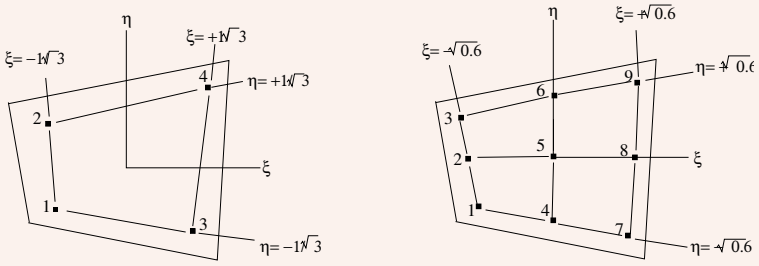
50.3.3 المناطق المستطيلة والمنشورية

44 يُحسب تكامل $F(\xi, \eta)$ على المنطقة المستطيلة باختيار m, n من النقاط في اتجاهي ξ, η:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_i^{(m)} W_j^{(n)} F(\xi_i, \eta_j).$$

ويكون العدد الكلي للنقاط $m \times n$، الشكل 50.8.

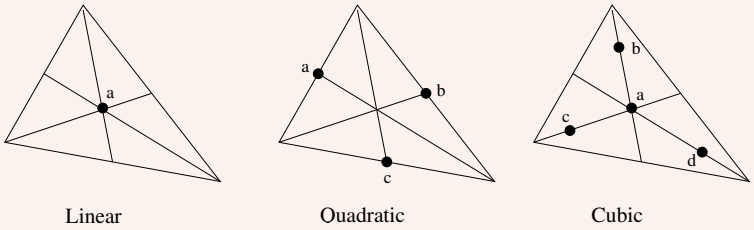
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.8: تكامل غاوس–ليجاندر على سطح

50.3.4 المناطق المثلثية

45 يبين الشكل 50.9 نقاط غاوس للمثلث، ويعطي الجدول 50.3 إحداثياتها المثلثية.



شكل 50.9: التكامل العددي على مثلث

جدول 50.3: إحداثيات وأوزان التكامل العددي على مثلث

الرتبة	الخطأ	النقاط	الإحداثيات المثلثية	الأوزان
خطي	$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
تربيعي	$R = O(h^3)$	a	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
		b	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
		c	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
تكعيبي	$R = O(h^4)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
		b	$0.6, 0.2, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		c	$0.2, 0.6, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		d	$0.2, 0.2, 0.6$	$\frac{25}{48}$

50.4 استرجاع الإجهادات: الإجهادات العقدية

46 تُحسب الإجهادات عموماً من

$$\sigma = \mathbf{DB}\bar{\mathbf{u}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن المرغوب عادةً تقييمها عند النقاط العقدية للعناصر. ومع ذلك، ينبغي تذكّر أن الإجهادات المحسوبة عند عقدة معينة من عناصر مختلفة لا يلزم أن تكون متساوية (لأن استمرارية الإجهادات ليست شرطاً في صيغ العناصر المحدودة القائمة على الإزاحات). لذلك قد يكون من المناسب إجراء نوع من المتوسط للإجهادات عند العقد.

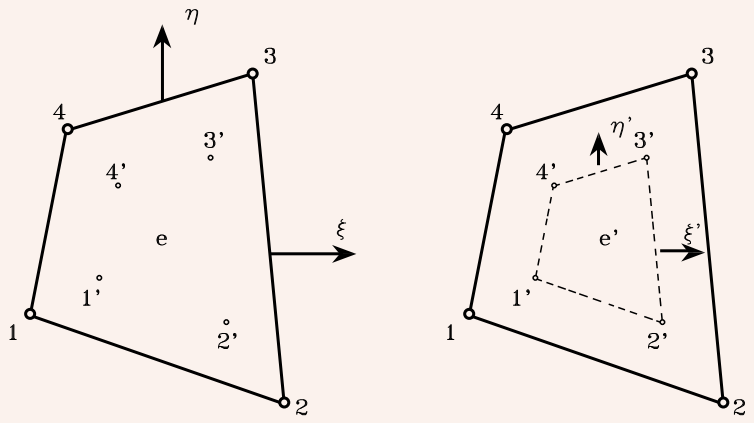
47 في الصياغة متساوية المعلمات تكون الإجهادات العقدية ضعيفة الدقة، وتُحصل أفضل النتائج عند نقاط غاوس.

48 لتقييم الإجهادات العقدية توجد طريقتان:

1. حساب σ مباشرةً عند العقد ($\xi = \eta = \pm 1$).
2. حساب الإجهادات عند نقاط غاوس ثم استقراؤها إلى العقد.

وتعطي الطريقة الثانية نتائج أفضل بكثير.

49 يوضّح الشكل 50.10 الاستقراء من نقاط غاوس لعنصر رباعي متساوي المعلمات ذي أربع عقد. نعرّف



شكل 50.10: الاستقراء من نقاط غاوس لعنصر رباعي ذي أربع عقد (Felippa, 1999)

عنصراً "داخلياً" له عقده وإحداثياته الطبيعية ξ' وη'، وهي ترتبط بـ ξ وη وفق الجدول 50.4. أي

جدول 50.4: الإحداثيات الطبيعية لعقد العنصر الرباعي ثنائي الخطية

ركنية عقدة	ξ	η	ξ'	η'	غاوس عقدة	ξ	η	ξ'	η'
1	-1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	'1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-1	-1
2	$+1$	-1	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	'2	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$+1$	-1
3	$+1$	$+1$	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	'3	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	$+1$	$+1$
4	-1	$+1$	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	'4	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	-1	$+1$

$$\xi' = \sqrt{3}\xi \qquad \eta' = \sqrt{3}\eta.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم يمكن استيفاء أية كمية قياسية σ (مثل σ_{xx}) تُعرف قيمها σ'_i عند زوايا عنصر غاوس باستعمال دوال الشكل ثنائية الخطية المعتادة، مكتوبةً الآن بدلالة ξ' وη':

$$\sigma(\xi',\eta') = \lfloor\ N_1^{e'} \quad N_2^{e'} \quad N_3^{e'} \quad N_4^{e'}\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \end{array} \right\},$$

حيث

$$\begin{aligned} N_1^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1-\eta') \\ N_2^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1-\eta') \\ N_3^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1+\eta') \\ N_4^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1+\eta'). \end{aligned}$$

وبالطريقة نفسها يمكننا *استقراء* σ إلى زوايا العنصر. فبالنسبة إلى الزاوية 1 مثلاً نستبدل ξ' وη' في المعادلات السابقة بـ $-\sqrt{3}$. وبتكرار ذلك للزوايا الأربع نحصل على

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \end{array} \right\}.$$

وكما هو متوقع يساوي مجموع عناصر كل صف الواحد، ولحساب الإجهادات نستبدل σ تباعاً بـ σ_{xx} وσ_{yy} وτ_{xy}.

50 كما نعلم، تعطي العناصر المتجاورة قيماً مختلفة للإجهادات العقدية. وللحصول على قيمة واحدة يمكن استعمال أحد الخيارين:

1. المتوسط غير الموزون لجميع الإجهادات العقدية.
2. المتوسط الموزون للإجهادات العقدية بحسب الأحجام النسبية للعناصر، كما تحددها مساحاتها من خلال $\det(J)$.

50.5 الأحمال العقدية المكافئة

51 في صياغة العناصر المحدودة يجب استبدال جميع الأحمال بأحمال عقدية "مكافئة طاقياً".

52 سننظر في الحالات الآتية: الحمل العقدي، والجاذبية، والشد السطحي، والحمل الحراري.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

53 نعيد أولاً كتابة المعادلة 47.32 بدلالة القيم العقدية:

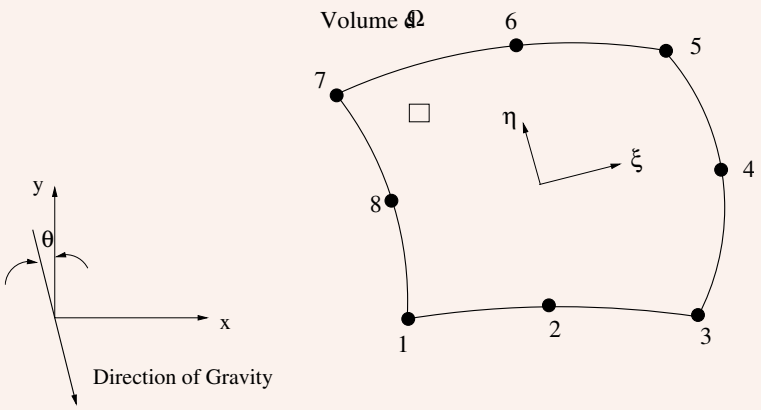
$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^t\mathbf{b}d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}^t\mathbf{b}d\Omega$$
$$\int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\hat{\mathbf{t}}d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma.$$

أي

$$\mathbf{f}_e = \int_\Omega \mathbf{N}^t\mathbf{b}d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t\hat{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{50.16}$$

50.5.1 حمل الجاذبية

54 تكافئ قوى الجاذبية قوةً حجمية لكل وحدة حجم تؤثر داخل الجسم في اتجاه محور الجاذبية، كما في الشكل 50.11، ولا يلزم أن يتطابق هذا الاتجاه مع أي من محوري الإحداثيات. ويكون



شكل 50.11: تحميل الجاذبية

$$\begin{aligned} dG_x &= \rho g d\Omega \sin\theta \\ dG_y &= -\rho g d\Omega \cos\theta, \end{aligned}$$

حيث g تسارع الجاذبية وρ كثافة الكتلة.

55 من المعادلة 50.16،

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega,$$

نحصل على

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \int_{\Omega_e} N_i \rho g \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} d\Omega,$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو أن القوى العقدية المكافئة طاقياً عند العقدة i هي

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{ngaus} \sum_{k=1}^{ngaus} \rho g t \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} N_i(\xi_j \eta_k) W_j W_k \mathbf{detJ}(\xi_j, \eta_k).$$

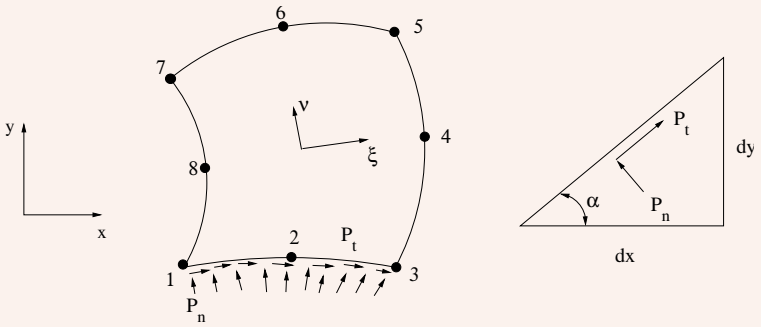
وتُقاس الزاوية θ بعكس اتجاه عقارب الساعة ابتداءً من محور y الموجب.

50.5.2 حمل الشد السطحي

56 يمكن وصف حمل موزع لكل وحدة طول على أي حافة من حواف العنصر، في الاتجاهين العمودي والمماسي.

57 يكون تغير الحمل الموزع كثير حدود، ولا يمكن أن تتجاوز رتبته رتبة العنصر. وللمحافظة على الاتساق تُسرد العقد المحمّلة أيضاً بعكس اتجاه عقارب الساعة.

58 نحدد أولاً مركبتي الأحمال الموزعة في اتجاهي x وy بالنظر إلى القوى المؤثرة على طول تفاضلي dS من الحافة المحمّلة، الشكل 50.12:



شكل 50.12: حمل الشد السطحي في العناصر متساوية المعلمات

$$\begin{array}{rcccl} dP_x &=& (p_t dS\cos\theta - p_n dS\sin\theta) &=& (p_t \mathrm{d}x - p_n \mathrm{d}y) \\ dP_y &=& (p_n dS\cos\theta - p_t dS\sin\theta) &=& (p_n \mathrm{d}x - p_t \mathrm{d}y). \end{array}$$

59 ولأن التكامل يُجرى بدلالة الإحداثيات الطبيعية:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi.$$

وبالتعويض،

$$\begin{array}{rcl} dP_x &=& \left(p_t \dfrac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi \\ dP_y &=& \left(p_n \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi. \end{array}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 ومن المعادلة 50.16 لدينا

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma.$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \\ P_{yi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

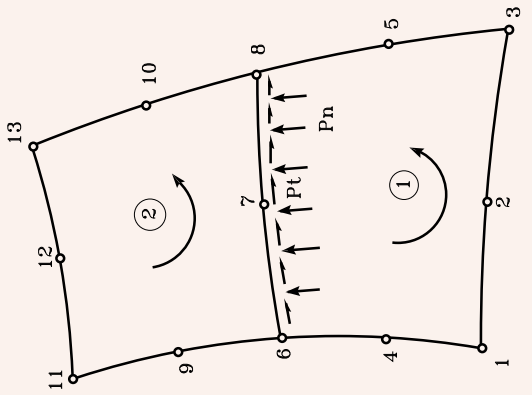
ويُجرى التكامل عددياً على طول الحافة، فتكون القوى العقدية المكافئة طاقياً عند العقدة i:

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j \\ P_{yi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j. \end{aligned}$$

لاحظ أن $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ و$\frac{\partial y}{\partial \xi}$ يؤخذان مباشرةً من المصفوفة اليعقوبية.

61 ولأن التكامل يُجرى على طول الحافة فقد استُخدم الإحداثي ξ.

62 يوضح الشكل 50.13 حالة عنصرين متجاورين.



شكل 50.13: حمل الشد السطحي في عناصر متساوية المعلمات متجاورة

50.5.3 الانفعالات والإجهادات الابتدائية؛ الحمل الحراري

63 نميّز بين حالتين:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإجهاد المستوي وهو الأبسط،

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= \alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= \alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0.\end{aligned}$$

الانفعال المستوي لدينا

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E}+\alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E}+\alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \varepsilon^0_{zz} &= \frac{\sigma^0_{zz}}{E}+\alpha\Delta T=0.\end{aligned}$$

وباستخدام العبارة الأخيرة لحذف σ^0_{zz} نحصل على

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \sigma^0_{zz} &= -E\alpha\Delta T.\end{aligned}$$

64 تُعوَّض هذه العبارات بعد ذلك في المعادلة 49.13،

$$\mathbf{f}_{0_e}=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega_t}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega,$$

ويُجرى التكامل عددياً.

50.5.4 رتبة التكامل

50.5.4.1 التكامل الكامل

65 في العناصر المكاملة عددياً تُعد رتبة التكامل العددي مسألة بالغة الأهمية. فإذا كانت رتبة التكامل:

مرتفعة: تعطي بالتأكيد صياغة دقيقة، لكنها قد تكون مرتفعة الكلفة حسابياً.

منخفضة: قد تؤدي إلى نقص الرتبة.

ومن ثم ينبغي اختيار رتبة التربيع العددي اختياراً مناسباً.

66 نتذكّر أن:

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. المطلوب تكامله هو $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\det\mathbf{J}$.
2. اليعقوبي ثابت في متوازيات الأضلاع فقط.
3. في تربيع غاوس، يكامل استعمال n من النقاط كثير حدود من الرتبة $2n-1$ تكاملاً دقيقاً (بينما كانت الرتبة في نيوتن–كوتس $n+1$).

لذلك، في عنصر متوازي أضلاع ثنائي الخطية تكون $\mathbf{F}$ دالة كثيرة الحدود من الرتبة 2 في الإحداثيين الطبيعيين ξ وη، ويمكن تكاملها بدقة باستعمال نقطتين في كل اتجاه، أي 2×2.

67 وبحجة مماثلة ينبغي تكامل العنصر الرباعي التربيعي بثلاث نقاط في كل اتجاه (إذ تصبح F من الرتبة 4، و$2\times 3-1=5$).

68 لا تصح رتب التقريب هذه تماماً إلا لمتوازيات الأضلاع؛ فكلما ازدادت ميول الحواف ازداد الخطأ.

50.5.4.2 التكامل المخفَّض

69 يؤدي التكامل المخفَّض، أي استعمال نقاط غاوس أقل مما يلزم للتكامل الدقيق، إلى تليين العنصر لأن حدود كثير الحدود الأعلى رتبة قد تنعدم عند نقاط قاعدة التكامل الأقل رتبة.

70 في جسم مرن لا يسمح حل العناصر المحدودة إلا بالإزاحات التي يمكن تمثيلها بتركيب خطي من دوال الشكل. ويختلف حقل الإزاحة الدقيق عموماً عن الحقل المفترض؛ أي إن دوال الشكل تمنع المنشأ من التشوه بالطريقة التي يميل إليها طبيعياً[1].

71 لما كانت صياغة الصلابة مفرطة الصلابة (المعادلة 49.15)، فإن التليين الذي يدخله التكامل العددي المخفَّض يكون مفيداً.

72 يبين الجدول 50.5 رتب التكامل الموصى بها للعناصر الرباعية.

جدول 50.5: التكامل العددي الكامل والمخفَّض للعناصر الرباعية

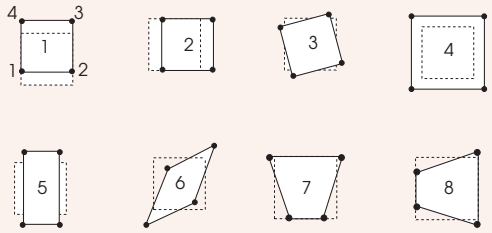
العنصر	التكامل الموثوق	التكامل المخفَّض
ذو 4 عقد	2x2	-
ذو 4 عقد مشوَّه	2x2	-
ذو 8 عقد	3x3	2x2
ذو 8 عقد مشوَّه	3x3	2x2
ذو 9 عقد	3x3	2x2
ذو 9 عقد مشوَّه	3x3	2x2

73 إذا لُيِّن العنصر اصطناعياً تظهر *أنماط زائفة منعدمة الطاقة*، وتصبح مصفوفة الصلابة *ناقصة الرتبة*؛ أي إن رتبتها تقل عن عدد درجات حرية العنصر مطروحاً منه عدد أنماط حركة الجسم الصلب.

74 يبين الشكل 50.14 أنماط الإزاحة المستقلة لعنصر ثنائي الخطية. الأنماط الثلاثة الأولى حركات جسم

[1] يشبه ذلك قطع متسلسلة فوريه التي كان يمكن، من دون القطع، أن تمثل مجموعة من المشاهدات الفيزيائية تمثيلاً دقيقاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.14: أنماط الإزاحة المستقلة لعنصر ثنائي الخطية

صلب، والثلاثة التالية انفعالات ثابتة، أما النمطان الأخيران فهما نمطا انحناء.

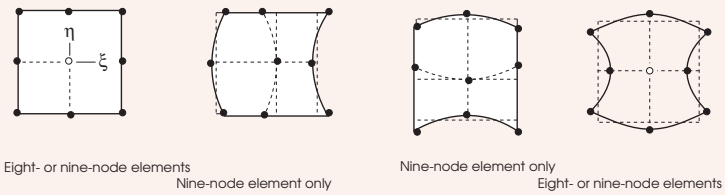
75 لأن العنصر لا يبدي أية مقاومة للأنماط الزائفة منعدمة الطاقة، مع إمكان استعمال هذه الأنماط في تراكيب خطية مع سائر الأنماط لوصف حقل الإزاحة، فإن أثر التكامل المخفَّض هو تليين صلابة نموذج العناصر المحدودة.

76 يؤدي اعتماد مخطط تكامل مخفَّض إلى تقليل الجهد الحسابي بدرجة كبيرة، لكنه يفقد طريقة الإزاحة خاصيتين مهمتين: (أ) محدودية الحل، و(ب) التقارب الرتيب نحو الحل الدقيق.

77 تتضح المشكلات الناشئة عن التكامل المخفَّض في العنصرين الآتيين:

Q4 عند التكامل بنقطة واحدة تقع نقطة غاوس في المركز. وفي مركز عنصر خاضع للانحناء يكون $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$، ومن ثم $U = 0$ للنمطين الموافقين 4 و5 في الشكل 50.14. وتختفي هذه الأنماط الزائفة إذا كان $n = 2$.

Q9 يُعطى حقل الإزاحة بـ $u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2$ و$v = 0$. وإذا كُومل العنصر بنقاط 2×2، فيمكن إظهار أن الانفعالات تنعدم عند $\xi = \eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$، وتظهر الآليات المقابلة، أو أنماط **الساعة الرملية**، كما في الشكل 50.15.



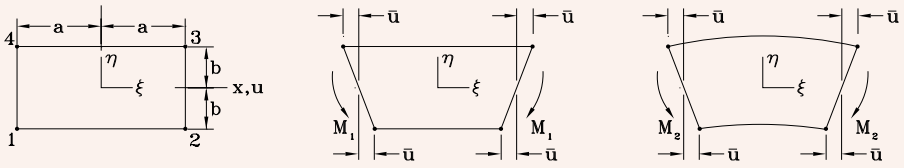
شكل 50.15: أنماط الساعة الرملية في عنصر تربيعي ناقص التكامل

50.5.4.3 التكامل المخفَّض الانتقائي

78 في التكامل الانتقائي نكامل حدود الانفعال المختلفة برتب تكامل مختلفة.

79 سنعود إلى هذه التقنية بمزيد من التفصيل في فصل لاحق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.16: عنصر مستطيل ثنائي الخطية خاضع للانحناء؛ العنصر ثنائي الخطية والهندسة الصحيحة

50.6 القص الطفيلي والعناصر غير المتوافقة

50.6.1 Q4 المشكلة:

80 تُعطى دوال الشكل للعنصر ثنائي الخطية بالمعادلة 48.12:

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta);\\ N_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \end{aligned} \tag{50.17}$$

حيث $\xi = x/a$ و$\eta = y/b$.

81 بفرض حقل الإزاحة في الشكل 50.16، تكون الإزاحات والانفعالات للعنصر ثنائي الخطية وللحل الدقيق كما في الجدول 50.6.

جدول 50.6: الإزاحات والانفعالات ثنائية الخطية والدقيقة

	عنصر ثنائي الخطية	الصياغة الدقيقة
u	$\xi\eta\overline{u}$	$\xi\eta\overline{u}$
v	$\mathbf{0}$	$(1-\xi^2)\frac{a\overline{u}}{2b} + (1-\eta^2)\nu\frac{b\overline{u}}{2a}$
ε_{xx}	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$
ε_{yy}	0	$-\nu\eta\frac{\overline{u}}{a}$
γ_{xy}	$\xi\frac{\overline{u}}{b}$	0

82 نلاحظ من الجدول أن القص الطفيلي يسهم في طاقة الانفعال المخزنة في العنصر، وهي تساوي $\mathbf{d}.\mathbf{P}^T$. لذلك، عند إزاحة مفروضة معينة تكون القوى أكبر ويكون $M_1 > M_2$.

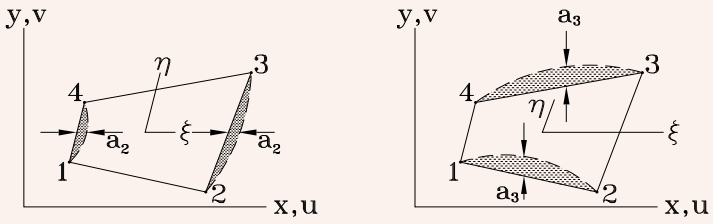
83 بحساب نسبة طاقتي الانفعال في العنصرين نحصل على

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right].$$

ومن ثم، كلما ازدادت النسبة a/b "انقفل" العنصر، وهو مصطلح سيُشرح في فصول لاحقة.

84 لذلك يُسمى انفعال القص غير المرغوب الذي ينتج $M_1 > M_2$ *القص الطفيلي*.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.17: الإزاحات المرتبطة بالأنماط غير المتوافقة لعنصر Q6

50.6.2 Q6: الحل

85 بمقارنة حقول الإزاحة في الجدول 50.6 نلاحظ أن خطأ العنصر ثنائي الخطية عن الحل الدقيق ناشئ من إغفال نمطي الإزاحة المرتبطين بـ $(1-\xi^2)$ و$(1-\eta^2)$.

86 يمكن معالجة ذلك بإضافة النمطين المفقودين كعقد داخلية:

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i \overline{u}_i + (1-\xi^2)a_1 + (1-\eta^2)a_2 \\ v &= \sum N_i \overline{v}_i + (1-\xi^2)a_3 + (1-\eta^2)a_4, \end{aligned}$$

حيث تُعطى N_i بالمعادلة 50.17، وتمثل a_i درجات حرية بلا عقد. ويصبح للعنصر ست درجات حرية، ولذلك يسمى Q6.

87 يجب تعديل المصفوفة $\mathbf{B}$ تبعاً لذلك، وبعد صياغتها تُحذف درجات الحرية الإضافية a_i بالتكثيف (القسم 45.1).

88 عنصر Q6 غير متوافق (أو غير مطابق) بسبب التوزيع التربيعي لـ u أو v على الحافة التي تحددها عقدتان فقط، الشكل 50.17.

89 يعاكس التليين في هذه الحالة فرط الصلابة الملازم لصياغة الإزاحة المفترضة القياسية.

50.6.3 Qm6: تحسينات إضافية

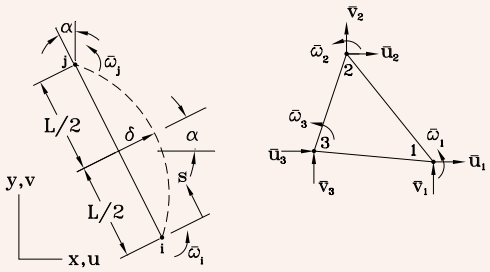
90 يمكن إظهار أن عنصر Q6 لا يجتاز اختبار الرقعة إلا إذا كان مستطيلاً.

91 لمعالجة هذا القصور ننظر إلى الجزء من المصفوفة $\mathbf{B}$ المرتبط بدرجات الحرية غير العقدية، ونرمز إليه بـ $\mathbf{B}_a$؛ وعندئذ يكون متجه الحمل العقدي المتسق المقابل

$$\mathbf{p}_a^e = -\int_{\Omega}^{e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega,$$

حيث تمثل $\boldsymbol{\sigma}_0$ الإجهادات الابتدائية الناتجة من صياغة العنصر القياسي المرتبطة بـ d_r عند درجات الحرية العقدية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 50.18: إزاحات الحواف الناتجة من درجات حرية الثقب

92 بما أن العنصر القياسي متساوي المعلمات يجتاز اختبار الرقعة عندما تكون σ_0 ثابتة، ومن دون الحمل الإضافي المرتبط بـ a_i، فينبغي أيضاً أن يكون $\mathbf{p}_a^e$ صفراً للإجهاد الثابت σ_0؛ أي

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}_a^T t \det\mathbf{J}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0.$$

لا تتحقق هذه المعادلة للعناصر العامة غير المستطيلة، ومن ثم يفشل اختبار الرقعة.

93 يمكن معالجة ذلك اصطناعياً عند تكوين $\mathbf{B}_a$ وإجراء التكامل باستعمال $\mathbf{J}_0$، حيث يُقيَّم اليعقوبي عند $\xi = \eta = 0$ بدلاً من نقطة تربيع غاوس، مع استعمال السمك الموافق t_0.

94 يسمى العنصر الناتج عن هذه العملية QM6. وهو يعمل، عندما يكون مستطيلاً، بكفاءة تقارب العنصر التربيعي، كما أنه أدق بكثير من العنصر ثنائي الخطية.

95 تُحسب الإجهادات باستعمال جميع درجات الحرية، بما فيها a_i. وتتحسن النتائج إذا جُعلت الأحمال العقدية للعنصر $\mathbf{p}^e$ المرتبطة بالأنماط غير المتوافقة صفراً أثناء استرجاع درجات الحرية a_i بعد التكثيف.

50.7 درجات الحرية الدورانية

96 درجات حرية *الثقب* هي الدورانات عند عقد الزوايا. وفي سياق العناصر المستوية ترتبط هذه الدرجات بأشكال إزاحة مكافئة للحواف، كما في الشكل 50.18. وتكتسب أهميتها في القشريات المكوّنة من تجميع عناصر مسطحة، إذ تتيح للعنصر تمثيل الانثناء والفعل الغشائي.

97 بافتراض دورانين $\overline{\omega}_i$ و$\overline{\omega}_j$ عند العقدتين i وj من حافة عنصر طولها L، تكون عزوم نهايتي كمرة تخيلية

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{L}\left(2\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j\right) \\ M_j &= \frac{2EI}{L}\left(\overline{\omega}_i + 2\overline{\omega}_j\right). \end{aligned}$$

ومن $M = M_i + (M_j - M_i)\frac{x}{L}$ وباستعمال طريقة القوة الافتراضية يمكن حساب إزاحة منتصف الحافة في اتجاهها العمودي:

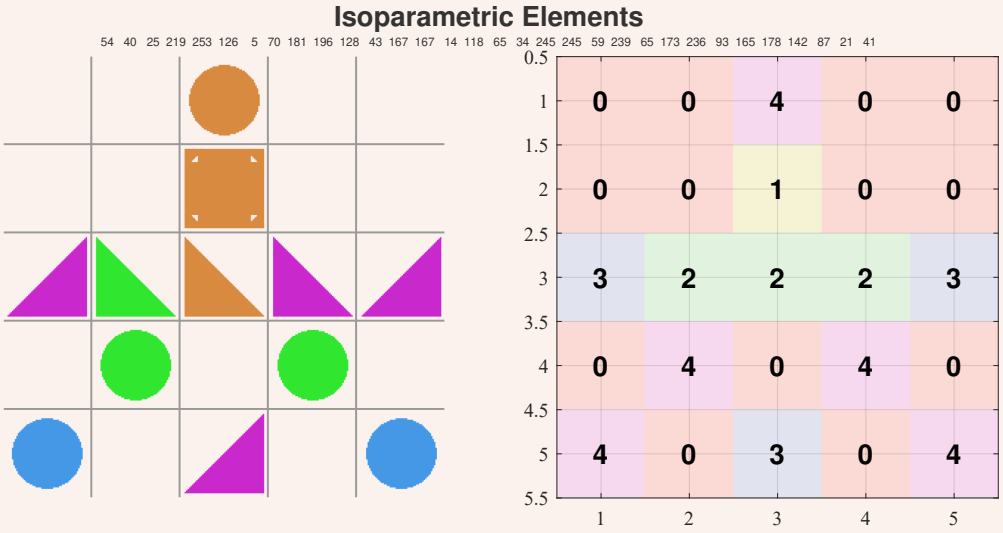
$$\delta = \frac{L}{8}(\overline{\omega}_j - \overline{\omega}_i).$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

98 لذلك تتكون إزاحة الحافة من جزأين: انتقال وتشوه مكافئ:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \frac{L-s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\} + \frac{s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{array} \right\} + \frac{L-s}{2L} s(\omega_j - \omega_i) \left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right\}.$$

ويمكن كتابة عبارات مماثلة لبقية الحواف.



الرمز البصري الخاص بالفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51 طرائق البواقي الموزونة

ملخص

استندت صياغة العناصر المحدودة المعروضة في الفصل 49 إلى مبدأ الشغل الافتراضي والمبادئ التغايرية. وينص هذا المبدأ على أن الشغل الافتراضي الذي تبذله الإجهادات الداخلية في جسم متزن يساوي الشغل الافتراضي الذي تبذله القوى الخارجية لأي إزاحة افتراضية مقبولة حركياً.

يعرض هذا الفصل، في المقابل، طريقة بديلة. طريقة غالركين هي إحدى طرائق البواقي الموزونة المستعملة في الحل العددي للمعادلات التفاضلية. وتقوم على ضرب المعادلة التفاضلية الحاكمة في مجموعة من دوال الاختبار ثم التكامل على مجال المسألة لتصغير البواقي.

طريقة غالركين أكثر عمومية، ويمكن تطبيقها على طيف واسع من المعادلات التفاضلية يتجاوز مسائل الميكانيكا الإنشائية.

يقدم هذا الفصل طريقة غالركين بإيجاز وتركيز.

51.1 مقدمة 1614
51.2 الصياغة العامة 1615
51.2.1 المؤثرات التفاضلية 1615
51.2.2 صياغة البواقي 1616
51.3 طرائق البواقي الموزونة 1618
51.3.1 طريقة المطابقة النقطية 1618
51.3.2 طريقة المطابقة على المجالات الجزئية 1618
51.3.3 طريقة المربعات الصغرى 1618
51.3.4 طريقة غالركين 1618
51.4 تطبيق طريقة غالركين على مسائل المرونة ثلاثية الأبعاد 1620
51.4.1 اشتقاق الصيغة الضعيفة 1621
51.4.2 التقطيع بالعناصر المحدودة . . . 1623

هذا الفصل مقتبس بتصرف من Ottosen **and** Petersson, 1992 Introduction to the Finite Element Method.

51.1 مقدمة

1 اشتُقت طريقة العناصر المحدودة حتى الآن من مبدأ تغايري باستعمال طريقة رايلي–ريتز.

2 في السكونيات المرنة يكون المبدأ التغايري المستعمل هو تصغير طاقة الوضع الكلية، وتكافئ الصياغة الضعيفة الناتجة معادلة الاتزان، أي الصيغة القوية.

3 لا يتوافر مبدأ تغايري في كثير من فروع العلوم الفيزيائية؛ وقد لا يتاح سوى معادلة تفاضلية وشروطها الحدية.

4 ينبغي ملاحظة أن الصياغة التغايرية غير ممكنة عندما تكون رتبة المعادلة التفاضلية فردية.

5 تُستعمل *طرائق البواقي الموزونة* في هذه المسائل، وهي طرائق رياضية في جوهرها.

6 تكون الصياغة الناتجة تكاملية، ومن ثم فهي "ضعيفة".

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7 طريقة غالركين أكثر عمومية ويمكن تطبيقها على معادلات تفاضلية كثيرة خارج نطاق الميكانيكا الإنشائية. كما أنها متسقة مع طريقة ريتز والمبادئ التغايرية.

51.2 الصياغة العامة

51.2.1 المؤثرات التفاضلية

8 لنعتبر معادلة تفاضلية عامة:

$$\begin{array}{lrcll} \text{المعادلة التفاضلية الحاكمة} & L\phi + g & = & 0; & \Omega \\ \text{الشروط الحدية} & B_i(\phi) & = & q_i; & \Gamma_i \end{array} \tag{51.1}$$

حيث L مؤثر تفاضلي. وبافتراض مسألة أحادية البعد، تكون $\phi = \phi(x)$ دالة مجهولة تمثل متغير الحالة المطلوب، مثل الإزاحة أو درجة الحرارة أو الرأس الهيدروليكي، وتكون $g(x)$ دالة تأثير معلومة.

9 نفترض أن المؤثر التفاضلي متناظر وموجب التعريف:

$$\begin{array}{lrcl} \text{متناظر} & \displaystyle\int_\Omega (L[u])v\,\mathrm{d}\Omega & = & \displaystyle\int_\Omega (L[v])u\,\mathrm{d}\Omega \\ \text{موجب التعريف} & \displaystyle\int_\Omega (L[u])u\,\mathrm{d}\Omega & > & 0 \end{array} \tag{51.2}$$

حيث u وv دالتان تحققان *الشروط الحدية الأساسية والطبيعية*، وL هو المؤثر الخطي المعرَّف في المعادلة O.7.

51.2.1.1 مثال 51.1: التحقق من التناظر والتعريف الموجب لعضو محوري أحادي البعد

لنعتبر، كمثال، استجابة الحالة المستقرة لقضيب محوري. تكون المعادلة التفاضلية الحاكمة والشروط الحدية:

$$\begin{array}{lrcl} \text{المعادلة التفاضلية الحاكمة} & -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0 \\ \text{الشروط الحدية الأساسية} & u|_{x=0} & = & 0 \\ \text{الشروط الحدية الطبيعية} & EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} & = & P \end{array}$$

ومن ثم

$$\begin{array}{lllllllll} L[.] & = & -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}; & \phi & = & u; & g & = & 0; \\ B_1 & = & 1; & q_1 & = & 0; & B_2 & = & EA\frac{\partial}{\partial x}; \quad q_2 = P; \end{array}$$

للتحقق من تناظر المؤثر L وتعريفه الموجب نأخذ $P = 0$ ونكامل بالتجزئة مرتين[a] فنحصل على

$$\begin{aligned} \int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v\,\mathrm{d}x &= -EA\frac{\partial u}{\partial x}v\Big|_0^l + \int_0^l EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= -EA\frac{\partial u}{\partial x}v\Big|_0^l + EAu\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولأن الشروط الحدية هي $u = v = 0$ عند $x = 0$ و$\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$ عند $x = l$، فلا يبقى سوى

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \mathrm{d}x = \int_0^l -EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \mathrm{d}x$$

ومن ثم فإن المؤثر متناظر.

ومن المعادلة 51.3 نستنتج أيضاً أن المؤثر موجب التعريف:

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \mathrm{d}x = \int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

[a] من المعادلة R.3: $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

51.2.2 صياغة البواقي

10 نعدّل الآن المعادلة 51.1، ونكتبها لمسألة أحادية البعد على الصورة

$$\int_a^b w(L\phi + g)\mathrm{d}x = 0 \tag{51.3}$$

حيث w *دالة* وزن اعتباطية[1]. تحقق هذه المعادلة المعادلة التفاضلية الحاكمة بالمعنى *الضعيف*.

11 نبحث الآن عن حل عددي تقريبي للدالة المجهولة $\phi(x)$، فنفترض عموماً

$$\begin{aligned} \phi(x)^{app} &= a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \cdots + a_n\psi_n(x) \\ &= \mathbf{a}\boldsymbol{\psi} \end{aligned} \tag{51.4}$$

حيث a_i معاملات مجهولة، و$\psi(x)$ دوال تجريبية محددة سلفاً[2].

12 بالتعويض في المعادلة 51.3:

$$\int_a^b w(L\phi^{app} + g)\mathrm{d}x = 0$$

لأن ϕ^{app} لا تحقق المعادلة التفاضلية عموماً بصورة دقيقة، يكون

$$L\phi^{app} + g = R$$

$$\int_a^b wR = 0$$

[1] لاحظ التشابه مع اشتقاق مبدأ الشغل الافتراضي من معادلة الاتزان والشرط الحدي.

[2] في طريقة غالركين، وهي حالة خاصة من البواقي الموزونة، تقابل ϕ الإزاحة، وتقابل $\boldsymbol{\psi}$ دوال الشكل $\mathbf{N}$، وتقابل $\mathbf{a}$ الإزاحات العقدية $\overline{\mathbf{u}}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $R(x)$ مقياس للخطأ ويسمى *الباقي*. ونفرض أن تكون دوال الوزن والبواقي متعامدة[3].

13 يعتمد الباقي بوضوح على المعاملات a_i؛ وهدفنا اختيار الوزن $w(x)$ بحيث يكون تكامل *الباقي الموزون* $w(x)R(x)$ على المجال $a-b$ صفراً.

14 نختار أولاً دوال وزن اعتباطية:

$$\begin{aligned} w &= c_1 W_1(x) + c_2 W_2(x) + \cdots + c_n W_n(x) \\ &= \lfloor\ W_1(x) \quad W_2(x) \quad \cdots \quad W_n(x)\ \rfloor \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{51.5}$$

حيث $W_i(x)$ دوال محددة سلفاً في x وc_i معاملات. ومن ثم يمكن كتابة المعادلة 51.3:

$$\mathbf{c}^T \int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{51.6}$$

ولأن $\mathbf{c}$ لا يعتمد على الإحداثيات:

$$\int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{51.7}$$

تمثل هذه المعادلة في الحقيقة منظومة من n معادلات.

15 بالتعويض من المعادلة 51.3، ومع ملاحظة أن $\mathbf{a}$ لا يعتمد على الإحداثيات:

$$R = L(\boldsymbol{\psi}\mathbf{a}) + g = L(\boldsymbol{\psi})\mathbf{a} + g$$

وبأخذ المتوسط الموزون:

$$\underbrace{\left(\int_a^b \mathbf{W}^T L(\boldsymbol{\psi}) \mathrm{d}x\right)}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{a} = \underbrace{-\int_a^b \mathbf{W} g \mathrm{d}x}_{\mathbf{f}}$$

أو

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b W_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b W_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b W_1 g \mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 g \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b W_n g \mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

16 تكون $\mathbf{K}^e$ مصفوفة $n \times n$، ويمكن حل المعادلة السابقة لإيجاد المعاملات المجهولة $\mathbf{a}$.

[3] يتعامد المتجهان $\mathbf{a}$ و$\mathbf{b}$ إذا كان $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$؛ وبالمثل تتعامد الدالتان $u(x)$ و$v(x)$ إذا كان $\int v(x)u(x) = 0$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51.3 طرائق البواقي الموزونة

17 الصياغة السابقة عامة جداً، وتختلف التقنيات المختلفة بحسب الأوزان المختارة، أي بحسب اختيار $\mathbf{W}$.

51.3.1 طريقة المطابقة النقطية

18 تعتمد دالة الوزن w في هذه الطريقة على *دالة دلتا لديراك* $\delta(x-x_i)$، ولذلك يُجعل الباقي صفراً تماماً عند n من النقاط. ويتحقق ذلك باختيار

$$\delta(x-x_i)=\begin{cases}\infty & \text{إذا كان } x=x_i\\ 0 & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=1$$

51.3.2 طريقة المطابقة على المجالات الجزئية

19 نقسم المجال المدروس إلى n من المجالات الجزئية، ونجعل تكامل الباقي صفراً داخل كل منها.

51.3.3 طريقة المربعات الصغرى

20 يُصغَّر تكامل مربع الباقي بالنسبة إلى a_i.

$$I=\int R^2(x,y,z,a_1,\cdots,a_n)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i}=0;\qquad i=1,2,\cdots,n$$

51.3.4 طريقة غالركين

للسياق التاريخي، انظر §12.3.1

21 نختار في طريقة غالركين

$$\mathbf{W}=\boldsymbol{\psi}$$

أي إن دوال الوزن تساوي الدوال التجريبية. ولأن الدوال التجريبية متعامدة مع البواقي (المعادلة 51.3)، تصبح المعادلة 51.7:

$$\int_a^b\boldsymbol{\psi}^T R\mathrm{d}x=0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويكون

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \psi_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b \psi_1 g\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 g\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \psi_n g\mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

51.3.4.1 مثال 51.2: اهتزاز وتر

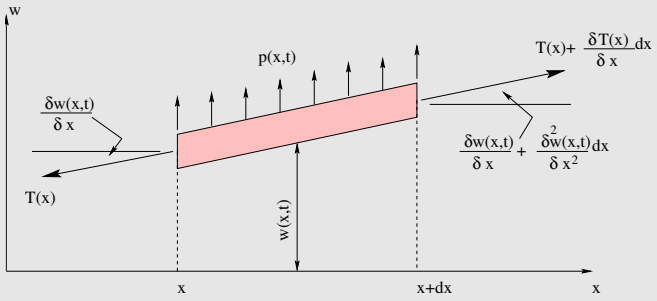
نريد صياغة مصفوفات العناصر المحدودة بطريقة غالركين لعنصر من وتر يخضع لشد $T(x)$ وقوة عرضية خارجية لكل وحدة طول $p(x,t)$. نرمز للكتلة لكل وحدة طول بـ ρ، ونفترض إزاحات صغيرة ونحسب التردد الأساسي للاهتزاز.

1. نكتب أولاً معادلة نيوتن للحركة في الاتجاه العرضي ($\Sigma F_y = ma$) لعنصر من الوتر:

$$\left[T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right] + p(x,t)\mathrm{d}x - T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

وتُختصر إلى

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + p(x,t = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$



2. في الاهتزاز الحر يكون $p(x,t) = 0$، وعند شد ثابت $T = \text{cst}$ نحصل على

$$Tw_{,xx} - \rho w_{,tt} = 0$$

وهي معادلة *الموجة*.

3. نطبق بعد ذلك طريقة غالركين:

$$\int_0^L \mathbf{N}^T\left[Tw_{,xx} - \rho\ddot{w}\right]\mathrm{d}x = 0$$

حيث $w = \mathbf{N}\overline{w}$.

4. نكامل بالتجزئة:

$$-\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T w_{,x}\mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{N}^T\rho\ddot{w}\mathrm{d}x + \left[\mathbf{N}^T T w_{,x}\right]_0^L = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يساوي الحد الأخير صفراً لأن دوال الشكل عند العقد المقابلة تساوي صفراً. وبالمقارنة مع طريقة الإزاحة الافتراضية تقابل $\mathbf{N}$ الإزاحة الافتراضية التي يجب أن تنعدم عند المساند لتحقيق الشروط الحدية الأساسية.

5. بالتعويض من $w = \mathbf{N}\overline{w}$ و$w_{,x} = \mathbf{N}_{,x}\overline{w}$ نحصل على

$$\underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T \mathbf{N}_{,x} \mathrm{d}x}_{\mathbf{k}}\, \overline{w} + \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \mathrm{d}x}_{\mathbf{m}}\, \ddot{\overline{w}} = 0$$

حيث

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{N}_{,x} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. بالتعويض:

$$\mathbf{k} = \frac{T}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{m} = \frac{\rho L}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. إذا اعتبرنا تجميعاً من عنصرين وحذفنا درجتي الحرية المقيدتين 1 و3، يكون

$$2\frac{T}{L}\overline{w}_2 + 4\frac{\rho L}{6}\ddot{\overline{w}}_2 = 0$$

8. في الاهتزاز الحر:

$$\overline{w}_2 = A \sin \omega t$$
$$\ddot{\overline{w}}_2 = -\omega^2 A \sin \omega t$$

9. بالتعويض:

$$\left(2\frac{T}{L} - 4\frac{\rho L}{6}\omega^2\right) A \sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3\frac{T}{\rho L^2}$$

لاحظ أن الجواب الدقيق هو $\omega^2 = \frac{\pi^2 T}{4\rho L^2}$.

51.4 تطبيق طريقة غالركين على مسائل المرونة ثلاثية الأبعاد

22 سنطبق طريقة غالركين على فئتين من المسائل.

23 نبدأ بمسائل المرونة لإظهار أن طريقة غالركين تعطي الصياغة نفسها تماماً التي يعطيها المبدأ التغايري.

24 بعد هذا "التحقق" من الطريقة، ننظر في الفصل التالي في فئة من المسائل التي لا يتوافر لها مبدأ تغايري، فتكون طريقة غالركين هي التقنية المنطبقة. وسيكون التطبيق الثاني معادلة الحرارة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51.4.1 اشتقاق الصيغة الضعيفة

25 نطبق الآن طريقة غالركين على معادلة المرونة ونبين أنها تستعيد مبدأ الشغل الافتراضي المشتق من مبدأ تغايري. ولذلك تكون الطريقتان في هذه الحالة متكافئتين فعلاً كما توقعنا.

26 نبدأ بمعادلة الاتزان (المعادلة O.9):

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

حيث $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ و

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix};$$

27 بتوسيع معادلات الاتزان نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \tag{51.8}$$

28 نضرب المعادلة الأولى من المعادلة 51.8 في الدالة الاعتباطية w_x ونكامل على الحجم Ω[4]:

$$\int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0$$

29 نطبق الآن مبرهنة غرين–غاوس، وهي صورة من مبرهنة التباعد[5])

$$\begin{aligned} \int_\Gamma w_x \sigma_{xx} n_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial x} \sigma_{xx} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma w_x \sigma_{xy} n_y \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial y} \sigma_{xy} \mathrm{d}\Omega \\ + \int_\Gamma w_x \sigma_{xz} n_z \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial w_x}{\partial z} \sigma_{xz} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega \\ = 0 \end{aligned} \tag{51.9}$$

[4] لاحظ التشابه مع اشتقاق مبدأ الشغل الافتراضي.

[5] من المعادلة R.6، $\int_\Omega \Phi \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi \mathbf{v}^T \mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^T \mathbf{v}\mathrm{d}\Omega$. وإذا وضعنا $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$، نحصل على $\int_\Omega \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Psi \mathrm{d}\Omega$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 نتذكر أن قوى الشد السطحي تُعطى بالمعادلة O.5:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ t_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ t_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{aligned}$$

فتُختصر المعادلة السابقة إلى

$$\int_\Gamma w_x t_x \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\sigma_{xz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0$$

31 وبالمثل نحصل للمعادلتين الأخريين للاتزان على

$$\begin{aligned} \int_\Gamma w_y t_y \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_y}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\sigma_{yz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_y b_y \mathrm{d}\Omega &= 0 \\ \int_\Gamma w_z t_z \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial w_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w_z b_z \mathrm{d}\Omega &= 0 \end{aligned}$$

32 بجمع المعادلات الثلاث:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_\Gamma (w_x t_x + w_y t_y + w_z t_z)\mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{W}^T\mathbf{t}} + \underbrace{\int_\Omega (w_x b_x + w_y b_y + w_z b_z)\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{w}^T\mathbf{b}} \\ &- \int_\Omega \left[\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \right. \\ &\left. \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)\sigma_{yz} \right] \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \tag{51.10}$$

33 نركز الآن على الحد الثالث في المعادلة السابقة. إذا كان $\mathbf{w} = \lfloor\ w_x \quad w_y \quad w_z\ \rfloor^T$، فإن

$$(\mathbf{Lw})^T = \lfloor\ \frac{\partial w_x}{\partial x};\ \ \frac{\partial w_y}{\partial y};\ \ \frac{\partial w_z}{\partial z};\ \ \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x};\ \ \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x};\ \ \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y};\ \rfloor$$

و

$$\begin{aligned} (\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} \\ &+ \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)\sigma_{yz} \end{aligned} \tag{51.11}$$

34 لذلك، بالتعويض من المعادلة 51.11 في المعادلة 51.10 نحصل على

$$\int_\Omega (\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35 ولأن المؤثر $\mathbf{L}$ متناظر بحسب المعادلة 51.2، يمكن أيضاً كتابة المعادلة السابقة:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega \tag{51.12}$$

وهذه هي *الصيغة الضعيفة* لمعادلة الاتزان التفاضلية الخاضعة لشروط قوى الشد السطحي الحدية الطبيعية.

36 متجه *الوزن* $\mathbf{w}$ اعتباطي تماماً. ويقابل في مبدأ الإزاحة الافتراضية الإزاحة الافتراضية؛ قارن المعادلة الأخيرة بالمعادلة 47.26.

$$\int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{51.13}$$

51.4.2 التقطيع بالعناصر المحدودة

37 لما كان حقل الإزاحة يُكتب

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}$$

حيث $\mathbf{N}$ دوال الشكل و$\overline{\mathbf{u}}$ الإزاحات العقدية المعلومة. وهذا تطبيق للمعادلة 51.4.

38 تستعمل طريقة غالركين دوال الشكل دوالاً للوزن (W_i)، ولذلك تصبح المعادلة 51.5:

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}\mathbf{c}; \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^T$$

و

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{c}$$

39 بإدخال المعادلتين الأخيرتين في الصيغة الضعيفة، وتذكّر أن المؤثر L في O.7 متناظر، تعطي المعادلة 51.12:

$$\mathbf{c}^T\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega\right) = 0$$

(لاحظ التشابه مع المعادلة 51.6). ولأن $\mathbf{c}$ مصفوفة اعتباطية، نستنتج أن

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega \tag{51.14}$$

تنطبق هذه المعادلة على الأنظمة الخطية وغير الخطية، ويمثل طرفها الأيمن أثر الحمل.

40 ندخل الآن النموذج التكويني في المعادلة O.11 ونكتبه على الصورة المتجهية:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$$

41 يُعطى الإجهاد والانفعال بـ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42 بإدخال هاتين المعادلتين في المعادلة 51.14 نحصل على

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{K}^e} \bar{\mathbf{u}} = \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{f}_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{f}_0}$$

43 وهكذا استعدنا بطريقة غالركين صياغة الصلابة نفسها التي حصلنا عليها سابقاً من المبدأ التغايري في المعادلة 49.10.

44 قد لا تكون لطريقة غالركين ميزة واضحة عندما يتوافر مبدأ تغايري، لكنها قد تكون الصياغة الوحيدة الممكنة عند غيابه.

51.4.2.1 مثال 51.3: مصفوفة صلابة عنصر كمرة

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

مقدمة

نريد اشتقاق مصفوفة صلابة عنصر كمرة باستعمال طريقة غالركين.

المعادلة الحاكمة الأساسية لانحراف $v(x)$ لكمرة أويلر–برنولي تحت حمل موزع $q(x)$ هي:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية في دالة وزن $\psi(x)$ ونكامل على طول عنصر الكمرة L:

$$\int_0^L \psi(x)\left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x)\right)dx = 0$$

لتخفيض رتبة مشتقات v نكامل بالتجزئة. ولنعتبر الحد ذي المشتقة الأعلى:

$$\int_0^L \psi(x) EI \frac{d^4v}{dx^4} dx$$

نكامل بالتجزئة مرتين لنقل المشتقات من v إلى ψ:

$$\int_0^L \psi EI\frac{d^4v}{dx^4}dx = -\int_0^L \frac{d\psi}{dx} EI\frac{d^3v}{dx^3}dx + \left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$$

تنعدم الحدود الطرفية $\left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$ إذا حققت دالة الوزن ψ الشروط الحدية.

وبتطبيق التكامل بالتجزئة مرة أخرى على $\int_0^L \frac{d\psi}{dx} EI\frac{d^3v}{dx^3}dx$:

$$-\int_0^L \frac{d\psi}{dx} EI\frac{d^3v}{dx^3}dx = \int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2} EI\frac{d^2v}{dx^2}dx - \left[\frac{d\psi}{dx} EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تنعدم أيضاً الحدود الطرفية $\left[\frac{d\psi}{dx} EI \frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$ تحت شروط حدية مناسبة لـ ψ.

فتصبح الصيغة الضعيفة للمعادلة الحاكمة:

$$\int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2} EI \frac{d^2v}{dx^2} dx = \int_0^L \psi q(x) dx$$

نفترض حلاً تقريبياً لـ $v(x)$ على هيئة تركيب خطي من دوال الشكل $N_i(x)$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)$$

حيث v_i الإزاحات العقدية و$N_i(x)$ دوال الشكل.

وبالمثل نختار دوال الوزن ψ مساوية لدوال الشكل $N_j(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

نعوّض التقريبات في معادلة الصيغة الضعيفة:

$$\int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)\right) dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

فتُختصر إلى:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

نميّز بوضوح عبارة اتزان بدلالة مصفوفة الصلابة والإزاحة والقوة. ومن ثم

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{d^2N_j}{dx^2} EI \frac{d^2N_i}{dx^2} dx$$

$$f_j = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

لعنصر كمرة ذي عقدتين ودوال شكل تكعيبية:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

نحسب مشتقاتها الثانية:

$$\frac{d^2N_1}{dx^2} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\frac{d^2N_2}{dx^2} = \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}$$
$$\frac{d^2N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$
$$\frac{d^2N_4}{dx^2} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

نحسب الآن عناصر مصفوفة الصلابة:

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} EI \frac{d^2N_j}{dx^2} dx$$

لعنصر كمرة نموذجي تكون مصفوفة الصلابة الناتجة من الرتبة 4×4:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

51.4.2.2 مثال 51.4: انتقال الحرارة

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

نريد حل مسألة انتقال الحرارة الموصوفة بـ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حيث $u(x,t)$ توزيع درجة الحرارة وα الانتشارية الحرارية.

نحل هذه المعادلة على المجال $0 \le x \le L$ بالشروط الابتدائية والحدية الآتية:

- الشرط الابتدائي: $u(x,0) = u_0(x)$.
- الشرطان الحديان: $u(0,t) = u_L$ و$u(L,t) = u_R$.

تتضمن طريقة غالركين الخطوات الآتية:

1. الصيغة الضعيفة لمعادلة الحرارة.
2. الحل التقريبي باستعمال دوال الأساس.
3. صياغة غالركين.
4. تجميع منظومة المعادلات.
5. التكامل الزمني.

نضرب أولاً معادلة الحرارة في دالة اختبار $\psi(x)$ ونكامل على المجال $[0, L]$:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = \alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نكامل الطرف الأيمن بالتجزئة لتخفيض رتبة المشتقة:

$$\alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx + \left[\alpha \psi(x) \frac{\partial u}{dx}\right]_0^L$$

بافتراض أن دالة الاختبار $\psi(x)$ تحقق الشروط الحدية فتنعدم الحدود الطرفية، نحصل على:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx}\, dx$$

نفترض بعد ذلك حلاً تقريبياً لـ $u(x,t)$ على هيئة تركيب خطي من دوال الأساس $N_i(x)$:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x)$$

حيث $U_i(t)$ معاملات تعتمد على الزمن ومطلوب تحديدها، و$N_i(x)$ دوال الأساس المكانية.

نختار دوال الاختبار ψ مساوية لدوال الأساس $N_j(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

نعوض الحل التقريبي ودوال الاختبار في الصيغة الضعيفة:

$$\int_0^L N_j(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x) \right) dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial}{dx} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x) \right) dx$$

فتُختصر إلى:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dU_i(t)}{dt} \int_0^L N_j(x) N_i(x)\, dx = -\alpha \sum_{i=1}^{n} U_i(t) \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial N_i}{dx}\, dx$$

نعرّف مصفوفة الكتلة M ومصفوفة الصلابة K:

$$M_{ji} = \int_0^L N_j(x) N_i(x)\, dx$$

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial N_i}{dx}\, dx$$

تصبح منظومة المعادلات:

$$M \frac{dU}{dt} = -\alpha K U$$

حيث $U = [U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)]^2$.

نستعمل طريقة تقدم زمني مثل طريقة أويلر الأمامية لتكامل منظومة المعادلات زمنياً:

$$M \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha K U^{(k)}$$

وبإعادة الترتيب:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t M^{-1} (-\alpha K U^{(k)})$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ننظر الآن في دوال أساس محددة. وللتبسيط نستعمل دوال خطية، فنقسم المجال $[0, L]$ إلى n عناصر متساوية الطول $h = L/n$، ونعرّف $N_i(x)$ دوال خطية على أجزاء تساوي 1 عند العقدة i وصفراً عند سائر العقد.

لعنصرين خطيين يمكن تعريف دالتي الأساس $N_1(x)$ و$N_2(x)$ كما يأتي:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 1 - \frac{x-h}{h} & h \le x \le 2h \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

تُحسب مصفوفتا الكتلة M والصلابة K لدوال الأساس هذه من:

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

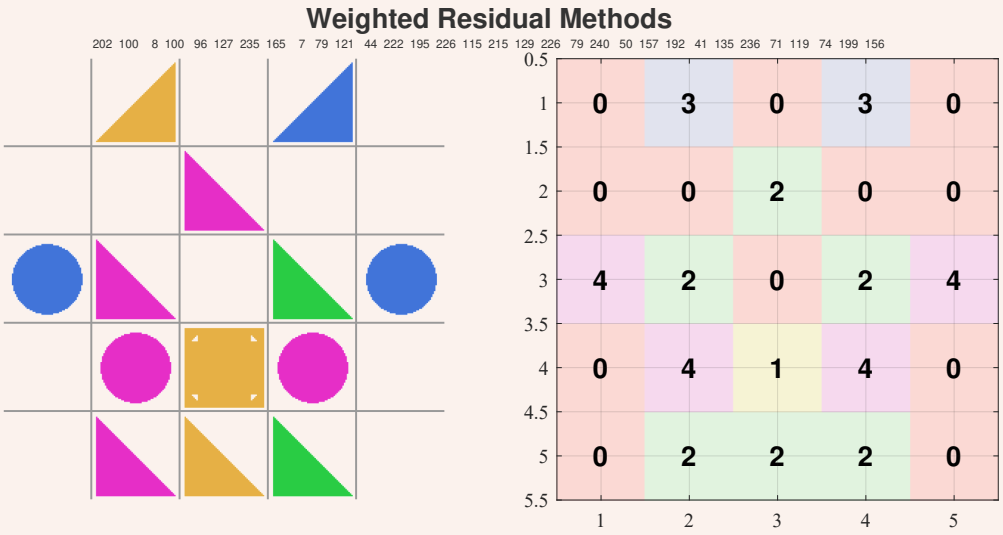
تصبح منظومة المعادلات بطريقة أويلر الأمامية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

وبالحل لإيجاد $U^{(k+1)}$:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \frac{\alpha \Delta t}{h}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الرمز البصري الخاص بالفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52 الديناميكا الثانية

ملخص

هذا الفصل مخصص لمقرر السنة الأولى من الدراسات العليا، ويطوّر الأدوات الحسابية والمتقدمة اللازمة للتحليل الديناميكي الواقعي. وبعد صياغة معادلات الحركة العامة للأنظمة الإنشائية وتحديد المثاليات المستعملة للمنشآت الإطارية، يركز على التحليل العابر بتقطيع الزمن والتكامل خطوة بخطوة. تُعرض الخوارزميات التقليدية، مثل الفرق المركزي وطرائق نيومارك، مع الاهتمام بالاستقرار والدقة والتخميد العددي. ثم يمتد النقاش إلى الأنظمة المستمرة والديناميكا غير الخطية، وينتهي باعتبارات نمذجة عملية وتمييز واضح بين التحقق والتصديق. وتُربط مقاييس الاستجابة الحتمية، حيث يلزم، بالفصل 70 لتفسيرها الاحتمالي القائم على الأداء.

إشارة. ركز الفصل 34 على الفهم التحليلي تحت الفروض الخطية. ويبدأ هذا الفصل حيث تبلغ الطرائق الخطية المغلقة حدودها: صياغات الأنظمة المعممة، والحساب العابر، والاستجابة غير الخطية.

التحليل الديناميكي العابر

ملخص

الديناميكا شرط لا غنى عنه لدراسة المنشآت زلزالياً. وبدلاً من مراجعة مبادئها الأساسية يركز هذا الفصل على الجوانب الحسابية كما تُنفذ في برامج تحليل العناصر المحدودة. يبدأ الفصل بتقطيع مبنى للتحليل الديناميكي، ثم يعرض الصياغة التغايرية للمسألة الديناميكية، ويناقش بعد ذلك تقنيات التكامل الزمني.

52.1 مقدمة 1631
52.2 مثالية الإطارات للتحليل الديناميكي . . . 1631
52.2.1 الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية 1631
52.2.2 النمذجة 1632
52.3 صياغة المسألة 1636
52.3.1 الصياغة التغايرية 1636
52.3.2 تمثيل الكتلة 1638
52.3.3 التخميد 1639
52.3.4 تقنية عددية: طرائق أويلر . . . 1642
52.4 تقطيع الزمن 1643
52.4.1 الطرائق الضمنية 1645
52.4.2 التكامل الزمني الصريح 1649
52.5 الطرائق العددية للتحليل الديناميكي . . 1653
52.5.1 طريقة الفرق المركزي 1653
52.5.2 مثال 52.5: خطوة استقرار الفرق المركزي 1653
52.5.3 طريقة نيومارك–بيتا 1654
52.5.4 التراكب النمطي مقابل التكامل المباشر 1654
52.6 الأنظمة المستمرة 1655
52.6.1 الاهتزاز المحوري للقضبان . . . 1655
52.6.2 الاهتزاز العرضي للكمرات . . . 1657
52.7 الديناميكا غير الخطية 1657
52.7.1 مصادر اللاخطية 1658
52.7.2 المطيلية وتصميم السعة 1658
52.8 اعتبارات عملية 1658
52.8.1 التخميد في المنشآت الحقيقية . 1658
52.8.2 تفاعل التربة والمنشأ 1658
52.8.3 مخمدات الكتلة المضبوطة . . . 1659
52.8.4 العزل القاعدي 1659
52.9 الخلاصة 1659

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

للسياق التاريخي، انظر §12.3.6

52.1 مقدمة

1 إذا كان تردد الحمل المطبق، أو الإثارة، أقل من نحو ثلث أدنى تردد طبيعي للمنشأ، أمكن إهمال آثار العطالة ومعاملة المسألة شبه ساكنة؛ وإلا وجب إجراء تحليل ديناميكي.

2 قد يتطلب المنشأ شديد المرونة تحليلاً ديناميكياً حتى تحت حمل بطيء *التطبيق*.

3 إذا تعرض المنشأ لحمل صدم وجب الاهتمام أساساً بانتشار موجات الإجهاد. وتكون الترددات في مثل هذه المسائل مرتفعة غالباً، وتساوي مدة التحليل الديناميكي تقريباً الزمن اللازم لاجتياز الموجة المنشأ.

4 إذا وُجدت قوى عطالة كانت المسألة ديناميكية، ويمكن تحليلها بإحدى الإجراءات الآتية:

1. طيف الاستجابة، للأنظمة المرنة الخطية فقط.
2. تحليل السجل الزمني بالتحليل النمطي، وهو أيضاً خطي مرن، أو التكامل الزمني المباشر.
3. نُقل عن الأستاذ ويلسون قوله:

> *يؤسف راي كلوف وأنا أننا أنشأنا سنة 1962 طريقة طيف الاستجابة التقريبية للتحليل الزلزالي للمنشآت. كان كثير من المهندسين آنذاك يجمعون القيم المطلقة للقيم النمطية لتقدير قوى الأعضاء القصوى، فاقترح راي طريقة الجذر التربيعي لمجموع المربعات لدمجها. لكنني أنا من وضع الطريقة التقريبية في برامج تحليل ديناميكي كثيرة، فأتاحت للمهندسين إنتاج أعداد موجبة لا معنى لها ولا قيمة تُذكر. وبعد أكثر من خمسين عاماً من العمل بهذه الطريقة أوصي بعدم استعمالها للتحليل الزلزالي.*

4. طرائق الديناميكا الإنشائية مستقلة في جوهرها عن تحليل العناصر المحدودة، لأنها تفترض توافر مصفوفات الصلابة والكتلة والتخميد. وقد تأتي هذه المصفوفات من نظام ذي درجة حرية واحدة، أو من مثالية مبسطة لمنشأ إطاري، أو من شبكة عناصر محدودة شديدة التعقيد؛ ويبقى إجراء تحليل السجل الزمني نفسه.

5 يعرض الملحقان 34.4.3 وK بإيجاز الاهتزاز الحر وتقنيات ترشيح السجلات الزلزالية.

52.2 مثالية الإطارات للتحليل الديناميكي

52.2.1 الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية

6 قبل دراسة نمذجة مبنى خاضع لحمل جانبي، مثل الحمل الزلزالي، من المفيد وضع أهمية الصلابة المحورية مقارنة بالانحنائية في منظورها الصحيح، الشكل 52.1a.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7 نسبة الصلابة المحورية إلى الانحنائية هي:

$$\alpha = \frac{k_a}{k_t} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{AL^2}{12I}$$

لمقطع مستطيل $b \times h$ حيث $b = h/2$ و$L = 10h$ نحصل على $\alpha = 100$.

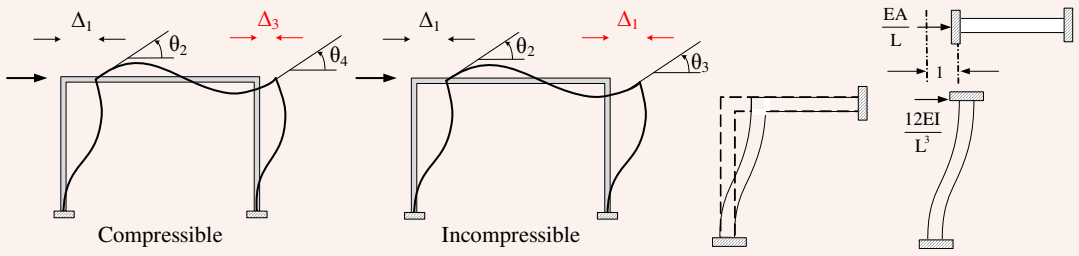
8 لمقطع W ذي

$$\left.\begin{aligned} Z &\approx \frac{wd}{9} \\ \frac{Z}{S} &= \xi = 1.1 \\ S &= \frac{I}{\frac{d}{2}} \\ w &= (490)\ \text{lbs/ft}^3 A \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} I &\approx 0.208 A d^2 \\ \alpha &= \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12E(0.208)Ad^2}{L^3}} = 0.4\left(\frac{L}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

9 للمنشآت الفولاذية يمكن افتراض $L = 20d$، ومن ثم $\alpha = 160$.

10 قد تكون التشوهات المحورية مهملة مع بقاء القوة المحورية غير مهملة. ويُستفاد من ذلك كثيراً في التحليل الزلزالي باستبدال مبنى قصير متعدد البحور بعمود واحد ذي كتل مركزة.

11 إذا كان $\alpha >\approx 10$ أمكن إهمال التشوه المحوري وتقليل عدد درجات الحرية، الشكل 52.1b. وعندما يخضع الإطار لحمل جانبي، ريحاً أو زلزالاً، تتناسب قوة القص في كل عمود مع صلابته الانحنائية.



(a) الصلابتان المحورية والانحنائية (b) الأثر في تحليل الإطار

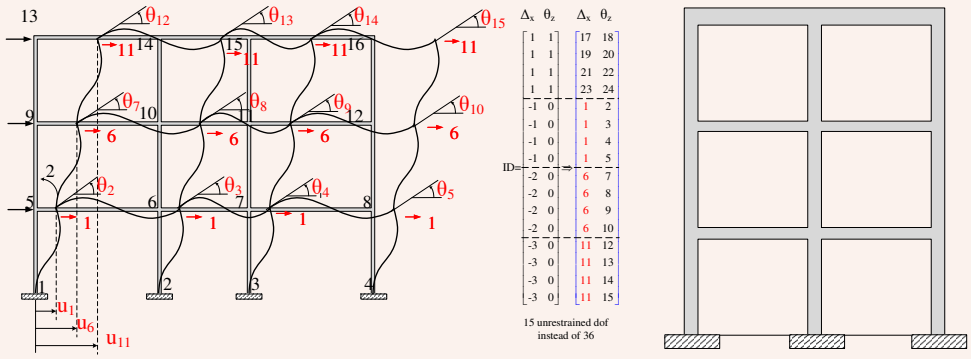
شكل 52.1: الصلابة المحورية مقابل الصلابة الانحنائية

52.2.2 النمذجة

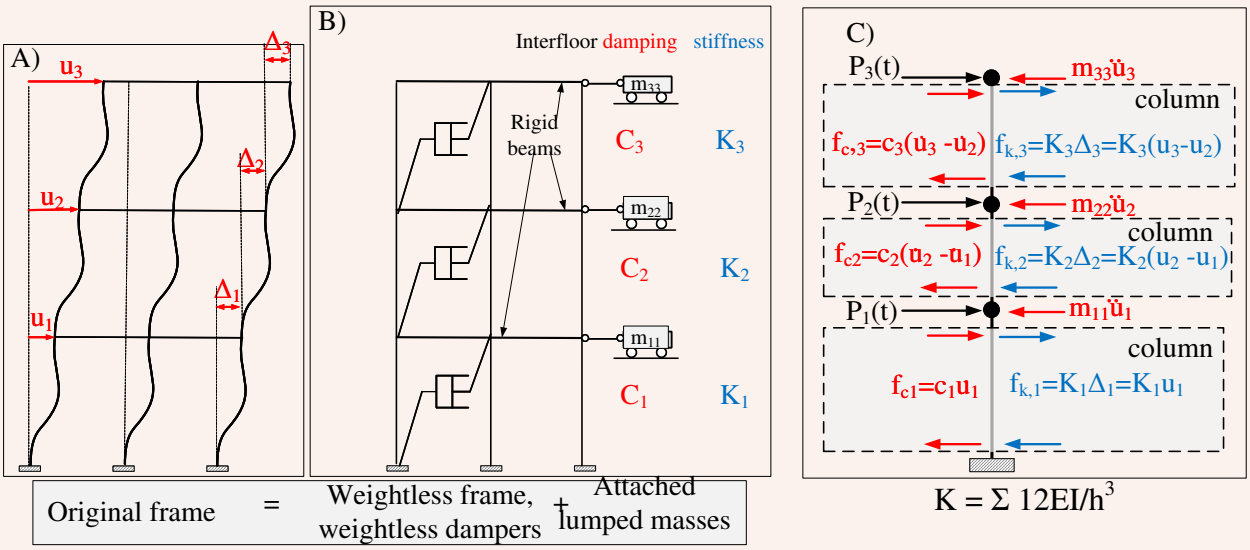
12 يمكن في الإطارات متعددة الطوابق والبحور تقليل عدد درجات الحرية غير المقيدة بدرجة كبيرة، ومن ثم تقليل حجم المصفوفات المطلوب عكسها.

13 يسهّل إهمال التشوه المحوري التحليل الديناميكي لإطارات المباني منخفضة الارتفاع الخاضعة لأحمال جانبية من الرياح أو الزلازل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 52.2: تقليل الإزاحات غير المقيدة عند إهمال الصلابة المحورية



شكل 52.3: نمذجة مبنى للحمل الزلزالي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

14 يبين الشكل 52.1a مخطط الجسم الحر لمبنى خاضع لحمل جانبي مع إهمال الصلابة المحورية.

15 تُعطى قوى الصلابة والتخميد، مع ملاحظة أن $\Delta_i = u_i - u_{i-1}$ في الشكل 52.3-A، بـ

$$\begin{aligned}
F_{K,1} &= f_{k,1} - f_{k,2} = K_1 u_1 - K_2(u_2 - u_1) \\
F_{K,2} &= f_{k,2} - f_{k,3} = K_2(u_2 - u_1) - K_3(u_3 - u_2) \\
F_{K,3} &= f_{k,3} \qquad\quad = K_3(u_3 - u_2) \\
\hline
F_{C,1} &= f_{c,1} - f_{c,2} = c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\
F_{C,2} &= f_{c,2} - f_{c,3} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\
F_{C,3} &= f_{c,3} \qquad\quad = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2)
\end{aligned} \tag{52.1}$$

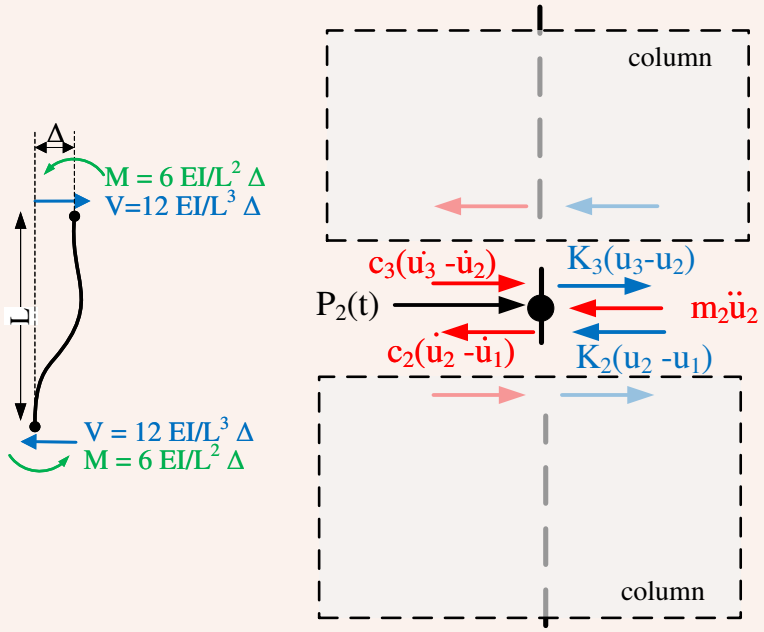
حيث $F_{K,i}$ و$F_{C,i}$ محصلتا القوى الداخلية الناتجة من الصلابة والتخميد عند العقد. وباستثناء الطابق العلوي توجد مساهمتان، إحداهما فوق العقدة والأخرى تحتها، الشكل 52.3-C.

16 صلابة الطابق هي مجموع الصلابات الجانبية لجميع أعمدته: $K_i = \sum_{columns} \frac{12EI_c}{h^3}$.

17 قوى الصلابة: $F_{K,i} = f_{k,i} - f_{k,i+1}$.

18 ترتبط قوة القص عند نهاية العضو $\mathbf{f}_i$ بـ إزاحات الطوابق النسبية: $\mathbf{f}_i = K_i \Delta_i = K_i(u_i - u_{i-1})$.

19 بتطبيق قانون نيوتن الثاني للحركة على كل من العقد الثلاث، الشكل 52.4، يمكن كتابة المعادلة 52.1:



شكل 52.4: مخطط الجسم الحر لعقدة

$$\begin{array}{llll}
P_3(t) & -m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) & -K_3(u_3 - u_2) & = 0 \\
P_2(t) & -m_{22}\ddot{u}_2 & +c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) & +K_3(u_3 - u_2) - K_2(u_2 - u_1) & = 0 \\
P_1(t) & -m_{11}\ddot{u}_1 & +c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_1\dot{u}_1 & +K_2(u_2 - u_1) - K_1 u_1 & = 0
\end{array}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبإعادة ترتيب الحدود:

$$\begin{array}{llll} m_{11}\ddot{u}_1 & +(c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 & +(k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 & = P_1(t) \\ m_{22}\ddot{u}_2 & -c_2\dot{u}_1 + (c_2+c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 & -k_2u_1 + (k_2+k_3)u_2 - k_3u_3 & = P_2(t) \\ m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 & -K_3u_2 + K_3u_3 & = P_3(t) \end{array}$$

أو

$$\mathbf{M}\{\ddot{u}\} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t)$$

حيث

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

52.2.2.1 مثال 52.1: محاكاة مونت كارلو للاستجابة المرنة الخطية لمبنى تحت حمل جانبي

مقتبس بتصرف من (Bucher, 2009).

نعيد دراسة المبنى في الشكل 52.3 بعد تمديده إلى أربعة طوابق. يخضع لأربعة أحمال ساكنة F_i، حيث $i = 1, 2, 3, 4$. تُفترض بلاطات الطوابق صلبة، وللأعمدة طول واحد $H = 4$ م وصلابات انحنائية مختلفة EI_k، حيث $k = 1 \ldots 8$. الأحمال والصلابات متغيرات عشوائية. تتبع الأحمال توزيعاً طبيعياً بمتوسط 20 كيلونيوتن ومعامل تباين 0.4، وتتبع الصلابات توزيعاً طبيعياً بمتوسط 10 ميغانيوتن متر مربع ومعامل تباين 0.2. جميع المتغيرات مستقلة زوجياً. نريد حساب:

- المتوسط والانحراف المعياري ومعامل التباين للإزاحة الأفقية u للطابق العلوي؛
- احتمال p_F لتجاوز u القيمة 0.1 م.

يعتمد التحليل على السلوك المرن الخطي للمنشأ مع استبعاد آثار الجاذبية. ويمكن حساب انحراف الطابق العلوي بجمع الإزاحات النسبية بين الطوابق، الشكل 52.3:

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{F_4 H^3}{12\,(EI_7 + EI_8)} \\ u_3 &= \frac{(F_3+F_4)\,H^3}{12\,(EI_5 + EI_6)} \\ u_2 &= \frac{(F_2+F_3+F_4)\,H^3}{12\,(EI_3 + EI_4)} \\ u_1 &= \frac{(F_1+F_2+F_3+F_4)\,H^3}{12\,(EI_1 + EI_2)} \\ u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{aligned}$$

يُسرد برنامج MATLAB® لهذا المثال في §I.2.15، ويعطي $\mu_u = 0.0545$ و$\sigma_u = 0.0128$ و$COV = 0.2353$، واحتمال الفشل $p_F == 7.6100e-04$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.3 صياغة المسألة

52.3.1 الصياغة التغايرية

20 في وسط مستمر عام ثلاثي الأبعاد، تكون معادلة حركة حجم أولي Ω من دون تخميد:

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \tag{52.2}$$

حيث $\mathbf{m}$ مصفوفة كثافة الكتلة وتساوي $\rho\mathbf{I}$، و$\mathbf{b}$ متجه قوى الجسم.

21 المؤثر التفاضلي $\mathbf{L}$ في المعادلة O.7 هو

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

22 للمادة المرنة الخطية:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}$$

وللمادة غير الخطية يمكن كتابة المعادلات التكوينية:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_i\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

حيث $\mathbf{D}_i$ مصفوفة الصلابة المماسية .

23 بينما تصف المعادلة 52.2 حركة الجسم بالمعنى القوي، تُستخرج صياغة ضعيفة من مبدأ الشغل الافتراضي المتمم الأدنى، أو من البواقي الموزونة/غالركين:

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T[\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}]\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{52.3}$$

24 بتطبيق مبرهنة غاوس للتباعد، المعادلة R.4:

$$\int\int_A \phi\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}\mathrm{d}A = \oint_s \phi\mathbf{q}^T\mathbf{n}\mathrm{d}s - \int\int_A (\nabla\phi)^T\mathbf{q}\mathrm{d}A$$

ومع تذكّر أن $\mathbf{Lu} = \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma$$

25 تتحول المعادلة 52.3 إلى

$$\int_{\Omega}[\delta\mathbf{u}^{T}(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}-\mathbf{b})+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\sigma}]\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma}\delta\mathbf{u}^{T}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{52.4}$$

لم يُفترض حتى الآن أي سلوك للمادة.

26 نبحث الآن التقطيع المكاني لمعادلة الشغل الافتراضي 52.4. ومن أساسيات العناصر المحدودة لدينا العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}\\ \delta\mathbf{u}^{T}&=\delta\overline{\mathbf{u}}^{T}\mathbf{N}^{T}\\ \ddot{\mathbf{u}}&=\mathbf{N}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}\\ \mathbf{B}&=\mathbf{L}\mathbf{N}\\ \boldsymbol{\varepsilon}&=\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{T}&=\delta\overline{\mathbf{u}}^{T}\mathbf{B}^{T}\\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}&=\mathbf{B}\dot{\overline{\mathbf{u}}}\end{aligned}$$

27 للمسائل الخطية $\boldsymbol{\sigma}_{t,n}=\mathbf{D}_{e}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_{t,n}$، وبالتعويض المناسب نحصل على

$$\underbrace{\underbrace{\int_{\Omega}\mathbf{N}^{T}\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\,\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\mathbf{M}_{tt}}}_{\mathbf{P}_{t,n}^{inertia}}+\underbrace{\underbrace{\int_{\Omega}\mathbf{B}^{T}\mathbf{D}_{e}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega\,\overline{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{K}}}_{\mathbf{P}_{t,n}^{int}}-\underbrace{\left(\int_{\Omega}\mathbf{N}^{T}\mathbf{P}_{t,n}^{ext}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\mathbf{N}^{T}\mathbf{t}_{t,n}\mathrm{d}\Gamma\right)}_{\mathbf{P}_{t,n}^{ext}}=0$$

أو $\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}_{t,n}+\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}_{t,n}=\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ وهي معادلة الحركة الخطية شبه المتقطعة في التكامل الزمني الضمني.

28 لاحظ التشابه بين مصفوفة الكتلة ومصفوفة الصلابة الهندسية في المعادلة 59.5:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}&=\int_{\Omega}\mathbf{N}^{T}\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\\ \mathbf{k}_{g}^{(e)}&=P^{(e)}\int_{L}\mathbf{N}_{,x}\mathbf{N}_{,x}dx\end{aligned}$$

29 لاحظ أيضاً غياب معامل التخميد، وهو "حيلة" عددية غير عقلانية.

30 إذا افترضنا تخميداً لزجاً واستبدلنا $\overline{\mathbf{u}}$ بـ $\mathbf{u}$ نحصل على

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t}+\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t}+\mathbf{P}_{t}^{int}=\mathbf{P}_{t}^{ext} \tag{52.5}$$

حيث $\mathbf{M}_{tt}$ و$\mathbf{C}_{tt}$ مصفوفتا الكتلة والتخميد اللزج لمثالية المنشأ؛ و$\ddot{\mathbf{u}}_{t}$ متجه التسارع العقدي، و$\dot{\mathbf{u}}_{t}$ متجه السرعة العقدية، و$\mathbf{P}_{t}^{int}$ متجه قوة الاستعادة الساكنة أو القوة العقدية الداخلية الناتجة من متجه الإزاحة العقدية $\mathbf{u}_{t}$، و$\mathbf{P}_{t}^{ext}$ متجه القوى العقدية المطبقة بسبب الحمل الزلزالي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.3.2 تمثيل الكتلة

31 لمصفوفة الكتلة تمثيلان ممكنان: المركز والمتسق.

الكتلة المركزة: يُفترض أن جميع الكتل مركزة عند العقد الطرفية. ورغم أن ذلك ليس دقيقاً تماماً، فإن ميزته إعطاء مصفوفة قطرية سهلة العكس. وإذا أُدرجت الحركة المحورية لعنصر الكمرة كانت مصفوفة الكتلة، مع متجه الإزاحة الموافق:

$$\mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ وجود عناصر صفرية على القطر تقابل درجات الحرية الدورانية. ولإدراجها نعتبر "قرصاً" طوله dx عند الإحداثي x من العقدة الأولى. يكون عزم عطالة هذا القرص حول العقدة الأولى:

$$dm_r = \rho \left(\frac{I}{A} + x^2 \right) dx$$

حيث ρ كثافة كتلة العنصر لكل وحدة طول وA مساحة مقطع الكمرة. وبما أن عطالة دوران نصف العنصر تُركز عند كل عقدة، يكون

$$m_{ri} = m_{rj} = \int_0^{L/2} dm_r = \frac{\rho L}{2} \left(\frac{I}{A} + \frac{L^2}{12} \right) = \frac{\rho L}{2} \left(r_y^2 + \frac{L^2}{12} \right)$$

ويجب إضافة مصفوفة الكتلة الدورانية الآتية إلى المصفوفة الانتقالية:

$$m_r = \mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{rj} \end{bmatrix} = \frac{\rho L}{2} \left(r_y^2 + \frac{L^2}{12} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الكتلة المتسقة: تستعمل مصفوفة كتلة مكافئة حركياً ترتبط فيها قوى العطالة بجميع درجات الحرية. ومن

$$\mathbf{m}_e = \int_0^{L_e} \rho \cdot A(x) \cdot \mathbf{N}_d(x)^T \cdot \mathbf{N}_d(x) \mathrm{d}x$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالتعويض بدوال شكل الكمرة في المعادلة 48.11 نحصل على

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho \cdot A \cdot L_e}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22\cdot L_e & 0 & 54 & -13\cdot L_e \\ 0 & 22\cdot L_e & 4\cdot L_e^2 & 0 & 13\cdot L_e & -3\cdot L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13\cdot L_e & 0 & 156 & -22\cdot L_e \\ 0 & -13\cdot L_e & -3\cdot L_e^2 & 0 & -22\cdot L_e & 4\cdot L_e^2 \end{bmatrix}$$

ثم تتحول مصفوفة الكتلة إلى المرجع العام: $\mathbf{M}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \mathbf{m}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$.

52.3.3 التخميد

32 جميع المنشآت مخمدة، وفق القانون الثاني للديناميكا الحرارية، وإلا لما توقفت اهتزازاتها. ويمكن النظر إلى التخميد كقوة احتكاك تبدد الطاقة، وله صور مختلفة.

33 أكثر صور التخميد استعمالاً التخميد اللزج أو تخميد رايلي، وعند إدخاله في معادلة الحركة تكون

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

حيث $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$ و$\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ و$\mathbf{u}_{t,n}$ متجهات التسارع والسرعة والإزاحة العقدية عند الخطوة الزمنية الحالية، و$\mathbf{P}^{int}_{t,n}$ متجه قوة الاستعادة الساكنة أو القوة العقدية الداخلية عند الخطوة نفسها.

34 الغرض من التخميد تمثيل تبديد الطاقة. وفي التحليل غير الخطي تتكفل بذلك نماذج تكوينية تتضمن تخميداً هستيرياً، مثل نموذج كِنت وبارك المعدل للخرسانة؛ لذلك يجب الحذر الشديد عند إضافة تخميد إلى تحليل غير خطي.

35 في التحليل المرن الخطي تكون الصورة الأكثر شيوعاً التخميد اللزج، أو تخميد رايلي. وفي هذا التبسيط نفترض مخمداً لزجاً حساساً للسرعة بين المنشأ ونقطة خارجية ثابتة، وهو الجزء المتناسب مع الكتلة، ومجموعة مخمدات داخل المنشأ تصل جميع درجات الحرية، وهي الجزء المتناسب مع الصلابة، الشكل 52.5. التخميد اللزج: $\mathbf{C}_{tt} = a_m\mathbf{M}_{tt} + b_k\mathbf{K}_{tt}$، حيث a_m وb_k معاملا حدي الكتلة والصلابة على الترتيب. يُحسبان من ترددين دائريين ω_1 وω_2 مطلوب تخميدهما عند ξ_1 وξ_2. ويمثل ω_m وξ_m التردد الدائري ونسبة التخميد للنمط m. ويمكن إظهار أن

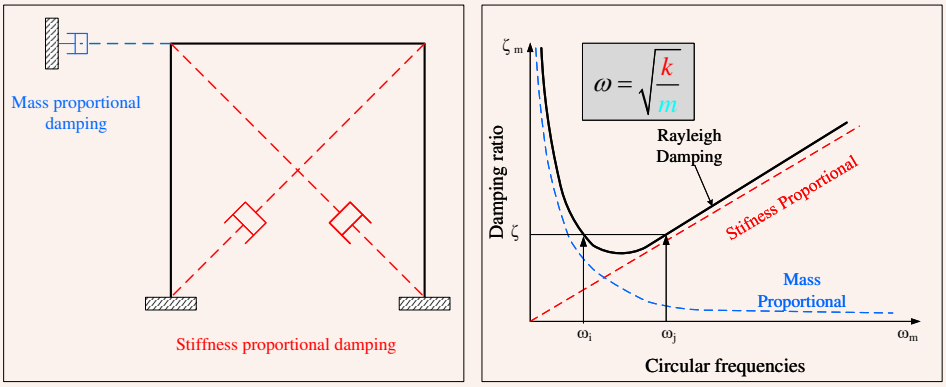
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_m \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

36 إذا افترضنا نسبة تخميد واحدة ζ للنمطين، وهو فرض عملي معقول، فإن

$$a_m = \zeta\frac{2\omega_i\cdot\omega_j}{\omega_i+\omega_j};\quad b_k = \zeta\frac{2}{\omega_i+\omega_j}$$

37 ينبغي التأكيد على استعمال معاملات تخميد مختلفة في التحليلين الخطي وغير الخطي، ولا سيما إذا كان النموذج التكويني غير الخطي يحسب التخميد الهستيري. وإذا استُعمل تخميد رايلي في تحليل غير خطي فقد يلزم تحديث a_m وb_k عند كل زيادة زمنية لتعكس تغير مصفوفة الصلابة المماسية $\mathbf{K}_t$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 52.5: التخميد المتناسب مع الكتلة والصلابة

38 عملياً يمكن الحصول على معاملات التخميد بإثارة المنشأ بهزازات، ولكن ضمن المجال المرن فقط.

52.3.3.1 مثال 52.2: معايرة معاملات تخميد رايلي لمبنى قصي

✳ حُلّل مبنى قصي من الخرسانة المسلحة من ثلاثة طوابق، وتبين أن ترددية الطبيعيين الأولين $f_1 = 1.20$ Hz و$f_2 = 3.60$ Hz، أي $\omega_1 = 7.540$ rad/s و$\omega_2 = 22.619$ rad/s. مطلوب تعيين نسبة تخميد $\zeta = 5\%$ للنمطين باستعمال تخميد رايلي $\mathbf{C} = a_m\mathbf{M} + b_k\mathbf{K}$. احسب: (أ) المعاملين a_m وb_k؛ (ب) نسبة التخميد الناتجة في النمط الثالث حيث $f_3 = 6.00$ Hz و$\omega_3 = 37.699$ rad/s؛ (ج) التفسير الهندسي.

الحل.

(أ) معاملات رايلي.

مع تساوي التخميد في النمطين المستهدفين تعطي الصيغ المبسطة:

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 0.05 \times \frac{2 \times 7.540 \times 22.619}{7.540 + 22.619} = 0.05 \times \frac{341.1}{30.159} = 0.565 \text{ s}^{-1}$$

$$b_k = \zeta \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} = 0.05 \times \frac{2}{30.159} = 3.32 \times 10^{-3} \text{ s}$$

(ب) التخميد الناتج في النمط الثالث.

يعين نموذج رايلي لأي نمط n ذي تردد ω_n نسبة التخميد:

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_m}{\omega_n} + b_k\omega_n\right)$$

للنمط الثالث:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.565}{37.699} + 3.32 \times 10^{-3} \times 37.699\right) = \frac{1}{2}\left(0.01499 + 0.12516\right) = 7.0\%$$

(ج) التفسير الهندسي.

تستحق ثلاث ملاحظات الذكر:

1. يُخمد النمطان 1 و2 عند النسبة المستهدفة 5% تماماً بحكم المعايرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. يقع النمط 3 فوق نطاق المعايرة فيُخمد بنسبة زائدة مقدارها 7%؛ فالحد المتناسب مع الصلابة $b_k\omega_n$ ينمو خطياً مع التردد ويسود في الأنماط العليا. وفي نموذج عناصر محدودة كثير الأنماط قد تُعطى الأنماط الأعلى تردداً نسب تخميد كبيرة اصطناعياً. هذه ميزة مقصودة لكبح الاستجابة الزائفة عالية التردد، لكنها مصدر خطأ محتمل إذا حملت تلك الأنماط طاقة حقيقية.
3. يتناقص الحد المتناسب مع الكتلة a_m/ω_n مع التردد، وقد يفرط في تخميد الأنماط تحت نطاق المعايرة، مثل أنماط التأرجح أو الانزلاق منخفضة التردد في المنشآت المعزولة قاعدياً، ولذلك يلزم الحذر.

توضح هذه الخصائص أن اختيار ترددي المعايرة (ω_i, ω_j) قرار نمذجة وليس قراراً عددياً محضاً؛ وينبغي أن يحيطا بنطاق التردد المتوقع أن تكون فيه استجابة المنشأ الديناميكية مهمة.

52.3.3.2 مثال 52.3: خط أساس تحليلي: الاهتزاز الحر من شروط ابتدائية عامة

✳ قبل الانتقال إلى التقدم الزمني العددي، من المفيد توافر نتيجة مغلقة دقيقة للتحقق من المكاملات. لنعتبر نظاماً مخمداً ذا درجة حرية واحدة:

$$m = 2\,000\ \text{kg}, \quad k = 800\,000\ \text{N/m}, \quad \zeta = 2\%$$

يُطلق من الشرطين الابتدائيين $u_0 = 25\ \text{mm}$ و$v_0 = 80\ \text{mm/s}$. احسب: (أ) خصائص النظام؛ (ب) استجابة الاهتزاز الحر الدقيقة $u(t)$؛ (ج) السعة والطور؛ (د) الاستجابة عند $t = 0.20\ \text{s}$ وزمن أول عبور للصفر.

الحل.

(أ) خصائص النظام.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,000}{2\,000}} = 20.00\ \text{rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{20} = 0.3142\ \text{s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20\sqrt{1-0.0004} = 19.996\ \text{rad/s}, \qquad T_d = 0.3143\ \text{s}$$

عند $\zeta = 2\%$ لا يتجاوز الفرق بين ω_d وω_n نسبة 0.02%، مما يؤكد أن المنشآت خفيفة التخميد تهتز عملياً عند ترددها الطبيعي غير المخمد.

(ب) الاستجابة الدقيقة.

حل الاهتزاز الحر ناقص التخميد عند $u(0) = u_0$ و$\dot{u}(0) = v_0$ هو:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

بالتعويض العددي، حيث $\zeta\omega_n = 0.40\ \text{s}^{-1}$ و$\omega_d \approx 19.996$:

$$\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} = \frac{80 + 0.40\times 25}{19.996} = \frac{90}{19.996} = 4.501\ \text{mm}$$

$$u(t) = e^{-0.40t}\left[25\cos(19.996\,t) + 4.501\sin(19.996\,t)\right] \quad [\text{mm}]$$

(ج) السعة والطور.

في صيغة السعة والطور $u(t) = \rho e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{25^2 + 4.501^2} = \sqrt{625 + 20.26} = 25.40\ \text{mm}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\tan\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} = \frac{4.501}{25} = 0.1800 \quad \Rightarrow \quad \phi = 10.2^\circ$$

(د) الاستجابة عند $t = 0.20$ s وأول عبور للصفر.

$$u(0.20) = e^{-0.40\times0.20}\left[25\cos(19.996\times0.20) + 4.501\sin(19.996\times0.20)\right]$$

$$= e^{-0.08}\left[25\cos(3.9992) + 4.501\sin(3.9992)\right]$$

$$\cos(3.9992\text{ rad}) = -0.6542,\ \sin(3.9992\text{ rad}) = -0.7563:$$

$$u(0.20) = 0.9231\left[25\times(-0.6542) + 4.501\times(-0.7563)\right] = 0.9231\left[-16.35 - 3.404\right] = -18.24\text{ mm}$$

يحدث أول عبور للصفر بعد $t = 0$ عندما $25\cos(\omega_d t) + 4.501\sin(\omega_d t) = 0$، أي $\tan(\omega_d t) = -25/4.501 = -5.554$،
ومنه $\omega_d t = \pi - \arctan(5.554) = \pi - 1.391 = 1.749$ rad:

$$t_0 = \frac{1.749}{19.996} = 0.0875\text{ s}$$

تعليق. تعمل هذه النتيجة المغلقة معياراً *للتحقق* من أي مكامل عددي للمسألة نفسها. فعندما $\Delta t \to 0$ يجب أن تتقارب حلول أويلر والفرق المركزي ونيومارك جميعاً إلى $u(0.20) = -18.24$ mm. ومقارنة الناتج العددي بهذه القيمة عند نقطة فحص واحدة اختبار بسيط لكنه قوي لصحة التنفيذ.

52.3.4 تقنية عددية: طرائق أويلر

39 طريقة أويلر طريقة عددية من الرتبة الأولى لحل مسائل القيم الابتدائية الديناميكية. تستعمل ميل المماس عند النقطة الحالية لتقدير الحل عند النقطة التالية، بخطوة ثابتة، ولا تحتاج إلا إلى القيمة الابتدائية والمعادلة التفاضلية. ميزتها الرئيسة البساطة وسهولة التنفيذ، لكنها قد تعاني ضعف الدقة ومشكلات الاستقرار.

40 عند الانتقال إلى مشتقات أعلى، كالسرعة ثم التسارع، ندخل في طرائق رونج–كوتا التي تمثل طريقة أويلر أدنى رتبها.

41 نستعمل في §58.1.1 تقنية عددية أخرى، هي طريقة نيوتن، لحل معادلة تفاضلية.

42 هدفنا النهائي حل المعادلة 52.5، لكن من المناسب مراجعة طريقة أويلر بإيجاز قبل معالجة المسألة الديناميكية في §52.4.

43 طريقة أويلر إجراء عددي لحل المعادلات التفاضلية العادية ذات القيم الابتدائية. أي: إذا عُرف الحل عند t_n، فكيف نحصل عليه عند t_{n+1}؟ يوضح الشكل 52.6 الطريقتين.

44 استعملنا طريقة *نيوتن للتحليل غير الخطي*، و*أويلر للتحليل الديناميكي*.

45 نقطع المكان بالعناصر المحدودة والزمن بالفروق المحدودة.

46 كما في طريقة نيوتن، المعادلة 58.1، نبدأ بمتسلسلة تايلور.

أويلر الأمامي/الصريح

$$y(t_n + h) \equiv y_{n+1} = y(t_n) + h\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n} + O(h^2) \Rightarrow y^{?}_{n+1} \simeq y^{\checkmark}_n + h f(y^{\checkmark}_n, t_n) \qquad (52.6)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $h = \Delta t$ و $f(y_n, t_n) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n}$. وتسمى الطريقة صريحة لأن y_{n+1} تُعطى صراحة بدلالة كميات معلومة، فلا توجد معادلة مطلوب حلها. الطرائق الصريحة سهلة التنفيذ لكنها مستقرة شرطياً، أي يجب أن يقل h عن قيمة حرجة، ويشبه ذلك طريقة الخطوة بخطوة التقريبية للمسائل الهندسية غير الخطية.

أويلر الخلفي/الضمني يبدأ بتوسع تايلور الخلفي:

$$y(t_n) \equiv y_n = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} + O(h^2) \Rightarrow y^{?}_{n+1} \simeq y^{\checkmark}_n + h f(y^{?}_{n+1}, t_{n+1})$$

هي طريقة ضمنية لأن $f(y_{n+1}, t_{n+1})$ غير معلومة، ويجب حل معادلة غير خطية عادةً عند كل خطوة زمنية، ربما بطريقة نيوتن–رافسون. وهي أعلى كلفة حسابياً من الصريحة، لكنها مستقرة بلا شرط.

47 تعطي الطريقة الضمنية، مقابل كلفة حل نيوتن–رافسون، حلاً "دقيقاً" دائماً؛ أي يتحقق الاتزان في سياق الديناميكا الإنشائية، خلافاً للطريقة الصريحة.

52.3.4.1 مثال 52.4: طريقة أويلر

نريد حل المعادلة التفاضلية العادية الخطية من الرتبة الأولى:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (t - y(t))^2; \qquad 2 \le t \le 3; \qquad y(0) = 1; n = 0$$

- أويلر الأمامي عند $h = 0.1$:

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1\left[1 + (2. - 1.)^2\right] = 1.2$$

- يعطي أويلر الخلفي:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f(y_{n+1}, t_{n+1}) \\ \Rightarrow y_1 &= 1 + 0.1\left[1 + (2.1 - y_1)^2\right] \\ \Rightarrow 0 &= 0.1 y_1^2 - 1.42 y_1 + 1.541 \\ \Rightarrow y_1 &= 1.1839 \end{aligned}$$

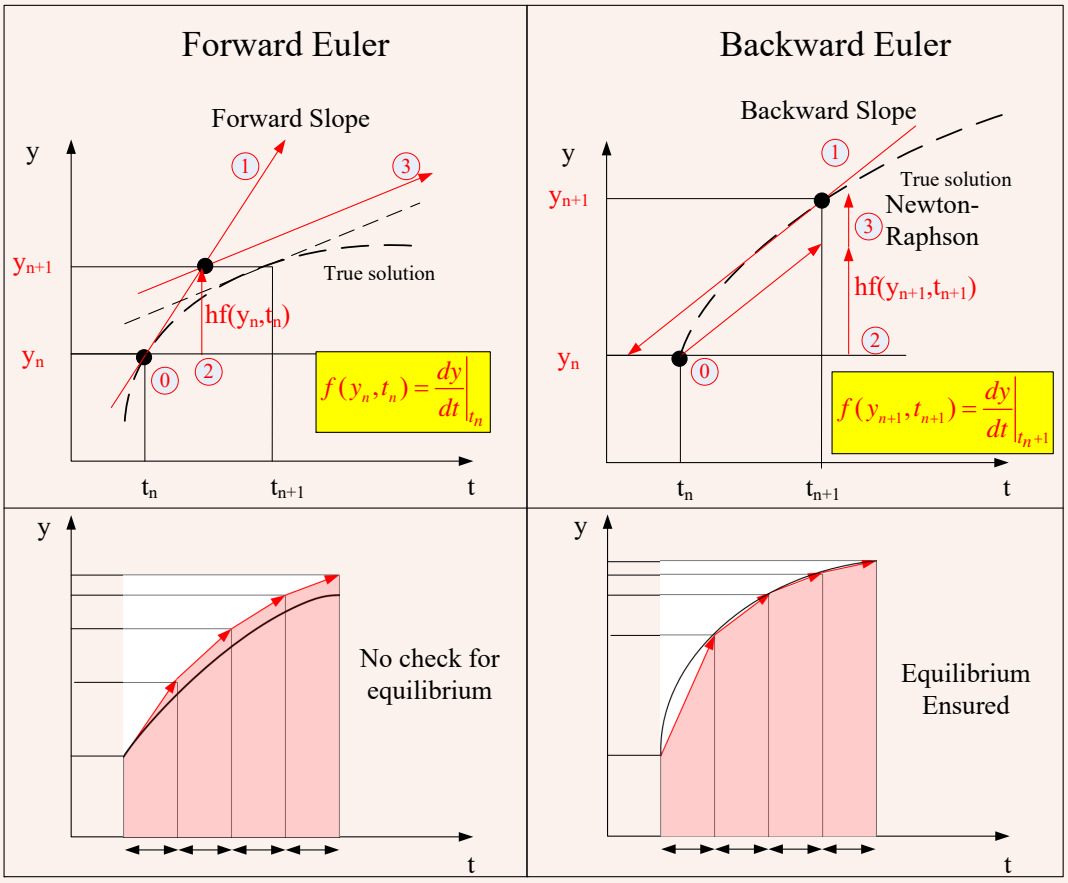
كان المطلوب هنا حل معادلة تربيعية، لكن قد يلزم عموماً استعمال طريقة نيوتن لإيجاد y_n.

- في التحليل الإنشائي غير الخطي يعني ذلك التحقق من الاتزان عند $n = 1$، وهو ما لا يحدث في الطريقة الصريحة.

52.4 تقطيع الزمن

48 تمثل المعادلة 52.5 رياضياً منظومة معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية، ويمكن من حيث المبدأ حلها بإجراءات المعادلات ذات المعاملات الثابتة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 52.6: طريقتا أويلر الأمامية والخلفية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49 لكن إجراءات حل المنظومات العامة قد تصبح باهظة إذا كانت رتبة المصفوفات كبيرة، ما لم تُستغل الخصائص الخاصة لمصفوفات المعاملات **M** و**C** و**K**.

50 نهتم في تحليل العناصر المحدودة العملي بطريقتين فعالتين: التكامل المباشر والتراكب النمطي. والطريقتان وثيقتا الصلة، ويحدد الاختيار بينهما الأداء العددي. يُستعمل هنا التكامل المباشر.

51 في التكامل المباشر تُكامل المعادلة 52.5 بإجراء عددي خطوة بخطوة؛ وتعني كلمة "مباشر" عدم تحويل المعادلات إلى صيغة أخرى قبل التكامل العددي.

52.4.1 الطرائق الضمنية

52.4.1.1 طريقة نيومارك

52.4.1.1.1 الاشتقاق

52 طريقة نيومارك تعميم لطريقة أويلر للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، أي معادلة الحركة.

53 نبدأ بمتسلسلة تايلور :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} \quad \text{أويلر الأمامية}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^{n} \quad \text{أويلر الخلفية}$$

54 تختلف طريقة نيومارك عن أويلر في استبدال المشتقات العليا بعبارات أبسط، ومن ثم أقل دقة، طلباً للكفاءة.

55 نبدأ مرة أخرى بتوسع متسلسلة تايلور لمتجهي الإزاحة والسرعة العقدية حول قيمهما عند الزمن السابق $n-1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t,n} &\approx \mathbf{u}_{t,n-1} + \frac{\partial \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &\approx \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\Delta t + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

تمثل المعادلتان متجهي الإزاحة والسرعة التقريبيين $\mathbf{u}_{t,n}$ و$\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ مع إهمال الحدود العليا في متسلسلة تايلور. نمثل الحدين الأخيرين كما يأتي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{3!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t^2}{3!} \\ &\approx \beta(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t^2 \\ \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t}{2!} \\ &\approx \gamma(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t \end{aligned}$$

حيث β وγ معاملا التقريب العددي.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56 بالتعويض:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &= \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \gamma \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\end{aligned}$$

57 نحصل على طريقة نيومارك β، وتتكون من المعادلات الآتية بالفروق الأمامية:

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{52.7}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + 2\beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{52.8}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{52.9}$$

حيث المعادلة الأولى معادلة الاتزان عند الزمن n، والأخريان صيغتا فروق محدودة تصفان تطور الحل التقريبي. لدينا ثلاث معادلات وثلاثة مجاهيل: $\mathbf{u}_{t,n}$ و$\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ و$\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$.

58 يحدد المعاملان β وγ خصائص الاستقرار والدقة. شروط استقرار طريقة نيومارك β موضحة في الجدول 52.1:

- مستقرة بلا شرط إذا كان $\gamma \geq \frac{1}{2}$ و$\beta \geq \frac{\gamma}{2}$.
- مستقرة شرطياً إذا كان $\gamma \geq \frac{1}{2}$ و$\beta < \frac{\gamma}{2}$، بحد الاستقرار $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma - 2\beta}} = 0.551$.

جدول 52.1: شروط الاستقرار للطرائق المختلفة

الطريقة	النوع	β	γ	شرط الاستقرار	رتبة الدقة
التسارع الثابت	ضمنية	1/4	1/2	بلا شرط	2
التسارع الخطي	ضمنية	1/6=!1/3	1/2=!1/2	$\Delta t \leq 2\sqrt{3}/\omega$	2
الفرق المركزي	صريحة	0	1/2	$\Delta t \leq 2/\omega$	2

52.4.1.1.2 طريقة نيومارك β الضمنية

59 تبدأ طريقة نيومارك الضمنية من المعادلات 52.7 و52.8 و52.9، ويمكن كتابتها:

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{52.10}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{52.11}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \Delta t \cdot \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{52.12}$$

حيث تحمل الكميات المعلومة عند الخطوة $n-1$ الرمز $\tilde{(.)}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} \\ \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} &= \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 تعطي المعادلة 52.11 $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} = \frac{\mathbf{u}_{t,n} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}{\Delta t^2 \beta}$.

61 وبالتعويض في المعادلة 52.12 نحسب $\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta}(\mathbf{u}_{t,n} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n})$. وأخيراً بالتعويض في المعادلة 52.10 نحصل على:

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \mathbf{P}_{t,n}^{int}}_{?}$$

$$= \underbrace{\mathbf{P}_{t,n}^{ext} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

62 إذا كانت الحلول التجريبية عند التكرار k هي $\mathbf{u}_{t,n}^k$ و$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$، فإنها لا تحقق معادلات الحركة. لذلك نكتب لهذه الخطوة متجه قوة الباقي $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$:

$$\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}_{t,n}^k\right) - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$$

حيث $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt} + \Delta t \gamma \mathbf{C}}{\Delta t^2 \beta}$.

63 باستعمال طريقة تكرار الصلابة الابتدائية نحسب $\Delta \mathbf{u}_{t,n}^k$ من $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} = \mathbf{K}_{eff}\Delta \mathbf{u}_{t,n}^k$، حيث $\mathbf{K}_{eff}$ مصفوفة الصلابة الفعالة و$\Delta \mathbf{u}_{t,n}^k = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}_{t,n}^k$.

64 في المجال المرن $\mathbf{P}_{t,n}^{int} = \mathbf{K}_{tt}\mathbf{u}_{t,n}$، وبالتعويض نحسب $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff} \cdot \mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} + \overline{\mathbf{M}}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}$$

حيث $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + \mathbf{K}_{tt}$ لمصفوفة كتلة مركزة أو متسقة.

65 وأخيراً نحسب $\delta \mathbf{u}_{t,n}^k$ ومتجه الإزاحة المحدّث $\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ عند التكرار التالي $k+1$:

$$\delta \mathbf{u}_{t,n}^k = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1} \cdot \mathbf{P}_{t,n}^{R,k}; \quad \mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^k + \delta \mathbf{u}_{t,n}^k$$

لاحظ أن عكس مصفوفة الكتلة يلزم للمصفوفة المتسقة فقط.

66 لاحظ التشابه مع التحليل غير الخطي، حيث يرتبط $\delta \mathbf{u}$ بمصفوفة الصلابة المماسية وقوة الباقي.

52.4.1.2 طريقة هيلبر–هيوز–تايلور

67 من عيوب طريقة نيومارك β بقاء ضوضاء التردد العالي في الحل. كما أن إضافة تخميد خطي أو لزوجة اصطناعية بالمعامل γ تُضعف الدقة بوضوح.

68 تعالج طريقة هيلبر–هيوز–تايلور HHT، أو طريقة α، ذلك بتحسين التبديد العددي للترددات العالية من دون إضعاف الدقة بالقدر نفسه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

69 تُكتب معادلة الحركة في HHT عند الخطوة الزمنية الحالية n بالفروق الأمامية:

$$\underbrace{\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}}+\mathbf{P}^{int}_{t,n}=\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

وبطلب حل تقريبي بفرق خطوة واحدة نكتب

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}=(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

تدخل HHT الحد $\alpha(\mathbf{P}^{int}_{t,n}-\mathbf{P}^{int}_{t,n-1})$ المشابه للتخميد المتناسب مع الصلابة، ولذلك يقال إن طريقة α توفر تخميداً عددياً. وبالتوسيع وإدخال أثر التخميد ولاخطية المادة الممكنة نحصل على:

$$(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}=\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

إذا كان $-1/3\le\alpha\le 0$ و$\beta=(1-\alpha)^2/4$ و$\gamma=(1-2\alpha)/2$، كانت طريقة α مستقرة بلا شرط ودقتها من الرتبة الثانية.

70 بافتراض معرفة الاستجابة عند الخطوة السابقة $n-1$، أي $\mathbf{u}_{t,n-1}$ و$\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ و$\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ التي تحقق معادلة الحركة، نطلب الآن الحل عند الخطوة الحالية n بالتكرار.

71 نحدد أولاً القوة الخارجية الفعالة والصلابة الفعالة.

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2\cdot\beta}\mathbf{M}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}+\frac{\gamma}{\Delta t\cdot\beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$

$$=\underbrace{(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}+\frac{1}{\Delta t^2\cdot\beta}\mathbf{M}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}+\frac{\gamma}{\Delta t\cdot\beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

$$\underbrace{-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{n-1}+\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{\checkmark}$$

72 الحلول التجريبية عند التكرار k، وهي $\mathbf{u}^k_{t,n}$ و$\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$، لا تحقق بالضرورة معادلات الحركة. لذلك نكتب لهذه الخطوة:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}=(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}+\overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}-\mathbf{u}^k_{t,n}\right)-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$-(1+\alpha)\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

حيث $\overline{\mathbf{M}}_{tt}=\frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t\gamma(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}}{\Delta t^2\beta}$، و$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ متجه قوة الباقي.

73 بطريقة تكرار الصلابة الابتدائية نحسب $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ من $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}=\mathbf{K}_{eff}\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$، حيث $\mathbf{K}_{eff}$ الصلابة الفعالة و$\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}=\mathbf{u}_{t,n}-\mathbf{u}^k_{t,n}$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

74 في المجال المرن نكتب $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt}\mathbf{u}_{t,n}$ لحساب الصلابة الفعالة من الصلابة الابتدائية $\mathbf{K}_{tt}$.

75 بالتعويض نحسب $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff}\cdot\mathbf{u}_{t,n} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - (1+\alpha)\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

حيث $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + (1+\alpha)\mathbf{K}_{tt}$.

76 وأخيراً نحسب $\delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}$ ومتجه الإزاحة المحدّث $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ عند التكرار التالي $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^{k}_{t,n} = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1}\cdot\mathbf{P}^{R,k}_{t,n};\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}$$

77 ملاحظات ختامية:

- يدخل α تخميداً ينمو مع نسبة الزيادة الزمنية إلى دور اهتزاز النمط.
- القيم السالبة لـα تسبب تخميداً.
- عند $\alpha = 0$ لا يوجد تخميد اصطناعي، فتُحفظ الطاقة، وتطابق الطريقة طريقة التسارع الثابت، أو قاعدة شبه المنحرف، وطريقة نيومارك β عند $\beta = 1/4$ و$\gamma = 1/2$.
- أدنى قيمة $\alpha = -1/3$ وتعطي أكبر تخميد اصطناعي؛ وينتج عنها نحو 6% عندما تكون الزيادة الزمنية 40% من دور النمط المدروس، وتقل النسبة مع زيادة الدور.
- هذا التخميد الاصطناعي صغير للزيادات الزمنية الواقعية والترددات المنخفضة، لكنه غير مهمل للترددات العالية.
- يوصى بالقيمة الافتراضية -0.05.

52.4.2 التكامل الزمني الصريح

78 نبدأ في التكامل الزمني الصريح بصورة معدلة قليلاً من المعادلة التفاضلية المشتقة سابقاً تتضمن آثار التخميد:

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_I(t)} + \underbrace{\mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_D(t)} + \underbrace{\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}}_{\mathbf{F}_i(t)} = \underbrace{\mathbf{f}_e}_{\mathbf{f}_e(t)}$$

حيث $\mathbf{M}$ و$\mathbf{C}$ و$\mathbf{K}$ مصفوفات الكتلة والتخميد والصلابة؛ و$\mathbf{f}_e$ متجه الحمل الخارجي؛ و$\ddot{\mathbf{u}}$ و$\dot{\mathbf{u}}$ و$\mathbf{u}$ متجهات التسارع والسرعة والإزاحة لتجميع العناصر المحدودة.

79 يمكن أيضاً النظر إلى هذه المعادلة كمعادلة سكون عند الزمن t، حيث $\mathbf{F}_I(t)$ و$\mathbf{F}_D(t)$ و$\mathbf{F}_i(t)$ و$\mathbf{F}_e(t)$ قوى العطالة والتخميد والمرونة الداخلية والخارجية على الترتيب.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.4.2.1 الأنظمة الخطية

80 نعتمد طريقة *الفرق المركزي* لمعادلة الحركة شبه المتقطعة. تقوم الطريقة على تقريب مشتقات الإزاحة الزمنية، أي السرعة والتسارع، بفروق محدودة. وبافتراض تغير خطي للإزاحة خلال كل خطوة زمنية تكون السرعة والتسارع عند t:

$$\dot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t}$$
$$\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t = \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}}{\Delta t^2}$$

حيث Δt الخطوة الزمنية.

81 بالتعويض في المعادلة 52.5 نحصل على

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M} + \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)}_{\widehat{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \underbrace{\mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M} - \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}_{\widehat{\mathbf{f}}_e^t} \tag{52.13}$$

ومنها نحسب $\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$.

82 ينبغي ملاحظة ما يأتي:

- يعتمد الحل على شرط الاتزان عند الزمن t.
- لا يلزم تحليل مصفوفة الصلابة $\mathbf{K}$، إذ لا يظهر حد $\mathbf{K}^{-1}$.
- لبدء الطريقة يجب تحديد الإزاحة والسرعة والتسارع عند الزمن $-\Delta t$.

83 الخوارزمية:

1. كوّن مصفوفات الصلابة $\mathbf{K}$ والكتلة $\mathbf{M}$ والتخميد $\mathbf{C}$.
2. هيئ $\overline{\mathbf{u}}^0, \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0, \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$ عند $t = 0$.
3. اختر الخطوة $\Delta t \le \Delta t_{cr}$.
4. احسب الثوابت $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$ و$a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$ و$a_2 = 2a_0$ و$a_3 = \frac{1}{a_2}$.
5. احسب
$$\overline{\mathbf{u}}^{-\Delta t} = \overline{\mathbf{u}}^0 - \Delta t\dot{\overline{\mathbf{u}}}^0 + a_3\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$$
6. احسب مصفوفة الكتلة الفعالة: $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
7. حلل $\hat{\mathbf{M}}$ مثلثياً، ولا يلزم ذلك مع الكتلة المركزة:
$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8. لكل خطوة زمنية:

(a) حدد الأحمال الفعالة عند t:

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M})\overline{\mathbf{u}}^t - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C})\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}$$

(b) احسب الإزاحات عند $t + \Delta t$:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

(c) إذا لزم، احسب السرعات والتسارعات والانفعالات والإجهادات عند t:

$$\begin{aligned}
\ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_0(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \\
\dot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_1(-\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \\
\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

(d) حدّث الزمن إلى $t = t + \Delta t$ وارجع إلى (أ).

84 للتكامل الصريح مزايا كثيرة، أهمها عدم الحاجة إلى تحليل مصفوفة الصلابة.

85 إذا اعتمدنا كتلة مركزة بدلاً من المتسقة ولم يوجد تخميد، فلا يلزم أي تحليل، وتُختصر المعادلة 52.13 إلى:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

حيث

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} \tag{52.14}$$

86 إذا كانت الكتلة قطرية فلا حاجة للتحليل. وإذا لم يلزم تحليل مصفوفة صلابة المنشأ مثلثياً فلا يلزم أيضاً تجميع مصفوفة الصلابة العامة. ويمكن إظهار أن

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum_i^n \mathbf{K}_{(e)}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum \mathbf{F}_{(e)}^t$$

أي إن $\mathbf{K}_{(i)}\overline{\mathbf{u}}^t$ المطلوب في المعادلة 52.14 يمكن تقييمه على مستوى العنصر بجمع مساهمات العناصر في متجه الحمل الفعال. ومن ثم

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^t - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

87 لأن تجميع مصفوفة صلابة المنشأ غير مطلوب يمكن حل مسائل كبيرة جداً بكفاءة، ومنها المسائل شبه الساكنة الخطية وغير الخطية التي يُطبق فيها الحمل تدريجياً مع الزمن.

88 العيب الرئيس للطريقة الصريحة أنها لا تتقارب إلا إذا

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

حيث ω_{max} أعلى تردد طبيعي، أو أقصر طول موجي، للمنشأ (Courant, Friedrichs **and** Lewy, 1967). وتذكّر أن $\omega = \frac{2\pi}{T}$. يؤدي انتهاك الشرط إلى عدم استقرار عددي؛ لذلك يلزم مبدئياً تحليل القيم الذاتية للنظام الكامل. ولأن مصفوفة الصلابة العامة قد لا تكون مجمعة، يُقدَّر حد أعلى لـω_{max} من

$$\omega_{max} < \omega^{(e)}_{max}$$

حيث $\omega^{(e)}_{max}$ أكبر تردد لعنصر محدود منفرد، وهو الأصغر عادةً، ويُحسب من

$$\det(\mathbf{K}^{(e)} - (\omega^{e}_{max})^2 \mathbf{M}^{e}) = 0$$

89 في المسائل غير الخطية تكون $\mathbf{K}$ الصلابة المماسية.

90 يمكن تحديد القيم الذاتية المقابلة لـω^2 في المسألة البسيطة غير المخمدة $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$ إما بتوسيع محدد المصفوفة الناتجة، أو بحساب القيم الذاتية لـ$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

91 بدلاً من ذلك:

$$\omega^{e}_{max} = \frac{2c}{L}$$

حيث $c = \sqrt{E/\rho}$ سرعة الموجة الصوتية، وL طول ممثل للعنصر (e).

92 يعني ذلك أساساً أن Δt يجب أن تكون صغيرة بما يكفي حتى لا تنتقل المعلومات عبر أكثر من عنصر واحد في الخطوة الزمنية.

52.4.2.2 الأنظمة غير الخطية

93 في الأنظمة غير الخطية تُحدَّث زيادات الإزاحة $\Delta \overline{\mathbf{u}}$ والانفعال والإجهاد ومصفوفة الصلابة وفق

$$\begin{aligned}
\Delta \overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t} \\
\Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \Delta \overline{\mathbf{u}} \\
\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_i^{t+\Delta t} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{t} + \Delta \boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{K}_i^{t+\Delta t} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D_i^{t+\Delta t} \mathbf{B} \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

يجب في الخوارزمية السابقة تقييم $\mathbf{K}_i$ عند كل خطوة زمنية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.5 الطرائق العددية للتحليل الديناميكي

94 تقتصر الحلول التحليلية لمعادلات الحركة على الأنظمة البسيطة والأحمال المثالية. أما المنشآت والإثارات الواقعية فتتطلب طرائق تقدم زمني عددية تقرّب الاستجابة المستمرة بحساب قيم متقطعة تفصلها خطوات Δt.

52.5.1 طريقة الفرق المركزي

95 تقرّب طريقة الفرق المركزي السرعة والتسارع بالفروق المحدودة:

$$\dot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \tag{52.15}$$

$$\ddot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{52.16}$$

بالتعويض في معادلة الحركة عند t_n:

$$m\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} + k u_n = F_n$$

وبالحل لإيجاد u_{n+1}:

$$u_{n+1} = \frac{F_n - (k - 2m/(\Delta t)^2)u_n - (m/(\Delta t)^2 - c/(2\Delta t))u_{n-1}}{m/(\Delta t)^2 + c/(2\Delta t)}$$

96 طريقة الفرق المركزي صريحة: تُحسب u_{n+1} مباشرةً من القيم المعلومة عند t_n وt_{n-1}. لكنها مستقرة شرطياً فقط، ويجب أن تحقق الخطوة الزمنية:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \tag{52.17}$$

52.5.2 مثال 52.5: خطوة استقرار الفرق المركزي

إذا كان الدور السائد لنظام $T_n = 0.50\ \text{s}$، فما حد استقرار الفرق المركزي؟

من المعادلة (52.17):

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{0.50}{3.1416} = 0.159\ \text{s}$$

من الشائع عملياً اختيار خطوة أصغر، مثل $\Delta t = 0.05\ \text{s}$، لتحسين الدقة مع تحقيق الاستقرار.

قد يكون هذا الحد مقيداً جداً للأنظمة ذات الأنماط عالية التردد، كما في نماذج العناصر المحدودة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.5.3 طريقة نيومارك–بيتا

97 طوّر ناثان نيومارك (1910–1981) عائلة من الطرائق تعتمد تغيراً مفترضاً للتسارع داخل كل خطوة زمنية. وتفترض طريقة نيومارك–β:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1}\right](\Delta t)^2 \dot{u}_{n+1} \quad = \dot{u}_n + [(1-\gamma)\ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1}]\,\Delta t$$

يتحكم β وγ في تغير التسارع المفترض:

- $\gamma = 1/2$ و$\beta = 1/6$: تسارع خطي، مستقر شرطياً.
- $\gamma = 1/2$ و$\beta = 1/4$: تسارع متوسط، مستقر بلا شرط.
- $\gamma = 1/2$ و$\beta = 0$: فرق مركزي صريح ومستقر شرطياً.

98 تشيع طريقة التسارع المتوسط ($\gamma = 1/2$، $\beta = 1/4$) لأنها مستقرة بلا شرط؛ فكل خطوة زمنية تعطي استجابة محدودة، وإن انخفضت الدقة عند Δt كبيرة. وهي ضمنية أيضاً، إذ تظهر $\ddot{u}_{n+1}$ في الطرفين ويلزم حل منظومة عند كل خطوة.

99 لمعادلة الدرجات المتعددة (34.15) تعطي طريقة نيومارك:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}}_{n+1}$$

حيث تتضمن الصلابة الفعالة $\hat{\mathbf{K}}$ والقوة الفعالة $\hat{\mathbf{F}}_{n+1}$ مساهمتي الكتلة والتخميد. يجب حل المنظومة عند كل خطوة، فتكون الطرائق الضمنية أعلى كلفة لكل خطوة من الصريحة، لكن إمكان استعمال خطوات أكبر يعوض ذلك غالباً.

52.5.4 التراكب النمطي مقابل التكامل المباشر

100 توجد استراتيجيتان عامتان للتحليل الديناميكي للأنظمة متعددة درجات الحرية:

101 يحول **التراكب النمطي** المعادلات المقترنة إلى معادلات نمطية مستقلة، ويحل معادلة كل نمط ذي درجة حرية واحدة، ثم يعيد بناء الاستجابة الفيزيائية. مزاياه الفهم الفيزيائي وإمكان بتر الأنماط العليا والكفاءة للأنظمة الخطية قليلة الأنماط المشاركة. وعيوبه الحاجة إلى حل القيم الذاتية والاقتصار على الأنظمة الخطية ووجوب إمكان تقطير مصفوفة التخميد.

102 يطبق **التكامل المباشر** طرائق التقدم الزمني على المعادلات المقترنة مباشرةً من دون تحويل نمطي. يعالج الأنظمة غير الخطية والتخميد الاعتباطي ولا يحتاج إلى قيم ذاتية، لكنه مكلف للأنظمة الكبيرة وأقل وضوحاً فيزيائياً.

103 يُفضل التراكب النمطي عادةً للأنظمة الخطية تحت حمل زلزالي، ويلزم التكامل المباشر للتحليل غير الخطي، كالتلدن والتلامس والتشوهات الكبيرة.

التحقق مقابل التصديق

من الضروري في الديناميكا الحسابية التمييز بين التحقق والتصديق. يسأل *التحقق* هل تحل الخوارزمية وتنفيذها المعادلات المعلنة بصورة صحيحة، عبر الخطوة الزمنية وفحوص التقارب والمعايير البرمجية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويسأل *التصديق* هل تمثل المعادلات النظام الفيزيائي بدقة كافية، من حيث شكل النموذج والشروط الحدية والتخميد والفروض التكوينية. قد تكون المحاكاة محققة لكنها غير مصدقة، والخلط بينهما مصدر شائع للثقة في غير محلها.

52.6 الأنظمة المستمرة

104 تخضع المنشآت ذات الكتلة والصلابة الموزعتين، كالكمرات والبلاطات والقشريات، لمعادلات تفاضلية جزئية. ورغم أن الطرائق العددية تقطعها في النهاية، فإن فهم الحلول التحليلية يوضح أشكال الأنماط والترددات الطبيعية.

52.6.1 الاهتزاز المحوري للقضبان

105 لنعتبر قضيباً منتظماً طوله L ومساحة مقطعه A ومعامل مرونته E وكثافته ρ. تحقق الإزاحة المحورية $u(x,t)$:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

أو، بتعريف سرعة الموجة $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

وهذه معادلة الموجة أحادية البعد.

106 للاهتزاز الحر نطلب حلاً من الشكل $u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$. وبالتعويض:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

وحله $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. تحدد الشروط الحدية الترددات وأشكال الأنماط المسموحة. لقضيب مثبت الطرفين:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

52.6.1.1 مثال 52.6: سرعة الموجة والترددات المحورية الطبيعية لقضيب شد فولاذي

✳ لقضيب شد فولاذي مصمت دائري قطره $d = 50\,\mathrm{mm}$ وطوله $L = 3.0\,\mathrm{m}$، والطرفان مثبتان بلوحتين صلبتين. خواص الفولاذ: $E = 210\,\mathrm{GPa}$ و$\rho = 7\,850\,\mathrm{kg/m^3}$. احسب: (أ) سرعة الموجة الطولية؛ (ب) أول ثلاثة ترددات محورية طبيعية؛ (ج) مقارنتها بمحتوى ترددات الزلازل والرياح وما تعنيه للنمذجة.

الحل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(أ) سرعة الموجة الطولية.

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{210 \times 10^{9}}{7\,850}} = \sqrt{2.675 \times 10^{7}} = 5\,172 \text{ m/s}$$

هذه سرعة انتشار موجة إجهاد طولية على القضيب، وتساوي نحو 15 ضعف سرعة الصوت في الهواء.

(ب) الترددات المحورية الطبيعية لقضيب مثبت الطرفين.
يتطلب $\phi(0) = \phi(L) = 0$ أن $\phi(x) = B\sin(\omega x/c)$ مع $\sin(\omega L/c) = 0$، فيكون $\omega_n L/c = n\pi$، ومن ثم:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f_1 = \frac{1 \times 5\,172}{2 \times 3.0} = 862 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 1\,724 \text{ Hz}, \qquad f_3 = 3f_1 = 2\,586 \text{ Hz}$$

الدور الطبيعي الموافق $T_1 = 1.16$ ms، وهو أقصر كثيراً من أي خطوة زمنية معتادة في تحليل الزلازل أو الرياح، حيث Δt عادةً 0.005–0.02 ثانية.

(ج) المقارنة مع محتوى ترددات الزلازل والرياح.

المصدر	التردد السائد	علاقته بأنماط القضيب المحورية
حركة أرضية زلزالية	10 Hz–0.1	$< f_1/86$
طيف هبات الرياح	2 Hz–0.01	$< f_1/430$
اهتزاز الآلات	100 Hz–1	$< f_1/8.6$
النمط المحوري الأول	862 Hz	—

تعليق. تنتج من هذه المقارنة نتائج مهمة:

1. *لا تثير أحمال الزلازل أو الرياح الأنماط المحورية.* يفصل الترددات ثلاث مراتب عشرية، وهو التبرير الرياضي لافتراض إهمال التشوهات المحورية في تحليل الإطارات تحت الحمل الجانبي (§52.2.1).
2. *تحكم الأنماط المحورية الخطوة الحرجة في التكامل الصريح.* حد الاستقرار لعنصر قضيب طوله ℓ هو $\Delta t < \ell/c$. لعنصر طوله 3 م:

$$\Delta t < \frac{3.0}{5\,172} = 5.8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

وهذه أصغر 10–30 مرة من الخطوة اللازمة لدقة الاستجابة الزلزالية، فتغدو الطرائق الصريحة مكلفة للنماذج ذات درجات الحرية المحورية. تتجاوز الطرائق الضمنية، مثل نيومارك وHHT، هذا القيد باستقرارها غير المشروط.

3. *انتشار الموجة مهم في مسائل الصدم.* إذا تعرض القضيب لصدمة طرفية حكمت الاستجابة موجة الإجهاد بسرعة $5\,172$ m/s، وكانت مدة التحليل زمن عبور الموجة $L/c = 0.58$ ms. وهذا مجال برامج الديناميكا الصريحة ويتطلب خطوات من رتبة الميكروثانية، وهو عالم حسابي مختلف تماماً عن التحليل الزلزالي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.6.2 الاهتزاز العرضي للكمرات

107 معادلة كمرة أويلر–برنولي للاهتزاز العرضي هي:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

حيث $v(x,t)$ الإزاحة العرضية وEI الصلابة الانحنائية و$q(x,t)$ الحمل الموزع.

108 للاهتزاز الحر ($q=0$)، وبطلب $v(x,t)=\phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

الحل العام هو:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

تعطي الشروط الحدية عند الطرفين أربع معادلات للثوابت الأربعة، فتنتج مسألة قيم ذاتية لـβ.

109 لكمرة بسيطة الارتكاز طولها L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

تزداد الترددات الطبيعية مع n^2، فتبتعد الأنماط العليا سريعاً عن الدنيا. والتردد الأساسي عند $n=1$ هو:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

110 للشروط الحدية الأخرى، كالتثبيت الطرفي والكابولي، يجب حل معادلة التردد المتسامية عددياً، وتتوفر جداول معاملات التردد في المراجع القياسية.

52.7 الديناميكا غير الخطية

111 افترضت الأقسام السابقة سلوكاً خطياً، أي تناسب القوى مع الإزاحة والسرعة. لكن المنشآت الحقيقية، ولا سيما تحت زلازل قوية أو أحمال قصوى، تبدي استجابة غير خطية تنشأ من خضوع المادة والآثار الهندسية والتلامس أو الفجوات والاحتكاك.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52.7.1 مصادر اللاخطية

112 تحدث **لاخطية المادة** عندما تكون علاقة الإجهاد–الانفعال غير خطية. في الفولاذ يتبع السلوك المرن الابتدائي خضوع عند تجاوز مقاومة الخضوع، وفي الخرسانة يدخل التشقق اللاخطية حتى تحت أحمال الخدمة. ويجب نمذجة العلاقة التكوينية بنموذج مناسب كالمرن–اللدن أو الضرر.

113 تنشأ **اللاخطية الهندسية** عندما تكبر الإزاحات بما يلزم معه كتابة معادلات الاتزان على الشكل المتشوه. ومن أمثلتها أثر P–Δ في الأعمدة، أي تضخيم العزم بسبب قوة محورية تعمل عبر إزاحة جانبية.

114 تحدث **لاخطية التلامس** عند السطوح التي قد تنفصل مكوناتها أو تتلامس. وتظهر في محامل العزل القاعدي وفواصل التمدد والمقاطع المتشققة.

52.7.2 المطيلية وتصميم السعة

115 تُعرَّف *مطيلية الإزاحة* μ بنسبة الإزاحة القصوى إلى إزاحة الخضوع:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

يمكن للمنشآت المصممة للخضوع والتشوه غير المرن أن تنجو من زلازل أقوى بكثير مما توحي به سعتها المرنة. وهذا مبدأ *تصميم السعة*: قبول الخضوع في مناطق مفصلة بعناية مع حماية العناصر الهشة.

116 تمثل علاقة R–μ–T الصلة بين خفض المقاومة وطلب المطيلية. للمنشآت ذات الأدوار في المجال الحساس للسرعة:

$$R \approx \mu$$

تنص قاعدة "الإزاحة المتساوية" على أن الإزاحة القصوى للمنشأ الخاضع تساوي إزاحة منشأ مرن له الدور نفسه؛ فيخفض الخضوع طلب القوة من دون زيادة الإزاحة.

52.8 اعتبارات عملية

52.8.1 التخميد في المنشآت الحقيقية

117 تعتمد نسب التخميد المقاسة على المادة وسعة الاهتزاز ونوع الإنشاء. يورد الجدول 52.2 قيماً نموذجية:

هذه قيم تقريبية؛ يعتمد التخميد الفعلي على التفاصيل وينبغي قياسه متى أمكن.

52.8.2 تفاعل التربة والمنشأ

118 لا تعتمد الاستجابة الديناميكية على المنشأ وحده بل على التربة الحاملة أيضاً. ويمكن لـ*تفاعل التربة والمنشأ* أن يؤثر كثيراً في حركة الدخل وترددات النظام. تزيد التربة المرنة الدور الفعال وتدخل تخميداً إضافياً بإشعاع الطاقة في التربة. وتكون الآثار كبيرة لمنشأ صلب على تربة رخوة، ومهملة لمنشأ مرن على صخر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 52.2: نسب تخميد ممثلة لفئات مختلفة من المنشآت

نوع المنشأ	نسبة التخميد ζ
فولاذ ملحوم قبل الخضوع	0.02–0.01
فولاذ مثبت بالبراغي قبل الخضوع	0.03–0.02
خرسانة مسلحة غير متشققة	0.02–0.01
خرسانة مسلحة متشققة	0.05–0.03
خرسانة سابقة الإجهاد	0.02–0.01
مبانٍ غير متشققة	0.03–0.02
منشآت خشبية	0.10–0.05

52.8.3 مخمدات الكتلة المضبوطة

119 مخمد الكتلة المضبوط نظام ثانوي كتلة–نابض–مخمد متصل بالمنشأ الرئيس ومضبوط على تردد محدد. وعندما يهتز المنشأ عند تردده الطبيعي يهتز المخمد بعكسه فيخفض الاستجابة. ويُستعمل في المباني الشاهقة والجسور طويلة البحور لتقليل اهتزازات الرياح والزلازل.

120 الضبط الأمثل لمخمد كتلة على منشأ رئيس غير مخمد هو:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

حيث $\mu_m = m_d/m$ نسبة الكتلة، وتكون عادةً 0.01–0.05، وω_d تردد المخمد وζ_d نسبة تخميده.

52.8.4 العزل القاعدي

121 يدخل العزل القاعدي طبقة مرنة، عادةً محامل مطاطية أو أنظمة انزلاق، بين المنشأ والأساس. يطيل العزل دور المنشأ فيبعده عن المحتوى عالي الطاقة للحركات الزلزالية، ويوفر تخميداً إضافياً. وهو فعال خاصةً للمنشآت الصلبة قصيرة الدور، ويشيع في المستشفيات ومرافق الطوارئ والمباني التاريخية.

52.9 الخلاصة

122 قدم هذا الفصل مبادئ الديناميكا الإنشائية، من المهتز ذي درجة الحرية الواحدة إلى الأنظمة متعددة الدرجات، ومن الاهتزاز الحر إلى الاستجابة القسرية، ومن الحلول التحليلية إلى الطرائق العددية. وتشمل المفاهيم الرئيسة:

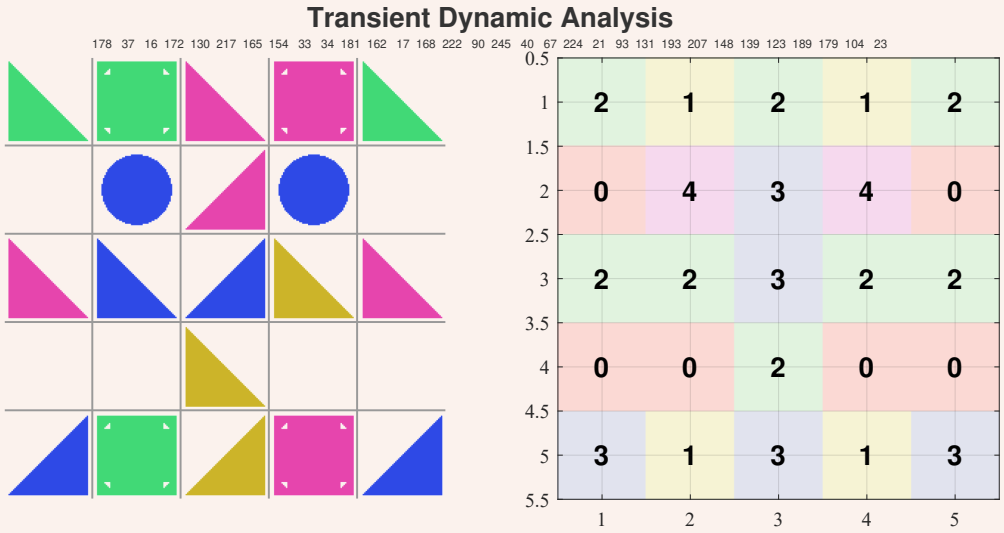
1. معادلة الحركة التي تعبر عن الاتزان الديناميكي لقوى العطالة والتخميد والمرونة والأحمال.
2. التردد الطبيعي ونسبة التخميد كخاصيتين ذاتيتين تحكمان الاستجابة.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. الاهتزاز الحر الذي يكشف أنماط الاهتزاز الطبيعية.
4. الاستجابة التوافقية وظاهرة الرنين.
5. تكامل دوهامل للاستجابة لحمل اعتباطي.
6. أطياف الاستجابة كأدوات عملية لهندسة الزلازل.
7. التحليل النمطي الذي يحول معادلات الدرجات المتعددة المقترنة إلى معادلات مستقلة أحادية الدرجة.
8. طرائق التقدم الزمني العددية لحساب الاستجابة لإثارات معقدة.
9. الديناميكا غير الخطية والهسترة ودور المطيلية في التصميم الزلزالي.

123 تمد الديناميكا الإنشائية التحليل الساكن المطور في الفصول السابقة ليشمل الظواهر المتغيرة زمنياً. تنطبق المبادئ نفسها—الاتزان والتوافق والعلاقات التكوينية—لكن في سياق زمني تؤدي فيه العطالة وتبديد الطاقة دوراً مركزياً. وإتقان هذه المفاهيم أساسي لتصميم المنشآت تحت الرياح والزلازل واهتزاز الآلات وسائر الأحمال الديناميكية.

إحالة لاحقة. تُستعمل كميات الاستجابة الحتمية المحسوبة هنا، كالسجلات الزمنية والطلبات القصوى والمقاييس المشتقة، في الفصل 70 مدخلات لهندسة الزلازل القائمة على الأداء.



الرمز البصري الخاص بالفصل، chapter H

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القسم IV

متقدم: اللاخطية وموضوعات أخرى

يطوّر هذا المجلد، وهو الرابع في سلسلة شاملة عن التحليل الإنشائي، مفاهيم متقدمة مع التركيز على السلوك غير الخطي واللدونة، وهما أمران أساسيان لتقييم الأداء الحقيقي للبنية التحتية المدنية. وينقسم إلى المجموعات الآتية:

I **اللدونة** النمذجة على مستويات المادة والمقطع والمنشأ.

II **التحليل غير الخطي** المادي والهندسي.

III **العناصر الليفية** صياغة عناصر 1D (القائمة على الصلابة والقائمة على المرونة)، والنماذج التأسيسية الملائمة.

IV **هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)** تغطية شاملة لهندسة الزلازل القائمة على الأداء. بدءًا بإدخال مفاهيم الخطر والمخاطر وعدم اليقين، نتناول التحليلات الثلاثة المرتبطة بـPBEE: الخطر، والتحليل الإنشائي، والخسائر. ويُختتم الكتاب بعرض شامل لإطار PBEE، يدمج المفاهيم الاحتمالية مع التنبؤ بالاستجابة غير الخطية لدعم تقييم الأداء والتصميم على أساس عقلاني.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

53 مقدمة

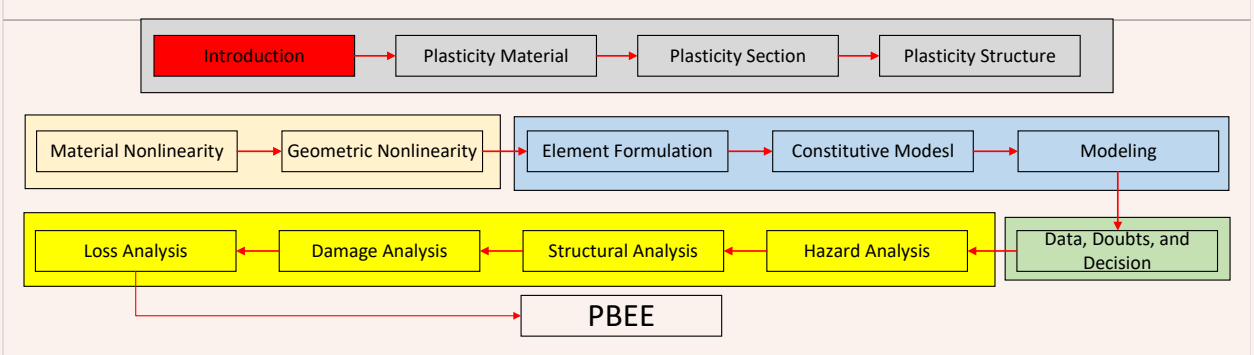
ملخص

يبدأ هذا الفصل التمهيدي من الكتاب الرابع، المخصص للتحليل اللاخطي، بمناقشة الأسباب الأساسية للاستجابات اللاخطية وكيفية تأثيرها في مصفوفة الصلابة من خلال **B** *أو* **D**، *في حالتي اللاخطية الهندسية واللاخطية المادية على الترتيب. ويقود ذلك إلى استعراض أنواع متعددة من التحليل، منها تحليل الرتبة الأولى والرتبة الثانية، والتحليل الخطي واللاخطي، والأحمال الحدية التي قد تسبب عدم الاستقرار.*

ثم نناقش مفهوم السلامة وانتقاله إلى دور مدونات التصميم وتطورها. وتهدف هذه المدونات إلى ضمان مستوى كافٍ من السلامة؛ فقد استندت تاريخياً إلى قواعد تجريبية، ثم أخذت حديثاً بمفاهيم أكثر تقدماً تراعي احتمالات الفشل.

ويبين الفصل أن تحديد معامل الأمان الحقيقي، أي غير المستند إلى مدونات التصميم، أو التعرف إلى الفشل التدريجي، يتطلب تحليلاً لاخطياً، وهو الموضوع الرئيس لهذا الكتاب الرابع.

53.1 مقدمة 1662
53.1.1 مصادر اللاخطية 1662
53.1.2 لماذا نستخدم التحليل اللاخطي؟ 1664
53.2 أنواع التحليل الإنشائي اللاخطي 1665
53.3 تزايد الحمل والإزاحة 1667
53.4 السلامة 1668
53.4.1 مصطلحات 1668
53.4.2 السلامة & الأحمال 1669
53.5 مدونات التصميم 1670
53.5.1 مقدمة 1670
53.5.2 التطور: العصور القديمة 1671
53.5.3 العصر الحديث 1672
53.5.4 ملخص 1675



53.1 مقدمة

53.1.1 مصادر اللاخطية

1 اقتصر تناولنا حتى الآن على المسائل الخطية المرنة ذات التشوهات الصغيرة، باستثناء الفصل 29. وينطوي ذلك أيضاً على افتراض ضمني بأن للمادة مقاومة غير محدودة، وإن لم نضطر فعلياً إلى الاعتماد على هذا الافتراض.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2 وبالطبع لا توجد مادة ذات مقاومة غير محدودة؛ إذ تبدأ جميع المواد عند مستوى ما بسلوك لا مرن ثم تنتهي إلى الفشل.

3 لذلك يعالج هذا الكتاب الرابع شكلين من اللاخطية: اللاخطية الهندسية واللاخطية المادية.

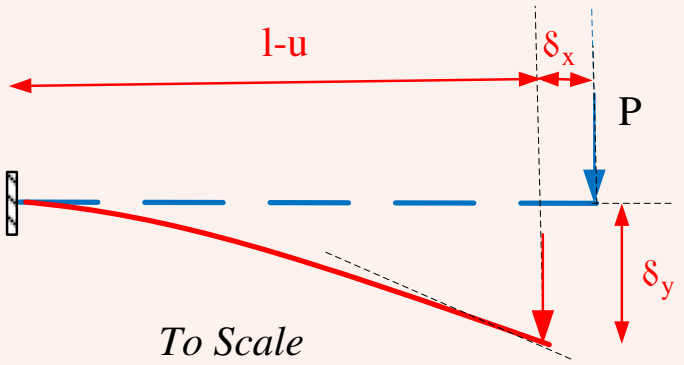
4 لقد تناولنا بإيجاز أمثلة للتشوهات الكبيرة، أو اللاخطية الهندسية، في الفصل 29، وفحصنا المسألة المبينة في الشكل 53.1 من §29.2.3. أما هنا فسنصوغ المسألة بصورة منهجية في سياق تقسيم العناصر المحدودة.

5 تنشأ اللاخطية المادية من سلوك مواد من بينها:

الفولاذ يكون منحنى الإجهاد–الانفعال خطياً حتى نقطة الخضوع، ثم يظهر التصلد الانفعالي وتحدث تشوهات كبيرة.

الخرسانة يكون منحنى الإجهاد–الانفعال لاخطياً ابتداءً من نحو $0.6f'_c$ حتى مقاومة الضغط، عند انفعال يقارب 0.003، ثم يحدث التليّن. وتزداد المقاومة مع الحصر الذي يوفره تسليح القص. أما مقاومة الشد فمن المعروف أنها منخفضة، وتبلغ نحو $0.1\ f'_c$.

6 بالإضافة إلى علاقات الإجهاد–الانفعال اللاخطية الملازمة للمادة، يمكن التعبير عن الاستجابة اللاخطية للمقطع بعلاقة $M-\Phi$ أو $M-\theta$، أي بعلاقة العزم–الانحناء أو العزم–الدوران.



شكل 53.1: اللاخطية الهندسية: مثال على الانحراف الكبير (B)، 29.2.3

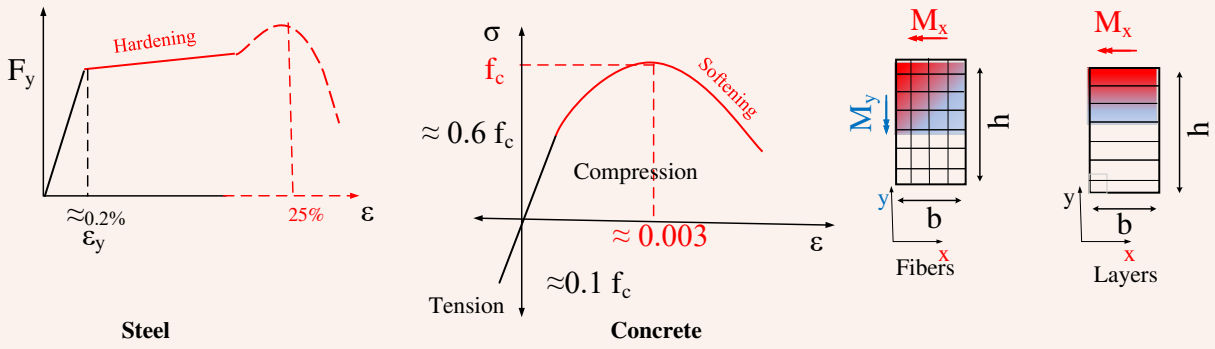
7 كما سنرى لاحقاً، يوجد أساساً نوعان من النماذج لتمثيل الاستجابة اللاخطية للعناصر أحادية البعد (1D).

اللدونة الموزعة يحدث فيها التلدن على امتداد العنصر كله.

اللدونة المركزة تقتصر فيها الاستجابة اللدنة على نهايتي العنصر، وتبقى المنطقة الواقعة بينهما خطية مرنة.

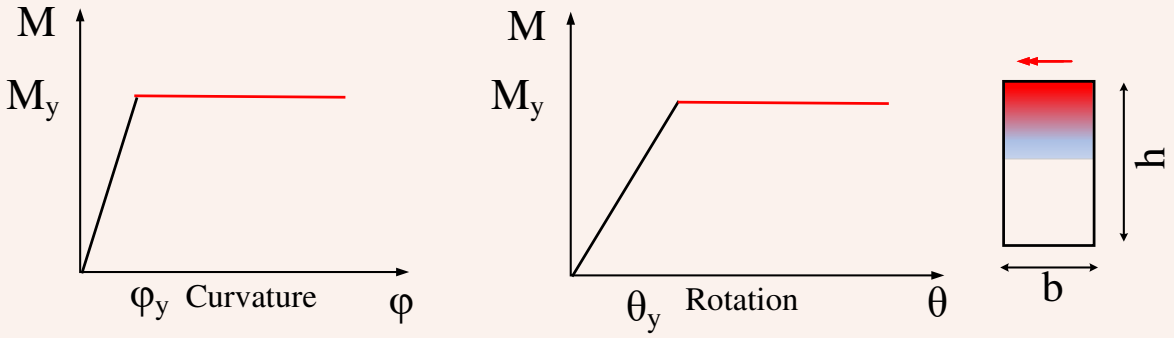
8 يبين الشكل 53.2 الاستجابة اللاخطية للفولاذ والخرسانة. وبينما تستخدم هذه المنحنيات بصورة اعتيادية في عناصر *الوسط المتصل* المحدودة، فإنها ستستخدم في سياق هذا الكتاب، الذي يركز على عناصر 1D، في نماذج *اللدونة الموزعة* القائمة على الألياف للانحناء ثنائي المحور أو على الطبقات للانحناء أحادي المحور.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 53.2: اللاخطية المادية: نماذج الألياف (D)

9 يوضح الشكل 53.3 النماذج التأسيسية للدونة المركزة. وتمثل استجابة الانحناء غالباً بمخطط العزم–الانحناء، وأحياناً بمخطط العزم–الدوران.



شكل 53.3: اللاخطية المادية: استجابة المقطع (D)

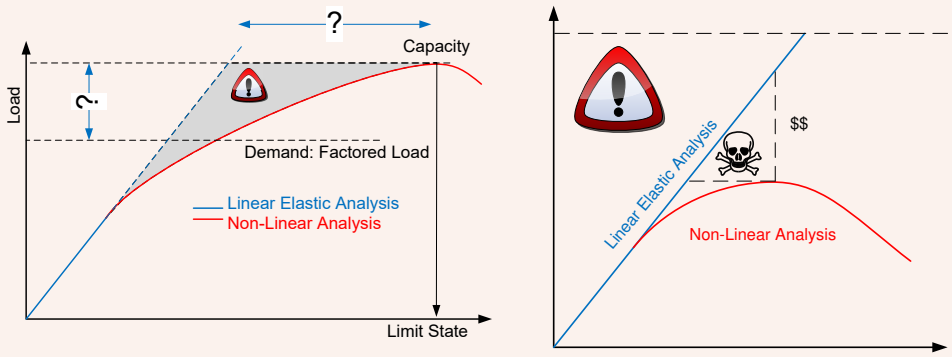
53.1.2 لماذا نستخدم التحليل اللاخطي؟

10 تكون التحليلات الخطية المرنة مناسبة للتصميم أو للتقييم الأولي للسلامة، أما التحليل اللاخطي فيلزم عندما نريد الاستجابة الإنشائية الكاملة، أو نريد تحديد حمل الفشل بأكبر دقة ممكنة، أو نبحث عن معامل الأمان "الحقيقي".

11 وكما يتضح من القسم السابق، لا يمكن الاعتماد على طريقة تصميم معاملات الحمل والمقاومة (LRFD) السائدة لتقييم معامل الأمان الحقيقي أو لإجراء تحليل يأخذ الضرر الجزئي في الحسبان؛ إذ يتطلب ذلك تحليلاً لاخطياً.

12 في هذه الحالات قد يبالغ التحليل الخطي المرن المبسط في تقدير الحمل الأقصى، أو يقلل من تقدير الإزاحات. وقد يؤدي الاحتمال الأول إلى تدعيم غير ضروري، بينما قد يؤدي الثاني إلى أوضاع خطرة تنشأ من إزاحات كبيرة غير متوقعة، كما في الشكل 53.4. وفي الحالتين لا يعاد توزيع الإجهادات في النموذج، ولا يمكن التمييز بين الفشل الموضعي والفشل العام.

13 وبعبارة موجزة، يبالغ التحليل الخطي المرن في تقدير المقاومة ويقلل من تقدير الإزاحة.



شكل 53.4: التحليل الخطي مقابل التحليل اللاخطي

14 ينبغي دائماً تذكر أن التحليل اللاخطي ليس بديلاً عن الحس الهندسي السليم؛ بل يجب اللجوء إليه بعد استنفاد الحكم الهندسي والتحليل الخطي والطرائق المبسطة. ومن الأفضل استخدامه للتحقق من فرضية متينة وتحديدها كمياً.

53.2 أنواع التحليل الإنشائي اللاخطي

15 كما ذكرنا، توجد مصدران للاخطية: الاستجابة المادية اللاخطية من جهة، والتشوهات الكبيرة من جهة أخرى.

16 يظهر هذان المصدران في صياغة مصفوفة صلابة العنصر من خلال العلاقة (49.12):

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

إذ ترتبط $\mathbf{B}$ باللاخطية الهندسية، وترتبط $\mathbf{D}$ باللاخطية المادية.

17 وفي سياق التحليل اللاخطي يمكن إعادة كتابة العلاقة كما يأتي:

$$\mathbf{K}^i_{tan} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^i_{tan} \mathbf{B} d\Omega$$

18 وينشأ عن ذلك عدد من أنواع التحليل، كما في الجدول 53.1، تبعاً للكمية التي تعامل لاخطياً. ويشمل الجدول أيضاً تحليلات الحمل الحرج، أو تحليلات التشعب، أي الانبعاج.

19 يبين الشكل 53.5 منحنيات الحمل–الإزاحة المقابلة، كما يبين القيم التقاربية للاستجابات المختلفة.

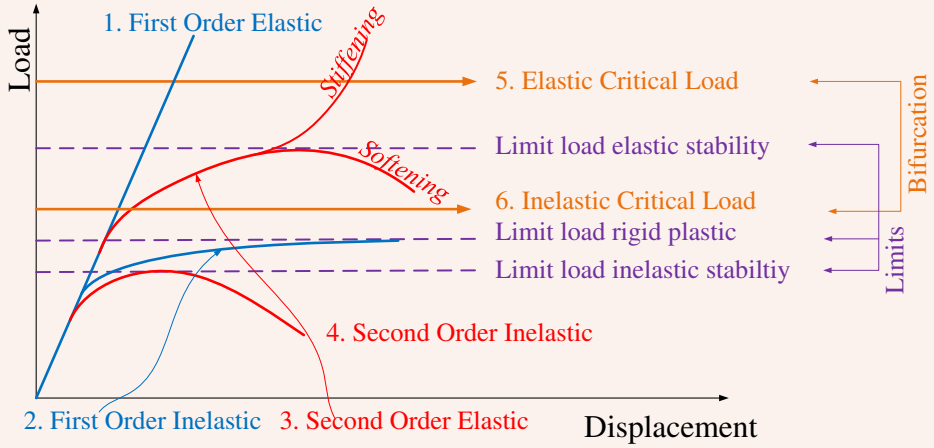
20 تسمى الصياغات القائمة على مخطط الجسم الحر غير المتشوه صياغات *لاغرانجية*، في حين تسمى الصياغات التي تراعي التشوه صياغات *أويلرية*.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 53.1: تصنيف مستويات التحليل الإنشائي

		D			
		مخطط الجسم الحر المعتمد في الصياغة	الشكل غير المتشوه	الشكل المتشوه	
			مرن (خطي)	غير مرن (لاخطي)	مرن (خطي)	غير مرن (لاخطي)
B	الرتبة 1st (خطي)		(L:B-L:D) 1	(L:B-NL:D) 2	الحمل الحرج (الانبعاج)	
					5 مرن	6 غير مرن
	الرتبة 2nd (لاخطي)		الشكل المتشوه			
			(NL:B-L:D) 3	(NL:B-NL:D) 4	-	-

B للاخطية الهندسية؛ وD للاخطية المادية.



شكل 53.5: أنواع التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I التحليلات التزايدية: تطبق زيادات في الأحمال أو الإزاحات أو كليهما، وتستخدم عادةً طريقة نيوتن، §58.3.1.1.

1 (L;B-L;D)؛ الشكل غير المتشوه هذه هي الحالة الأكثر شيوعاً، أي الحالة الخطية المرنة، وتكون مقبولة عادةً لأحمال الخدمة. أما الحالات المعتمدة على الزمن فتتطلب نماذج لزجة مرنة.

2 (L;B-NL;D)؛ الشكل غير المتشوه ثاني أكثر أشكال التحليل شيوعاً، ويستخدم عادةً لدراسة الأحمال القصوى أو غير الاعتيادية، كما أنه ضروري لهندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE).

3 (NL;B-L;D)؛ مرن يراعي آثار التشوهات والإزاحات المحدودة؛ فتكتب معادلات الاتزان استناداً إلى هندسة الشكل المتشوه، أي بصياغة أويلرية. ولا يراعي اللاخطية المادية، لكنه قد يكشف التشعب أو ازدياد الصلابة عندما يتعرض العضو لقوة شد محورية. ويستخدم في تحليل الكابلات والشبكات والمنشآت السلسلية.

4 (NL;B-NL;D)؛ غير مرن تكتب معادلات الاتزان استناداً إلى هندسة الشكل المتشوه، مع مراعاة اللاخطيتين الهندسية والمادية معاً. وهو أنسب الأنواع لتحديد أحمال الفشل أو الأحمال القصوى، كما أنه أعقدها بفارق كبير، ويستخدم في محاكاة تشكيل المعادن وتفتت المنشآت تحت أثر اصطدام المقذوفات.

II تحليلات التشعب: تحليلات قيم ذاتية تؤدي إلى الحمل الحرج المرن، أي حمل الانبعاج. ولا يقابلها منحنى حمل–إزاحة، بل "أشكال انبعاج".

5 تشعب؛ مرن

6 تشعب؛ غير مرن

21 يلخص الجدول 53.2 افتراضات أنواع التحليل اللاخطي المختلفة.

جدول 53.2: الترابط بين مستويات التحليل المختلفة

	1	2	3	4	5	6
D	L	NL	L	NL	L	NL
B	L	L	NL	NL	NL	NL
FBD	.Undef	Undef	.Def	.Def	.Def	.Def
Analysis	.Incr	.Incr	.Incr	.Incr	.Bif	.Bif

53.3 تزايد الحمل والإزاحة

22 في التحليل اللاخطي للمنشآت يطبق الحمل على زيادات متتابعة، ويبحث عن حل عند نهاية كل زيادة:

1. يقسم الحمل الخارجي إلى n زيادة، وليس من الضروري أن تكون متساوية. ويستحسن تصغير الزيادة كلما اقتربنا من الحمل الأقصى المتوقع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. يطبق متجه زيادة الحمل $\Delta \mathbf{P}_i$ في كل خطوة.
3. تحسب الإزاحة المقابلة $\mathbf{u}_i$ التي تحقق الاتزان تقريباً في التحليل الضمني، بخلاف التحليل الصريح.
4. تحدّث متجهات الحمل والإزاحة:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta \mathbf{P}_i$$
$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$$

23 تتطلب طريقة الحل الضمني حلقة تكرارية إضافية لضمان تحقق الاتزان بصورة تقريبية.

24 يطبق الحمل تزايدياً في معظم التحليلات، إلا أن هذه الاستراتيجية قد تفشل في التنبؤ بالاستجابة بعد بلوغ الذروة. وإذا كانت هذه الاستجابة مطلوبة، فينبغي تطبيق متجه الإزاحة تزايدياً بدلاً من متجه الحمل.

53.4 السلامة

53.4.1 مصطلحات

25 التحليل اللاخطي في نهاية المطاف وسيلة لمعالجة السلامة الحقيقية للمنشأ. وترتبط بهذا المصطلح مفاهيم متعددة ستتناولها أجزاء هذا الكتاب.

26 يشير مصطلح *السلامة* إلى حالة المنشأ عندما يستطيع مقاومة الأحمال والظروف البيئية التي قد يتعرض لها خلال عمر خدمته المتوقع من دون فشل أو انهيار. وتقيم السلامة عادةً بمقارنة الأحمال والإجهادات الفعلية التي يتعرض لها المنشأ بقدرته على مقاومتها، وهي قدرة تحدد بالتحليل والاختبار.

27 أما *هامش الأمان* فهو مقدار انخفاض الأحمال والإجهادات الفعلية عن قدرة المنشأ على مقاومتها. ويحسب هامش الأمان من الفرق بين القدرة والأثر الفعلي مقسوماً على القدرة.

28 *معامل الأمان* معيار تصميم يراعي عدم اليقين في الأحمال ومقاومة المواد. وهو نسبة أقصى حمل يستطيع المنشأ تحمله إلى الحمل المقصود، ويوفر احتياطياً لضمان السلامة والموثوقية.

29 *تقييم المخاطر* هو عملية تحديد المخاطر المرتبطة بمشروع أو نظام وتحليلها وتقييمها بغرض الحد من الأخطار المحتملة.

30 *تحليل الأخطار* تقنية تستخدم لتحديد الأخطار المحتملة وتقييم شدتها واحتمال وقوعها، وتساعد على تصميم تدابير السلامة اللازمة لمنع الحوادث.

31 *نمط الفشل* مفهوم يستخدم في منهج منظم لتحديد أنماط الفشل المحتملة في نظام وآثارها في أدائه، بما يساعد على ترتيب المخاطر بحسب الأولوية وتنفيذ الإجراءات التصحيحية.

32 *التقييم الاحتمالي للمخاطر* تحليل كمي يستخدم الاحتمالات لتقييم مخاطر سيناريوهات الفشل المختلفة وآثارها المحتملة.

33 *التكرار الإنشائي* هو توفير مكونات أو أنظمة إضافية يمكنها تولي الوظيفة عند حدوث فشل، مما يزيد موثوقية النظام وسلامته بوجه عام.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34 مؤشر *الموثوقية* مقياس كمي لسلامة نظام أو مكون وموثوقيته، §N.

35 تحمل *الأعطال* هو قدرة النظام على مواصلة العمل بصورة صحيحة حتى في وجود أعطال أو أخطاء.

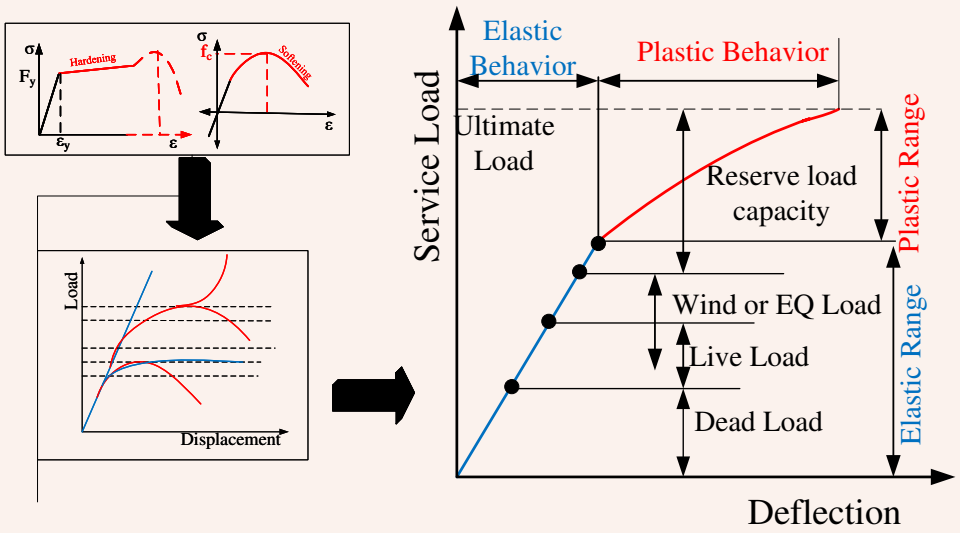
36 *النظام الحرج للسلامة* نظام قد يؤدي فشله إلى أذى جسيم للأشخاص أو الممتلكات أو البيئة، ولذلك يتطلب تدابير سلامة صارمة.

53.4.2 السلامة & الأحمال

37 انطلقنا من منحنيات الإجهاد–الانفعال المادية اللاخطية، ثم انتقلنا إلى الاستجابة الإنشائية اللاخطية المتوقعة وفق افتراضات متعددة، ونبحث الآن عن موضع الأحمال على تلك المنحنيات.

38 نوقشت الأحمال في chapter 18، ولكن أين يقع حمل معين على منحنى الحمل–الإزاحة العام في سياق التحليل اللاخطي؟ وكيف نضمن السلامة لكل حمل، وأين نحتاج إلى أكبر هامش أمان؟

39 يوضح الشكل 53.6 هذه المفاهيم.



شكل 53.6: منحنى الحمل–الانحراف ومجالات الاستجابة المختلفة

40 لأسباب واضحة لا نريد أن تؤدي أحمال الخدمة إلى استجابة لا مرنة في المنشأ، ويضمن ذلك بفرض معامل *أمان* كبير بما يكفي. أما عند الأحمال النادرة عالية الشدة، فيمكن خفض هامش الأمان بحذر، وهنا يظهر تميز المهندس الجيد. وفي جميع الحالات لا نريد الاقتراب من الحمل النهائي أو حمل الانهيار. وقد يسمح بتجاوز المجال المرن تحت إثارة زلزالية شديدة جداً، كما سنرى في الفصل 70؛ إذ إن منع ذلك منعاً مطلقاً يؤدي إلى تصميم مفرط الكلفة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

53.5 مدونات التصميم

53.5.1 مقدمة

41 تكرس متطلبات السلامة في الوقت الحاضر ضمن مدونات التصميم.

42 تؤدي مدونات التصميم دوراً أساسياً في ضمان سلامة المنشآت، إذ توفر إرشادات ومتطلبات موحدة لتصميم المباني والبنية التحتية وإنشائها وصيانتها.

التوحيد: تقدم مدونات التصميم مجموعة متسقة من القواعد والإجراءات التي ينبغي للمهندسين والمعماريين اتباعها. ويضمن ذلك تصميم المنشآت وفق مبادئ وممارسات مقبولة ويقلل خطر الأخطاء والسهو.

هوامش الأمان: تتضمن المدونات معاملات أمان وهوامش تراعي عدم اليقين في خصائص المواد وظروف التحميل والتأثيرات البيئية، فتساعد المنشآت على تحمل الإجهادات والأحمال غير المتوقعة من دون فشل.

مواصفات المواد: تحدد المدونات أنواع المواد ودرجاتها المسموح باستخدامها في الإنشاء. ويضمن توحيد خصائص المواد، مثل المقاومة والمتانة، استخدام مواد مناسبة وتعزيز السلامة العامة للمنشأ.

اعتبارات الأحمال: تقدم المدونات إرشادات لحساب الأحمال الواجب على المنشأ حملها، ومنها الأحمال الميتة، أي القوى الدائمة الساكنة؛ والأحمال الحية، أي القوى المؤقتة أو المتحركة؛ والأحمال البيئية كالرياح والزلازل والثلوج؛ والأحمال العرضية كالصدم والانفجارات. ويعد الحساب الدقيق للأحمال ضرورياً لضمان تحمل المنشأ لهذه القوى بأمان.

التحليل الإنشائي: تحدد المدونات طرائق تحليل السلوك الإنشائي تحت حالات تحميل مختلفة، ومنها تحليل الإجهادات والاستقرار والتحليل الديناميكي، مما يساعد المهندسين على توقع استجابة المنشآت للسيناريوهات المختلفة.

التصميم الزلزالي: تتضمن المدونات في المناطق المعرضة للزلازل اشتراطات خاصة للتصميم الزلزالي، لضمان قدرة المنشآت على مقاومة القوى الزلزالية وتقليل خطر الفشل الكارثي.

ضبط الجودة والتفتيش: تفرض المدونات إجراءات لضبط الجودة وعمليات تفتيش دورية خلال الإنشاء، للتحقق من مطابقة العمل لمواصفات التصميم ومعالجة أي انحرافات أو عيوب بسرعة.

التحديث والمراجعة: تحدث المدونات بانتظام لتعكس نتائج البحوث الجديدة والتقدم التقني والدروس المستفادة من حالات الفشل السابقة، وبذلك تبقى ملائمة وفعالة في تعزيز السلامة الإنشائية.

الامتثال القانوني والتنظيمي: يكون الامتثال لمدونات التصميم في كثير من الأحيان مطلباً قانونياً. وتطبق السلطات المحلية مدونات البناء، المستندة إلى مدونات التصميم، لضمان استيفاء المشروعات الحد الأدنى من معايير السلامة. وقد يؤدي عدم الامتثال إلى غرامات وعقوبات وتعديلات مكلفة.

المسؤولية المهنية: يمثل الالتزام بمدونات التصميم جانباً أساسياً من المسؤولية المهنية للمهندسين والمعماريين، ويبرهن على الالتزام بالسلامة العامة ويساعد على الحفاظ على ثقة العملاء والجهات التنظيمية والجمهور.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

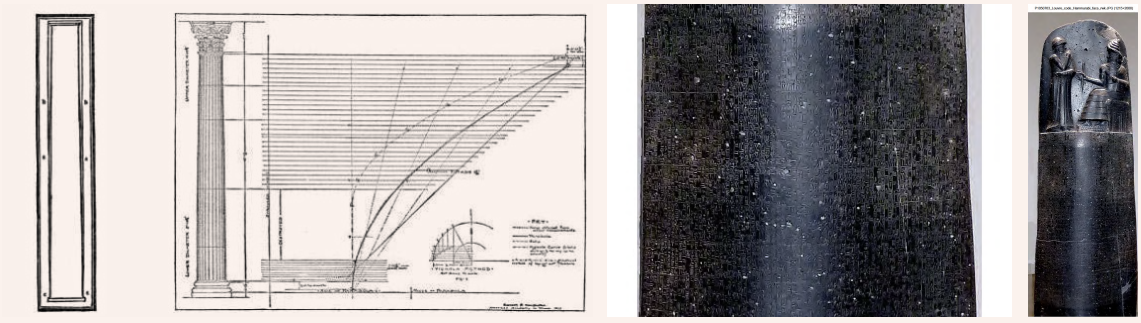
53.5.2 التطور: العصور القديمة

53.5.2.1 بلاد الرافدين: حمورابي

43 تضمنت شريعة حمورابي، نحو 1780 قبل الميلاد، أحكاماً متعلقة بالبناء. وقد نقشت 282 مادة بصيغة الشرط والنتيجة، التي نسميها اليوم جداول منطق القرار، على مسلة حجرية مهيبة منحوتة من كتلة واحدة من الديوريت الأسود تزن أربعة أطنان، كما في الشكل 53.7a. ومن المواد ذات الصلة الخاصة بالمهندس الإنشائي المعاصر:

> *228. إذا بنى بنّاء بيتاً لرجل وأتمه، أعطاه أجر شاقلين من الفضة عن كل سار من المساحة.*
> *229. إذا بنى بنّاء بيتاً لرجل ولم يحسن بناءه، فسقط البيت الذي بناه وقتل صاحبه، وجب قتل ذلك البنّاء.*
> *230. إذا قتل ابن صاحب البيت، وجب قتل ابن البنّاء.*
> *231. إذا قتل عبداً لصاحب البيت، دفع عبداً بدل العبد لصاحب البيت.*
> *232. إذا أتلف أموالاً، عوّض كل ما أتلف؛ ولأنه لم يحسن بناء البيت فسقط، أعاد بناءه من ماله.*
> *233. إذا بنى بنّاء بيتاً لرجل، وإن لم يكن قد أتمه بعد، ثم بدت الجدران آيلة للسقوط، وجب على البنّاء أن يدعمها من ماله.*
>
> شريعة حمورابي (1780 قبل الميلاد)

44 ومع ذلك خففت قسوة الشريعة، للمرة الأولى في التاريخ، بفكرة البراءة حتى تثبت الإدانة.



(a) شريعة حمورابي (Musée du Louvre؛ متحف اللوفر)

(b) فيتروفيوس، الكتاب الرابع

شكل 53.7: مدونات التصميم في العصور القديمة

53.5.2.2 روما: فيتروفيوس

45 يمكن بالفعل اعتبار مؤلف فيتروفيوس (Vitruvius, 1960 PDF)، الذي نوقش بمزيد من التفصيل في §6.3.1 و15.2.1، الكتب العشرة في *العمارة* واحداً من أقدم مدونات التصميم.

46 فعلى سبيل المثال يبدأ الفصل الرابع من الكتاب الثالث، الخاص بأساسات المعابد ومنشآتها السفلية، الشكل 53.7b، بما يأتي:

> ينبغي حفر أساسات هذه الأعمال حتى تبلغ التربة الصلبة، إن أمكن العثور عليها، وأن تمتد في التربة الصلبة إلى عمق يتناسب مع حجم المنشأ، وأن ينفذ كامل البناء السفلي بأقصى قدر ممكن من المتانة. وفوق سطح الأرض

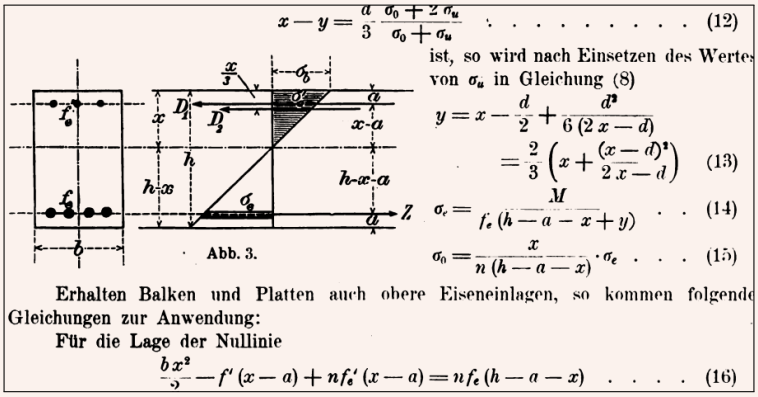
> تقام جدران تحت الأعمدة يزيد سمكها على سمك الأعمدة بمقدار النصف، حتى يكون الجزء السفلي أقوى من العلوي. ولذلك تسمى هذه الجدران "ستيروبات" لأنها تحمل الحمل. وينبغي ألا تمتد بروزات القواعد إلى ما وراء هذا الأساس الصلب. ويحافظ كذلك على سمك الجدران فوق سطح الأرض، وتعقد الفراغات بينها بالأقبية أو تملأ بتربة مدكوكة جيداً لإبقاء الجدران متباعدة وثابتة.
>
> فيتروفيوس، الفصل الرابع، الكتاب الثالث

53.5.3 العصر الحديث

47 من الواضح أن "مدونات" العصور القديمة كانت قائمة على قواعد تجريبية تناقلتها الأجيال. وقد استخدمت في تصميم الكاتدرائيات القوطية (§4) والأقواس (§??) وغيرها. ولم تبدأ هذه "المدونات" في التحول، بعد زمن طويل، إلى وثائق مؤسسة على العلم، ولا سيما الميكانيكا التطبيقية، إلا بعد أن أدخل غاليليو (§6.6.2) الميكانيكا التجريبية للمرة الأولى وأثبت أن الإجهادات لا يمكن إغفالها.

48 أقدم مدونة لتصميم الخرسانة المسلحة هي *Beton-Reglement f ur Eisenbetonbau*، أي لوائح الخرسانة للمنشآت الخرسانية المسلحة، وقد وضعت في ألمانيا عام 1904، الشكل 53.8. واستندت إلى عمل المهندس الفرنسي François Hennebique (فرانسوا هينبيك)، الذي طور نظاماً لتسليح الخرسانة في أواخر القرن 19.

وضعت هذه المدونة قواعد وإرشادات لتصميم المنشآت الخرسانية المسلحة وتنفيذها، شملت مواصفات خصائص الخرسانة وفولاذ التسليح وحسابات التصميم ومتطلبات التفصيل. واعتمدت على نطاق واسع في ألمانيا ودول أوروبية أخرى، وأصبحت نموذجاً لمدونات الخرسانة المسلحة اللاحقة في أنحاء العالم.



$$x - y = \frac{a}{3}\,\frac{\sigma_0 + 2\sigma_u}{\sigma_0 + \sigma_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ist, so wird nach Einsetzen des Wertes von σ_u in Gleichung (8)

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^3}{6\,(2\,x - d)}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x + \frac{(x-d)^3}{2\,x - d}\right) \quad (13)$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e\,(h - a - x + y)} \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \frac{x}{n\,(h - a - x)} \cdot \sigma_e \quad \ldots \quad (15)$$

Abb. 3.

Erhalten Balken und Platten auch obere Eiseneinlagen, so kommen folgende Gleichungen zur Anwendung:

Für die Lage der Nullinie

$$\frac{b\,x^2}{2} - f'\,(x - a) + n f_e'\,(x - a) = n f_e\,(h - a - x) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

شكل 53.8: *Beton-Reglement f ur Eisenbetonbau*

49 ظهرت منذ وضع *Beton-Reglement* مدونات ومعايير كثيرة أخرى لتصميم الخرسانة المسلحة، تعكس التقدم التقني والتغييرات في أنظمة البناء. ومع ذلك بقيت المبادئ الأساسية، ومنها استخدام فولاذ التسليح لتوفير مقاومة الشد وأهمية جودة التفصيل والتنفيذ، من دون تغيير جوهري.

50 وبالمثل، ظهرت مدونات البناء في الولايات المتحدة في أوائل القرن 20 عندما بدأت المدن فرض لوائح لمعالجة مخاوف السلامة المرتبطة بالإنشاء. ووضع المجلس الوطني لمكتتبي التأمين ضد الحريق أول نموذج لمدونة بناء عام 1915، وكان يركز أساساً على السلامة من الحريق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

51 تأسست منظمة مسؤولي البناء وإداريي المدونات (BOCA) عام 1927 لتعزيز تطوير نماذج مدونات البناء، ونشرت الطبعة الأولى من مدونة BOCA الوطنية للبناء عام 1940. كما تأسس المؤتمر الدولي لمسؤولي البناء (ICBO) في عشرينيات القرن، أي 1920s، ووضع نموذجاً خاصاً به عام 1940 عرف باسم مدونة البناء الموحدة.

52 تأسس المعهد الأمريكي للخرسانة (ACI) عام 1904، لكن أول مدونة له مخصصة للخرسانة المسلحة لم تنشر حتى عام 1915. وحملت عنوان "متطلبات مدونة البناء للخرسانة المسلحة"، ووضعت إرشادات لتصميم المنشآت الخرسانية المسلحة وتنفيذها في الولايات المتحدة.

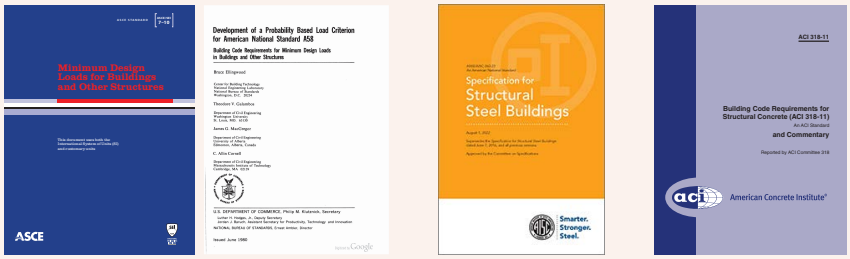
53 أقدم مدونة لتصميم المنشآت الفولاذية هي مواصفة تصميم المنشآت الفولاذية للمباني وتصنيعها وتركيبها، التي نشرها المعهد الأمريكي للإنشاءات الفولاذية (AISC) للمرة الأولى عام 1923. وقد تأسست المنظمة عام 1921 لتعزيز استخدام الفولاذ الإنشائي في المباني، وقدمت الطبعة الأولى إرشادات للتصميم والتصنيع والتركيب.

54 بقيت تفاصيل التصميم الأساسية على حالها إلى حد بعيد، مثل الحفاظ على الاتزان بين القوى الداخلية والخارجية أو تقييد الانحراف، لكن الفلسفة العامة لجميع المدونات، سواء للخرسانة أو الفولاذ أو الخشب أو غيرها، تطورت. ويمكن تصنيف هذه الفلسفات، الشكل 53.9، على النحو الآتي:

تصميم الإجهادات المسموح بها أقدم وأبسط طريقة لإدخال مفهوم السلامة.

تصميم معاملات الحمل والمقاومة أدخل في مدونة ACI عام 1977 وفي مدونة AISC عام 1986، ومن مراجعه الرئيسة أعمال Ellingwood.

الهندسة القائمة على الأداء 1 & 2 طورت أساساً للتصميم الزلزالي.



شكل 53.9: أمثلة لمدونات التصميم الحديثة

53.5.3.1 تصميم الإجهادات المسموح بها، ASD

55 تعد طريقة ASD أبسط الطرائق وأكثرها مباشرة. تخفض المقاومة الفعلية بمعامل، يبلغ عادةً 60%، وتعد القيمة الناتجة أقصى إجهاد مسموح به في الشد أو الضغط أو الانحناء.

56 يتمثل القيد الرئيس لهذه الطريقة في أن معامل الأمان يتأثر بعدم اليقين في المقاومة فقط، ولا يتأثر بعدم اليقين في الحمل أو الطلب.

53.5.3.2 تصميم معاملات الحمل والمقاومة، LRFD

المفاهيم الأساسية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

57 الحمل والمقاومة ليسا كميتين حتميتين كما في تصميم الإجهادات المسموح بها (ASD)، بل متغيران عشوائيان لكل منهما دالة توزيع احتمالي، ولذلك يمكن الحديث عن *احتمال الفشل*.

58 لما كان لدينا كل من المقاومة والطلب، يضرب كل منهما في معامل مناسب. يضرب الحمل في المعامل α، (ASCE/SEI 7-16, 2017)، بينما تخفض المقاومة، أي المقاومة القصوى، بالمعامل Φ.

59 يحدد α وΦ بحيث لا يتجاوز احتمال الفشل قيمة معينة. ولذلك يعبر عن LRFD عموماً بالعلاقة:

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i \tag{53.1}$$

حيث C_n المقاومة الاسمية وD الطلب أو الحمل الاسمي.

تحدد الحالة الحدية عادةً من المقاومة اللدنة من دون إجراء تحليل لاخطي. وتسعى طريقة LRFD إلى تحقيق مؤشر موثوقية، الفصل N، بحيث يكون $\beta >\sim 3.5$، الجدول N.1. ويعد مؤشر الموثوقية مقياساً "عاماً" لكفاية المنشأ، ويمكن استخدامه 1) لتقييم حالة المنشأ، و2) لمقارنة منشآت مختلفة مرشحة للمعالجة أو التدعيم.

60 يعرف مؤشر الموثوقية في الملحق N.

قيود طريقة LRFD

61 لطريقة LRFD ثلاثة قيود رئيسة:

1. عدم الاتساق: فالتحليل خطي، بينما التصميم لدن.
2. إغفال إعادة توزيع الأحمال قرب الفشل، رغم أن ACI يراعي بعض ذلك ضمنياً بخفض العزوم السالبة.
3. معالجة مستوى واحد فقط من الخطر، وهو فشل مكون إنشائي واحد لا النظام كله.

62 لا تكون هذه القيود مؤثرة في التحليلات الساكنة عادةً، لكنها تصبح مهمة عندما نريد تحديد السلامة الحقيقية للمنشأ أو عندما يكون الضرر الجزئي مقبولاً اقتصادياً تحت حمل ديناميكي. وتعالج الطريقة التالية هذه القيود.

53.5.3.3 هندسة الزلازل القائمة على الأداء

63 هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) منهج يركز على تحقيق أهداف أداء محددة للمنشآت تحت التحميل الزلزالي. وتعرف أهداف الأداء عادةً بمستوى الضرر الذي يمكن للمنشأ تحمله أثناء الزلزال وبقدرته على أداء وظيفته بعده.

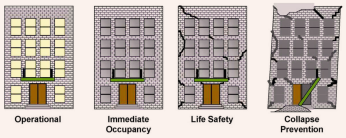
64 تقيّم PBEE صراحةً الأداء المحتمل للمبنى في ضوء الخطر المتوقع، مع مراعاة عدم اليقين الملازم لتقدير الخطر المحتمل وعدم اليقين في تقييم الاستجابة الفعلية للمبنى.

65 وعلى خلاف LRFD لا تقتصر PBEE على مستوى واحد من الخطر، بل تتناول مستويات متعددة. ويقاس الأداء باحتمال وقوع إصابات، وتكاليف الإصلاح والاستبدال، ومدة الإصلاح، واحتمال تصنيف المبنى على أنه غير آمن.

66 يمكن تقييم الأداء لسيناريو زلزالي أو شدة محددة، أو بالنظر إلى جميع الزلازل الممكنة واحتمال كل منها خلال مدة زمنية معينة. ويعبر عن الأداء بمجموعة من مستويات الأداء المنفصلة المبينة في الشكل 53.10:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. التشغيل الكامل
2. الإشغال الفوري
3. سلامة الأرواح
4. منع الانهيار



شكل 53.10: مستويات الأداء

67 من قيود هذا المنهج:

- الحالات الحدية قائمة على المكونات وليست شاملة للنظام كله؛ فهل يؤدي فشل مكون واحد إلى انهيار متتابع؟
- يعالج حدث الزلزال الأقصى المحتمل MCE فقط، باحتمال تجاوز 2% خلال 50 سنة.
- معالجة محدودة لعدم اليقين والاحتمالات.
- معلومات محدودة للتصميم الذي يتجاوز متطلبات المدونة.

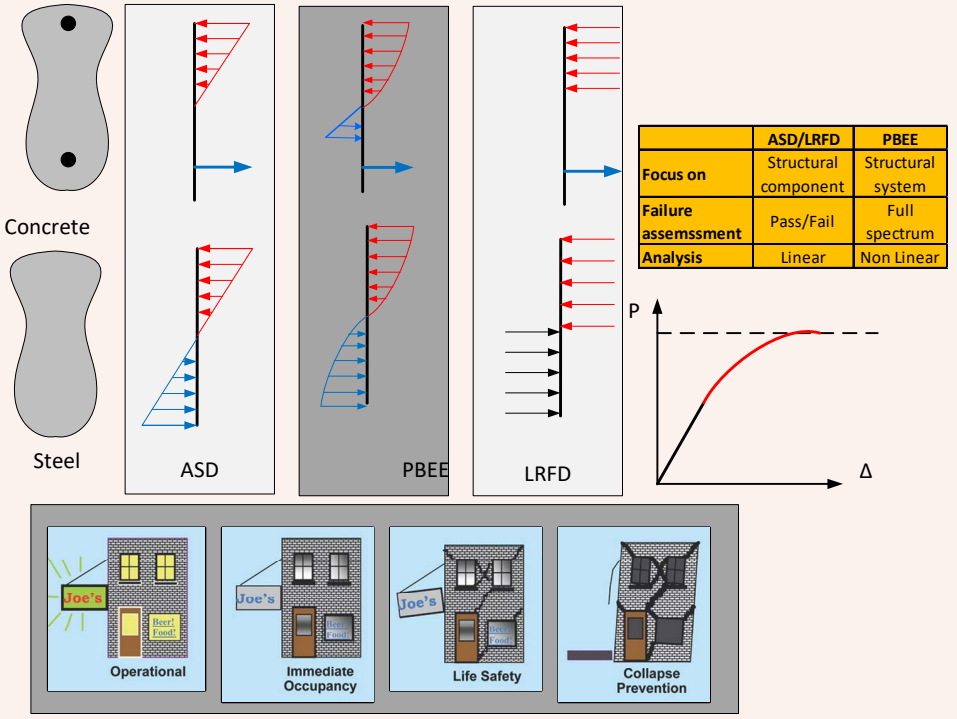
68 تمثل PBEE أحدث الممارسات المهنية، ولا تستخدم عادةً إلا لدى الشركات ذات الخبرة المتقدمة.

69 يقدم الفصل 70 معالجة أكثر تفصيلاً لهندسة الزلازل القائمة على الأداء.

53.5.4 ملخص

70 يلخص الشكل 53.11 مناهج التصميم التي نوقشت سابقاً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



	ASD/LRFD	PBEE
Focus on	Structural component	Structural system
Failure assemssment	Pass/Fail	Full spectrum
Analysis	Linear	Non Linear

شكل 53.11: مقارنة أطر التصميم المختلفة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

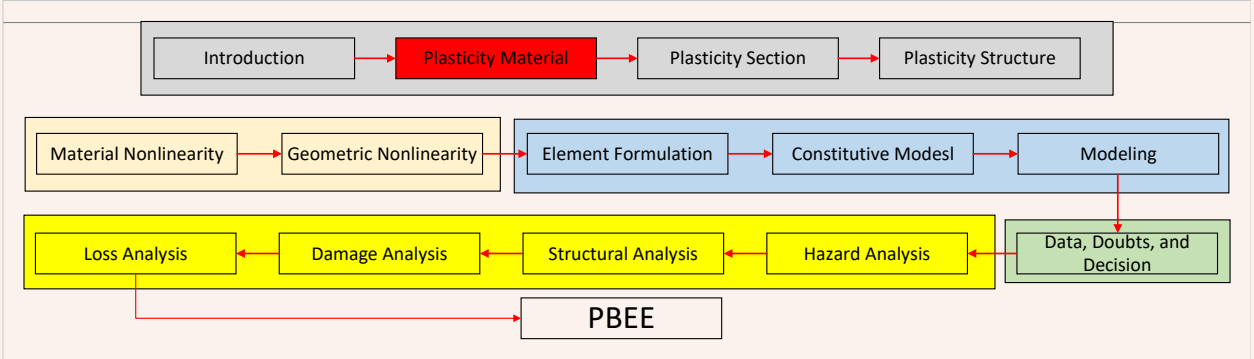

reinforced
steel
cellcolor
actual
seismic
stresses
construction
elastic
displacement
inelastic
failure
shape
account
analyses
analysis
displacements
house
strain
structural
assessment
nonlinear
material
equilibrium
guidelines
stress
bifurcation
different
book
pbee
solid
factor
loads
design
load
terms
structures
engineering
linear
critical
index
nonlinearity
capacity
curve
model
lrfd
true
accounts
hazard
second
safety
codes
reliability
builder
types
building
approach
walls
forces
code
system
earthquake
concrete
response
potential
probability
structure
performance
resistance
typically
strength

54 اللدونة I؛ الألياف & الوسط المتصل (لتحليل العناصر المحدودة)

ملخص

هذا هو الفصل الأول من ثلاثة فصول تتناول اللدونة. في هذا الفصل [1] نركز على "نقطة غاوس" بروح عناصر الوسط المتصل المحدودة، أو على ليف/طبقة في عناصر اللدونة الموزعة. وهو في جوهره مراجعة أساسية لمبادئ اللدونة كما ترد في عدد لا يحصى من الكتب الدراسية. نبدأ بمعايير الخضوع اللدن للمعادن والمواد الإسمنتية. وبعد عرض موجز للمشاهدات المختبرية وأوجه الفشل المجهرية، نتناول أسس نظرية اللدونة مع التركيز على اشتقاق معامل المرونة المماسي. ويُعرض نهجان: يقدم الاشتقاق المعمم الأول مفاهيم دالة الخضوع، وقاعدة الجريان (وشرط Kuhn-Tucker)، وشروط الاتساق. أما الثاني، وهو أبسط كثيرًا، فيقتصر على 1D ويستند إلى اعتبارات هندسية أبسط. يتناول الفصل التالي لدونة المقاطع، ويتناول الفصل الذي يليه لدونة المنشآت.

54.1 مقدمة 1678
54.2 شروط الخضوع اللدن 1679
54.2.1 نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي 1679
54.2.2 نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي 1681
54.3 المشاهدات المختبرية 1682
54.3.1 المعادن 1682
54.3.2 الخرسانة 1684
54.4 أوجه الفشل المجهرية 1684
54.4.1 الروابط الكيميائية 1684
54.4.2 الفشل المطيل والهش 1685
54.4.3 الانخلاع 1685
54.5 أسس اللدونة 1686
54.5.1 مقدمة 1686
54.5.2 معامل المرونة المماسي 1687



54.1 مقدمة

[1] توجد ثلاثة أنماط رئيسة للفشل: التشقق/الكسر، والانبعاج/عدم الاستقرار، والخضوع/اللدونة. ويتناول هذا الفصل اللدونة.

[1] يُنصح القارئ بمراجعة الملحق O قبل الشروع في هذا الفصل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2 في الخرسانة، يرتبط الفشل اللدن عادةً بـ"سحق" الخرسانة (انظر §54.2.1)، أو بخضوع التسليح (§54.2.2).

3 يقدم هذا الفصل مدخلًا موجزًا إلى معايير الفشل القائمة على اللدونة، وهي مستخدمة على نحو شبه شامل في تحليلات العناصر المحدودة غير الخطية.

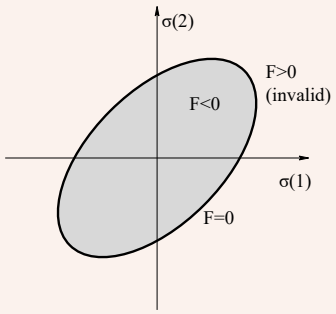
54.2 شروط الخضوع اللدن

4 يمكن تحديد الخضوع في عنصر إنشائي محمّل أحادي المحور بسهولة من $|\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}| \overset{?}{\geq} 1$. ولكن ماذا عن حالة إجهاد عامة ثلاثية الأبعاد؟

5 يتحقق ذلك بإدخال *دالة* خضوع F بدلالة الإجهادات الرئيسة وإجهاد الخضوع أحادي المحور:

$$F(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}; \sigma_y) \begin{cases} < 0 & \text{مرن} \\ = 0 & \text{لدن} \\ > 0 & \text{مستحيل} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t} \geq 0$$

لاحظ أن F لا يمكن أن تكون أكبر من الصفر، للسبب نفسه الذي يمنع الإجهاد أحادي المحور من تجاوز إجهاد الخضوع. وبدلالة الإجهادين الرئيسين $\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}$ تظهر F في الشكل 54.1. وتمثل المساحة التي تحددها F سطح *الخضوع*.



شكل 54.1: تعريف سطح الخضوع

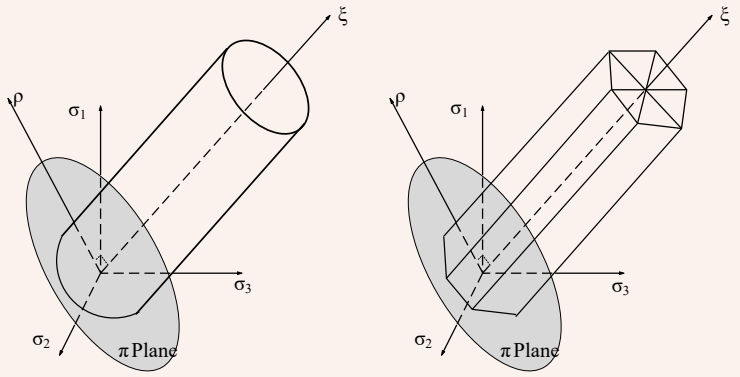
6 توجد فئتان من سطوح الخضوع: سطوح مستقلة عن الإجهاد الهيدروستاتيكي (المعادلة O.2.2.1)، وأخرى تعتمد عليه (Chen **and** Zhang, 1990).

54.2.1 نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي

7 في سطوح الخضوع المستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي، كما في الفولاذ، تكون خطوط الزوال مستقيمة وموازية للمحور الهيدروستاتيكي. ومن ثم لا بد أن يكون إجهاد القص السبب الرئيس للخضوع في هذا النوع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من المواد. ولأن مقدار إجهاد القص هو المهم لا اتجاهه، فإن السلوك المرن–اللدن في الشد والضغط ينبغي أن يكون متكافئًا للمواد المستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي، مثل الفولاذ.



b) von Mises) a) Tresca)

شكل 54.2: نماذج مستقلة عن الضغط الهيدروستاتيكي

Tresca: يفترض معيار Tresca أن الخضوع يحدث عندما يبلغ إجهاد القص الأقصى قيمة حدية k، الشكل 54.2a.

$$F\left(\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|,\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|,\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|\right)-k\right)=0$$

ومن اختبار شد أحادي المحور نجد أن $k=\sigma_y/2$، ومن اختبار القص النقي نجد أن $k=\tau_y$. ومن ثم ترتبط مقاومة الشد ومقاومة القص وفق Tresca بالعلاقة:

$$\sigma_y = 2\tau_y$$

ويمكن تمثيل معيار Tresca أيضًا كما يأتي:

$$2\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma_y=0 \quad \text{من أجل } 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

كان معيار Tresca أول معيار مقترح، ويستخدم غالبًا في المسائل المرنة–اللدنة. إلا أن زواياه المفردة تسبب مشكلات عديدة في التحليل العددي.

Von Mises: توجد تفسيرات فيزيائية متعددة، ومتكافئة، لفرضية معيار von Mises، الشكل 54.2b:

1. تخضع المادة عندما يبلغ الثابت الثاني للإجهاد المنحرف قيمة حرجة:

$$F(J_2)=J_2-k^2=0 \tag{54.1}$$

2. تخضع المادة عندما تبلغ طاقة التشوه (القص) القصوى القيمة الحرجة نفسها التي تسبب الخضوع في الشد أحادي المحور.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. عندما تساوي المسافة (ρ) بين نقطة الإجهاد P والمحور الهيدروستاتيكي ξ القيمة:

$$\rho_0 = \tau_y\sqrt{2}$$

باستخدام المعادلة 54.1 والاختبار أحادي المحور، تساوي k القيمة $k = \sigma_y/\sqrt{3}$، ومن اختبار القص النقي تساوي $k = \tau_y$. ومن ثم ترتبط مقاومة الشد ومقاومة القص وفق von Mises بالعلاقة:

$$\sigma_y = \sqrt{3}\tau_y$$

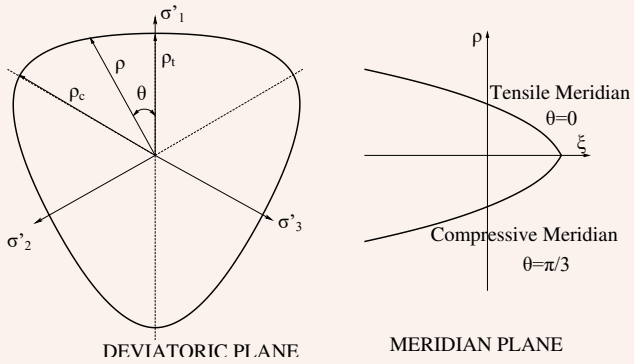
وبذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة 54.1 كما يأتي:

$$f(J_2) = J_2 - \frac{\sigma_y^2}{3} = 0$$

54.2.2 نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي

8 تتطلب المواد الاحتكاكية الحساسة للضغط، مثل التربة والصخر والخرسانة، مراعاة تأثير الثابتين الأول والثاني للإجهاد، وهو ما يوضَّح على نحو أفضل بسطح الخضوع.

9 المقاطع العرضية لسطح الخضوع هي منحنيات تقاطع سطح الخضوع مع المستوى المنحرف (ρ, θ) العمودي على المحور الهيدروستاتيكي ξ، مع ثبات ξ. وتتمتع الأشكال المقطعية لسطح الخضوع بتناظر ثلاثي.



شكل 54.3: سطوح خضوع تعتمد على الضغط

10 خطوط الزوال لسطح الخضوع هي منحنيات تقاطع السطح مع مستوى زوالي (ξ, ρ) يحتوي المحور الهيدروستاتيكي. والمستوى الزوالي عند $\theta = 0$ هو خط الزوال الشدي ويمر بنقطة الخضوع في الشد أحادي المحور. أما المستوى الزوالي عند $\theta = \pi/3$ فهو خط الزوال الضغطي ويمر بنقطة الخضوع في الضغط أحادي المحور، الشكل 54.3. يساوي نصف قطر سطح الخضوع على خط الزوال الشدي ρ_t، وعلى خط الزوال الضغطي ρ_c.

Rankine: يفترض المعيار أن الخضوع يحدث عندما يبلغ الإجهاد الرئيس الأقصى مقاومة الشد، الشكل 54.4a.

$$\sigma_1 = \sigma_y; \quad \sigma_2 = \sigma_y; \quad \sigma_3 = \sigma_y;$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Mohr-Coulomb: يمكن اعتبار معيار Mohr-Coulomb امتدادًا لمعيار Tresca. إذ يساوي إجهاد القص الأقصى ثابتًا مضافًا إلى دالة في الإجهاد العمودي المؤثر على المستوى نفسه، الشكل 54.4b.

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi$$

حيث c هو التماسك وϕ زاوية الاحتكاك الداخلي. وكل من c وϕ خاصية مادية يمكن معايرتها من اختباري الشد أحادي المحور والضغط أحادي المحور.

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi} \\ \sigma_c &= \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi} \end{cases}$$

وبدلالة الثوابت يمكن التعبير عن معيار Mohr-Coulomb كما يأتي:

$$\frac{1}{3}I_1 \sin\phi + \sqrt{J_2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\phi - c\cos\phi = 0$$

من أجل $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Drucker-Prager: تمثل فرضية Drucker-Prager امتدادًا بسيطًا لمعيار von Mises، إذ تضمّن تأثير الضغط الهيدروستاتيكي في خضوع المواد من خلال I_1، الشكل 54.4c:

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + J_2 - k$$

يمكن تحديد معاملي المقاومة α وk من اختباري الشد والضغط أحاديي المحور:

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{\sqrt{3}k}{1+\sqrt{3}\alpha} \\ \sigma_c &= \frac{\sqrt{3}k}{1-\sqrt{3}\alpha} \end{cases}$$

أو

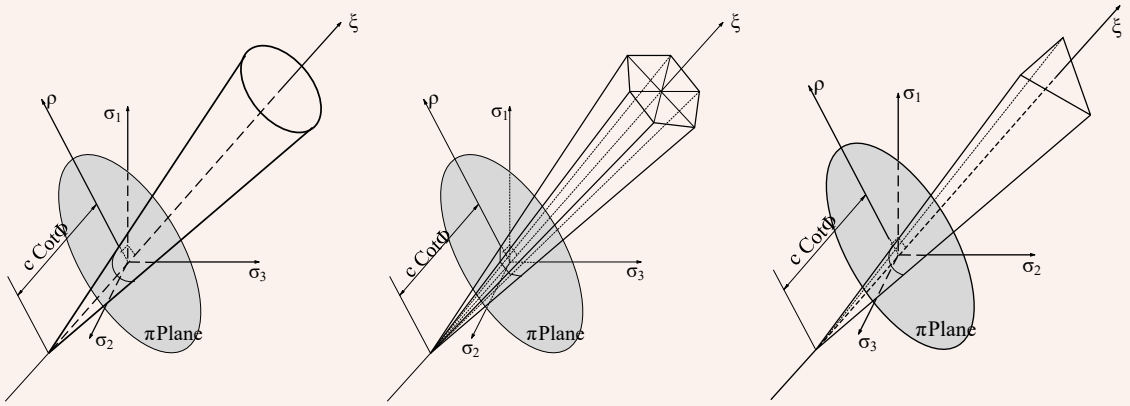
$$\begin{cases} \alpha &= \frac{m-1}{\sqrt{3}(m+1)} \\ k &= \frac{2\sigma_c}{\sqrt{3}(m+1)} \end{cases}$$

54.3 المشاهدات المختبرية

54.3.1 المعادن

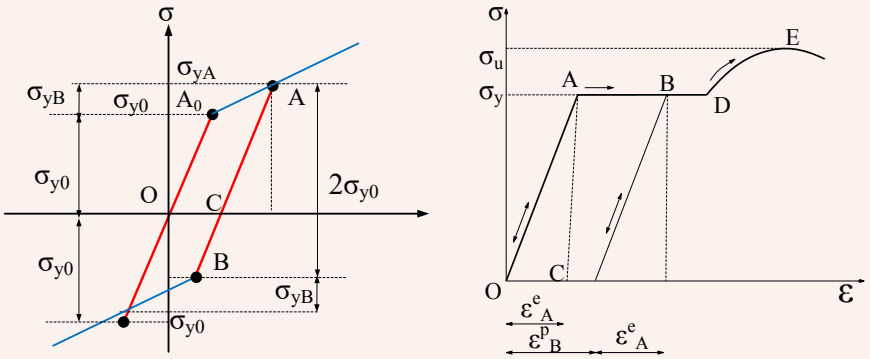
11 عند تحميل عينة فولاذية وتفريغها في مراحل مختلفة، الشكل 54.5a، نلاحظ أنه حتى النقطة A يكون التفريغ خطيًا مرنًا ويتبع مسار التحميل الأولي. ويكون السلوك O-A مستقلًا عن مسار الحمل. وعند A نبلغ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

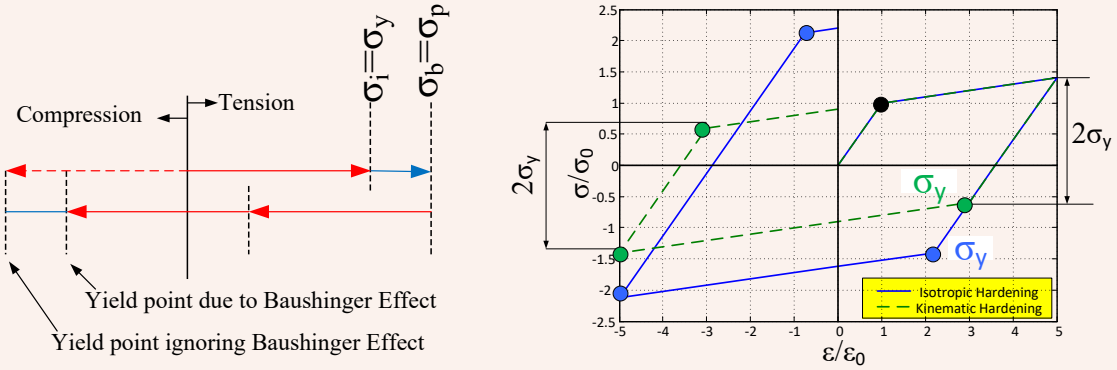


c) Drucker-Prager) b) Mohr-Coulomb) a) Rankine)

شكل 54.4: نماذج تعتمد على الضغط الهيدروستاتيكي



(a) التصلد متساوي الخواص



(b) التصلد الحركي؛ تأثير Bauschinger

شكل 54.5: الإجهاد–الانفعال للمعادن؛ تأثير Bauschinger

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

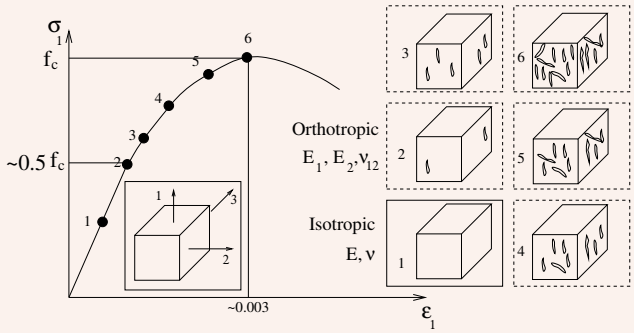
حد المرونة. ثم تصبح المادة لدنة وتسلك سلوكًا غير عكوس: يحدث الخضوع أولًا (A-D)، ثم التصلد. وعند التفريغ تتعرض المادة لانفعال دائم أو انفعال لدن ε^p. ومن ثم لا يُسترد عند التفريغ سوى جزء من الانفعال الكلي ε_B عند B، أي الانفعال المرن ε^e_A.

12 يؤدي التصلد الانفعالي في اتجاه يليه تحميل عكسي في الاتجاه الآخر إلى منحنى إجهاد–انفعال يختلف عن المنحنى الناتج من الشد أو الضغط النقي. وتقابل نقطة الخضوع الجديدة في الضغط عند B إجهادًا σ^B_y أصغر من σ^0_y، وأصغر بكثير من إجهاد الخضوع السابق عند A. وتسمى هذه الظاهرة تأثير Bauschinger، أو التصلد الحركي، في مقابل التصلد متساوي الخواص، الشكل 54.5b.

13 يعتمد سلوك الإجهاد–الانفعال في المجال اللدن على المسار، أي إن الانفعال لا يعتمد على حالة الإجهاد الحالية وحدها. بل يعتمد أيضًا على تاريخ التحميل كاملًا، أي تاريخ الإجهاد وتاريخ التشوه.

54.3.2 الخرسانة

14 تحتوي الخرسانة على شقوق مجهرية بسبب الانكماش، وتكون في الأصل متساوية الخواص. وعند الضغط، عندما يبلغ الإجهاد $0.5 f'_c \simeq$، تنتشر شقوق الواجهة حول الركام وتميل إلى الاصطفاف مع إجهاد الضغط. وعند الإجهاد الأقصى تتشكل آلية نتيجة اندماج الشقوق المجهرية ((Hsu **andothers,** 1963 (Slate **and** Olsefski, 1963))، الشكل 54.6.



شكل 54.6: الشقوق المجهرية في الخرسانة

15 إذا طُبق حمل حدث فشل مفاجئ عند الذروة، وإذا فُرضت الإزاحة حدث تليّن بعد الذروة.

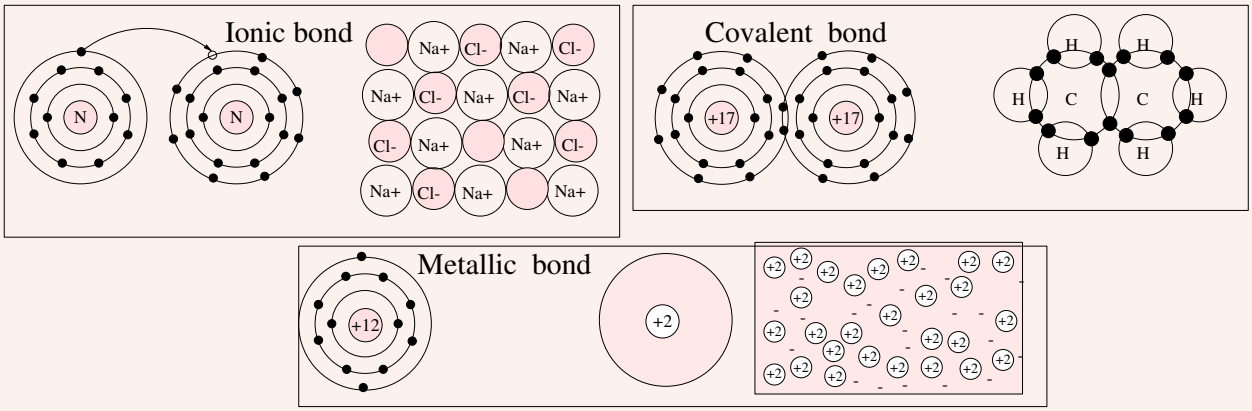
54.4 أوجه الفشل المجهرية

54.4.1 الروابط الكيميائية

16 إن فهم الروابط الكيميائية مهم لتفسير كل من الفشل المطيل والانخلاع، الشكل 54.7. ففي الرابطة الأيونية تتماسك الذرات بالتجاذب الكهروستاتيكي عند انتقال الإلكترونات من ذرة إلى ذرة مجاورة. وتصبح الذرة التي تفقد الإلكترون موجبة الشحنة، والتي تستقبله سالبة الشحنة. أما الرابطة التساهمية فتحدث عندما تتشارك الذرات المتجاورة الإلكترونات على نحو متقارب من التساوي. وعلى الرغم من أن قوة التجاذب

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

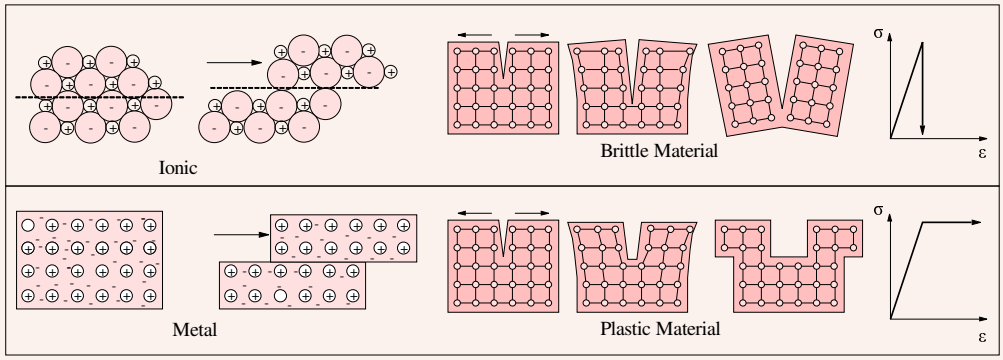
الكهروستاتيكي بين الذرات المتجاورة أقل منها في الروابط الأيونية، فإن الروابط التساهمية شديدة الاتجاه، أي إنها تقاوم حركة الذرات بعضها بمحاذاة بعض. وللماس روابط تساهمية. وفي الرابطة المعدنية تكون الإلكترونات غير متمركزة أو موزعة بالتساوي في البلورة المعدنية، ولا تتموضع الرابطة بين ذرتين. وأفضل وصف لها أنها أيونات موجبة في بحر من الإلكترونات.



شكل 54.7: الروابط الكيميائية

54.4.2 الفشل المطيل والهش

17 في المادة الصلبة الأيونية يُحاط كل أيون بأيونات معاكسة الشحنة، ولذلك يصعب تحقيق الانزلاق كثيرًا، وتستجيب المادة بالكسر الهش، الشكل 54.8. وعندما تزيح قوة ذات مقدار كافٍ الذرات من موضع اتزان إلى آخر، يحدث تشوه لدن على مستوى الانزلاق من دون التقيد بالشحنة الكهربائية، ومن ثم تنشأ استجابة مطيلة.



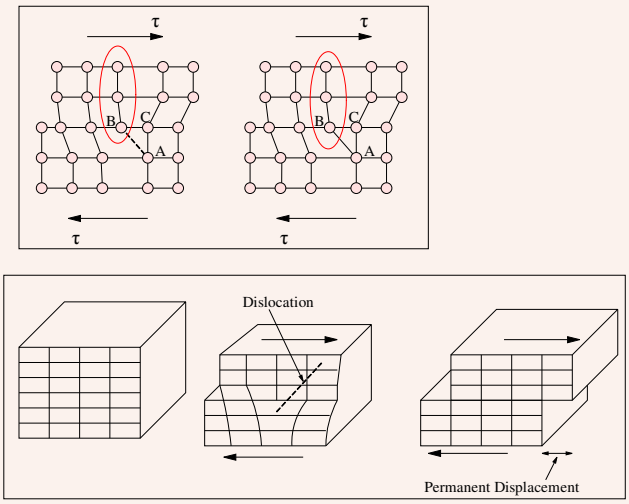
شكل 54.8: الروابط المطيلة والهشة

54.4.3 الانخلاع

18 تبلغ المقاومة النظرية للبلورات المثالية، أي الإجهاد اللازم لفصل ذرتين متجاورتين، نحو $E/10$، لكنها لا تتحقق أبدًا بسبب وجود عيوب عشوائية. وينشأ انخلاع الحافة عن عيوب داخلية في المستوى الذري. وبفعل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

τ توجد قوة دافعة لكسر الروابط الذرية بين الذرتين A وC حتى يخرج الانخلاع بالكامل من البلورة. ويسمى ذلك انزلاق الانخلاع، الشكل 54.9.



شكل 54.9: الانخلاع

19 عندما يغادر الانخلاع البلورة يبقى انزياح دائم.

20 يُبلَغ *إجهاد الخضوع* عندما يساوي إجهاد القص المطبق إجهاد القص اللازم لمنح الانخلاعات طاقة كافية لتجاوز القوى قصيرة المدى التي تمارسها العوائق.

21 ويمكن تفسير *التصلد بالعمل* بأن الانخلاعات تتكاثر مع التشوه اللدن، فتكون إجهادات أكبر لازمة لتجاوز هذه المقاومة ويحدث التصلد الانفعالي.

22 يحدث *تأثير Bauschinger* عندما تتراكم التشوهات أو الانخلاعات، فتتكدس الانخلاعات. ولأن التصلد الانفعالي مرتبط بزيادة كثافة الانخلاع، فإن خفض عدد الانخلاعات، بواسطة عكس الإجهاد، يخفض المقاومة.

54.5 أسس اللدونة

54.5.1 مقدمة

23 توجد نظريتان رئيستان للمرونة–اللدونة:

نظرية التشوه (أو النظرية الكلية) تفترض إمكان توصيف التشوه اللدن بالانفعال الكلي، من دون ضرورة مراعاة المسار أو التسلسل الذي تحقق به ذلك الانفعال. $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ تقود إلى صياغة قاطعية للدونة تقوم على التحليل الجمعي للانفعال الكلي إلى مركبتين مرنة ولدنة.

نظرية المعدل (Prandtl-Reuss)، وتسمى أيضًا النظرية التزايدية أو نظرية الجريان، تصف التشوه اللدن بأنه عملية تعتمد على المعدل، إذ يؤثر معدل تطبيق الحمل في الاستجابة اللدنة للمادة. وتُعرَّف بالعلاقة:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

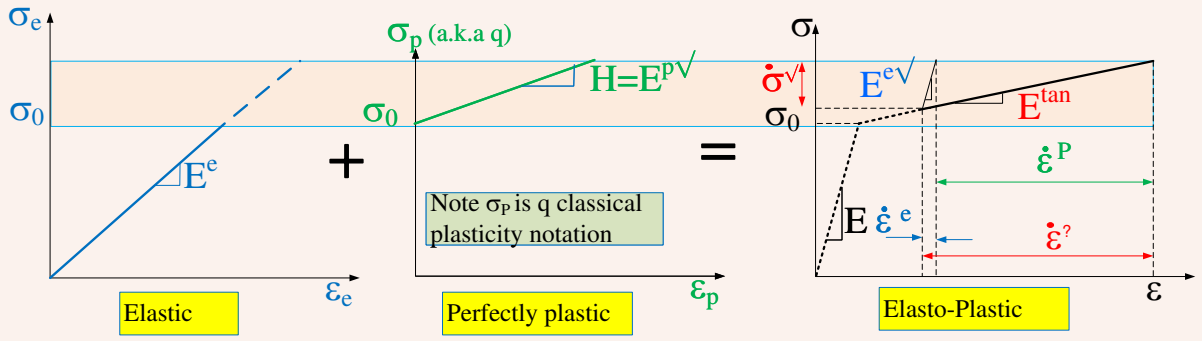
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تعتمد نظرية المعدل بطبيعتها على المسار، أي إن الاستجابة اللدنة لا تعتمد على الحالة الحالية فقط، بل على تاريخ التحميل ومعدله أيضًا. وهذا يجعلها أنسب للتحميل غير المتناسب وللحالات التي يتغير فيها اتجاه التحميل أو شدته مع الزمن.

نظرية المعدل هي الأوسع استخدامًا.

24 بالرجوع إلى الشكل 54.10، يمكن تحليل زيادة الانفعال الكلي إلى زيادة مرنة وأخرى لدنة:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$



شكل 54.10: استجابة الإجهاد–الانفعال المرنة–اللدنة

25 إلا أننا لا نعرف من القانون التأسيسي إلا الجزء المرن:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \tag{54.2}$$

26 الانفعال اللدن وزيادة الإجهاد اللدن المقابلة هما:

$$\dot{\sigma_p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \tag{54.3}$$

حيث H معامل التصلد أو .

54.5.2 معامل المرونة المماسي

27 بالرجوع إلى الشكل 54.10، ومع إعطاء زيادة الانفعال الكلي $\dot{\varepsilon}$، نسعى الآن إلى تحديد زيادة الإجهاد اللدن المقابلة $\dot{\sigma}$ بحيث:

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon} \tag{54.4}$$

ويتطلب ذلك ما يسمى معامل المرونة المماسي E^{tan}، ويجب ألا يلتبس مع H.

28 يوجد نهجان ممكنان:

1. ميكانيكا 3D المعممة؛ ويتطلب ذلك:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(a) دالة الخضوع
(b) قاعدة الجريان
(c) شرط الاتساق

2. النهج الهندسي 1D

وسنتناول كلًا منها على حدة.

54.5.2.1 الاشتقاق المعمم

54.5.2.1.1 دالة الخضوع؛ نموذج التصلد متساوي الخواص

29 تدل على مستوى الإجهاد الحالي مطروحًا منه إجهاد الخضوع الابتدائي، مع إمكان إضافة دالة في α تصف نوع التصلد. وفي 1D يمكن تعريفها كما يأتي:

$$h(\sigma, q) = |\sigma| - q \leq 0 \tag{54.5}$$

تحدد **q** حركة سطح الخضوع وتشوهه، أي التصلد أو التليّن. فإذا كان $h < 0$ كان الإجهاد داخل المجال المرن، وإذا كان $h = 0$ بلغ الإجهاد حده اللدن.

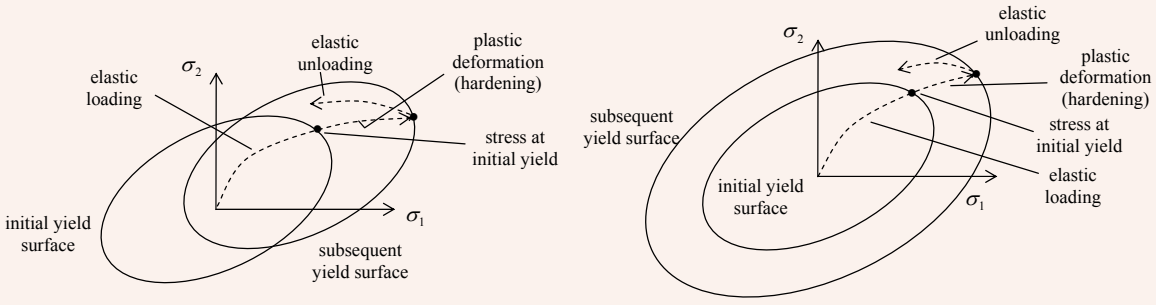
30 يبلغ الانفعال أولًا الخضوع ($\sigma_0 = \sigma_y$). وعندئذ تؤدي أي زيادة إضافية في الانفعال إلى تمدد q، وهو ما يوسّع المجال المرن بدوره.

54.5.2.1.2 قاعدة الجريان

31 عندما يكون الإجهاد داخل سطح الخضوع تكون الاستجابة مرنة، وينطبق قانون Hooke، وتكون الانفعالات قابلة للاسترداد، ولا يحدث تبديد للطاقة . ومن ثم عندما يدفع الحمل الواقع على المنشأ موتر الإجهاد إلى ما وراء سطح الخضوع، يثبت موتر الإجهاد على سطح الخضوع ويتشوه المنشأ لدنًا.

32 إذا أظهرت المادة تصلدًا بدل الاستجابة المرنة–اللدنة تمامًا، فإن سطح الخضوع يتمدد أو يتحرك مع بقاء نقطة الإجهاد عليه.

33 السؤال الحاسم هو: ما اتجاه الجريان اللدن، أي ما المقادير النسبية لمركبات $\boldsymbol{\varepsilon}^P$؟ تجيب قاعدة الجريان، أو قاعدة التعامد، عن هذا السؤال.



(b) حركي (a) متساوي الخواص

شكل 54.11: نماذج التصلد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34 تفترض قاعدة الجريان أن زيادة الانفعال اللدن وموتر الإجهاد المنحرف لهما الاتجاهات الرئيسة نفسها، وتعرّف تطور الانفعال اللدن كما يأتي:

$$\dot{\varepsilon}^p := \lambda \cdot \frac{\partial g(\sigma, \varepsilon^p, q)}{\partial \sigma} = \lambda \cdot h(\sigma,\ q) \tag{54.6}$$

حيث $g(\sigma, \varepsilon^p, q)$ هو الكمون اللدن وλ مضاعف لدن يقيس مقدار التشوه اللدن (وكما سنرى لاحقًا، سيُحذف هذا الحد ويقود إلى E^{tan}، وهو ما نسعى إليه في النهاية).

35 إذا كان $g \equiv h$ كانت قاعدة الجريان مترابطة، كما يحدث عادةً في المعادن. وإذا كان $g \neq h$ كانت قاعدة الجريان غير مترابطة، كما في الخرسانة والمواد الأرضية التي تظهر التمدد الحجمي.

36 لنماذج التصلد متساوي الخواص وقاعدة الجريان المترابطة:

$$g(\sigma, \varepsilon^p, q) = h(\sigma, q) = |\sigma| - q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$$

حيث $\text{sign}(\sigma)$ تساوي 1 إذا كان $\sigma \geq 0$، أو -1 إذا كان $\sigma < 0$. ومن المعادلة 54.6:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)$$

أو

$$\lambda = |\dot{\varepsilon}^p| \geq 0$$

37 للتبسيط، وبافتراض مادة مرنة–لدنة متصلدة ذات منحنى ثنائي الخطية:

$$h(\sigma,\ q) = -\frac{\partial g}{\partial q} = 1$$

ولذلك يمكن التعبير عن الإجهاد، المعادلة 54.2، كما يأتي:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}) = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)) \tag{54.7}$$

ومن المعادلة 54.3:

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \Rightarrow \dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = H \cdot \lambda \tag{54.8}$$

54.5.2.1.2.1 شروط Kuhn-Tucker

38 في المجال المرن يجب أن تبقى دالة الخضوع f سالبة، وأن يكون المضاعف اللدن صفرًا. وفي أثناء الجريان اللدن يجب أن تكون دالة الخضوع f صفرًا، بينما يكون المضاعف اللدن موجبًا.

39 يمكن التعبير بإيجاز عن هذه القيود بما يسمى شرط Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} &\text{التحميل والتفريغ المرنان} : f < 0, \quad \dot{\gamma} = 0 \\ &\text{التحميل اللدن} : f = 0, \quad \dot{\gamma} > 0 \end{aligned} \tag{54.9}$$

أو دمجها للحالة العامة $f \leq 0$ و$\dot{\gamma} \geq 0$:

$$f \cdot \dot{\gamma} = 0 \tag{54.10}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

54.5.2.1.3 شرط الاتساق

40 في أثناء التحميل اللدن يكون مسار الإجهاد مقيدًا بالحركة على طول سطح الخضوع؛ ولذلك يمنعنا شرط الاتساق من تجاوز سطح الخضوع، ويُعبَّر عنه رياضيًا بـ$\dot{f}(\sigma, q) = 0$، أو:

$$\begin{aligned}\dot{f}(\sigma,\ q) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\dot{q} = 0\end{aligned} \tag{54.11}$$

54.5.2.1.4 المعامل المماسي

41 يمكننا الآن أخيرًا حل المعادلة 54.4:

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon}$$

حيث المعامل المماسي هو ميل منحنى الإجهاد–الانفعال عند أي إجهاد أو انفعال محدد. وتحت حد التناسب يكافئ المعامل المماسي معامل Young، ويجب ألا يلتبس مع $\dot{\sigma^p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p}$. وبالتعويض:

معادلة قاعدة الجريان 54.7	$\dot{\sigma} = E\cdot(\dot{\varepsilon} - \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma})$
المعادلة 54.8	$\dot{q} = H\cdot\lambda\cdot h(\sigma,\ q)$
معادلة الاتساق 54.11	$\dot{f}(\sigma,\ q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\dot{q} = 0$

نحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\left(\dot{\varepsilon} - \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot\lambda\cdot h(\sigma,\ q) = 0$$

42 ومن ثم:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot h(\sigma,\ q)}$$

وبالتعويض مجددًا في:

$$\dot{\sigma} = E\cdot(\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}\cdot\text{sign}(\sigma))$$

نحصل على تعبير صريح لزيادة الإجهاد:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= E\cdot\left(\dot{\varepsilon} - \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) \\ &= \underbrace{\left(E - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E^2\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot E\cdot\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot h(\sigma,\ q)}\right)}_{(\text{بالتعريف})E^{tan}}\cdot\dot{\varepsilon}\end{aligned}$$

43 لمادة مرنة–لدنة متصلدة ذات منحنى ثنائي الخطية في بعد واحد:

$$\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)\cdot E\cdot\dot{\varepsilon}}{E + H}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويختزل المعامل المماسي إلى:

$$E^{tan} = E - \frac{\text{sign}(\sigma) \cdot E^2 \cdot \text{sign}(\sigma)}{\text{sign}(\sigma) \cdot E \cdot \text{sign}(\sigma) - (-1) \cdot H \cdot (1)}$$
$$= E - \frac{E^2}{E+H} = \frac{E \cdot H}{E+H} \tag{54.12}$$

لاحظ أنه إذا كان $H = E/9$، فإن $E^{tan} = E/10$.

54.5.2.2 المعامل المماسي؛ اشتقاق هندسي

44 نشتق فيما يأتي اشتقاقًا أبسط، وأكثر بداهة، للمعامل المماسي.

45 تُعرَّف نظرية المعدل بالعلاقة:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

إذا كان $\sigma \leq \sigma_y$، أي في المرونة، فإن:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

وإذا كان $\sigma > \sigma_y$، أي في اللدونة، فإن:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon^e} + \dot{\varepsilon}^p$$
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H} = \frac{\dot{\sigma}}{E^{tan}}$$

حيث:

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

46 نلاحظ أن:

$$E^{tan} = \begin{cases} > 0, & \text{تصلد} \\ = 0, & \text{لدونة تامة} \\ < 0, & \text{تليّن} \end{cases}$$

47 لا يعتمد E_t على نوع التصلد، سواء أكان متساوي الخواص أم حركيًا.

48 ملاحظة: يوجد نظير لذلك في التحليل الإنشائي غير الخطي، حيث نسعى إلى تحديد مصفوفة الصلابة المماسية لعنصر عند خطوة زمنية معينة. والإجراء مطابق مفهوميًا لما أُنجز تحليليًا في الجزء الأول.

49 لاحظ التشابه مع مقاومة مكافئة عندما توصل عدة مقاومات على التوازي.

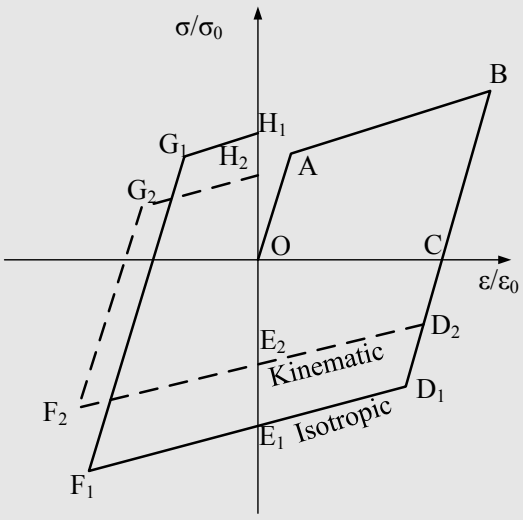
$$R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

54.5.2.3 مثال 54.1: المعامل المماسي

تُقَرَّب استجابة $\sigma-\varepsilon$ في الشد البسيط بنموذج التصلد بالعمل الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon; & 0 &\le \varepsilon \le \varepsilon_0; \\ \sigma &= \sigma_0 + m\varepsilon^p; & \varepsilon_0 &\le \varepsilon; & \varepsilon_0 &= \tfrac{\sigma_0}{E} \end{aligned}$$



حيث $m=E/9$. يخضع عنصر مادي لتاريخ الانفعال أحادي المحور الآتي: $0 \to \varepsilon_1$ (B) $\to 0$ (H) $\to -\varepsilon_1$ (F) $\to 0$، وينتهي التحميل الابتدائي عند B حيث $\varepsilon=\varepsilon_1$، و$\sigma=(1.0+\alpha)\sigma_0$ مع $0 \le \alpha \le 1$. نسعى إلى جدولة نتائج A وB وC وD وE وF وG، أي الإجهاد والانفعال، بدلالة α، ورسم النتائج عند $\alpha=0.4$. وباستخدام الصيغة التزايدية، حيث نعلم أن استجابة الإجهاد–الانفعال خطية تبعًا لكونها مرنة أو لدنة، نسعى إلى حل زيادة الانفعال الكلي: إذا كانت مرنة كان $d\varepsilon = d\sigma/E$، وإذا كانت لدنة كان $d\varepsilon/dE^P$.

التصلد متساوي الخواص

ملاحظة تمهيدية: يجب ألا نخلط بين المعامل المماسي والمعامل اللدن. فالمعامل اللدن: $d\varepsilon_p = d\sigma/E_p$، والمعامل المماسي هو $d\varepsilon = d\sigma/E_t$ حيث $E^t = \frac{E.E_p}{E+E_p}$ وحيث $E_p = m = E/9$. ومن ثم $E_t = E/10$.

A هذه نقطة وسيطة، إذ يزداد الانفعال من الصفر إلى ε_0 إلى $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$، وتقابل $\sigma_A = \sigma_0$ و$\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B يُعطى الإجهاد بـ$\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$. ولإيجاد الانفعال المقابل يمكن اتباع طريقتين:

1. باستخدام E_t: $\varepsilon_B = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{(1+\alpha)\sigma_0 - \sigma_0}{E/10} = (1+10\alpha)\varepsilon_0$
2. باستخدام $\Rightarrow$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_0)$; $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$

$$\varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$$

C أصبح لدينا الآن $\sigma_C = 0$، وتُفرَّغ المادة مرنًا وفق:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D نقطة وسيطة في رحلة الانفعال من $\varepsilon=\varepsilon_1$ إلى $\varepsilon=0$. عند هذه النقطة يوجد **تصلد متساوي الخواص**، ولذلك $\sigma_D = -\sigma_B = -(1+\alpha)\sigma_0$، ونحدد الانفعال المقابل من النقطة B:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_B - 2\sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - 2\frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = (8\alpha-1)\varepsilon_0$$

E هنا $\varepsilon_E = 0$، وتخضع المادة لتحميل لدن:

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = -(1+\alpha)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -(0.9+1.8\alpha)\sigma_0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

F على المسار EF تبقى المادة في حالة تحميل لدن، و$\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$. ويمكن إيجاد σ_F من العلاقات: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$؛ $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$؛ $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$. وبالتعويض والرجوع إلى الخلف نحصل على $\Delta\varepsilon = -18\alpha\varepsilon_0$؛ و$\Delta\sigma = -1.8\alpha E\varepsilon_0$؛ و$\sigma_F = -(1+2.8\alpha)\sigma_0$.

G تكون المادة أولًا في حالة تفريغ ثم تحميل مرن عكسي، ويبدأ التحميل اللدن عند G. وبسبب افتراض التصلد متساوي الخواص $\sigma_G = -\sigma_F = (1+2.8\alpha)\sigma_0$، و$\varepsilon_G = \varepsilon_F + 2\sigma_F/E$ التي تقابل التفريغ المرن.

$$\varepsilon_G = -(1+10\alpha)\varepsilon_0 + 2(1+2.8\alpha) = (1-4.4\alpha)\varepsilon_0$$

H تُعاد الآن تحميل المادة لدنًا مع $\varepsilon_H = 0$ و$\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1+2.8\alpha)\sigma_0 + E_t(4.4\alpha-1)\varepsilon_0$، أو $\sigma_H = (0.9+3.24\alpha)\sigma_0$.

نلاحظ أن تحديد كل حالة n يعتمد ببساطة على الحالة عند $n-1$.

التصلد الحركي

ملاحظة: النقاط الثلاث الأولى مطابقة لنموذج التصلد متساوي الخواص.

A هذه نقطة وسيطة، إذ يزداد الانفعال من الصفر إلى $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$، وتقابل $\sigma_A = \sigma_0$ و$\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B يُعطى الإجهاد بـ$\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$. وللانفعال المقابل: $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_e)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C أصبح لدينا الآن $\sigma_C = 0$، وتُفرَّغ المادة مرنًا وفق:

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D نقطة وسيطة في رحلة الانفعال من $\varepsilon = \varepsilon_1$ إلى $\varepsilon = 0$. عندها يوجد **تصلد حركي**، ولذلك $\sigma_D = \sigma_B - 2\sigma_0 = (\alpha-1)\sigma_0$، ونحدد الانفعال المقابل من النقطة C:

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C + \sigma_D/E = 9\alpha\varepsilon_0 + \frac{(\alpha-1)\sigma_0}{E} = (10\alpha-1)\varepsilon_0$$

E هنا $\varepsilon_E = 0$، وتخضع المادة لتحميل لدن:

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = (\alpha-1)\sigma_0 - E_t\underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -0.9\sigma_0$$

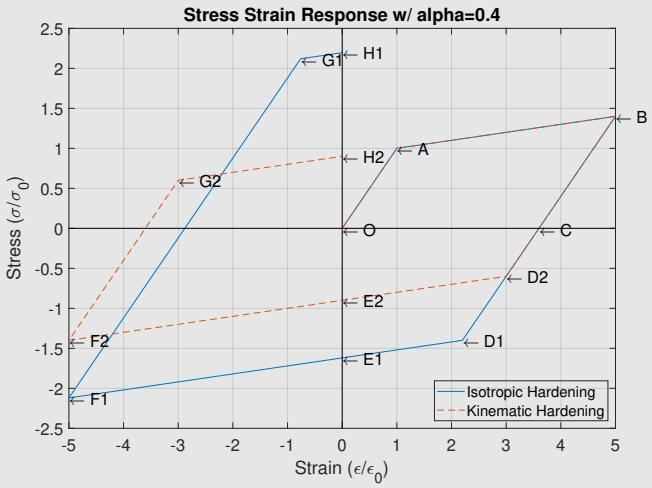
F على المسار EF تبقى المادة في حالة تحميل لدن، و$\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$. ويمكن إيجاد σ_F من العلاقات: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$؛ $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$؛ $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$. وبالتعويض نحصل على $\sigma_F = -(1+\alpha)\sigma_0$.

G تكون المادة أولًا في حالة تفريغ ثم تحميل مرن عكسي، ويبدأ التحميل اللدن عند G. وبسبب افتراض **التصلد الحركي** يكون $\sigma_G - \sigma_F = -(\sigma_D - \sigma_B)$، أو $\sigma_G = -\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 + \alpha\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 = (1-\alpha)\sigma_0$.

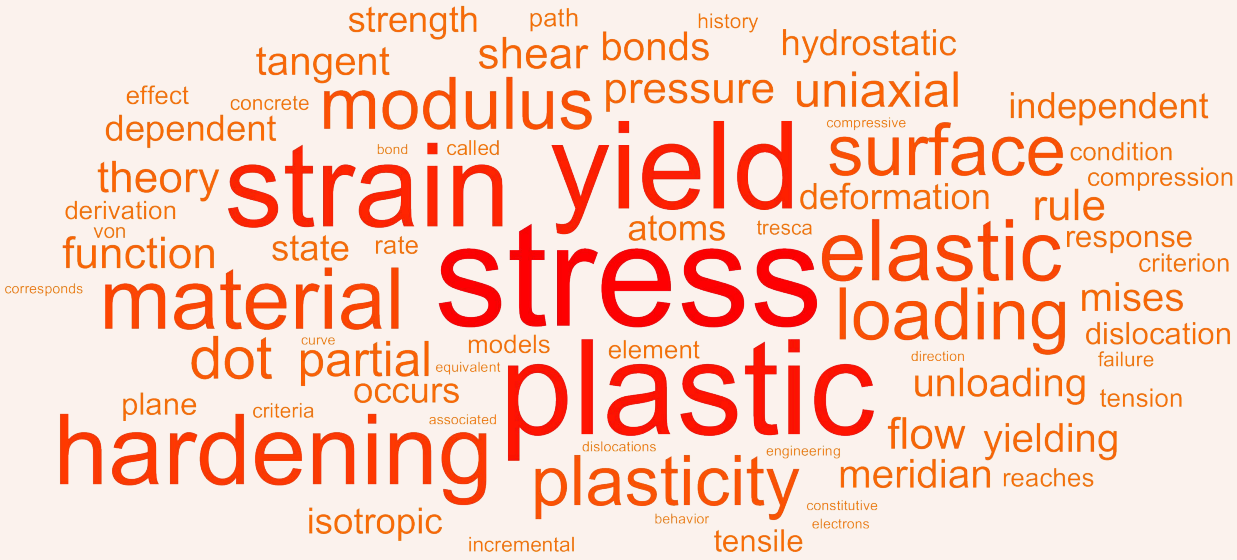
$$\varepsilon_G = \varepsilon_F + \frac{\sigma_G - \sigma_F}{E} = -\varepsilon_0 - 10\alpha\varepsilon_0 + (1-\alpha)\varepsilon_0 + (1+\alpha)\varepsilon_0 = (1-10\alpha)\varepsilon_0$$

H تُعاد الآن تحميل المادة لدنًا مع $\varepsilon_H = 0$ و$\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1-\alpha)\sigma_0 - \frac{1}{10}(1-10\alpha)\sigma_0 or \sigma_H = 0.9\sigma_0$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



يرد حل لهذه المسألة باستخدام MATLAB®في الملحق I.3.1.



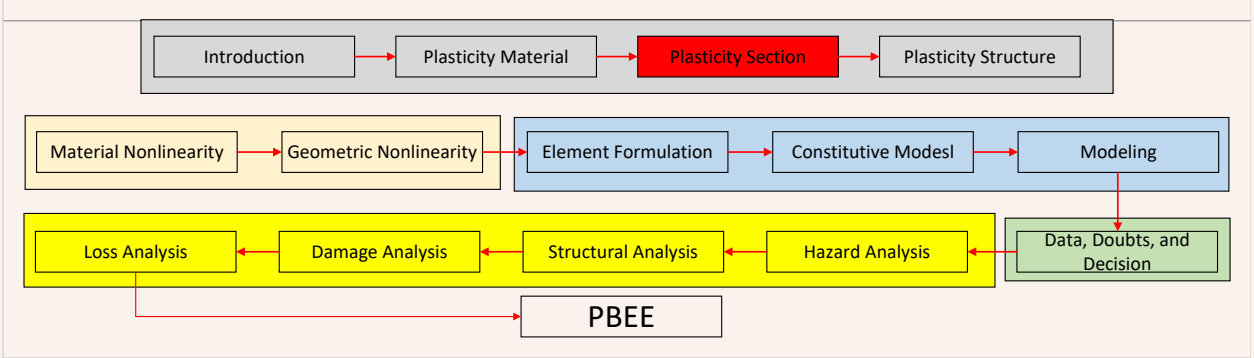
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

55 اللدونة II؛ المقاطع:

ملخص

بعد لدونة النقطة، يركز هذا الفصل على لدونة المقطع. نراجع أولًا علاقة العزم–الانحناء، ثم نطبقها على تحليل الدفع غير الخطي لعمود فولاذي. بعد ذلك نقسّم المقطع إلى طبقات، وبدلًا من اللجوء إلى علاقة $M-\phi$ نشتقها من تطبيق علاقة $\sigma-\varepsilon$ على طبقات المقطع. ثم نطبق ذلك على مسألة الدفع نفسها التي سبق تحليلها، ونستخدمه للتحقق من دقة افتراض كتلة الإجهاد لـWhitney في جوائز الخرسانة المسلحة. وأخيرًا نعمم نهج الطبقات للمقاطع الاعتباطية باستخدام نهج تحليلي أو عددي.

55.1 مقدمة 1695
55.2 الإطار النظري: الافتراضات والنتائج الرئيسة 1695
55.3 العزم–الانحناء؛ $M-\Phi$ 1697
55.3.1 بدءًا من علاقة العزم–الانحناء . 1698
55.3.2 بدءًا من علاقة الإجهاد–الانفعال 1701
55.4 تعميم علاقة العزم–الانحناء 1709
55.4.1 النهج التحليلي 1709
55.4.2 النهج العددي 1717



55.1 مقدمة

1 ركز تحليلنا في الفصل السابق على استجابة الإجهاد–الانفعال $(\sigma-\varepsilon)$ عند نقطة Gauss محددة. وانطلاقًا من هذا الأساس، ينتقل هذا الفصل إلى استكشاف علاقة العزم–الانحناء $(M-\Phi)$ عند المقطع العرضي لعنصر جائز–عمود. وهذه العلاقة وصف حاسم للسلوك الإنشائي تحت الانحناء، ويمكن تحديدها تجريبيًا أو حاسوبيًا بتقسيم المقطع العرضي إلى ألياف منفصلة، يحكم كلًا منها قانون الإجهاد–الانفعال $(\sigma-\varepsilon)$ التأسيسي الخاص بها.

55.2 الإطار النظري: الافتراضات والنتائج الرئيسة

2 لفهم الاشتقاقات التالية فهمًا صحيحًا، لا بد من بيان اعتبارات أساسية يقوم عليها الإطار النظري.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الافتراضات

القوى: نعد كلًا من القوة المحورية N وعزم الانحناء M الحملين الأساسيين المؤثرين في المقطع.

بقاء المقاطع المستوية مستوية (فرضية Bernoulli): يفترض أن تبقى المقاطع المستوية مستوية عند التشوه، بما يضمن توزيعًا خطيًا للانفعال على عمق المقطع.

الترابط التام (للخرسانة المسلحة): في أعضاء الخرسانة المسلحة (R/C)، نفترض وجود ترابط تام بين فولاذ التسليح والخرسانة، بما يحقق توافق الانفعال بين المادتين.

المعادلات الحاكمة

اتزان القوى والعزوم: تضمن شروط الاتزان عند المقطع العرضي موازنة القوى والعزوم الداخلية لحالات التحميل الخارجية.

توافق الانفعال والانحناء: يفترض ارتباط توزيع الانفعال على المقطع بالانحناء، $\varepsilon = \Phi \cdot y = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y$، وبذلك يرتبط العزم المطبق بالانحناء الناتج من خلال الخصائص المادية والهندسية.

القوانين التأسيسية

علاقة العزم–الانحناء ($M - \Phi$): تصف هذه العلاقة الصلابة الانحنائية واستجابة المقطع، وتعكس قدرة المادة على مقاومة الانحناء.

علاقة الإجهاد–الانفعال ($\sigma - \varepsilon$): يحكم هذا القانون كل ليف مادي، ويحدد كيفية استجابة كل جزء للإجهاد، وهو أساس المقاطع المركبة التي تتفاعل فيها مواد متعددة.

الانحناء يُعرَّف بأنه الدوران لكل وحدة طول من الجائز (§22.3)، ويُعبَّر عن الانحناء Φ عند أي مقطع عرضي كما يأتي:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

حيث ρ نصف قطر الانحناء، وθ الدوران الزاوي، وy الانحراف.

النتائج

العزم–الانحناء ($M - \Phi$): علاقة أساسية لتقييم الأداء الانحنائي.

استجابة الحمل–الانحراف (الدفع، $P - \Delta$): تقيّم الانحراف التدريجي للمنشأ تحت حمل متزايد، وهو مؤشر على السلوك المطيل.

مخطط التفاعل ($M - N$): يصف التفاعل بين العزم والقوة المحورية، وهو ضروري للتصميم تحت التحميل المركب.

نسبة المطيلية[1]:

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث Φ_u الانحناء النهائي عند الفشل، المحدد بانفعال ضغط حدي للخرسانة، وΦ_y انحناء الخضوع الذي يوافق بداية خضوع تسليح الشد.

من المهم ملاحظة أن النهج غير الطبقي يستخدم عادةً، للتبسيط والكفاءة، عند تحليل $M-\Phi$ لأعضاء الفولاذ، بينما يُفضَّل النهج الطبقي للخرسانة لمراعاة سلوكها الأكثر تعقيدًا ولاخطية. ويعكس هذا الاختيار اختلاف المطيلية وخصائص الترابط الملازمة لكل مادة.

55.3 العزم–الانحناء؛ $M-\Phi$

علاقة *العزم–الانحناء* ($M-\Phi$) أداة أساسية في الهندسة الإنشائية لفهم السلوك الانحنائي للجوائز والأعمدة تحت أحمال الانحناء والتنبؤ به.

وهي تحدد الصلة بين عزم الانحناء المطبق (M) والانحناء الناتج (Φ)، أي معدل تغير الدوران الزاوي لكل وحدة طول على امتداد الجائز. وتُعد هذه العلاقة حاسمة لتحليل العناصر الإنشائية لأنها توضح كيفية تشوه المقطع العرضي وحمله للأحمال، وتساعد المهندسين على ضمان استقرار المنشآت وسلامتها.

تحليل العزم–الانحناء ضروري لعدة أسباب:

- **التنبؤ بالصلابة الانحنائية:** يمكّن المهندسين من تقييم صلابة المقطع، أي مقاومته للانحناء. ويكون انحناء المقطع الأشد صلابة أقل عند عزم معين.
- **فهم المطيلية:** تُعد المطيلية، أو قدرة المقطع على التشوه من دون فشل، حاسمة للمنشآت في المناطق الزلزالية. وتساعد علاقات العزم–الانحناء على تكميم المطيلية بإظهار مقدار الانحناء الذي يمكن أن يتحمله المقطع قبل بلوغ مقاومته النهائية.
- **تقييم السعة النهائية:** تمثل سعة العزم النهائية، عندما يفشل المقطع في الانحناء، معلمة تصميم أساسية، ولا سيما لمقاطع الخرسانة المسلحة أو المقاطع المركبة التي يكون سلوكها غالبًا لاخطيًا ومعقدًا.

عند التعامل مع السلوك غير الخطي في الجوائز أو الأعمدة، يمكن إجراء التحليل بطريقتين رئيستين:

1. الاستخدام المباشر **لعلاقة عزم–انحناء لاخطية**.
2. البدء من **علاقة إجهاد–انفعال لاخطية** واشتقاق استجابة العزم–الانحناء.

يشمل حساب العزم–الانحناء الخصائص الهندسية والمادية للمقطع:

1. **الافتراضات والهندسة:** نفترض عادةً أن *المقاطع المستوية تبقى مستوية* تحت الانحناء، وهي فرضية Bernoulli، أي إن توزيع الانفعال على عمق المقطع يبقى خطيًا. ويبسّط هذا الافتراض العلاقة بين الانفعال والانحناء على المقطع.
2. **القوانين التأسيسية للمقطع/المادة:** يوجد أحد توصيفين ممكنين:

   العزم–الانحناء يُعطى على صورة $M-\Phi$. وهذه أبسط حالة، وتمثل خاصية *للمقطع*.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإجهاد–الانفعال هو الحالة الأعم، ويمثل توصيفًا *لطبقة أو ليف*.

لاحظ أنه في الحالة الأولى يتلدن المقطع كله في وقت واحد، أما في الثانية فيحدث التلدن تدريجيًا على المقطع.

3. **التقسيم إلى طبقات أو ألياف:** يستخدم فقط عندما تُعطى علاقة الإجهاد–الانفعال لا علاقة العزم–الانحناء. يُقسَّم المقطع العرضي إلى عناصر صغيرة أو ألياف، لكل منها استجابتها للإجهاد–الانفعال. وعند انحناء معين، يُحسب انفعال كل ليف استنادًا إلى بعده عن المحور المتعادل، وتُستخرج الإجهادات المقابلة من قوانين المادة. ويمكن إجراء ذلك تحليليًا، فلا حاجة إلى طبقة/ليف صريحة إذ يستعاض عنها بـdy، أو عدديًا. ويؤدي ذلك في مرحلة وسيطة إلى علاقة عزم–انحناء.
4. **تكامل القوى الداخلية:** تُكامل القوى الداخلية، أي الإجهادات، في كل مقطع/ليف على المقطع لتحديد عزم الانحناء المحصل (M). وتتكرر العملية لقيم متزايدة من الانحناء، فتُنشئ منحنى $M - \Phi$ يبين سلوك المقطع مع الانحناء التدريجي.
5. **التحليل غير الخطي:** مع ازدياد الانحناء تصبح علاقة $M - \Phi$ عادةً لاخطية، ولا سيما في مقاطع الخرسانة المسلحة حيث تبدأ الخرسانة بالتشقق ويخضع الفولاذ. وهذه الاستجابة اللاخطية حاسمة لفهم سعة الانحناء الكاملة وسلوك المقطع بعد الخضوع.

9 يُستخدم تحليل العزم–الانحناء على نطاق واسع في:

- **تصميم الجوائز والأعمدة:** تحديد سلوك المقطع تحت أحمال الانحناء، بما يدعم القرارات المتعلقة بالأبعاد والتسليح واختيار المواد.
- **التصميم الزلزالي:** ضمان امتلاك العناصر الإنشائية مطيلية وسعة كافيتين لتبديد الطاقة.
- **نمذجة العناصر المحدودة غير الخطية:** توفير مدخلات لمحاكاة مفصلة للأنظمة الإنشائية المعقدة تحت حالات تحميل مختلفة.

10 إجمالًا، توفر علاقة $M - \Phi$ فهمًا تفصيليًا للأداء الانحنائي، وتمكّن المهندسين من تصميم منشآت أكثر أمانًا ومرونة بالتنبؤ الدقيق بسلوك العناصر تحت حالات التحميل الواقعية.

55.3.1 بدءًا من علاقة العزم–الانحناء

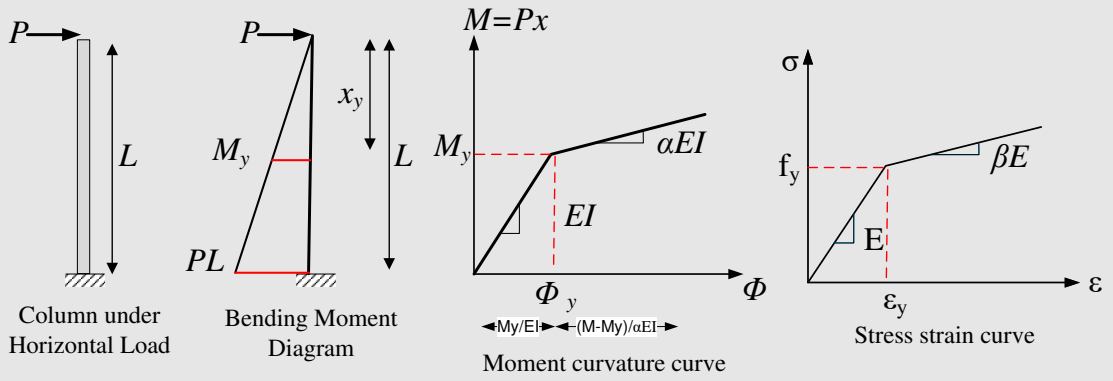
11 الإجراء مباشر إلى حد كبير، ويوضحه المثال الآتي.

55.3.1.1 مثال 55.1: تحليل لاخطي للمقطع؛ تحليلي

الجزء I: المقطع

نسعى إلى تحديد علاقة العزم–الانحناء للمسألة الآتية ورسمها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الخضوع يحدث عند x_y بحيث:

$$x_y = \frac{M_y}{P} \leq L$$

الانحناءات تُعطى بالعلاقة:

$$\Phi = \begin{cases} \frac{P.x}{E.I} & \text{إذا كان } x < x_y \\ \frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I} & \text{إذا كان } x > x_y \end{cases}$$

الإزاحة تُستخرج من مبدأ العمل الافتراضي المتمم، أي القوة الافتراضية:

$$\begin{aligned} \delta\overline{M} &= x \\ \delta\overline{P}\Delta &= \int_0^L \delta\overline{M}.\Phi dx = \int_0^L x\,.\Phi.dx \\ &= \int_0^{x_y} x\frac{P.x}{E.I}dx + \int_{x_y}^L x\left(\frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I}\right)\cdot dx \\ &= \frac{P.{x_y}^3}{3.E.I} + \frac{3\left(-1+\alpha\right)M_y\left(L^2 - {x_y}^2\right) + 2.P\left(L^3 - {x_y}^3\right)}{6E.I.\alpha} \end{aligned}$$

التعويض عن $x_y = M_y/P$ يعطي: القوة–الإزاحة أو الدفع

$$\Delta = \frac{2L^3P^3 - (\alpha-1)M_y\left(M_y^2 - 3L^2P^2\right)}{6\alpha EIP^2}$$

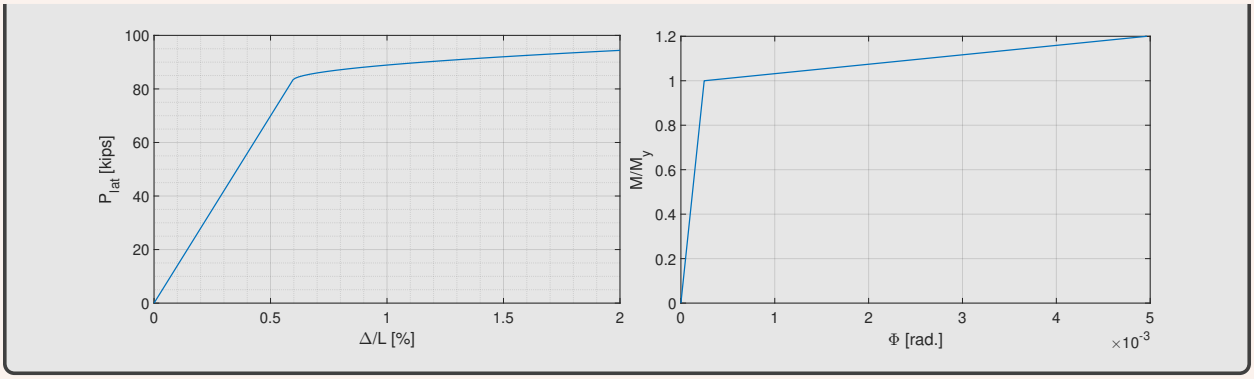
وهي علاقة لاخطية بوضوح.

```
all close;clc;all clear
figures for Initialization %
scrsz 2/(3)scrsz 2 2] = figpos;('ScreenSize',0)get = scrsz;24 = fs
;[2/(4)
(simpler it make to) section Rectangular ;in kips :units %
;3/12^h*b=I;0.01=beta;10=b;2/h=h2;10=h;36=fy;29000=E
inch x1010 ;column long ft 7%;h2/I=S;0.01=alpha;12*6=L
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                                ;h*b=A;EI/My=Phiy  ;fy*S=My  ;I*E=EI
                                                                                   %
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

                                                                    ;I  T R A P %
                                                                                   %
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

                                                                  ==========================%
                                                                   PLOT CURVATURE MOMENT %
                                                                  ==========================%
                                                      ;Phiy = (2)Phi  ;My = (2)M;.0 = (1)Phi  ;0 = (1)M
                                                      ;(EI*alpha)/(My-(3)M) = (3)Phi  ;(2)M*1.2 = (3)M
                                                 ;(28,'FontSize',gca)set  ;(figpos,'Position')figure
                                                                 (2,'LineWidth',My/M,Phi)plot
                                                          ;('M_y/M')ylabel  ;('[.rad] Phi\')xlabel
                                              ;('none' ,'color' ,gca)set;(fs,'fontsize',gca)set  ; grid
BackgroundColor','pdf.NonLayeredMomentCurvature',gca)exportgraphics
                                                                                ('none','
                                                                  ==========================%
                                                                     PLOT DISPLACEMENT LOAD %
                                                                  ==========================%
                                                                 ;0=(1)Delta  ;0.0=(1)P;0.5=DeltaP
                                                                                 2:1000=i for
                                                                      ;DeltaP+(1-i)P = (i)P
                                                                              ;(i)P/My = xy
                                                                                   L<xy if
                                                                 ;(I*E*3)/3^L*(i)P = (i)Delta
                                                                                     else
                                    ((alpha + 1-)*(2^(i)P*2^L*3 - 2^My)*My - 3^(i)P*3^L*2) = (i)Delta
                                                                                    .../
                                                                      ;(alpha*2^(i)P*EI*.6)
                                                                                     end
                                                                                     end
                                                                                      %
                                                 ;(28,'FontSize',gca)set  ;(figpos,'Position')figure
                                                                 (2,'LineWidth',P,L/Delta*100)plot
                                        ([0,2])xlim;('[kips] P_l_a_t')ylabel  ;('[%] L/Delta\')xlabel
                                                                              ;minor grid;grid
                                                  ;('none' ,'color' ,gca)set;(fs,'fontsize',gca)set
                                            ','pdf.NonLayeredLoadDisplacement',gca)exportgraphics
                                                                              ('none','BackgroundColor
                                                    II Part for results Store % ;P=P0;Delta=Delta0
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



55.3.2 بدءًا من علاقة الإجهاد–الانفعال

12 تناولنا في القسم السابق التلدن المحتمل للمقطع كله، لكنه في الواقع عملية تدريجية تبدأ عند الألياف القصوى وتتقدم تدريجيًا نحو المحور المتعادل.

13 لذلك قد يلزم نهج أدق. ويتحقق ذلك بدراسة *طبقات* المقطع العرضي التي يمكن أن تعمل كل منها مستقلًا عن الطبقات المجاورة. أي إننا نفحص التلدن التدريجي للطبقات الخارجية حتى يبلغ المحور المتعادل.

14 ومن ثم يلزم توصيف كل طبقة بمعادلتها التأسيسية بدلالة $\sigma - \varepsilon$، ثم اشتقاق:

1. علاقة العزم–الانحناء اللاخطية، بالمقارنة مع العلاقة ثنائية الخطية المفترضة سابقًا.
2. علاقة القوة–الإزاحة المقابلة.

15 عند البدء من علاقة إجهاد–انفعال لاخطية، يُشتق الانحناء بتكامل السلوك المادي غير الخطي على المقطع العرضي.

16 في هذه الحالة يكون الإجهاد σ دالة لاخطية في الانفعال ϵ:

$$\sigma = g(\epsilon)$$

حيث تمثل $g(\epsilon)$ الاستجابة المادية اللاخطية، مثل التصلد في المعادن أو الضغط اللاخطي في الخرسانة.

17 التحليل:

1. **توزيع الانفعال في الانحناء**: عندما ينحني مقطع جائز، يتناسب الانفعال $\epsilon(y)$ عند مسافة y من المحور المتعادل مع الانحناء:
$$\epsilon(y) = -\kappa y$$
2. **الإجهاد اللاخطي من الانفعال اللاخطي**: بتطبيق علاقة الإجهاد–الانفعال اللاخطية $\sigma = g(\epsilon)$، يكون الإجهاد عند أي ليف y:
$$\sigma(y) = g(-\kappa y)$$
3. **التكامل لإيجاد عزم الانحناء**: يُستخرج عزم الانحناء M بتكامل توزيع الإجهاد على مساحة المقطع العرضي A:
$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \, dA = \int_A g(-\kappa y) \cdot y \, dA$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

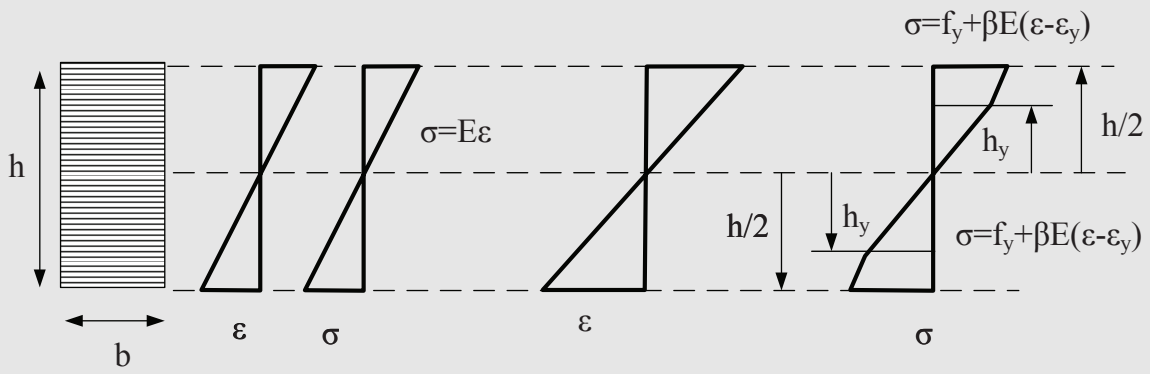
ويُحل هذا التكامل عادةً عدديًا بسبب لاخطية $g(\epsilon)$.

4. **التحليل التجزيئي أو التزايدي**: لعلاقة إجهاد–انفعال تجزيئية، مثل:

$$g(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon, & \epsilon \le \epsilon_y \\ E'(\epsilon - \epsilon_y) + \sigma_y, & \epsilon > \epsilon_y \end{cases}$$

حيث تمثل $E' < E$ صلابة ما بعد الخضوع، تصبح علاقة العزم–الانحناء تجزيئية أيضًا، ويُجرى التكامل على أجزاء.

55.3.2.1 مثال 55.2: الطبقات؛ الفولاذ



ندرس المقطع المستطيل نفسه الوارد في المثال السابق.

الجزء I: اشتقاق معادلة العزم–الانحناء

- يبدأ الخضوع عند الألياف الخارجية عند x_y بحيث، مع التذكير بأن $\Phi = \varepsilon/y$، المعادلة 22.15:

$$P.x_y = E.I.\Phi_y = E.I\frac{\varepsilon_y}{h/2} \Rightarrow x_y = \frac{2.f_y.I}{P.h} \le L$$

- أقصى انحناء تبقى دونه جميع الإجهادات مرنة هو:

$$\Phi_y = \frac{2.f_y}{E.h}$$

- إذا كان $h \le h_y$ كان توزيع الإجهاد خطيًا مرنًا، و

$$\Phi = \frac{M}{E.I} = \frac{P.x}{E.I}$$

- إذا كان $h > h_y$ بدأ التصلد عند مسافة h_y من المحور المتعادل، و:

$$h_y = \frac{f_y}{E.\Phi} \le \frac{h}{2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- تُعطى الإجهادات بالعلاقة:

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} E.\varepsilon & \text{إذا كان } h < h_y \\ f_y + \beta E.(\varepsilon - \varepsilon_y) & \text{إذا كان } h_y < h \end{cases}$$

- مع التذكير بأن $\varepsilon = \Phi y$، يُعطى عزم المقاومة الداخلي بما يأتي:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} b.\sigma_{xx}.y.dy \\ &= 2.b.\int_0^{h_y} E.(\Phi.y).ydy + 2b\int_{h_y}^{h/2} [f_y + \beta.E.(\Phi y - \varepsilon_y)].y.dy \\ &= 2E.b.\Phi\int_0^{h_y} y^2.dy + 2b\int_{h_y}^{h} \left[f_y.y + \beta.E.\Phi.y^2 - \beta f_y.y\right] dy \\ &= \frac{-\left(b\left(3.f_y\left(h^2 - 4.{h_y}^2\right)(-1+\beta) + E\Phi\left(8{h_y}^3(-1+\beta) - h^3\beta\right)\right)\right)}{12} \end{aligned}$$

وبالتعويض، باستخدام Mathematica، عن قيمة h_y، تختزل النتيجة إلى علاقة العزم–الانحناء:

$$M = \frac{b\left(4{f_y}^3(-1+\beta) - 3E^2 f_y h^2\Phi^2(-1+\beta) + E^3h^3\Phi^3\beta\right)}{12E^2\Phi^2}$$

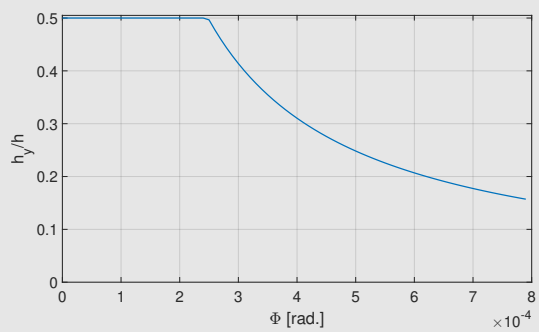
وهي في جوهرها تعبير عن العزم بدلالة الانحناء $\Phi > \Phi_y$.

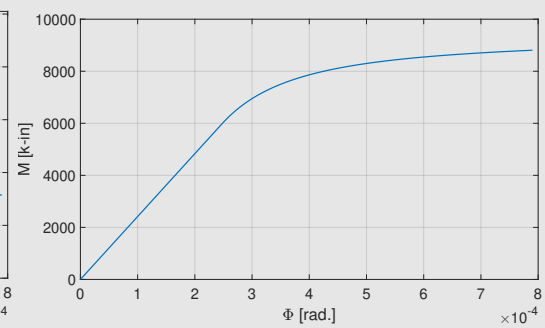
- باستخدام هذه العلاقة، يمكن تكرار الإجراء المستخدم في المثال السابق وتطبيق مبدأ القوة الافتراضية لتحديد الإزاحة.
- الحل العددي:

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Note % this is section a property, this is a Plot for phi-M and phi-h for the sections based on layers
% NOTES DERIVAL PART II TRAPEZOIDAL
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Plot for phi-M and phi-h for the sections based on layers
% this is section a property, this is a Note % code Metlab previoous the to appended
% NOTES DERIVAL PART II TRAPEZOIDAL %
% %
% ==========================================================================

clear P Delta phi M
epsiy=fy/E; phi_y=fy/(h2*E); delta=10^-5; phi(1)=0.;
M(1)=0; hy=0; h2=0; k=0;
for i=80:2
phi(i)=phi(i)+(1-i)*delta;
hy(i)=(fy/E)/(phi(i)*E);
if h2<hy(i)
M(i)=M(i)+E*I;
h2=hy(i);
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
else
...(beta + 1-)*2^(i)phi*2^h*fy*2^E*3 - (beta + 1-)*3^fy*4)*b)=(i)M
;(2^(i)phi*2^E*.12)/((beta*3^(i)phi*3^h*3^E +
;1+k=k
;(i)M=(k)nlM ;(i)phi=(k)nlphi
end
i)phi,(i)hy,i,"n\e10.4% phi_y e10.4% phi e10.4% hy f6.0% i")fprintf
;(phi_y,(
end
;(28,'FontSize',gca)set ;(figpos,'Position')figure
;(2,'linewidth',M,phi)plot
;grid;("[in-k] M")ylabel;("[.rad] Phi\")xlabel
;('none' ,'color' ,gca)set;(fs,'fontsize',gca)set
('none','BackgroundColor','pdf.phi-M',gca)exportgraphics
%
;(28,'FontSize',gca)set ;(figpos,'Position')figure
;(2,'linewidth',h/hy,phi)plot
;grid;('h/h_y')ylabel;("[.rad] Phi\")xlabel
;('none' ,'color' ,gca)set;(fs,'fontsize',gca)set;([0.505,.0])ylim
('none','BackgroundColor','pdf.phi-h',gca)exportgraphics
```

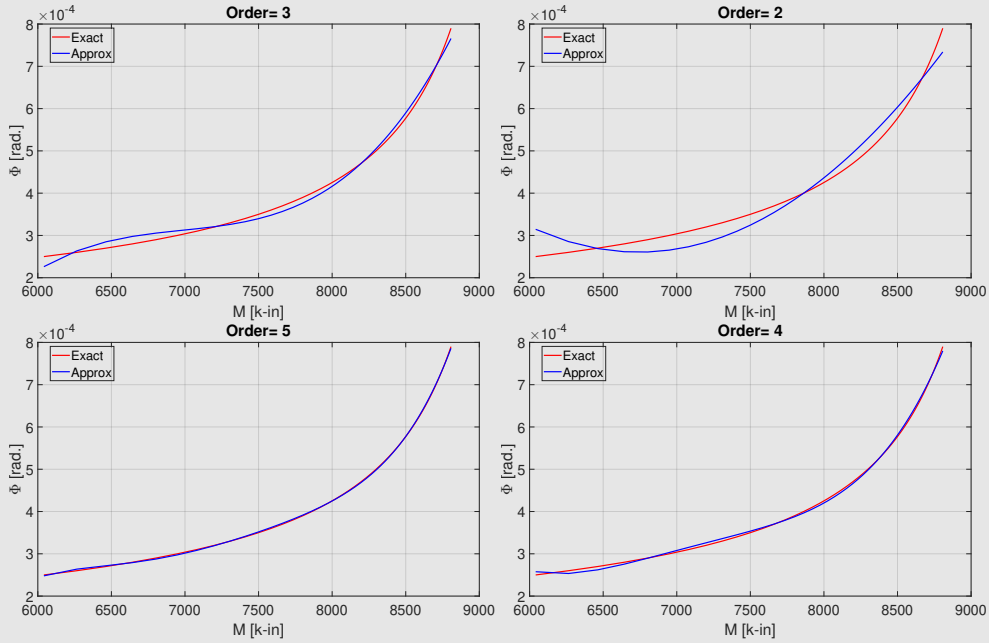





```
=====================================================%
curve the of portion nonlinear in polynomial Fit %
=================================================== %
2:5=i for
p clear
;(28,'FontSize',gca)set ;(figpos,'Position')figure
;(nlM,p)polyval=f ;(i,nlphi,nlM)polyfit=[p]
;['pdf.' (i)num2str '-fit-Poly']=fn
;(2,'linewidth','b',f,nlM,'r',nlphi,nlM)plot
;(i)num2str=asc
;('Best','Location','Approx','Exact')legend=lgnd
;('[.rad] Phi\')ylabel
([asc ,' =Order'])title;grid;('[in-k] M')xlabel
;('none' ,'color' ,gca)set;(fs,'fontsize',gca)set
;['pdf.' (i)num2str '-fit-Poly']=fn
('none','BackgroundColor',fn,gca)exportgraphics
end
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- لأننا سنحتاج إلى علاقة الانحناء–العزم ($\Phi = \Phi(M)$)، يُلائم متعدد حدود للجزء اللاخطي من منحنى العزم–الانحناء.



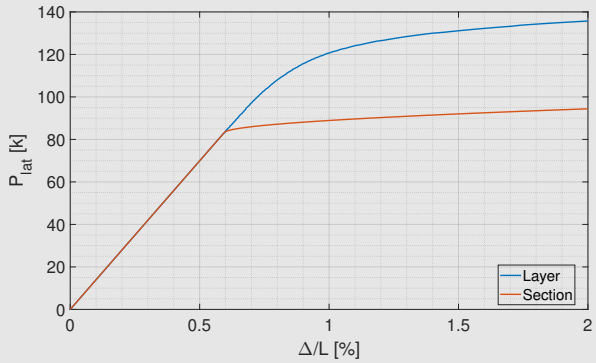
- باختيار متعدد الحدود من الرتبة 5، تكون المعاملات:

$$\Phi = 2.12\times10^{-20}M^5 - 7.58\times10^{-16}M^4 + 1.08\times10^{-11}M^3 - 7.71\times10^{-8}M^2 + 2.74\times10^{-4}M^2 - 3.88\times10^{-1}M$$

```
%
==================================================================
phi-M new the with but I Part in as deflection the Compute %
relations
%
==================================================================
;(L*h)/I*fy*2=P_y
;P_y*2=P_max
;400=np
;np/P_max=delta_P
;L*0.001=delta_L;I*E=EI
%
;0=(1)delta;.0=(1)P
np:2=i for
;((i)P*h)/I*fy*2=(i)x_y ;delta_P+(1-i)P=(i)P
L<(i)x_y if
;(EI*3)/3^L*(i)P=delta_1
range linear the in is Beam Entire %
;.0=delta_2
else
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
;(EI*3)/3^(i)x_y*(i)P=delta_1
;.0=delta_2
L:delta_L:(i)x_y=x for
;delta_L*x*phi+delta_2=delta_2 ;(M,p)polyval=phi ;x*(i)P=M
end
end
;delta_2+delta_1=(i)delta
end
%
;(28,'FontSize',gca)set ;(figpos,'Position')figure
;grid;(2,'linewidth',P0,L/Delta0*100,P,L/delta*100)plot
;minor grid;("[k] P_l_a_t")ylabel;("[%] L/Delta\")xlabel
('best','location','Section','Layer')legend=lgd;([0,2])xlim
','color',lgd)set;('none' ,'color' ,gca)set;(fs,'fontsize',gca)set
;('none
('none','BackgroundColor','pdf.Final-Pushover',gca)exportgraphics
```



18 سيُعرض تنفيذ عنصر محدود طبقي لاحقًا في §60.4.

55.3.2.2 مثال 55.3: طبقي؛ الخرسانة/ACI

نسعى إلى تقييم كفاية معادلة ACI للسعة الانحنائية النهائية، أي كتلة إجهاد Whitney في الشكل 35.7، بدراسة منحنى الإجهاد–الانفعال الآتي للخرسانة (Desayi, 1964) (وقد اقترح (Saenz, 1964) و(Mander,) (Kent **and** Park, 1971) (Priestley **and** Park, 1988) معادلات أخرى):

$$\sigma = \frac{2\frac{f_c'}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

حيث يقابل f_c' القيمة ε_{max}. نحدد نسبة الفولاذ المتوازنة الدقيقة لجائز R/C ذي "$b = 10$، و"$d = 23$، و$f_c' = 4,000$ psi، و$f_y = 60$ ksi، و$\varepsilon_{max} = 0.003$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العزم النهائي M_u

الإجهاد–الانفعال

$$\sigma = \frac{2\frac{4{,}000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times 10^6\varepsilon}{1+1.11\times 10^5\varepsilon^2}$$

التوافق نفترض السحق عند الفشل، ومن ثم يُعطى توزيع الانفعال بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$

بدمج هاتين المعادلتين:

$$\sigma = \frac{8{,}000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

تُعطى قوة الضغط الكلية بما يأتي:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8{,}000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8{,}000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy \\ &= 8{,}000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8{,}000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4{,}000bc\ln(2) = 2{,}773bc \end{aligned}$$

الاتزان يتطلب أن يكون $C=T$:

$$2{,}773bc = A_s f_y$$

من مخطط الانفعال:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003} \tag{55.1}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29{,}000}+.003} = 13.6\text{in} \tag{55.2}$$

بدمج المعادلة 55.3.2.2 مع المعادلة 55.2:

$$A_s = \frac{(2{,}773)(10)(13.6)}{60{,}000} = 6.28\text{in.}^2$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لتحديد العزم، يجب أولًا إيجاد مركز قوة الضغط مقاسًا من المحور المتعادل:

$$\overline{y} \overset{\text{def}}{=} \frac{\int y dA}{A} = \frac{b\int y \overbrace{\sigma dy}^{dC}}{C} = \frac{b\int_0^c \frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}}{2,773bc} dy = \frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy$$

$$= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2} dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right]$$

$$= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Bigg|_0^c$$

$$= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43\text{in}$$

ثم نحل لإيجاد العزم:

$$M = A_s f_y (d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6,713 \text{ k.in}$$

باستخدام مدونة ACI

بالرجوع إلى §35.4.1:

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55^2\text{in}$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57\text{in}$$

$$M = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765\text{k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61\text{in}$$

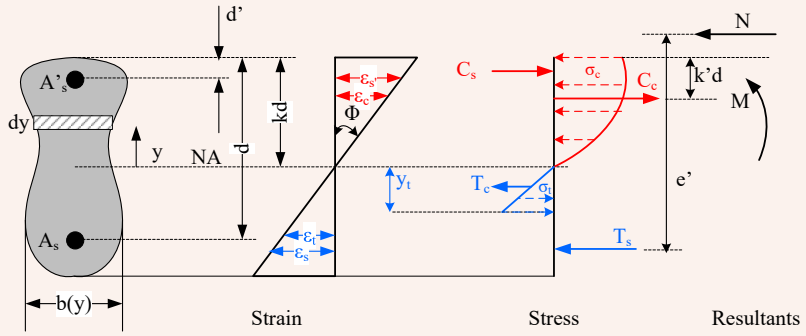
الخلاصة

		الدقيق	ACI
A_s	^{2}in	6.28	6.55
c	Kip	13.6	13.6
$\overline{y}'$	.in	5.18	5.78
M	K-in	6,713	6,765

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

55.4 تعميم علاقة العزم–الانحناء

19 نعمم في هذا القسم إجراء تحديد علاقة $M-\Phi$ بدراسة مقطع عرضي اعتباطي، الشكل 55.1. nxt ندرس أولًا نهجًا تحليليًا ثم نهجًا عدديًا.



شكل 55.1: مقطع عرضي اعتباطي لتحديد $M-\Phi$

20 نفترض أن القوة المحورية الخارجية N_{ext}، المطبقة بلا مركزية e'، ثابتة بالطبع.

21 يتطلب الاتزان الداخلي للقوى:

$$N_{ext}=N_{int};\quad M_{int}=N_{int}.e';$$

ونسعى إلى تحديد علاقة $M-\Phi$.

$$N_{int}=\underbrace{\int_0^{k.d}\sigma_c b_c dy}_{C_c}+\underbrace{A'_s f'_s}_{C_s}-\underbrace{\int_0^{y_t}\sigma_t b_t dy}_{T_c}-\underbrace{A_s f_s}_{Ts} \tag{55.3}$$

$$N_{int}e'+M=C_c(d-k'd)+C_s(d-d')-T_c(d-kd-\frac{2}{3}y_t) \tag{55.4}$$

حيث: $\sigma_c=\sigma_c(\varepsilon_c)$، و$b_c=b_c(y_c)$، و$\sigma_t=\sigma_t(\varepsilon_t)$، و$b_t=b_t(y_t)$.

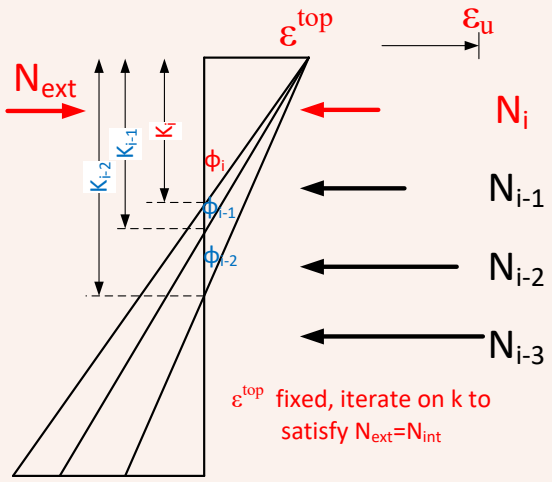
55.4.1 النهج التحليلي

22 للقيمة المعطاة والثابتة لـN_{ext}، نزيد ε_c^{top} تدريجيًا، أي Φ بصورة غير مباشرة، ونحل لإيجاد k وM_{int} المقابل، الشكل 55.2.

23 المسألة لاخطية، إذ توجد قيمة واحدة فقط لـk تضمن اتزان القوى المحورية.

24 تحذير: إذا كان $N_{ext}\neq 0$، فيجب إضافة الانفعال الابتدائي الناتج من القوة الثابتة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 55.2: إجراء تزايدي لتحديد $M - \Phi$ تحليليًا

1. زد الانفعال العلوي:

$$\varepsilon_{n+1}^{top} = \varepsilon_n^{top} + \Delta\varepsilon^{top} < \varepsilon_u$$

2. افترض k وحدد القوى:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon_c^{top}}{k.d} = \frac{\varepsilon_s'}{k.d - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd}\\ \varepsilon_s &= \Phi(d - k.d)\\ f_s &= E_s\varepsilon_s\end{aligned}$$

3. احسب N_{int} من المعادلة 55.3. إذا كان:

$$|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$$

صحح k وكرر، وإلا فاخرج.

4. حل لإيجاد M المقابل من المعادلة 55.4.
5. حدد الانحناء المقابل من:

$$\Phi_{i+1} = -\frac{\varepsilon_{i+1}^{top}}{k_{i+1}d}$$

والصلابة:

$$EI_{i+1} = \frac{dM}{d\Phi}$$

25 بعد الإكمال، ارسم $M - \Phi$ وحدد Φ_{cr} وΦ_y وΦ_u.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

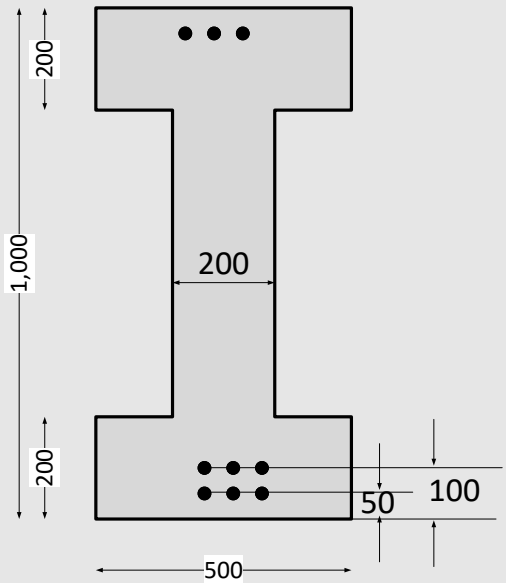
26 حدد :

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

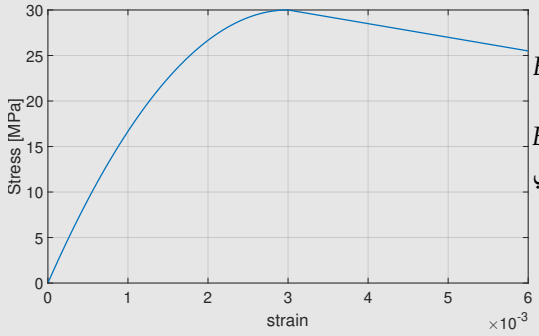
27 لاحظ أنه إذا كررنا التحليل لقيم مختلفة من N، أمكن توليد مخطط *التفاعل* للجائز–العمود، الموافق لـM_u.

55.4.1.1 مثال 55.4: العزم–الانحناء لمقطع I من الخرسانة المسلحة

نسعى إلى تطوير برنامج في Matlab لحساب استجابة العزم–الانحناء للمقطع العرضي من الخرسانة المسلحة ورسمها، وحساب مطيلية الانحناء.
نفترض أن الخرسانة لا تحمل أي إجهاد شد عندما يزيد انفعال الشد على انفعال التشقق ε_{cr}. وينبغي أن يتضمن الرسم الاستجابة للانحناء الموجب فقط، أي الشد على الوجه السفلي.
نفترض أن الحمل المحوري يقارب 10% من سعة الضغط المحورية لهذا المقطع العرضي، أي $N \simeq 0.1 A_g f'_c$.
نستخدم العلاقات التأسيسية الآتية: الخرسانة في الضغط، قطع مكافئ بسيط، f'_c = 30 MPa مع:



$$f_c = \begin{cases} f'_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & \text{من أجل } \varepsilon_c < \varepsilon_0 \\ f'_c \left[1 - 0.15 \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] & \text{من أجل } \varepsilon_c > \varepsilon_0 \end{cases}$$



حيث ε_0=0.003 و$\varepsilon_u = 2\varepsilon_0$.
الخرسانة في الشد: $f_{cr} = 0.6\sqrt{f'_c}$ (MPa)، وE_c = $5,500\sqrt{f'_c}$ (MPa)، و$f_c = E_c \varepsilon_c \leq f_{cr}$.
التسليح خطي مرن/لدن تمامًا مع E_s = 200,000 MPa وf_y = 400 MPa. كل قضيب US#8 (متري #25) ومساحته A_s=510 mm^2.

```
Van Dean & Brennise Jordan  %%                                          1
                                                close,clc;clear         2
(4)scrsz 2/(3)scrsz 2 2] = figpos;('ScreenSize',0)get = scrsz           3
                                                              ;[2/      |
                                                ;200=hf;500=bf;200=bw;1000=h  4
                                                                %       5
                                steel bottom to origin from distance % ;75=y_As  6
                                                steel tension % ;510*6=As  7
                                steel top to origin from distance % ;950=y_Aps  8
                                                steel compression % ;510*3=Aps  9
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
MPa % ;200000=Es
;400=fy
%
MPa % ;30=fp_c
MPa % ;(fp_c)sqrt*5500=Ec
;0.003=epsip_c
;epsip_c*2=epsi_u
MPa % ;(fp_c)sqrt*0.6=f_cr
==========================================================%
2^mm % ;(hf*2-h)*bw+2*bw*bf=Ac
force normal Applied % ;Ac*fp_c*0.1=Nappl
compression or tension in layers of number % ;100=nl
;0.000001=epsilon
*Bmin=Nmin;Nappl*Bmax=Nmax;epsilon+1.0=Bmax;epsilon-1.0=Bmin
;Nappl
strain the and vertical the between angle the ,phi bound We %
limiting by done is This .relationship strain-stress linear a on
an and sections plane Use .0.003=epsip_c strain failure the
this with associated phi failure the find to c of estimate
.strain failure
c of Estimate % ;h*0.1=c
;c/epsip_c=phi_fail
phi of limit upper of estimate % ;100/phi_fail=delta_phi
.N and ,phi ,curvature the determine to loop the Start %
of force and moment internal initial an Assign .phi Initialize
location axis neutral Limit .(respectively ,KN and m-KN) zero
the Begin .h ,depth column the within bounds to (iphi)yn
be only axis neutral the that specifying by loop forces internal
and Nmin established outside is N force internal while varied
.bounds Nmax
;1=iphi
plotted be to data of initialization % ;0=(1)M;0=(1)phiM
later iterations interupt to flag % ;0=EndRun
phi on loop % phi_fail:delta_phi:delta_phi=phi for
initialization %
counter % ;1+iphi=iphi
plotting for store % ;phi=(iphi)phiM
values initial % ;0=ymin
;h=ymax
middle the in axis neutral with start% ;2/(ymax+ymin)=(iphi)yn
convergence until Iterate%
counter% ;0=iter
;0=N
acceptable outside B while loop% Nmax < N  || Nmin > N while
range
;1+iter=iter
outside is force internal previous the If .loop while a Use %
with stresses internal the recalculate ,bounds force set the of
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
.limits the with converge force internal the until phi next the
in both ,steel the with begin calculations force internal These
,section the of bottom and top the and) compression and tension
a for calculated are stresses internal These .(respectively
is It .tension and compression both in steel of layer single
by bounded is stress steel the that ensure to note to important
.tension in when steel of stress yield the
forces Steel%
steel tension in stress% ;Es*(y_As-(iphi)yn)*(iphi)phiM =fs
fy < fs if
yielding is steel if check% ;fy=fs
end
steel bottom in force tensile% ;fs*As=F_TR
reinforcement tension by caused Moment% ;y_As*F_TR=MF_TR
compression in stress% ;Es*((iphi)yn-y_Aps)*(iphi)phiM=fps
steel
fy < fps if
yielding is steel if check % ;fy=fps
end
steel top in force Compressive % ;Aps*fps-=F_CR
reinforcement compression by caused Moment % ;y_Aps*F_CR=MF_CR
in both ,concrete the for forces internal the compute Next %
,section the of bottom and top the and) compression and tension
stresses internal its had which ,steel the Unlike .(respectively
and compression both in steel of layer single a for calculated
a for computed are stresses internal concrete the ,tension
the at began This .section the throughout layers of series
with (nl) layers of number a for continued and (0=yc) bottom
the that ensure to statement if an is Included .delta_yc height
captured are flange to web from section the of width in change
the compute to order In .(ic)yc of location the on depending
,used was script external an ,compression in stresses internal
used script This .(epsi_c ,epsi_u ,epsip_c ,fp_c)stress_strain
a as concrete in stress compressive for relationship the
in Tension .failure for accounting but ,strain of function
was this for stress the but ,similarly done is concrete
.relationship simple a using calculated
:layers the over Loop %
concrete in Compression %
;0=yc
;0=ic
;nl/((iphi)yn-h)=delta_yc
layers the over loop % nl:1=ic for
for array in store % ;delta_yc*(0.5-ic)+(iphi)yn=(ic)yc
plotting possible
width check % ;bw=b
hf-h < (ic)yc if
;bf=b
end
```

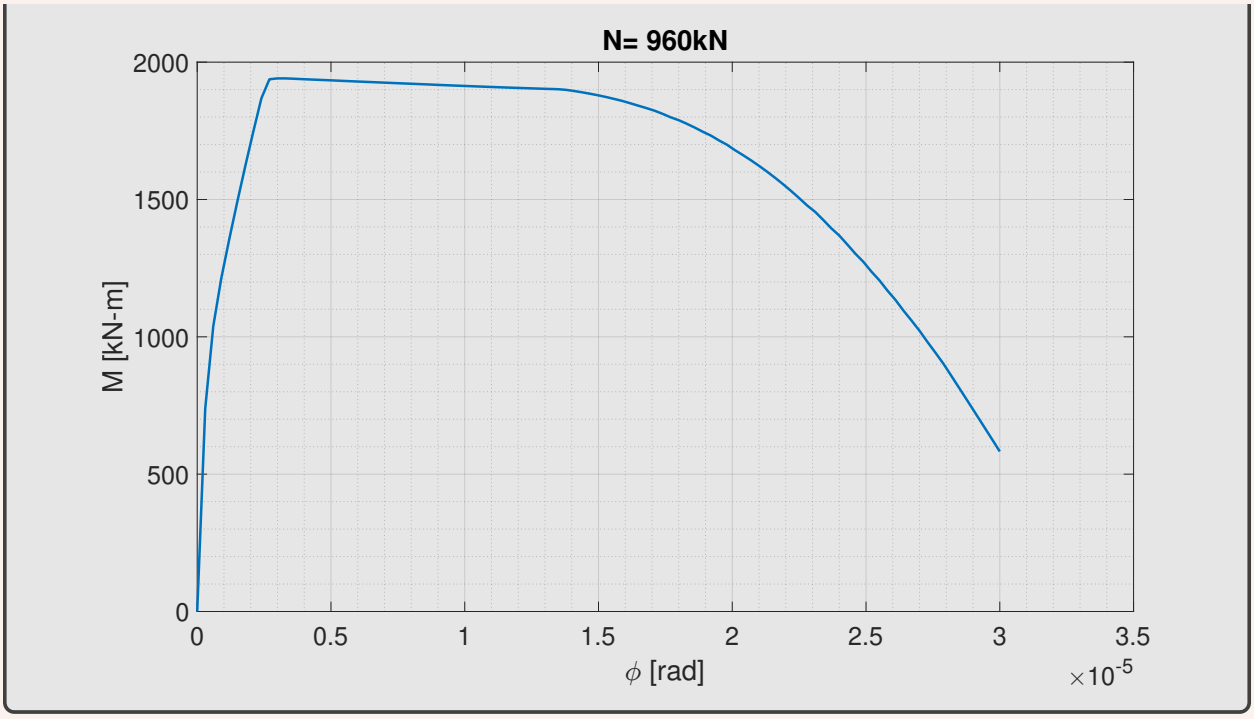

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    location layer at strain % ;(ic)yc*phi=epsi_c
;(epsi_c,epsi_u,epsip_c,fp_c)stress_strain*delta_yc*b-=(ic)F_CC
                                layer that at compression concrete%
    layer from contribution Moment % ;(ic)yc*(ic)F_CC=(ic)MF_CC
                                                                force
                                                              end
                                          concrete in Tension %
                                                          ;0=it
                                                          ;0=yt
                                        ;nl/((iphi)yn)=delta_yt
                                                   nl:1=it for
                                      ;delta_yt*(0.5-it)=(it)yt
                                        width for Check % ;bf=b
                                                hf < (it)yt if
                                                          ;bw=b
                                                              end
                                ;((it)yt-(iphi)yn)*phi=epsi_t
                                                ;epsi_t*Ec=ft
                                                 f_cr < ft if
                                                          ;0=ft
                                                              end
                                        ;ft*delta_yt*b=(it)F_TC
                                     ;(it)yt*(it)F_TC=(it)MF_TC
                                                              end
    in both) concrete and steel for forces internal the Using %
          through force total the compute ,(tension and compression
   be to tension and negative be to compression Assume .equilibrium
       the to compared is force internal for value N The .positive
     if phi increased an with recomputed is and ,earlier set bounds
          the then ,case the is this If .bounds those outside is it
    and ,increased be will phi ,accordingly shifted is axis neutral
      force internal the When .above steps the through recomputed N
   for moment total compute will we then ,set bounds the within are
            .equilibrium at curvature moment the plot and phi that
                            ve- be should force total Compute %
                               ;F_TR+(F_TC)sum+(F_CC)sum+F_CR=N
                                      positive it make % ;N-=N
                                                              %%%
                                             adjustments make %
                                                   Nmin > N if
                                                ;(iphi)yn=ymax
                                ;(ymin+(iphi)yn)*0.5=(iphi)yn
                                                              end
                                                  Nmax < N  if
                                                ;(iphi)yn=ymin
                                ;(ymax+(iphi)yn)*0.5=(iphi)yn
                                                              end
 top the to close to getting is (iphi)yn case in check sanity %
                                             h*0.01>(iphi)yn if
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

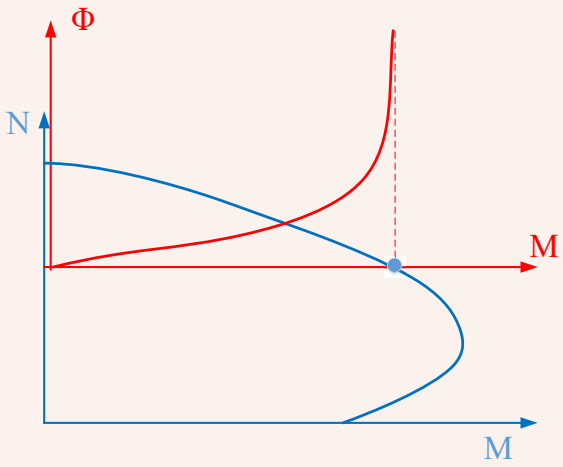
```
                                                                ;1=EndRun
                                                                    break
                                                                      end
                                                                      end
convert % ;1000000/(MF_TR+(MF_TC)sum+(MF_CC)sum+MF_CR)-=(iphi)M
                                                                m-kN to mm-N
                                                          1 == EndRun if
                                                                    break
                                                                      end
                                                                      end
                ;(28,'FontSize',gca)set ;(figpos,'Position')figure
                        grid ;minor grid;(2,'linewidth',M,phiM)plot
   )num2str ' =N']=titre;('[m-kN] M')ylabel;('[rad] Phi\')xlabel
                                                          ;['kN' ( 1000/Nappl
                                                            ;(titre)title
                ;('none' ,'color' ,gca)set;(20,'fontsize',gca)set
none','BackgroundColor','pdf.Phi-M-Concrete',gca)exportgraphics
                                                                        ('
                                                                      %
=================================================================

      (epsi_c ,epsi_u ,epsip_c ,fp_c)stress_strain =fc function
                                                  epsip_c > epsi_c if
                  ;(2^(epsip_c/epsi_c)- epsip_c/epsi_c*2)*fp_c=fc
                                                                  else
          ;(((epsip_c-epsi_u)/(epsip_c-epsi_c))*0.15-1)*fp_c=fc
                                                                  end
                                                                  end
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



55.4.1.2 مخطط التفاعل $M - N$

28 بتكرار الإجراء السابق لقيم مختلفة من N_{ext} يمكن اشتقاق مخطط *التفاعل* للجائز–العمود، الشكل 55.3. وهو رسم للحمل المحوري P_n الذي يمكن أن يحمله العمود مقابل سعته العزمية M_n[2].



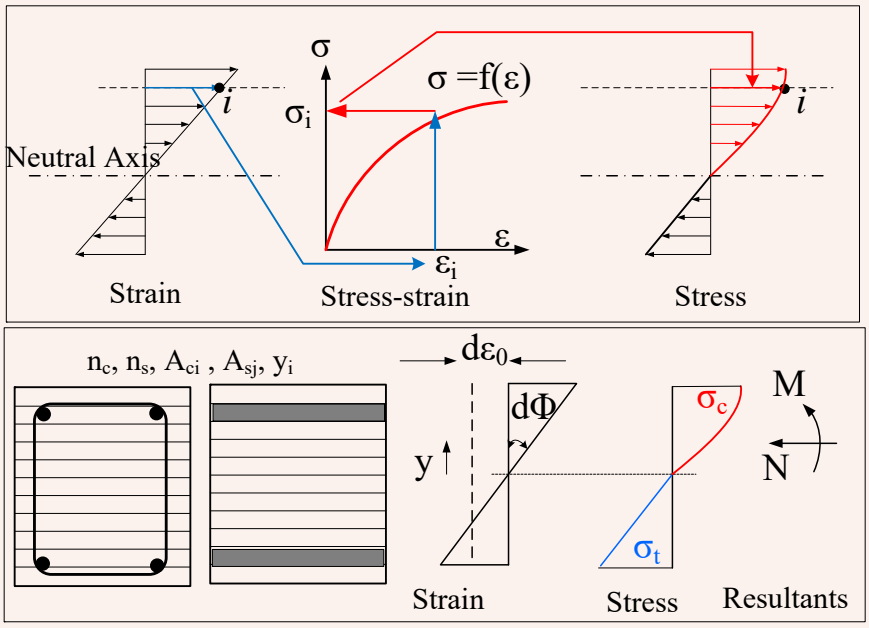
شكل 55.3: مخططا العزم–الانحناء والعزم–القوة المحورية (التفاعل)

[2] يشير الرمز السفلي n إلى القيمة الاسمية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

55.4.2 النهج العددي

29 يمكن تنفيذ النهج التحليلي الموصوف سابقًا عدديًا. ويلزم أولًا تقسيم المقطع العرضي إلى طبقات[3]، الشكل 55.4.



شكل 55.4: تقسيم مقطع عرضي إلى طبقات

ومن ثم نقسم مقطع الخرسانة إلى n_c طبقة، دليلها i، والفولاذ إلى n_s طبقة، دليلها j.[4] A_{ci} و$A_{sj} = A_s$ تقابلان مساحتي كل طبقة من الخرسانة والفولاذ، وy_i مسافة الليف i عن المحور المتعادل.

30 لقيمة معطاة وثابتة من N_{ext}، نزيد Φ تدريجيًا بمقدار $\Delta\Phi$ [5]، ونحل لإيجاد N_{int}. ومن ثم نسعى إلى تحديد M_{ext} لقيمة معطاة من Φ. وعند أي مقطع $\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y\Phi$، حيث ε_0 هو الانفعال المحوري الناتج من N_{ext}.

[3] أو ألياف إذا كان لدينا عزم ثنائي المحور أو لَيّ.
[4] سنميز لاحقًا بين الخرسانة المحصورة، داخل قفص الفولاذ، وغير المحصورة لأن خصائصهما مختلفة.
[5] لاحظ أننا زدنا في النهج التحليلي ε_c^{top} وحللنا لإيجاد k.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 لقيمة انفعال معطاة تكون القوة الداخلية الناتجة:

$$N_{int} = \int E d\varepsilon dA = \int E dA d\varepsilon_0 + \int E dA y d\Phi$$
$$= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}\right]}_{\text{الانفعال الابتدائي}} \varepsilon_0 + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}y_i\right]}_{\text{الانحناء } \Phi} \Phi \tag{55.5}$$

$$M = \int E d\varepsilon y dA \tag{55.6}$$

31 خوارزميًا، الشكل 55.5:

1. زد الانحناء $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi$ مع ثبات N_{ext}.
2. افترض موضع المحور المتعادل (k)، وحدّث مخطط الانفعال $\varepsilon(y_i) = d\varepsilon_0 + y_i d\Phi$، حيث $d\varepsilon_0 = (\Delta N - E_x \Delta\Phi)/E_a$.
3. إذا كان $\varepsilon \geq \varepsilon_u$، ويكون عادةً 0.003 للخرسانة، فاخرج.
4. حدد N_{int} من المعادلة 55.5:

$$\begin{aligned} N_{comp} &= \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj}A_{sj} \\ \sigma_{ci} &= \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}(\varepsilon_0 + y_i\Phi) \\ \sigma_{sj} &= \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}(\varepsilon_0 + y_j\Phi) \end{aligned}$$

5. إذا كان $|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$ فعدّل k وكرر، وإلا فاخرج.
6. احسب:

$$M_{int} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj}A_{sj}y_i$$

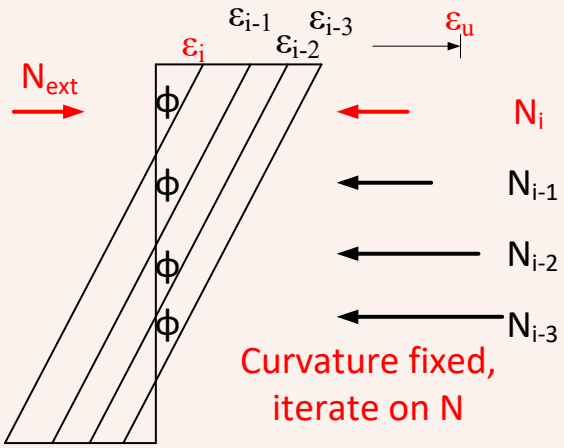
32 قد يكون ضمان التقارب دقيقًا؛ ولذلك نعرّف أولًا صندوق إحاطة كبيرًا لكل من y_{min} وy_{max}، ونحدّث في كل تكرار أحدهما حتى يصغر صندوقا الإحاطة نسبيًا. ومن ثم:

الخطوة 1 ابدأ بانحناء ومحور متعادل ابتدائيين، أي افترض: Φ، و$y_{max}(1), y_{min}(1), y_n(1)$.

ينبغي تقسيم جزأي المقطع الضغطي والشدي إلى طبقات متساوية العمق بطول L_e. ويجب الحذر من تخصيص طبقات قليلة جدًا في الجناحين مقارنة بالجسم.

أسماء المتغيرات المقترحة:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 55.5: نهج تزايدي لتحديد $M - \Phi$ عدديًا

- قوة ضغط الخرسانة F_{CC}
- قوة شد الخرسانة F_{CT}
- قوة شد الفولاذ F_{ST}
- قوة ضغط الفولاذ F_{SC}
- F_{CT}: فقط إذا لم تكن الطبقة متشققة.

الخطوة 2 حدد القوة العمودية

$$N_i = F_{cr} + F_{cc} - F_{ct} - F_{tr}$$

، وحدد الحدود B لكل من y_{min} وy_{max}، وتُحدَّث في نهاية كل تكرار:

$$\underbrace{N_{min}}_{B_{min}N_{appl}} < N < \underbrace{N_{max}}_{B_{max}N_{appl}}$$

يمكن أن يكون $[B_{min}, B_{max}] = [0.95, 1.05]$، وهو ما يقابل انحرافًا قدره $\pm 5\%$.

الخطوة 3 ابدأ التكرار.

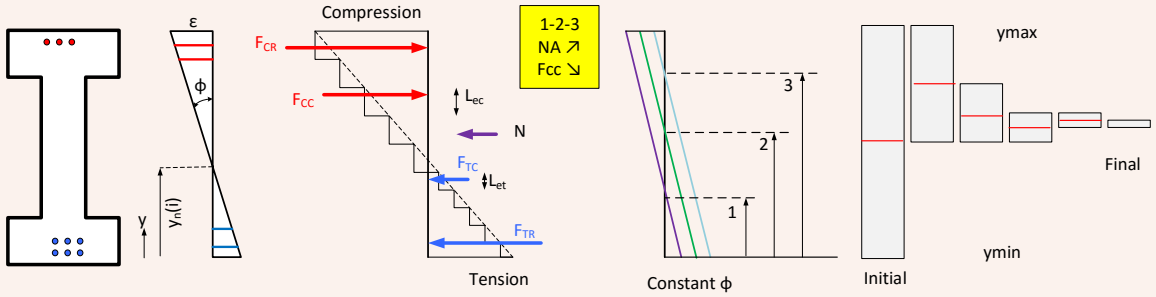
$$\texttt{While } N < N_{min} || N > N_{max}$$

$$\text{if} \begin{cases} \text{if } N < N_{min} \Rightarrow y_{max} \downarrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{min} \\ y_{max} = y_n(i) \end{cases} \\ \text{if } N > N_{max} \Rightarrow y_{min} \uparrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{max} \\ y_{min} = y_n(i) \end{cases} \end{cases} \tag{55.7}$$

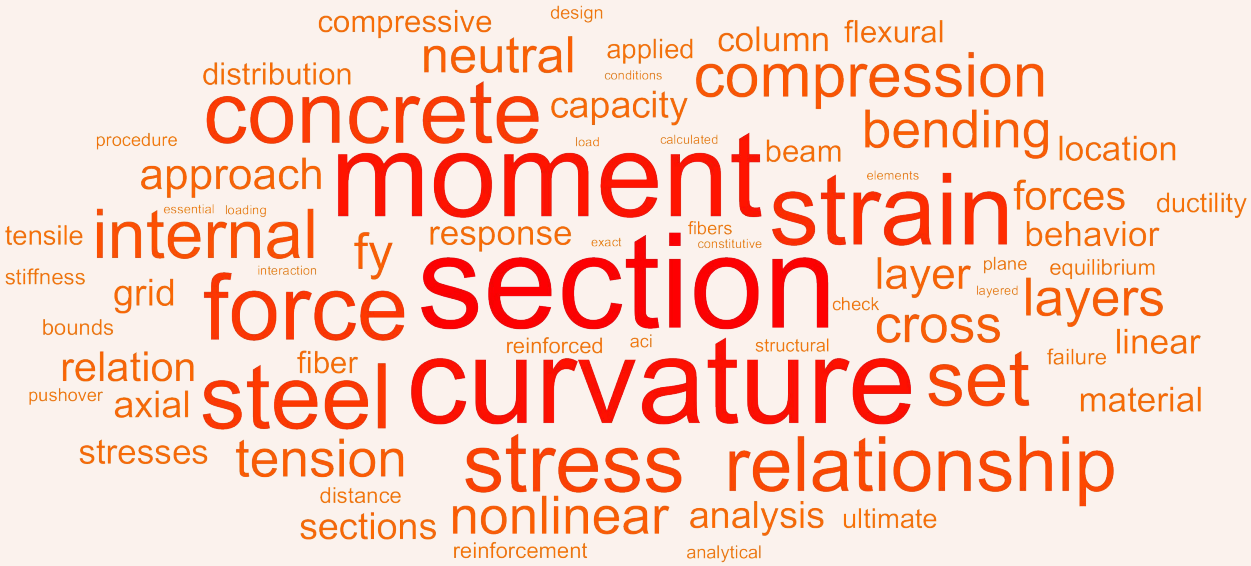
$$N_i \texttt{ update}$$

$$\texttt{Condition satisfied exit loop, compute moment } N_{min} < N_{appl} < N_{max} \texttt{ if}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



33 سيعاد تناول هذا النهج لاحقًا في صياغة صلابة العنصر في §60.4.



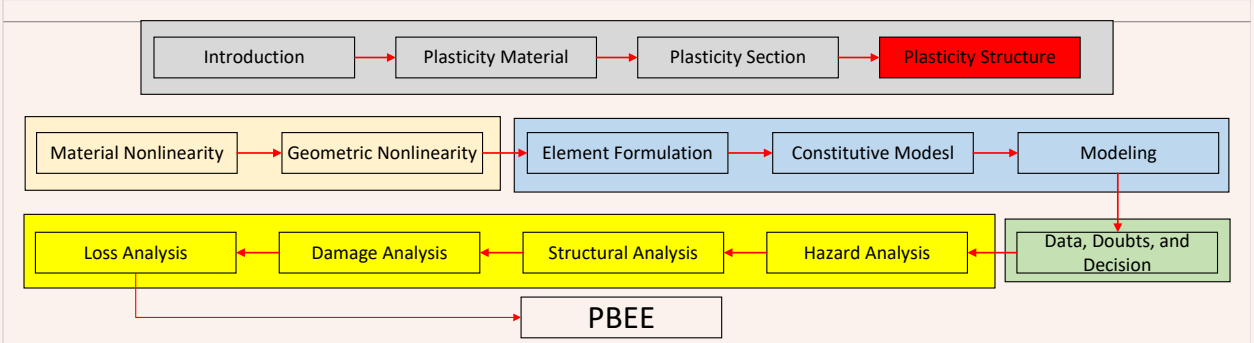
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56 اللدونة III؛ المنشأ: خطوط الخضوع

ملخص

في هذا الفصل الختامي من سلسلتنا عن اللدونة، نوسّع التركيز من السلوك اللدن الموضعي في العناصر الإنشائية إلى سلوك الأنظمة الإنشائية الكاملة تحت حالات الحمل النهائي. يبدأ الفصل بتحليل انهيار الجوائز، مع التركيز على تشكل المفاصل اللدنة التي تسمح للجوائز بالتحول إلى آليات عند بلوغ سعة الحمل. ثم نستكشف نظرية خطوط الخضوع للبلاطات، حيث تتطور أنماط الفشل على خطوط مميزة تحت التحميل. وتوفر نظرية خطوط الخضوع وسيلة فعالة للتنبؤ بآليات الانهيار، رغم الطبيعة المعقدة والموزعة لتحميل البلاطات. وأخيرًا نناقش أوجه التشابه بين نظرية خطوط الخضوع ونماذج اللدونة المركزة وتحليل الدفع. وتوضح هذه التشابهات المبادئ المشتركة التي تقوم عليها هذه الطرائق، إذ تقرّب جميعها سلوك الانهيار بتركيز الاستجابات غير المرنة في مناطق محددة، وتوفر بذلك أدوات عملية لتقييم السلامة الإنشائية عند الحالة الحدية.

56.1 مقدمة 1722
56.2 العناصر الخطية (الجوائز، الإطارات) 1723
56.2.1 النهج الحركي؛ الحد الأعلى 1723
56.2.2 السكونيات؛ الحد الأدنى 1729
56.3 العناصر المستوية (البلاطات) 1738
56.3.1 السكونيات: الحد الأدنى 1739
56.3.2 الحركيات: الحد الأعلى 1740
56.4 تحليل الدفع 1743
56.5 أوجه التشابه بين تحليل الحد الأدنى و 1744
56.5.1 تحليل الدفع 1744
56.5.2 اللدونة المركزة 1747
57.1 مخطط مقترح بواسطة ChatGPT 1750
57.1.1 الدوافع والأسس الفيزيائية (~1.5 صفحة) 1750
57.2 الإطار الديناميكي الحراري (~2 صفحتان) 1750
57.3 الضرر القياسي متساوي الخواص: نموذج مازار (~4 صفحات) 1750
57.4 عدم التناظر بين الشد والضغط والتأثير أحادي الجانب (~2 صفحتان) 1750
57.5 اقتران الضرر واللدونة (~2 صفحتان) . . . 1751
57.6 التنظيم والموضوعية بالنسبة إلى الشبكة (~3 صفحات) 1751
57.7 التطبيق على عناصر الجوائز والأعمدة (~3 صفحات) 1751
57.8 تحديد المعلمات ودليل عملي (~1.5 صفحة) 1751
57.9 ملاحظات ببليوغرافية وقراءات إضافية (~0.5 صفحة) 1751



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.1 مقدمة

1 بعد دراسة دور اللدونة على المستوى الموضعي، أولًا عند نقطة ثم في مقطع، نعمم التحليل الآن على منشآت كاملة. ويستكشف هذا الفصل دور اللدونة في التحليل الإنشائي، مع التركيز خصوصًا على كيفية بلوغ المنشآت سعتها النهائية لحمل الأحمال.

2 أُجري تحليلنا الإنشائي حتى الآن بنهج خطي مرن، أتاح تحديد علاقات الحمل–الإزاحة. ويكفي هذا التحليل غالبًا عندما يكون الهدف فهم السلوك العام للمنشأ تحت أحمال الخدمة، حيث تبقى الانحرافات ضمن حدود مقبولة. إلا أن النهج المرن البحت لا يلتقط سلوك المنشأ كاملًا مع اقترابه من الفشل، ولا سيما في الأنظمة المطيلة التي تؤدي فيها اللدونة دورًا مهمًا.

3 ينتقل تركيزنا في هذا الفصل إلى تحديد حمل انهيار المنشأ بدلًا من علاقة الحمل–الإزاحة حتى الفشل. وعلى غرار انبعاج الأعمدة، هدفنا هنا تقييم المقاومة النهائية أو آلية فشل المنشأ من دون اشتقاق استجابة الحمل–الإزاحة التزايدية حتى هذه النقطة. ويقابل هذا التحليل النوع 6 في الشكل 53.5.

4 الفروق بين الحلين المرن واللدن كبيرة، ونوجزها فيما يأتي:

الحل المرن يحقق المعايير الآتية:

1. **الاتزان**: يكون المنشأ في حالة اتزان تحت الأحمال المطبقة.
2. **الشرط المرن**: تبقى جميع العزوم الداخلية ضمن المجال المرن، $|M| < M_{\text{yld}}$.
3. **التوافق (الاستمرارية)**: يُحافظ على توافق التشوه في المنشأ كله، بما يضمن حقول إزاحة مستمرة.

الحل اللدن يحقق المعايير الآتية:

1. **الاتزان**: يحافظ المنشأ على الاتزان تحت الأحمال المطبقة.
2. **شرط الخضوع**: تبلغ العزوم سعة العزم اللدن، $|M| \leq M_{\text{pl}}$، بما يشير إلى بدء السلوك اللدن.
3. **الآلية**: يمكن أن تحدث تشوهات إضافية من دون زيادة أخرى في الحمل، بما يعني أن المنشأ أصبح آلية.
4. **مبدأ العمل–الطاقة عند المفاصل اللدنة**:

$$\text{العمل الخارجي } (W_e) = \text{طاقة التبديد } (D \geq 0) + \text{طاقة الانفعال } (U = 0).$$

افتراضات التحليل اللدن

1. تزداد جميع الأحمال الخارجية تناسبيًا.
2. يكون سلوك المادة مرنًا–لدنًا، بما يسمح بتطور المفاصل اللدنة.
3. تكون التشوهات صغيرة، ولذلك لا تُراعى اللاخطية الهندسية.

5 يحدث الفشل في الجوائز والإطارات عادةً بعد تشكل عدد كافٍ من *المفاصل اللدنة*، فتحوّل المنشأ إلى *آلية*،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تؤدي إلى انهيار جزئي أو كلي. ولأغراض التحليل، نفترض عادةً استجابة مادية مرنة–لدنة تمامًا، يبلغ فيها العزم الداخلي M_p عند المفصل اللدن من دون مقاومة إضافية للدوران اللاحق.

6 يمكن تحديد الأحمال النهائية، أو *الحدية*، للمنشأ بنهجين مختلفين، كما يلخص الجدول 56.1:

الحد الأعلى؛ النهج الحركي: يقوم هذا النهج على افتراض آلية انهيار ممكنة وحساب الحمل المقابل. ويكون الحمل المشتق دائمًا أكبر من حمل الانهيار الحقيقي أو مساويًا له. ونفترض التشكل المتزامن لجميع المفاصل اللدنة اللازمة لتكوين آلية، من دون النظر في التسلسل الفعلي لتشكل المفاصل. ويضمن هذا النهج الاتزان ويحقق شروط اللدونة، لكنه قد لا يتنبأ بدقة بآلية الانهيار الفعلية.

الحد الأدنى؛ النهج السكوني: نفترض هنا توزيع عزوم في اتزان مع الأحمال المطبقة، مع ضمان ألا يتجاوز أي عزم داخلي M_p. ويكون تقدير الحمل دائمًا أصغر من الحمل النهائي الحقيقي أو مساويًا له. وتحاول الطريقة محاكاة تسلسل تشكل المفاصل، وتوفر تقديرًا محافظًا للحمل بضمان عدم تجاوز اللدونة، وإن كانت قد لا تحقق شرط الآلية بالكامل.

جدول 56.1: مقارنة النهجين الحركي والسكوني لتحليل الحمل الحدي

الطريقة	الحد	تفترض	تحقق	قد تخالف
الحركية	الأعلى	الآلية	اللدونة	تشكل الآلية
السكونية	الأدنى	الاتزان	الآلية	اللدونة

ندرس كل نهج بالتفصيل، ونحلل مزاياه وقيوده.

56.2 العناصر الخطية (الجوائز، الإطارات)

56.2.1 النهج الحركي؛ الحد الأعلى

تعريف 56.1: مبرهنة الحد الأعلى

ينهار المنشأ إذا وُجد حقل تشوه مقبول حركيًا يزيد فيه معدل العمل الذي تؤديه القوى الخارجية على معدل تبديد الطاقة الداخلية.

7 توفر مبرهنة الحد الأعلى، التي تسمى أحيانًا مبرهنة *الحمل غير الآمن*، طريقة لتقدير حمل انهيار المنشأ بتحليل آليات التشوه المحتملة. وتنص المبرهنة على أن أي حمل يمكن أن يسبب الانهيار وفق آلية تشوه افتراضية مقبولة حركيًا يمثل حدًا أعلى لحمل الانهيار الحقيقي. والنتيجة أن الانهيار حتمي إذا تجاوز هذا الحمل سعة المنشأ.

8 ترتبط هذه المبرهنة ارتباطًا وثيقًا بـ*مبدأ العمل الافتراضي* §47.3.3، المعروف أيضًا بمبدأ الإزاحات

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الافتراضية. ففي كلا المبدأين تُقيّم شروط الاتزان والانهيار بمقارنة معدلات العمل الخارجية والداخلية تحت تشوه أو آلية انهيار مفترضة.

9 ينص مبدأ العمل الافتراضي على أن العمل الافتراضي الخارجي الذي تؤديه الأحمال في أثناء إزاحة افتراضية يجب أن يساوي، عند الاتزان، العمل الافتراضي الداخلي الذي تؤديه قوى مقاومة المنشأ. ويمكن هنا تحديد حمل الانهيار عندما يختل هذا التوازن بطريقة تولد آلية.

تعريف الحقل المقبول حركيًا

10 يمثل *الحقل المقبول حركيًا* حالة تشوه افتراضية تتفق مع قيود المنشأ وآلية الانهيار المفترضة. ولكي يُعد حقل التشوه مقبولًا حركيًا:

- يجب أن يكون العمل الخارجي W_e، الذي تؤديه القوى المطبقة $\mathbf{F}$ على التشوه $_F$، موجبًا، أي إن المنشأ يتشوه في اتجاه الأحمال المطبقة.
- يجب أن يكون العمل الداخلي W_i، الذي تؤديه العزوم اللدنة $\mathbf{M}_p$ على الدورانات $\boldsymbol{\theta}$ عند مواقع المفاصل اللدنة، موجبًا أيضًا، بما يعني أن المقاومات الداخلية تؤدي عملًا استجابةً للحمل الخارجي.

تحديد الانهيار باستخدام تكافؤ العمل

11 لتقييم ما إذا كان حمل معين يسبب الانهيار، نساوي العمل الخارجي الذي يؤديه الحمل المطبق بالعمل الداخلي المبدد في المفاصل اللدنة. ويقوم النهج على افتراض آلية انهيار محددة وحساب العمل المرتبط بها. ولآلية محتملة i، يتطلب اتزان العمل الخارجي والداخلي عند نقطة الانهيار:

$$U_i = \lambda_i W_i$$

حيث: W_i العمل الخارجي الذي يؤديه الحمل المطبق في أثناء إزاحة افتراضية في الآلية المفترضة؛ وλ_i مضاعف حركي يصعّد الأحمال المطبقة لبلوغ حالة الانهيار للآلية i؛ وU_i الطاقة الداخلية الكلية المبددة في المفاصل اللدنة للآلية.

12 يمكن التعبير عن هذه الطاقة الداخلية كما يأتي:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} M_{p_j} \theta_{ij}$$

حيث: M_{p_j} سعة العزم اللدن عند موقع المفصل اللدن j^{th}؛ وθ_{ij} دوران المفصل عند الموقع j^{th} للآلية i؛ وn العدد الكلي للمفاصل اللدنة المحتملة أو المقاطع الحرجة في المنشأ.

شرح عملية تكافؤ العمل

حساب العمل الخارجي: يعتمد العمل الخارجي W_i على الإزاحة التي تسببها الأحمال المطبقة. ويسهم كل حمل F_k مطبق على المنشأ في العمل بحسب إزاحته Δ_{F_k} في اتجاه الحمل. ويعطي جمع إسهامات جميع الأحمال العمل الخارجي الكلي:

$$W_i = \sum_{k} F_k \Delta_{F_k}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث F_k الحمل المطبق k^{th}، وΔ_{F_k} إزاحته المقابلة في آلية الانهيار المفترضة.

حساب الطاقة الداخلية المبددة: العمل الداخلي U_i هو الطاقة التي تبددها المفاصل اللدنة عند دورانها. ويسهم كل دوران مفصل θ_{ij} تحت العزم اللدن M_{p_j} في هذه الطاقة الداخلية. ويحدد مجموع إسهامات الطاقة من كل مفصل الطاقة المبددة الكلية للآلية المفترضة، كما في المعادلة أعلاه.

13 بمساواة U_i مع $\lambda_i W_i$، نحل لإيجاد λ_i، أي مضاعف الحمل اللازم لإيصال المنشأ إلى الانهيار وفق الآلية المفترضة. وإذا دُرست آليات متعددة، تعطي أصغر قيمة لـλ_i الحد الأعلى الأكثر حرجًا لحمل الانهيار.

افتراضات الطريقة الحركية (الحد الأعلى)

14 تعتمد طريقة الحد الأعلى على عدة افتراضات مبسطة لجعل تحليل الانهيار قابلًا للمعالجة:

- **سلوك مرن–لدن تمامًا**: يُفترض أن تسلك الأعضاء الإنشائية سلوكًا مرنًا–لدنًا تمامًا. ويعني ذلك أنها تستطيع تحمل تشوهات لدنة بعد بدء الخضوع من دون مقاومة إضافية، أي لا يوجد تصلد انفعالي بعد نقطة الخضوع.
- **لدونة موضعية عند المفاصل**: يُفترض أن يحدث التشوه اللدن فقط في مواقع محددة تسمى المفاصل اللدنة. وتتكون هذه المفاصل حيث يبلغ العزم سعة العزم اللدن M_p. وبين المفاصل يُفترض بقاء الأعضاء مرنة، ما يبسّط التحليل بتركيزه على مناطق لدنة منفصلة.
- **العزم اللدن يحكم الانهيار**: يمثل العزم اللدن M_p عند كل مقطع عرضي أقصى عزم يستطيع المقطع مقاومته. وعند بلوغه يُعد المقطع خاضعًا بالكامل، ولا تبقى مقاومة عزم إضافية. ومن ثم تحكم سعات العزم اللدن هذه حمل انهيار المنشأ.

عدد الآليات المستقلة

15 يتأثر عدد آليات الانهيار المستقلة الممكنة n في المنشأ بمواقع المفاصل اللدنة المحتملة والتكرار الإنشائي. ويُحدد n عمومًا بالعلاقة:

$$n = h - r$$

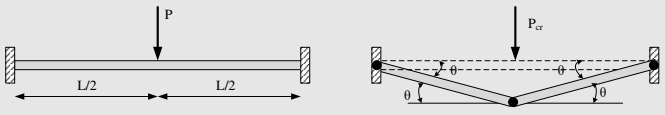
حيث h عدد مواقع المفاصل اللدنة المحتملة في المنشأ، وr درجة التكرار الإنشائي، أي عدد القيود الزائدة على التحديد السكوني.

16 تساعد هذه العلاقة على فهم أنماط الانهيار المحتملة. فالمنشآت الأعلى تكرارًا، ذات r الأكبر، تستطيع تطوير آليات انهيار مستقلة أكثر، لما لها من قدرة أكبر على إعادة توزيع الأحمال.

17 بحساب n، يمكن تحديد العدد الكلي لتكوينات الانهيار الممكنة، وكل منها يقابل آلية محتملة مختلفة. وتوفر دراسة هذه الآليات فهمًا لكيفية الانهيار وموضعه المرجح تحت الأحمال المطبقة، وبذلك تسمح بتقييم شامل للسلامة الإنشائية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.2.1.1 مثال 56.1: جائز مثبت؛ حمل مركزي



- $n = 3 - 2 = 1$
- العمل الداخلي:

$$M_p\theta + M_p\theta + 2M_p\theta = 4M_p\theta$$

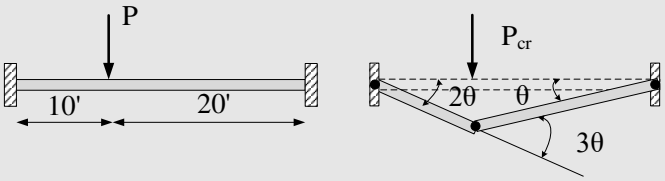
- العمل الخارجي الذي يؤديه الحمل النقطي:

$$P_{cr}\theta L/2$$

- بمساواة الاثنين نحصل على:

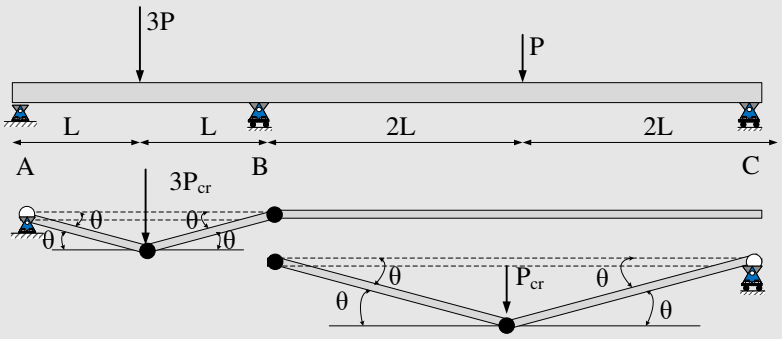
$$P_{cr} = 8M_p/L.$$

56.2.1.2 مثال 56.2: جائز مثبت؛ حمل لامركزي



$$W_{int} = W_{ext}$$
$$M_p(\theta + 2\theta + 3\theta) = P_{cr}\Delta$$
$$6M_p\theta = P_{cr}\theta(20)$$
$$\Rightarrow P_{cr} = 6\frac{M_P}{20}$$
$$P_{cr}{=}0.3M_p$$

56.2.1.3 مثال 56.3: جائز مستمر



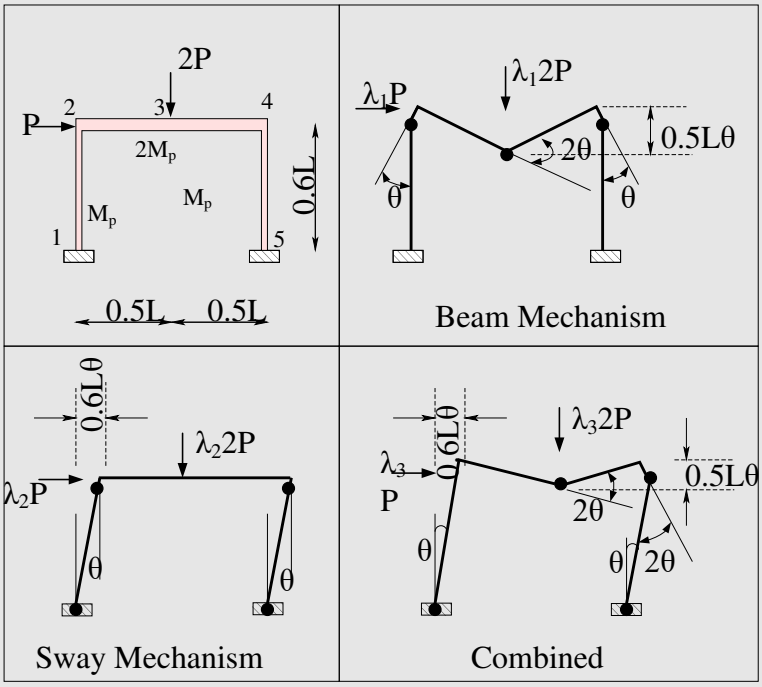
بمساواة العمل الخارجي الذي تؤديه القوى الرأسية بالعمل الداخلي:

- الفتحة AB: $3P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ أو $P_{cr} = \frac{M_p}{L}$.
- الفتحة BC: $2P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ أو $P_{cr} = \frac{3}{2}\frac{M_p}{L}$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.2.1.4 مثال 56.4: إطار متعامد

- $n = 5 - 3 = 2$ نمطان مستقلان.
- العدد الكلي للآليات الممكنة ثلاثة، إحداها تعتمد على الآليتين الأخريين.
- للتحقق من أن λ هو بالفعل الحد الأدنى، يمكن رسم مخطط العزم المقابل والتحقق من عدم تجاوز العزم M_p في أي مقطع.



$$M_p(\theta+\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_1(2P)(0.5L\theta) \quad \text{آلية الجائز} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 6\frac{M_p}{PL}$$

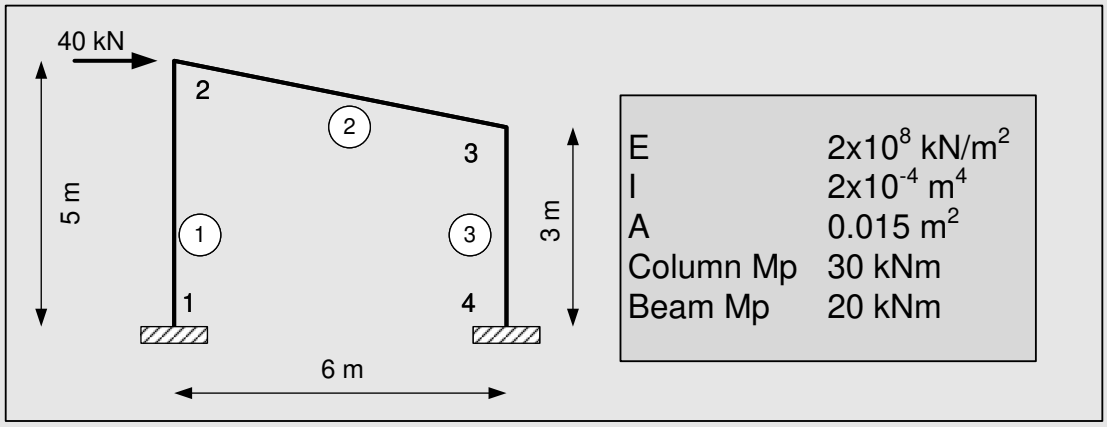
$$M_p(\theta+\theta+\theta+\theta)=\lambda_2(P)(0.6L\theta) \quad \text{آلية التأرجح} \quad \Rightarrow \lambda_2 = 6.67\frac{M_p}{PL}$$

$$M_p(\theta+\theta+2\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_3\left(P(0.6L\theta)+2P(0.5L\theta)\right) \quad \text{الآلية المركبة} \quad \Rightarrow \lambda_3 = 5\frac{M_p}{PL}$$

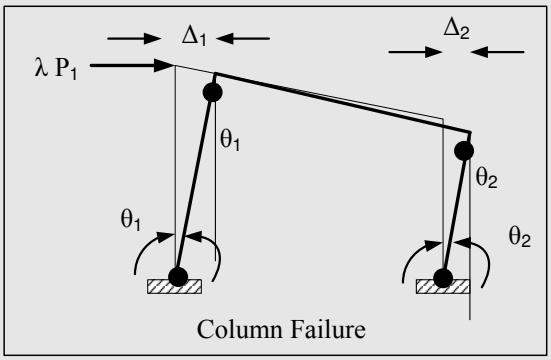
56.2.1.5 مثال 56.5: إطار مائل

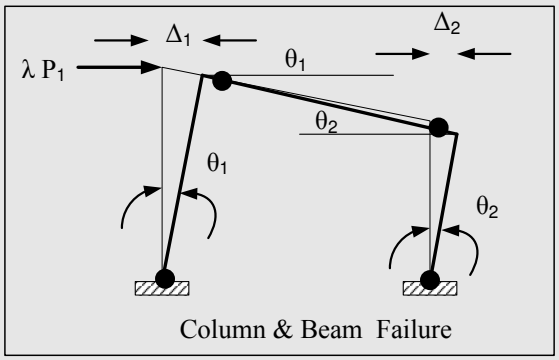
نسعى إلى تحديد حمل الانهيار للإطار الآتي باستخدام نهج الحد الأعلى الحركي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



نحدد أولًا مواقع المفاصل اللدنة المحتملة:





ثم ندرس كل نمط فشل على حدة:

فشل الأعمدة

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_1 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_2) \\
\lambda_1 &= \frac{16}{15}\frac{M_p^c}{P} = \frac{16}{15}\frac{30}{40} = 0.8
\end{aligned}$$

الفشل المركب

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_2 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1+\theta_2) + M_p^b(\theta_1+\theta_2) \\
&= \frac{8}{3}M_p^c\theta_1 + \frac{8}{3}M_p^b\theta_1 \\
\lambda_2(40)(5) &= \frac{8}{3}(30) + \frac{8}{3}(20) \\
\lambda_2 &= \frac{2}{3} = 0.67
\end{aligned}$$

ومن ثم تحكم الحالة الثانية، و$\mathrm{kN} P_{crit} = (0.67)(40) = 26.8$.

56.2.2 السكونيات؛ الحد الأدنى

تعريف 56.2: مبرهنة الحد الأدنى

لا ينهار المنشأ، أو يكون عند نقطة الانهيار، إذا أمكن إنشاء توزيع متزن للقوى الداخلية يوازن الأحمال المطبقة ويبقى عند حد الخضوع أو دونه في المنشأ كله.

18 توفر مبرهنة الحد الأدنى، المعروفة أيضًا بـ*مبرهنة الحمل السكوني أو الآمن*، طريقة لتقدير حمل انهيار المنشأ بضمان اتزان القوى والعزوم الداخلية مع الأحمال الخارجية من دون تجاوز سعة الخضوع.

19 تضمن المبرهنة تقديرًا آمنًا ومحافظًا لسعة حمل الأحمال، لأنها لا تنظر إلا في توزيعات تبقى ضمن المجال المرن–اللدن، ولا تفترض تشكل آليات إضافية تتجاوز ما هو ضروري تمامًا.

20 تماثل هذه المبرهنة *مبدأ العمل الافتراضي المتمم*، §47.3.1، حيث يُنشأ الاتزان استنادًا إلى القوى الداخلية التي توازن الأحمال الخارجية مع احترام شروط الخضوع. وفي النهج السكوني نركز على إيجاد توزيع قوى ممكن في حالة اتزان يتجنب أي إجهاد زائد للمادة، وبذلك يوفر حدًا أدنى لحمل الانهيار.

افتراضات نهج الحد الأدنى

21 عند تطبيق طريقة الحد الأدنى، تكون الافتراضات الآتية أساسية:

- **اتزان القوى الداخلية والخارجية**: يجب أن تتزن الأحمال المطبقة مع القوى والعزوم الداخلية عند جميع نقاط المنشأ. ويتطلب ذلك موازنة القوى والعزوم من دون أي قوة أو عزم صافٍ غير متزن في أي جزء من المنشأ.
- **تشكّل عدد كافٍ من المفاصل اللدنة**: ينبغي أن تسمح القوى والعزوم الداخلية بتشكل عدد كافٍ من

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المفاصل اللدنة، بما يمكّن من تكوين آلية انهيار. وتحدث آلية الانهيار عندما يبلغ المنشأ تكوينًا لا يستطيع عنده مقاومة حمل إضافي، وغالبًا ما يميزه تطور مفاصل في مواقع محددة.

22 يقوم الحمل المحسوب في هذا النهج على توزيع مفترض للعزوم:

- يحافظ على الاتزان مع التحميل المطبق.
- يضمن ألا يتجاوز أي عزم داخلي سعة العزم اللدن، M_p.

23 توفر الطريقة بطبيعتها تقديرًا محافظًا، إذ تركز فقط على توزيعات العزم التي تمنع الخضوع بعد حد الخضوع المحدد، فتنتج حملًا أقل من حمل الانهيار الفعلي أو مساويًا له.

طريقة الحل السكونية

24 تتكون الطريقة السكونية، أو طريقة الحد الأدنى، لتحديد الحمل النهائي من الخطوات التفصيلية الآتية:

1. **اختيار العزوم الزائدة:** حدد العزوم الزائدة داخل المنشأ التي تسهم في الاتزان العام. وفي المنشأ غير المحدد سكونيًا، تمثل هذه العزوم العزوم الداخلية الإضافية الواجب حلها للمحافظة على الاتزان بسبب القيود الزائدة على التحديد السكوني. وتشمل عملية الاختيار تحديد المواقع التي يمكن أن تتغير فيها العزوم من دون الإخلال بالاتزان العام.
2. **إنشاء مخطط العزم المحدد سكونيًا:** بسّط المنشأ أولًا إلى تكوين محدد سكونيًا بإزالة زوائده مفهوميًا. وارسم مخطط العزم لهذه النسخة المحددة من المنشأ تحت التحميل المطبق. ويمثل هذا المخطط الأساسي توزيع العزم الذي يوجد لو لم تكن للمنشأ قيود أو زوائد إضافية.
3. **تراكب العزوم الزائدة على مخطط العزم المحدد:** بعد إنشاء مخطط العزم المحدد، تكون الخطوة التالية إضافة العزوم الزائدة إليه. وتُضاف هذه العزوم إلى توزيع العزم الأساسي للحصول على توزيع العزم الفعلي في المنشأ المقيد بالكامل، أي غير المحدد. ومن خلال هذا التراكب يُستخرج توزيع العزم المركب أو الكلي الذي يمثل العزوم الداخلية الحقيقية تحت الحمل المطبق.
4. **ضبط العزوم القصوى عند سعة العزم اللدن M_p:** عدّل العزوم الزائدة لضمان ألا تتجاوز العزوم القصوى في مخطط العزم الكلي سعة العزم اللدن M_p في أي مقطع من المنشأ. وهذه الخطوة حاسمة لأنها تحترم شرط الخضوع بضمان عدم زيادة إجهاد أي مقطع. ويعمل ضبط العزوم القصوى عند M_p حدًا يميز الانتقال بين السلوك المرن واللدن، ويحدد المقاطع التي بلغت سعتها الكاملة لحمل الأحمال.
5. **التحقق من تشكل آلية:** تأكد من أن عدد المفاصل اللدنة المتشكلة في المواقع التي تبلغ فيها العزوم M_p كافٍ لتكوين آلية. وتحدث الآلية عندما يستطيع المنشأ تحمل تشوهات إضافية من دون زيادة في الحمل، فيصبح غير مستقر فعليًا. ويشير تشكل الآلية إلى أن المنشأ على وشك الانهيار، إذ تؤدي أي زيادة أخرى في الحمل إلى تشوهات غير مسيطر عليها.
6. **حساب الحمل النهائي من شروط الاتزان:** بعد تثبيت توزيع العزم النهائي، طبّق معادلات الاتزان لحساب الحمل النهائي الذي يستطيع المنشأ تحمله من دون مخالفة شروط الخضوع. ويقابل هذا الحمل مقدار الحمل المطبق الذي يبلغ عنده المنشأ حالة الانهيار وفق طريقة الحد الأدنى. وهو تقدير محافظ للسعة الحقيقية للمنشأ، يضمن ألا يتجاوز أي جزء منه حده اللدن.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

خلاصة نهج الحد الأدنى

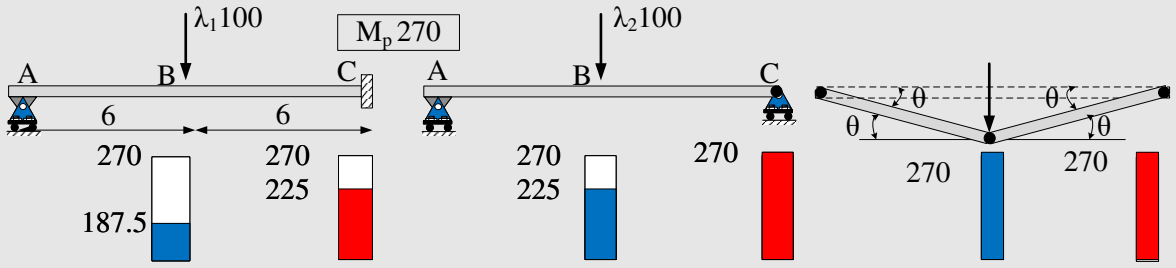
25 يوفر نهج الحد الأدنى طريقة منهجية لتقييم سعة المنشأ لحمل الأحمال من خلال:

- ضمان اتزان القوى الداخلية والخارجية.
- احترام شروط الخضوع بالتوزيع الدقيق للعزوم.
- تجنب افتراضات تسلسل تشكل المفاصل، وبذلك إعطاء تقدير آمن قد يقلل من حمل الانهيار الفعلي.

26 هذا النهج مفيد خصوصًا في الهندسة الإنشائية لأنه يضمن السلامة بإعطاء حمل انهيار يساوي، في أسوأ الأحوال، الحمل النهائي الحقيقي أو يقل عنه.

27 وباستخدام قيود الاتزان والخضوع وحدها، تتجنب طريقة الحد الأدنى افتراض آليات انهيار محددة، وتوفر وسيلة متينة لتقييم السلامة الإنشائية.

56.2.2.1 مثال 56.6: كابولي مسنود I



- أجرِ تحليلًا تزايديًا.
- المرحلة 1: لدينا منشأ غير محدد سكونيًا خاضع لـ P=100، والمقدار غير مهم وكان يمكن أن يكون 1 أو10 أو غيرهما. وبعد التحليل نحصل على:

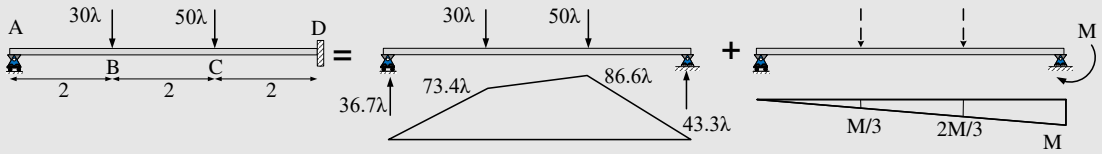
$$\begin{aligned} M_C &= \tfrac{3}{16}PL = 225 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^C = \tfrac{270}{225} = 1.2 \\ M_B &= \tfrac{5}{32}PL = 187.5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^B = \tfrac{270}{187.5} = 1.44 \end{aligned}$$

ومن ثم يتشكل المفصل الأول عند C، و$P = 1.2(100) = 120$، و$M_C^{total} = 1.2(225) = 270$، و$M_B^{total} =$ $1.2(187.5) = 225$.

- المرحلة 2: تشكل مفصل عند C، أي $M_C = 0$، ولدينا الآن جائز محدد سكونيًا بحمل نقطي في المنتصف مقداره P=100، مجددًا، و$M_B = PL/4$=300. وتساوي سعة العزم اللدن المتبقية عند B القيمة 270-225=45، $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 45/300$=0.15.
- بجمع الحملين، أصبح M_C^{total}=270 وM_B^{total}=225+0.15(300)=270، ويكون $\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.2 +$ $0.15 = 1.35$ الكلي، ومن ثم حمل الانهيار هو $1.35(100) = 135$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.2.2.2 مثال 56.7: كابولي مسنود II



- المنشأ غير محدد سكونيًا. وبدلًا من إجراء تحليل لتحديد موضع تشكل المفصل الأول، نضع افتراضين.
- ندرس أولًا تشكل مفصلين عند C وD:

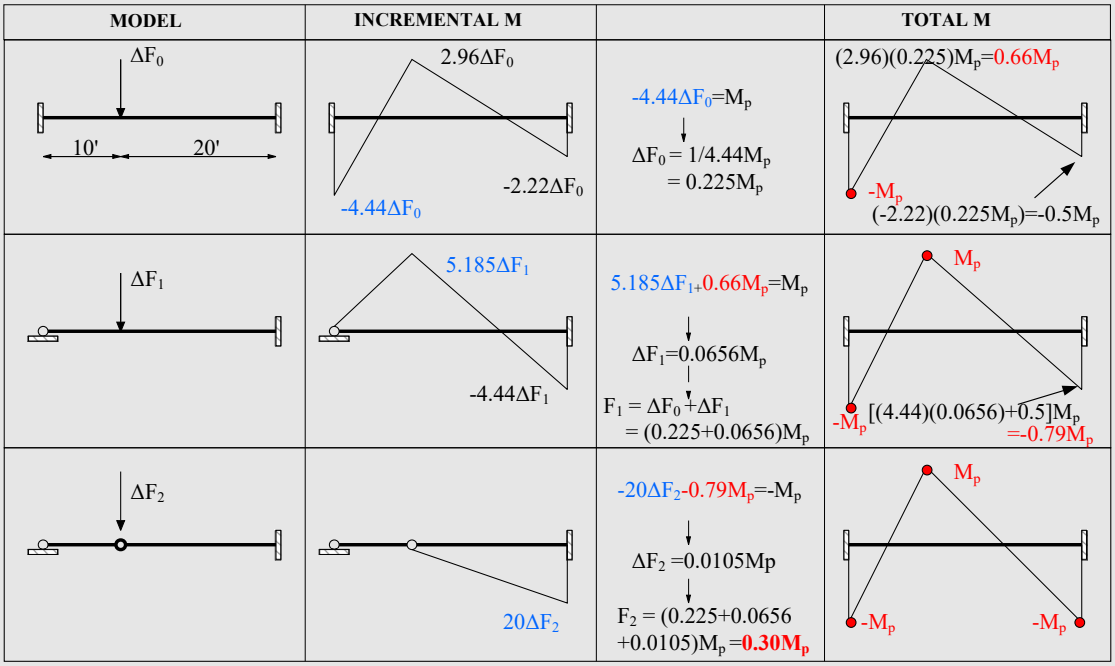
$$\begin{cases} M^D & = & M_p \\ M^C & = 86.6\lambda - \frac{2}{3}M^D & = & M_p \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{52}$$

- الاحتمال الآخر هو تشكل مفصلين عند B وD:

$$\begin{cases} M^D & = & M_p \\ M^B & = 73.4\lambda - \frac{1}{3}M^D & = & M_p \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{55}$$

- ومن ثم تحكم الحالة الثانية.

56.2.2.3 مثال 56.8: جائز مثبت



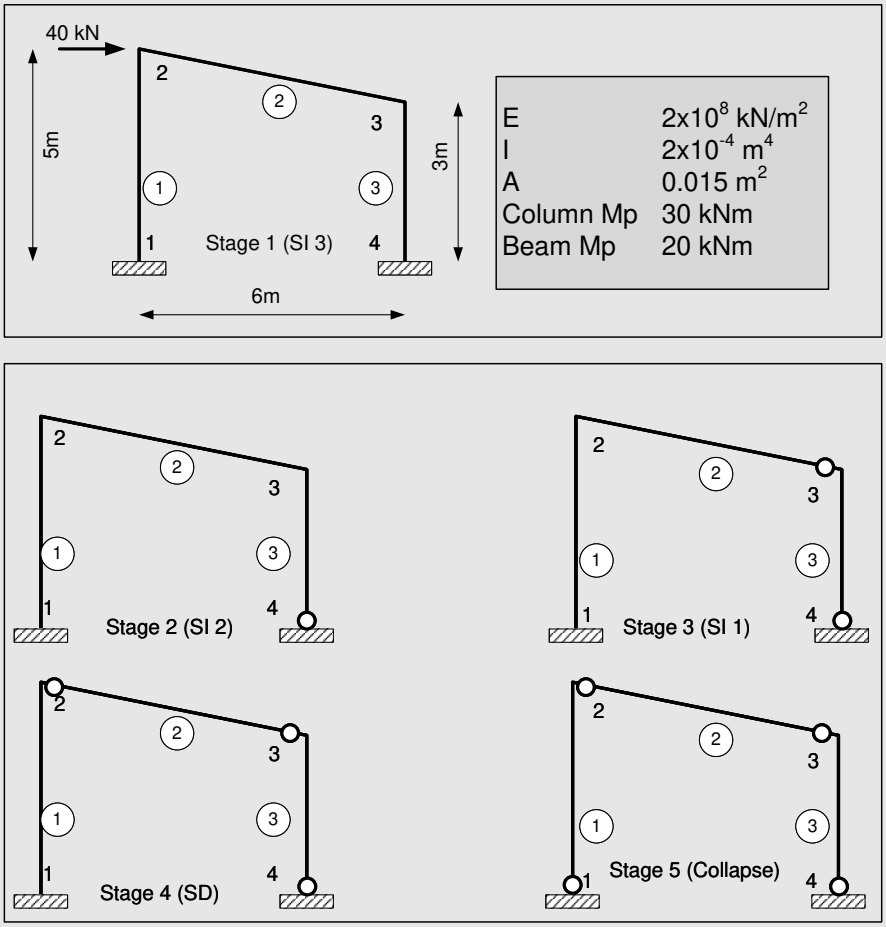
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. ندرس أولًا المنشأ الأصلي:
   (a) طبّق حملًا F_0 وحدد مخطط العزم المقابل.
   (b) حدد أكبر عزم ($-4.44F_0$) وساوه بـM_P. وهذه أول نقطة يتشكل عندها مفصل لدن.
   (c) أعد رسم مخطط العزم بدلالة M_P.
2. ندرس بعد ذلك المنشأ وفيه مفصل لدن عند المسند الأيسر.
   (a) طبّق حملًا تزايديًا ΔF_1.
   (b) ارسم مخطط العزم المقابل بدلالة ΔF_1.
   (c) حدد نقطة العزم **الكلي** الأقصى، وهي النقطة تحت الحمل $5.185\Delta F_1 + 0.666M_P$، وساوها بـ$M_P$.
   (d) حل لإيجاد ΔF_1 وحدد الحمل الخارجي الكلي المطبق.
   (e) ارسم مخطط العزم الكلي المحدَّث. لدينا الآن مفصلان لدنان، وما زلنا نحتاج إلى مفصل ثالث لتكوين آلية تؤدي إلى الانهيار.
3. أخيرًا نحلل المنشأ المعدل ذي المفصلين اللدنين.
   (a) طبّق حملًا تزايديًا ΔF_2.
   (b) ارسم مخطط العزم المقابل بدلالة ΔF_2.
   (c) ساوِ العزم الكلي عند العقدة اليمنى بـM_P.
   (d) حل لإيجاد ΔF_2 وحدد الحمل الخارجي الكلي. ويقابل هذا الحمل حمل فشل المنشأ.

56.2.2.4 مثال 56.9: إطار مائل

نسعى الآن إلى إعادة تحليل الإطار المائل السابق باستخدام نهج الحد الأدنى السكوني.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



يلزم دراسة مراحل مختلفة، تبدأ من المرحلة 1 حتى المرحلة 4، أي الانهيار. تكون المراحل 1 و2 و3 غير محددة سكونيًا من الدرجات الثالثة والثانية والأولى على الترتيب، وتكون المرحلة 4 محددة سكونيًا، وأخيرًا تمثل المرحلة 5 آلية الانهيار. ومن ثم نجري التحليلات 3 الأولى ببرنامج حاسوبي بسيط، والرابع يدويًا. M_p هو العزم اللدن، وM_i العزم عند كل عقدة، وقيمته الابتدائية تساوي واحدًا، وM_0 العزم الناتج من التحليل الإنشائي في نهاية كل مرحلة.

المرحلة 1 أجرِ تحليلًا وحدد معاملات α:

العضو 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 27.21 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30}{27.21} = 1.103$$

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30}{-21.75} = 1.379$$

العضو 2:

$$\text{J2} \qquad M_0 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-20}{-21.75} = 0.916$$

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{20}{31} = 0.645$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العضو 3:

$$\text{J3} \qquad M_0 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30}{31} = 0.968$$
$$\text{J4} \qquad M_0 = -59.62 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_4}{M_0} = \frac{-30}{-59.62} = 0.503$$

نلاحظ أن أسفل العمود الأيمن له أصغر α، ولذلك يجب أن يتشكل المفصل الأول عند الأسفل الأيمن. ونحدّث العزوم:

العضو 1:

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 0.503 \times 27.21 = 13.69$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$

العضو 2:

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$

العضو 3:

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59$$
$$M_4 = M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-59.62) = -30$$

المرحلة 2 أجرِ تحليلًا آخر وحدد معاملات α:

العضو 1:

$$\text{J1} \qquad M_0 = 65.09 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_1}{M_0} = \frac{30 - 13.69}{65.09} = 0.251$$
$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_2}{M_0} = \frac{-30 + 10.94}{-47.24} = 0.403$$

العضو 2

$$\text{J2} \qquad M_0 = -47.24 \qquad M_2 = -21.75 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_2}{M_0} = \frac{-20 + 10.94}{47.24} = 0.192$$
$$\text{J3} \qquad M_0 = 52.61 \qquad M_3 = 31.00 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_3}{M_0} = \frac{20 - 15.59}{52.61} = 0.083$$

العضو 3

$$\text{J3} \qquad M_0 = 52.61 \qquad \alpha = \frac{M_P - M_3}{M_0} = \frac{30 - 15.59}{52.61} = 0.273$$
$$\text{J4} \qquad M_4 = 0$$

هذه المرة يقابل أصغر α الطرف الأيمن للجائز، وهو موضع تشكل المفصل الثاني. ونحدّث العزوم: حدّث العزوم.

العضو 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 13.69 + 0.083 \times 65.09 = 19.09$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العضو 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.08 \times 52.61 = 20$$

العضو 3

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.083 \times 52.61 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

المرحلة 3 أجرِ تحليلًا وحدد معاملات α:

العضو 1

J1 $\quad M_0 = 129.70 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 19.09}{129.70} = 0.084$

J2 $\quad M_0 = -70.31 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-30 + 14.86}{-70.31} = 0.215$

العضو 2

J 2 $\quad M_0 = -70.31; M_2 = -70.31 \quad \alpha = \dfrac{M_\rho - M_2}{M_0} = \dfrac{-20 + 14.86}{-70.31} = 0.073$

حدّث العزوم:

العضو 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 19.09 + 0.073 \times 129.70 = 28.56$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$

العضو 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$
$$M_3 = M_3 = 20$$

العضو 3

$$M_3 = M_3 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

المرحلة 4 يجب أن يتشكل المفصل عند أسفل العمود الأيسر.

العضو 1

J1$M_0 = 40 \times 5 = 200 \quad \alpha = \dfrac{M_p - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 28.56}{200} = 0.007$

وأخيرًا:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$
$$= 0.503 + 0.083 + 0.073 + 0.007 = 0.666$$

ومن ثم يكون حمل الانهيار:

$$F_{cr} = \alpha F = 0.666 \times 40 = 26.64\text{KN}$$

تُعرض نتيجة هذه التحليلات بأفضل صورة في الجدول الآتي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

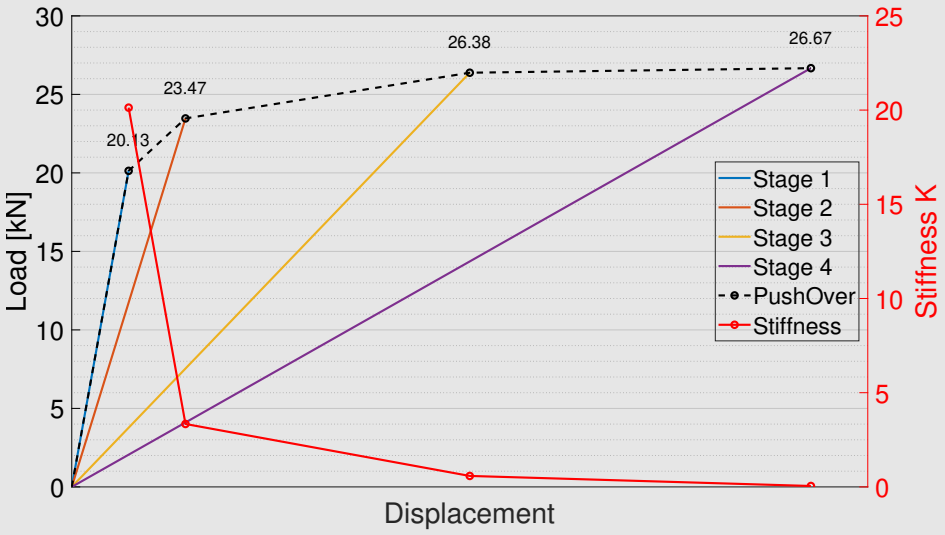
Member	Joint	Moment M_0 (kNm)	Moment M_i (kNm)	Residual Plastic Moment M_p-M_i (kNm)	Load Factor $\alpha=(M_p-M_i)/M_0$	Critical Load Factor α_{cr}	Cumulative Load Factor α_{cum}	Cumulative Moment $M_{j+1}=M_j+\alpha_{cr}M_0=\alpha_{cum}M_0$ (kNm)	Plastic Moment M_p (kNm)	Critical Load $P_{cr}=P*\alpha_{cr}$ (kN)
Stage 1										
1	1	27.21	0.00	30.00	1.10	0.50	0.50	13.69	30	20.13
	2	-21.75	0.00	-30.00	1.38			-10.94	-30	
2	2	-21.75	0.00	-20.00	0.92			-10.94	-20	
	3	31.00	0.00	20.00	0.65			15.60	20	
3	3	31.00	0.00	30.00	0.97			15.60	30	
	4	-59.62	0.00	-30.00	0.50			-30.00	-30	
Stage 2										
1	1	65.09	13.69	16.31	0.25	0.08	0.59	19.14	30	23.47
	2	-47.24	-10.94	-19.06	0.40			-14.90	-30	
2	2	-47.24	-10.94	-9.06	0.19			-14.90	-20	
	3	52.61	15.60	4.40	0.08			20.00	20	
3	3	52.61	15.60	14.40	0.27			20.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 3										
1	1	129.70	19.14	10.86	0.08	0.07	0.66	28.55	30	26.38
	2	-70.31	-14.90	-15.10	0.21			-20.00	-30	
2	2	-70.31	-14.90	-5.10	0.07			-20.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 4										
1	1	200.00	28.55	1.45	0.01	0.01	0.67	30.00	30	**26.67**
	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
2	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	

ومن ثم $P_{crit} = 26.67$ kN. M_p هو العزم اللدن، وM_i العزم عند كل عقدة، وM_0 العزم عند كل عقدة في كل عنصر في أثناء كل مرحلة.

ملاحظة

على الرغم من إمكان تحديد الإزاحات في كل مرحلة، فإنها لم تُعرض. ولو عُرضت لحصلنا على رسم مماثل لما يأتي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



نلاحظ أنه مع ازدياد الحمل يزداد عدد المفاصل اللدنة، ولذلك تنخفض الصلابة إلى الصفر عند الفشل.

56.3 العناصر المستوية (البلاطات)

28 مدونة ACI: يمكن تصميم البلاطة باستخدام الحلول الكلاسيكية القائمة على وسط متصل خطي مرن، أو الحلول العددية القائمة على عناصر منفصلة، أو تحليلات خطوط الخضوع مجتمعةً.

29 تبحث *نظرية خطوط الخضوع* (YLT) آليات الفشل عند الحالة الحدية النهائية. وهي بسيطة، لكنها تتطلب الإلمام بأنماط الفشل، أي معرفة كيفية فشل البلاطات.

30 عندما تكون البلاطة على وشك الانهيار، أي عند وجود عدد كافٍ من المفاصل الحقيقية أو اللدنة لتكوين آلية، تقع محاور الدوران على خطوط الإسناد أو فوق المساند النقطية مثل الأعمدة. ويمكن اعتبار أجزاء البلاطة أجسامًا صلبة تدور في الفضاء حول محاور الدوران هذه.

31 يوجد نوعان من خطوط الخضوع: موجب، والشق في الأسفل، وسالب، والشق في الأعلى.

32 إرشادات إنشاء أنماط خطوط الخضوع:

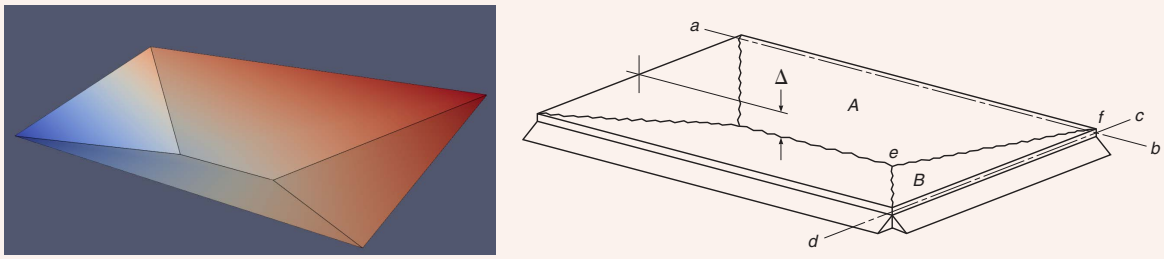
1. خطوط الخضوع مستقيمة، فهي تقاطع مستويين.
2. خطوط الخضوع محاور دوران.
3. تنشئ حواف البلاطة المسنودة أيضًا محاور دوران. فإذا كانت مثبتة ظهر خط خضوع سالب، وإذا كانت حرة فلا يوجد قيد.
4. المساند المستمرة تطرد خطوط الخضوع الموجبة أو المقعرة، والمساند البسيطة تجذبها.
5. يمر محور الدوران فوق أي مسند عمودي، ويعتمد اتجاهه على اعتبارات أخرى.
6. تتشكل خطوط الخضوع تحت الأحمال المركزة وتشع إلى الخارج.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

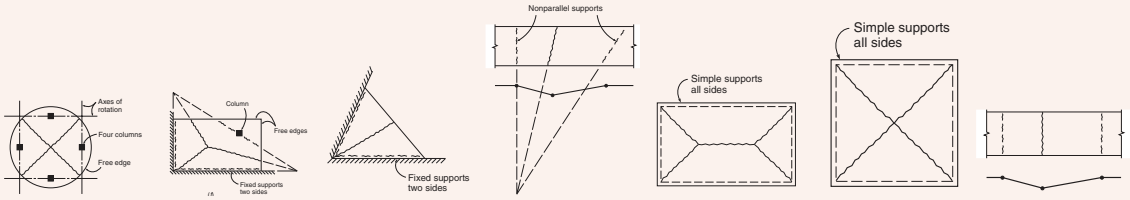
7. يجب أن يمر خط الخضوع بين جزأين من البلاطة بنقطة تقاطع محوري دوران الجزأين المتجاورين.

33 على سبيل المثال، في بلاطة مستطيلة بسيطة الإسناد على الجوانب الأربعة، الشكل 56.1a، يدور الجزآن A وB حول ab وcd.

34 هدف دراسة أنماط خطوط الخضوع إيجاد النمط الذي يعطي أقل سعة حمل.



(a) مستطيلة



(b) أخرى

شكل 56.1: خطوط الخضوع في البلاطات

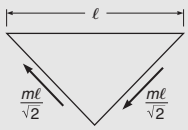
56.3.1 السكونيات: الحد الأدنى

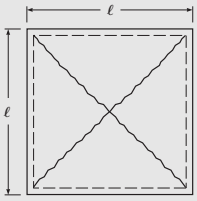
35 استخدام نهج الحد الأدنى للبلاطات مرهق، لكنه ليس مستحيلًا. وفيما يأتي مثال بسيط.

56.3.1.1 مثال 56.10: بلاطة مربعة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بلاطة مربعة بسيطة الإسناد على جوانبها الأربعة ومسلحة بالتساوي في الاتجاهات. إذا كان العزم اللدن لكل قدم طولي m_P معلومًا، فحدد الحمل المنتظم w_{ult}. لاحظ أن هذه الطريقة نادرًا ما تستخدم لتحليل البلاطات. بسبب التناظر، يكون نمط خطوط الخضوع كما هو موضح. وبالنظر في اتزان عزوم أي جزء من أجزاء البلاطة الأربعة حول مسنده:





$$M_{ext} = w \underbrace{\frac{l^2}{4}}_{\text{ذراع العزم المساحة}} \underbrace{\frac{L}{6}}$$

$$M_{int} = 2 \underbrace{\frac{m_p l}{\sqrt{2}}}_{\text{المركبة الأفقية العزم}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M_{ext} = M_{int} \Rightarrow w_{ult} = \frac{24 m_p}{l^2}$$

56.3.2 الحركيات: الحد الأعلى

36 نعرّف أولًا العمل في سياق خطوط الخضوع في البلاطات:

العمل الخارجي

$$W_{ext} = \sigma(N_i \delta_i)$$

حيث N القوة المحصلة، وδ الإزاحة الرأسية المقابلة. ولتسهيل تحديد العمل الخارجي، قد يكون من المرغوب تقسيم البلاطة إلى عناصر مختلفة، الشكل 56.2، وتحديد الإزاحات المقابلة لإزاحة وحدة $\delta = 1$ في المركز.

العمل الداخلي:

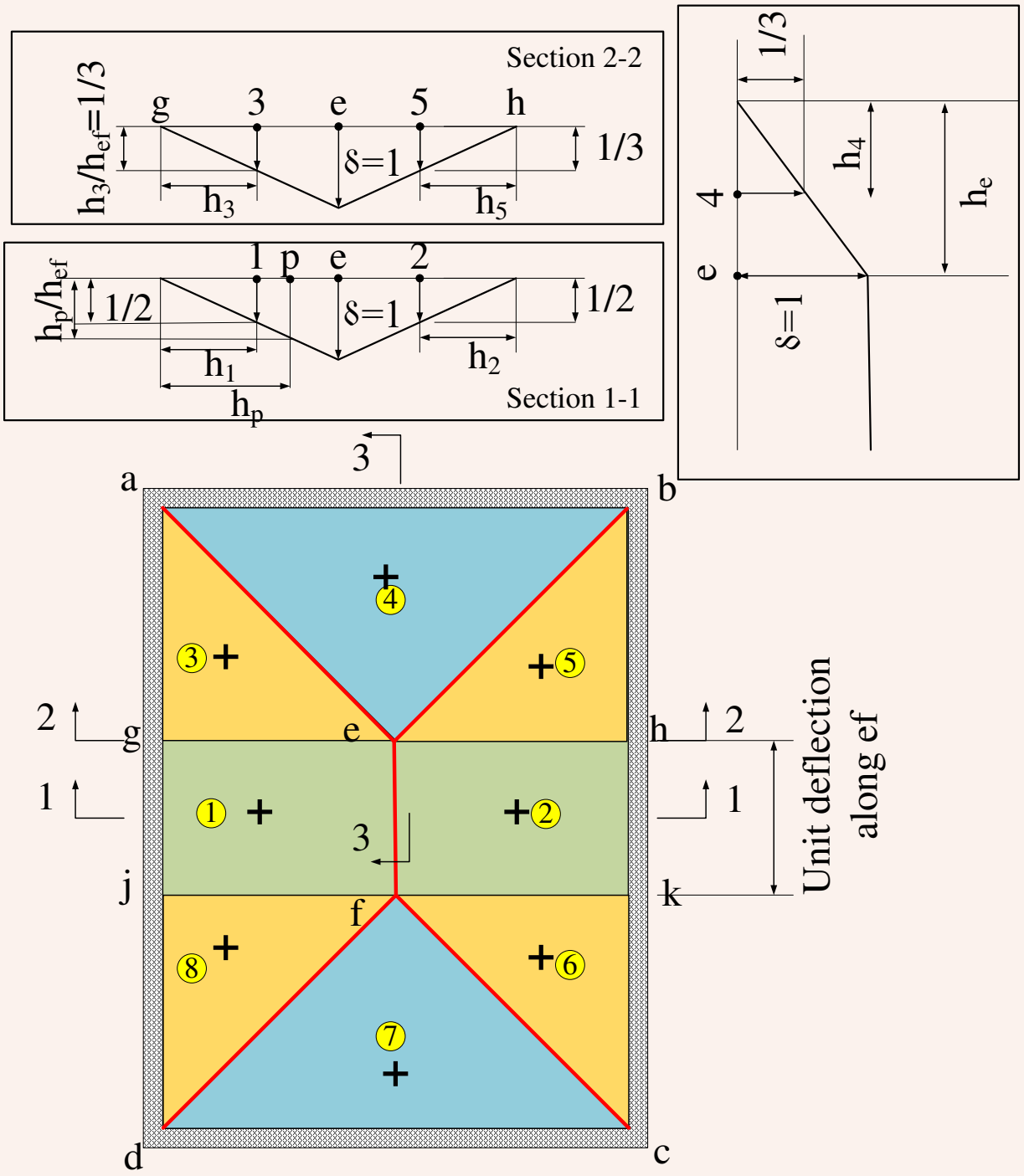
$$W_{int} = \sum ml\theta$$

حيث m العزم الداخلي في البلاطة لكل متر طولي، وl طول خط الخضوع أو طوله المسقط على محور دوران المنطقة المقابلة، وθ دوران المنطقة حول محورها.

37 الإجراء مطابق للإجراء المستخدم للجوائز: حفظ الطاقة.

يرجى ملاحظة أن هذا القسم يحتوي على عناصر عائمة (أشكال و/أو جداول) يجب طباعتها قبل القسم التالي. لذلك قد تظهر هنا مساحات أو فجوات فارغة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

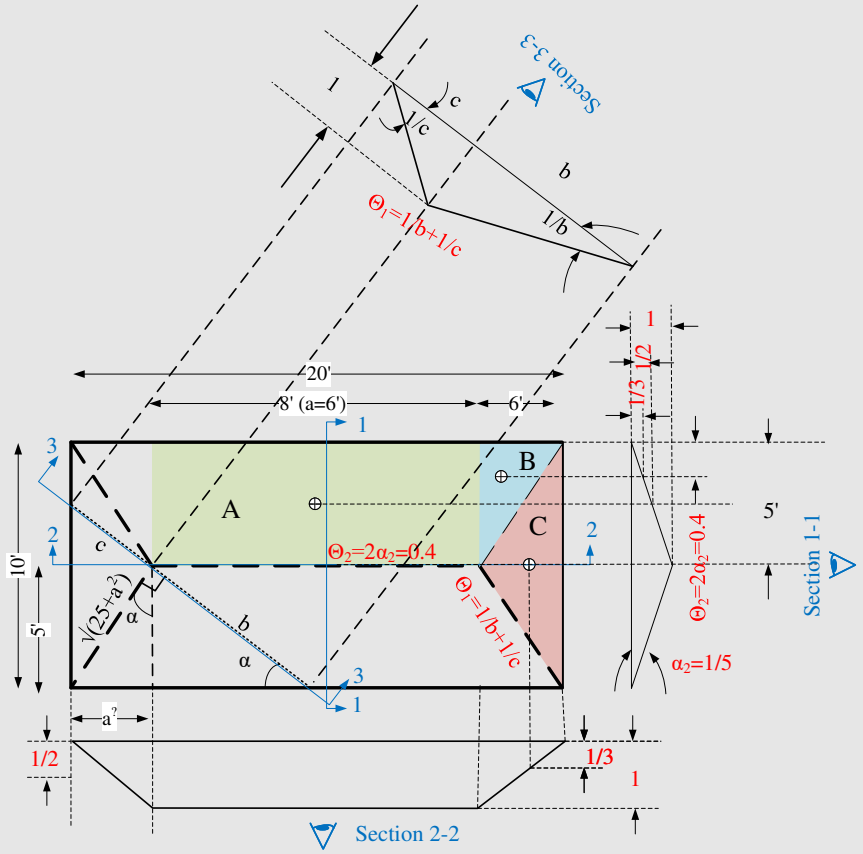


شكل 56.2: تحديد خطوط الخضوع في البلاطات المستطيلة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.3.2.1 مثال 56.11: بلاطة مستطيلة

البلاطة ذات الاتجاهين الآتية بسيطة الإسناد على جوانبها الأربعة وتحمل حملًا منتظمًا w. نسعى إلى تحديد المقاومة المطلوبة للبلاطة.



- تتشكل خطوط خضوع موجبة كما هو موضح، والبعد a مجهول.
- من الهندسة: طول القطر = $\sqrt{25+a^2}$، ومن تشابه المثلثات:

$$\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}\Rightarrow b=5\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}$$
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}\Rightarrow c=a\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}$$

- يقابل انحراف الوحدة دوران المفصل اللدن عند خط الخضوع القطري:

$$\theta_1=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{5\sqrt{25+a^2}}+\frac{5}{a\sqrt{25+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{25+a^2}}\left(\frac{a}{5}+\frac{5}{a}\right)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- دوران خط الخضوع الموازي للحواف الطويلة للبلاطة:

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

- افترض $a = 6$ ft، فيكون طول خط الخضوع القطري $\sqrt{25+36} = 7.81$ ft.
- دوران خط الخضوع القطري المقابل هو:

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = 0.261$$

- زاوية الدوران عند خط الخضوع المركزي: $\theta_2 = 0.4$.
- العمل الداخلي هو:

$$W_{int} = 4(m_p \times 7.81 \times 0.261) + (m_p \times (20-6-6) \times 0.4) = 11.36 m_p$$

- العمل الخارجي:

$$W_{ext} = \underbrace{2\left(10 \times 6 \times \frac{1}{2}w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{A}} + + \underbrace{4\left(6 \times 5 \times \frac{1}{2}w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{B}} + \underbrace{2\left(8 \times 5w \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{C}} = 80w$$

- بمساواة $W_{int} = W_{ext}$ نحصل على $w_{ult} = \frac{11.36 M_P}{80} = 0.14 m_P$.

محاولات متتالية

a	W_{int}	W_{ext}	w_{ult}
6.0	m_P 11.36	w 80.0	m_P 0.142
6.5	m_P 11.08	w 78.4	m_P 0.141 تحكم
7.0	m_P 10.87	w 76.6	m_P 0.142
7.5	m_P 10.69	w 75.0	m_P 0.143

- لاحظ أنه لو دُرس شريط بعرض وحدة بدلًا من ذلك، لكان:

$$m_p = \frac{w_{ult} L^2}{8} \Rightarrow w_{ult} = \frac{8m_p}{L^2} = \frac{8m_p}{10^2} = 0.08 m_p$$

بدلًا من $m_p 0.141$.

56.4 تحليل الدفع

[38] تحليل الدفع إجراء سكوني غير خطي شائع الاستخدام في التصميم الزلزالي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

39 يُقدَّم هنا بإيجاز، مع مناقشة أكثر تفصيلًا في الفصل 68.4.1، لإبراز تشابهه مع تحليل الحد الأدنى الذي سيُناقش في القسم التالي.

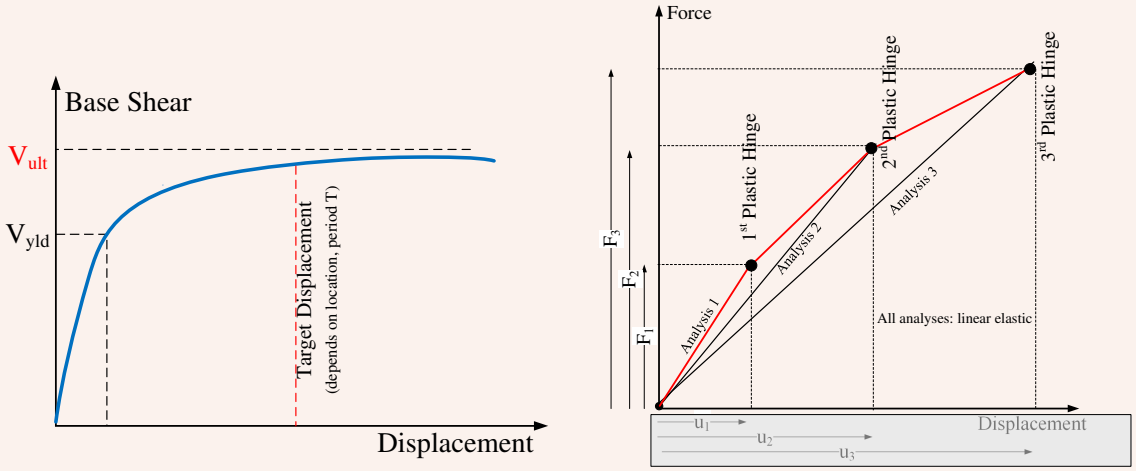
40 يطبق تحليل الدفع أحمالًا جانبية متزايدة تدريجيًا لمحاكاة استجابة المنشأ تحت ظروف شبيهة بالزلازل:

- **التحميل التزايدي**: تُطبق الأحمال تزايديًا في تحليل الدفع حتى يطور المنشأ آلية فشل ويبلغ سعته النهائية. ويمثل توزيع الحمل عادةً القوى الجانبية المتوقعة في الزلزال.
- **السلوك غير المرن التدريجي**: مع ازدياد الحمل يبدأ المنشأ بالخضوع عند النقاط الحرجة، أي المفاصل اللدنة، وتلتقط ذلك علاقة الحمل–الإزاحة التي تمثل الاستجابة الإنشائية حتى الحد المرن وبعده.
- **تشكّل الآلية**: يحدد تحليل الدفع آليات الانهيار، فيوضح كيفية تشوه المنشأ تحت التحميل الشديد ويكشف نقاط الضعف والمطيلية العامة.
- **السلوك المادي غير الخطي**: يلتقط التحليل التشوه غير الخطي وغير المرن، وهو حاسم في التصميم الزلزالي لأنه يعكس سلوك ما بعد المرونة وأنماط الفشل.

56.5 أوجه التشابه بين تحليل الحد الأدنى و

56.5.1 تحليل الدفع

41 توجد أوجه تشابه قوية بين تحليل الحد الأدنى وتحليل الدفع في الهندسة الإنشائية، الشكل 56.3.



(a) تحليل الحد الأدنى (b) الدفع

شكل 56.3: حل الحد الأدنى السكوني مقابل تحليل الدفع

42 مع أن كلتا الطريقتين تهدفان إلى تحديد سعة المنشأ لحمل الأحمال، فإنهما تختلفان في المنهج وسياق التطبيق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أوجه التشابه الرئيسة بين تحليل الحد الأدنى وتحليل الدفع

43 رغم اختلاف التطبيق، يشترك التحليلان في أوجه تشابه أساسية:

- **تحديد سعة الحمل النهائية**: يهدف كلاهما إلى تحديد سعة الحمل النهائية، مع أن تحليل الحد الأدنى يعطي تقديرًا محافظًا، بينما يعطي تحليل الدفع تقديرًا واقعيًا.
- **التركيز على السلامة الإنشائية تحت التحميل الشديد**: تقيّم الطريقتان سعة الحمل تحت ظروف شديدة، وإن اختلفت أنواع الأحمال. يلائم تحليل الحد الأدنى الأحمال السكونية، بينما يستخدم تحليل الدفع عادةً للأحمال الجانبية الزلزالية.
- **السلوك المادي غير المرن**: تدمج الطريقتان نظرية اللدونة؛ يركز تحليل الحد الأدنى على الاتزان والخضوع، بينما يرصد تحليل الدفع التشكل التدريجي للمفاصل اللدنة.

الفروق الرئيسة بين تحليل الحد الأدنى وتحليل الدفع

44 الفروق بين الطريقتين مهمة:

- **نهج الاتزان والآليات**: يضمن تحليل الحد الأدنى الاتزان بتوزيع آمن للقوى من دون الحاجة إلى آلية انهيار. أما تحليل الدفع فيتضمن تحميلًا تدريجيًا لرصد تشكل الآلية مع ازدياد الأحمال.
- **سياق التطبيق**: يستخدم تحليل الحد الأدنى عمومًا للأحمال السكونية في التصميم اللدن، بينما يستخدم تحليل الدفع في التصميم الزلزالي لمحاكاة الأحمال الجانبية.
- **مراعاة التشوه غير الخطي**: يراعي تحليل الدفع صراحةً التشوهات غير المرنة وينتج منحنى حمل–إزاحة، بينما يضمن تحليل الحد الأدنى الخضوع والاتزان فقط من دون نمذجة التشوه.
- **تصوير آلية الانهيار**: يسمح تحليل الدفع بتصوير آليات الانهيار ونقاط الضعف، وهو ضروري لتقييم الأداء الزلزالي، بخلاف تحليل الحد الأدنى الذي لا ينمذج الانهيار.
- **طبيعة التحميل وتطبيقه**: يطبق تحليل الحد الأدنى حملًا سكونيًا من دون تقدم تزايدي. أما تحليل الدفع فيزيد الحمل الجانبي تدريجيًا حتى الانهيار، ما يجعله مناسبًا لسياقات التحميل الديناميكي.

45 وخلاصة ذلك:

- **تحليل الحد الأدنى**: يعطي تقديرًا محافظًا لسعة الحمل بإيجاد توزيع قوى يحقق شرطي الاتزان والخضوع. ولا يتطلب آلية انهيار أو تحليل تشوه غير خطي، بل يركز فقط على توزيع الحمل الآمن.
- **تحليل الدفع**: يعطي تقديرًا واقعيًا للحمل النهائي بتحميل جانبي تزايدي حتى تتشكل آلية انهيار. ويلتقط التشوه غير الخطي وغير المرن ويصور أنماط الفشل الإنشائي، ما يجعله مفيدًا خصوصًا في التصميم الزلزالي.

46 في الجوهر، يستخدم كلا التحليلين، الجدول 56.2، مبادئ نظرية اللدونة لتقييم سعة الحمل، لكن فروقهما تعكس منهجين وتطبيقين متميزين: تحليل الحد الأدنى يركز على الاتزان ويتسم بالمحافظة، بينما يركز تحليل الدفع على التشوه ويتسم بالواقعية، مع التشديد على آليات الانهيار تحت التحميل التدريجي.

جدول 56.2: مقارنة تحليل الحد الأدنى وتحليل الدفع

الجانب	تحليل الحد الأدنى	تحليل الدفع
الهدف	يعطي تقديرًا محافظًا لسعة الحمل النهائية بضمان الاتزان وتحقيق الخضوع.	يعطي تقديرًا واقعيًا للحمل النهائي بتطبيق الأحمال الجانبية تزايديًا حتى تتشكل آلية فشل.
متطلب الاتزان	يركز على إيجاد توزيع قوى يحقق شرطي الاتزان والخضوع من دون اشتراط آلية انهيار.	يرصد تقدم تشكل المفاصل اللدنة حتى ظهور آلية انهيار.
سياق التطبيق	يطبق عادةً في التصميم اللدن للأحمال السكونية، ولا سيما في منشآت الفولاذ والخرسانة.	يستخدم أساسًا في التصميم الزلزالي، ويطبق أحمالًا جانبية لمحاكاة آثار الزلزال.
سلوك المادة	يراعي السلوك المادي غير المرن بشروط الخضوع، لكنه لا ينمذج التشوه غير الخطي صراحةً.	يلتقط التشوه غير الخطي وغير المرن، وينتج منحنى حمل–إزاحة لتقييم سلوك ما بعد المرونة.
تصوير الآلية	لا يصور آليات الانهيار أو أنماط الإزاحة، بل يركز فقط على تحقيق الاتزان.	يسمح بتصوير آليات الانهيار، ويساعد على تحديد نقاط الضعف والمطيلية العامة مع ازدياد الأحمال.
طبيعة التحميل	تطبيق حمل سكوني من دون تقدم تزايدي؛ يحدد مستوى حمل آمن واحدًا.	تطبيق حمل جانبي تزايدي لمحاكاة القوى الزلزالية حتى وقوع الانهيار.
الناتج	مستوى حمل آمن يحقق شرطي الاتزان والخضوع من دون تفصيل سلوك التشوه.	منحنى حمل–إزاحة يبين الاستجابة التدريجية للمنشأ، بما فيها تشكل المفاصل اللدنة والسعة النهائية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

56.5.2 اللدونة المركزة

47 أخيرًا، يبرز التشابه مع اللدونة المركزة (§61.3). ويمكن بالفعل النظر إلى نموذج اللدونة المركزة بوصفه تمثيلًا مبسطًا لمبرهنة الحد الأدنى. ففيه يتركز التشوه اللدن داخل مناطق أو مفاصل لدنة منفصلة، يمكن اعتبارها آليات للتشوه اللدن. وبافتراض اللدونة التامة داخل هذه المناطق، يركز النموذج على التقاط الحمل المرتبط بتشكل الآليات اللدنة.

48 يشترك نموذج اللدونة المركزة (§61.3) ونظرية خطوط الخضوع ذات الحد الأدنى، رغم تطويرهما لجوانب مختلفة من التحليل الإنشائي، في تشابه مفهومي عميق في معالجة التلدن والخضوع.

49 يفترض كلا النموذجين أن الخضوع أو التلدن شديد التموضع، فيتركز التشوه وتبديد الطاقة في مناطق محددة ومقيدة من المنشأ. وهذا النهج مفيد خصوصًا في النماذج المبسطة والفعالة لتقييم السلوك الإنشائي النهائي.

نموذج اللدونة المركزة: تركيز تشكل المفاصل اللدنة

50 يفترض نموذج اللدونة المركزة أن التلدن كله يحدث في مواقع منفصلة تُعرف بالمفاصل اللدنة، وعادةً عند نقاط عزوم الانحناء القصوى.

51 ويفترض النهج استمرار السلوك المرن في بقية المنشأ، ما يسمح بتحليل مبسط لسلوك ما بعد الخضوع.

52 يدل تشكل مفصل لدن على أن العضو بلغ سعة العزم في ذلك الموضع، فتتموضع التشوهات غير المرنة في هذه المفاصل. ومع ازدياد الحمل يشكل المنشأ مفاصل لدنة إضافية حتى تتكون آلية، ما يسمح بالتنبؤ بأحمال الانهيار.

53 يخفض تموضع التلدن التعقيد الحسابي ويركز التحليل على المقاطع الحرجة، فيكون نهجًا قيمًا لتقييم سعة المنشأ النهائية لحمل الأحمال من دون الحاجة إلى تحليل لاخطي مفصل للمنشأ كله.

نظرية خطوط الخضوع ذات الحد الأدنى: تموضع خطوط الخضوع

54 تركز نظرية خطوط الخضوع ذات الحد الأدنى، بالمثل، الخضوع في خطوط أو مناطق منفصلة، هي خطوط الخضوع، حيث يُفترض أن تخضع البلاطة لتشوهات لدنة.

55 وتقوم النظرية على فرضية أن خطوط الخضوع تتشكل على مسارات العمل الأدنى لتتيح الانهيار وتولد آلية.

56 تستخدم نظرية خطوط الخضوع مبدأ العمل الافتراضي لتقدير حمل الانهيار، بافتراض اقتصار التشوهات اللدنة على هذه الخطوط مع بقاء بقية البلاطة صلبة.

57 وعلى غرار نموذج اللدونة المركزة، تستفيد نظرية خطوط الخضوع من خفض التعقيد بتموضع اللدونة. ويسمح ذلك للمهندسين بتقريب الحمل النهائي للبلاطات والصفائح بحسابات مباشرة نسبيًا مقارنة بتحليل اللدونة المفصل على السطح كله.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التشابه المفهومي: تموضع السلوك غير المرن

58 يستفيد النموذجان من فكرة إمكان حصر السلوك غير المرن في مناطق محددة، بما يقلل الحاجة إلى تحليل لدونة كامل ويبسط التنبؤ بآليات الانهيار.

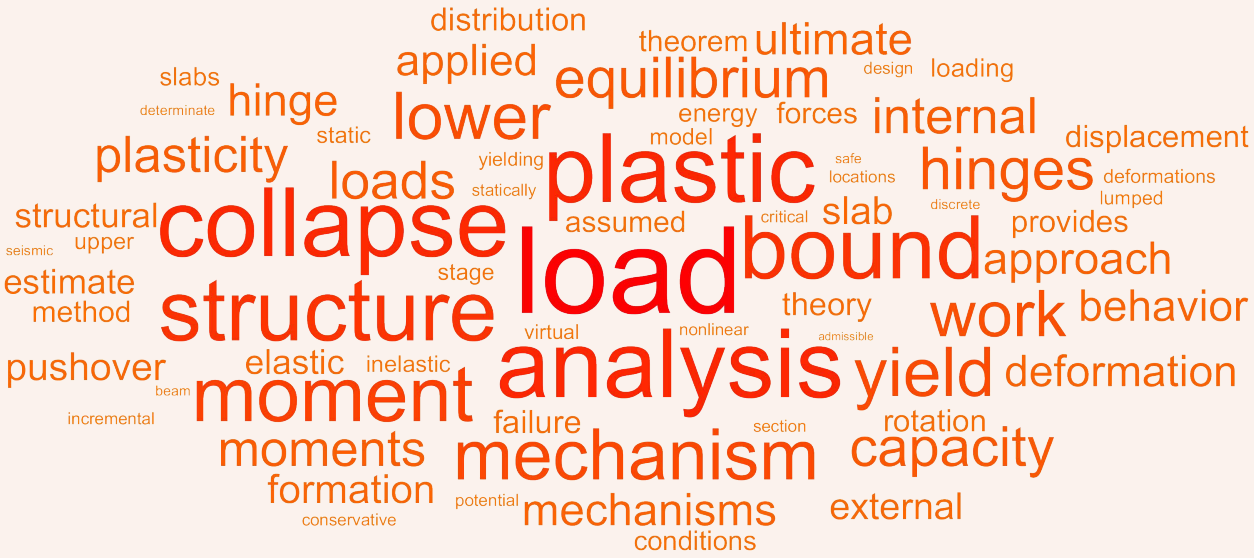
59 يموضع نموذج اللدونة المركزة التلدن عند المفاصل اللدنة، بينما تموضع نظرية خطوط الخضوع الخضوع على خطوط. وبتركيز التشوه عند هذه النقاط أو الخطوط، يتيح النهجان تقدير الحد الأدنى لسعة المنشأ، بما يسهل تحليل الأنظمة الإنشائية المعقدة.

60 يوضح الجدول 56.3 أوجه التشابه بين النهجين.

جدول 56.3: اللدونة المركزة وتحليل الحد الأدنى

الجانب	نموذج اللدونة المركزة	نظرية خطوط الخضوع ذات الحد الأدنى
نوع المنشأ	الإطارات والجوائز والعناصر الخطية المشابهة	الصفائح والبلاطات
تموضع السلوك غير المرن	عند المفاصل اللدنة، أي نقاط منفصلة	على خطوط الخضوع، أي خطوط منفصلة
السلوك خارج المنطقة الموضعية	يُفترض أن يبقى مرنًا	يُفترض أن يبقى صلبًا
آلية الانهيار	تشكل مفاصل لدنة متعددة حتى تنشأ آلية	تشكل خطوط خضوع تولد آلية انهيار
نهج التحليل	مبسط بالتركيز على المقاطع الحرجة التي تتشكل فيها المفاصل اللدنة	مبسط بافتراض حدوث الخضوع على خطوط الخضوع
التنبؤ بالحمل النهائي	من خلال مفاصل لدنة موضعية عند العزوم القصوى	من خلال خطوط الخضوع التي تمثل مسارات العمل الأدنى
استخدام مبادئ الحد الأدنى	يعطي تقدير حد أدنى لحمل الانهيار	يعطي تقدير حد أدنى لحمل الانهيار
التطبيق الرئيس	تحليل السعة النهائية لحمل الأحمال في الإطارات	تحليل السعة النهائية لحمل الأحمال في البلاطات والصفائح

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

57 ميكانيكا الضرر

سيكتب هذا الفصل لاحقًا خبير بارز في ميكانيكا الضرر.

57.1 مخطط مقترح بواسطة ChatGPT

57.1.1 الدوافع والأسس الفيزيائية (~1.5 صفحة)

نبدأ من الصورة التجريبية: التشقق المجهري بوصفه آلية التدهور السائدة في المواد شبه الهشة، والحاجة إلى التمييز بين الضرر واللدونة. ومن شأن منحنى أو منحنيين تجريبيين نموذجيين (الشد والضغط أحاديا المحور للخرسانة) أن يربطا النظرية بالمشاهدة مباشرة.

57.2 الإطار الديناميكي الحراري (~2 صفحتان)

متباينة كلاوزيوس–دوهيم، ومتغير الضرر D (قياسي في البداية)، والإجهاد الفعال $\tilde{\sigma} = \sigma/(1-D)$، وطاقة الانفعال المرن للمادة المتضررة. يبيّن هذا الإطار أن ميكانيكا الضرر ليست بناءً اعتباطيًا، بل تنتمي إلى الصياغة الديناميكية الحرارية نفسها التي تنتمي إليها اللدونة — وهو أمر أساسي للقراء الملمين بها.

57.3 الضرر القياسي متساوي الخواص: نموذج مازار (~4 صفحات)

هذا هو جوهر الفصل. الانفعال المكافئ $\tilde{\varepsilon}$، ومعيار الضرر $f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \le 0$، وقانون التطور ذي الفرعين (D_t وD_c، المدمجين بواسطة α_t وα_c). وتحديد المعلمات من الاختبارات القياسية. وسيكون المثال العددي المتتبَّع خطوة بخطوة على طول مسار التحميل أحادي المحور ذا قيمة خاصة للطلاب.

57.4 عدم التناظر بين الشد والضغط والتأثير أحادي الجانب (~2 صفحتان)

انغلاق الشقوق تحت الضغط والاستعادة الجزئية للصلابة — وهي من أهم الدقائق في نمذجة المنشآت تحت التحميل الدوري أو الانحناء المركب. ويشمل ذلك الشرط أحادي الجانب ومعالجته في النموذج.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

57.5 اقتران الضرر واللدونة (~2 صفحتان)

عرض موجز للنماذج المقترنة — الانفعالات غير العكوسة وتدهور الصلابة — التي لا غنى عنها للخرسانة تحت الضغط وللفولاذ. كما تُعرض فكرة الإجهاد الفعال للوميتر ودورها في الصياغات المقترنة الحديثة (Grassl–Jirásek، وDesmorat).

57.6 التنظيم والموضوعية بالنسبة إلى الشبكة (~3 صفحات)

هذا هو أهم أقسام الفصل لجمهور العناصر المحددة. يؤدي التليّن الموضعي إلى اعتماد مرضي على الشبكة. ويُعرض نموذج حزمة الشقوق (Bažant) بوصفه معالجة عملية — من خلال ضبط فرع التليّن بحجم العنصر h للمحافظة على طاقة الكسر G_f. كما تُعرض بدائل أكثر صرامة، هي الضرر اللاموضعي التكاملي وصياغة التدرج الضمنية. وسيكون التوضيح العددي للمشكلة وحلها مفيدًا جدًا.

57.7 التطبيق على عناصر الجوائز والأعمدة (~3 صفحات)

يربط هذا القسم الفصل ببقية الكتاب. إذ يُدخل متغير الضرر في صلابة المقطع — فتُخفَّض EI وEA بدلالة حقل الضرر المتكامل على المقطع العرضي. ويُعرض مفهوم الطول المميز في عنصر الجائز. وإذا سمحت المساحة، فسيكون مثال لجائز أو عمود من الخرسانة المسلحة يوضح التدهور التدريجي للصلابة وآثاره الإنشائية خير توضيح.

57.8 تحديد المعلمات ودليل عملي (~1.5 صفحة)

جدول لمعلمات نموذج مازار مع مجالات نموذجية للخرسانة العادية وعالية الأداء. وإجراء تحديدها من الاختبارات القياسية (الاختبار البرازيلي، والضغط أحادي المحور، والانحناء ثلاثي النقاط).

57.9 ملاحظات ببليوغرافية وقراءات إضافية (~0.5 صفحة)

المراجع التأسيسية — Mazars 1984/1986، وLemaitre 1985، وPijaudier-Cabot & Bažant 1987، وBažant & Oh 1983 — وبعض مقالات المراجعة الحديثة للقراء الراغبين في التوسع.

—

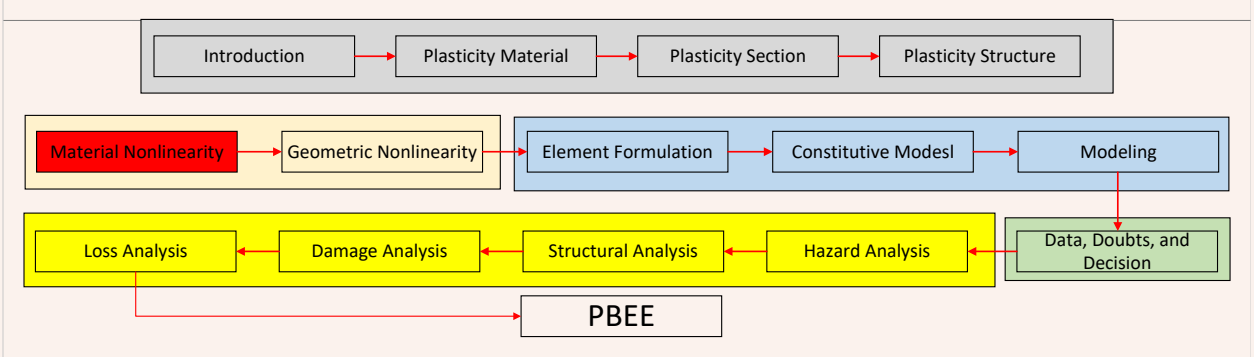
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58 التحليل غير الخطي؛ المادة

ملخص

بعد المقدمة الموجزة للتحليل غير الخطي في §53.1، يتعمق هذا الفصل في التحليل غير الخطي لسلوك المواد في الهندسة الإنشائية، مع التركيز على تقنيات النمذجة العددية وتطبيقاتها. وبدءًا من عرض عام لطرائق إيجاد جذور المعادلات اللاخطية، بما فيها طريقة Newton وطريقة القاطع والمخططات الصريحة، يوضح الفصل نقاط القوة والقيود لكل نهج في حل المعادلات الإنشائية المعقدة. ثم تُعرض طرائق التحكم التزايدي بالحمل القائمة على طريقة Newton لتحليل استجابة المنشأ تحت القوى المطبقة. وأخيرًا يستكشف الفصل تقنيات التحكم بالإزاحة، التي توفر نهجًا مستقرًا ودقيقًا لالتقاط استجابات ما بعد الذروة والتليّن، وهو أمر حاسم في تحليل المواد الهشة والمواد ذات التليّن الانفعالي. ومن خلال هذه الطرائق، يقدم الفصل مجموعة أدوات شاملة لمعالجة المسائل اللاخطية في التحليل الإنشائي، ويؤكد أهمية الحلول التكرارية في تطوير التطبيقات الهندسية.

58.1 إيجاد الجذور عدديًا 1752
58.1.1 طرائق Newton 1753
58.1.2 طريقة القاطع 1759
58.1.3 الطريقة الصريحة 1760
58.2 العلاقة بميكانيكا المنشآت؛ الطريقة الضمنية 1762
58.3 طرائق التكامل 1762
58.3.1 التحكم بالحمل 1764
58.3.2 التحكم بالإزاحة 1771



58.1 إيجاد الجذور عدديًا

1 تُعد طرائق إيجاد الجذور ضرورية في التحليل غير الخطي لحل المعادلات التي قد لا توجد لها حلول تحليلية تقليدية.

2 توفر التقنيات العددية نُهجًا تكرارية لتقريب هذه الحلول، وهي حاسمة في التحليل الإنشائي غير الخطي.

3 يقدم هذا القسم عدة طرائق أساسية لإيجاد الجذور، مع التركيز على طريقة Newton وطريقة القاطع وتقنيات إيجاد الجذور الصريحة.

4 لكل طريقة مزاياها الفريدة وسيناريوهات تطبيقها. فطريقة Newton، مثلًا، تستفيد من المشتقات لتحقيق تقارب سريع، ما يلائم المسائل ذات الدوال حسنة السلوك والمشتقات المتاحة. وفي المقابل تقرّب طريقة القاطع المشتقات عدديًا، وهو ما يفيد عندما يصعب أو يستحيل اشتقاق المشتقات تحليليًا.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نستكشف تطبيق طرائق إيجاد الجذور هذه على اللاخطيات المادية، ونبحث موقعها في السياق الأوسع للهندسة الإنشائية.

58.1.1 طرائق Newton

58.1.1.1 مقدمة

طريقة Newton تقنية تكرارية واسعة الاستخدام وعالية الرتبة لإيجاد جذور المعادلات اللاخطية، وتستخدم مشتقة الدالة لتقريب الحل تباعًا.

تحسّن الطريقة تقريبها في كل تكرار، وتهدف إلى تقارب سريع عندما يكون التخمين الابتدائي قريبًا من الجذر الحقيقي. وبخلاف الطرائق الأبسط، تكون طريقة Newton فعالة خصوصًا للدوال الملساء حسنة السلوك بسبب معدل تقاربها التربيعي، أي إن الخطأ يتناقص بدرجة كبيرة في كل خطوة تحت الظروف الملائمة.

في تطبيقات الهندسة الإنشائية، تفيد طريقة Newton خصوصًا في التحليل غير الخطي، إذ تساعد على حل معادلات الاتزان الناشئة تحت حالات التحميل. وفي المسائل الخطية تتقارب طريقة Newton سريعًا إلى الحل الوحيد.

أما في المعادلات اللاخطية فقد يكون التقارب أصعب، إذ قد لا يوجد حل دائمًا أو قد توجد جذور محتملة متعددة. وفي هذه الحالات توفر طريقة Newton مسارًا فعالًا إلى حل تقريبي إن وُجد، ما يجعلها قيّمة في المسائل الهندسية العملية التي يصعب فيها الوصول إلى حلول دقيقة.

ينبغي التمييز بين طريقة Newton لإيجاد الجذور وطريقة Euler (§52.3.4) المستخدمة للتنبؤ استنادًا إلى قيمة ابتدائية ومعادلة تفاضلية حاكمة.

يوجد دائمًا حل وحيد للمسائل الخطية؛ أما المسائل اللاخطية فلا يمكن ضمان وجود حل ولا وحدانيته، فمثلًا قد لا يقطع القطع المكافئ محور x، بينما يقطعه متعدد الحدود التكعيبي دائمًا.

عندما يوجد حل، فإن أفضل ما يمكن الحصول عليه حل عددي تقريبي.

أكثر فئات الحلول العددية استخدامًا هي "طرائق Newton" أو "Quasi Newton". وقد تشمل الطرائق الأخرى طريقة التنصيف، ذات التقارب الخطي فقط.

58.1.1.2 متسلسلة Taylor والخطْيَنة

توسع متسلسلة Taylor أداة رياضية أساسية لتقريب الدوال اللاخطية بالتعبير عنها متسلسلةً لانهائية حول نقطة مختارة.

وبقطع المتسلسلة بعد الحدود الأولى القليلة، يمكن الحصول على صورة خطية للدالة. ويكون هذا التقريب الخطي مفيدًا خصوصًا في الطرائق التكرارية، مثل طريقة Newton، حيث تعتمد كل خطوة لاحقة على حل معادلة خطية مبسطة.

في تطبيقات إيجاد الجذور، توفر الخطْيَنة وسيلة قابلة للمعالجة لتقريب سلوك الدوال المعقدة اللاخطية قرب تخمين ابتدائي، بما يسمح بتقارب فعال إلى الحل.

تسعى الطريقة في جوهرها إلى حل $f(x) = 0$ بخطْيَنة المعادلة حول التقريب الحالي x_n، ثم حل المعادلة الخطية الناتجة لإيجاد التقريب التالي x_{n+1}.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18 على غرار طريقة Euler، المعادلة 52.6، تبدأ طريقة Newton بمتسلسلة Taylor التي تعبّر عن الدالة بمتسلسلة لانهائية بالنسبة إلى النقطة $\overline{x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2!}f''(\overline{x}) + \dots \\ &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \underbrace{O(|x-\overline{x}|^2|)}_{\xi^2} \end{aligned}$$

بإهمال الحدود عالية الرتبة نحصل على دالة خطية:

$$L(x) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x})$$

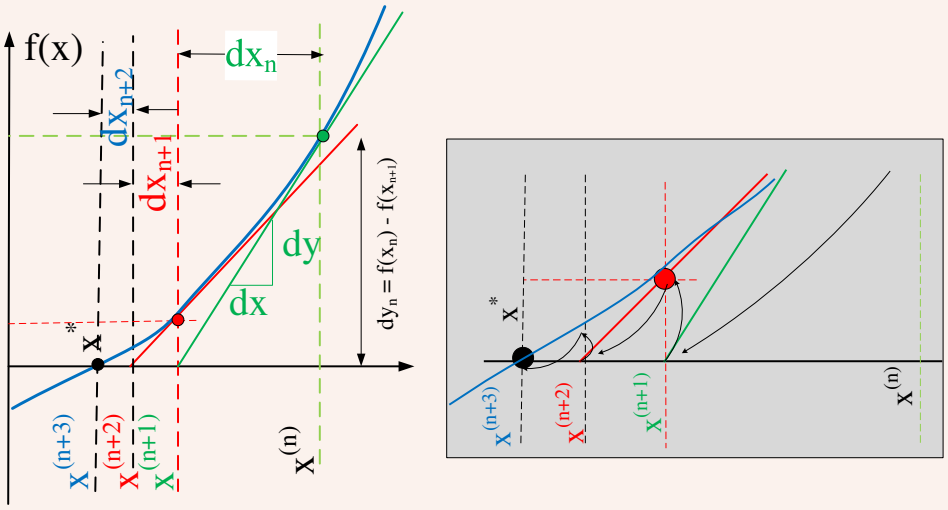
19 إذا كانت $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ دالة في متغيرين، فإن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ و$\mathbf{x} = \lfloor\ x_1 \quad x_2\ \rfloor^T$. ويكون توسع متسلسلة Taylor حول النقطة الثابتة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \tag{58.1}$$

وبإهمال الحدود عالية الرتبة نكون قد خطّيّنا المعادلة مجددًا.

20 إذا وضعنا $f(x) = 0 \Rightarrow x \simeq \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$. هذا حل تقريبي عند $\overline{x}$ يفترض توافر $f'(x)$ أيضًا، الشكل 58.1.

21 في إجراء تكراري يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كما يأتي:



شكل 58.1: طريقة Newton

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x_n) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{f'(x_n)} = \frac{\overbrace{f(x_{n+1})}^{0} - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n}$$

يُضمن التقارب عندما:

$$|\delta x_n| \leq \varepsilon_\delta \quad \text{أو} \quad |f(x_{n+1})| \leq \varepsilon_f$$

```
1: procedure NEWTON(TOL, f(x), f'(x), x_0)
2:     x ← x_0
3:     while abs(f(x)) > tol do
4:         x ← x − f(x)/f'(x)
5:     end while
6: end procedure
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.1.1.2.1 مثال 58.1: طريقة Newton؛ قياسية

حل $f(x) = Tan(x) - x = 0$، وهي معادلة الانبعاج الحاكمة لعمود مفصلي–مفصلي (§29.3.2.1.3، المعادلة 29.23).

```
clear
;20 = maxiter;4-e1=epsi;0 = n;4.3 = xn
("norm xn n ")disp;(" ")disp
;.0=xn_m1
maxiter:1 = i for
;1-2^(xn)sec=df_dx;xn-(xn)tan=f_x
;df_dx/f_x - xn = xn
;(xn_m1-xn)abs = my_norm
(("my_norm,xn ,i,"e16.15% e16.15% i5%" )sprintf)disp
epsi> my_norm if
break
end
;xn=xn_m1
end
```

لاحظ أن هذه المسألة شديدة الحساسية لأن $\tan x$ غير مستمرة؛ وقد يؤدي تغير صغير في التخمين الابتدائي إلى تباعد الحل.

22 لمتغير واحد:

$$x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n} \Rightarrow f(x) + f'(x)(x_2 - x_1) \simeq 0$$

23 يمكن بالطبع تعميم الطريقة على دالتين $f_1(\mathbf{x})$ و$f_2(\mathbf{x})$ بدلالة مجهولين:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

أو:

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \\ f_2(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

حيث $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})$ مصفوفة Jacobian:

$$\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{58.2}$$

وتمثل $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ حاصل ضرب مصفوفة في متجه؛

24 لاحظ أن الصف i^{th} يقابل تدرج الدالة المركبة i^{th}، أي f_i (∇f_i.)، وأن المشتقة القياسية استبدلت بمصفوفة Jacobian ذات الأبعاد 2×2 للمشتقات الجزئية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

25 ويمكننا تعميم المسألة أكثر لتشمل m معادلات لاخطية ذات m مجاهيل:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \quad \text{و} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}$$

وتكون مصفوفة Jacobian $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ لهذه المنظومة مصفوفة $m \times m$، حيث تقابل الخانة (i, j) المشتقة الجزئية للدالة i بالنسبة إلى المتغير j، أي $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$.

26 في كل خطوة من طريقة Newton، تكون لدينا قيمة تقريبية $\mathbf{x}_n$ للحل الدقيق $\mathbf{x}^*$ للمعادلات اللاخطية $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. ومن ثم نحدد $\mathbf{x}_{n+1}$ بحل منظومة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} L^{(n)}(\mathbf{x}_{n+1}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

لاحظ التشابه مع $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = f'(x)$ عندما $m = 1$.

27 في كل خطوة ينبغي حساب مصفوفة Jacobian عند نقطة جديدة، ثم حل منظومة معادلات خطية باستعمال هذه المصفوفة المحدثة.

28 يكون التقارب متحققاً عندما:

$$\| \delta\mathbf{x}_n \| \leq \varepsilon_\delta \quad \text{أو} \quad \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) \| \leq \varepsilon_f$$

حيث $\| \mathbf{v} \|$ هي *القاعدة الإقليدية* للمتجه $\mathbf{v}$ (وبدقة أكبر ينبغي كتابتها $\| \mathbf{v} \|_2$)، وتحسب بأخذ الجذر التربيعي لمجموع مربعات مركبات المتجه:

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

في فضاء ذي N أبعاد.

```
1:  procedure NEWTON(f, J, x0, MAX_ITER, TOL)
2:      x ← x0
3:      i ← 0
4:      while i < max_iter or norm(f(x)) > tol do
5:          fx ← f(x)                    ▷ احسب الدالة عند النقطة الحالية
6:          Jx ← J(x)                    ▷ احسب مصفوفة Jacobian عند النقطة الحالية
7:          p = solve(Jx, -fx)           ▷ احسب اتجاه البحث باستعمال مصفوفة Jacobian
8:          x = x + p                    ▷ حدّث النقطة الحالية
9:          i ← i + 1                    ▷ زد عداد التكرار
10:     end while
11:     Return x                         ▷ آخر تكرار
12: end procedure
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.1.1.3 التقارب وتقدير الخطأ

29 يجب التأكد من تقارب الطريقة وتحديد رتبة الخطأ.

30 إذا كانت $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$، نعرّف معامل التقارب $\rho^{(n)}$ بأنه نسبة الخطأ في x_{n+1} إلى الخطأ في x_n. وبالقرب من الحل الدقيق (x^*، حيث $g(x^*) = x^*$) يكون $\rho^{(n)} \simeq g'(x^*)$، ويسمى معامل التقارب المقارب.

31 لتحديد $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

إذا كان $f'(x^*) \neq 0$ وكان $f''(x^*)$ محدوداً، فإن $g'(x^*)$=0، ونستنتج أن معامل التقارب يؤول إلى الصفر إذا وعندما كان $x_n \to x^*$.

32 لتحديد الخطأ $x^* - x_n$:

$$x^* - x_{n+1} = x^* - x_n - \frac{f(x^*) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

ومن ثم، إذا تقارب التكرار إلى x^*، نحصل على:

$$\underbrace{x^* - x_{n+1}}_{\text{الخطأ عند } n+1} \simeq -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \underbrace{(x^* - x_n)^2}_{\text{الخطأ عند } n} \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

ما دام كل من $f'(x^*)$ و$f''(x^*)$ محدوداً وغير صفري.

33 يميل الخطأ إلى أن يكون متناسباً مع مربع الخطأ في x_n عندما يؤول n إلى اللانهاية.

34 أما الطرق الأخرى (مثل طريقة التنصيف) فلها تقارب خطي.

58.1.1.4 ملاحظات ختامية

طريقة Newton:

1. تتطلب صيغة تحليلية للمشتقة.
2. إذا كانت القيمة الابتدائية بعيدة جداً عن القيمة الصحيحة، فقد لا يكون التقارب مضموناً (ولهذا يجب وضع حد أعلى لعدد التكرارات).
3. تفشل إذا كان الميل قريباً من الصفر (كما يحدث قرب الحمل الأقصى).
4. تعمل بأفضل صورة مع المنحنيات ذات الانحناء المنخفض.
5. تقاربها تربيعي:

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leq c \| x_n - x^* \|^2$$

ولكننا عملياً لا نعرف قيمة c.

58.1.1.4.1 مثال 58.2: طريقة Newton؛ متجه

حل $f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \\ x_3 - x_2 \sin(x_1) \\ 3x_2 + 4x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ -x_2 \cos(x_1) & -\sin(x_1) & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
9-2^(3)x+2^(2)x+2^(1)x] (x)@ = f
((1)x)sin*(2)x-(3)x
; [(3)x*4+(2)x*3
: x i r mat Jacobian The %
(3)x*2 (2)x*2 (1)x*2] (x)@ = J
1 ((1)x)sin- ((1)x)cos*(2)x-
; [4 3 0
: guess l a i t i n i %
; [1;2-;1-] = x
;10 = maxiter
;12-e1 = tol
(' ')disp
(' (delta)norm (3)x (2)x (1)x iteration')disp
maxiter:1=n for
;(x)f\(x)J- = delta
; delta + x = x
..., 'e8.3% e10.5% e10.5% e10.5% i5%' )sprintf)disp
; (((inf ,delta)norm, (3)x , (2)x ,(1)x ,n
tol > (inf ,delta)norm if
break
end
end
maxiter==n if
("satisfied not tolerance  converged have not may :Warning")disp
end
```

58.1.2 طريقة القاطع

طريقة القاطع خوارزمية لإيجاد الجذور تقرّب تكرارياً جذر معادلة لاخطية للوصول إلى تقريب أفضل لجذر الدالة $\mathbf{f}(\mathbf{x})$، وذلك بإنشاء خطوط قاطعة متعاقبة بين تخمينين ابتدائيين.

بخلاف طريقة Newton التي تتطلب مشتقة الدالة، تستعمل طريقة القاطع تقريب الفروق المحدودة، ولذلك تكون ذات قيمة خاصة عندما يصعب حساب المشتقات أو يستحيل.

في كل تكرار، تقرّب طريقة القاطع الجذر بالاستقراء من ميل الخط القاطع المرسوم بين التقريبين الأخيرين. ويوفر هذا الميل تقديراً للمشتقة، ما يسمح للطريقة بالتقارب إلى الجذر باستعمال قيم الدالة فقط، من دون حساب صريح للمشتقات.

مع أن طريقة القاطع تتقارب عادة أبطأ من طريقة Newton، فإن عدم اعتمادها على المشتقات قد يجعلها الخيار المفضل في التطبيقات المعقدة، ومنها التحليل الإنشائي ونمذجة المواد، حيث قد لا تتوفر المشتقات الدقيقة.

39 يمكن النظر إلى طريقة القاطع بوصفها تقريباً بطريقة الفروق المحدودة لطريقة Newton. غير أن طريقة القاطع سبقت طريقة Newton تاريخياً.

40 عندما يكون حساب $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ شبه مستحيل، كما في حالة $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ التي قد لا تكون معرفة تحليلياً، فإننا نحدد مصفوفة Jacobian عددياً بالاعتماد على التقريب البسيط:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}$$

وبالتعويض عن $\mathbf{J}\mathbf{x}_n)^{-1}$:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \underbrace{\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}}_{\simeq J^{-1}(\mathbf{x}_n)} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

```
1 ,x0 ,fprocedure SECANT_METHOD(
fx0 ← f(x0)
تهيئة القيم
fx1 = (x1)
i ← 0
كرّر حتى التقارب أو بلوغ العدد الأقص
x1) > tol  &  i < max_iter while
احسب تقريباً جديداً للجذر
− fx1 ∗ (x1 − x0)/(fx1 − fx0)
fx2 ← f(x2)
حدّث القيم للتكرار التالي
x0 ← x1
fx0 ← fx1
x1 ← x2
fx1 ← fx2
i ← i + 1
end while
أعد الجذر وعدد التكرارات المستخدم
i ,x1 Return
end procedure
```

41 خلافاً لطريقة Newton، نحتاج إلى تخمينين ابتدائيين $\mathbf{x}_0$ و$\mathbf{x}_1$ لبدء الطريقة.

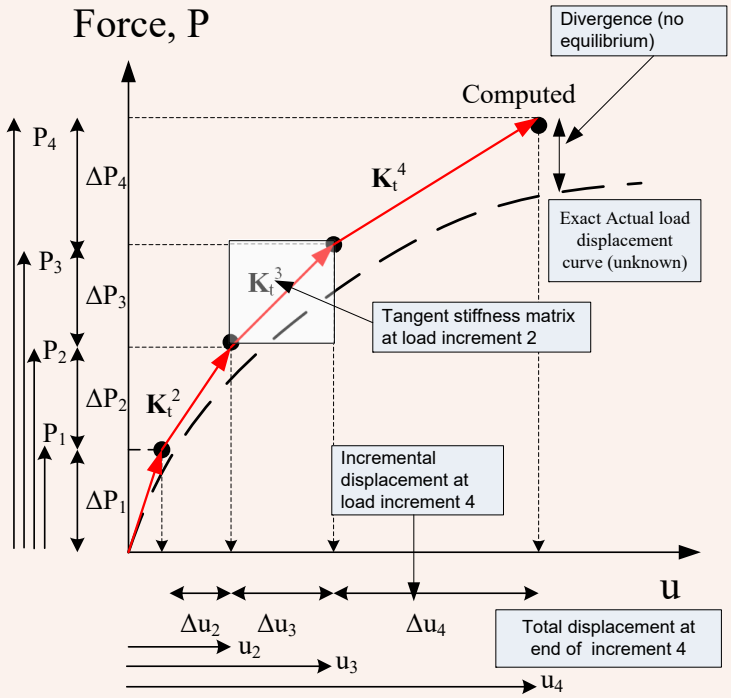
58.1.3 الطريقة الصريحة

42 في مخطط التكامل الصريح (المعروف أيضاً باسم "خطوة بخطوة")، يطبق الحمل تزايدياً، وفي نهاية كل زيادة، الشكل 58.2:

1. احسب الصلابة المماسية بالاستناد إلى الإزاحات الحالية، وهي ميل منحنى الحمل-الإزاحة؛

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. اعكس مصفوفة الصلابة واضربها في زيادة الحمل للحصول على زيادة الإزاحة المقابلة؛
3. أضف زيادة الإزاحة إلى مجموع الزيادات السابقة للحصول على الإزاحة الفعلية المقابلة للحمل الفعلي، أي مجموع زيادات الحمل السابقة كلها.



شكل 58.2: مخطط التكامل الصريح

43 الميزة الرئيسة هي إمكان الحصول على حل دائماً.

44 أما العيب الرئيس فهو أننا لا نتحقق في نهاية كل زيادة من تحقق الاتزان بين القوى الداخلية والخارجية. وقد يؤدي ذلك إلى حل متباعد مع زيادة الحمل. إلا أن بعض البرامج المتقدمة تتحقق من توازن الطاقة بدلاً من الاتزان.

45 ومن المعالجات الجزئية لهذه المشكلة اعتماد زيادات حمل صغيرة جداً لتقليل الأخطاء.

46 ينبغي استخدام هذه الطريقة بحذر شديد، إذ سيُحصل دائماً على حل مهما كانت جودة النموذج ومعاملاته أو سوؤها.

47 ولسوء الحظ، توجد نماذج تأسيسية شديدة الهشاشة عند تشغيلها ضمن مخطط تكامل ضمني، فتُستخدم نتيجة لذلك، أو يساء استخدامها، ضمن مخطط صريح.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.2 العلاقة بميكانيكا المنشآت؛ الطريقة الضمنية

48 تمثل الطرائق الضمنية ركناً أساسياً في ميكانيكا المنشآت، ولا سيما عند تحليل المسائل اللاخطية التي يجب فيها الحفاظ على الاتزان تحت الحمل.

49 يعني تحقيق الاتزان في التحليل الإنشائي موازنة القوى الداخلية والخارجية عند عقد المنشأ. ويعبر عن هذا التوازن بمعادلة لاخطية يعتمد فيها متجه القوى الداخلية على الإزاحات، ولذلك تكون المسألة لاخطية بطبيعتها.

50 نستعرض في هذا القسم استخدام الطرائق الضمنية، ولا سيما طريقة Newton، لحل الاتزان في تحليلات الحمل التزايدي. وفي كل خطوة يجب أن تؤول القوة المتبقية، أي الفرق بين القوى الخارجية والداخلية، إلى الصفر بما يدل على حالة الاتزان.

51 ومن خلال تحديث الإزاحات تكرارياً، توفر الطرائق الضمنية نهجاً منظماً للوصول إلى هذا التوازن، وتضمن بقاء الحل مستقراً ودقيقاً خلال عملية التحميل.

52 يعد هذا النهج ضرورياً للأنظمة المحافظة، حيث يفترض أن القوى مستقلة عن الإزاحات، ما يتيح تبسيط السلوك الإنشائي المعقد مع الحفاظ على دقة موثوقة.

53 ونسعى مرة أخرى إلى حل المعادلة 49.11 بالشكل:

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\boldsymbol{\Delta}} - \overline{\mathbf{F}}^{o}}_{\mathbf{P}^{int}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^{e}}_{\mathbf{P}^{ext}} = 0$$

يحدد كل من $\mathbf{P}_n^{ext}$ و$\mathbf{P}_n^{int}$ من مبدأ الإزاحة الافتراضية. ولأن متجه القوى العقدية الداخلية $\mathbf{P}_n^{int}$ دالة في الإزاحات العقدية $\mathbf{u}_n$، فإن المسألة لاخطية.

54 في تحليل حمل تزايدي تحقق فيه الاتزان تقريباً عند نهاية الزيادة n، يكون:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n^{ext} - \mathbf{P}_n^{int} = 0$$

وهذه هي القوة المتبقية، التي ينبغي أن تقترب من الصفر مع ازدياد عدد التكرارات n.

55 لذلك نستخدم طريقة Newton لحل:

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{u}) = 0$$

56 لاحظ أننا افترضنا استقلال القوى عن الإزاحات، أي نظاماً محافظاً، وأهملنا تأثيرات $P-\Delta$.

57 يوضح الجدول 58.1 التناظر بين خوارزميات التحكم بالحمل والتحليلات اللاخطية.

58.3 طرائق التكامل

58 تختلف الخوارزمية قليلاً تبعاً لما إذا كنا نطبق حملاً تزايدياً أو إزاحة تزايدية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 58.1: التناظر بين طريقة quasi-Newton في الرياضيات والتحليل الضمني في ميكانيكا المنشآت

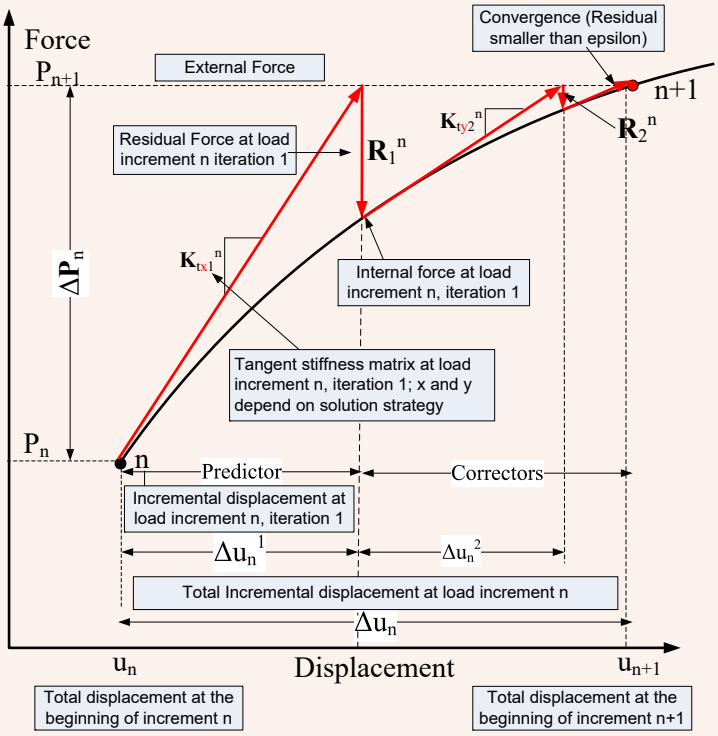
ميكانيكا المنشآت (التحليل الضمني)	طريقة Quasi-Newton (الرياضيات)	الجانب
تحقيق الاتزان في الأنظمة الإنشائية اللاخطية	إيجاد جذر الدالة اللاخطية $f(x) = 0$	**الهدف**
$\mathbf{P}^{int} - \mathbf{P}^{ext} = 0$ (اتزان القوى)	$f(x) = 0$	**المعادلة**
التخمين الابتدائي للإزاحة $\mathbf{u}_0$	القيمة الابتدائية للجذر x_0	**التخمين الابتدائي**
خطْيَنة الاتزان حول $\mathbf{u}_n$ باستعمال الصلابة المماسية $\mathbf{K}_T$	خطْيَنة $f(x)$ قرب x_n باستعمال $f'(x)$	**الخطْيَنة**
$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	**قاعدة التحديث**
خفض القوة المتبقية، مثل $\|\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1})\| \leq \epsilon$	خفض الخطأ، مثل $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \epsilon$	**معيار التكرار**
ينبغي ألا تكون الصلابة المماسية $\mathbf{K}_T$ مفردة	ينبغي ألا تكون المشتقة $f'(x)$ صفراً	**شرط التقارب**
حساب القوى الداخلية ومصفوفة الصلابة المماسية في كل خطوة	حساب الدالة ومشتقتها في كل خطوة	**الكلفة الحسابية**
تقارب تربيعي تحت ظروف الاتزان المثالية	تقارب تربيعي في الظروف المثالية	**معدل التقارب**
شكل اتزان تقريبي تحت الأحمال المطبقة	جذر تقريبي لـ $f(x) = 0$	**النتيجة**

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.3.1 التحكم بالحمل

58.3.1.1 طريقة Newton-Raphson/الصلابة المماسية

59 قبل الدخول في التفاصيل، يمكن شرح النهج ذي الخطوتين من خلال الشكل 58.3.



شكل 58.3: شرح طريقة Newton للتحكم بالحمل

المتنبئ يرتبط بزيادة الحمل ويحدد زيادة الإزاحة كما في الطريقة الصريحة، بالاستناد إلى مصفوفة الصلابة المماسية الابتدائية.

المصحح مرحلة نتحقق فيها من الاتزان تكرارياً.

1. بالاستناد إلى الإزاحات المتنبأ بها، احسب القوى الداخلية المقابلة، وهي لا تقيم في الطريقة الصريحة.
2. احسب القوة المتبقية، وهي الفرق بين القوى الخارجية والداخلية، وينبغي أن تكون صفراً عند تحقق الاتزان.
3. إذا كانت القوة المتبقية أكبر من معيار تقارب يحدده المستخدم، فحدّث الإزاحة بضرب معكوس مصفوفة الصلابة المماسية، وسيأتي مزيد من التفصيل لاحقاً، في القوة المتبقية.
4. حدّث متجه الإزاحة الكلية. ومن ثم يكون لكل زيادة حمل عدة تكرارات حتى يتحقق الاتزان ضمن سماحية عددية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 في نهاية كل زيادة حمل، يجب أن تكون القوى الداخلية في اتزان مع القوى الخارجية. لذلك يكون متجه القوى المتبقية $\mathbf{R}_n^k$:

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{P}}^{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{P}}^{ext} = 0 \tag{58.3}$$

حيث $\overline{\mathbf{P}}^{int}$ متجه القوى الداخلية، ويعرف أيضاً باسم متجه ردود الأفعال .

61 في بداية كل خطوة $n+1$، ننطلق من الإزاحات $\overline{\mathbf{u}}_n$ المحسوبة في الخطوة السابقة من خلال الاتزان، $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ أو $\overline{\mathbf{P}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_n^{ext}$.

62 ثم تزاد القوى الخارجية:

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{ext} \longrightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{P}}^{ext}$$

ونسعى إلى تحديد الإزاحات المقابلة $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}$ بحيث يتحقق الاتزان:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

63 ضمن الخطوة الحالية، المحددة بالدليل السفلي n، نجري تكرارات، يحددها الدليل العلوي k، من أجل تحقيق الاتزان.

64 نأخذ التخمين الابتدائي لـ $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0$ مساوياً لـ $\overline{\mathbf{u}}_n$، وبالاستناد إلى الخطّيَنة حول هذه الحالة الابتدائية يكون:

$$\overline{\mathbf{P}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

حيث $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1$ هو التقريب الأول لزيادة الإزاحة المجهولة، $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1} - \overline{\mathbf{u}}_n$.

65 وبدلاً من ذلك، نبدأ بخطّيَنة المعادلة 58.3، الشكل 58.4:

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = 0 \tag{58.4}$$

حيث i عداد يبدأ من $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_n$. ونلاحظ أن:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{P}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_T$$

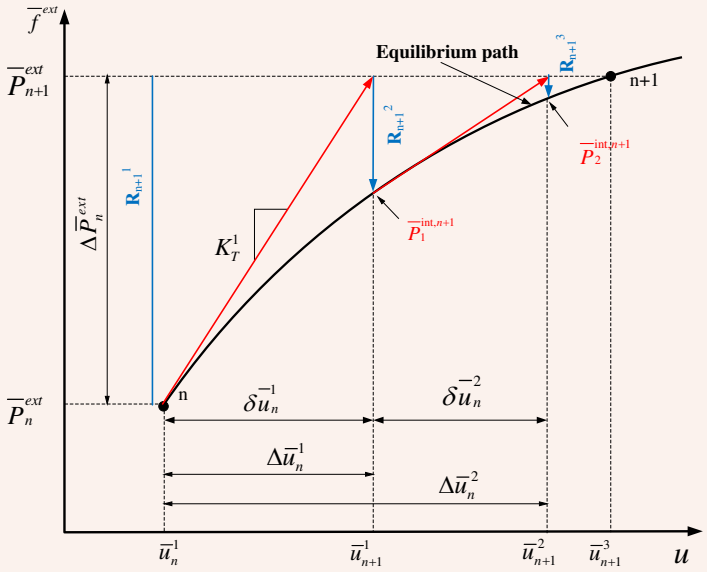
66 وبافتراض ثبات $\overline{\mathbf{P}}^{ext}$ وأن $\mathbf{K}_T$ هي مصفوفة الصلابة المماسية، تعطي المعادلة 58.4:

$$\mathbf{K}_T^i \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -\mathbf{R}_{n+1}^i$$

أو:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i \tag{58.5}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 58.4: طريقة Newton-Raphson للتحكم بالحمل

67 تعطي سلسلة من التقريبات المتعاقبة:

$$\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{u}}_n + \Delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i$$

مع:

$$\Delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = \sum_{k\le i} \delta\overline{\mathbf{u}}_n^k$$

68 تجدر الإشارة إلى أن كل تكرار يتضمن ثلاث خطوات مكلفة حسابياً:

1. تقييم القوى الداخلية، أو ردود الأفعال، $\overline{\mathbf{P}}^{int}$.
2. تقييم مصفوفة الصلابة المماسية العامة $\mathbf{K}_T$.
3. حل منظومة معادلات خطية.

69 مع أن هذه الطريقة تستخدم أقل عدد من التكرارات للتقارب، فقد تكون مكلفة حسابياً بسبب تحليل المصفوفة المطلوب في كل زيادة. لذلك يمكن تعديلها كما في الجدول 58.2.

70 لاحظ أنه يكاد يستحيل تحديد الطريقة الأنسب لمسألة بعينها مسبقاً. وقد يلزم تجربة عدة طرق، وقد تواجه بعضُها مشكلات في التقارب.

58.3.1.2 طريقة Newton-Raphson المعدلة

71 هذه الطريقة مماثلة أساساً لطريقة Newton-Raphson؛ غير أن المعادلة 58.5 تستبدل فيها $(\mathbf{K}_T^i)$ بـ $\overline{\mathbf{K}}_T$، وهي مصفوفة الصلابة المماسية للتكرار الأول في إحدى الحالتين:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 58.2: تنويعات طريقة Newton-Raphson

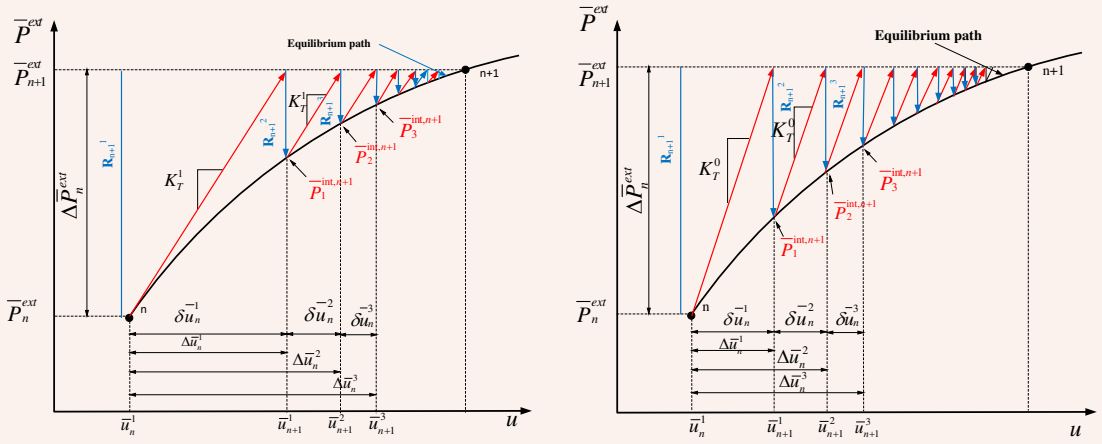
الطريقة	حساب مصفوفة الصلابة المماسية عند			
	المتنبئ (x في K^n_{txi})		المصحح (y في K^n_{tyi})	
	الزيادة	التكرار	الزيادة	التكرار
Newton-Raphson	n	1	n	i
Newton-Raphson المعدلة	n	1	n	1
الصلابة الابتدائية	1	1	1	1

.

- الزيادة الأولى $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}^1_{T,0}$، الشكل 58.5a.
- الزيادة الحالية $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}^1_n$، الشكل 58.5b.

و:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}^i_{n+1}$$



(b) عند الزيادة (a) عند التحليل

شكل 58.5: طريقة Newton-Raphson المعدلة، المماس الابتدائي

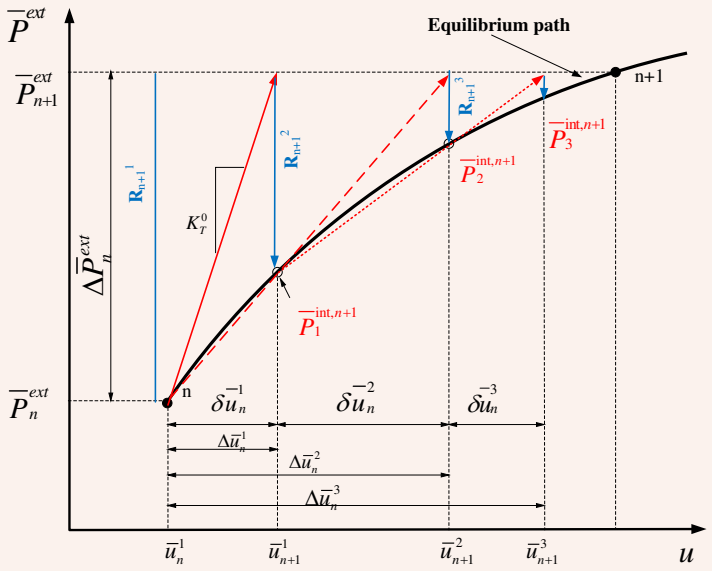
72 بوجه عام، يكون زمن وحدة المعالجة المركزية اللازم للتكرارات الإضافية التي تتطلبها هذه الطريقة أقل من الزمن الموفر نتيجة عدم تجميع مصفوفة الصلابة وتحليلها في كل تكرار. وتجدر الإشارة إلى أن مصفوفة الصلابة المماسية لا يلزم أن تكون مصفوفة الصلابة المماسية الحقيقية؛ فعادة ما ينتج تقريب المصفوفة الحقيقية، أو حتى مصفوفة الصلابة الابتدائية، نتائج مرضية، وإن كان ذلك على حساب تكرارات إضافية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.3.1.3 طريقة Newton بالقاطع

73 تمثل هذه الطريقة حلاً وسطاً بين الطريقتين الأوليين. نبحث أولاً عن إزاحتين بدورتين من طريقة New-ton-Raphson المعدلة؛ ثم ننشئ قاطعاً للمنحنى بين النقطتين ونتخذ خطوة على امتداده، كما في الشكل 58.6.

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$



شكل 58.6: طريقة القاطع التزايدي، أو quasi-Newton

74 بعد ذلك تؤخذ كل خطوة على امتداد قاطع يصل بين النقطتين السابقتين.

75 نبدأ بـ:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1 = -\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^1$$

ثم يمكن تحديد ميل القاطع:

$$(\mathbf{K}_S^2)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1}{(\mathbf{R}_{n+1}^1 - \mathbf{R}_{n+1}^2)}$$

وبعد ذلك:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^2 = -(\mathbf{K}_S^2)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^2$$

ويمكن تعميم هذه العملية إلى:

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_S^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$

$$(\mathbf{K}_S^i)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i}{(\mathbf{R}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{R}_{n+1}^i)}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.3.1.4 معايير التقارب

76 في جميع الطرق السابقة، تستمر التكرارات حتى يتحقق واحد أو أكثر من معايير التقارب المختلفة. ويمكن فرض معايير تقارب نسبية على الإزاحات والأحمال و/أو الطاقة التزايدية لتعريف شروط الإنهاء.

77 من المهم جداً ملاحظة أن عدم التقارب يعني انهياراً موضعياً أو عاماً للمنشأ. وبعبارة أخرى، يقابل الحمل الأقصى الحمل المرتبط بالزيادة الأخيرة.

78 يعرف معيار الإزاحة النسبي بدلالة تصحيحات الإزاحة $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j}$ والإزاحات التزايدية المحدثة $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$، على النحو الآتي:

$$\varepsilon_u = \frac{\| \delta\overline{\mathbf{u}}^{j} \|_2}{\| \Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \|_2}$$

حيث $\| \ldots \|_2$ هي القاعدة الإقليدية.

79 تعرف القاعدة الإقليدية، المعروفة أيضاً بقاعدة L_2، للمتجه $\mathbf{v}$ كما يأتي:

$$\| \mathbf{v} \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right]^{1/2}$$

حيث N هو حجم $\mathbf{v}$.

80 يعرف معيار الحمل النسبي بدلالة الأحمال المتبقية المحدثة $\mathbf{R}^{j+1}$ وردود الأفعال $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$، بأحد الشكلين:

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_2}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_2}$$

أو:

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_\infty}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_\infty}$$

حيث $\| \ldots \|_\infty$ هي قاعدة اللانهاية للمتجه $\mathbf{v}$، وتعرف كما يأتي:

$$\| \mathbf{v} \|_\infty = \max \left(\sum_{i=1}^{N} |v_i| \right)$$

حيث N هو حجم $\mathbf{v}$.

81 يعرف معيار الطاقة التزايدية النسبي بدلالة تصحيحات الإزاحة $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j}$، والأحمال المتبقية المحدثة $\mathbf{R}^{j+1}$، والإزاحات التزايدية المحدثة $\Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$، وردود الأفعال المحدثة $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ كما يأتي:

$$\varepsilon_W = \frac{\delta\overline{\mathbf{u}}^{j} \cdot \mathbf{R}^{j+1}}{\Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}}$$

حيث يمثل البسط التغير في الطاقة التزايدية للتكرار j، ويمثل المقام الطاقة التزايدية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

58.3.1.5 جدول موجز

82 يقارن الجدول 58.3 بين خوارزميات التحكم بالحمل المختلفة في التحليل اللاخطي.

جدول 58.3: مقارنة خوارزميات التحكم بالحمل في التحليل اللاخطي

الجانب	Newton-Raphson	Newton-Raphson المعدلة	طريقة القاطع	الطريقة الصريحة
الهدف	إيجاد جذر دالة لاخطية باستعمال مصفوفة الصلابة المماسية؛ وتحقيق الاتزان	مماثلة لطريقة New-ton-Raphson لكنها تبسط الحساب بإعادة استخدام مصفوفة الصلابة	إيجاد الجذر من دون مشتقة صريحة، باستعمال خطوط قاطعة بين النقاط	تطبيق الأحمال تزايدياً باستعمال صلابة مماسية مبسطة
الاعتماد على المشتقة	تتطلب المشتقة، أي مصفوفة الصلابة المماسية	تتطلب الصلابة المماسية الابتدائية لكنها لا تحدثها في كل تكرار	تقرّب المشتقة باستعمال الفروق المحدودة	لا تتطلب مشتقة
الدقة	عالية، بتقارب تربيعي	متوسطة، أبطأ من Newton-Raphson لكنها كافية غالباً	متوسطة، أبطأ من Newton-Raphson لكنها تتجنب المشتقة الصريحة	دقة أقل؛ وقد يتباعد الحل
الكفاءة الحسابية	مكلفة حسابياً بسبب إعادة حساب مصفوفة الصلابة في كل تكرار	متوسطة، وتعاد فيها الاستفادة من مصفوفة الصلابة الابتدائية	متوسطة؛ تتجنب إعادة حساب الصلابة، وتتطلب تكرارات أقل من الطريقة الصريحة	كفؤة، لكنها تتطلب زيادات حمل صغيرة لتحقيق الدقة
عملية التكرار	دورة متنبئ-مصحح مع التحقق من الاتزان عند كل زيادة	تستعمل مصفوفة الصلابة الابتدائية، مع عدد أقل من عمليات إعادة الحساب	تخمينان ابتدائيان وتقريبات متعاقبة قائمة على القاطع	حساب خطوة بخطوة من دون تكرار في كل خطوة حمل
معايير التقارب	تقارب تربيعي قرب التخمين الابتدائي الصحيح؛ ويتطلب ألا يكون الميل قريباً من الصفر	تقارب أبطأ لكنه ملائم للمسائل التي تكون فيها إعادة حساب الصلابة مكلفة	تقارب خطي، جيد للحالات التي لا تتوفر فيها مشتقات صريحة	لا يفرض التقارب؛ وقد يتباعد الحل
التطبيقات الشائعة	المسائل الإنشائية اللاخطية ذات المشتقات المتاحة	ملائمة للمسائل اللاخطية ذات الكلفة المتوسطة لإعادة حساب الصلابة	الحالات ذات المشتقات المجهولة أو الصعبة الحساب	الحالات التي يفضل فيها التكامل الزمني الصريح
المزايا	تقارب سريع بتكرارات أقل	تخفض العبء الحسابي مع تقارب متوسط	تتجنب حساب المشتقات	تعطي حلاً دائماً
العيوب	كلفة حسابية عالية لكل تكرار	تتطلب تكرارات أكثر مقارنة بطريقة New-ton-Raphson	تقارب أبطأ، وتحتاج إلى تخمينات ابتدائية جيدة	قد تعطي حلولاً غير دقيقة بسبب عدم فرض الاتزان

58.3.2 التحكم بالإزاحة

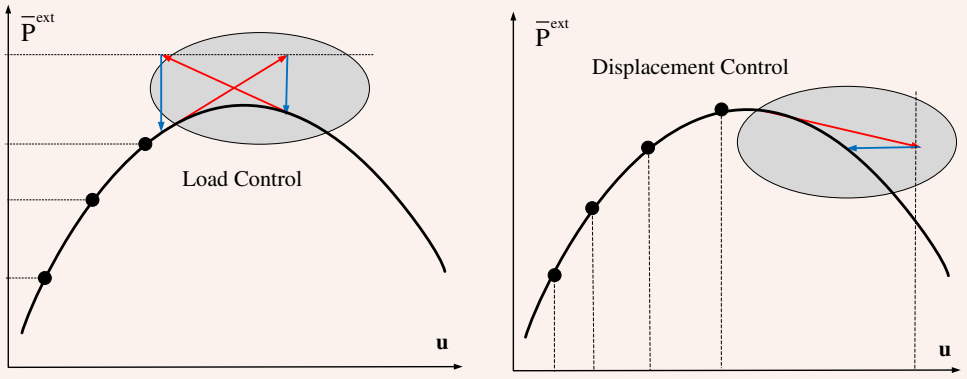
83 طريقة التحكم بالحمل الموصوفة سابقاً قوية جداً ويسهل تصورها. إلا أن الحل قد يتذبذب أو يتباعد أحياناً، وهما علامتان واضحتان على عدم استعادة الاتزان، الشكل 58.7. وفي معظم الحالات يكون ذلك مرادفاً لـ "الانهيار" عند حمل أقصى. وقد يكون الانهيار إنشائياً أو موضعياً في منطقة فرعية فقط.

84 تستخدم طرائق التحكم بالحمل كثيراً في التحليل الإنشائي اللاخطي لتطبيق الأحمال تزايدياً وتتبع استجابة المنشآت. غير أن تقنيات التحكم بالحمل التقليدية قد تصبح إشكالية في الحالات التي تتضمن مواد متليّنة[1] أو سلوكاً بعد الذروة. فعندما يقترب المنشأ من سعة حمله القصوى، قد تظهر في استجابة الحمل–الإزاحة حالات عدم استقرار مثل الانطباق الأمامي أو الرجوع المفاجئ، ما يجعل التقارب القائم على الحمل صعباً أو حتى مستحيلاً.

85 لمعالجة هذه المشكلات، توفر طرائق التحكم بالإزاحة بديلاً قيماً. فبدلاً من تطبيق الأحمال تزايدياً والبحث عن الإزاحة الناتجة، تفرض هذه التقنيات الإزاحات تزايدياً وتحسب القوى الداخلية المقابلة. ويضمن هذا النهج استقرار عملية التحليل بالحفاظ على التحكم في الإزاحات حتى ضمن المناطق التي يظهر فيها منحنى الحمل-الإزاحة سلوكاً معقداً وغير رتيب.

86 يكون التحكم بالإزاحة مفيداً خصوصاً في التقاط استجابات ما بعد الذروة والتليّن، وهي غالباً حاسمة لفهم المطيلية الكاملة أو أنماط انهيار المنشآت، وخاصة تلك المصنوعة من مواد هشة أو ذات تليّن انفعالي كالخرسانة. ومن خلال فرض الاتزان بإزاحات متحكم بها، تعزز الطريقة القدرة على تتبع الاستجابة الإنشائية بعد الحمل الأقصى، وتوفر معلومات أساسية عن المرونة الإنشائية والسعة المتبقية والمطيلية.

87 تحت التحكم بالإزاحة، كما سيشرح لاحقاً، يمكن دائماً تحديد قوة الاستعادة، ما لم يحدث رجوع مفاجئ.



شكل 58.7: طريقة Newton؛ التحكم بالحمل في مقابل التحكم بالإزاحة

88 في التحكم بالإزاحة، نعرف متجه الإزاحات المتبقية $\mathbf{R}_n^k$ كما يأتي:

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{u}}^{int}(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{u}}^{ext} = 0 \tag{58.6}$$

[1] لاحظ القياس مع الشكل O.11، إذ يصبح تحديد المتبقي مستحيلاً قرب الذروة.

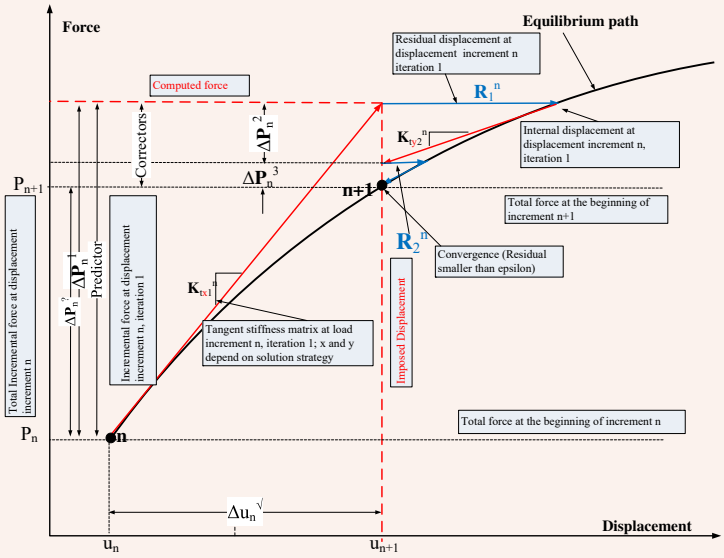
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحظ الفرق مع المعادلة 58.3.

89 لذلك نحتاج، لالتقاط استجابة ما بعد الذروة، إلى اعتماد خوارزمية تحكم بالإزاحة عددياً.

90 في بداية كل خطوة $n+1$، ننطلق من القوى $\overline{\mathbf{P}}_n$ التي حُسبت في الخطوة السابقة من خلال الاتزان، $\mathbf{R}_n^k \approx 0$ أو $\overline{\mathbf{u}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$، الشكل 58.8.

91 ثم تزاد الإزاحات الخارجية من $\overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$ إلى $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{u}}^{ext}$، ونسعى إلى تحديد القوى المقابلة $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}$ من خلال الاتزان، $\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0$ أو $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$. ضمن الخطوة الحالية، المحددة بالدليل السفلي n، نجري تكرارات، يحددها الدليل العلوي k، لتحقيق الاتزان، الشكل 58.8.



شكل 58.8: طريقة Newton؛ التحكم بالإزاحة، قارن بالشكل 58.3

92 نأخذ التخمين الابتدائي لـ $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0$ مساوياً لـ $\overline{\mathbf{P}}_n$، وبالاستناد إلى الخطّيَنة حول هذه الحالة الابتدائية يكون:

$$\overline{\mathbf{u}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$$

حيث $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1$ هو التقريب الأول لزيادة الإزاحة المجهولة، $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1} - \overline{\mathbf{P}}_n$.

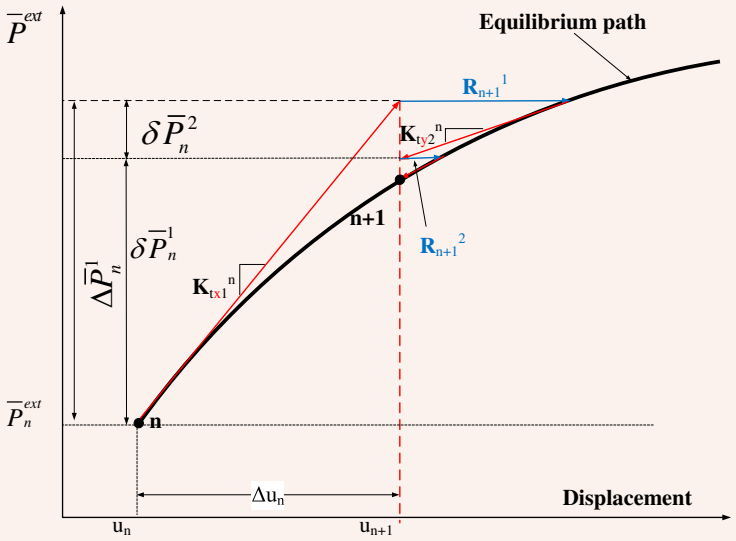
93 وبدلاً من ذلك، نبدأ بخطّيَنة المعادلة 58.6، الشكل 58.9.

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i}) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{P}}}\right)_{n+1}^{i} \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = 0 \tag{58.7}$$

حيث i عداد يبدأ من $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_n$. ونلاحظ أن:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{K}_T$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 58.9: طريقة Newton-Raphson؛ التحكم بالإزاحة

94 وبافتراض ثبات $\overline{\mathbf{u}}^{ext}$ وأن $\mathbf{K}_T$ هي مصفوفة الصلابة المماسية، تعطي المعادلة 58.7:

$$\mathbf{K}_T^i \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = -\mathbf{R}_{n+1}^i$$

أو:

$$\delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$

95 وهكذا تعطي سلسلة من التقريبات المتعاقبة:

$$\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{P}}_n + \Delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^i + \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i$$

مع:

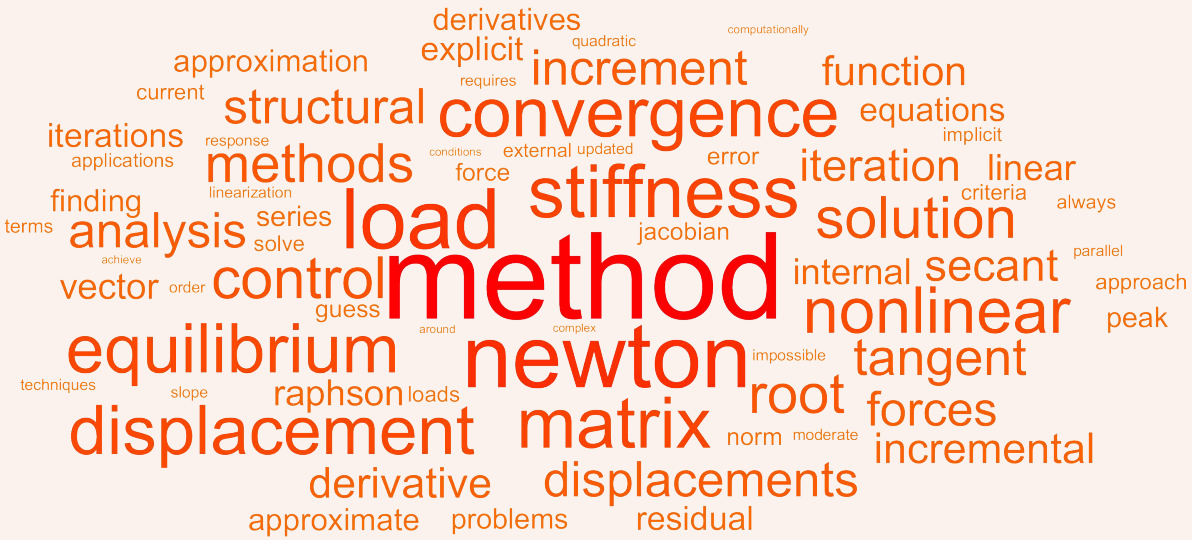
$$\Delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = \sum_{k\le i} \delta\overline{\mathbf{P}}_n^k$$

وبسرعة كبيرة.

96 تجدر الإشارة إلى أن كل تكرار يتضمن ثلاث خطوات مكلفة حسابياً:

1. تقييم الإزاحات الداخلية $\overline{\mathbf{u}}^{int}$.
2. تقييم مصفوفة الصلابة المماسية العامة $\mathbf{K}_T$.
3. حل منظومة معادلات خطية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

59 التحليل غير الخطي؛ الهندسي

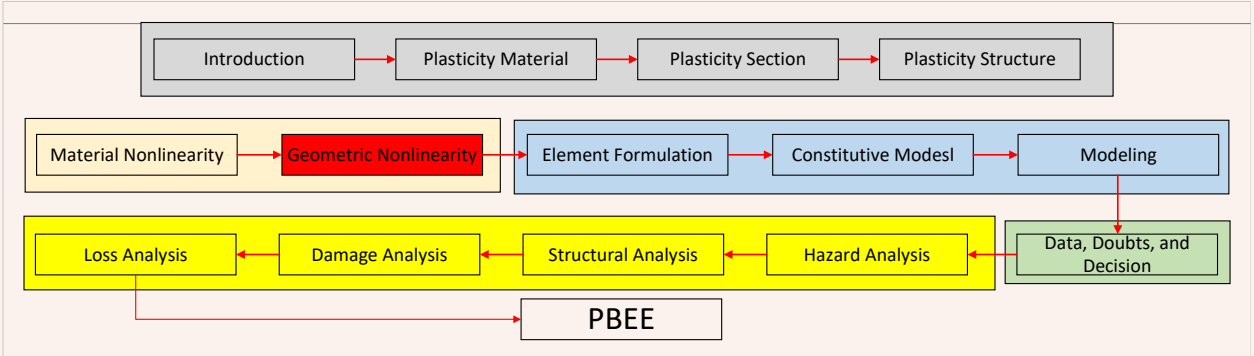
ملخص

تنشأ اللاخطية الهندسية، وهي اعتبار أساسي في التحليل الإنشائي، في الحالات التي تتضمن انفعالات كبيرة و/أو إزاحات كبيرة، ويتطلب كل منهما نهجاً تحليلياً خاصاً. فالانفعالات الكبيرة تستلزم تعديلات على مصفوفة الصلابة المرنة، ما يقود إلى تحليل $P-\delta$، بينما تتضمن الإزاحات الكبيرة تشوهات ثانوية تستلزم تحليل $P-\Delta$. وتؤثر هذه التأثيرات اللاخطية مجتمعة في سعة حمل المنشأ واستقراره وصلابته، وتطرح تحديات إضافية أمام النمذجة الإنشائية الدقيقة.

يبدأ هذا الفصل باشتقاق شامل لمصفوفة الصلابة الهندسية $\mathbf{k}_g$، التي تكمل مصفوفة الصلابة المرنة لأخذ اللاخطيات الهندسية الناتجة من الانفعالات والإزاحات الكبيرة في الحسبان. وهذه المصفوفة ضرورية للتنبؤ الدقيق بأحمال انبعاج العناصر الإنشائية وتقييم أثر الأحمال الجانبية في الصلابة والقوى الداخلية. ثم تستكشف الأقسام اللاحقة تأثيرات التليين أو التقسية التي قد تفرضها الأحمال الجانبية على المنشآت، وما ينجم عنها من تأثير في خصائص الاستقرار والتشوه تحت سيناريوهات تحميل مختلفة.

تقدم خوارزمية تزايدية لمعالجة الطبيعة التكرارية للسلوك الإنشائي اللاخطي. ويعيد هذا النهج خطوة بخطوة حساب صلابة المنشأ في كل مرحلة، ملتقطاً استجابته المتغيرة أثناء التشوه. يؤكد الفصل التطبيق العملي من خلال شفرات MATLAB عديدة مضمّنة فيه، مع توفير نصوص Mathematica بديلة لمن يفضل البرمجة الموجزة. وتتيح هذه الأمثلة تطبيق المبادئ النظرية على حالات واقعية، وتشمل موضوعات مثل تحليل انبعاج الأعمدة والإطارات والانحرافات الكبيرة في الكمرات الكابولية، حيث تؤدي اللاخطية الهندسية دوراً حاسماً. ومن خلال هذه الأمثلة يكتسب القارئ فهماً عملياً لتأثير اللاخطية الهندسية في الأداء الإنشائي، بما يؤهله لحل تحديات هندسية واقعية ومعقدة بفعالية.

59.1 مصفوفة الصلابة الهندسية 1775
59.1.1 الاشتقاق 1776
59.1.2 عدم الاستقرار المرن؛ تحليل التشعب 1778
59.2 التحليل الصريح التزايدي 1788
59.2.1 مثال 59.5: الانحراف الكبير لكمرة كابولية 1790
59.3 إعادة النظر في $P-\Delta$ 1793
59.3.1 مثال 59.6: حمل الانبعاج من دون $\mathbf{K}_{geom}$ 1794



59.1 مصفوفة الصلابة الهندسية

1 تمثل مصفوفة الصلابة الهندسية عنصراً أساسياً في تحليل المنشآت الخاضعة لانفعال كبير، وما يستتبعه من إزاحات كبيرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2 نشتقها أولاً، ثم نطبقها لحساب حمل انبعاج المنشآت عددياً، وبعد ذلك نقيم أثرها في صلابة العنصر، أي في تليينه أو تقسيته.

59.1.1 الاشتقاق

3 نبدأ في هذا القسم باشتقاق ما يسمى مصفوفة *الصلابة الهندسية*، وهي إضافة إلى مصفوفة الصلابة المرنة المشتقة في §49.2.4، وتأخذ حصراً الانفعالات الكبيرة، التي أهملت سابقاً، في الحسبان.

59.1.1.1 الصيغة الضعيفة

4 يجب الآن إعادة النظر في الصياغة الأصلية للعنصر المحدود، القائمة على فرضية الانفعالات الصغيرة والمشروحة في §49.2، لأخذ الانفعالات الكبيرة في الحسبان.

5 كما سبق، نحتاج لتقطيع المسألة بالعناصر المحدودة إلى الحصول أولاً على الصيغة الضعيفة للمعادلة التفاضلية الحاكمة، ثم تطبيق مبدأ طاقة الانفعال الافتراضية. وخلافاً لما سبق، يثرى تعبير الانفعال بحدود إضافية من رتب أعلى كانت مهملة في البداية.

59.1.1.2 الانفعال

6 يمكن تفكيك الانفعال في عنصر كمرة-عمود إلى جزأين:

محوري: يأخذ الإزاحات الكبيرة في الحسبان، من المعادلة O.6:

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{u_{,x}}_{\text{الرتبة الأولى}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)}_{\text{الرتبة الثانية}}$$

حيث u وv هما الإزاحتان المحورية والمستعرضة، على الترتيب. وحد الرتبة الثانية هو "نظير" كتابة معادلة الاتزان في الشكل المتشوه في الحل التحليلي، أو ببساطة أخذ الانفعالات الكبيرة في الحسبان.

انحنائي: من فرضية Euler-Bernoulli، §22.2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\ \sigma_{xx} &= -\frac{My}{I} \end{aligned}\right\} \varepsilon_{xx} = -y\frac{d^2v}{dx^2}$$

7 بإعادة الترتيب، يصبح الانفعال الكلي:

$$\varepsilon_{xx}(x,y) = \underbrace{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{محوري}} \underbrace{-y\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)}_{\text{انحناء}}}_{\text{تشوه صغير}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}_{\text{تشوه كبير}} \tag{59.1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8 لاحظ أن الحد الثاني سالب لأن الإجهادات تكون ضاغطة عندما تكون y موجبة، أي في الأعلى. ويمثل الحدان الأول والثاني مركبتي الانفعال المحوري والانحنائي المألوفتين، أما الحد الثالث، وهو لاخطي، فينتج من علاقة الانفعال-الإزاحة للانحرافات الكبيرة.

59.1.1.3 طاقة الانفعال الداخلية

9 تصبح طاقة الانفعال الافتراضية المرنة للعنصر، التي وردت أصلاً في المعادلة 49.4:

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega$$

10 وبالتعويض من المعادلة 59.1 في $U_i^{(e)}$ نحصل على:

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_L\int_A \left[\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + y^2\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} - y\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\right]E\,dA\,dx$$

11 مع التذكير بأن $\int_A dA = A$ و$\int_A ydA \overset{\text{def}}{=} 0$ و$\int_A y^2dA \overset{\text{def}}{=} I$، وإهمال الحد الأعلى رتبة، وتحت فرضية إجراء تحليل مستقل قبل الانبعاج للتحميل المحوري حيث:

$$P^{(e)} = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow A\frac{du}{dx} = \frac{P^{(e)}}{E}$$

نحصل على:

$$\delta U_i^{(e)} = \delta U_i^{(e,a)} + \delta U_i^{(e,f)} \tag{59.2}$$

$$\delta U_i^{(e,a)} = \frac{1}{2}\int_L EA\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{59.3}$$

$$\delta U_i^{(e,f)} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right]dx \tag{59.4}$$

59.1.1.4 $\mathbf{K}_g$

12 نتبع مجدداً الإجراء نفسه المشروح في §49.2.4 لاشتقاق مصفوفة صلابة عنصر كمرة-عمود خاضع لانفعالات كبيرة. نفترض تمثيلاً دالياً للإزاحات المستعرضة بدلالة إزاحات العقد الأربع:

$$v = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}$$
$$\frac{dv}{dx} = \mathbf{N}_{,x}\bar{\mathbf{u}}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \mathbf{N}_{,xx}\bar{\mathbf{u}}$$

حيث تعطى دوال الشكل بالمعادلة 48.3.

13 يجب أن تساوي طاقة الانفعال الافتراضية الداخلية الشغل الافتراضي الخارجي:

$$\delta U_i^{(e,f)} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI \frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right] dx$$

$$\delta W_e = P^{(e)} \int_0^L \left[\left(\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx}\right)\right] dx$$

$$\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]\mathbf{u}_e = \mathbf{P}$$

$$\left[\mathbf{k}_e^{(e)}\right] = \left[\int_L EI \underbrace{\{\mathbf{N}_{,xx}\}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\lfloor \mathbf{N}_{,xx} \rfloor}_{\mathbf{B}} dx \right]$$

$$\left[\mathbf{k}_g^{(e)}\right] = \left[P^{(e)} \int_L \{\mathbf{N}_{,x}\} \lfloor \mathbf{N}_{,x} \rfloor dx \right] \quad \text{مصفوفة الصلابة الهندسية} \tag{59.5}$$

لاحظ أن حدود مصفوفة الصلابة الهندسية تعتمد فقط على المعاملات الهندسية، أي الطول.

14 بالتعويض عن دوال الشكل:

$$\mathbf{k}_g^{(e)} = \frac{P}{L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{59.6}$$

15 تكون علاقة الاتزان:

$$\mathbf{k}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$

$$\mathbf{k}^{(e)} = \mathbf{k}_e^{(e)} + \mathbf{k}_g^{(e)}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g$$

نلاحظ أن المنشأ يصبح أصلب للحمل الشاد P المطبق من خلال $\mathbf{K}_g$، وأضعف في الضغط.

59.1.2 عدم الاستقرار المرن؛ تحليل التشعب

16 بعد اشتقاق مصفوفة الصلابة الهندسية، نرى كيف يمكن استخدامها لتحديد حمل انبعاج منشأ. لذلك نبحث عن المضاعف λ لمتجه حمل ابتدائي $\overline{\mathbf{P}}^*$، يمكن أن يكون وحدياً، ناتج من تحليل مرن خطي من الرتبة الأولى ويسبب الانبعاج:

$$\overline{\mathbf{P}}_{cr} = \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17 بما أن مصفوفة الصلابة الهندسية تتناسب مع القوى الداخلية:

$$\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_g^*$$

حيث تقابل $\mathbf{K}_g^*$ مصفوفة الصلابة الهندسية للحمل المرجعي $\overline{\mathbf{P}}^*$، الذي يؤخذ عادة مساوياً للوحدة.

18 بما أن مصفوفة الصلابة المرنة $\mathbf{K}_e$ تبقى ثابتة، يمكننا أن نكتب:

$$(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)\overline{\mathbf{u}} - \underbrace{\lambda \overline{\mathbf{P}}^*}_{\overline{\mathbf{P}}_{cr}} = 0$$

19 وتعطى الإزاحات بدورها بـ:

$$\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)^{-1} \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

ولكي تؤول الإزاحات إلى اللانهاية، أي يحدث الانبعاج أو التشعب أو عدم الاستقرار، يجب أن:

$$|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0 \Rightarrow |\mathbf{K}_g^{*-1} \mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{I}| = 0$$

وهذه مسألة قيم ذاتية يمكن منها حل القيم الذاتية $\boldsymbol{\lambda}$.

20 لكن بما أن $\mathbf{K}_g^*$ تحتوي حدوداً صفرية على القطر، المعادلة 59.6، فإننا نستخدم صياغة بديلة:

$$|\mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_g^* + \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}| = 0$$

غير أن $\mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_g^*$ قد لا تكون متناظرة.

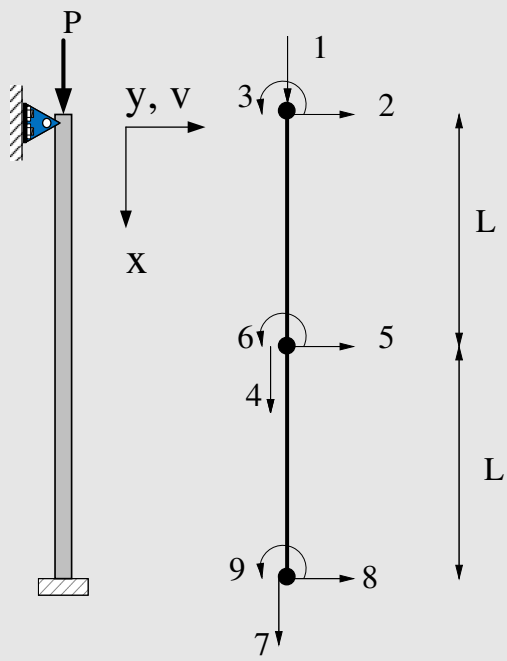
21 تعطي أصغر قيمة لـ λ، أي λ_{crit}، حمل انبعاج المنشأ، وتعطى أحمال الانبعاج بـ:

$$\overline{\mathbf{P}}_{crit} = \lambda_{crit} \overline{\mathbf{P}}^*$$

59.1.2.1 مثال 59.1: انبعاج عمود

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نسعى إلى تحديد حمل انبعاج عمود مثبت-مفصلي عددياً، ومقارنة النتائج بالحل التحليلي في §29.3.2.1.3. تعطى مصفوفتا الصلابة المرنة والهندسية بـ:



$$\mathbf{k}_e^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_g^1 = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

يمكن الآن تجميع مصفوفتي صلابة المنشأ $\mathbf{K}_e$ و$\mathbf{K}_g$ من صلابة العناصر. وبحذف الصفوف والأعمدة 2 و7 و8 و9 المقابلة للإزاحات الصفرية في العمود، نحصل على:

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -6L & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15}L^2 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{4}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

مع ملاحظة أن $\mathbf{K}_g^* = \mathbf{K}_g$ في هذه الحالة عندما $P = 1$، فإن المحدد $|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0$ يؤدي إلى:

$$\begin{array}{c|} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 - \frac{2}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} \\ 0 & 0 & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 24 - \frac{12}{5}\frac{\lambda L^2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} & 0 & 8L^2 - \frac{4}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} \end{vmatrix} \end{array} = 0$$

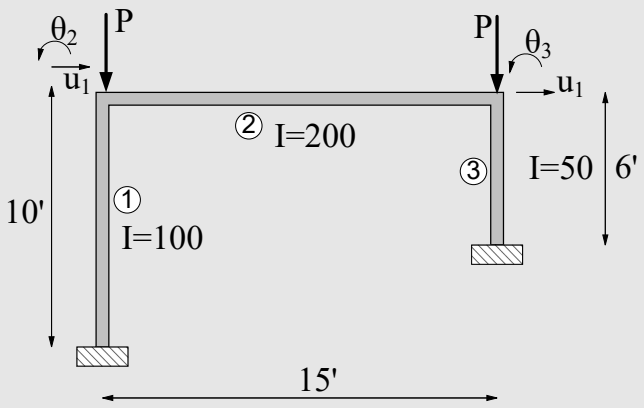
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عند هذه النقطة يمكن الحل عددياً أو جبرياً. ولنكن جريئين بما يكفي لاختيار الثاني: بإدخال $\phi = \frac{AL^2}{I}$ و $\mu = \frac{\lambda L^2}{EI}$، يصبح المحدد:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \\
1 & \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\
4 & -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 2\left(2-\frac{\mu}{15}\right) & -6L+\frac{\mu}{10} & 2+\frac{\mu}{30} \\
5 & 0 & 0 & -6L+\frac{\mu}{10} & 12\left(2-\frac{\mu}{5}\right) & 0 \\
6 & 0 & 0 & 2+\frac{\mu}{30} & 0 & 4\left(2-\frac{\mu}{15}\right)
\end{array} = 0$$

بتوسيع المحدد، نحصل على المعادلة التكعيبية في μ، وهي $3\mu^3 - 220\mu^2 + 3,840\mu - 14,400 = 0$، وأصغر جذر لها $\mu = 5.1772$. ومن ثم يكون حمل انبعاج العمود ذي الطول $2L$ هو $P_{cr} = \lambda = \frac{5.1772EI}{L^2}$. الحل الدقيق لعمود طوله L هو: $P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2}EI = \frac{(4.4934)^2}{(2L)^2}EI = 5.0477\frac{EI}{L^2}$ ومن ثم تزيد القيمة العددية على القيمة الدقيقة بنحو 2.6 بالمئة.

59.1.2.2 مثال 59.2: انبعاج إطار؛ حل Matlab



أصغر معامل تضخيم لحمل الانبعاج λ يساوي $2,017$ kip.

حل Matlab

```
Function Main %
matrices the zero %
; (6,6,3)zeros=Gamma ; (6,6,3)zeros=K ; (6,6,3)zeros=k
ksi and , 4^in , 2^in : units properties Structural %
;29000=EE;[50 200 100]=II ;[18 34.6 24.5]=A
1 Element %
,EE)stiff=[(1,:,:)Gamma,(1,:,:)K,(1,:,:)k] ; [0,120]= j ; [0,0]= i
; ( j ,i,(1)A,(1)II
2 Element %
,EE)stiff=[(2,:,:)Gamma,(2,:,:)K,(2,:,:)k] ;[180,120]= j ; j= i
; ( j, i,(2)A,(2)II
3 Element %
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
,EE)stiff=[(3,:,:)Gamma,(3,:,:)K,(3,:,:)k] ;[48 ,180]= j      ;j= i
                                              ; ( j, i,(3)A,(3)II
use we what of transpose the is this that Note % matrix ID Define %
                          ; [11- 10- 9- ;3 8- 1;2 7- 1 ;6- 5 4-]=ID
                                      matrix LM the Determine %
            ;[11- 10- 9- 3 8- 1 ;3 8- 1 2 7- 1 ;2 7- 1 6- 5- 4-]=LM
                           matrix stiffness augmented Assemble %
                                          ; (11)zeros=Kaug
                                             1:3=elem for
                                           1:6=r for
                                ; ((r,elem)LM)abs=lr
                                         1:6=c for
                             ; ((c,elem)LM)abs=lc
      ; ( elem, c,r)K+(lc, lr)Kaug=( lc , lr)Kaug
                                        end
                                             end
                                                  end
                                    ;( 1:3, 1:3) Kaug=Ktt
                                                ;[1 0 1]=P
                                   matrices the zero %
           ; (6,6,3)zeros=Gamma ; (6,6,3)zeros=G ; (6,6,3)zeros=g
                                                1 Element %
 P)gstiff=[(1,:,:)Gamma,(1,:,:)G,(1,:,:)g] ; [0,120]= j ;  [0,0]= i
                                                ; ( j ,i,(1)
                                                2 Element %
P)gstiff=[(2,:,:)Gamma,(2,:,:)G,(2,:,:)g] ;[180,120]= j ;[0,120]= i
                                                ; ( j, i,(2)
                                                3 Element %
 P)gstiff=[(3,:,:)Gamma,(3,:,:)G,(3,:,:)g] ;[48 ,180]= j      ;j= i
                                                ; ( j ,i,(3)
                     matrix stiffness geometric augmented Assemble %
                                          ; (11)zeros=Gaug
                                             1:3=elem for
                                             1:6=r for
                                  ; ((r,elem)LM)abs=lr
                                           1:6=c for
                               ; ((c,elem)LM)abs=lc
                    ; (elem,c,r)G+(lc,lr)Gaug=(lc,lr)Gaug
                                                end
                                                   end
                                                      end
                                   ;(1:3,1:3) Gaug=Gtt
                                                ;(3)eye=I
M  to go workable not if first this try %          Ktt*.(Gtt)inv=M
                                                Gtt*.(Ktt)inv=
                                   (I-,M)eig=[pcrit,V]
                                   Function Stiffness%
                    ( j , i ,A, II ,EE)stiff =[Gamma,K, k] function
                                   length the Determine %
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                ; (2^((1)i-(1)j)+2^((2)i-(2)j)) sqrt=L
                                                alpha angle the Compute %
                                   ; ((1)i-(1)j,(2)i-(2)j) atan2=alpha
                                                Gamma matrix rotation form %
    ; 0  0          0           0   (alpha)sin  (alpha)cos ]=Gamma
      ; 0  0          0           0   (alpha)cos  (alpha)sin-
      ; 0  0          0           1   0           0
      ; 0  (alpha)sin (alpha)cos  0   0           0
      ; 0  (alpha)cos (alpha)sin- 0   0           0
    ; [ 1  0          0           0   0           0
        system coordinate local in matrix stiffness element form %
                                                    ;A*EE=EA ; II*EE=EI
      ; 0         ,0          ,L/EA , 0         ,0          ,L/EA] =k
      ; 2^L/EI*  ,3^L/EI*12- ,0    ,2^L/EI*6   ,3^L/EI*12 , 0
      ;L/ EI*2   ,2^L/EI*6-  ,0    ,L/EI*4     ,2^L/EI*6  ,0
      ;0         ,0          ,L/EA ,0          ,0          ,L/EA-
      ;2^L/EI*6- ,3^L/EI*12  ,0    ,2^L/ EI*6- ,3^L/EI*12 ,0
  ; [ L/EI*4    ,2^L/ EI*6- ,0    ,L/EI*2     ,2^L/EI*6  ,0
            system coordinate global in matrix stiffness Element %
                                                    ;Gamma*k *'Gamma=K
                                                                end
                                        Function Stiffness Geometric %
                                 (j,i,P)gstiff =[ Gamma,G,g ] function
                                        ength l the Determine %
                                ; (2^((1)i-(1)j)+2^((2)i-(2)j)) sqrt=L
system  coordinate  local in matrix stiffness geometric  Element %
                    ;  0       0      0    0          0      0]*L/P-=g
                    ;10/L      6/5-   0    10/L       6/5    0
                    ;2/30^L-   10/L-  0    2/15^L*2   10/L  0
                    ;   0      0      0    0          0      0
                    ;10/L-     6/5    0    10/L-      6/5-   0
                ;[ 2/15^L*2    10/L-  0    2/30^L-    10/L  0
                                                alpha angle the Compute %
                                   ; ((1)i-(1)j,(2)i-(2)j) atan2=alpha
                                                Gamma matrix rotation form %
  ; 0  0            0           0  (alpha)sin  (alpha)cos ]=Gamma
  ; 0  0            0           0  (alpha)cos  (alpha)sin-
  ; 0  0            0           1  0           0
  ; 0  (alpha)sin   (alpha)cos  0  0           0
  ; 0  (alpha)cos   (alpha)sin- 0  0           0
; [ 1  0            0           0  0           0
system  coordinate  global in matrix stiffness geometric  Element%
                                                    ;Gamma*g *'Gamma=G
                                                                end
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

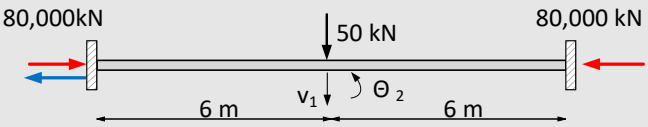
59.1.2.3 مثال 59.3: انبعاج إطار؛ حل Mathematica

حل Mathematica

```
                                        (* constants Initialize *)
    e1 12 6=l3 12 15=l2 12 10=l1 50=i3 200=i2 100=i1 0=a3 0=a2 0=a1
                                                  e1=e3 e1=e2 29000=
                            (* matrices stiffness elastic Define *)
                                                  }=:[_i,_l,_a,_e]ke
      0 ,          0 , l/a e- ,          0 ,          0 ,  l/a e}
                                                                ,{
l/i e 6 , 3^l/i e 12- ,      0 ,  2^l/i e 6 ,  3^l/i e 12 ,      0}
                                                                ,{  2^
l/i e 2 ,  2^l/i e 6- ,      0 ,    l/i e 4 ,   2^l/i e 6 ,      0}
                                                                ,{
      0 ,          0 ,  l/a e ,          0 ,          0 , l/a e-}
                                                                ,{
/i e 6- ,  3^l/i e 12 ,      0 , 2^l/i e 6- , 3^l/i e 12- ,      0 }
                                                                ,{ 2^l
l/i e 4 ,  2^l/i e 6- ,      0 ,    l/i e 2 ,    2^l/i e6 ,      0 }
                                                              { {
     [i3,l3,a3,e3]ke=ke3 ;[i2,l2,a2,e2]ke=ke2 ;[i1,l1,a1,e1]ke=ke1
                           (* matrices stiffness geometric Define *)
                                                  }l/p=:[_p,_l]kg
  10/l  ,  6/5 , 0} ,{        0 ,      0 , 0 ,        0 ,    0 , 0}
                                                ,{     10/l ,  6/5 - , 0 ,
     0 ,    0 , 0} ,{ 2/30^l - , 10/l - , 0 , 2/15^l 2 , 10/l , 0}
                                                ,{        0 ,      0 , 0 ,
    l - , 10/l , 0} ,{   10/l - ,   6/5  , 0 ,   10/l - , 6/5- , 0}
                                  { { 2/15^l 2 , 10/l - , 0 , 2/30^
                                                        [1,l1]kg=kg1
                                                        [1,l3]kg=kg3
  (* matrices stiffness geometric and elastic structure Assemble *)
                                                             }=ke
      [[2,3]]ke3 ,           [[2,3]]ke1 , [[2,2]]ke3+[[2,2]]ke1 }
                                                                ,{
      [[3,6]]ke2 , [[3,3]]ke2+[[3,3]]ke1 ,           [[3,2]]ke1 }
                                                               ,{
   ke3+[[6,6]]ke2 ,           [[6,3]]ke2 ,           [[3,2]]ke3 }
                                                    { {  [[3,3]]
                                                             }=kg
             ,{  [[2,3]]kg3 , [[2,3]]kg1 , [[2,2]]kg3+[[2,2]]kg1 }
             ,{           0 , [[3,3]]kg1 ,           [[3,2]]kg1 }
           { {  [[3,3]]kg3 ,          0 ,           [[3,2]]kg3 }
          (* (1=p note) p of terms in loads critical Determine *)
                                                             1=p
  ]N=modshap ;[[keigen]Eigenvalues]N=pcrit ;ke . [kg]Inverse=keigen
                                                [[keigen]Eigensystems
```

59.1.2.4 مثال 59.4: أثر الحمل المحوري في التشوه الانحنائي

نسعى في هذا المثال إلى تقييم أثر القوى المحورية الضاغطة أو الشادة في صلابة عنصر كمرة-عمود. وقد حلت هذه المسألة تحليلياً في §29.2.2.



باستخدام عنصرين لتمثيل الكمرة-العمود، تكون درجات الحرية الوحيدة هي الانحراف والدوران عند منتصف البحر، مع إهمال التشوه المحوري.

Matlab

```
clc;all close ;clear
structure element 2 a for Initialization %%
matrices the zero %
Gamma;(6,6,2)zeros=Kg;(6,6,2)zeros=kg;(6,6,2)zeros=K;(6,6,2)zeros=k
;(6,6,2)zeros=
Pa and ,4^m ,2^m properties Structural %
;e92=EE;3-e2=II;1=A
loads axial 'Elements %
;[1,1]*e48-=Fax
stiffness element the compute to stiff function the Call %%
ones rotation the and matrices
1 Element %
;[6,0]=j;[0,0]=i
,II,EE)stiff_1=[(1,:,:)Gamma,(1,:,:)Kg,(1,:,:)kg,(1,:,:)K,(1,:,:)k]
;((1)Fax,j,i,A
2 Element %
;[12,0]=j;j=i
,II,EE)stiff_1=[(2,:,:)Gamma,(2,:,:)Kg,(2,:,:)kg,(2,:,:)K,(2,:,:)k]
;((2)Fax,j,i,A
matrix LM the Determine %%
]=LM
;3 2 1 6 5 4
;[9 8 7 3 2 1
matrix stiffness augmented Assemble %%
;(9)zeros=Kgaug;(9)zeros=Kaug
1:2=elem for
1:6=r for
;((r,elem)LM)abs=lr
1:6=c for
;((c,elem)LM)abs=lc
;(elem,c,r)K+(lc,lr)Kaug=(lc,lr)Kaug
;(elem,c,r)Kg+(lc,lr)Kgaug=(lc,lr)Kgaug
end
end
end
Matrix Stiffness structures the Extract %%
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                ;(1:3,1:3)Kgaug=Kgtt;(1:3,1:3)Kaug=Ktt
                                multiplier load buckling Find %%
                        ;(B)eig/.(3,1)eye*1-=lambda;Kgtt*(Ktt)inv=B
                node unrestrained the for vector load the Assemble %%
                                                        ;[50,0-,0]=P
                        meters in Displacements the for Solve %%
                                'P*(Kgtt+Ktt)inv=Displacements
   the include to forget not do and forces internal the for Solve %%
                                                actions end fixed
   ]=(2,:,:)dis_global;['(1:3)Displacements,0,0,0]=(1,:,:)dis_global
                                        ;[0,0,0,'(1:3)Displacements
                                                        1:2=elem for
                ;'(elem,:,:)dis_global*(elem,:,:)Gamma=dis_local
                 dis_local*((elem,:,:)kg+(elem,:,:)k)=int_forces
                                                                end
 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++%
                (P,j,i,A,II,EE)stiff_1=[Gamma,Kg,kg,K,k] function
                                        {exampes above from}red\
```

Mathematica

```
                                        (* constants Initialize *)
;12=l2;12=l1 ;i1=i2;3/12^l 1=i1 ;1=a2 ;1=a1 ;["out.mat"]OpenWrite
                                        ;e1=e3;e1=e2;200000=e1
 p 6=l2 l=l1 6=l i1=i2 i=i1 load ;theta1-Pi=theta2;[8/Pi]N=theta1
                                        {50,0-}=load 80000-=
                        (* matrices stiffness elastic Define *)
                                        }=:[_i,_l,_a,_e]ke
  0 ,          0 , l/a e- ,          0 ,          0 ,  l/a e}
                                                        ,{
e 6 , 3^l/i e 12- ,      0 ,  2^l/i e 6 ,  3^l/i e 12 ,      0}
                                                        ,{  2^l/i
e 2 ,  2^l/i e 6- ,      0 ,    l/i e 4 ,   2^l/i e 6 ,      0}
                                                        ,{    l/i
  0 ,          0 ,  l/a e ,          0 ,          0 , l/a e-}
                                                        ,{
 6- ,  3^l/i e 12 ,      0 , 2^l/i e 6- , 3^l/i e 12- ,     0 }
                                                        ,{ 2^l/i e
e 4 ,  2^l/i e 6- ,      0 ,    l/i e 2 ,    2^l/i e6 ,     0 }
                                                        { {    l/i
                    [[i2,l2,a2,e]ke]N=ke2 ;[[i1,l1,a1,e]ke]N=ke1
              (* matrices stiffness elastic structure Assemble *)
                                                        }]N=ke
               ,{[[2,3]]ke2+[[5,6]]ke1 ,[[2,2]]ke2+[[5,5]]ke1 }
             [{ {[[3,3]]ke2+[[6,6]]ke1 ,[[3,2]]ke2+[[6,5]]ke1 }
   ,"out.mat"]WriteString ;[[ke1]MatrixForm,"out.mat"]WriteString
                                        ;[[ke2]MatrixForm
                        [[ke]MatrixForm,"out.mat"]WriteString
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                (* matrices stiffness geometric Define *)
                                                        } l/p=:[_l,_p]kg
  l   ,   6/5  ,  0} ,{          0 ,       0 , 0 ,          0 ,     0 , 0}
                                                ,{      10/l  ,   6/5 - , 0 ,     10/
  0 ,     0 , 0} ,{ 2/30^l - , 10/l - , 0 , 2/15^l 2 , 10/l , 0}
                                                ,{          0 ,       0 , 0 ,
 l - , 10/l , 0} ,{    10/l - ,    6/5  , 0 ,    10/l - , 6/5- , 0}
                                                { { 2/15^l 2 , 10/l - , 0 , 2/30^
                                                [[l2,p]kg]N=kg2 ;[[l1,p]kg]N=kg1
                    (* matrices stiffness geometric structure Assemble *)
                                                                    }]N=kg
                      ,{[[2,3]]kg2+[[5,6]]kg1 ,[[2,2]]kg2+[[5,5]]kg1 }
                    [{ {[[3,3]]kg2+[[6,6]]kg1 ,[[3,2]]kg2+[[6,5]]kg1 }
                      (*  p wrt normalize and loads critical Determine *)
                  [p [keigen]Eigenvalues]N=pcrit ;ke . [kg]Inverse=keigen
   is value exact ,6^10  1.11=pcrit lowest gives this that Note *)
                                                                (* 6^10 1.095
          (* matrices stiffness structure geometric to elastic Add *)
                                                                  kg+ke=k
            (* displacements for solve and matrix stiffness Invert *)
                                                [load . km1]N=dis [k]Inverse=km1
                                                 (*1 element of Displacements *)
                                          {[[2]]dis ,[[1]]dis ,0 ,0 ,0 ,0}=dis1
                                                                  kg1+ke1=k1
             (*  forces axial with 1 element for forces end Member *)
                                                        [dis1 . k1]N=endfrc1
          (*  forces axial without 1 element for forces end Member *)
 ,0 ,0 ,0 ,0}=disnop1 ;[load . knopm1]N=disnop ;[ke]Inverse=knopm1
                                                        {[[2]]disnop ,[[1]]disnop
                                                 (*1 element of Displacements *)
                                                     [disnop1 . ke1]N=endfrcnop1
```

بعكس مصفوفتَي الصلابة المرنة والهندسية المجمعتين:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -0.00012123 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -0.0001125 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{P=0} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -0.000104944 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{P=80{,}000}$$

قوى نهايتي العضو للعنصر 1 هي:

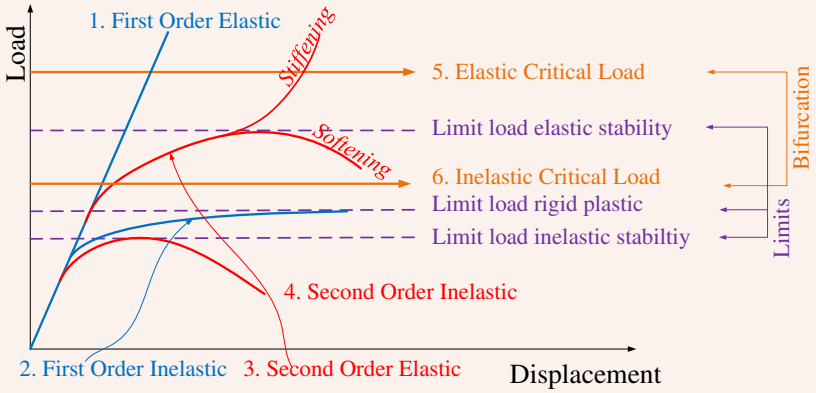
$$\begin{Bmatrix} P_{lft} \\ V_{lft} \\ M_{lft} \\ P_{rgt} \\ V_{rgt} \\ M_{rgt} \end{Bmatrix} = \left[[\mathbf{k}_e^1] + [\mathbf{k}_g^1]\right] \begin{Bmatrix} u_{lft} \\ v_{lft} \\ \theta_{lft} \\ u_{rgt} \\ v_{rgt} \\ \theta_{rgt} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 25. \\ 79.8491 \\ 0. \\ -25. \\ 79.8491 \end{Bmatrix}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 25. \\ 75. \\ 0. \\ -25. \\ 75. \end{Bmatrix}}_{P=0} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 25. \\ 70.8022 \\ 0. \\ -25. \\ 70.8022 \end{Bmatrix}}_{P=80{,}000}$$

تزيد قوة الضغط الإزاحات وعزوم النهايات، بينما تزيد قوة الشد صلابة المنشأ بخفضها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

59.2 التحليل الصريح التزايدي

22 بالإشارة إلى الأنواع المختلفة للتحليل اللاخطي في الشكل 53.5، المعروض هنا مرة أخرى للتوضيح، نركز الآن على التحليل التزايدي، النوع 3.



شكل 59.1: مستويات التحليل الإنشائي

23 نبدأ من:

$$\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right] \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$

ومن الإجراءات البسيطة لحل هذه المعادلة اللاخطية استخدام إجراء خطوة بخطوة أو تزايدي. ويمكن الحصول على الصياغة التزايدية الخطية المقابلة بتطبيق المؤثر التزايدي Δ:

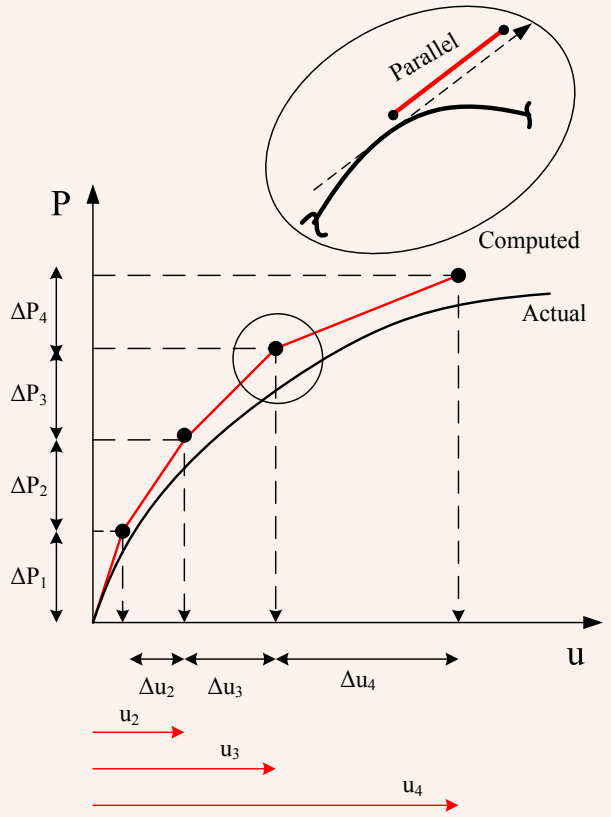
$$\{\Delta\overline{\mathbf{u}}\}_i = \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]_i^{-1} \{\Delta\overline{\mathbf{P}}\}_i$$

24 توضح الطريقة في الشكل 59.2، وهو نسخة مبسطة من الشكل المقابل في الشكل 58.2.

25 الإجراء بسيط جداً ويسهل برمجته:

1. طبّق زيادة حمل ΔP_i عند كل زيادة i.
2. في نهاية كل زيادة:
   (a) حدّث الإزاحة الكلية $u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$.
   (b) حدّث الهندسة $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta\mathbf{u}_i$ واحصل على الأطوال الجديدة.
   (c) حدّث مصفوفة التحويل.
   (d) حدّث مصفوفتَي الصلابة المرنة والهندسية.
3. لاحظ أننا لا نتحقق من الاتزان في نهاية كل زيادة، وسيأتي مزيد من التفصيل لاحقاً، وإذا اتخذنا خطوات صغيرة بما يكفي فينبغي ألّا يتباعد الحل كثيراً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 59.2: النهج الصريح التزايدي للاخطية الهندسية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. ينبغي أن يأخذ تحديث الهندسة أيضاً تأثيرات $P-\Delta$ في الحسبان.

26 تذكّر أن هذا تحليل تزايدي، وكل تحليل مرتبط بزيادة في الحمل. وفي نهاية كل زيادة:

الإزاحات	$\Delta\mathbf{u}^i$;	$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i$
إحداثيات العقد		$\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i$
القوى الداخلية	$\Delta\mathbf{F}^i$;	$\mathbf{F}^i = \mathbf{F}^{i-1} + \Delta\mathbf{F}^i$
ردود الأفعال الكلية	$\Delta\mathbf{R}^i$;	$\mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-1} + \Delta\mathbf{R}^i$

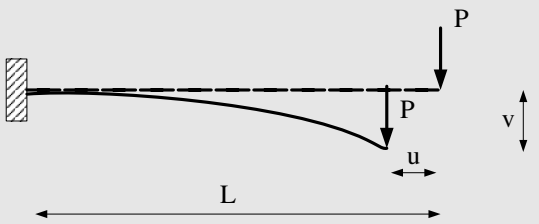
وفي بداية كل زيادة نحتاج إلى إعادة حساب:

- الأطوال وجيوب تمام الاتجاه ومصفوفة التحويل.
- مصفوفة صلابة العنصر بالاستناد إلى إحداثيات العقد المحدثة ومصفوفة التحويل.
- مصفوفة الصلابة الهندسية بالاستناد إلى القوة المحورية الكلية المحدثة، المستخرجة من القوى الداخلية للعنصر، لكل عنصر.

استخدم $\mathbf{k}$ و$\mathbf{k}_g$ لحساب القوى الداخلية.

59.2.1 مثال 59.5: الانحراف الكبير لكمرة كابولية

لا يمكن الحصول على حل الانحراف الكبير لكمرة كابولية من نظرية الكمرات الابتدائية، لأن الفرضيات الأساسية لم تعد صالحة. فالنظرية الابتدائية تهمل على وجه الخصوص مربع المشتقة الأولى في صيغة الانحناء، ولا تقدم تصحيحاً لقصر ذراع العزم مع انحراف الطرف المحمل للكمرة. وعند الأحمال المحدودة الكبيرة تعطي انحرافات أكبر من طول الكمرة! ويصبح مربع المشتقة الأولى وعوامل تصحيح قصر ذراع العزم الإسهام الرئيس في حل مسائل الانحراف الكبير. بينما يعطى الحل التحليلي في §29.2.3، فإننا نبحث هنا عن حل عددي. نفترض أن E = 800 kN/mm^2، وL = 4,000 mm، وI_z = 1e7 mm^4، وA=50 mm^2، وP= 5,000 kN. نقطع القضيب إلى 5 أعضاء متساوية الطول، ونستخدم زيادة مقدارها -10kN، ويمتد محور x من الطرف الحر نحو اليسار. نفترض أن الانحناء لا يغير طول الكمرة، أي إنها غير قابلة للاستطالة. نسعى إلى رسم الإزاحات العقدية المطبّعة للطرف الحر، u وv، بدلالة الحمل اللابعدي.




```
increment Load %
;10000=dP
;dP/5000000=stepNo
matrices the zero %
;(6,2)zeros=nodeCoord
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

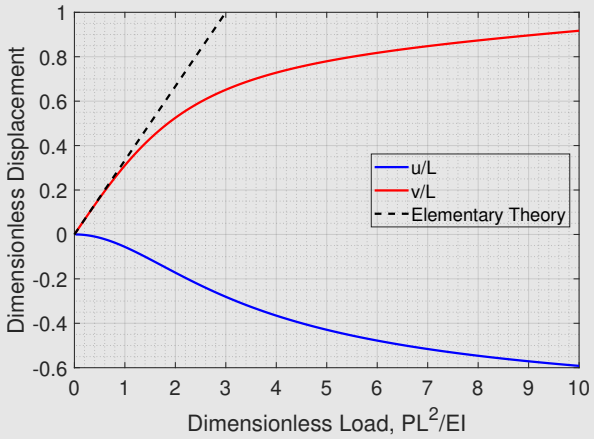
```
Gamma;(6,6,5)zeros=Kg;(6,6,5)zeros=kg;(6,6,5)zeros=K;(6,6,5)zeros=k
                                                    ;(6,6,5)zeros=
zeros=deltaDis_global;(stepNo,15)zeros=dis_global;(stepNo,1)zeros=P
                                                                ;(5,6)
                                                ;(6,5)zeros=int_forces
                    2^mm/kN and ,4^mm ,2^mm properties Structural %
                meters to convert % ;e9800=EE;12-e1*e71=II;6-e50=A
                                        matrix LM the Determine %
                                                                ]=LM
                                                ;15 14 13 18 17 16
                                                ;12 11 10 15 14 13
                                                ;9  8  7  12 11 10
                                                ;6  5  4  9  8  7
                                               ;[3  2  1  6  5  4
                node unrestrained the for vector load the Assemble %
                    ;[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (dP*1-) 0]=deltaP
                                forces axial elements Initial %
                                                ;(5,1)zeros=axF
                                    coordinates node Initial %
                                                    1:6=node for
                            ;[0.8,0*(1-node)]=(:,node)nodeCoord
                                                            end
                                        analysis Incremental %%
                                                stepNo:1=step for
                                               ;dP*step=(step)P
        stiffness element the compute to stiff_1 function the Call %
                                .ones rotation the and matrices
                                                    1:5=elem for
                                        ;(:,elem)nodeCoord=i
                                    ;(:,1+elem)nodeCoord=j
,:,:)Gamma,(elem,:,:)Kg,(elem,:,:)kg,(elem,:,:)K,(elem,:,:)k]
                            ;((elem)axF,j,i,A,II,EE)stiff_1=[(elem
                                                            end
                            matrix stiffness augmented Assemble %
                                ;(18)zeros=Kgaug;(18)zeros=Kaug
                                                                %
                                                    1:5=elem for
                                                    1:6=r for
                                    ;((r,elem)LM)abs=lr
                                                1:6=c for
                                    ;((c,elem)LM)abs=lc
                    ;(elem,c,r)K+(lc,lr)Kaug=(lc,lr)Kaug
                ;(elem,c,r)Kg+(lc,lr)Kgaug=(lc,lr)Kgaug
                                                    end
                                                        end
                                                            end
                        Matrix Stiffness structures the Extract %
                    ;(1:15,1:15)Kgaug=Kgtt;(1:15,1:15)Kaug=Ktt
                        meters in Displacements the for Solve %
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                ;' deltaP*(Kgtt+Ktt)inv=deltaDis
                                      displacements nodal Update %
                                                  1==step if
                                ;deltaDis=(step,:)dis_global
                                                        else
                ;deltaDis+(1-step,:)dis_global=(step,:)dis_global
                                                        end
                                   forces internal the for Solve %
                    ;[' (13:15)deltaDis,0,0,0]=(:,1)deltaDis_global
                                                  2:5=elem for
elem)-15):(1+3*(1-elem)-15))deltaDis]=(:,elem)deltaDis_global
                ;[' ((3*(1-elem)-15):(1+3*elem-15))deltaDis,' ((3*(2-
                                                        end
                                                            %
                                                  1:5=elem for
            ;' (:,elem)deltaDis_global*(elem,:,:)Gamma=dis_local
          ;dis_local*((elem,:,:)kg+(elem,:,:)k)=deltaInt_forces
        ;deltaInt_forces+(elem,:)int_forces=(elem,:)int_forces
                                                        end
                                              forces axial Update %
                                                  1:5=elem for
                                ;(elem,4)int_forces=(elem)axF
                                                        end
                                         coordinates node Update %
                                                  2:6=node for
  (1-node)*3-15))deltaDis+(:,node)nodeCoord=(:,node)nodeCoord
                                        ;' ((2+(1-node)*3-15):(1+
                                                        end
                                                           end
                                                            %
                        ;(4/((:,1)dis_global+4),(II*EE)/2^4*P)plot
                                                       on hold
                    ;('--r',4/((:,2)dis_global-),(II*EE)/2^4*P)plot
                              ;('EI/2^PL ,Load Dimensionless')xlabel
                               ;('Displacement Dimensionless')ylabel
                                          ;('L/v','L/u')legend
                                                            %
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

                  (P,j,i,A,II,EE)stiff_1=[Gamma,Kg,kg,K,k] function
                                          length the Determine %
                          ;(2^((1)i-(1)j)+2^((2)i-(2)j))sqrt=L
                                       theta angle the Compute %
                              ;((1)i-(1)j,(2)i-(2)j)atan2=alpha
                                   Gamma matrix rotation form %
                          ;0 0 0 0 (alpha)sin (alpha)cos]=Gamma
                               ;0 0 0 0  (alpha)cos (alpha)sin-
                                                ;0 0 0 1 0 0
                                ;0 (alpha)sin (alpha)cos 0 0 0
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                        ;0 (alpha)cos (alpha)sin- 0 0 0
                                                        ;[1 0 0 0 0 0
                                                matrix stiffness form%
                                                    ;A*EE=EA; II*EE=EI
        ;0          ,0          ,L/EA- ,0          ,0          ,L/EA]=k
           ;2^L/EI*6  ,3^L/EI*12- ,0     ,2^L/EI*6  ,3^L/EI*12    ,0
           ;L/EI*2    ,2^L/EI*6-  ,0     ,L/EI*4    ,2^L/EI*6     ,0
         ;0          ,0          ,L/EA  ,0          ,0          ,L/EA-
             ;2^L/EI*6- ,3^L/EI*12  ,0     ,2^L/EI*6- ,3^L/EI*12- ,0
            ;[L/EI*4    ,2^L/EI*6-  ,0     ,L/EI*2    ,2^L/EI*6   ,0
                                        global matrix Stiffness %
                                                ;Gamma*k*'Gamma=K
                                   matrix stiffness geometric Form %
                          ;0     ,0 ,0      ,0    ,0 ,0]*((L*30)/P)=kg
                                      ;L*3  ,36- ,0    ,L*3  ,36 ,0
                                   ;2^L*1- ,L*3- ,0  ,2^L*4 ,L*3 ,0
                                        ;0    ,0 ,0      ,0   ,0 ,0
                                     ;L*3-   ,36 ,0   ,L*3- ,36- ,0
                                   ;[2^L*4 ,L*3- ,0 ,2^L*1- ,L*3 ,0
                                global matrix stiffness Geometric %
                                                ;Gamma*kg*'Gamma=Kg
                                                                end
```



59.3 إعادة النظر في $P-\Delta$

27 يجب التمييز بين:

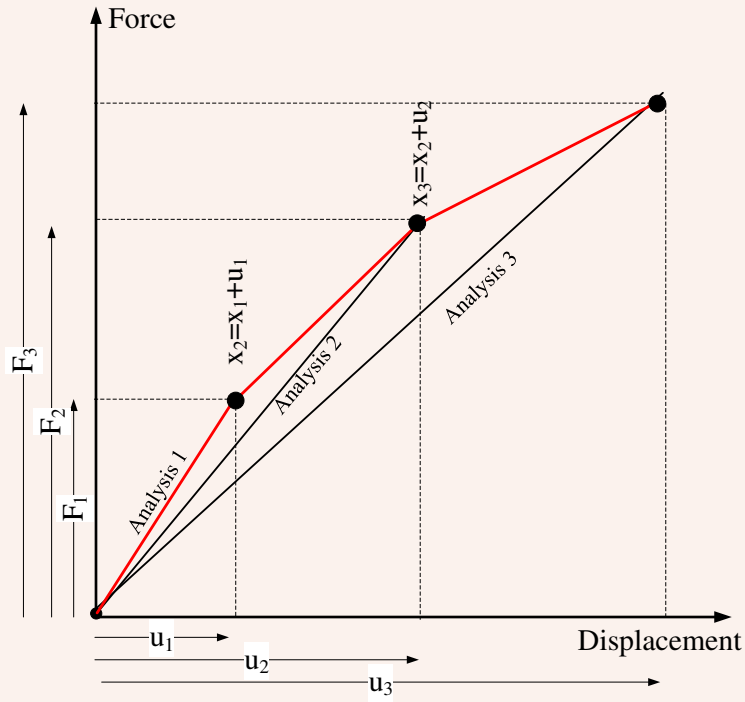
$P-\Delta$ يشير إلى تأثير الرتبة الثانية الناتج من الأحمال والتشوهات المحورية في المنشأ. ويحدث لأن انحرافات المنشأ تحت الأحمال تولد عزوماً إضافية تسبب بدورها تشوهات إضافية. وقد يكون هذا التأثير مهماً في المنشآت العالية أو النحيفة حيث تكون الانحرافات كبيرة نسبياً.

$P-\delta$ يشير إلى اللاخطية الهندسية للمنشأ الناتجة من إزاحة المنشأ نفسه. ويرتبط هذا التأثير بتغير

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

صلابة المنشأ أثناء تشوهه، ما يؤثر بدوره في توزيع القوى الداخلية والإجهادات. وفي هذه الحالة يجب استخدام مصفوفة الصلابة الهندسية.

28 إذا استخدمت عناصر محدودة كثيرة لنمذجة عمود، فيمكن عند الحد إهمال $\mathbf{K}_g$ وإجراء تحليل $P-\Delta$ لالتقاط "حمل الانبعاج" المقابل الذي كان سيتطلب تحليل $P-\delta$، ومن ثم $\mathbf{K}_g$، كما في الشكل 59.3.



شكل 59.3: تحديد حمل الانبعاج من دون مصفوفة الصلابة الهندسية

59.3.1 مثال 59.6: حمل الانبعاج من دون $\mathbf{K}_{geom}$

نسعى إلى تقدير حمل الانبعاج P_{cr}^{est} لعمود مثبت من طرف وحر من الآخر بإجراء 10 تحليلات قاطعة متعاقبة من *الرتبة الأولى*، أي من دون استعمال $\mathbf{k}_g$ وباستعمال $\mathbf{k}_e$ فقط. وفي نهاية كل تحليل نعدل إحداثيات العقد لتعكس تغير الهندسة. لذلك يكون حمل التحليل i هو $P = i.\Delta P$. وينبغي أخذ $\Delta P = P_{cr}^{exact}/20$. ولكل تحليل i: لاحظ أن عدم الاستقرار أو الانبعاج يحدث فجأة.

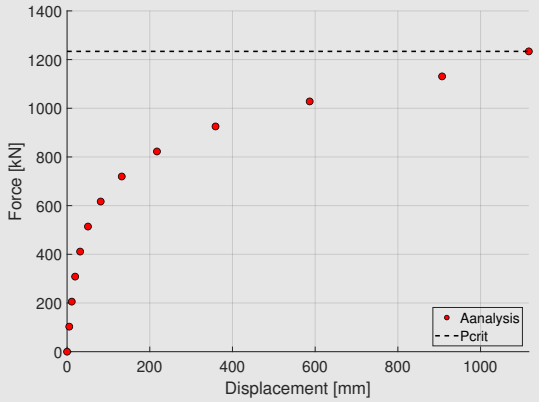
```
strcture element 5 a for Initialization %%
matrices the zero %
;(6,6,5)zeros=Gamma;(6,6,5)zeros=K;(6,6,5)zeros=k
2^mm/kN and ,4^mm ,2^mm properties Structural %

;50=a;50=A;e71 = II;4000 = LL;800 = EE
iternations of Number %
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                                                        ;12 = nincr
                        analytically load buckling the Determine %%
                                                ;a/LL = initialdispl
                                        ;2^(LL*2)/2^pi*II*EE = Pcrit
                                                ;18 17 16] = ID
                                                 ;3  2  1
                                                 ;6  5  4
                                                 ;9  8  7
                                                ;12 11 10
                                               ;[15 14 13
far end free the at are 3 2 1 right to left from going elements %
                                                                right
                                            ;3  2  1  18 17 16]=LM
                                             ;6  5  4  3  2  1
                                             ;9  8  7  6  5  4
                                             ;12 11 10 9  8  7
                                           ;[15 14 13 12 11 10
                                storage for matrices Initialize %
                                                ;(6,2)zeros = u
                                        Analysis Iteration Begin %%
                end fee at displacement itintial %;initialdispl=y
                                                ;(LL/y)atan = theta
                                        coordinates and Goemetry %%
                        meters in coordinates global Initialize %
                                               ;0        0] = coord
                                          ;(theta)tan*5/LL    5/LL
                                        ;(theta)tan*5/LL*2  5/LL*2
                                        ;(theta)tan*5/LL*3  5/LL*3
                                        ;(theta)tan*5/LL*4  5/LL*4
                                           ;[(theta)tan*LL      LL
                                            ; nincr/Pcrit = deltaP
                                               ;0=(1)delta;0=(1)Pt
                                                    nincr:1=iter for
                                                     1:5=elem for
elem)coord,(1,1+elem)coord]=j;[(2,elem)coord,(1,elem)coord]=i
                                                                ;[(1,2+
;(j,i,A,II,EE)stiff=[(elem,:,:)Gamma,(elem,:,:)K,(elem,:,:)k]
                                                                end
                                                ;(18)zeros=Kaug
                                                    1:5=elem for
                                                    1:6=r for
                                          ;((r,elem)LM)abs=lr
                                                   1:6=c for
                                       ;((c,elem)LM)abs=lc
r)Kg+ here kg NO % ;(elem,c,r)K+(lc,lr)Kaug=(lc,lr)Kaug
                                                            ;(elem,c,
                                                        end
                                                          end
                                                            end
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    ;deltaP*iter=(1+iter)Pt ;(1:15,1:15)Kaug = Ktt
                     ;[ 0 0 (1+iter)Pt- 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]=P
                                    ;'P*(Ktt)inv = Displacements
                                ;(14,1)Displacements=(1+iter)delta
    to (fixed is first) node second the from loop % 2:6=inode for
                                                          end the
                                y and x for loop % 1:2=dof for
  ,inode)ID)Displacements+(dof,inode)coord=(dof ,inode)coord
                                                          ;(1,(dof
                                                        end
                                                          end
                                                              end
                                                                %
                    ;(1)yy=(2)yy;Pcrit=(1)yy;(delta)max=(2)xx;0=(1)xx
 'k','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','o',60,Pt,delta)scatter
                                                    ;(1,'LineWidth',
                                                          on hold
                                grid;(2,'LineWidth','--k',yy,xx)plot
                  ;('SouthEast','Location','Pcrit','Aanalysis')legend
                    ;('[kN] Force')ylabel;('[mm] Displacement')xlabel
                                                    ;([inf 0])xlim
```



نرى أن منحنى الحمل-الإزاحة يقترب تقارباً مقارباً من P_cr. وقد تحقق ذلك من دون اللجوء إلى $\mathbf{K}_g$.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



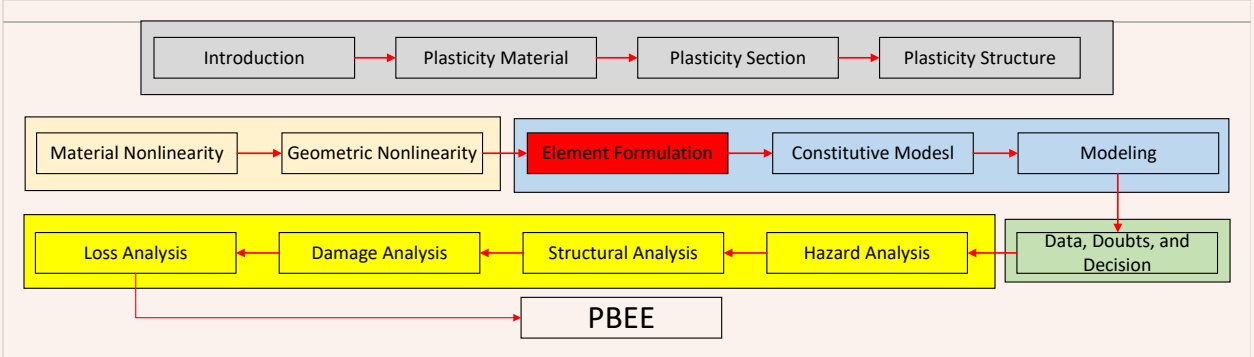
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 التحليل غير الخطي؛ صياغة العنصر

ملخص

بينما تناول الفصل 49 اشتقاق عنصر الكمرة المرن 1D في سياق تحليل مرن خطي مبسط، يعمم هذا الفصل الاشتقاق للتحليل اللاخطي للمادة. نبدأ بعناصر الجمالون البسيطة، ثم ننتقل إلى عنصر الكمرة-العمود. ونشتق صيغتين متميزتين: إحداهما قائمة على طريقة الصلابة التقليدية، والأخرى على طريقة المرونة لمعالجة بعض قيود الأولى. كما نتناول المقاطع الطبقية أو الليفية، على غرار §55.3.2، لأنها تتيح التلدن التدريجي للمقطع العرضي. وأخيراً نغطي عناصر الطول الصفري وعناصر المقاطع. يمر اشتقاق كل عنصر عبر الأسس الثلاثة: التوافق، والقانون التأسيسي، والاتزان، وصولاً إلى مصفوفة صلابة العنصر. وأخيراً، نظراً إلى كثرة الرموز، يختتم الفصل بقسم يفصل الترميز.

60.1 مقدمة 1799
60.2 عنصر الجمالون 1799
60.2.1 نظام الإحداثيات لعنصر جمالون 2D 1800
60.2.2 تحديد الحالة 1801
60.3 صيغ عناصر الكمرة-العمود 1801
60.3.1 عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة 1802
60.4 المقطع الطبقي/الليفي 1812
60.4.1 عنصر كمرة-عمود 2D بطريقة المرونة 1815
60.4.2 العناصر القائمة على الصلابة مقابل العناصر القائمة على المرونة 1834
60.5 صياغة العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري 1839
60.5.1 نظام الإحداثيات في العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري 1840
60.5.2 تحديد حالة العنصر 1840
60.6 عنصر مقطعي ذو طول صفري 1843
60.6.1 مصفوفة الصلابة 1843
60.6.2 نظام الإحداثيات 1844
60.6.3 تحديد حالة العنصر 1845
60.7 التكامل العددي 1847
60.8 قوة العنصر 1847



من أطروحة الدكتوراه "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" للمؤلف Kang, 2010.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.1 مقدمة

1 اشتق الفصل 49 مصفوفات صلابة عناصر 1D في سياق تحليل مرن خطي. إلا أن الترميز المعتمد، وخاصة الأدلة السفلية، لم يكن ملائماً للتعميم على التحليل اللاخطي والمقاطع الليفية موضوع هذا الفصل.

2 لذلك نبدأ بإعادة اشتقاق مصفوفات صلابة أبسط العناصر: عنصر الجمالون.

60.2 عنصر الجمالون

3 نبدأ بدراسة بسيطة لعنصر جمالون.

مصفوفة الصلابة

4 في سياق طريقة الصلابة التقليدية، يكون اشتقاق مصفوفة صلابة الجمالون بسيطاً. ونعيد اشتقاقها هنا لتقديم الترميز الجديد تدريجياً، وهو ترميز ينبغي الإلمام به.

5 كما في جميع العناصر المحدودة، يعتمد اشتقاق مصفوفة الصلابة على ثلاثة متطلبات.

1. **التوافق** بين الانفعالات والإزاحات.

الإزاحات تعبر العلاقة المعممة بين متجه إزاحة المقطع $\mathbf{d}_s(x)$ ومتجه الإزاحات العقدية للعنصر $\overline{\mathbf{d}}_e$ بواسطة دوال استيفاء الإزاحة، أي دوال الشكل $\mathbf{N}_d(x)$، كما يأتي:

$$\mathbf{d}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{x}{L}+1 & \frac{x}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{N}_d(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_{x1} \\ \overline{u}_{x2} \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{d}}_e} \tag{60.1}$$

التشوه الناتج من الإزاحات: بافتراض صغر الإزاحات، يرتبط متجه تشوه المقطع $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ بمتجه الإزاحات العقدية للعنصر كما يأتي:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_d(x)} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$$

حيث $\mathbf{B}_d(x)$ هي المصفوفة التي تربط الإزاحة بالانفعال من خلال مشتقات $\mathbf{N}_d(x)$.

2. **القانون التأسيسي** يعبر عنه بـ:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$$

حيث $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ متجه قوى المقطع[1]، و$\mathbf{k}_s(x)$ هي مصفوفة *صلابة المقطع*. في التحليل المرن الخطي تكون

[1] مفهوم المقطع ليس ضرورياً لفهم صياغة مصفوفة صلابة عنصر الجمالون، لكنه يقدم للمحافظة على الاتساق مع صياغة عنصر الكمرة-العمود اللاحقة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$\mathbf{k}_s(x)$ كمية قياسية بسيطة تساوي $\mathbf{k}_s(x) = \left[\ E(x) \cdot A(x)\ \right]$، حيث $E(x)$ معامل المرونة و$A(x)$ مساحة المقطع العرضي.

3. **الاتزان** بصيغته الضعيفة من خلال مبدأ الشغل الافتراضي، أو الإزاحة الافتراضية. وبافتراض توزيع قوى متزن، تشتق العلاقة بين متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع المحلي $\bar{\mathbf{f}}_e$ ومتجه تشوه المقطع من مبدأ الإزاحة الافتراضية:

$$\underbrace{\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{خارجي}} = \underbrace{\int_0^{L_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T . \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x}_{\text{داخلي}}$$

يؤدي التعويض إلى:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e} \delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \\
\Rightarrow \bar{\mathbf{f}}_e &= \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x}_{\bar{\mathbf{k}}_e} \cdot \bar{\mathbf{d}}_e
\end{aligned}$$

أو $\bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{d}}_e$ ومن ثم تعطى مصفوفة صلابة العنصر في المرجع المحلي بـ:

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x$$

60.2.1 نظام الإحداثيات لعنصر جمالون 2D

6 يعبر عن القوى والإزاحات العقدية للعنصر بالنسبة إلى المرجع العام، الشكل 60.1: $\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ N_{X2},\ V_{Y2} \rfloor^T$; $\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ u_{X2},\ v_{Y2} \rfloor^T$

7 ويمكن أيضاً التعبير عن القوى والإزاحات العقدية للعنصر بالنسبة إلى المرجع المحلي:

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{N}_{x2} \rfloor^T; \qquad \bar{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{u}_{x2} \rfloor^T$$

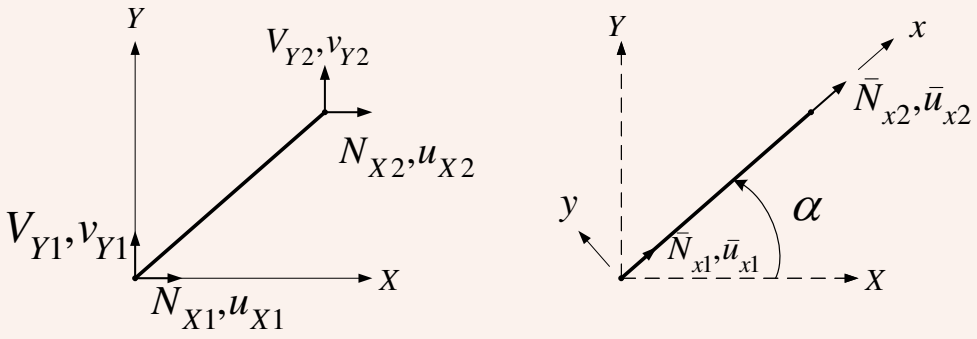
8 تعطى مصفوفة الدوران التي تحول المرجع العام إلى المحلي بـ $\boldsymbol{\Gamma}_e$ بحيث:

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e; \qquad \bar{\mathbf{d}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e; \qquad \mathbf{K}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

حيث $\mathbf{K}_e$ مصفوفة صلابة العنصر في المرجع العام، ومصفوفة الدوران هي:

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{N}_{x2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N_{X1} & V_{Y1} & N_{X2} & V_{Y2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \end{array}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) Global reference in an element (b) Local reference in an element

شكل 60.1: نظام الإحداثيات لجمالون 2D

60.2.2 تحديد الحالة

9 في الديناميكا الحرارية يمكن تمييز الحالة الراهنة للمادة بصورة وحيدة بواسطة مجموعة مختارة ملائمة من *متغيرات الحالة*، أي ما نحتاج إليه للتنبؤ بحالات النظام المستقبلية.

10 في سياق التحليل الإنشائي، تحديد الحالة هو عملية تحديد الكميات الآتية لمجموعة من الإزاحات العقدية للعنصر:

مصفوفة الصلابة المماسية ، §58.3.1.1، لتطبيق طريقة Newton في حل النظام اللاخطي، حيث تقابل مصفوفة الصلابة المماسية مصفوفة Jacobian، المعادلة 58.2.

القوى الداخلية لتحديد القوى المتبقية، التي ينبغي أن تكون قريبة جداً من الصفر.

وذلك للتنبؤ بالحالة $n+1$ انطلاقاً من الحالة n. وستناقش في §60.3.1.2 و§60.3.1.4.

60.3 صيغ عناصر الكمرة-العمود

11 يمكن صياغة المنشآت الإطارية اللاخطية باستعمال العناصر الليفية بطريقة قائمة على الصلابة، أي الإزاحة، أو بطريقة قائمة على المرونة، أي القوة. وفي عرضنا تفترض الطريقتان أن التشوهات صغيرة وأن المقاطع المستوية تبقى مستوية أثناء تاريخ التحميل.

12 تفترض الطريقة القائمة على الصلابة دوال استيفاء للإزاحة على امتداد العنصر. ويتطلب هذا الافتراض عدداً كافياً من العناصر لتحقيق استجابة دقيقة. أما الطريقة القائمة على المرونة فتستخدم دوال استيفاء للقوى على امتداد العنصر، وتحتاج إلى عدد عناصر أقل من الطريقة القائمة على الصلابة لتحقيق مستوى الدقة نفسه.

13 غير أن صياغة العنصر في الطريقة القائمة على المرونة، الفصل 25، أعقد منها في الطريقة القائمة على

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الصلابة، لأنها تتطلب طريقة تكرارية للحصول على ε من نماذج المادة التأسيسية التي تعطى عادة على صورة الدالة $\sigma = \sigma(\varepsilon)$، وهي مناسبة للطريقة القائمة على الصلابة (Lee **and** Mosalam, 2004).

14 إضافة إلى ذلك، تكون صياغة العنصر في الطريقة القائمة على الصلابة أكثر مباشرة وشائعة الاستخدام في طريقة العناصر المحدودة التقليدية. وسنستخدم هنا الطريقتين القائمة على الصلابة والقائمة على المرونة لصياغة النموذج اللاخطي الموزع وفق نظرية كمرة Bernoulli.

15 يميز العنصر بعدة مقاطع عرضية تقع عند نقاط التكامل العددي، ولا سيما نقاط تكامل قاعدة تربيع Gauss-Legendre للطريقة القائمة على الصلابة أو قاعدة Gauss-Lobatto للطريقة القائمة على المرونة. وعلاوة على ذلك، يحتوي كل مقطع عدداً مناسباً من الطبقات أو الألياف، يخضع كل منها لحالة إجهاد أحادية المحور.

60.3.1 عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة

16 تفترض الطريقة القائمة على الصلابة وصف الإزاحة المحورية بدالة استيفاء كثيرة حدود خطية، بينما تمثل الإزاحات المستعرضة بدوال استيفاء تكعيبية. وتتكون صياغة عنصر الكمرة-العمود 2D القائمة على الصلابة من ثلاثة متطلبات رئيسة:

التوافق

الإزاحة تحدد إزاحات المقطع من الإزاحات العقدية للعنصر بواسطة دوال الشكل. ويمكن التعبير عن العلاقة المعممة بين متجه إزاحة المقطع $\mathbf{d}_s(x)$ ومتجه الإزاحات العقدية للعنصر $\bar{\mathbf{d}}_e$ كما يأتي:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(x) &= \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{N}_d(x) \cdot \underbrace{\lfloor\, u_{x1}^{(e)},\ v_{y1}^{(e)},\ \theta_{z1}^{(e)},\ u_{x2}^{(e)},\ v_{y2}^{(e)},\ \theta_{z2}^{(e)} \,\rfloor^T}_{\bar{\mathbf{d}}_e}\end{aligned}$$

حيث $\mathbf{N}_d(x)$ مصفوفة دوال استيفاء الإزاحة.

$\mathbf{N}_d(x)$ مصفوفة من دوال الاستيفاء الخطية للإزاحات المحورية ودوال الاستيفاء التكعيبية للإزاحات المستعرضة:

$$\mathbf{N}_d(x) = \left[\begin{array}{cccccc} \psi_1(x) & 0 & 0 & \psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \phi_2(x) & 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{array} \right]$$

حيث:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -\tfrac{x}{L_e} + 1 & \psi_2(x) &= \tfrac{x}{L_e} \\ \phi_1(x) &= 2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} - 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} + 1 & \phi_2(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - 2\tfrac{x^2}{L_e} + x \\ \phi_3(x) &= -2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} + 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} & \phi_4(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - \tfrac{x^2}{L_e} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التشوه بافتراض صغر الإزاحات وبقاء المقاطع المستوية مستوية، يرتبط متجه تشوه المقطع $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ بمتجه الإزاحات العقدية للعنصر كما يأتي:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{B}_d(x) \cdot \bar{\mathbf{d}}_e \end{aligned} \tag{60.2}$$

حيث $\mathbf{B}_d(x)$ هي المصفوفة المشتقة من مشتقات دوال استيفاء الإزاحة.

$$\mathbf{B}_d(x) = \left[\begin{array}{cccccc} \psi_1'(x) & 0 & 0 & \psi_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & 0 & \phi_3''(x) & \phi_4''(x) \end{array} \right]$$

حيث:

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= -\tfrac{1}{L_e} & \qquad \psi_2'(x) &= \tfrac{1}{L_e} \\ \phi_1''(x) &= \tfrac{12x}{{L_e}^3} - \tfrac{6}{{L_e}^2} & \qquad \phi_2''(x) &= \tfrac{6x}{{L_e}^2} - \tfrac{4}{L_e} \\ \phi_3''(x) &= -\tfrac{12x}{{L_e}^3} + \tfrac{6}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4''(x) &= \tfrac{6\,x}{{L_e}^2} - \tfrac{2}{L_e} \end{aligned}$$

القانون التأسيسي

يعبر عن القانون التأسيسي للمقطع بـ:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\ \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \tag{60.3}$$

حيث $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ متجه قوى المقطع، و$\mathbf{k}_s(x)$ مصفوفة صلابة المقطع.

إذا لم تشتق $\mathbf{k}_s(x)$ من تقطيع المقطع العرضي إلى طبقات أو ألياف، فإن $\mathbf{k}_s(x)$ في التحليل المرن الخطي تساوي ببساطة:

$$\mathbf{k}_s(x) = \left[\begin{array}{cc} E(x) \cdot A(x) & 0 \\ 0 & E(x) \cdot I_z(x) \end{array} \right] \tag{60.4}$$

حيث $E(x)$ و$A(x)$ و$I_z(x)$ هي معامل المرونة ومساحة المقطع وعزم القصور الذاتي لمساحة المقطع.

الاتزان

بافتراض توزيع قوى متزن، تشتق العلاقة بين متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع المحلي $\bar{\mathbf{f}}_e$ ومتجه تشوه المقطع من مبدأ الإزاحة الافتراضية:

$$\underbrace{\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{خارجي}} = \underbrace{\int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x}_{\text{داخلي}} \tag{60.5}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وهذه صيغة ضعيفة للاتزان. يؤدي تعويض المعادلة 60.2 والمعادلة 60.3 في المعادلة 60.5، وبما أن الأخيرة يجب أن تتحقق لأي $\delta\bar{\mathbf{d}}_e$ اعتباطية، إلى:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e &= \int_0^L \delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \varepsilon_s(x) x \\
\bar{\mathbf{f}}_e &= \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{d}}_e \qquad (60.6) \\
\bar{\mathbf{k}}_e &= \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \qquad (60.7)
\end{aligned}$$

حيث $\bar{\mathbf{k}}_e$ هي مصفوفة صلابة العنصر في المرجع المحلي.

60.3.1.1 نظام الإحداثيات في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة وفق نظرية كمرة Bernoulli

17 يعبر عن القوى والإزاحات العقدية للعنصر بالنسبة إلى المرجع العام، الشكل 60.2(a)، كما يأتي: متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع العام

$$\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$$

متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع العام

$$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$$

18 ويمكن أيضاً التعبير عن القوى والإزاحات العقدية للعنصر بالنسبة إلى المرجع المحلي كما في الشكل 60.2(b): متجه القوى العقدية للعنصر في المرجع المحلي

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$$

متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي

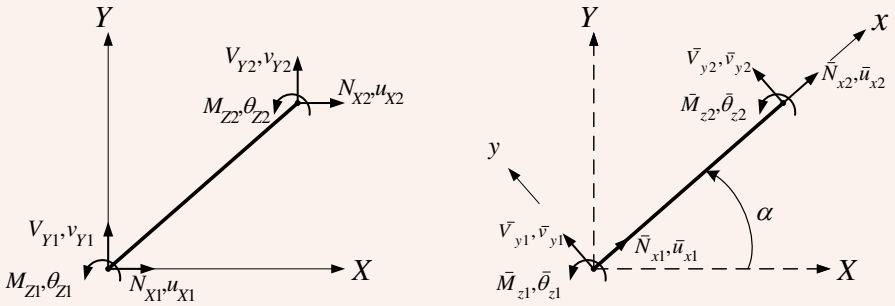
$$\bar{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{x2},\ \overline{v}_{y2},\ \overline{\theta}_{z2} \rfloor^T$$

19 تعطى مصفوفة الدوران التي تحول المرجع العام في الشكل 60.2(a) إلى المرجع المحلي في الشكل 60.2(b) بـ $\boldsymbol{\Gamma}_e$.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e \\
\bar{\mathbf{d}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e \qquad (60.8) \\
\mathbf{K}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e
\end{aligned}$$

حيث $\mathbf{K}_e$ مصفوفة صلابة العنصر في المرجع العام.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

شكل 60.2: القوى الداخلية والإزاحات المقابلة في نظامي الإحداثيات العام والمحلي لعنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة

20 تعرف مصفوفة الدوران كما يأتي:

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

60.3.1.2 تحديد الحالة

21 في التحليل الإنشائي اللاخطي، يقابل متجه القوى العقدية في كل خطوة متجه قوى عقدية خارجية تزايدية مطبقة على المنشأ. ويحدد متجه الإزاحات العقدية التزايدية المقابل للمنشأ من متجه القوى العقدية الخارجية التزايدية، ثم تستخرج متجهات الإزاحات العقدية لكل عنصر. وتستخدم هذه المتجهات لتحديد متجهات القوى الداخلية للمقاطع.

22 تعرف عملية تحديد متجه القوى العقدية الداخلية المقابل لمتجهات الإزاحات العقدية للعنصر باسم تحديد الحالة. وتتكون من ثلاث مراحل موضحة في الشكل 60.3a:

تحديد حالة المقطع تحسب متجهات قوى المقطع الداخلية من متجهات تشوه المقطع التي يحددها متجه الإزاحات العقدية لكل عنصر، الشكل 60.3a(c).

تحديد حالة العنصر تحدد مصفوفات الصلابة المماسية للعنصر ومتجهات القوى العقدية الداخلية لكل عنصر من متجهات قوى المقطع الداخلية المحسوبة بدورها من متجهات تشوه مقاطع العناصر، الشكل 60.3a(b).

تحديد حالة المنشأ تجمع مصفوفات الصلابة المماسية ومتجهات القوى الداخلية لكل عنصر لتكوين مصفوفة الصلابة المماسية الموسعة $\mathbf{K}_S^{tan}$ ومتجه القوى العقدية الداخلية $\mathbf{P}_S^{int}$، حيث $\mathbf{P}_S^{int} =$)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$(\mathbf{P}_t^{int} + \mathbf{P}_u^{int})$، للمنشأ، الشكل a)60.3a. يدل الدليل السفلي t على المواضع التي تكون فيها القوى معلومة، ويدل u على المواضع التي تكون فيها الإزاحات معلومة أو صفرية. وقد وُصف الدليلان t وu في القسم 58.

23 بعد إتمام تحديد حالة المنشأ، يقارن متجه القوى العقدية الداخلية $(\mathbf{P}_{t,n}^{int})$ بمتجه القوى العقدية الخارجية المطبقة الكلية $(\mathbf{P}_{t,n}^{ext})$، ويمثل الفرق $(\mathbf{P}_{t,n}^{R})$ متجه القوى العقدية المتبقية الذي يعاد تطبيقه على المنشأ ضمن عملية حل تكرارية حتى يتحقق التقارب، أي الاتزان، الجدول 60.1.

جدول 60.1: تحديد الحالة متعدد المستويات

المستوى	القوة الداخلية	مصفوفة الصلابة المماسية	"الإزاحة"
المقطع	$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)A(x) & 0 \\ 0 & E(x)I_z(x) \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_d(x)\bar{\mathbf{d}}_e$
العنصر المحلي	$\bar{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{d,e}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{s,e}^{int}(x)\mathrm{d}x$	$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \mathbf{k}_s(x) \mathbf{B}_d(x)\mathrm{d}x$	$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^t \cdot \bar{\mathbf{d}}_e$
العنصر العام	$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \boldsymbol{\Gamma}_e$	$\boldsymbol{\delta}_e$
المنشأ	$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \Sigma_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \Sigma_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \mathcal{A}_{b,e}$	$\boldsymbol{\delta}_e$

$\mathcal{A}_{b,e}^T$ هو مؤثر تجميع

القوى، وتشمل $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ المصفوفات الجزئية الأربع: $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$ و$\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$ و$\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ و$\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

24 يكون إجراء تحديد الحالة مباشراً لعنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة. وتحدد متجهات تشوه المقطع $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ من متجه الإزاحات العقدية للعنصر $\bar{\mathbf{d}}_e$ كما في المعادلة 60.3. ثم تحدد مصفوفات الصلابة المماسية للمقطع $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ ومتجهات قوى المقطع الداخلية $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ من القانون التأسيسي للمقطع. وتحصل مصفوفات الصلابة المماسية للعنصر $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ من المعادلة 60.7، بينما تحدد متجهات القوى العقدية الداخلية للعنصر $\bar{\mathbf{f}}_e^{int}$ من مبدأ الإزاحة الافتراضية:

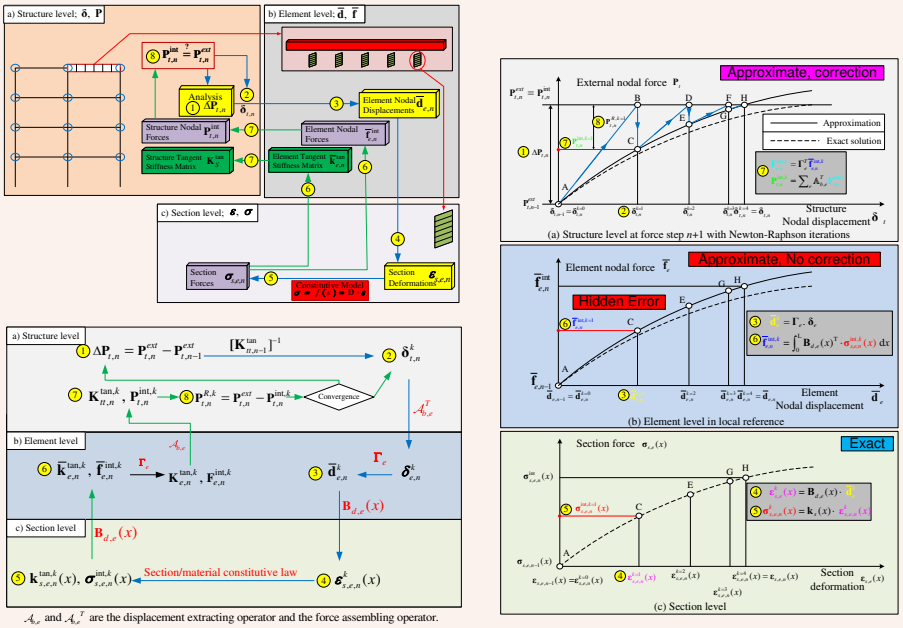
$$\bar{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)\mathrm{d}x \tag{60.9}$$

25 من المهم ملاحظة أن هذه الطريقة تؤدي إلى استجابة عنصر خاطئة في الحالة اللاخطية. يوضح الشكل 60.3a هذه المشكلة بعرض تطور حالات المنشأ والعنصر والمقطع خلال تطبيق متجه قوى خارجية تزايدية واحد عند درجات الحرية الحرة $\Delta\mathbf{P}_{t,n}$، وهو ما يتطلب عدة تكرارات k (Spacone, Ciampi **and** Filippou, 1992). يدل الدليل السفلي n أو $n-1$ على خطوة القوة الخارجية الحالية أو السابقة، ويدل الدليل العلوي k على التكرار k^{th}، ويدل الدليل السفلي t على المواضع التي تكون فيها القوى معلومة.

26 تستخدم طريقة تكرار Newton-Raphson عند درجات الحرية العامة. وفي كل تكرار Newton-Raphson، يحدد متجه الإزاحات العقدية التزايدية على مستوى المنشأ، وتستخرج متجهات الإزاحات العقدية لكل عنصر.

27 عند تكرار Newton-Raphson ذي الرتبة k^{th}، تحدد متجهات الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي $\bar{\mathbf{d}}_{e,n}$ من متجه الإزاحات العقدية $\mathbf{u}_{S,n}^k$، حيث $(\mathbf{u}_{S,n}^k = \mathbf{u}_{t,n}^k + \mathbf{u}_{u,n}^k)$، لدرجات الحرية على مستوى المنشأ، وذلك لكل عنصر. ويدل الدليل السفلي u على المواضع التي تكون فيها الإزاحات معلومة أو صفرية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) (a)

شكل 60.3: تحديد الحالة للطريقة القائمة على الصلابة

28 باستخدام المعادلة 60.3، تحسب متجهات تشوه المقطع $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,n}^{k}(x)$ لكل عنصر. وهذا أول تقريب لتحديد حالة العنصر، لأن $\mathbf{B}_d(x)$ تكون دقيقة فقط في الحالة المرنة الخطية لعضو منشوري.

29 بافتراض معرفة القانون التأسيسي للمقطع صراحة، تحسب بسهولة مصفوفات الصلابة المماسية للمقطع $\mathbf{k}_{s,n}^{tan,k}(x)$ ومتجهات قوى المقطع الداخلية $\boldsymbol{\sigma}_{s,n}^{int,k}(x)$ من $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,n}^{k}(x)$. ثم باستخدام المعادلة 60.7 والمعادلة 60.9 تحدد مصفوفات صلابة العنصر في المرجع المحلي $\overline{\mathbf{k}}_{e,n}^{k}$ ومتجهات القوى العقدية الداخلية للعنصر في المرجع المحلي $\overline{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$.

30 لأن $\mathbf{B}_d(x)$ تقريبية فقط، فإن كلا التكاملين لمصفوفة الصلابة المماسية للعنصر في المرجع المحلي ومتجه القوى العقدية الداخلية في المرجع المحلي يعطيان نتائج تقريبية. ويؤدي تقريب $\mathbf{B}_d(x)$ إلى حل أصلب كما في الشكل a) 60.3b) و(b). لاحظ أن المنحنى المسمى "الحل الدقيق" دقيق فقط ضمن فرضيات القانون التأسيسي للمقطع والتقريبات الحركية للمسألة، مثل افتراض صغر التشوهات وبقاء المقاطع المستوية مستوية أثناء تاريخ التحميل.

31 للتغلب على الأخطاء العددية الناتجة من تقريب $\mathbf{B}_d(x)$، يلجأ المحللون إلى تقطيع دقيق لشبكة المنشأ، ولا سيما في مناطق الإطار التي تخضع لسلوك لاخطي شديد، مثل نهايات الأعضاء. ومع ذلك تستمر مشكلات التقارب العددي. ولهذا تحديداً تعطي العناصر القائمة على المرونة نتائج أفضل.

يرجى ملاحظة أن هذا القسم يحتوي على عناصر عائمة (أشكال و/أو جداول) يجب طباعتها قبل القسم التالي. لذلك قد تظهر هنا مساحات أو فجوات فارغة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.3.1.3 الخطأ "الخفي"

32 يتسلل "خطأ خفي" إلى الحل. وبملاحظة أن طريقة تكرار Newton-Raphson تعمل في نظام الإحداثيات العام، أي على مستوى المنشأ، الشكل 60.3a، يمكن تفسير الخطأ كما يأتي:

- عند التكرار k^{th}: $\mathbf{d}_{s,n}(x) \rightarrow \overline{\mathbf{d}}_{e,n}$، أي إزاحات المقطع من الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي، المعادلة 60.1، (③).
- لكل مقطع: $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \mathbf{d}_{s,n}(x)$، أي تشوه المقطع من إزاحات العنصر، المعادلة 60.2، (④)، لأن $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ دقيقة فقط في الحالة المرنة الخطية.
- بافتراض معرفة القانون التأسيسي للمقطع صراحة، $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$، المعادلة 60.4، أي مصفوفة الصلابة المماسية من تشوه المقطع؛ و$\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$، أي متجهات قوى المقطع الداخلية من تشوه المقطع، المعادلة 60.3، (⑤).
- تحدد بعد ذلك مصفوفات صلابة العنصر $\overline{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ في المرجع المحلي، المعادلة 60.7، ومتجهات القوى العقدية الداخلية للعنصر في المرجع المحلي $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$، المعادلة 60.6، (⑥).
- أثناء تجميع مصفوفة الصلابة العامة، تحدد مصفوفة الصلابة المماسية للمنشأ ومتجه القوى العقدية الداخلية، (⑦)، قبل حساب المتبقي، (⑧)، للتحقق من التقارب.
- لأن $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ تقريبية فقط، فإن مصفوفات صلابة العنصر $\overline{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$، المعادلة 60.7، ومتجهات القوى العقدية الداخلية للعنصر $\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$، المعادلة 60.6، تكون تقريبية أيضاً.

33 يؤدي تقريب $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ إلى حل أصلب. لاحظ أن المنحنى المسمى "الحل الدقيق" دقيق فقط ضمن فرضيات القانون التأسيسي للمقطع والتقريبات الحركية التي تفترض صغر التشوهات وبقاء المقاطع المستوية مستوية.

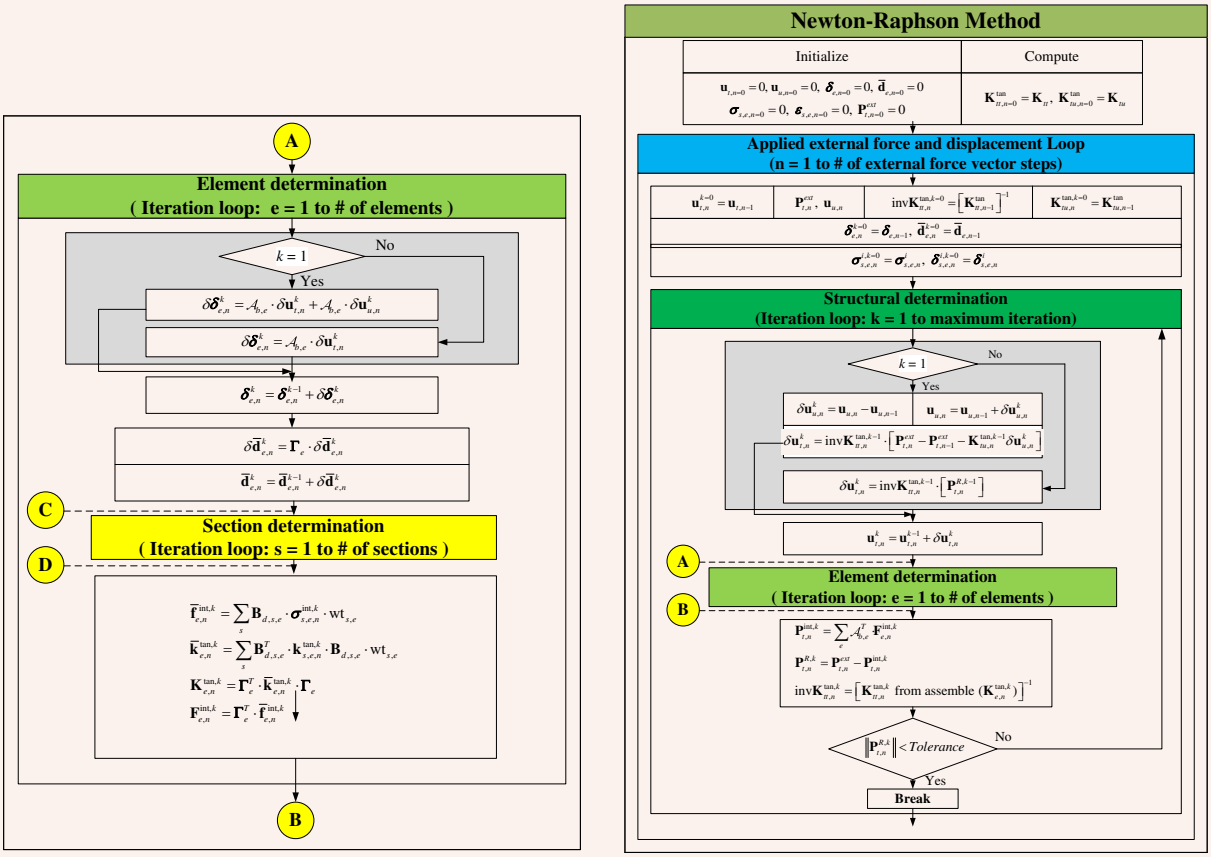
34 لمعالجة هذه المشكلة، يمكن إما a) استخدام تقطيع شبكي أدق للمنشأ، ولا سيما في مناطق الإطار ذات السلوك اللاخطي الشديد مثل نهايات الأعضاء؛ أو b) استخدام عناصر قائمة على المرونة كما سيأتي أدناه.

60.3.1.4 التحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على الصلابة

35 بالإشارة إلى الشكل 60.4a والشكل 60.4b والشكل 60.4c، ندرس خطوة واحدة من طريقة Newton-Raphson للتحليل اللاخطي باستعمال الطريقة القائمة على الصلابة مع القانون التأسيسي للمقطع تحت التحكم بالقوة والإزاحة. يناقش التحكم بالقوة والإزاحة في القسم 58. وسيشرح إجراء المقطع الليفي أو الطبقي في الشكل 60.4c في القسم 60.4.

الخطوة 1: احسب الإزاحة العقدية التزايدية $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ والإزاحة العقدية الكلية $\mathbf{u}_{t,n}$ على مستوى المنشأ. يبدأ التكرار أولاً من المعادلة 60.10 ومع $k = 1$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) (a)

(c)

شكل 60.4: مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على الصلابة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إذا كان $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^k_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}^k_{u,n} \\
\delta \mathbf{u}^k_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n} \delta \mathbf{u}^k_{u,n}] \\
\mathbf{u}^k_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^k_{t,n}
\end{aligned} \tag{60.10}$$

وإلا فنستخدم للتكرار:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\
\delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\
\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}
\end{aligned} \tag{60.11}$$

حيث يمثل الدليل العلوي k عداد التكرار، وتمثل $\mathbf{P}^R_t$ متجه القوى العقدية المتبقية على مستوى المنشأ، وتمثل $\Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ متجه الإزاحة التزايدية الكلية منذ آخر خطوة متقاربة، وتمثل $\delta \mathbf{u}^{k+1}_n$ متجه الإزاحة التزايدية الأخير.

في المعادلة 60.10، يلزم وصف التحكم بالقوة/الإزاحة ومصفوفة الصلابة الموسعة $\mathbf{K}_S$ مع $\mathbf{K}_{tt}$ و$\mathbf{K}_{tu}$ و$\mathbf{K}_{ut}$ و$\mathbf{K}_{uu}$ بالتفصيل. ويعرض ذلك في القسم 43.2. حيث تقسم مصفوفة الصلابة الموسعة إلى مجموعتين بدليل سفلي 'u' للمواضع ذات الإزاحات المعلومة أو الصفرية، و't' للمواضع ذات القوى المعلومة.

الخطوة 2: كرر على جميع العناصر وحدد حالتها.

الخطوة 3: حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر.

إذا كان $k = 1$:

$$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{u,n}$$

وإلا فنستخدم للتكرار:

$$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n}$$

حيث $\mathbf{A}_{b,e}$ مؤثر استخراج الإزاحة.

$$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

حيث تقابل $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ الكمية $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

$$\begin{aligned}
\delta \bar{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} \\
\bar{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \bar{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \bar{\mathbf{d}}^k_{e,n}
\end{aligned}$$

حيث تقابل $\bar{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ الكمية $\bar{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخطوة 4: ابدأ تحديد حالة المقطع بالتكرار على مقاطع العنصر. وقد يختلف العدد الكلي للمقاطع من عنصر إلى آخر. لذلك يكون العدد الكلي للمقاطع في العنصر nIp_e، ويعتمد على عدد نقاط التكامل وفق قاعدة تربيع Gauss-Legendre.

الخطوة 5: حدد متجه تشوه المقطع. لتحديد حالة المقطع، نحتاج أولاً إلى تقسيمه إلى مقطع عام ومقطع ليفي كما وصف في القسم 60.4. وننظر هنا إلى المقطع العام فقط. ينفذ تحديد حالة كل مقطع ضمن الحلقة i، حيث يعني i المقطع i^{th}.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \delta\bar{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

حيث $\mathbf{B}^{i}_{d,e}$ هي المصفوفة المشتقة من دوال استيفاء الإزاحة عند المقطع i^{th} في العنصر e^{th}.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$$

حيث تقابل $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,0}_{s,e,n}$ الكمية $\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{s,e,n-1}$.

الخطوة 6: حدد مصفوفة الصلابة المماسية للمقطع ومتجه قوى المقطع الداخلية. إذا افترضنا معرفة القانون التأسيسي للمقطع صراحة، فإن $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ و $\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}$ تحددان من $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$. لكن في المقطع المرن لا نحتاج إلى إعادة حساب $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ لأنها مطابقة لمصفوفة صلابة المقطع الابتدائية $\mathbf{k}^{i}_{s,e}$.

إذا كان المقطع مرناً:

$$\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{i}_{s,e} \tag{60.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} \tag{60.13}$$

حيث $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ مصفوفة الصلابة المماسية للمقطع عند التكرار k^{th}.

الخطوة 7: حدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر ومصفوفة الصلابة المماسية للعنصر. ومن المعادلة 60.9 والمعادلة 60.7 نحدد $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ و $\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}\, \mathrm{wt}^{i}_{e}$$

حيث wt^{i}_{e} معامل الوزن المرتبط بمصفوفة Jacobian عند المقطع i^{th} من العنصر e^{th}.

$$\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \mathrm{wt}^{i}_{e} \tag{60.14}$$

حيث $\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ مصفوفة الصلابة المماسية للعنصر في المرجع المحلي.

من المعادلة 60.8 نحدد $\mathbf{F}^{int,k}_{e,n}$ و $\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\mathbf{F}^{int,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}_{e} \cdot \bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

$$\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}_{e} \cdot \bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{e}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخطوة 8: حدد متجه القوى العقدية الداخلية ومصفوفة الصلابة المماسية الموسعة.

$$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^{T} \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^{T} \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{A}_{b,e}$$

حيث $\mathbf{A}_{b,e}{}^{T}$ مؤثر تجميع القوى، وتتكون $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ من $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$ و $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$ و $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$ و $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

الخطوة 9: احسب متجه القوى العقدية المتبقية على مستوى المنشأ من المعادلة 60.11. ثم تحقق التقارب باستخدام هذا المتجه.

تحقق من التقارب:

- إذا كانت $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ ضمن السماحية المحددة، فانتقل إلى زيادة القوة التالية.
- إذا لم تكن $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ ضمن السماحية المحددة، فحدّث k إلى $k+1$ وابدأ تكرار Newton-Raphson التالي. تكرر المعادلة 60.11 من **الخطوة 1** حتى **الخطوة 9** إلى أن يتحقق التقارب على مستوى المنشأ.

60.4 المقطع الطبقي/الليفي

36 افترضنا حتى الآن أن المقطع يميز بعلاقة العزم-الانحناء؛ أي عندما يبلغ العزم قيمة العزم اللدن/عزم الخضوع يتلدن المقطع كله. غير أن هذا ليس سوى تقريب، إذ يحدث في الواقع تلدن تدريجي يبدأ من الألياف الخارجية، ثم تنتشر منطقة التلدن تدريجياً نحو الداخل حتى يصبح المقطع كله لدناً في النهاية.

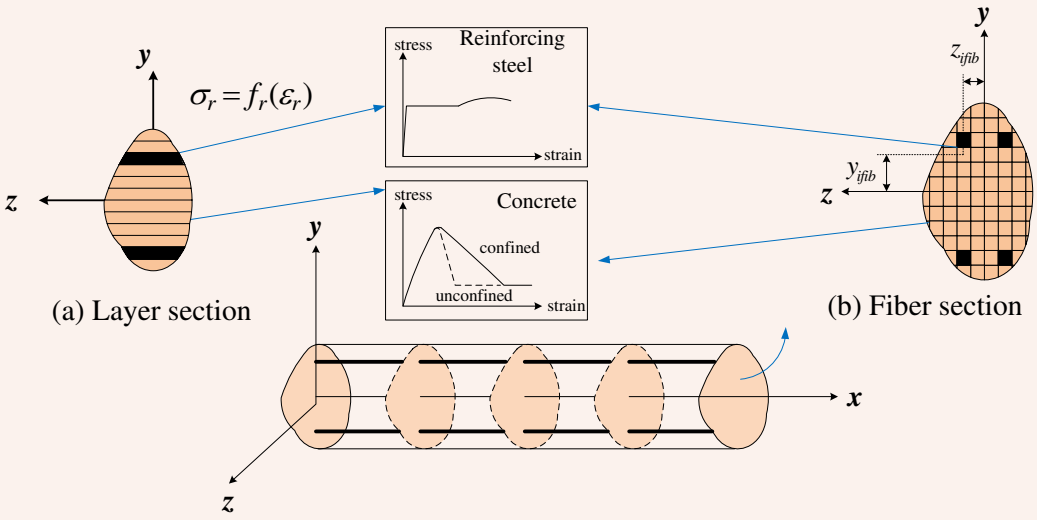
37 لذلك فإن أفضل النماذج للتحليل القائم على اللدونة، لعناصر الفولاذ أو الخرسانة المسلحة، هي النماذج القائمة على المقاطع الطبقية/الليفية، §55.3.2، لأنها تستطيع التقاط التلدن التدريجي للمقطع العرضي. وفي المقطع الطبقي/الليفي يقسم المقطع إلى طبقات/ألياف طولية كما في الشكل 60.5.

38 تتمثل الخصائص الهندسية للطبقات/الألياف في موقعها ضمن نظام المرجع المحلي y و z ومساحة الطبقة/الليف $A_{ir}(x)$، حيث يدل الدليل السفلي ir على الطبقة/الليف ir^{th}. ولا تحدد العلاقة التأسيسية للمقطع صراحة، بل تشتق بتكامل استجابة الطبقات/الألياف استناداً إلى علاقة الإجهاد-الانفعال أحادية المحور للمادة المعينة، الشكل 60.5.

39 لا يمكن تحديد إجهادات الطبقات/الألياف من القوة المحورية وعزم الانحناء عند المقطع، لوجود معادلتي اتزان فقط في حالة الانحناء أحادي المحور مقابل ثلاثة إجهادات مجهولة أو أكثر. ومن الحلول الممكنة افتراض توزيع للإجهاد داخل المقطع، لكن المشكلة تؤجل عندئذ إلى مرحلة تحديد حالة الطبقة/الليف في الخوارزمية، لأن علاقات الإجهاد-الانفعال للطبقات/الألياف يعبر عنها عادة بدوال صريحة للانفعال.

40 لذلك تحدد إجهادات الطبقات/الألياف وصلابتها من علاقات الإجهاد-الانفعال الخاصة بها. وتحسب

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 60.5: المقاطع الليفية - توزيع مقاطع التحكم وتقسيم المقطع إلى ألياف

متجهات قوى المقطع الداخلية $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ من توزيع إجهاد الطبقات/الألياف، وتجمع مصفوفات الصلابة المماسية للمقطع $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ من الصلابة المماسية للطبقات/الألياف.

41 يبقى هدفنا النهائي اشتقاق $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ بحيث:

$$\left\{ \begin{array}{c} N(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\}$$

42 بإهمال تشوه القص المستعرض، ومن ثم افتراض توزيع خطي للانفعال وفق كمرة Euler-Bernoulli، مع سلوك لاخطي للإجهاد-الانفعال، يكون توزيع الإجهاد:

$$\sigma_t(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)} \pm \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y$$

43 عند هذه النقطة، الشكل 60.6، يمكننا من الإزاحات العقدية تحديد تشوهات المقطع، أي الانفعال المحوري $\varepsilon(x)$ والانحناء $\phi(x)$، ومن ثم توزيع الانفعال الخطي. ولأن المادة لاخطية، فإن *الموقع الدقيق للمحور المتعادل* لم يعرف بعد، وعند كل منسوب ليف تكون لدينا قيمة مختلفة لـ $E_r^{tan}(x)$. ويدل r على دليل الليف.

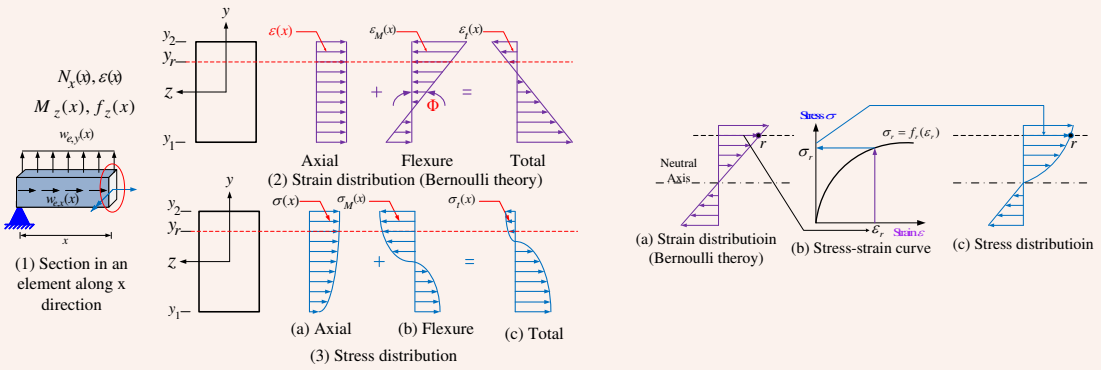
44 نعرف ε وΦ، ويجب تحديد N وM. توجد مجموعتان من الحدود: أولية وثانوية:

الحدود الأولية هي الحدود الناتجة من المحور والانحناء النقيين:

المحوري الناتج من $\sigma(x)$ يحدد ببساطة من:

$$N_x(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma(x) dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x)}_{\sigma(x)} dA \simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot \varepsilon(x)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 60.6: توزيع الإجهاد اللاخطي في المقطع العرضي

الانحنائي الناتج من $\sigma_M(x)$ يدرس تالياً، ونبحث مرة أخرى عن تعبير لـ $(M(x))$ بدلالة الانحناء و$E_r^{tan}(x)$، مع التذكير بأن $I = \int y^2 dA$ و$\sigma_M(x)@y_r = E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y_r$.

$$M_z(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma_M(x) \cdot y dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \underbrace{\phi_z(x) \cdot y}_{\varepsilon} \cdot y dA}_{\sigma}$$

$$= \phi_z(x) \int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot y^2 dA$$

$$\simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r^2 \cdot \phi_z(x)$$

الحدود الثانوية تنتج من *الاقتران* وتؤدي إلى حدود غير صفرية خارج القطر في مصفوفة الصلابة. لاحظ أن هذه الحدود تتلاشى في التحليل المرن الخطي.

القوة المحورية الناتجة من الانحناء إذ لا يوجد سبب يجعل توزيع الإجهاد الانحنائي اللاخطي يعطي بالضرورة مجموع قوى مساوياً للصفر.

$$dN_x(x) = -E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon_M(x) dA = -E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y dA$$

$$N_x(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y dA$$

$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r \cdot \phi_z(x)$$

حيث يحصل على الانفعال $(\varepsilon_M(x))$ من الانحناء $(\phi_z(x))$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العزم الناتج من الانفعال المحوري إذ لا يوجد سبب يجعل موقع المحور المتعادل صحيحاً فعلاً بما يؤدي إلى مجموع عزوم مساوٍ للصفر.

$$dM_z(x) = -E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot y\cdot dA \tag{60.15}$$

$$M_z(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x)\cdot\varepsilon(x)\cdot y dA \tag{60.16}$$

$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x)\cdot A_r(x)\cdot y_r\cdot\varepsilon(x) \tag{60.17}$$

45 بجمع الحدود في مصفوفة، تأخذ $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ الشكل:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} N \\ M \end{array}\right\}}_{\sigma_S} = \underbrace{\sum_{ir} \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \kappa(x) \end{array}\left[\begin{array}{cc} N_x(x) & M_z(x) \\ E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x) & -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir} \\ -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir} & E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir}^2 \end{array}\right]}_{\mathbf{k}_s^{tan,n}} \left\{\begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array}\right\} \tag{60.18}$$

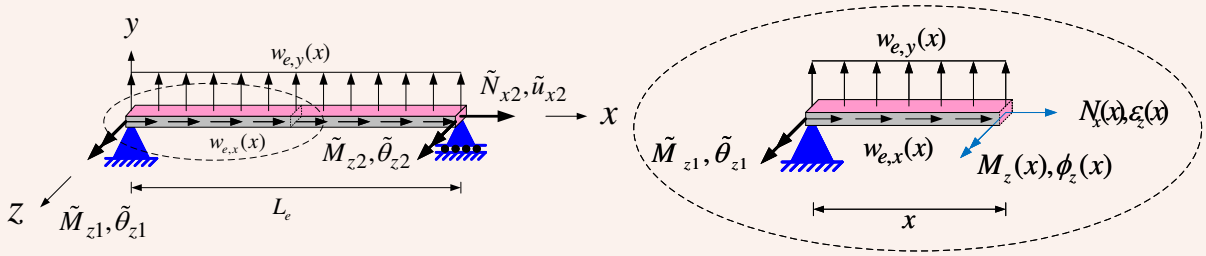
60.4.1 عنصر كمرة-عمود 2D بطريقة المرونة

46 تعد عناصر الكمرة-العمود 2D القائمة على المرونة عناصر محدودة "غير مطابقة" لأنها تعطي مصفوفة مرونة العنصر بدلاً من مصفوفة الصلابة التقليدية، وتعتمد على معادلات الاتزان بدلاً من حقل إزاحة مفترض. ومع ذلك تقدم بعض المزايا المهمة.

47 نشتق مصفوفة مرونة العنصر $\tilde{\mathbf{c}}_e$ من دون أنماط الجسم الصلب، ثم نعكسها للحصول على مصفوفة صلابة العنصر المقابلة $\tilde{\mathbf{k}}_e$ من دون أنماط الجسم الصلب، §45.4.2. ويكتسب هذا أهمية خاصة في الحالات التي تكون فيها صيغ الطريقة القائمة على الصلابة تقريبية وصيغ الطريقة القائمة على المرونة دقيقة، مثل تغير المقطع على امتداد العنصر والعناصر ذات اللاخطية المادية.

48 نستخدم مبدأ الشغل الافتراضي المتمم عبر الخطوات الرئيسة الثلاث المعتادة.

الاتزان نبدأ بالصيغة القوية لمعادلة الاتزان، الشكل 60.7:



شكل 60.7: عنصر إطار 2D من دون أنماط الجسم الصلب

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\underbrace{\mathbf{w}_e(x)}_{\text{خارجي}} + \underbrace{\mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\sigma}_s(x)}_{\text{داخلي}} = \mathbf{0}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} w_x^{(e)}(x) \\ w_y^{(e)}(x) \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{60.19}$$

حيث $\mathbf{w}_e(x)$ متجه القوى الخارجية للعنصر و $\mathbf{L}_f$ مؤثر القوة التفاضلي.

نفترض أولاً عدم وجود متجه قوى خارجية للعنصر، أي $\mathbf{w}_e(x) = \mathbf{0}$. وينتج اختيار دوال استيفاء القوة $\mathbf{N}_f(x)$ من اشتراط تحقق الاتزان، كما تعبر عنه المعادلة 60.19، بصيغته القوية. ومن ثم لكمرة Euler-Bernoulli:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

مما يعطي:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \end{aligned}$$

ومن ثم:

$$\begin{aligned} N_x(x) &= c_3 \\ M_z(x) &= c_1 x + c_2 \end{aligned} \tag{60.20}$$



شكل 60.8: اصطلاح الإشارة لقوة المقطع

بتطبيق الشرط الحدّي من الشكل 60.7 مع اصطلاح الإشارة لقوة المقطع، الشكل 60.8:

$$\begin{aligned} N_x(L) &= N_{x2} \\ M_z(0) &= -M_{z1} \\ M_z(L) &= M_{z2} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نحصل على:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{M_{z1} + M_{z2}}{L_e} \\ c_2 &= -M_{z1} \\ c_3 &= N_{x2} \end{aligned} \tag{60.21}$$

بالتعويض من المعادلة 60.21 في المعادلة 60.20:

$$\begin{aligned} N_x(x) &= N_{x2} \\ M_z(x) &= \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) M_{z1} + \frac{x}{L_e} M_{z2} \end{aligned}$$

أو:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_f(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e} \tag{60.22}$$

حيث $\tilde{\mathbf{f}}_e$ متجه القوى العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب.

أخيراً، نستخرج من المعادلة 60.22 مصفوفة دوال استيفاء القوة.

$$\mathbf{N}_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{bmatrix}$$

القانون التأسيسي يعطى الآن معكوس العلاقة التأسيسية التقليدية المستخدمة في الطريقة القائمة على الصلابة، المبينة في المعادلة 60.5، بـ:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x) \tag{60.23}$$

حيث $\mathbf{c}_s(x)$ مصفوفة مرونة المقطع. وإذا لم تشتق $\mathbf{c}_s(x)$ من مقطع ليفي، الذي يناقش في القسم 60.4، فإن $\mathbf{c}_s(x)$ في التحليل المرن الخطي تكون ببساطة:

$$\mathbf{c}_s(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E(x) \cdot A(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E(x) \cdot I_z(x)} \end{bmatrix}$$

التوافق نحصل على معادلة التوافق بصيغتها الضعيفة من خلال مبدأ الشغل الافتراضي المتمم، خلافاً للشغل الافتراضي المستخدم في الطريقة القائمة على الصلابة.

$$\underbrace{\delta \tilde{\mathbf{f}}_e^{\,T} \tilde{\mathbf{d}}_e}_{\text{خارجي}} = \underbrace{\int_0^L \delta \boldsymbol{\sigma}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \mathrm{d}x}_{\text{داخلي}} \tag{60.24}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $\tilde{\mathbf{d}}_e$ متجه الإزاحات العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب.

بالتعويض من المعادلة 60.22 والمعادلة 60.23 في المعادلة 60.24، وبما أن الأخيرة يجب أن تتحقق لأي $\delta\tilde{\mathbf{f}}_e$ اعتباطية، نحصل على:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \delta\tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \cdot \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x \\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \mathbf{N}_f(x)\, \mathrm{d}x}_{\tilde{\mathbf{c}}_e} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\
\tilde{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{c}}_e \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e
\end{aligned} \tag{60.25}$$

ومن ثم تعطى مصفوفة مرونة العنصر من دون أنماط الجسم الصلب في المرجع المحلي بـ:

$$\tilde{\mathbf{c}}_e = \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \mathbf{N}_f(x)\, \mathrm{d}x \tag{60.26}$$

وتكون مصفوفة صلابة العنصر المقابلة من دون أنماط الجسم الصلب في المرجع المحلي:

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = [\tilde{\mathbf{c}}_e]^{-1}$$

60.4.1.1 نظام الإحداثيات في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة وفق نظرية كمرة Bernoulli

49 خلافاً لنظام المرجع للطريقة القائمة على الصلابة في الشكل 60.2، نحتاج إلى دراسة القوى والإزاحات في المرجع المحلي مع أنماط الجسم الصلب ومن دونها كما في الشكل 60.9.

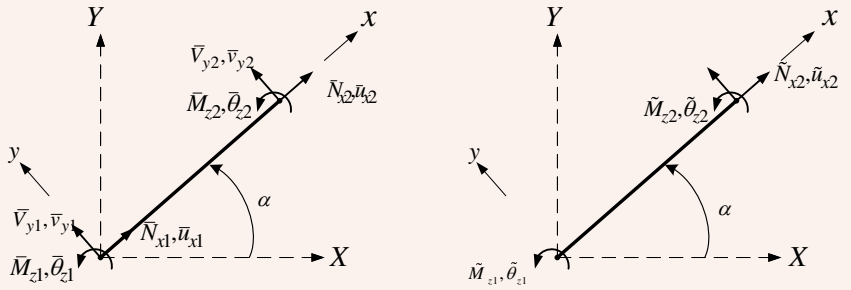
50 متجه القوى العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب في المرجع المحلي هو:

$$\tilde{\mathbf{f}}_e = \lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$$

ومتجه الإزاحات العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب في المرجع المحلي هو:

$$\tilde{\mathbf{d}}_e = \lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$$

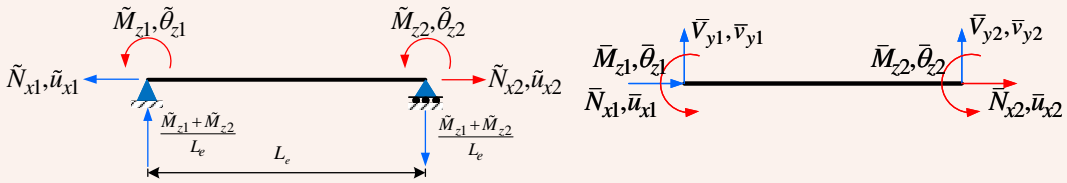
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) Local reference in an element

(b) Local reference in an element without rigid body modes

شكل 60.9: القوى الداخلية والإزاحات المقابلة في نظام الإحداثيات المحلي مع أنماط الجسم الصلب أو من دونها لعنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة



شكل 60.10: العلاقة بين وجود أنماط الجسم الصلب وغيابها

51 نحصل على العلاقة بين وجود أنماط الجسم الصلب وغيابها من الاتزان في الشكل 60.10.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{d}}_e \\ \mathbf{K}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \end{aligned} \tag{60.27}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

52 أخيراً، يمكن استعادة مصفوفة صلابة العنصر من المعادلة 45.22.

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

حيث $\mathcal{B}$ هي مصفوفة الاستاتيكا، §45.2.1.2.

60.4.1.2 تحديد الحالة

53 لم تقدم الدراسات التي ركزت على مزايا الطريقة القائمة على المرونة، ومنها Zeris **and** Mahin, 1988، طريقة واضحة ومتسقة لحساب متجهات القوى الداخلية للعنصر من تشوهاته. والسبب أن العنصر القائم على المرونة، المشتق من مبدأ الشغل الافتراضي المتمم، لا يمتلك دوال شكل تربط حقل التشوه داخل العنصر بمتجه الإزاحات العقدية له، بل يمتلك *دوال شكل تربط قوى المقطع بالقوى العقدية*.

54 تستند الصياغة العامة إلى صياغة الصلابة، أي الإزاحة، بينما يستند العنصر إلى صياغة المرونة، أي القوة؛ ولذلك يجب التوفيق بينهما عند تحديد متجهات القوى الداخلية للعنصر.

55 على مستوى العنصر، يعطي العنصر القائم على المرونة *إزاحات عقدية لا تتوافق بالضرورة* مع *الإزاحات الآتية من العناصر المجاورة*، تماماً كما لم تكن القوى متوافقة على مستوى العنصر في الصياغة القائمة على الصلابة.

56 يجب أن نضمن *توافق الإزاحات العقدية*، بالطريقة نفسها التي ضمنا بها اتزان العقد في الصياغة القائمة على الصلابة. ويمكن تحقيق ذلك تكرارياً.

57 لاحظ أن الطريقة القائمة على الصلابة كانت تتضمن انقطاعاً في القوى العقدية.

58 توجد خوارزميتان للطرائق المختلطة القائمة على الصلابة والمرونة: (a) مع تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر لتحديد حالته (Spacone, Ciampi **and** Filippou, 1992)، و(b) من دون تكرار على مستوى العنصر لتحديد حالته (Carol **and** Murcia, 1989).

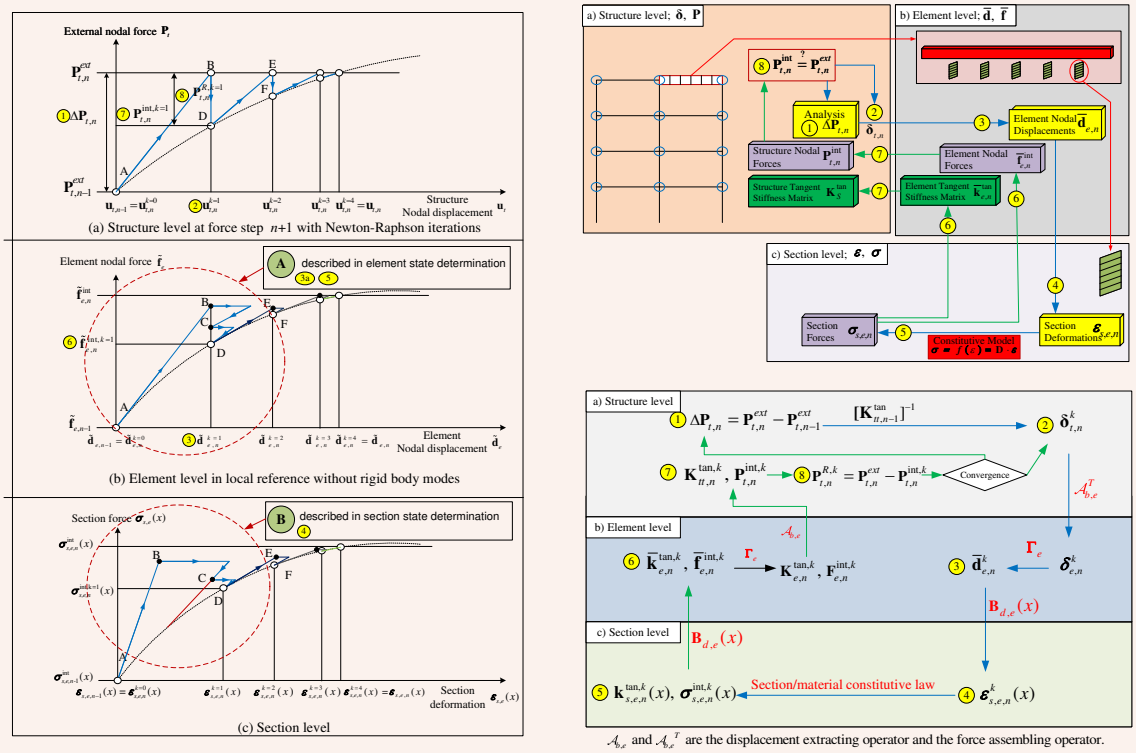
60.4.1.2.1 من دون تكرار على مستوى العنصر

59 كما في تحديد حالة عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة ضمن تحليل إنشائي لاخطي، تتكون عملية تحديد الحالة للطريقة المختلطة القائمة على الصلابة والمرونة، من دون تكرار على مستوى العنصر، من ثلاث مراحل للمقطع والعنصر والمنشأ كما في الشكل 60.11.

60 بعد اكتمال تحديد حالة المنشأ، يقارن متجه القوى العقدية الداخلية عند التكرار k^{th}، أي $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$، بمتجه القوى العقدية الخارجية الكلية المطبقة $\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$. ويعطي الفرق، إن وجد، متجه القوى العقدية المتبقية $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$، الذي يعاد تطبيقه على المنشأ ضمن عملية حل تكرارية حتى يصبح الفرق بين متجه القوى الخارجية الكلية المطبقة ومتجه القوى العقدية الداخلية ضمن سماحية محددة.

61 يكون إجراء تحديد الحالة مباشراً لعنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة من دون تكرار العنصر، كما هو الحال في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة. يحدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ من دون

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 60.11: تحديد الحالة للطريقة القائمة على المرونة من دون تكرار العنصر

أنماط الجسم الصلب عند التكرار k^{th} من المعادلة 60.27، ويحدد متجه القوى العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k$ من دون أنماط الجسم الصلب من المعادلة 60.25.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k \\ \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k &= \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^k \\ \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k\end{aligned} \tag{60.28}$$

62 تحدد متجهات قوى المقطع عند التكرار k^{th}، أي $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^k(x)$، من متجه القوى العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k$، ثم تحدد متجهات تشوه المقطع عند التكرار k^{th}، أي $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^k(x)$، من متجهات قوى المقطع $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^k(x)$ كما في المعادلة 60.29.

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^k(x) &= \mathbf{N}_{f,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^k \\ \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^k(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k-1}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^k(x) \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^k(x) &= \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k-1}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^k(x) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^k(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k-1}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^k(x)\end{aligned} \tag{60.29}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63 بافتراض معرفة القانون التأسيسي للمقطع صراحة، تحسب بسهولة مصفوفات المرونة المماسية للمقطع $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$ ومتجهات قوى المقطع الداخلية $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ من $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$.

64 في هذا النهج تحدد أولاً متجهات قوى وتشوهات المقطع المتبقية بواسطة مصفوفات المرونة المماسية للمقطع $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x) = \boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x) = \tilde{\mathbf{c}}^{k}_{s,e,n}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x)$$

65 تُكامل متجهات تشوه المقطع المتبقية على امتداد العنصر باستخدام مبدأ القوة الافتراضية للحصول على متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر.

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x)$$

66 تحدد مصفوفة مرونة العنصر من دون أنماط الجسم الصلب $\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}$ من المعادلة 60.26، ثم يحدد متجه القوى العقدية المتبقية للعنصر من متجه الإزاحات العقدية المتبقية له.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} \tag{60.30}$$

67 يحدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب من المعادلة 60.28 والمعادلة 60.30.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} - \tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n}$$

68 ومن ثم يحصل على متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر من المعادلة 60.27.

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = [\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e]^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

69 تمثل صياغة عنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة من دون تكرار على مستوى العنصر طريقة مباشرة لتحديد الحالة، بخلاف عنصر كمرة-عمود 2D القائم على المرونة مع تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر.

70 تستخدم هذه الصياغة دوال استيفاء القوة من دون افتراضات، بخلاف العنصر القائم على الصلابة ذي دوال استيفاء الإزاحة.

71 بسبب الطبيعة الدقيقة لدوال استيفاء القوة، لا توجد أخطاء ذاتية في صياغة عنصر كمرة-عمود 2D القائم على المرونة من دون تكرار على مستوى العنصر. وإضافة إلى ذلك، لا توجد قيود على حجم العناصر إذا كان مقطع العنصر ثابتاً على امتداد محوره الطولي، ولهذا السبب (Carol **and** Murcia, 1989).

60.4.1.2.2 مع حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر

72 كما في تحديد حالة عنصر كمرة-عمود 2D قائم على الصلابة ضمن تحليل إنشائي لاخطي، تتكون عملية تحديد الحالة للطريقة المختلطة القائمة على الصلابة والمرونة مع حلقة تكرار Newton-Raphson على

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مستوى العنصر من ثلاث مراحل للمقطع والعنصر والمنشأ كما في الشكل 60.12. ويدل الدليل العلوي j في الشكل 60.12(b) على مخطط التكرار على مستوى العنصر ضمن عملية تحديد حالته. وهذه الحلقة ضرورية لتحديد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int,k}$ المقابل لمتجه الإزاحات العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_e^k$ أثناء تكرار Newton-Raphson ذي الرتبة k^{th}.

73 لتفسير الطريقة، يستخدم Newton-Raphson في عملية التكرار على مستوى المنشأ. ولا تؤثر عملية التكرار على مستوى المنشأ في استراتيجية التكرار على مستوى العنصر، التي تحدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$ لمتجه الإزاحات العقدية المعطى $\tilde{\mathbf{d}}_e$.

74 في عنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة، تتمثل الخطوة الأولى في تحديد متجه القوى العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k,j}$ من متجه الإزاحات العقدية الحالي باستعمال مصفوفة الصلابة المماسية للعنصر $\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j-1}$ عند نهاية التكرار السابق، ثم تعطي دوال استيفاء القوة $\mathbf{N}_{f,e}(x)$ متجهات قوى المقطع $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k,j}(x)$ على امتداد العنصر.

75 تتمثل المشكلة الأولى في تحديد متجهات تشوه المقطع $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k,j}(x)$ من متجهات قوى المقطع المعطاة، لأن علاقة قوة-تشوه المقطع اللاخطية يعبر عنها عادة بدالة صريحة لمتجه تشوه المقطع. وتنشأ المشكلة الثانية من أن التغيرات في مصفوفات الصلابة المماسية للمقطع $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan}(x)$ تنتج مصفوفة صلابة مماسية جديدة للعنصر، فتغير بدورها متجه القوى العقدية للعنصر عند متجه الإزاحات العقدية المعطى.

76 تحل هذه المشكلات بطريقة حل لاخطية خاصة. وفيها يحدد متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ عند كل تكرار. ويتطلب توافق الإزاحة على مستوى المنشأ تصحيح هذا المتجه، ويحقق ذلك على مستوى العنصر بتطبيق متجه قوى عقدية تصحيحي للعنصر استناداً إلى مصفوفة الصلابة المماسية الحالية له.

77 تحدد متجهات قوى المقطع المقابلة من دوال استيفاء القوة، بحيث يتحقق الاتزان دائماً على امتداد العنصر. ولا يجوز أن تتغير هذه المتجهات أثناء تحديد حالة المقطع، للحفاظ على الاتزان على امتداد العنصر.

78 أخيراً، ينتج التقريب الخطي لعلاقة قوة-تشوه المقطع حول الحالة الحالية متجهات تشوه المقطع المتبقية $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k,j}(x)$. ثم تكامل هذه المتجهات على امتداد العنصر للحصول على متجه جديد للإزاحات العقدية المتبقية، وتتكرر العملية كلها حتى يتحقق التقارب.

79 من المهم التأكيد على أن توافق متجه الإزاحات العقدية للعنصر والاتزان على امتداده يتحققان دائماً في هذه العملية.

80 توضح عملية الحل اللاخطية لتحديد حالتي العنصر والمقطع في الشكل 60.13a والشكل 60.13b لتكرار Newton-Raphson واحد k. ويتحقق التقارب في الحلقة j بعد ثلاثة تكرارات.

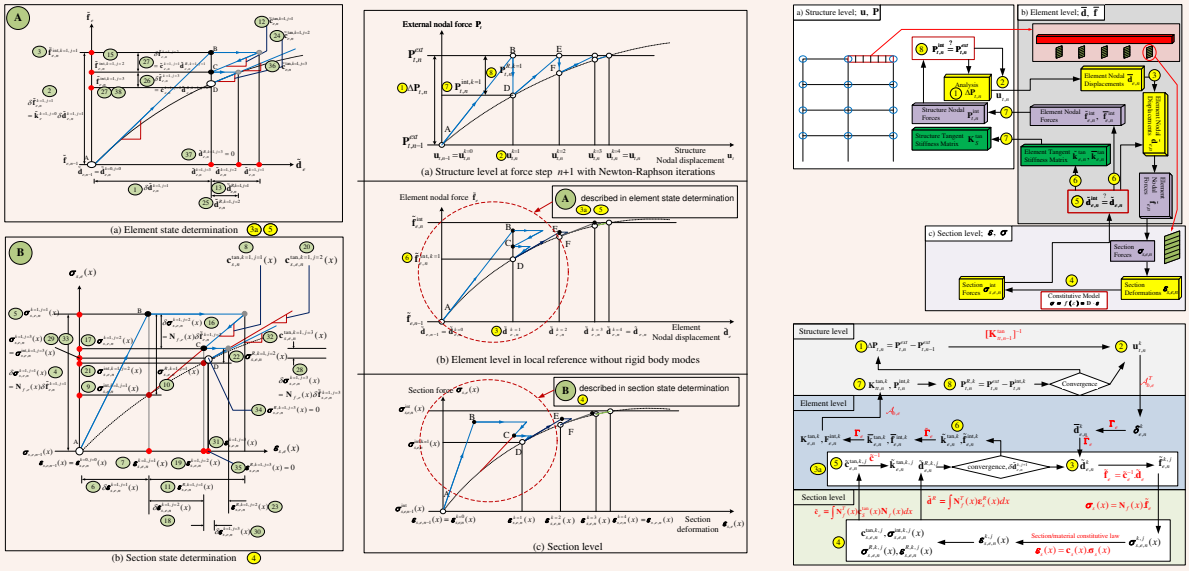
81 هدف حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر هو تحديد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر لمتجه الإزاحات العقدية الحالي عند تكرار Newton-Raphson ذي الرتبة k^{th}.

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} = \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$$

82 تدخل عملية تكرارية على مستوى العنصر، يرمز إليها بالدليل العلوي j، داخل تكرار Newton-Raphson ذي الرتبة k^{th}.

83 يقابل التكرار الأول $j = 1$. وتمثل الحالة الابتدائية للعنصر بالنقطة $\mathbf{A}$، وبـ $j = 0$ و$k = 0$ في الشكل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 60.12: تحديد الحالة لعنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة (Taucer, Spacone **and** Filippou, 1991a)

60.13a، وهي تقابل الحالة عند نهاية آخر تقارب على مستوى المنشأ. وتعطى مصفوفة الصلابة المماسية الابتدائية للعنصر بـ:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k=1,j=0} = \tilde{\mathbf{c}}_{e,n-1}^{tan}$$

ومع متجه الإزاحات العقدية التزايدية المعطى للعنصر:

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1,j=1} = \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$$

يكون متجه القوى العقدية التزايدية المقابل للعنصر:

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} = \left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k=1,j=0}\right]^{-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1,j=1}$$

84 يمكن الآن تحديد متجهات قوى المقطع التزايدية من دوال استيفاء القوة:

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1}$$

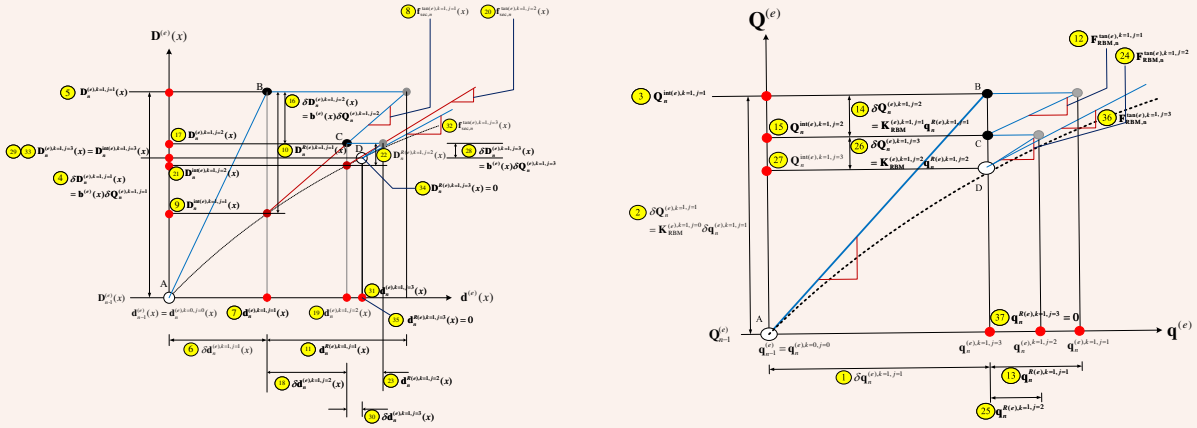
مع مصفوفات المرونة المماسية للمقطع عند نهاية آخر تقارب على مستوى المنشأ:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n-1}^{tan}(x)$$

تعطي خطْيَنة علاقة قوة-تشوه المقطع متجهات تشوه المقطع التزايدية:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) مستوى العنصر (b) مستوى المقطع

شكل 60.13: تحديد حالتي العنصر والمقطع لعنصر كمرة-عمود 2D قائم على المرونة مع حلقة تكرار New-ton-Raphson على مستوى العنصر

85 تحدّث متجهات تشوه المقطع إلى الحالة المقابلة للنقطة **B** في الشكل 60.13b.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=0}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

للتبسيط، إذا افترضنا معرفة علاقة قوة-تشوه المقطع صراحة، فإن متجهات تشوه المقطع $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$ تقابل متجهات قوى المقطع الداخلية $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$، ويمكن تعريف مصفوفات مرونة مماسية جديدة للمقطع $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)$ في الشكل 60.13b. وفي هذا النهج تحدد أولاً متجهات قوى المقطع المتبقية:

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$$

ثم تحول إلى متجهات تشوه المقطع المتبقية $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$$

86 تمثل متجهات تشوه المقطع المتبقية التقريب الخطي لخطأ التشوه الناتج من خطْيَنة علاقة قوة-تشوه المقطع، الشكل 60.13b. ومع إمكان استخدام أي مصفوفات مرونة مناسبة للمقطع في حسابها، توفر مصفوفات المرونة المماسية للمقطع أسرع معدل تقارب.

87 تُكامل متجهات تشوه المقطع المتبقية على امتداد العنصر وفق مبدأ القوة الافتراضية للحصول على متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر.

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)\mathrm{d}x$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

88 عند هذه المرحلة يكتمل التكرار الأول $j = 1$ من الحلقة المقابلة. وتقابل حالتا العنصر والمقطع النهائيتان عند $j = 1$ النقطة $\mathbf{B}$ في الشكل 60.13a والشكل 60.13b. تحدد متجهات تشوه المقطع المتبقية $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$ ومتجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ في التكرار الأول، لكن متجه الإزاحات العقدية المقابل لا يحدّث. وبدلاً من ذلك تشكل هذه القيم نقطة انطلاق للخطوات المتبقية داخل الحلقة j. وينتهك وجود متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ التوافق، لأن العناصر المشتركة في عقدة واحدة ستصبح ذات متجهات إزاحات عقدية مختلفة.

89 لاستعادة التوافق بين العناصر، يجب تطبيق متجه القوة التصحيحي $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ عند نهايتي العنصر وفق المعادلة 60.31.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1}\right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1} &= \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \mathbf{N}_{f,e}(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{60.31}$$

ومن ثم، في التكرار الثاني $j = 2$، يحدّث متجه القوى العقدية للعنصر إلى:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$$

وتحدّث متجهات قوى وتشوهات المقطع إلى:

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} \\ \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) + \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)\end{aligned}$$

90 تقابل حالة العنصر والمقاطع داخله عند نهاية التكرار الثاني $j = 2$ النقطة $\mathbf{C}$ في الشكل 60.13a والشكل 60.13b. وتحسب مصفوفات المرونة المماسية الجديدة للمقطع $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ ومتجهات تشوه المقطع المتبقية الجديدة $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=2}(x)$ لجميع المقاطع.

91 ثم تكامل متجهات تشوه المقطع المتبقية للحصول على متجه التشوه العقدي المتبقي للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=2}$، وتحدد مصفوفة المرونة المماسية الجديدة للعنصر $\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ بتكامل مصفوفات مرونة المقطع $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ وفق المعادلة 60.31. وبهذا يكتمل التكرار الثاني داخل الحلقة j.

92 تتبع التكرارات الثالثة واللاحقة المخطط نفسه تماماً. ويتحقق التقارب عند استيفاء معيار التقارب المختار. ومع انتهاء الحلقة j يحدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر لمتجه الإزاحات العقدية المعطى $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$، كما تمثله النقطة $\mathbf{D}$ في الشكل 60.12 والشكل 60.13a والشكل 60.13b. ويمكن الآن متابعة عملية تكرار Newton-Raphson بالخطوة $k + 1$.

93 عندما يضاف متجه الإزاحات العقدية التزايدية للعنصر $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j=1} = \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ إلى متجه الإزاحات العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1}$ عند نهاية تكرار Newton-Raphson السابق، من المهم ملاحظة أن متجه الإزاحات العقدية للعنصر $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$ لا يتغير، باستثناء التكرار الأول $j = 1$ أثناء الحلقة j.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

94 يتحقق الاتزان على امتداد العنصر دائماً بدقة، لأن متجهات قوى المقطع تشتق من متجه القوى العقدية للعنصر بواسطة دوال استيفاء القوة وفق

$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} \quad \text{و} \quad \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

95 يتحقق التوافق أيضاً، ليس فقط عند نهايتي العنصر بل على امتداده كذلك.

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}^{k,j-1}_{e,n}\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j-1}_{e,n}\\
\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x)\cdot\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}\\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x) + \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j-1}_{s,e,n}(x)\cdot\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x)
\end{aligned}$$

يعبر الحد الثاني من المعادلة 60.32 عن العلاقة بين متجهات تشوه المقطع ومتجه الإزاحات العقدية للعنصر. ولا تحقق متجهات تشوه المقطع المتبقية $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ شرط التوافق هذا بدقة. ويمكن استيفاء الشرط بتكامل متجهات تشوه المقطع المتبقية $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ للحصول على $\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j-1}_{e,n}$. غير أن ذلك غير كفؤ حسابياً، ولذلك يهمل خطأ التوافق الصغير في حساب متجهات تشوه المقطع المتبقية $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$.

96 مع تحقق الاتزان والتوافق على امتداد العنصر خلال كل تكرار من الحلقة j، لا تتحقق علاقة قوة-تشوه المقطع وعلاقة قوة-تشوه العنصر إلا ضمن سماحية محددة عند بلوغ التقارب في نقطة الشكل 60.13a والشكل 60.13b.

60.4.1.3 التحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة

97 بالإشارة إلى الأشكال من 60.15a إلى 60.15c للطريقة ذات حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر، وإلى الأشكال من 60.14a إلى 60.14c للطريقة من دون تكرار على مستوى العنصر، ندرس خطوة واحدة من طريقة Newton-Raphson على مستوى المنشأ للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة مع القانون التأسيسي للمقطع تحت التحكم بالقوة والإزاحة. يناقش التحكم بالقوة والإزاحة في القسم 58. وسيشرح إجراء المقطع الطبقي/الليفي في الشكل 60.4c في القسم 60.4.

60.4.1.3.1 من دون تكرار على مستوى العنصر

98 بالإشارة إلى الشكل 60.14.

الخطوة 1 احسب متجه القوى العقدية التزايدية $\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$.

$$\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

الخطوة 2 احسب متجه الإزاحات العقدية التزايدية $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ ومتجه الإزاحات العقدية الكلية $\mathbf{u}_{t,n}$ على مستوى المنشأ. يبدأ التكرار أولاً من المعادلة 60.32 ومع $k=1$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

إذا كان $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}^k_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}^k_{u,n} \\
\delta \mathbf{u}^k_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n} \delta \mathbf{u}^k_{u,n}] \\
\mathbf{u}^k_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^k_{t,n}
\end{aligned} \tag{60.32}$$

إذا كان $k \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\
\delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\
\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}
\end{aligned} \tag{60.33}$$

حيث يمثل الدليل العلوي k عداد التكرار، وتمثل $\mathbf{P}^R_t$ متجه القوى العقدية المتبقية على مستوى المنشأ، وتمثل $\Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ متجه الإزاحة التزايدية الكلية منذ آخر خطوة متقاربة، وتمثل $\delta \mathbf{u}^{k+1}_n$ متجه الإزاحة التزايدية الأخير.

الخطوة 3 كرر على جميع العناصر وحدد حالتها.

- حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع العام.

إذا كان $k = 1$:

$$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{u,n}$$

إذا كان $k \neq 1$:

$$\delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^k_{t,n}$$

حيث $\mathcal{A}_{b,e}$ مؤثر استخراج الإزاحة.

$$\boldsymbol{\delta}^k_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n}$$

وتقابل $\boldsymbol{\delta}^0_{e,n}$ الكمية $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

- حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي.

$$\begin{aligned}
\delta \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta \boldsymbol{\delta}^k_{e,n} \\
\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}
\end{aligned}$$

وتقابل $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ الكمية $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

- حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب في المرجع المحلي.

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta \overline{\mathbf{d}}_{e,n} \\
\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}
\end{aligned}$$

وتقابل $\overline{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ و $\tilde{\mathbf{d}}^0_{e,n}$ الكميتين $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ و $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخطوة 4 حدد متجه القوى العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب.

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

وتقابل $\tilde{\mathbf{f}}^{k=0}_{e,n}$ و $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k=0}_{e,n}$ الكميتين $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n-1}$ و $\tilde{\mathbf{k}}^{tan}_{e,n-1}$.

الخطوة 5 ابدأ تحديد حالة المقطع بالتكرار على مقاطع العنصر. وقد يختلف العدد الكلي للمقاطع من عنصر إلى آخر. لذلك يكون العدد الكلي للمقاطع في العنصر nIp_e، ويعتمد على عدد نقاط التكامل في قاعدة تربيع Gauss-Lobatto.

- حدد متجه قوى المقطع.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$

حيث $\mathbf{N}_{f,s,e}$ هي المصفوفة المشتقة من دوال استيفاء القوة عند المقطع s^{th} من العنصر e^{th}، وتقابل $\boldsymbol{\sigma}^{k=0}_{s,e,n}$ الكمية $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n-1}$.

الخطوة 6 حدد متجه تشوه المقطع. ونفترض مرة أخرى مقطعاً عاماً. وينفذ تحديد حالة كل مقطع في الحلقة s.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$$

وتقابل $\mathbf{c}^{tan,k=0}_{s,e,n}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}^{k=0}_{s,e,n}$ الكميتين $\tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{s,e,n-1}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n-1}$.

الخطوة 7 حدد مصفوفة المرونة المماسية للمقطع ومتجه قوى المقطع الداخلية. فإذا افترضنا معرفة القانون التأسيسي للمقطع صراحة، تحدد كل من $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ و $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ من $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$. أما في المقطع المرن فلا نحتاج إلى إعادة حساب $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ لأنها مطابقة لمصفوفة مرونة المقطع الابتدائية $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.

- حدد متجه قوى المقطع المتبقية.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$$

الخطوة 8 حدد متجه تشوه المقطع المتبقي.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}$$

الخطوة 9 حدد مصفوفة مرونة العنصر المحدثة ومتجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تكامل متجهات تشوه المقطع المتبقية ومصفوفات المرونة المماسية للمقطع على امتداد العنصر وفق مبدأ الشغل الافتراضي المتمم للحصول على متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر ومصفوفة المرونة المماسية للعنصر.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k} &= \sum_{s} \mathbf{N}_{f,s,e}^{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\
\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k} &= \sum_{s} \mathbf{N}_{f,s,e}^{T} \cdot \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\
\tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= [\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k}]^{-1}
\end{aligned}$$

حيث $\mathrm{wt}_{s,e}$ معامل الوزن المرتبط بمصفوفة Jacobian عند المقطع s^{th} من العنصر e^{th}.

الخطوة 10 حدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر ومصفوفة الصلابة المماسية له.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k} \\
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k} - \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} \\
\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e}^{T} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e}^{T} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e}^{T} \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \\
\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e}^{T} \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{e}
\end{aligned}$$

الخطوة 11 حدد متجه القوى العقدية الداخلية ومصفوفة الصلابة المماسية الموسعة.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_{e} \mathcal{A}_{b,e}^{T} \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_{e} \mathcal{A}_{b,e}^{T} \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \, \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}$$

حيث $\mathcal{A}_{b,e}^{T}$ مؤثر تجميع القوى.

الخطوة 12 احسب متجه القوى العقدية المتبقية على مستوى المنشأ من المعادلة 60.35. ثم تحقق التقارب باستخدام هذا المتجه.

تحقق من التقارب:

- إذا كانت $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ ضمن السماحية المحددة، فانتقل إلى زيادة القوة التالية.
- إذا لم تكن $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ ضمن السماحية المحددة، فحدّث k إلى $k+1$ وابدأ تكرار Newton-Raphson التالي. تكرر المعادلة 60.33 من **الخطوة 2** حتى **الخطوة 12** إلى أن يتحقق التقارب على مستوى المنشأ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.4.1.3.2 مع حلقة تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر

99 بالإشارة إلى الشكل 60.15.

الخطوة 1 احسب متجه القوى العقدية التزايدية $\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$.

$$\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

الخطوة 2: احسب الإزاحة العقدية التزايدية $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ والإزاحة العقدية الكلية $\mathbf{u}_{t,n}$ على مستوى المنشأ. يبدأ التكرار أولاً من المعادلة 60.34 ومع $k = 1$.

إذا كان $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}^{k}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}^{k}_{u,n} \\
\delta\mathbf{u}^{k}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n}\delta\mathbf{u}^{k}_{u,n}] \\
\mathbf{u}^{k}_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}
\end{aligned} \tag{60.34}$$

إذا كان $k \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\
\delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\
\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}
\end{aligned} \tag{60.35}$$

حيث يمثل الدليل العلوي k عداد التكرار، وتمثل $\mathbf{P}^{R}_{t}$ متجه القوى العقدية المتبقية على مستوى المنشأ، وتمثل $\Delta\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ متجه الإزاحة التزايدية الكلية منذ آخر خطوة متقاربة، وتمثل $\delta\mathbf{u}^{k+1}_{n}$ متجه الإزاحة التزايدية الأخير.

في المعادلة 60.34، يلزم شرح التحكم بالقوة/الإزاحة ومصفوفة الصلابة الموسعة $\mathbf{K}_S$ مع $\mathbf{K}_{tt}$ و$\mathbf{K}_{tu}$ و$\mathbf{K}_{ut}$ و$\mathbf{K}_{uu}$ بالتفصيل. ويعرض ذلك في القسم 58. حيث تقسم مصفوفة الصلابة الموسعة إلى مجموعتين بدليل سفلي ‘u’ للمواضع ذات الإزاحات المعلومة أو الصفرية، و‘t’ للمواضع ذات القوى المعلومة.

الخطوة 3: كرر على جميع العناصر وحدد حالتها.

- حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع العام. إذا كان $k = 1$ إذا كان $k = 1$:

$$\delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{u,n}$$

إذا كان $k \neq 1$:

$$\delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}^{k}_{t,n}$$

حيث $\mathbf{A}_{b,e}$ مؤثر استخراج الإزاحة.

$$\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$

وتقابل $\boldsymbol{\delta}^{0}_{e,n}$ الكمية $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر في المرجع المحلي.

$$\delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$
$$\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

حيث تقابل $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ الكمية $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

- حدد متجه الإزاحات العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب في المرجع المحلي.

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

حيث تقابل $\overline{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ و$\tilde{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ الكميتين $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ و$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

الخطوة 3a: ابدأ تحديد حالة العنصر. كرر على جميع عناصر المنشأ. وينفذ تحديد حالة كل عنصر ضمن الحلقة j.

- حدد متجه القوى العقدية للعنصر من دون أنماط الجسم الصلب.

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k,j-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$

حيث تقابل $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j=1}_{e,n}$ و$\tilde{\mathbf{f}}^{k,j=0}_{e,n}$ و$\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j=0}_{e,n}$ الكميات $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$ و$\tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n}$ و$\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n}$.

الخطوة 4 ابدأ تحديد حالة المقطع بالتكرار على مقاطع العنصر. وقد يختلف العدد الكلي للمقاطع من عنصر إلى آخر. لذلك يكون العدد الكلي للمقاطع في العنصر nIp_e، ويعتمد على عدد نقاط التكامل في قاعدة تربيع Gauss-Lobatto.

- حدد متجه قوى المقطع.

لتحديد حالة المقطع، نحتاج أولاً إلى التمييز بين المقطع العام والمقطع الطبقي/الليفي كما وصف في القسم 60.4. ولغرض هذا الوصف ندرس المقطع العام فقط. وينفذ تحديد حالة كل مقطع ضمن الحلقة s، حيث يقابل الدليل المقطع s^{th}.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$

حيث $\mathbf{N}_{f,s,e}$ هي المصفوفة المشتقة من دوال استيفاء القوة عند المقطع s^{th} من العنصر e^{th}، وتقابل $\boldsymbol{\sigma}^{k,j=0}_{s,e,n}$ الكمية $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- حدد متجه تشوه المقطع.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n} + \mathbf{c}^{tan,k,j-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$$

وتقابل $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j=0}_{s,e,n}$ و $\mathbf{c}^{tan,k,j=0}_{s,e,n}$ الكميتين $\boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}$ و $\mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n}$، ويكون $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j=0}_{s,e,n} = 0$.

- حدد مصفوفة المرونة المماسية للمقطع ومتجه قوى المقطع الداخلية. فإذا افترضنا معرفة القانون التأسيسي للمقطع صراحة، تحدد كل من $\mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n}$ و $\boldsymbol{\sigma}^{int,k,j}_{s,e,n}$ من $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$. أما في المقطع المرن فلا نحتاج إلى إعادة حساب $\mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n}$ لأنها مطابقة لمصفوفة مرونة المقطع الابتدائية $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.
- حدد متجهي قوى وتشوه المقطع المتبقيين.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n}$$

الخطوة 5 حدد مصفوفة مرونة العنصر المحدثة ومتجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر.

تكامل متجهات تشوه المقطع المتبقية ومصفوفات المرونة المماسية للمقطع على امتداد العنصر وفق مبدأ الشغل الافتراضي المتمم للحصول على متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر ومصفوفة المرونة المماسية للعنصر.

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j}_{e,n} = \sum_s \mathbf{N}^T_{f,s,e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j}_{s,e,n} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j}_{e,n} = \sum_s \mathbf{N}^T_{f,s,e} \cdot \mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j}_{e,n}]^{-1}$$

حيث $\mathrm{wt}_{s,e}$ معامل الوزن المرتبط بمصفوفة Jacobian عند المقطع s^{th} من العنصر e^{th}.

يجب تحقيق التقارب على مستوى العنصر باستخدام متجه الإزاحات العقدية المتبقية للعنصر.

- إذا كانت $\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j}_{e,n}$ ضمن السماحية المحددة، فانتقل إلى **الخطوة 6**.
- إذا لم تكن $\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j}_{e,n}$ ضمن السماحية المحددة، فحدّث j و $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j+1}_{e,n}$ إلى $j+1$ و $-\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j}_{e,n}$، وابدأ تكرار Newton-Raphson التالي. ثم كرر من **الخطوة 3a** حتى **الخطوة 5** إلى أن يتحقق التقارب على مستوى العنصر.

الخطوة 6 حدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر ومصفوفة الصلابة المماسية له.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{int,k,j}_{e,n}$$
$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^T_e \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$
$$\mathbf{F}^{int,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}^T_e \cdot \bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} &= \mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n} \\
\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} &= \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j}_{e,n} \\
\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{T}_{e} \cdot \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \\
\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}^{T}_{e} \cdot \overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{e}
\end{aligned}
$$

الخطوة 7 حدد متجه القوى العقدية الداخلية ومصفوفة الصلابة المماسية الموسعة.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}^{int,k}_{t,n} &= \sum_{e} \mathcal{A}^{T}_{b,e} \cdot \mathbf{F}^{int,k}_{e,n} \\
\mathbf{K}^{tan,k}_{S,n} &= \sum_{e} \mathcal{A}^{T}_{b,e} \cdot \mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} \cdot \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}
$$

حيث $\mathcal{A}^{T}_{b,e}$ مؤثر تجميع القوى، وتتكون $\mathbf{K}^{tan,k}_{S,n}$ من $\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}$ و$\mathbf{K}^{tan,k}_{tu,n}$ و$\mathbf{K}^{tan,k}_{ut,n}$ و$\mathbf{K}^{tan,k}_{uu,n}$.

الخطوة 8 احسب متجه القوى العقدية المتبقية على مستوى المنشأ من المعادلة 60.35. ثم تحقق التقارب باستخدام هذا المتجه.

- إذا كانت $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ ضمن السماحية المحددة، فانتقل إلى زيادة القوة التالية.
- إذا لم تكن $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ ضمن السماحية المحددة، فحدّث k إلى $k+1$ وابدأ تكرار Newton-Raphson التالي. تكرر المعادلة 60.35 من **الخطوة 2** حتى **الخطوة 8** إلى أن يتحقق التقارب على مستوى المنشأ.

60.4.2 العناصر القائمة على الصلابة مقابل العناصر القائمة على المرونة

100 يبرز الجدول 60.2 والشكل 60.16 الفروق بين العناصر القائمة على الصلابة والعناصر القائمة على المرونة.

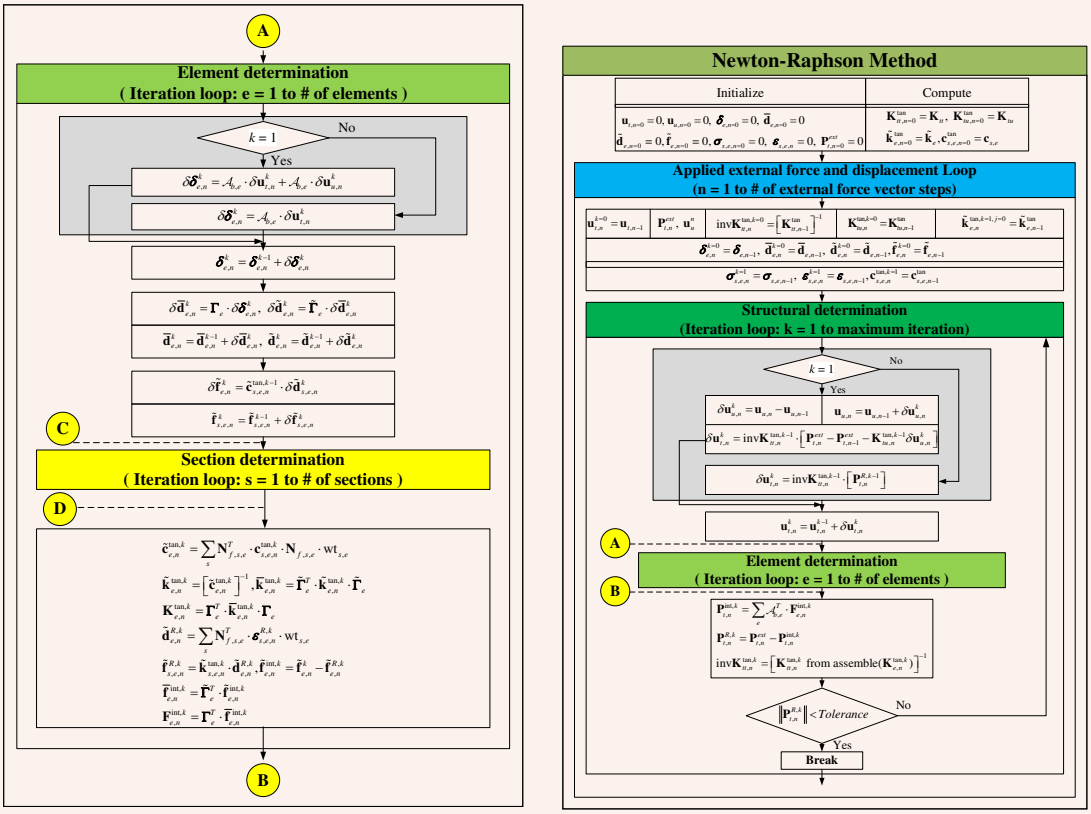
يرجى ملاحظة أن هذا القسم يحتوي على عناصر عائمة (أشكال و/أو جداول) يجب طباعتها قبل القسم التالي. لذلك قد تظهر هنا مساحات أو فجوات فارغة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 60.2: مقارنة العناصر القائمة على المرونة بالعناصر القائمة على الصلابة

الصلابة	المرونة	
الشغل الافتراضي	الشغل الافتراضي المتمم	**المبدأ**
حركي	استاتيكي	**اللاتحديد**
اتزان	حركية	**الصيغة القوية**
حركية	اتزان	**الصيغة الضعيفة**
حقل الإزاحات (افتراض)	حقل القوى (دقيق)	**دالة الاستيفاء**
$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{D}(x)$	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{d}(x)$	**القانون التأسيسي**
إزاحات نهايات العنصر	قوى نهايات العنصر	**المجاهيل الأساسية**
$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\bar{\mathbf{q}}$	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q}$	**التقسيم**
$\mathbf{k}_{(ele)} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T\mathbf{k}(x)\mathbf{B}(x)\mathrm{dx}$	$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T\mathbf{f}(x)\mathbf{b}(x)\mathrm{dx}$	**المصفوفة**

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

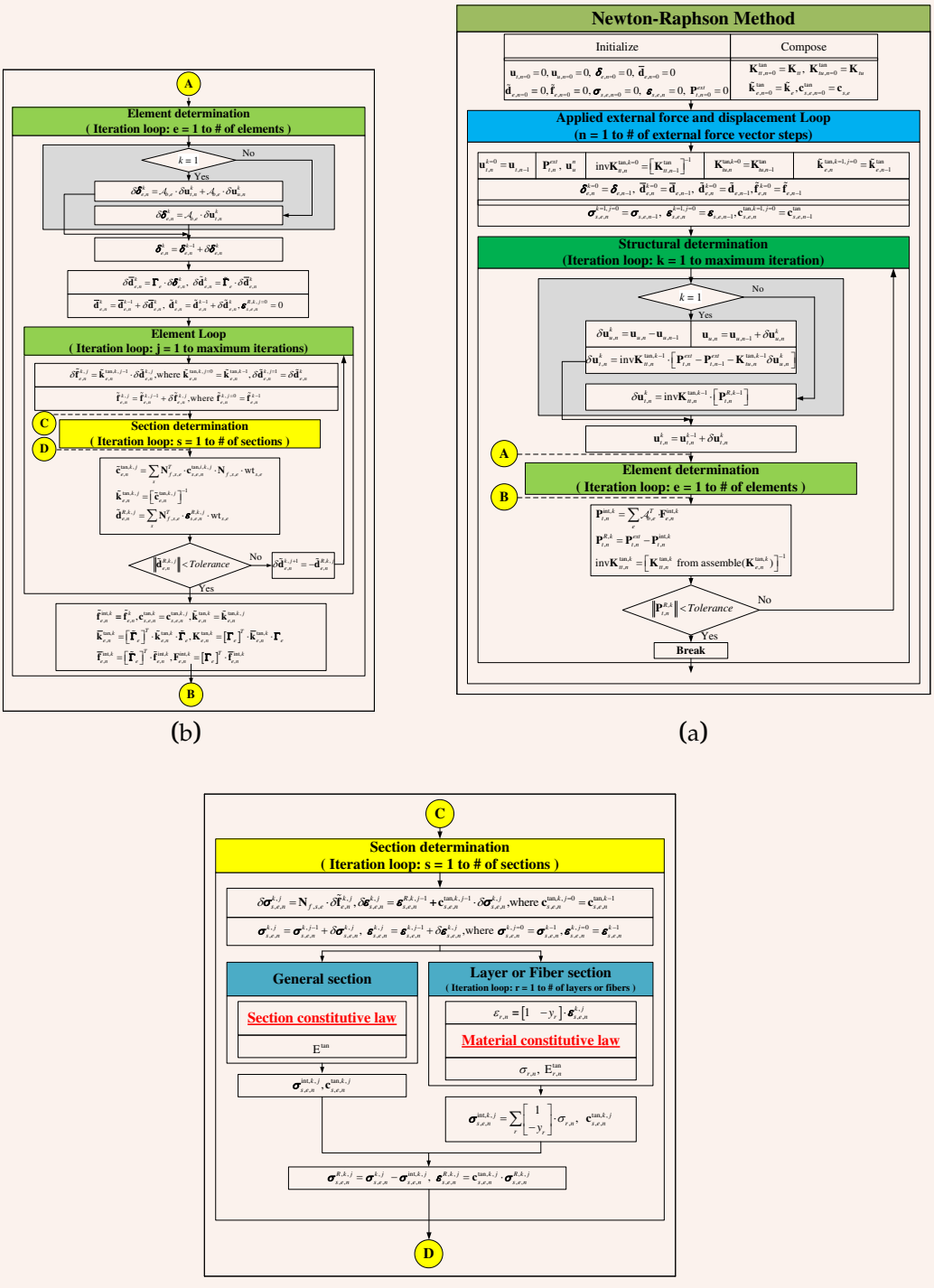


(b) (a)

(c)

شكل 60.14: مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة من دون تكرار على مستوى العنصر

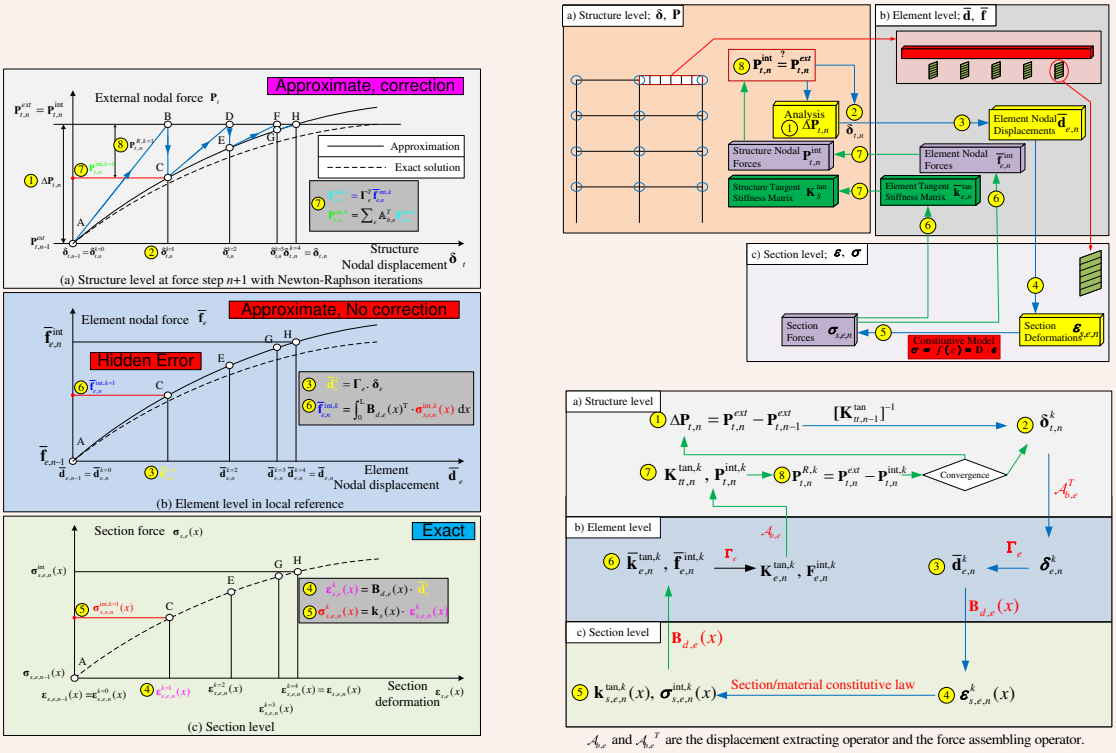
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) (b) (c)

شكل 60.15: مخطط انسيابي للتحليل اللاخطي بالطريقة القائمة على المرونة مع تكرار Newton-Raphson على مستوى العنصر

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



$\mathcal{A}_{b,e}$ and $\mathcal{A}_{b,e}^T$ are the displacement extracting operator and the force assembling operator.

شكل 60.16: مقارنة الصياغة القائمة على الصلابة مقابل الصياغة القائمة على المرونة

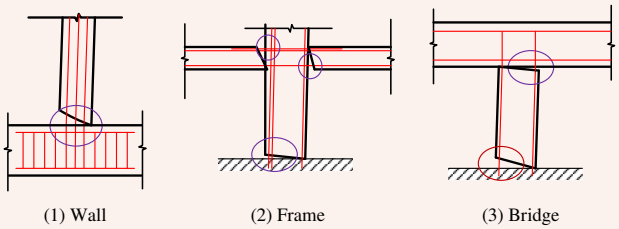
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.5 صياغة العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري

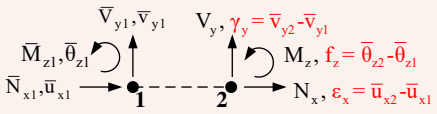
101 قد تحتوي وصلات العناصر الإنشائية أو العناصر ذات القوة المركزة على مفاصل لدنة أو لاخطيات. وفي هذه الحالات، تحتاج العقد الطرفية أو العقد ذات القوة المركزة إلى عدة نماذج تأسيسية للدونة المجمعة (§61.3).

102 عموماً، يستخدم العنصر ذو الطول الصفري عند نهاية عناصر الكمرة أو الكمرة–العمود لتمثيل الدوران الإضافي أو فشل القص مثل انزلاق القضبان، الشكل 60.17a.

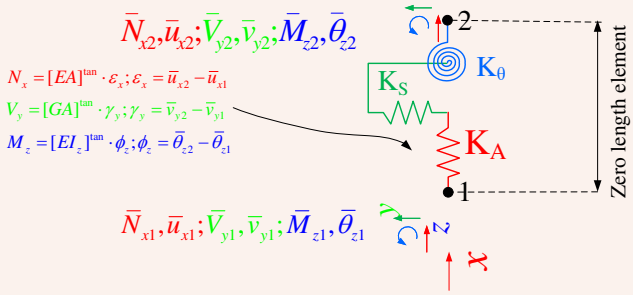
103 تستند صياغة العنصر إلى الشكل 60.17. ويهمل التأثير المقترن لقوى المقطع في هذا العنصر.



(a) التطبيق



(b) الاتصال



(c) الاتزان

شكل 60.17: عنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذو طول صفري

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

القانون التأسيسي يعبر عن القانون التأسيسي للمقطع كما يلي

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ V_y \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EIz^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{sec}^{tan}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{x2} - u_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}} \tag{60.36}$$

حيث تمثل EA^{tan} وGA^{tan} وEIz^{tan} الجساءة المماسية المرتبطة بالقوة المحورية والقص والعزم.

الاتزان العلاقة بين متجه القوة العقدية للعنصر ومتجه الإزاحة،

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \bar{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ \overline{v}_{y1} \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ \overline{v}_{y2} \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

حيث إن $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ مصفوفة صلابة العنصر في المرجع المحلي.

$$\bar{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 & -EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 & 0 & -GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EI_z^{tan} & 0 & 0 & -EI_z^{tan} \\ -EA^{tan} & 0 & 0 & EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan} & 0 & 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_z^{tan} & 0 & 0 & EI_z^{tan} \end{bmatrix} \tag{60.37}$$

60.5.1 نظام الإحداثيات في العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري

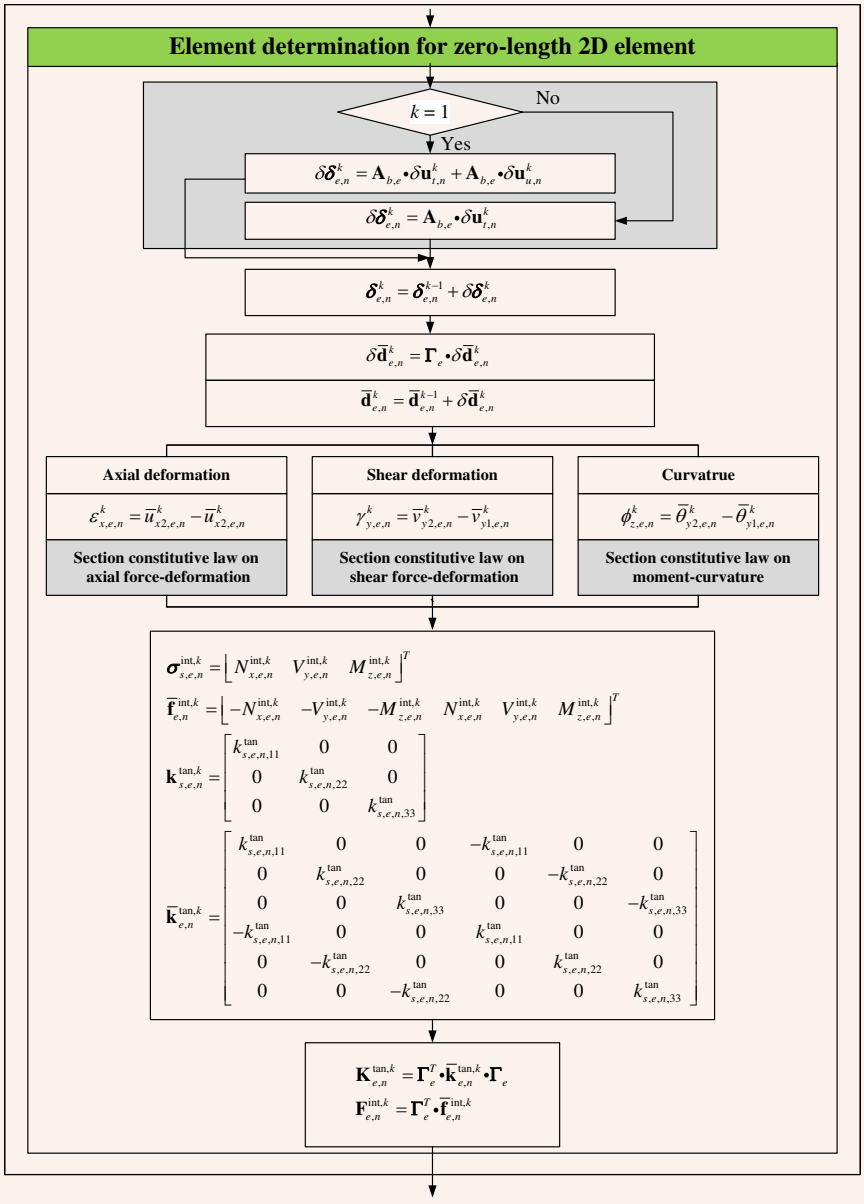
104 نظام الإحداثيات في العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري هو نفسه في القسم 60.3.1.1.

60.5.2 تحديد حالة العنصر في بُعدين (2) وبـ3 درجات حرية لكل عقدة

105 بالرجوع إلى الشكل 60.18، سندرس خطوة واحدة لعنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي طول صفري في التحليل اللاخطي.

الخطوة 1: حدد متجه تشوه المقطع والتشوه المحوري وتشوه القص والانحناء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 60.18: مخطط انسيابي لعنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي طول صفري لتحديد حالة العنصر

لكل تشوه، نستخرج المركبات المرتبطة به من $\bar{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} = \lfloor \varepsilon^k_{x,n},\ \gamma^k_{y,n},\ \kappa^k_{z,n} \rfloor^T$$
$$\varepsilon^k_{x,n} = \bar{u}^k_{x2,n} - \bar{u}^k_{x2,n}$$
$$\gamma^k_{y,n} = \bar{v}^k_{y2,n} - \bar{v}^k_{y2,n}$$
$$\kappa^k_{z,n} = \bar{\theta}^k_{z2,n} - \bar{\theta}^k_{z2,n}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تقابل المعادلات الثانية والثالثة والرابعة تشوه المقطع المحوري وتشوه القص والانحناء.

الخطوة 2: حدد صلابة المقطع المماسية المرتبطة بعلاقات القوة المحورية–التشوه وقوة القص–التشوه والعزم–الانحناء في القوانين التأسيسية للمقطع. ولإجراء ذلك، يمكن استخدام قوانين تأسيسية للمقطع معدلة بعدة متغيرات اعتماداً على قانون المادة التأسيسي المرتبط بعلاقة الإجهاد–الانفعال أحادية المحور (الفصل 61). ثم حدد متجه قوى المقطع الداخلية. إذا افترضنا أن القانون التأسيسي للمقطع معلوم صراحة، فتحدد $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan,k}$ و$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k}$ من $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k}$. أما في المقطع المرن فلا حاجة إلى إعادة حساب $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan,k}$ لأنها مطابقة لمصفوفة صلابة المقطع الابتدائية $\mathbf{k}_{s,e}$.

إذا كان المقطع مرناً،

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan} &= \mathbf{k}_{s,e}\\ \underbrace{\begin{Bmatrix} N_x^k \\ V_y^k \\ M_z^k \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k}} &= \mathbf{k}_{s,e,n}^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,n}^k \\ \gamma_{y,n}^k \\ \kappa_{z,n}^k \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k}}\end{aligned}$$

حيث إن $\mathbf{k}_{s,e,n}^{tan,k}$ مصفوفة صلابة المقطع المماسية عند التكرار k^{th}.

الخطوة 3: حدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر ومصفوفة الصلابة المماسية للعنصر من المعادلة 60.37.

$$\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \lfloor N_x^k, V_y^k, M_z^k, -N_x^k, -V_y^k, -M_z^k \rfloor^T$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{e}^{tan,k} = \begin{bmatrix} EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 \\ 0 & GA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -GA_{e,n}^{tan,k} & 0 \\ 0 & 0 & EI_{z,e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & -EI_{z,e,n}^{tan,k} \\ -EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & EA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 \\ 0 & -GA_{e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & GA_{e,n}^{tan,k} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_{z,e,n}^{tan,k} & 0 & 0 & EI_{z,e,n}^{tan,k} \end{bmatrix}$$

حيث إن $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ مصفوفة الصلابة المماسية للعنصر في المرجع المحلي.

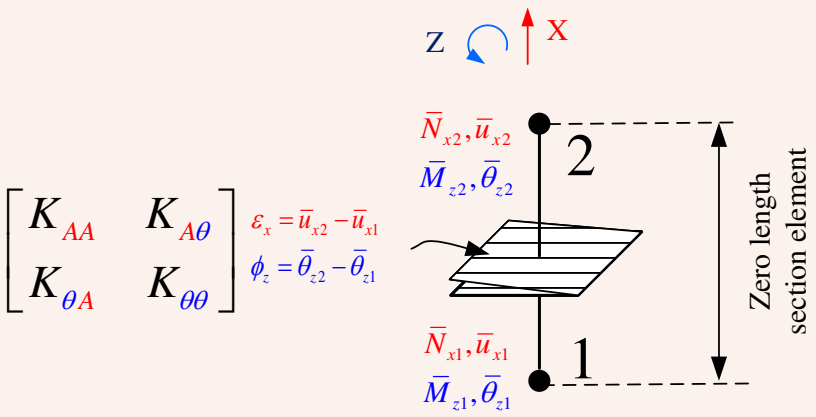
نحدد $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ و$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}\\ \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60.6 عنصر مقطعي ذو طول صفري

106 العنصر المقطعي ذو الطول الصفري مماثل للعنصر ذي الطول الصفري، لكنه يستخدم الطبقات/الألياف. يتيح لنا هذا العنصر نمذجة *انتقال مركز دوران المقطع* الذي قد يحدث (في انزلاق القضبان مثلاً). وتصاغ المسألة على أساس الاقتران بين القوة المحورية والعزم، الشكل 60.19.



شكل 60.19: عنصر مقطعي ذو طول صفري، الاتزان

60.6.1 مصفوفة الصلابة

القانون التأسيسي يعبر عن القانون التأسيسي للمقطع كما يلي

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s^{tan}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1} \\ \bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_s}$$

حيث إن $\mathbf{k}_s^{tan}$ مصفوفة صلابة المقطع المماسية الناتجة من تحديد حالة الطبقات/الألياف.

الاتزان يستند العنصر المقطعي ذو الطول الصفري إلى نظرية كمرة Bernoulli. وبالنظر إلى معادلات الاتزان بين النقطتين A وB.

$$\bar{N}_{x1} = k_{s,11}^{tan} \cdot (\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}) + k_{s,12}^{tan} \cdot (\bar{\theta}_{z1} - \bar{\theta}_{z2})$$
$$\bar{M}_{z1} = k_{s,21}^{tan} \cdot (\bar{u}_{x1} - \bar{u}_{x2}) + k_{s,22}^{tan} \cdot (\bar{\theta}_{z1} - \bar{\theta}_{z2})$$

وبالمثل بين النقطتين B وC،

$$\bar{N}_{x2} = k_{s,11}^{tan} \cdot (\bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1}) + k_{s,12}^{tan} \cdot (\bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1})$$
$$\bar{M}_{z2} = k_{s,21}^{tan} \cdot (\bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1}) + k_{s,22}^{tan} \cdot (\bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1})$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

107 بإعادة كتابة مجموعتي المعادلات هاتين في صورة مصفوفية، تعطى العلاقة بين متجه القوة العقدية للعنصر ومتجه الإزاحة كما يلي

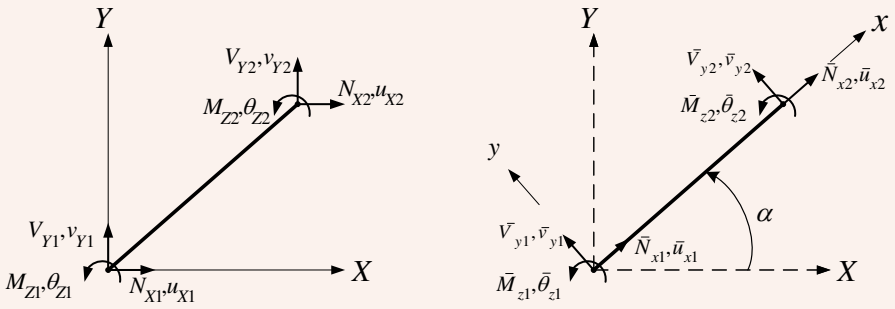
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ 0 \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ 0 \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \overline{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

حيث إن $\overline{\mathbf{k}}_e^{tan}$ مصفوفة صلابة العنصر في المرجع المحلي.

$$\overline{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} & -\mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} & -\mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,22}^{tan} \\ -\mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12}^{tan} & \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & -\mathrm{k}_{s,22}^{tan} & \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & 0 & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{bmatrix}$$

60.6.2 نظام الإحداثيات

107 نظام الإحداثيات في العنصر ثنائي الأبعاد (2D) ذي الطول الصفري هو نفسه في عنصر الصلابة ثنائي الأبعاد (2D)، الشكل 60.20



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

شكل 60.20: نظام الإحداثيات لعنصر مقطعي ذي طول صفري

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

60.6.3 تحديد حالة العنصر

108 يجرى تحديد الحالة للعنصر المقطعي ذي الطول الصفري، الشكل 60.21، كما يلي:

الخطوة 1: حدد متجه تشوه المقطع والتشوه المحوري والانحناء. لكل تشوه، نستخرج المركبات المرتبطة به من $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

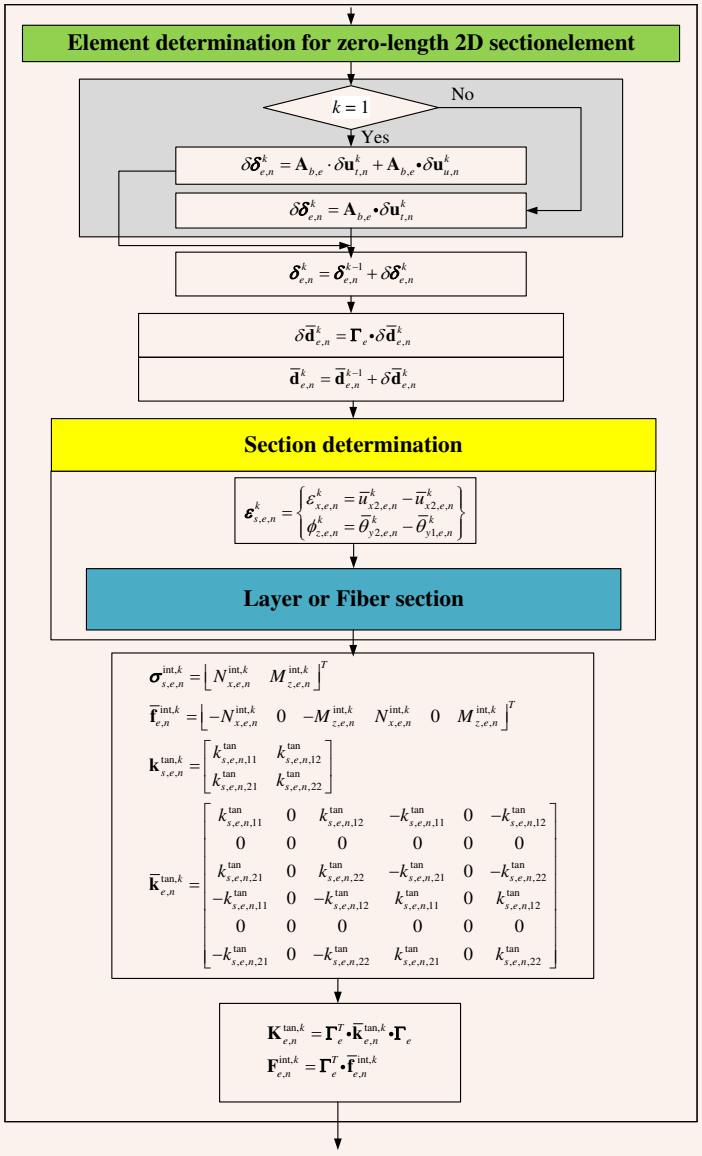
$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \lfloor \overline{u}^k_{x1,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z1,e,n}\ \overline{u}^k_{x2,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \rfloor^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,e,n},\ \phi^k_{z,e,n} \rfloor^T \\ \varepsilon^k_{x,e,n} &= \overline{u}^k_{x2,e,n} - \overline{u}^k_{x2,e,n} \\ \phi^k_{z,e,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,e,n} - \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \end{aligned}$$

الخطوة 2: حدد صلابة المقطع المماسية المرتبطة بعلاقة القوة المحورية–التشوه وعلاقة العزم–الانحناء باستخدام تحديد حالة الطبقات/الألياف كما في نموذج الطبقات/الألياف. ثم حدد متجه قوى المقطع الداخلية. إذا افترضنا أن القانون التأسيسي للمادة معلوم صراحة، فتحدد $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ و $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ من $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$. أما في المقطع ذي المادة المرنة فلا حاجة إلى إعادة حساب $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ لأنها مطابقة لمصفوفة صلابة المقطع الابتدائية $\mathbf{k}_{s,e}$. إذا كان لدينا مقطع ذو مادة مرنة، فإن

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\ \underbrace{\begin{Bmatrix} N^{int,k}_{x,e,n} \\ M^{int,k}_{z,e,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^k_{x,e,n} \\ \phi^k_{z,e,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}} \end{aligned}$$

حيث إن $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ مصفوفة صلابة المقطع المماسية عند التكرار k^{th}.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 60.21: مخطط انسيابي للعنصر المقطعي ذي الطول الصفري

الخطوة 3: حدد متجه القوى العقدية الداخلية للعنصر ومصفوفة الصلابة المماسية للعنصر

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \lfloor N^{int,k}_{x,e,n}, 0, M^{int,k}_{z,e,n}, -N^{int,k}_{x,e,n}, 0, -M^{int,k}_{z,e,n} \rfloor^T$$

$$\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,12} & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} \\ -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,12e,n,} & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,11} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & -\mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,21} & 0 & \mathrm{k}^{tan,k}_{s,e,n,22} \end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث إن $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ مصفوفة الصلابة المماسية للعنصر في المرجع المحلي.

109 نحدد $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ و $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

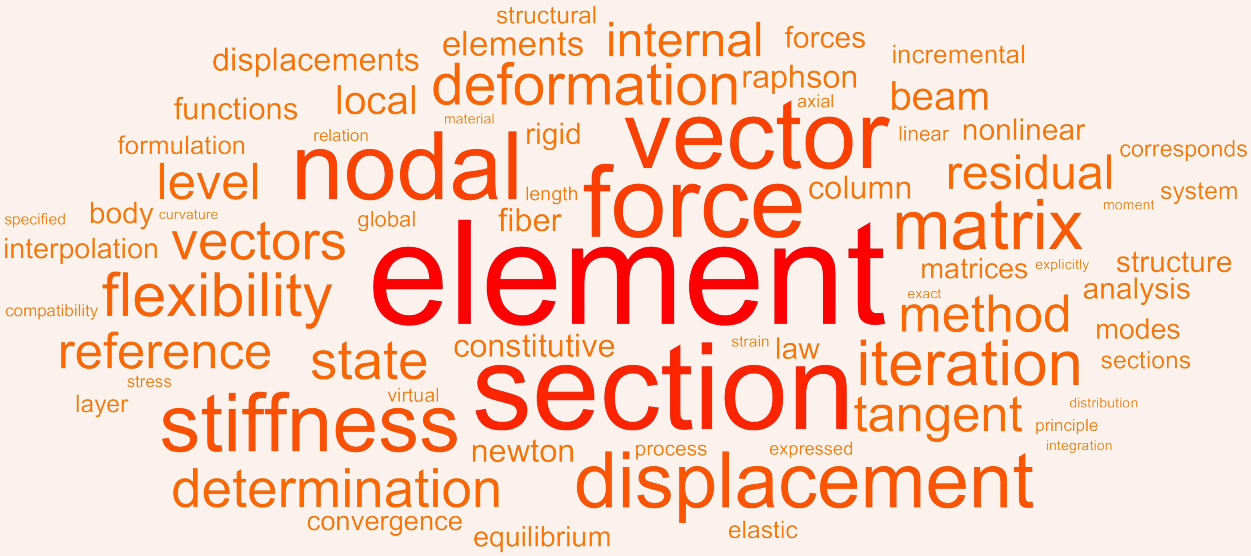
$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

60.7 التكامل العددي

110 نقاط التكامل: عادةً 3 نقاط (Gauss) للعناصر القائمة على الصلابة، و5 نقاط (Gauss-Lobatto) للعناصر القائمة على المرونة (§50.3).

60.8 قوة العنصر

111 تحدد القوى العقدية للعنصر كما في §50.4.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61 النماذج التأسيسية للدونة الموزعة والمجمعة

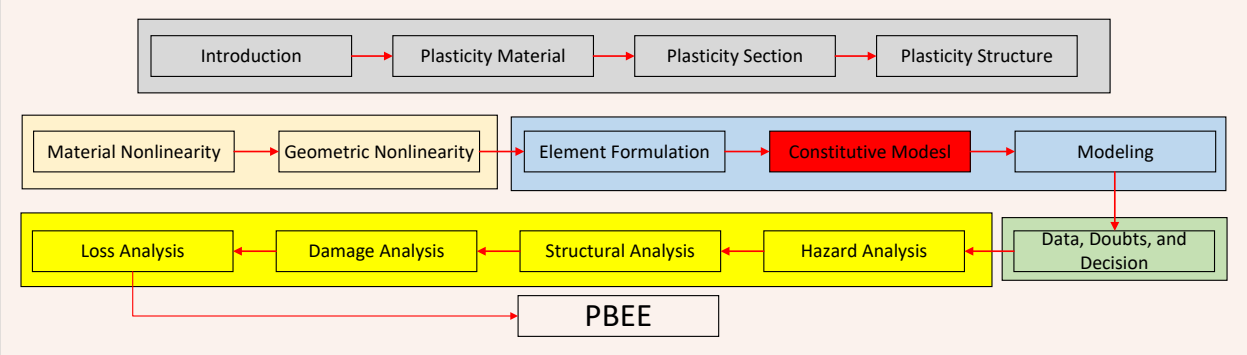
ملخص

يتناول هذا الفصل تطوير نماذج التحليل اللاخطي المتقدمة وتطبيقها، وهي نماذج أساسية لهندسة الزلازل القائمة على الأداء (الفصل 70). تهدف هذه النماذج إلى محاكاة سلوك المنشآت منذ بدء الضرر حتى الانهيار الكامل، وتوفير معاملات الطلب الهندسي المرتبطة بمقاييس الضرر. وتعد النمذجة الصحيحة لتدهور المقاومة والصلابة، وكذلك لتأثيرات $P-\Delta$، ضرورية لتمثيل الاستجابات الديناميكية بدقة.

يقدم الفصل دراسة مفصلة لكل من نهجي الدونة الموزعة والدونة المجمعة. ففي الدونة الموزعة، تدرس عناصر الألياف أو الطبقات لتطوير علاقات لاخطية بين الإجهاد والانفعال، بينما توصف الدونة المجمعة بعلاقات لاخطية بين العزم والانحناء. ويمتد النقاش إلى النماذج التأسيسية للفولاذ والخرسانة، مع إبراز جوانب رئيسية مثل التحميل الدوري وتدهور الصلابة وتقسية الشد وتأثير الحصر في خصائص الخرسانة. كما تحلل نماذج مواد بارزة، منها نموذج Kent وPark المعدل ونموذج Menegotto-Pinto للفولاذ، من حيث قدرتها على تمثيل الاستجابات اللاخطية المعقدة.

وعلى الرغم من هيمنة النماذج الاستدلالية والظاهراتية، يقر الفصل بقيودها ويعرض مناهج محسنة لحالات محددة، منها نماذج الضرر متباين الخواص. ويوفر هذا الإطار الشامل الأدوات النظرية والعملية اللازمة للتنبؤ بأداء المنشآت وتقييمه في الظروف القصوى، كالأحداث الزلزالية، بما يضمن محاكاة موثوقة وواقعية ضرورية لتطبيقات الهندسة الإنشائية الحديثة.

61.1 مقدمة 1849
61.1.1 المرونة الحرارية الخطية 1849
61.1.2 النماذج الاستدلالية 1850
61.2 الدونة الموزعة 1852
61.2.1 نماذج الفولاذ 1852
61.2.2 نماذج الخرسانة 1862
61.2.3 نموذج ضرر متباين الخواص مع الضرر الفعال واستعادة الصلابة 1873
61.2.4 انزلاق الترابط 1888
61.2.5 عنصر مقطعي ذو طول صفري . . 1889
61.3 الدونة المجمعة 1892
61.3.1 الطول اللدن 1893
61.3.2 نموذج فشل القص (مادة حالة الحد 1902
61.3.3 نماذج Ibarra للتباطؤ المتضمنة تبديد الطاقة 1906
61.3.4 نموذج Ghannoum 1925



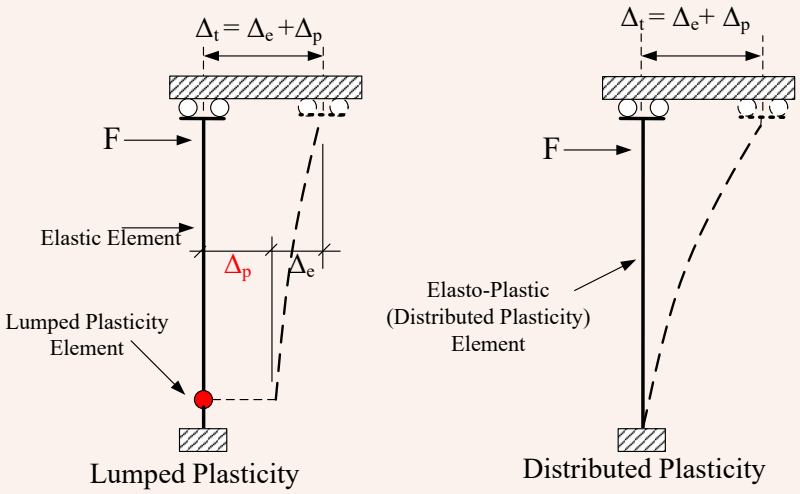
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.1 مقدمة

1 تقع النماذج التأسيسية في صميم التحليل اللاخطي (المادي) بالعناصر المحددة. ففي العناصر المحددة للأجسام الصلبة تعتمد على تقييم $\mathbf{K}^{(e)}$ (المعادلة 49.12). لكن في سياق تحليلنا اللاخطي لعناصر الكمرة–العمود، نحتاج إلى $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ (المعادلة 60.14)، أو تحديداً إلى E^{tan} (المعادلة 60.18).

2 تناولت محاضرة الدونة الأولى النماذج "الكلاسيكية" القائمة على الدونة أحادية البعد (1D) للفولاذ، أما جميع النماذج الأخرى فهي قائمة "استدلالياً" لأنها الأفضل في تمثيل الاستجابة اللاخطية الدورية التي تهمنا أساساً. يتكون الموضوع من جزأين، الشكل 61.1:

- التركيز الرئيس على عناصر الألياف/الطبقات (أي الدونة الموزعة)، حيث نسعى إلى تحديد العلاقة اللاخطية بين الإجهاد والانفعال[1].
- توصف الدونة المجمعة بعلاقات لاخطية بين العزم والانحناء.



شكل 61.1: نماذج الدونة المجمعة والموزعة

61.1.1 المرونة الحرارية الخطية

3 هكذا ينبغي أن يكون الأمر. فمن ميكانيكا *الأوساط المتصلة* نختار، لكمون ديناميكي حراري محدب، دالة تربيعية موجبة التحديد في مركبات موتر الانفعال.

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}\mathbf{a}:\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

[1] يمكن أيضاً توصيف العناصر ذات الطول الصفري بعلاقات لاخطية بين الإجهاد والانفعال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبالتعريف فإن $\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a}:\boldsymbol{\varepsilon}$، وهو قانون Hooke.

4 يتطلب التساوي الخواص والخطية أن يكون الكمون Ψ ثابتاً تربيعياً لموتر الانفعال، أي تركيباً خطياً من مربع الثابت الأول $\varepsilon_I^2 = [\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$ والثابت الثاني $\varepsilon_{II}^2 = \frac{1}{2}\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\varepsilon_I^2 + 4\mu\varepsilon_{II}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\varepsilon_I\right] - \frac{C_\varepsilon}{2T_0}\theta^2$$

حيث إن λ وμ هما معاملتا Lame.

5 بالاشتقاق نحصل على

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \lambda\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\mathbf{I} \\ \sigma_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\delta_{ij}\end{aligned}$$

6 هدفنا النهائي تمثيل الاستجابة اللاخطية المعقدة لمنشآت الفولاذ والخرسانة المسلحة الخاضعة لتحميل دوري عكسي (الزلازل).

7 توجد نماذج قليلة جداً ذات أساس ديناميكي حراري تستطيع تحقيق ذلك (باستثناء النماذج القائمة على ميكانيكا الضرر).

8 لذلك سنعتمد على *نماذج استدلالية*.

61.1.2 النماذج الاستدلالية

9 تقوم النماذج الاستدلالية على الملاحظات المختبرية التي تنتج عنها علاقات تجريبية.

10 وتندرج جميع النماذج المعروضة لاحقاً (الشكل 61.2) ضمن هذه الفئة، ومن ثم فهي نماذج *ظاهراتية*.

11 نسعى إلى تمثيل ما يلي

التدهور في الخرسانة

المقاومة لكل من الخرسانة أو الفولاذ

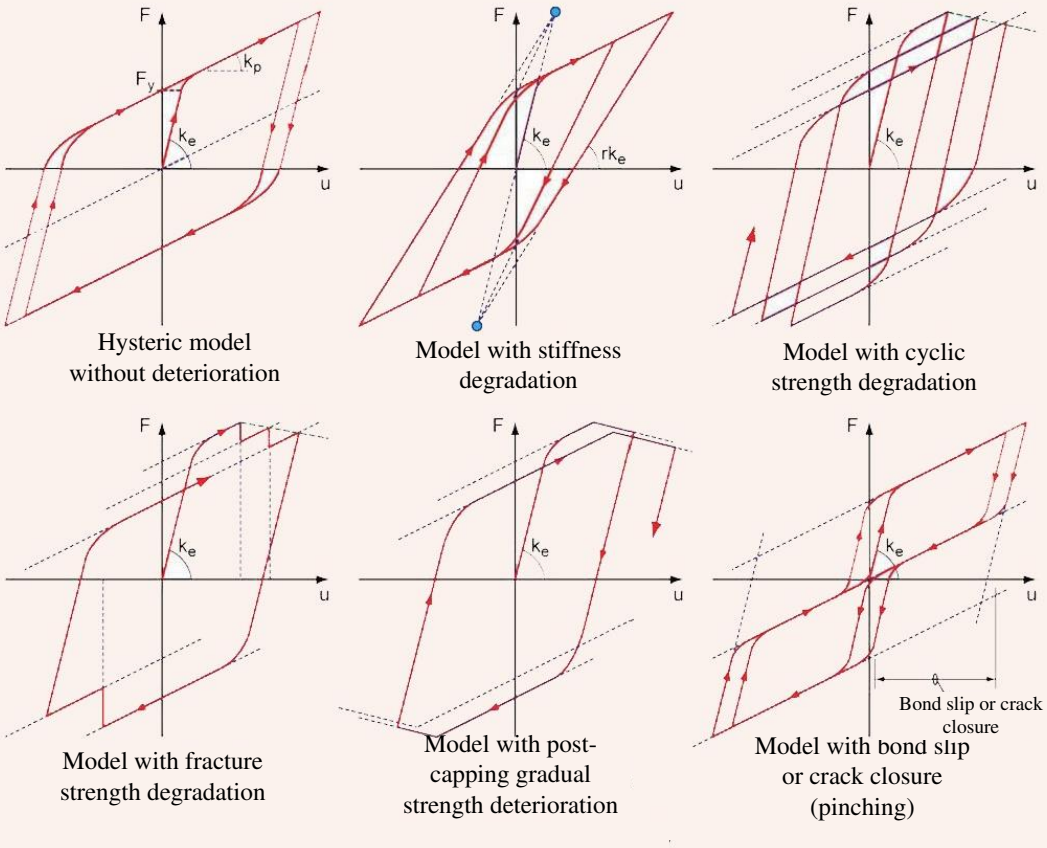
- الشد
- الشد والضغط

الصلابة التي تنخفض مع الضرر

انغلاق الشقوق الناتج من انعكاس الحمل.

12 سنتناول نماذج الفولاذ والخرسانة كلّاً على حدة (كما فعلنا في §54.2).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.2: نماذج التباطؤ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.2 الدونة الموزعة

61.2.1 نماذج الفولاذ

من أطروحة الدكتوراه "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" التي أعدها Kang, 2010.

61.2.1.1 مقدمة

13 لا يواجه نموذج الفولاذ للإثارة الدورية العشوائية إلا صعوبات طفيفة. معظم النماذج استدلالية ومحددة تحليلياً، وأنجحها تلك ذات المعاملات المتغيرة.

14 نميز ضمن هذه المجموعة بين ثلاث صياغات مختلفة:

جبرية صريحة معادلة الإجهاد: $\sigma = f(\varepsilon)$.

جبرية ضمنية معادلة الإجهاد: $f(\sigma, \varepsilon) = 0$.

معادلة تفاضلية (من الرتبة الأولى): $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = E^p = f(\sigma)$

15 من النماذج الصريحة الشائعة الاستخدام:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = b\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{(1-b)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\left[1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^R\right]1/R}$$

حيث إن σ_0 وε_0 وb وR تمثل إجهاد الخضوع وانفعاله، ومعامل تصلد الانفعال، ومعاملاً يأخذ أثر Bauschinger في الحسبان (الشكل 54.5b) ويتغير تبعاً لمقدار الامتداد ε_{max} داخل المجال اللدن.

61.2.1.2 نموذج ثنائي الخطية ذي تصلد متساوي الخواص

16 بينما يستند النموذج السابق إلى نظرية الدونة، قد يواجه تنفيذه مشكلات. وبدلاً منه يمكن اشتقاق نموذج مماثل ظاهراتياً استناداً إلى (Filippou, Popov **and** Bertero, 1983) وكما نُفذ في (Mazzoni **andothers**, 2006).

61.2.1.2.1 علاقة الإجهاد–الانفعال

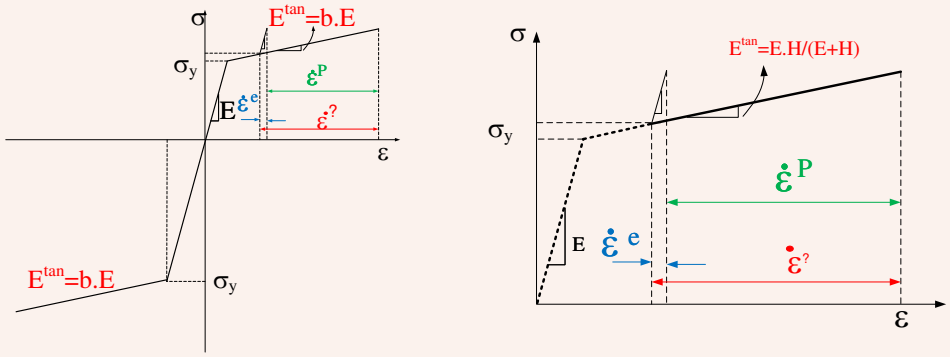
17 بدلاً من تحديد E^{tan} باستخدام H من المعادلة 54.12، الشكل 61.3a

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

يحسبه هذا النموذج المبسط باستخدام معامل تصلد الانفعال b، وهو نسبة معامل المماس بعد الخضوع E^{tan} إلى معامل المرونة الابتدائي E، ولا يأخذ إلا التصلد متساوي الخواص، الشكل 61.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) نموذجا ثنائي الخطية Menegotto- & Pinto

(a) نموذج الدونة

شكل 61.3: مقارنة معامل المماس؛ الدونة مقابل Menegotto-Pinto

18 لمراعاة تطور المجال المرن في التصلد متساوي الخواص، يحدد انزياح الإجهاد σ_Δ كما يلي:

- إذا غيرت زيادة الانفعال $\Delta\varepsilon$ قيمة موجبة إلى سالبة:

$$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\sigma_\Delta = \Delta^N \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \tag{61.1}$$

- إذا غيرت زيادة الانفعال $\Delta\varepsilon$ قيمة سالبة إلى موجبة:

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
$$\sigma_\Delta = \Delta^P \cdot \sigma_y \cdot (1 - b) \tag{61.2}$$

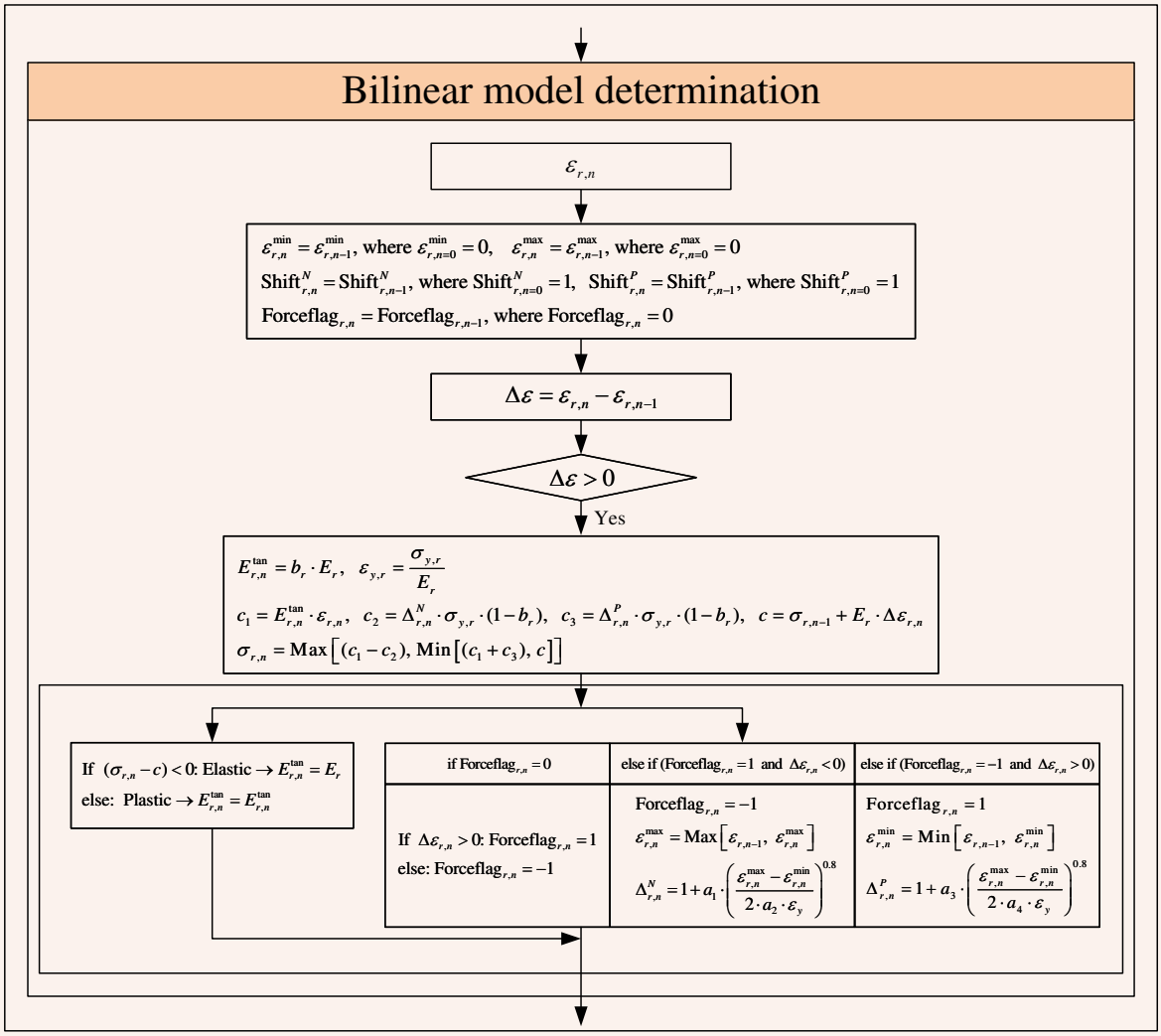
حيث،

- يمثل a_1 وa_3 معاملي التصلد متساوي الخواص اللذين يعكسان زيادة غلاف الخضوع في الضغط بنسبة من مقاومة الخضوع بعد انفعال لدن $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$، وزيادة غلاف الخضوع في الشد بنسبة من مقاومة الخضوع بعد انفعال لدن مقداره $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$.
- يمثل a_2 وa_4 معاملي التصلد متساوي الخواص بالنسبة إلى a_1 وa_3، وتمثل ε_{max} وε_{min} الانفعال عند نقطتي انعكاس الانفعال العظمى والصغرى. ومن قيود هذا النموذج ضرورة تحديد a_1 وa_2 وa_3 وa_4 بملاءمة منحنى النموذج مع النتائج التجريبية. والقيم الافتراضية هي $a_1 = 0$ و$a_2 = 55$ و$a_3 = 0$ و$a_4 = 55$ في (Mazzoni **andothers,** 2006).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.2.1.2.2 تحديد النموذج ثنائي الخطية

يبين الشكل 61.4 إجراء الحصول على الإجهاد أحادي المحور
19 σ ومعامل المماس E^{tan} من الانفعال أحادي المحور ε.



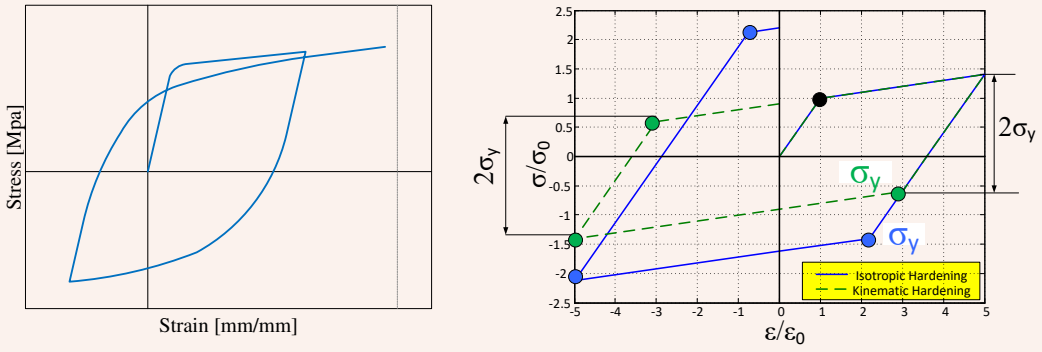
شكل 61.4: تحديد النموذج ثنائي الخطية

61.2.1.3 نموذج Menegotto-Pinto

20 هذا النموذج امتداد للنموذج السابق في جوهره. وهو يقدم منحنى أملساً لأنه يمثل سلوك البيانات التجريبية على نحو أفضل. كذلك قد تسبب حالات عدم الاستمرار مشكلات تقارب في التحليل اللاخطي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولذلك نقحه Menegotto **and** Pinto, 1973 ليكون ذا منحنى أملس، وعدله Filippou, Popov **and** Bertero, 1983 ليتضمن التصلد متساوي الخواص وتصلد الانفعال، الشكل 61.5b.



(b) نموذج Menegotto Pinto للفولاذ (a) نموذج الدونة

شكل 61.5: مقارنة نماذج الحمل الدوري العكسي: الدونة مقابل Menegotto-Pinto

21 يتميز النموذج بكفاءة حسابية ويتفق جيداً جداً مع النتائج التجريبية للاختبارات الدورية على قضبان فولاذ التسليح (Taucer, Spacone **and** Filippou, 1991b).

22 ومرة أخرى، كما في النموذج ثنائي الخطية، بدلاً من تحديد E^{tan} من المعادلة 54.12، الشكل 61.3a يحسبه هذا النموذج أيضاً من خلال معامل تصلد الانفعال b، وهو نسبة معامل المماس بعد الخضوع E^{tan} إلى معامل المرونة الابتدائي E، ولا يأخذ إلا التصلد متساوي الخواص، الشكل 61.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

23 سنعرض الاشتقاق خطوة خطوة:

1. يبدأ بعلاقة تجريبية بين الإجهاد والانفعال

$$\sigma^* = b \cdot \varepsilon^* + \frac{(1-b)\cdot\varepsilon^*}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}} \tag{61.3}$$

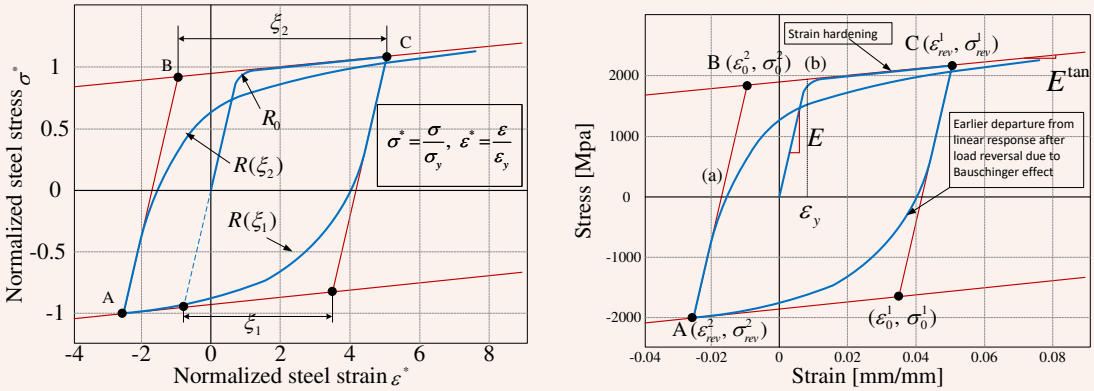
حيث،

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{rev}}{\sigma_0 - \sigma_{rev}}$$

2. تمثل σ_0 وε_0 الإجهاد والانفعال عند نقطة التقاء خطي التقارب للفرع المدروس (B)؛ وتمثل σ_{rev} وε_{rev} الإجهاد والانفعال عند النقطة التي حدث عندها آخر انعكاس للانفعال (A)، الشكل 61.6.
3. يحصل على معامل المماس E^{tan} بالاشتقاق

$$E^{tan} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sigma_0 - \sigma_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*}; \quad \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*} = b + \left[\frac{1-b}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}}\right] \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^{*R}}{1+\varepsilon^{*R}}\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.6: نماذج Menegotto Pinto للفولاذ (Menegotto **and** Pinto, 1973)

4. يوجد انتقال منحني من خط تقارب مستقيم ميله E (a) إلى خط تقارب آخر ميله E^{tan} (b).
5. تمثل σ_{rev} وε_{rev} الإجهاد والانفعال عند نقطة انعكاس الانفعال (النقطة A)، التي تشكل أيضاً أصل خط التقارب ذي الميل E (a).
6. تمثل σ_0 وε_0 الإجهاد والانفعال عند نقطة تقاطع خطي التقارب (النقطة B).
7. يمثل b نسبة تصلد الانفعال بين الميلين E^{tan} وE، ويمثل R معاملاً يؤثر في انحناء منحنى الانتقال بين خطي التقارب ويتيح تمثيلاً جيداً لأثر Bauschinger.
8. تحدّث σ_0 وε_0 وσ_{rev} وε_{rev} بعد كل انعكاس للانفعال.
9. يعتمد R على الفرق المطلق في الانفعال بين نقطة تقاطع خطي التقارب الحالية (النقطة B) ونقطة انعكاس الانفعال العظمى أو الصغرى السابقة (النقطة C)، تبعاً لكون الانفعال الحالي متزايداً أو متناقصاً على الترتيب.
10. ورد تعبيران لـ$R(\xi)$:

- نموذج Menegotto-Pinto الأصلي $R(\xi) = R_0 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
- التعبير الوارد في OpenSees: $R(\xi) = R_0 \left(1 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}\right)$

حيث إن R_0 قيمة المعامل R أثناء التحميل الأول، وcR_1 وcR_2 معاملان يحددان تجريبياً مع R_0. ويمكن التعبير عن ξ كما يلي

$$\xi = \left| \frac{\varepsilon^m - \varepsilon_0}{\varepsilon_y} \right|$$

حيث تمثل ε^m الانفعال عند نقطة انعكاس الانفعال العظمى أو الصغرى السابقة، تبعاً لكون الانفعال الحالي متزايداً أو متناقصاً على الترتيب. وتمثل ε_0 الانفعال عند نقطة التقاطع الحالية لخطي التقارب.

11. تقع كل من ε^m وε_0 على خط التقارب نفسه، وتمثل ε_y انفعال الخضوع الابتدائي.
12. حتى الآن، لا يراعي النموذج التصلد متساوي الخواص في الحمل الدوري العكسي. اقترح Filippou إزاحة σ_0 وε_0 في خط تقارب الخضوع الخطي كما يلي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- إذا غيرت زيادة الانفعال $\Delta\varepsilon$ قيمة موجبة إلى قيمة سالبة:

$$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{-\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^N - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = -\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o + \varepsilon_y \cdot \Delta^N)$$

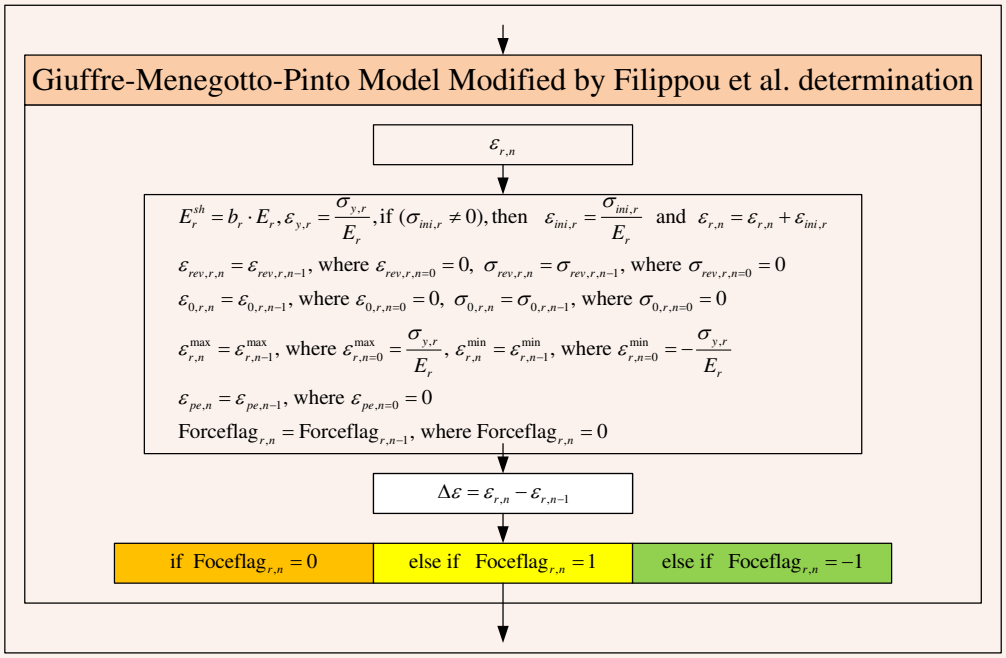
- إذا غيرت زيادة الانفعال $\Delta\varepsilon$ قيمة سالبة إلى قيمة موجبة،

$$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8}$$
$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y \cdot \Delta^P - E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^P - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
$$\sigma_0 = \sigma_y \cdot \Delta^P + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o - \varepsilon_y \cdot \Delta^P)$$

حيث يمثل a_1 وa_3 معاملي التصلد متساوي الخواص اللذين يعكسان زيادة غلاف الخضوع في الضغط بنسبة من مقاومة الخضوع بعد انفعال لدن $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$، وزيادة غلاف الخضوع في الشد بنسبة من مقاومة الخضوع بعد انفعال لدن مقداره $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$. ويمثل a_2 وa_4 معاملي التصلد متساوي الخواص بالنسبة إلى a_1 وa_3، وتمثل ε_{max} وε_{min} الانفعال عند نقطتي انعكاس الانفعال العظمى والصغرى.

13. تكمن المشكلة في أن a_1 وa_2 وa_3 وa_4 يجب تحديدها بملاءمة منحنى النموذج مع النتائج التجريبية. والقيم الافتراضية هي $a_1 = 0$ و$a_2 = 55$ و$a_3 = 0$ و$a_4 = 55$. لاحظ التشابه مع النموذج السابق؛ الأشكال 61.7 و61.8 و61.9 و61.10.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.7: التحديد (1) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

if $\text{Foceflag}_{r,n} = 0$

if $\Delta\varepsilon = 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$
$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$
$\varepsilon_{0,r,n} = 0$	$\varepsilon_{0,r,n} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\sigma_{0,r,n} = 0$	$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r}$	$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 0$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{ini,r}$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$E_{r,n}^{\tan} = E_r$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$
	$c_2 = c_1^{1/R}$	$c_2 = c_1^{1/R}$
	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$
	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$
	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$

شكل 61.8: التحديد (2) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = 1$

if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$, $\varepsilon_{0,r,n}$, $\sigma_{0,r,n}$
$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{-\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} + \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$c_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$c_2 = c_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$
$c_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$c_2 = c_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

شكل 61.9: التحديد (3) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = -1$

if $\Delta\varepsilon > 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$, $\varepsilon_{0,r,n}$, $\sigma_{0,r,n}$
$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{\sigma_{y,r} \cdot \Delta^P - E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r} \cdot \Delta^P + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

شكل 61.10: التحديد (4) لنموذج Giuffre-Menegotto-Pinto المعدل بواسطة Filippou وآخرين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

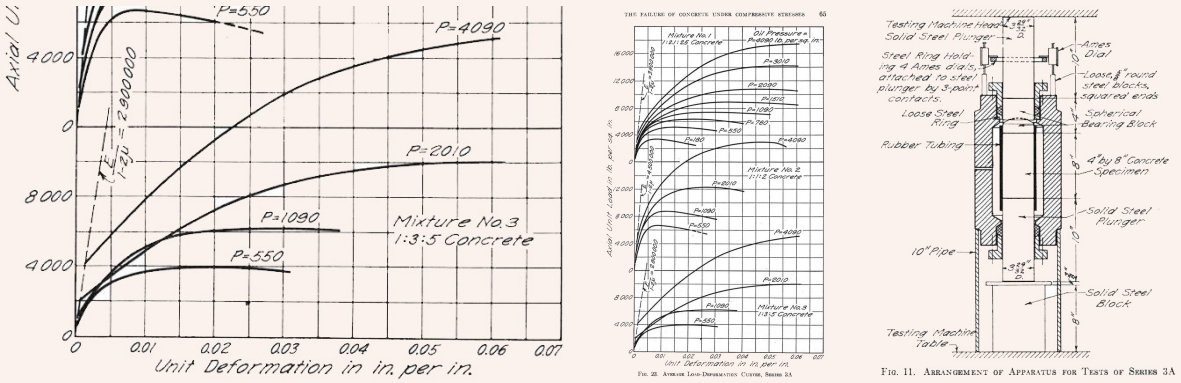
61.2.2 نماذج الخرسانة

من أطروحة الدكتوراه "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" التي أعدها Kang, 2010.

61.2.2.1 تأثير الحصر

24 قبل الانتقال إلى النماذج التأسيسية للخرسانة، من المهم ملاحظة دور الحصر في منحنى الإجهاد–الانفعال.

25 أجرى Richart, Brandtzæg **and** Brown, 1928 إحدى أقدم الدراسات وأكثرها شمولاً، إذ اختبرت لُبّات خرسانية داخل خلية Hooke مضغوطة بالزيت، الشكل 61.11، ووجد أن ضغط الحصر يزيد المقاومة بالفعل[2]



شكل 61.11: تأثير الحصر في مقاومة الخرسانة (Richart, Brandtzæg **and** Brown, 1928)

26 منذ ذلك الحين اقترحت نماذج عديدة لتأثير الحصر في مقاومة الخرسانة، ومن أبرزها نموذج Mander, Priestley **and** Park, 1988 الذي نشر الدراسة المرجعية الأشمل عن تأثير الحصر.

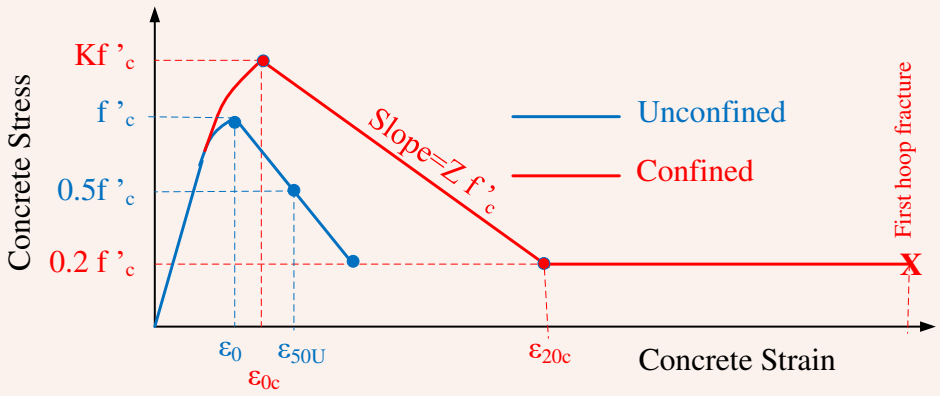
27 لهذه النتائج صلة مباشرة بدراستنا، إذ توفر الروابط/الكانات الحصر في حالتنا. ولذلك يجب إسناد مقاومتين مختلفتين للخرسانة المحصورة وغير المحصورة.

28 يحدد نموذج (Mander, Priestley **and** Park, 1988)، الشكل 61.12، القيم الآتية:

ε_0	انفعال الخرسانة عند الإجهاد الأقصى غير المحصور
ε_{0c}	$K\varepsilon_0$
ε_{20c}	انفعال الخرسانة عند 20% من الإجهاد الأقصى
ε_{50U}	$\frac{3+0.002f'_c}{f'_c-1000}$
K	$1+\rho_s\frac{f_y}{f'_c}$
$Z_c f'_c$	$\frac{\Delta f_c}{\Delta \varepsilon_c}$

[2] يمكن التحقق من ذلك بسهولة بإنشاء دائرة Mohr مع افتراض نمط فشل انزلاقي.

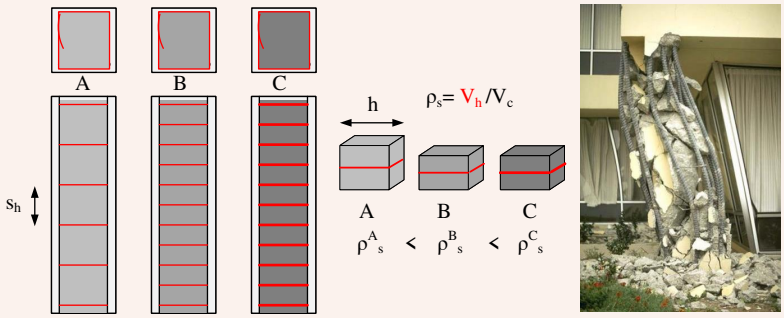
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.12: مقاومة الخرسانة المحصورة مقابل غير المحصورة في الضغط (Mander, Priestley **and** Park, 1988)

.

29 يوضح الشكل 61.13 تأثير الحصر في المقاومة.



شكل 61.13: دور الكانات في توفير حصر الخرسانة

61.2.2.2 نموذج Kent وPark المعدل

61.2.2.2.1 علاقة الإجهاد–الانفعال

30 يصف نموذج الخرسانة علاقة الإجهاد–الانفعال للخرسانة تحت تاريخ اعتباطي للانفعال الدوري. ويأخذ النموذج المنفذ أربعة عوامل مهمة في الحسبان:

1. تأثير حصر الخرسانة في منحنى الغلاف الرتيب في الضغط، الشكل 61.12، (Mander, Priestley **and** Park, 1988) (Richart, Brandtzæg **and** Brown, 1928)
2. التدهور المتتابع لصلابة منحنيي التفريغ وإعادة التحميل مع ازدياد قيم انفعال الضغط
3. تأثير تقسية الشد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. استجابة التباطؤ تحت التحميل الدوري في الضغط

31 يتبع منحنى الغلاف الرتيب للخرسانة في الضغط النموذج الأصلي لـKent **and** Park, 1971 الذي وسعه Scott, Park **and** Priestley, 1982. وعلى الرغم من نشر نماذج أدق وأكثر اكتمالاً منذ ذلك الحين، فإن ما يسمى نموذج Kent وPark المعدل يحقق توازناً جيداً بين البساطة والدقة.

32 تقسية الشد هي قدرة الخرسانة بين الشقوق على مقاومة إجهاد الشد والمساهمة في صلابة الانحناء للعضو. وبسبب الطبيعة المنفصلة للشقوق، تظل الخرسانة الواقعة بينها مرتبطة بالتسليح، ومن ثم تسهم في صلابة العضو. لكن مع ازدياد مقدار الحمل تتشكل شقوق إضافية على مسافات أقرب، مما يخفض إجهاد الشد الذي يمكن أن يتطور في الخرسانة. لذلك تنخفض تقسية الشد تدريجياً مع زيادة الحمل في مرحلة ما بعد التشقق.

33 أخذ الباحثون السابقون تقسية الشد في الحسبان بتعديل علاقة الإجهاد–الانفعال للخرسانة بحيث ينخفض إجهاد الشد تدريجياً إلى الصفر مع زيادة انفعال الشد بعد بلوغ مقاومة الشد (التشقق). وغالباً ما يقرب الانخفاض التدريجي لمقاومة الشد بخط مستقيم أو متعدد الخطوط أو دالة أسية. وهنا يعتمد نهج مماثل بمعدل انخفاض خطي.

34 لكن النتائج تشير إلى أن تطبيق تقسية الشد على جميع ألياف العضو قد يؤدي إلى مبالغة كبيرة في تقدير المقاومة القصوى. فتقسية الشد ظاهرة موضعية تؤثر في الخرسانة المجاورة مباشرة للتسليح. وفي الدراسات التحليلية، لا تسند خاصية تليين الشد إلا لألياف الخرسانة الواقعة ضمن مساحة فعالة حول قضبان التسليح. ومن الواضح أن حجم المساحة الفعالة يؤثر تأثيراً كبيراً في سلوك تقسية الشد للعضو.

35 في نموذج Kent وPark المعدل 1971 المبين في الشكل 61.14، تعرف علاقة الإجهاد–الانفعال الرتيبة للخرسانة في الضغط تجريبياً بثلاث مناطق. وباعتماد اصطلاح أن الضغط موجب، تكون المناطق الثلاث كما يلي،

- المنطقة OA: $\varepsilon_c \le \varepsilon_0$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot \left[2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

- المنطقة AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \le \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)]$$

- المنطقة BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = 0.2 \cdot K \cdot f_c$$

36 تعطى معاملات المماس المقابلة بالمعادلات الآتية

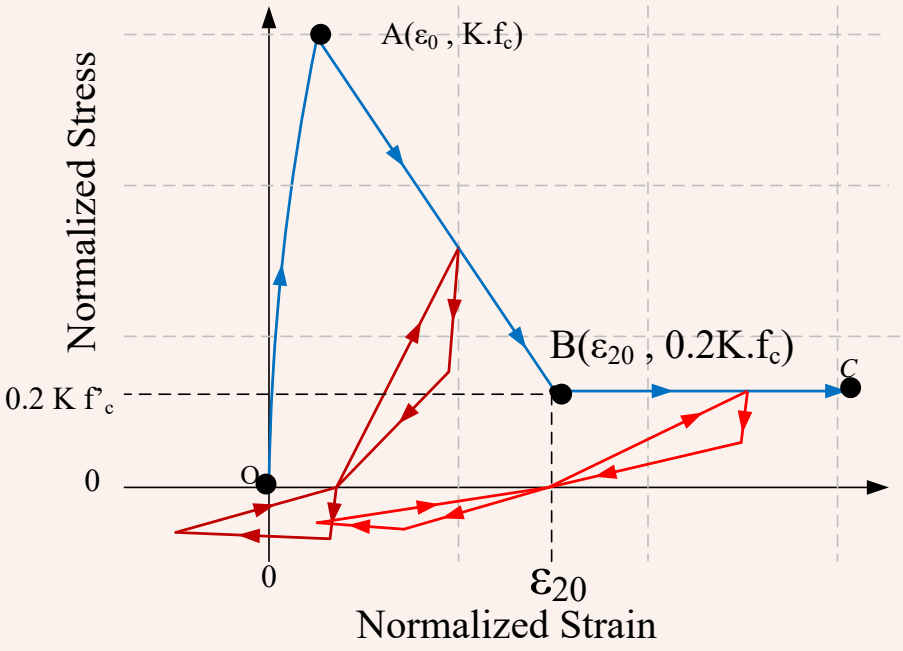
- المنطقة OA: $\varepsilon_c \le \varepsilon_0$

$$E^{tan} = \frac{2 \cdot K \cdot f_c}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)$$

- المنطقة AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \le \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = -Z \cdot K \cdot f_c$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.14: نموذج مادة الخرسانة في الضغط
(Yassin, 1994)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- المنطقة BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = 0$$

حيث،

$$\varepsilon_0 = 0.002 \cdot K$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s \cdot f_{ys}}{f_c}$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3+0.29 \cdot f_c}{145 \cdot f_c - 1000} + 0.75 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0.002 \cdot K}$$

حيث

ε_0	انفعال الخرسانة المقابل للإجهاد الأقصى
ε_{20}	انفعال الخرسانة عند 20 بالمئة من الإجهاد الأقصى
K	معامل يراعي زيادة المقاومة الناتجة من الحصر
Z	ميل تليين الانفعال
f_c	مقاومة أسطوانة الخرسانة للضغط بوحدة MPa (1 MPa = 145 psi)
f_{ys}	مقاومة خضوع الكانات بوحدة MPa
ρ_s	نسبة حجم تسليح الأطواق إلى حجم لب الخرسانة مقاساً حتى الوجه الخارجي للكانات
h	عرض لب الخرسانة مقاساً حتى الوجه الخارجي للكانات
s_h	المسافة من مركز إلى مركز بين الكانات أو مجموعات الأطواق.

37 يمثل سلوك التفريغ وإعادة التحميل الدوري بمجموعة من الخطوط المستقيمة. يبين الشكل 61.14 أن سلوك التباطؤ يحدث تحت كل من إجهادي الشد والضغط.

38 على الرغم من استمرار حلقتي التباطؤ في الضغط والشد، ستناقشان منفصلتين من أجل الوضوح.

39 يلخص الجدول 61.1 الخصائص المرنة وخصائص المقاومة الأساسية للخرسانة المحصورة وغير المحصورة. تؤخذ f_c بوحدة psi عند حساب f_t؛ ومن بدائل إجهاد/انفعال Kent وPark المتبقيين استخدام $f_{c,res}^{conf} = 0.9 f_c$ وإسناد قيمة "كبيرة" إلى ε_{res}^{conf} لضمان هبوط تدريجي. ويضمن هذا المزيج تحليلاً مستقراً (Ghannoum, 2010).

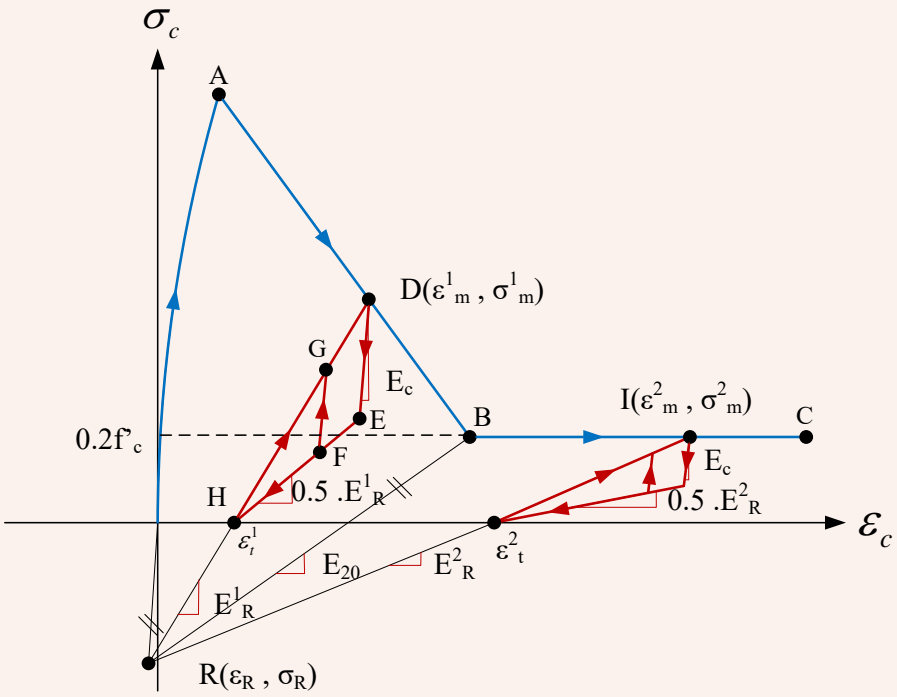
جدول 61.1: خصائص المرونة والمقاومة للخرسانة المحصورة مقابل غير المحصورة

	ε_0	f_c	f_t	E_0	E_t	$f_{c,20}$	ε_{20}
غير محصورة	0.003	اختبار	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{unc}}{\varepsilon_0^{unc}}$	$\frac{E_0^{unc}}{5}$	$f_c^{unc}/3$	$3\varepsilon_0^{unc}$
محصورة	$0.002K$	Kf_c^{unc}	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{conf}}{\varepsilon_0^{conf}}$	$\frac{E_0^{conf}}{5}$	$0.2f_c^{conf}$	$\varepsilon_0^{conf} + \frac{Kf_c^{unc} - f_{c,20}^{confined}}{ZKf_c^{unc}}$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الضغط

40 في جانب الضغط من النموذج، يحدث تدهور متتابع في صلابة خطي التفريغ وإعادة التحميل مع تزايد قيم الانفعال الأقصى، كما يبين الشكل 61.14. ويكون تدهور الصلابة بحيث تتقاطع امتدادات جميع خطوط إعادة التحميل عند نقطة مشتركة R في الشكل 61.15. تحدد النقطة R بتقاطع مماس منحنى الغلاف الرتيب عند الأصل مع امتداد خط التفريغ من النقطة B المقابلة لمقاومة خرسانة مقدارها $0.2 \cdot f_c$ (الشكل 61.15).



شكل 61.15: نموذج مادة الخرسانة تحت التحميل الدوري في الضغط (Yassin, 1994)

41 يعطى الانفعال والإجهاد عند نقطة التقاطع بالتعبيرين الآتيين

$$\varepsilon_R = \frac{0.2 \cdot K \cdot f_c - E_{20} \cdot \varepsilon_{20}}{E_c - E_{20}} \qquad (61.4)$$
$$\sigma_R = E_c \cdot \varepsilon_R$$

حيث إن E_c معامل مماس منحنى الغلاف الرتيب عند الأصل، وE_{20} معامل التفريغ عند النقطة B من منحنى الغلاف الرتيب ذي المقاومة $0.2 \cdot f_c$. ويجب تحديد مقدار E_{20} تجريبياً.

42 بعد التفريغ من نقطة على الغلاف الرتيب في الضغط (النقطة D في الشكل 61.15)، وقبل الوصول إلى محور الإجهاد الصفري (النقطة H في الشكل 61.15)، تتبع استجابة النموذج غلافين أصغر تحددهما المعادلات الآتية،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- الغلاف الأقصى (الخط HD)

$$\sigma_{max} = \sigma_m + E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_m) \tag{61.5}$$

- الغلاف الأدنى (الخط HE)

$$\sigma_{min} = 0.5 \cdot E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \tag{61.6}$$

حيث،

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{\sigma_m - \sigma_R}{\varepsilon_m - \varepsilon_R} \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E_R} \end{aligned} \tag{61.7}$$

تمثل σ_m وε_m الإجهاد والانفعال عند نقطة التفريغ على الغلاف الرتيب في الضغط، على الترتيب. ولذلك يعتمد موضعا الغلافين الأصغر على موضع نقطة التفريغ.

43 في دورات التحميل والتفريغ الجزئي داخل الغلافين الأصغر، يتبع النموذج خطاً مستقيماً بمعامل E_c.

44 في التنفيذ العددي، يفترض إجهاد تجريبي ومعامل مماس استناداً إلى السلوك المرن الخطي ذي الميل E_c،

$$\sigma^{tr}_{c,n} = \sigma_{c,n-1} + E_c \cdot \Delta\varepsilon_{c,n} \tag{61.8}$$

حيث إن $\sigma^{tr}_{c,n}$ الإجهاد التجريبي المحدث، و$\sigma_{c,n-1}$ حالة الإجهاد السابقة، و$\Delta\varepsilon_{c,n}$ زيادة الانفعال. ثم تستخدم القواعد الآتية لتحديد الإجهاد الفعلي ومعامل النموذج

$$\begin{aligned} &\text{إذا} \quad \sigma_{min} \le \sigma^{tr}_{c,n} \le \sigma_{max} \quad \text{فإن} \quad \sigma_{c,n} = \sigma^{tr}_{c,n} \quad \text{و} \quad E^{tan} = E_c \\ &\text{إذا} \quad \sigma^{tr}_{c,n} < \sigma_{min} \quad \text{فإن} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{min} \quad \text{و} \quad E^{tan} = 0.5 \cdot E_r \\ &\text{إذا} \quad \sigma^{tr}_{c,n} > \sigma_{max} \quad \text{فإن} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{max} \quad \text{و} \quad E^{tan} = E_r \end{aligned} \tag{61.9}$$

45 توضح القواعد الحاكمة لسلوك التباطؤ في الضغط وفق المعادلات من 61.4 إلى 61.9 بتاريخ نموذجي في الشكل 61.15.

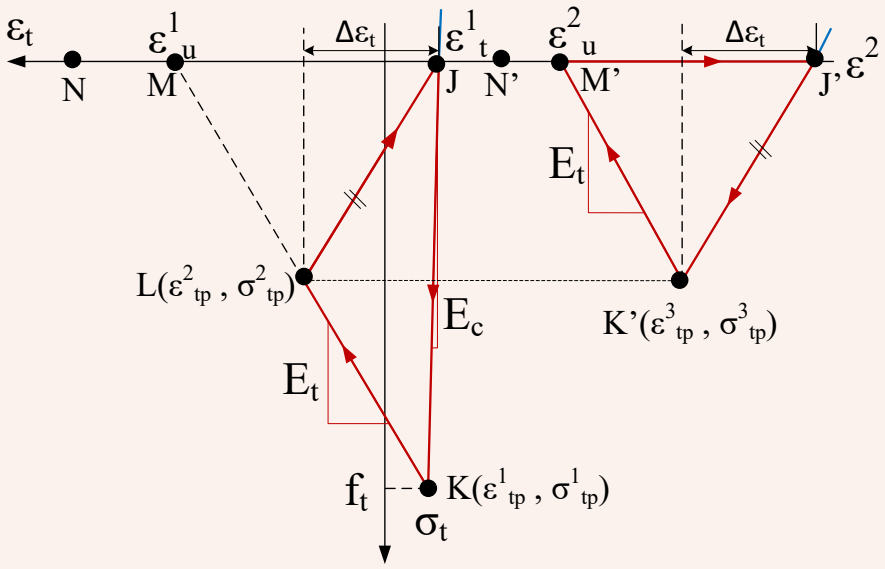
46 إذا حدث التفريغ من النقطة D إلى النقطة E، فستتم إعادة التحميل على المسار نفسه عودةً إلى D. وإذا بلغ التفريغ النقطة F، تنتج حلقة التباطؤ DEFGD عند إعادة التحميل. وإذا حدث تفريغ كامل حتى النقطة H، تنتج حلقة التباطؤ DEHD عند إعادة التحميل. ومن المهم ملاحظة أن خط إعادة التحميل يعاود دائماً الالتحام بالغلاف الرتيب في الضغط عند نقطة بدء التفريغ. وإذا استمر التفريغ بعد النقطة H وبدأ النموذج إعادة التحميل في الشد، تحكم سلوك التباطؤ مجموعة مختلفة من القواعد. لكن عند إعادة التحميل في الضغط، يعاود النموذج دخول منطقة الضغط عند النقطة الواقعة على محور الإجهاد الصفري عند اكتمال التفريغ (النقطة H)، ولا يؤثر ما يحدث في منطقة الشد في سلوك النموذج بعد عودته إلى منطقة الضغط.

الشد

يأخذ سلوك الشد للنموذج، كما يبين الشكل 61.16، في الحسبان تقسية الشد وتدهور صلابة التفريغ وإعادة التحميل مع تزايد قيم انفعال الشد الأقصى بعد التشقق الأولي. ويفترض أن مقاومة الشد القصوى للخرسانة (معامل التصدع) تساوي،

$$f_t = 0.6228\sqrt{f_c} \tag{61.10}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.16: نموذج مادة الخرسانة تحت التحميل الدوري في الشد (Yassin, 1994)

حيث يعبر عن f_t وf_c بوحدة MPa.

47 يبين الشكل 61.16 حلقتي تباطؤ متتاليتين في الشد تشكلان جزءاً من تاريخ دوري نموذجي يتضمن أيضاً إجهادات ضغط. ويفترض النموذج إمكان حدوث إجهاد الشد في أي موضع على محور الانفعال، إما نتيجة تحميل شد ابتدائي أو نتيجة التفريغ من حالة ضغط. وفي الحالة الأخيرة يحدث إجهاد شد تحت انفعال ضغط. وتحدد علاقة الإجهاد–الانفعال في الشد بثلاث نقاط إحداثياتها $(\varepsilon_t, 0)$ و$(\varepsilon_{tp}, \sigma_{tp})$ و$(\varepsilon_u, 0)$، وتمثلها النقاط J وK وM في الشكل 61.16، على الترتيب. وتمثل ε_t الانفعال عند النقطة التي يقطع فيها خط التفريغ من منطقة إجهاد الضغط محور الانفعال. وتعطى ε_t بالمعادلة 61.7 وتتغير مع انفعال الضغط الأقصى. وتمثل ε_{tp} وσ_{tp} الانفعال والإجهاد عند قمة علاقة الإجهاد–الانفعال في الشد، وتعطيان بالتعبيرين الآتيين،

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tp} &= \varepsilon_t + \Delta\varepsilon_t \\ \sigma_{tp} &= f_t \cdot \left(1 + \frac{E_t}{E_c}\right) - E_t \cdot \Delta\varepsilon_t \end{aligned} \tag{61.11}$$

حيث تمثل $\Delta\varepsilon_t$ الفرق الأقصى السابق بين انفعال الشد وε_t كما في الشكل 61.16.

48 قبل التشقق الأولي، تساوي $\Delta\varepsilon_t$ القيمة f_t/E_c. ويمثل E_t معامل تقسية الشد الذي يعتمد على معاملات عددية وفيزيائية، وتمثل ε_u الانفعال عند النقطة التي ينخفض فيها إجهاد الشد إلى الصفر وتعطى بالتعبير،

$$\varepsilon_u = \varepsilon_t + f_t \cdot \left(\frac{1}{E_t} + \frac{1}{E_c}\right) \tag{61.12}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

49 بالنظر إلى نقاط التحكم الثلاث هذه، تعرف علاقة الإجهاد–الانفعال في الشد ومعاملات المماس بالمعادلات الآتية (الشد موجب)،

- المنطقة JK: $\varepsilon_t < \varepsilon_c \le \varepsilon_{tp}$

$$\sigma_c = E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t), \quad E^{tan} = \frac{\sigma_{tp}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_t} \tag{61.13}$$

- المنطقة KM: $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_c \le \varepsilon_u$

$$\sigma_c = \sigma_{tp} + E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}), \quad E^{tan} = -E_t \tag{61.14}$$

- المنطقة MN: $\varepsilon_c > \varepsilon_u$

$$\sigma_c = 0, \quad E^{tan} = 0 \tag{61.15}$$

إذا كان $\varepsilon_{tp} \ge \varepsilon_u$، تفترض القيم σ_{tp} وσ_c وE^{tan} جميعها صفراً. يتحكم المعامل E_t في درجة تقسية الشد بتحكمه في ميل المعادلة 61.14. وكلما ازداد الميل صغر تأثير تقسية الشد. ويحكم التفريغ وإعادة التحميل في الشد بالمعادلة 61.13، التي تتضمن أيضاً تدهور الصلابة مع ازدياد قيم فرق الانفعال $\Delta\varepsilon_t$. وتتغير قيمة $\Delta\varepsilon_t$ كلما تغيرت $\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}$.

50 يمكن فهم سلوك الشد للنموذج، كما تصفه المعادلات من 61.10 إلى 61.15، على نحو أفضل بتتبع مسارات التحميل النموذجية في الشكل 61.16. فعندما يفرغ النموذج من الضغط، يقطع محور الانفعال عند النقطة J. ثم يحمل في الشد حتى يحدث التشقق الأولي عند النقطة K. وبعد K يبدأ التليين حتى نقطة انعكاس الانفعال L. ويتبع مسار التفريغ خطاً مستقيماً من L إلى J حيث يعاد تحميل النموذج في الضغط. وفي المرة الثانية يدخل النموذج الشد عند النقطة J'. ويكون مسار إعادة التحميل J'K' نسخة مطابقة لمسار التفريغ السابق LJ بعد إزاحته مسافة JJ' على محور الانفعال. وعند K' يعاود النموذج الالتحام بفرع التليين الذي يستمر حتى ينخفض إجهاد الشد إلى الصفر عند M'. ويبقى الإجهاد صفراً حتى نقطة انعكاس الانفعال N' إلى أن يعاد تحميل النموذج في الضغط عند J'. ومن ثم تنخفض قدرة النموذج على إجهاد الشد إلى الصفر.

51 يعد نموذج الخرسانة الحالي اقتصادياً نسبياً من حيث مقدار الذاكرة اللازمة لتاريخ الإجهاد–الانفعال السابق. ويمكن سرد المعاملات المستخدمة كذاكرة كما يلي:

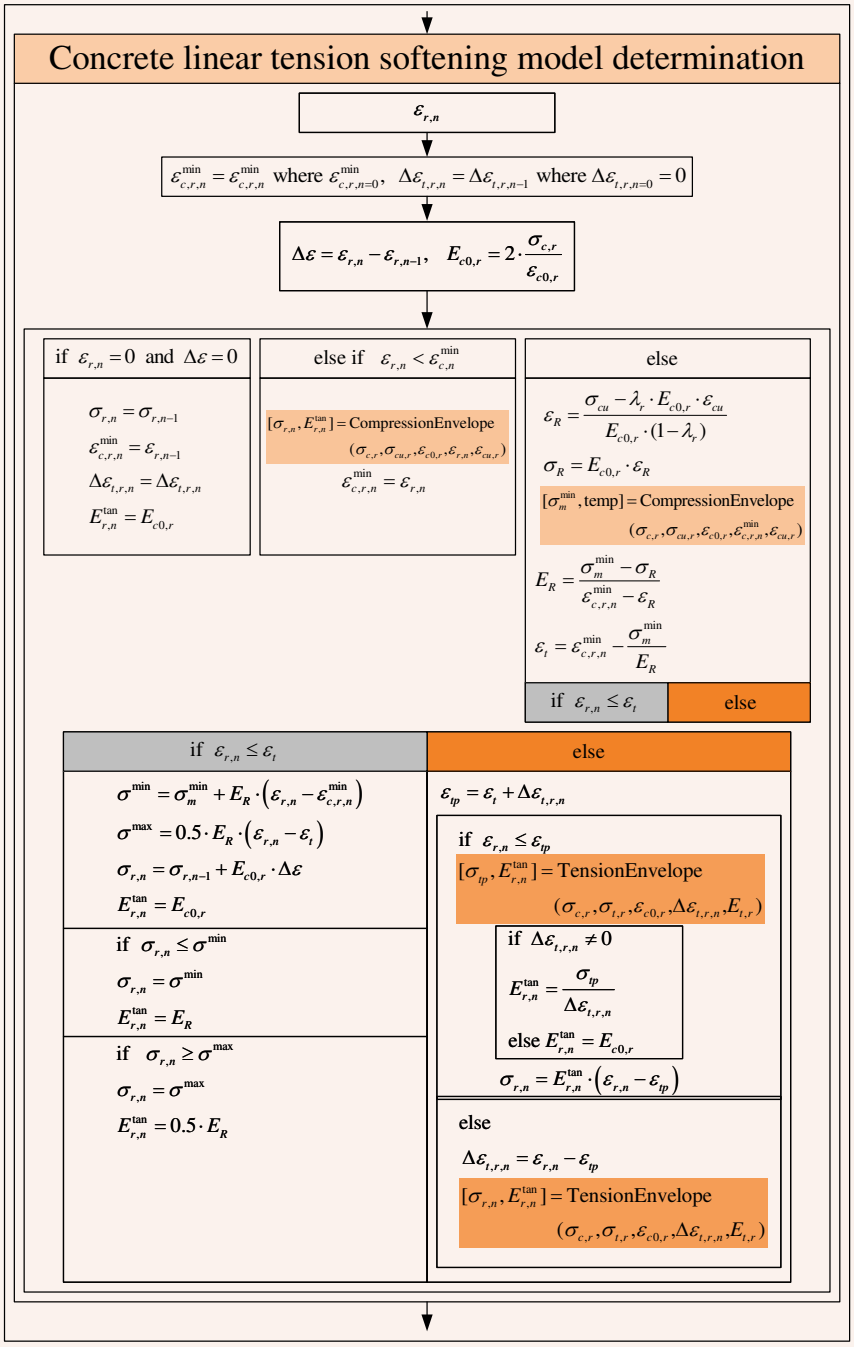
1. الإجهاد والانفعال عند النقطة المقابلة لآخر حالة للنموذج
2. الانفعال عند آخر نقطة تفريغ على الغلاف الرتيب في الضغط، ε_m
3. الفرق $\Delta\varepsilon_t$ بين انفعال الشد الأقصى السابق وε_t

52 يتمثل ضرر الخرسانة المعتبر في النموذج الحالي في تدهور صلابة التفريغ وإعادة التحميل مع ازدياد قيم الانفعال الأقصى. لكن ضرر الخرسانة الفعلي يتضمن أيضاً انخفاض الأغلفة الرتيبة تحت التحميل الدوري.

61.2.2.2.2 تحديد نموذج Kent وPark المعدل

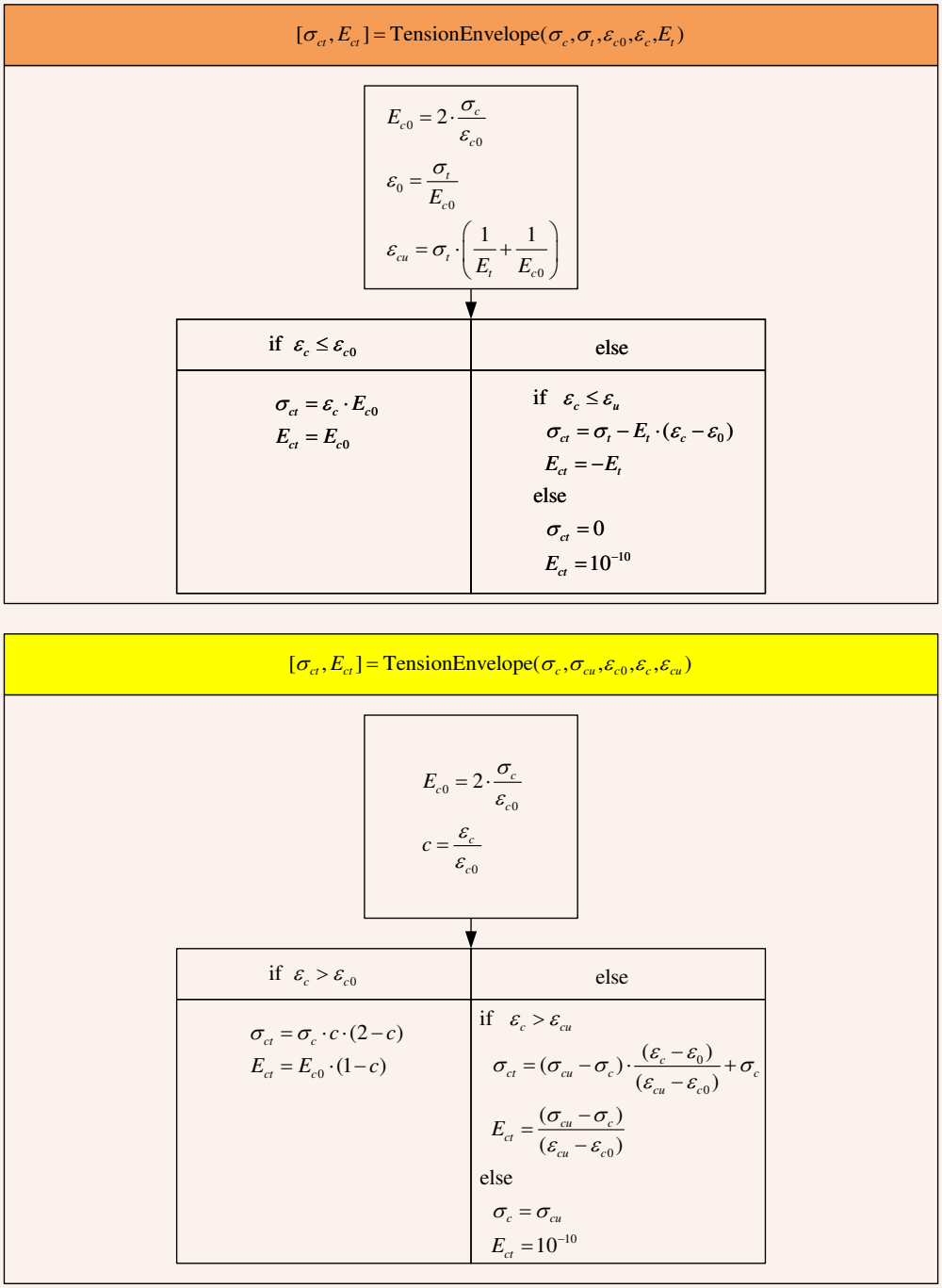
يبين الشكلان 61.17 و61.18 إجراء الحصول على الإجهاد أحادي المحور σ ومعامل المماس E^{tan} من الانفعال أحادي المحور ε.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.17: التحديد (1) لنموذج Kent وParky المعدل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.18: التحديد (2) لنموذج Kent وParky المعدل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.2.3 نموذج ضرر متباين الخواص مع الضرر الفعال واستعادة الصلابة

من أطروحة الدكتوراه "An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation" التي أعدها Kang, 2010، وبمساعدة كريمة من الأستاذ Ragueneau والسيد Lebon من ENS/Cachan.

53 على الرغم من نجاح استخدام نموذج Kent-Park المعدل في تطبيقات كثيرة، فإنه يظل نموذجاً تجريبياً استدلالياً قد لا يكون أداؤه الدقيق مضموناً في سياق المحاكاة الهجينة الآنية ذات العدد المحدود من التكرارات. ولمعالجة هذا القيد المحتمل، ينفذ نموذج تأسيسي للخرسانة أكثر *صرامة* وصحة من منظور *الديناميكا الحرارية*.

61.2.3.1 النموذج التأسيسي

الكمون الديناميكي الحراري

54 يستند كمون Gibbs (الذي نوقش سابقاً في §61.1.1)، $\rho \cdot \phi^*$، إلى إطار (Ladeveze (Ladeveze, 1983 لنموذج الضرر متباين الخواص. يسمح فصل موتر الإجهاد إلى مركبتين انحرافية وهيدروستاتيكية بدراسة جزأي القص والهيدروستاتيكا منفصلين. كذلك تنقسم كل مركبة مرة أخرى إلى جزأين إضافيين: موجب وسالب، من أجل نمذجة التأثير أحادي الجانب، الشكل 61.19. ولا يؤثر الضرر إلا في الجزء الموجب من خلال موتر الضرر $\mathbf{D}$.

$$\rho \cdot \phi^* = \frac{1+\nu}{2 \cdot E}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\right)+\mathrm{Tr}\left(\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\right)\right]+\frac{1-2\nu}{6\cdot E}\left[\frac{\langle\mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_+^2}{1-D_H}+\langle\mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_-^2\right] \tag{61.16}$$

حيث تمثل ρ وν وE الكثافة ونسبة Poisson ومعامل Young، على الترتيب. يعرف الموتر $\mathbf{H}$ بالعلاقة

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1}-\mathbf{D})^{\frac{1}{2}}$$

حيث يمثل $(\cdot)^D$ الجزء الانحرافي من $(\cdot)$،

$$(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\cdot)\cdot\mathbf{1}$$

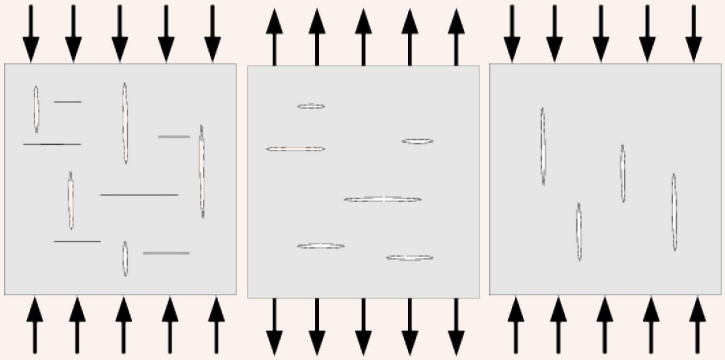
وتمثل $\langle\cdot\rangle_{+,-}$ الجزء الموجب أو السالب من $(\cdot)$، ويمثل D_H الجزء الهيدروستاتيكي من $\mathbf{D}$،

$$D_H = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathbf{D}$$

في إطار Ladeveze (Ladeveze, 1983)، يمثل $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ جزءاً موجباً غير معتاد من $\boldsymbol{\sigma}^D$: إذا كانت القيم الذاتية لـ $\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D$ و$\mathbf{T}^I$ المتجهات الذاتية المقابلة، فإن $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ تساوي

$$\boldsymbol{\sigma}_+^D = \sum_I \langle\boldsymbol{\lambda}_I\rangle_+ \left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)\left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)^T$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.19: الشقوق الناتجة من الضغط والشد والشد والضغط

القانون التأسيسي

55 يشتق القانون التأسيسي من كمون Gibbs باستخدام المعادلة 61.16:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \rho \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \frac{1-2\nu}{3\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\cdot\mathrm{Tr}\,(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\mathbf{I}\end{aligned}$$

حيث إن $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ الإجهاد الفعال الناتج من إعادة كتابة قانون الإجهاد–الانفعال بدلالة الإجهاد الفعال:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I}$$

قانون تطور الضرر

56 يجب أن يراعي قانون تطور الضرر التحميل الدوري. ولذلك ينبغي أن يعتمد معيار الضرر f على ضرر فعال d_ε (Ragueneau **andothers**, 2006) بحيث

$$\begin{aligned}f &= \hat{\varepsilon} - \kappa\,(d_\varepsilon) \\ d_\varepsilon &= \frac{\mathbf{D} : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}{\max\,(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}\end{aligned}$$

حيث إن $\hat{\varepsilon}$ انفعال Mazars (Mazars, 1986) المعرف بالعلاقة

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}$$

وκ دالة التوطيد،

$$\kappa\,(d_\varepsilon) = a\cdot\tan\left[\frac{d_\varepsilon}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث يمثل A وa معاملي ضرر، وتمثل κ_0 عتبة المرونة الابتدائية.

57 ومن ثم، إذا كان معيار الضرر سالباً، تكون المادة في المجال المرن الخطي، وإذا كان موجباً يزداد الضرر على امتداد الانفعال الموجب:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$$

حيث يحدد مضاعف Lagrange للضرر $\dot{\lambda}$ من شرط *Kuhn-Tucker* ($f = 0$ و$f' = 0$).

61.2.3.2 صياغة متعددة الألياف أحادية المحور

58 تكافئ الصياغة متعددة الألياف القائمة على نظرية كمرة Euler-Bernoulli تحميلاً أحادي المحور. ولذلك يختزل موترا الإجهاد والانفعال إلى

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

59 يصبح موتر الضرر قطرياً، ويمكن إعادة كتابة القانون التأسيسي كما يلي (Desmorat **andothers,** 2008)،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\left(D_1, D_2\right) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} \tag{61.17}$$

حيث إن $\mathbf{B}$ موتر قطري يعتمد على متغير الضرر والتحميل، ويرتبط D_1 وD_2 بضرري الشد والضغط على الترتيب.

60 بإعادة كتابة المعادلة 61.17 في صورة مصفوفية،

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

ومن ثم

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1\sigma}{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \sigma \qquad D_H = D_1 + 2D_2$$

$$\varepsilon_e = \frac{1+\nu}{E}\left(\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+^D\boldsymbol{H}\right)^D + \boldsymbol{\sigma}_-^D\right) + \frac{1-2\nu}{3E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_-\right]\boldsymbol{Id}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61 في الشد ($\sigma > 0$)، نفترض أن D_1 وحده يزداد.

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^t} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^t & 0 \\ 0 & B_2^t \end{pmatrix}$$

$$B_1^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$
$$B_2^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$

62 في الضغط ($\sigma < 0$)، نفترض أن D_2 وحده يزداد.

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^c} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^c & 0 \\ 0 & B_2^c \end{pmatrix}$$

$$B_1^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1} + \frac{2}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_2^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1} - \frac{1}{1-D_2}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$

61.2.3.3 تحديد نموذج الضرر متباين الخواص

61.2.3.3.1 تحميل الشد: $\varepsilon_{11} > 0$

المعادلات التأسيسية

63 إذا كان $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ و$\eta_t = 1$، فإن:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{B_{11}^t}\varepsilon \\ \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(\frac{4}{1-D_1}+2\right) + \frac{1-2\nu}{3\left(1-\frac{D_1+2D_2}{3}\right)}}\cdot\varepsilon \\ D_1 &= a\cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \end{aligned} \tag{61.18}$$

حيث إن $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+} = \varepsilon_{11} \geq 0$،

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

64 يبقى D_2 ثابتاً، ويحدد معامل المماس بالمعادلة 61.18:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{61.19}$$

65 لكن إذا كان $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$، فإن معامل المماس يساوي معامل القاطع.

$$E^{tan} = \frac{E}{B^t_{11}}$$

معامل الصلابة المماسية المتسق في التنفيذ العددي

66 إذا كان $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ و$\eta_t = 1$، يحدد معامل المماس بالمعادلتين 61.18 و61.19:

$$\begin{aligned}
E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\
B^t_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1 - D_{1,n}} + 2 \right) + \frac{1 - 2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3} \right)} \\
D_{1,n} &= a \cdot A \left(\texttt{atan} \left(\frac{\varepsilon_{11,n}}{a} \right) - \texttt{atan} \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right)
\end{aligned}$$

حيث تمثل n خطوة الإثارة الحالية.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(\frac{E}{B^t_{11,n}} \cdot \varepsilon_n \right) = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

حيث،

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} \cdot \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} \\
C_1 = \frac{\partial B^t_{11,n}}{\partial D_{1,n}} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \frac{4}{(1 - D_{1,n})^2} + \frac{1 - 2\nu}{9 \left(1 - \frac{D_{1,n} + 2 D_{2,n-1}}{3} \right)} \\
C_2 = \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(a \cdot A \left(\texttt{atan} \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right) - \texttt{atan} \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \right) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right)^2}
\end{aligned}$$

67 وأخيراً، نحصل على معامل المماس:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^t_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^t_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

61.2.3.3.2 تحميل الضغط: $\varepsilon_{11} < 0$

المعادلات التأسيسية

68 إذا كان $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ و$\eta_t = 1$، فإن:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_2} + 4\right) + \frac{1-2\nu}{3}} \cdot \varepsilon \\
D_2 &= \frac{a \cdot A}{2} \left(\texttt{atan}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon_{22}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{B^c_{22}}{B^c_{11}} \cdot \varepsilon_{11}
\end{aligned} \tag{61.20}$$

حيث إن $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_{22}^2} \geq 0$،

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

69 يبقى D_1 ثابتاً، ويحدد معامل المماس بالمعادلة 61.20:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{61.21}$$

70 لكن إذا كان $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$، فإن معامل المماس يساوي معامل القاطع.

$$E^{tan} = \frac{E}{B^c_{11}}$$

معامل الصلابة المماسية المتسق في التنفيذ العددي

71 إذا كان $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ و$\eta_t = 1$، يحدد معامل المماس بالمعادلتين 61.20 و61.21:

$$\begin{aligned}
E^{tan}_n &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\
B^c_{11,n-1} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\
B^c_{22,n-1} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\
B^c_{11,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\
B^c_{22,n} &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3}
\end{aligned}$$

حيث تمثل n خطوة الإثارة الحالية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\tilde{\nu}_{n-1} = -\frac{B^c_{22,n-1}}{B^c_{11,n-1}}, \quad \varepsilon^{tr}_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \varepsilon_{11,n}$$
$$\tilde{\nu}_{n} = -\frac{B^c_{22,n}}{B^c_{11,n}}, \quad \varepsilon_{22,n} = -\tilde{\nu}_{n} \cdot \varepsilon_{11,n}$$

حيث إن $\varepsilon^{tr}_{22,n}$ الانفعال التجريبي على ε_{22}.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(\frac{E}{B^c_{11,n}} \cdot \varepsilon_n\right) = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

حيث،

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} \cdot \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n} \\
C_1 = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} &= \frac{2(1+\nu)}{9(1-D_{2,n})^2} \\
C_2 = \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(a \cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)\right) \\
&= -\tilde{\nu}_{n-1}\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon_{11,n}}{a}\right)^2}
\end{aligned}$$

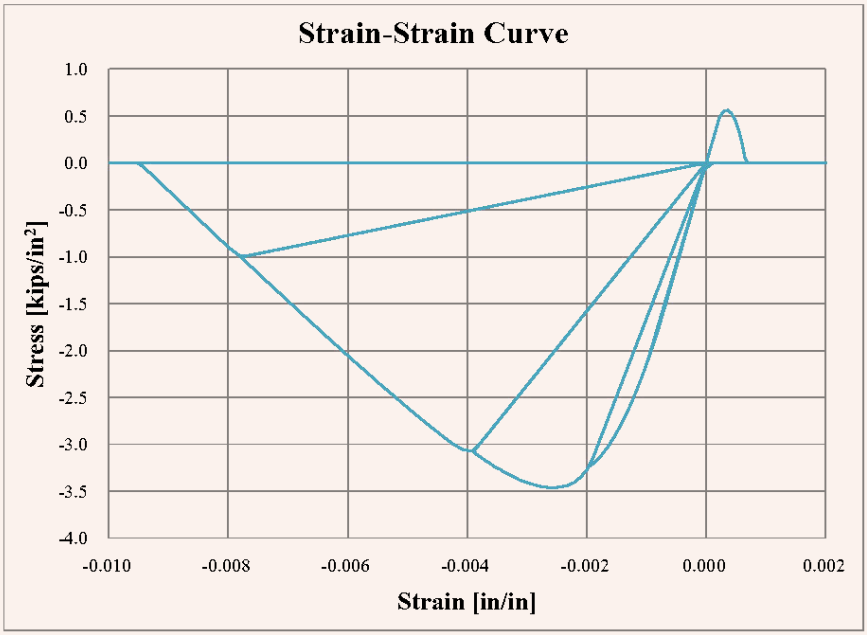
وأخيراً، نحصل على معامل المماس:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^c_{11,n})^2} \cdot C_1 \cdot C_2$$

72 يصف الشكل 61.20 العلاقة بين الانفعال والإجهاد في نموذج الضرر متباين الخواص من دون انفعال دائم.

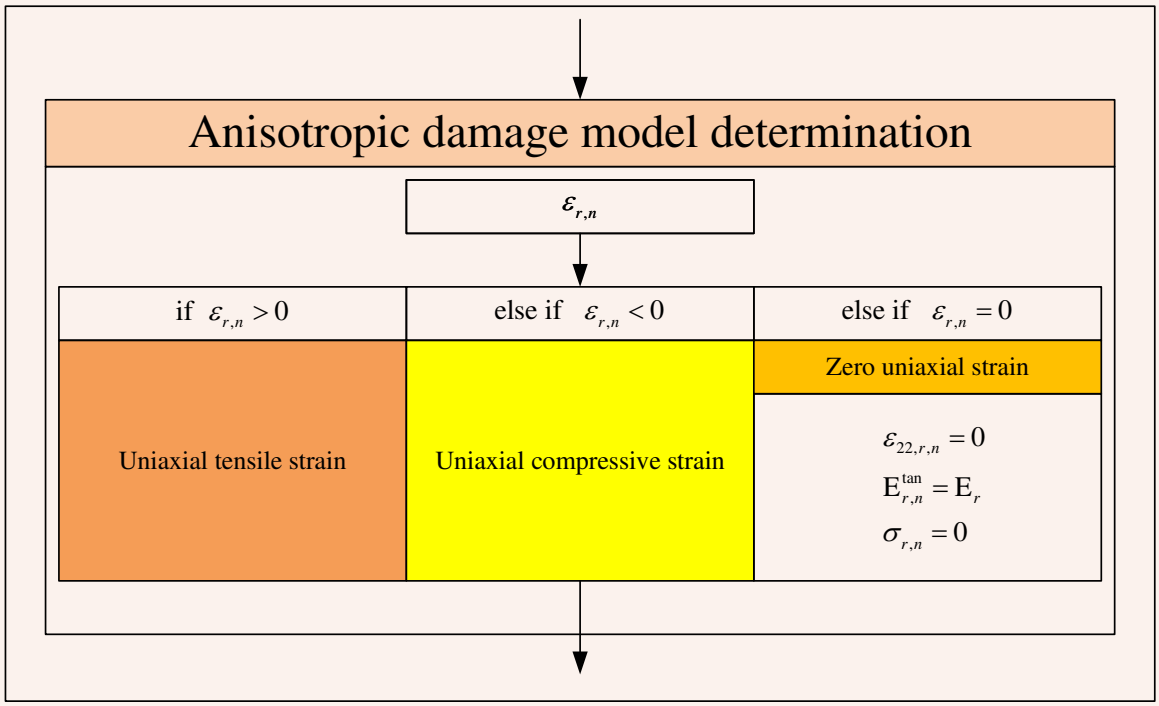
73 تبين الأشكال من 61.21 إلى 61.23 إجراء الحصول على الإجهاد أحادي المحور σ ومعامل المماس E^{tan} من الانفعال أحادي المحور ε.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



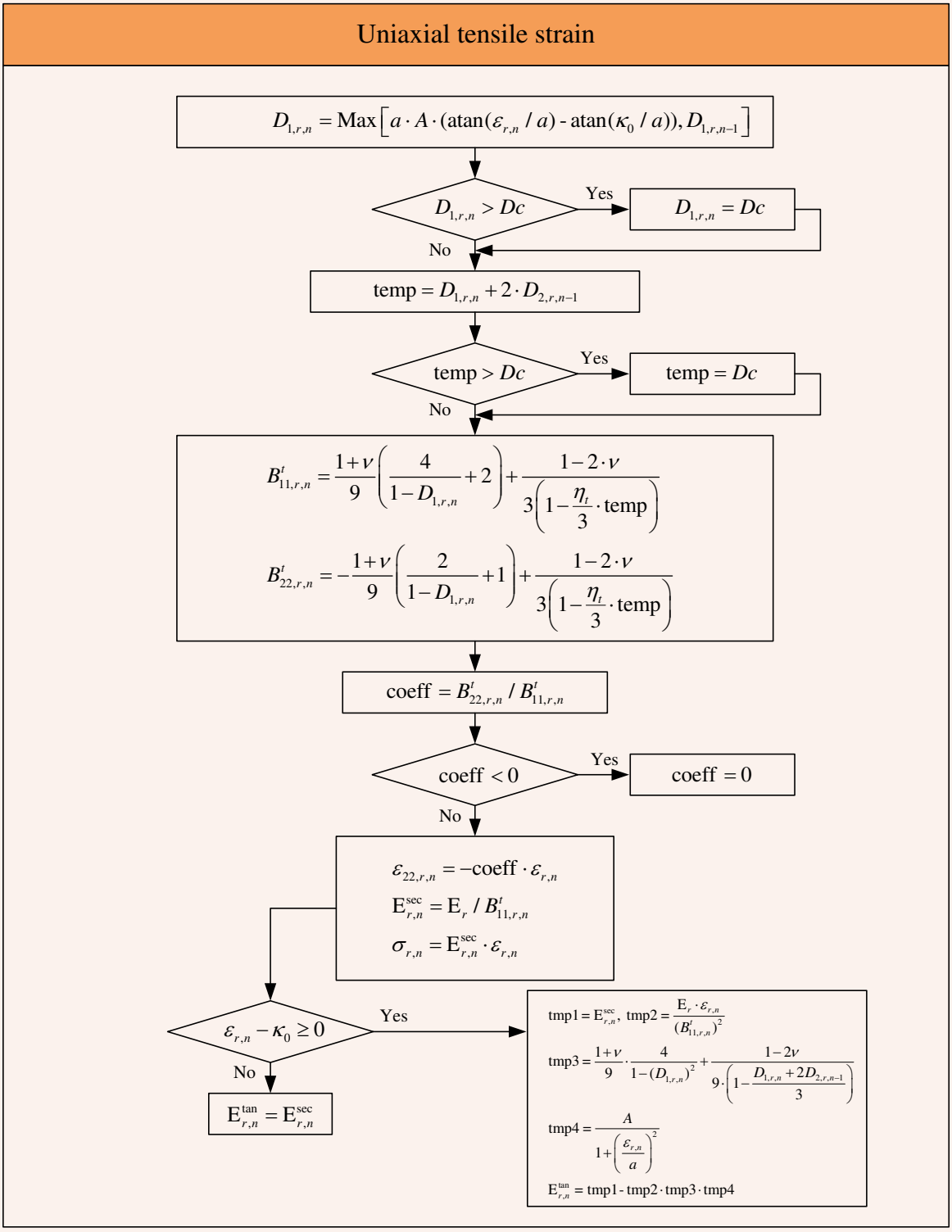
شكل 61.20: منحنى الانفعال–الإجهاد لنموذج الضرر متباين الخواص من دون انفعال دائم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



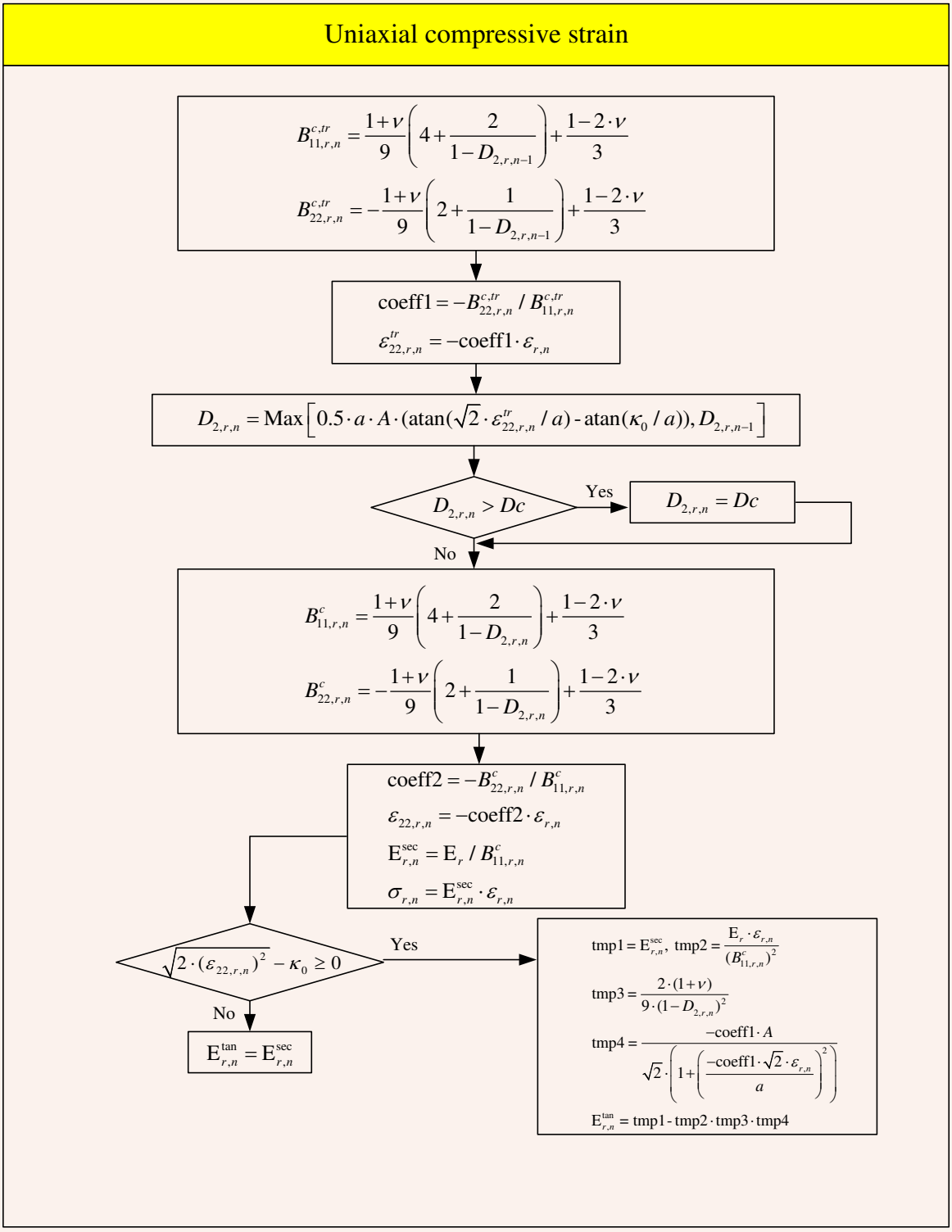
شكل 61.21: التحديد (1) لنموذج الضرر متباين الخواص

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.22: التحديد (2) لنموذج الضرر متباين الخواص

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.23: التحديد (3) لنموذج الضرر متباين الخواص

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.2.3.4 نموذج ضرر متباين الخواص مع ضرر فعال واستعادة الصلابة وانفعالات دائمة ε_{an}

لم يراع نموذج الضرر متباين الخواص السابق التشوهات الدائمة. ويعالج التوسيع الآتي للنموذج هذا القيد. يستند هذا النموذج إلى نموذج الضرر متباين الخواص ψ_e^* الذي عُرّف سابقاً بالرمز ψ^*.

$$\rho\psi^* = \rho\psi_e^* + \rho\psi_{an}^*$$

بالنسبة إلى الجزء المتضرر من النموذج، تعدل دالة التوطيد لمراعاة الاسترداد المرن في الضغط:

$$\kappa\left(d_\varepsilon\right) = \frac{d_\varepsilon}{A} + \kappa_0$$

حيث إن A وκ_0 معاملان يعتمدان على المادة. يعتمد معيار الضرر على الانفعالات المرنة لا على الانفعالات الكلية:

$$f = \hat{\varepsilon_{el}} - \kappa\left(d_\varepsilon\right)$$

الجزء غير المرن من النموذج هو:

$$\rho\psi_{an}^* = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

يقابل ذلك تقسيم الانفعال الكلي إلى مركبتين مرنة ودائمة.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\rho\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\rho\psi_e^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\rho\psi_{an}^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

يشتق تطور الانفعالات الدائمة بالمعادلات الآتية:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{an} = g_D\left(d_\varepsilon\right)\,\dot{\boldsymbol{D}}^D + g_H\left(d_\varepsilon\right)\,\dot{d}_\varepsilon\,\boldsymbol{Id}$$

حيث تمثل $g_D\left(d_\varepsilon\right)$ و$g_H\left(d_\varepsilon\right)$ دالتين تعتمدان على الضرر النشط لاحترام عدم التناظر بين الشد والضغط. تقترح هنا دالتان مستمرتان ثنائيتا الخطية:

$$\begin{array}{lllll} d_\varepsilon < 1 & g_D\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_D}{K_D} d_\varepsilon & & g_D\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_D}{K_D} + k_D\left(d_\varepsilon - 1\right) \\ & g_H\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_H}{K_H} d_\varepsilon & & g_H\left(d_\varepsilon\right) = \frac{k_H}{K_H} + k_H\left(d_\varepsilon - 1\right) \end{array}$$

61.2.3.4.1 المخطط العددي أحادي المحور

74 تعرف حالة التحميل بإشارة الانفعال المرن. ولذلك، لتحديد حالة التحميل عند الخطوة الزمنية n، تقارن زيادة الانفعال $\Delta\varepsilon$ بالانفعال المرن عند الخطوة الزمنية $n-1$:

75 إذا كان $\varepsilon_{n-1}^e < 0$ و$\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$، تبقى حالة التحميل في الضغط، وإلا تتحول إلى الشد.

76 إذا كان $\varepsilon_{n-1}^e > 0$ و$\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$، تبقى حالة التحميل في الشد، وإلا تتحول إلى الضغط.

الشد

- التنبؤ المرن: $\varepsilon_{1,n}^e = \varepsilon_{1,n-1}^e + \Delta\varepsilon_1$
- اختبار معيار الضرر: f

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

– إذا كان $f < 0$، فالسلوك مرن:

$$
\begin{aligned}
D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\
D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1}
\end{aligned}
$$

– وإلا، فالسلوك متضرر:

$$
\begin{aligned}
D_{1,n} &= A\left(\varepsilon^{e}_{1,n} - \kappa_0\right) \\
D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} + \left(\frac{2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \\
\varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1} + \left(\frac{-k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n}
\end{aligned}
$$

- حساب σ و$\varepsilon^{e}_{2,n}$:

$$
\begin{aligned}
B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1-D_{1,n}} + 2\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3}\right)} \\
B_{2,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_{1,n}} + 1\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left[1 - \frac{\eta_t}{3} \cdot (D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})\right]} \\
\sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}} \varepsilon^{e}_{n} \\
\varepsilon^{e}_{2,n} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}} \varepsilon^{e}_{1,n}
\end{aligned}
$$

الضغط

- التنبؤ المرن: $\varepsilon^{e}_{1,n} = \varepsilon^{e}_{1,n-1} + \Delta\varepsilon_1$
- اختبار معيار الضرر: f

– إذا كان $f < 0$، فالسلوك مرن:

$$
\begin{aligned}
D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\
D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{1,n} &= \varepsilon^{an}_{1,n-1} \\
\varepsilon^{an}_{2,n} &= \varepsilon^{an}_{2,n-1}
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

– وإلا، فالسلوك متضرر:
يجب تقدير تطور الانفعال الدائم:

$$\dot{\varepsilon}_{1,n}^{an} = \gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * d_{\varepsilon 2,n}$$
$$\dot{\varepsilon}_{1,n}^{an} = 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * \left(D_{2,n} - D_{2,n-1}\right)$$

يصبح تطور الضرر:

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon_{1,n-1}^{an} - \dot{\varepsilon}_{1,n}^{an}\right) - \kappa_0\right)}{2}$$
$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon_{1,n-1}^{an} + 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)D_{2,n-1} - \kappa_0\right)\right)}{2\left(\sqrt{2}A\tilde{n}u_{n-1}\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)\right)}$$

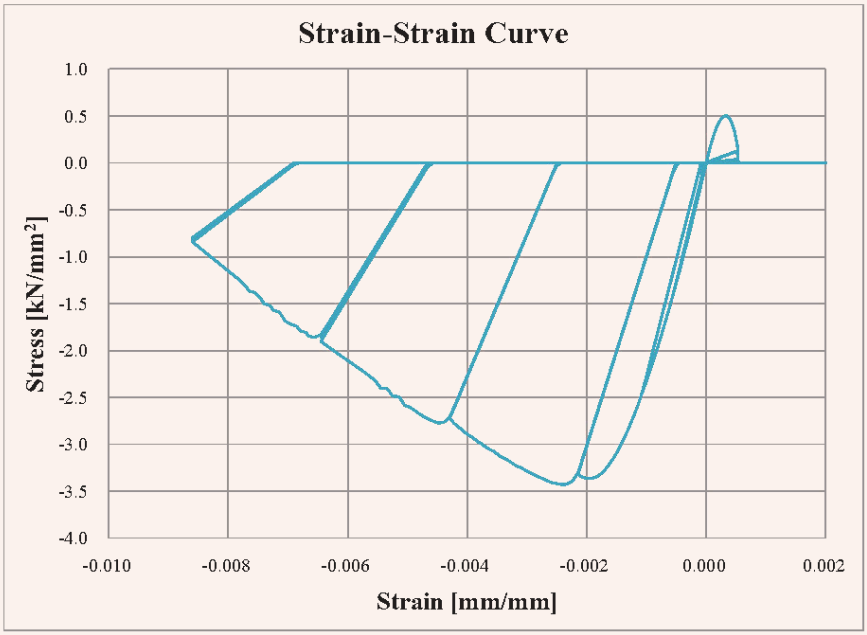
$$\varepsilon_{2,n}^{e\ trial} = \frac{B_{2,n-1}}{B_{1,n-1}}\varepsilon_{1,n}^{e}$$
$$D_{1,n} = D_{1,n-1}$$
$$\varepsilon_{1,n}^{an} = \varepsilon_{1,n-1}^{an} + \left(\frac{-2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n}$$
$$\varepsilon_{2,n}^{an} = \varepsilon_{2,n-1}^{an} + \left(\frac{k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n}$$

- حساب σ و$\varepsilon_{2,n}^{e}$:

$$B_{1,n} = \frac{1+\nu}{9}\cdot\left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_{2,n} = -\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$\sigma_n = \frac{E}{B_{1,n}}\varepsilon_n^e$$
$$\varepsilon_{2,n}^{e} = \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}}\varepsilon_{1,n}^{e}$$

يصف الشكل 61.24 العلاقة بين الانفعال والإجهاد في نموذج الضرر متباين الخواص ذي الانفعال الدائم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

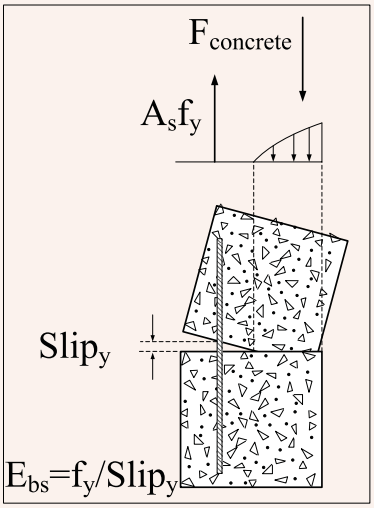


شكل 61.24: منحنى الانفعال–الإجهاد لنموذج الضرر متباين الخواص ذي الانفعال الدائم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.2.4 انزلاق الترابط

77 عندما يكون طول تثبيت التسليح غير كافٍ، يحدث انزلاق في الترابط (بين قضيب التسليح والخرسانة). ويوضح ذلك الشكل 61.25.



شكل 61.25: نموذج الانزلاق

78 يمكن بسهولة تحديد الانزلاق الناتج من قضيب التسليح الطولي قرب العمود ومن منطقة التثبيت إذا افترضنا إجهاد ترابط منتظماً u_b على امتداد القضبان ضمن طول التثبيت داخل القاعدة أو وصلة الكمرة–العمود.

79 من الاتزان

$$u_b(\pi d_b)l_d = \frac{\pi d_b^2}{4} f_s$$

حيث إن d_b قطر القضيب وl_d طول التثبيت الذي يحدث عليه الانزلاق، وبحل المعادلة لإيجاد l_d،

$$l_d = \frac{d_b f_s}{4u_b}$$

80 بافتراض أن الانفعال الأقصى يحدث عند نهاية العمود وأن هناك تغيراً خطياً للانفعال على طول التثبيت، يعطي تكامل منحنى الانفعال الانزلاق الكلي للقضيب عند سطح التقاء القاعدة–العمود أو الكمرة–العمود، وهو

$$S = \frac{\varepsilon_s l_d}{2} = \frac{f_s l_d}{2E_s}$$

بالتعويض

$$S = \frac{\varepsilon_s d_b f_s}{8u_b}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

81 بافتراض دوران المقطع حول محوره المحايد عند حدوث الانزلاق ($\phi_y = \varepsilon_y/(d-c)$)، تكون الإزاحة المرتبطة بانزلاق القضيب عند نقطة تبعد مسافة L عن قاعدة العمود

$$\Delta_{slip} = \frac{\phi_y d_b f_y L}{8u_b}$$

82 يفترض نموذج مبسط لإجهاد الترابط بدلالة إجهاد الفولاذ الفعلي إجهاد ترابط ثابتاً مقداره $u_e = 12\sqrt{f'_c}$ قبل خضوع الفولاذ، وإجهاد ترابط ثابتاً آخر مقداره $u_p = 6\sqrt{f'_c}$ بعد خضوع الفولاذ

$$\text{قبل خضوع الفولاذ} \qquad u_e = 12\sqrt{f'_c}$$
$$\text{بعد خضوع الفولاذ} \qquad u_p = 6\sqrt{f'_c}$$

83 بناءً على هذا الافتراض، يحصل على الانزلاق الكلي للقضيب S عند حافة التثبيت بتكامل انفعالات الفولاذ على الطول المدفون.

84 استخدم هذا النموذج للحصول على علاقة رتيبة بين انزلاق القضيب وإجهاده عند قاعدة العمود.

85 بافتراض تثبيت كافٍ:

$$S_1 = \frac{\varepsilon_s f_s}{8u_e} d_b;\ \varepsilon_s \le \varepsilon_y;\ S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;\ \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

حيث إن d_b قطر القضيب، وu_e إجهاد الترابط المرن $= 12\sqrt{f'_c}$ (psi)، وu_p إجهاد الترابط اللدن $= 6\sqrt{f'_c}$. الشكل 61.27

61.2.5 عنصر مقطعي ذو طول صفري

هذا القسم مقتبس من نموذج `Ghannoum`

86 ينبغي ألا يستخدم العنصر المقطعي ذو الطول الصفري إلا عند استخدام عناصر الألياف إذا أردنا تمثيل انزلاق الترابط بين الخرسانة وقضيب التسليح.

87 لدينا استجابة لاخطية بعد الذروة لإجهاد الترابط مقابل انزلاق الترابط، ونحتاج إلى جعلها خطية ثم حل u_p (الذي سيختلف عن القيمة السابقة $6\sqrt{f'_c}$) الملائمة لجزء التصلد اللاخطي.

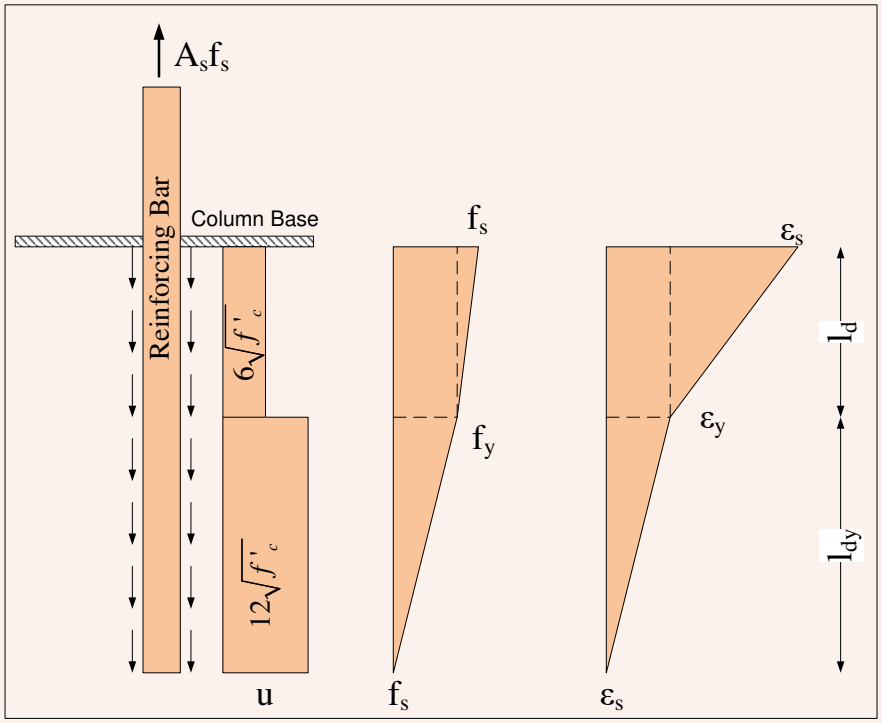
88 نريد أن يتقاطع الجزء الخطي مع الجزء اللاخطي عند $1.25 f_y$، ومن ثم

$$\varepsilon_u = \varepsilon_y + 0.25\frac{f_y}{E_s/h} = \frac{f_y}{E_s} + 0.25h\frac{f_y}{E_s} = 0.26h\varepsilon_y$$

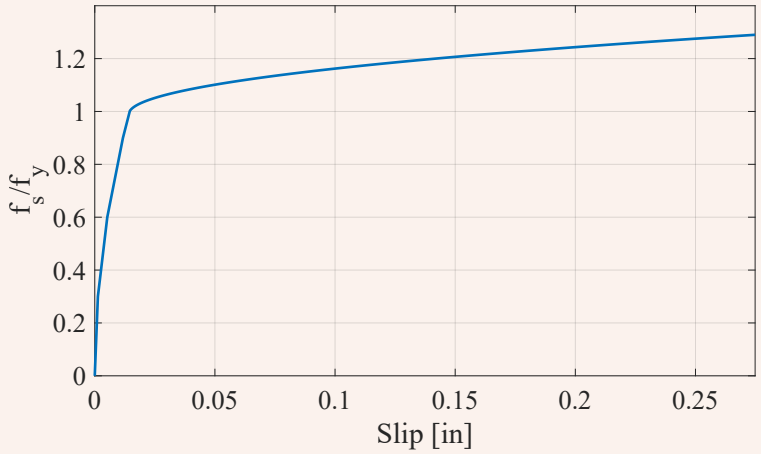
حيث إن h معامل التصلد المحدد بقيمة 100. وبالتعويض في

$$S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.26: نموذج ترابط مبسط



شكل 61.27: منحنى انزلاق الترابط

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نحصل على

$$S_u = S_y + \frac{6.75\varepsilon_y f_y}{8u_p} d_b$$

89 يمكن أن نفترض بصورة معقولة أن

$$S_u = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y} S_y = 26 S_y$$

وبالتعويض نحصل على:

$$u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$$

يمكن استخدام u_p في ما يسمى عناصر حالة الحد لتقييم الفشل الناتج من انزلاق الترابط.

90 بصرف النظر عن نموذج الفولاذ المستخدم في الكمرة–العمود، يوصى باستخدام النموذج ثنائي الخطية لهذا العنصر. ويكافئ استخدام نموذج ثنائي الخطية مع $h = 100$ وجود منحنى انزلاق قضيب يتقاطع جزؤه الثاني مع المنحنى الدقيق عند $f_s = 1.25 f_y$ مع $u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$

91 في نموذج الفولاذ ثنائي الخطية، ينبغي تعديل معامل Young ليعكس انزلاق الترابط باستبدال E_s بـE_{bs}؛

$$E_{bs} = \frac{f_y}{S_y}$$

92 تجدر ملاحظة أن هذا الافتراض يتضمن طولاً وحدياً للعنصر ذي الطول الصفري.

93 وأخيراً، للحفاظ على نسبة صلابة المادة نفسها بين فولاذ انزلاق القضيب في العنصر المقطعي ذي الطول الصفري ونظيره في عنصر الإطار (الفولاذ الطولي)، نضرب انفعالات مادة خرسانة انزلاق القضيب في E_s/E_{bs}.

94 تختار خصائص الخرسانة للعنصر المقطعي ذي الطول الصفري بحيث يكون موضع المحور المحايد في عنصر الكمرة–العمود ومقطع الألياف ذي الطول الصفري واحداً، الشكل 61.28. ومن ثم

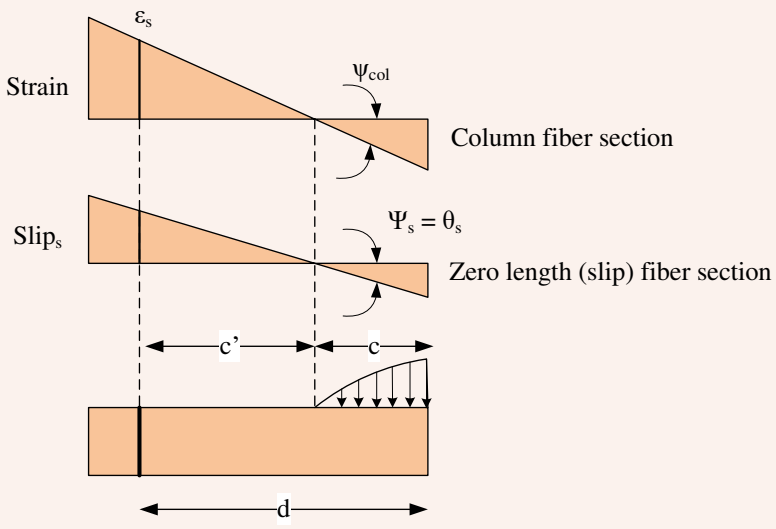
$$\left.\begin{aligned} \theta_s &= \frac{S_s}{c'} \\ \Psi_{col} &= \frac{\varepsilon_s}{c'} \end{aligned}\right\} \theta_s = \Psi_{col} \frac{S_s}{\varepsilon_s} \tag{61.22}$$

95 لذلك يجب تحجيم جميع انفعالات الألياف (المقابلة للفولاذ والخرسانة) في المقطع ذي الطول الصفري بالمعامل $\frac{S_s}{\varepsilon_s}$

96 ويمكن تحقيق ذلك بسهولة بتعديل بيانات إدخال المادة بحيث

- تبقى جميع قيم الإجهاد دون تغيير
- تحجم الانفعالات بالمعامل $\frac{S_y}{\varepsilon_y}$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.28: موضع المحور المحايد

61.3 الدونة المجمعة

97 يقرب نموذج الدونة المجمعة سلوك المادة بافتراض حدوث التشوه اللدن في مناطق مميزة تعرف باسم *المفاصل اللدنة* أو المناطق اللدنة[3]. وتتركز هذه المناطق اللدنة في مواضع محددة من المنشأ، غالباً عند نهايات الوصلات أو المساند.

98 يفترض النموذج أن المادة تتعرض لدوران لدن داخل هذه المناطق اللدنة، بينما يحتفظ باقي المنشأ بمرونته.

99 يمكن ملاحظة تشابه جدير بالاهتمام مع نظريات خطوط الخضوع (الفصل 56) . لكن من المهم إدراك أن مبرهنتي الحدين السفلي والعلوي مبدآن أوسع يشملان التحليل اللدن ككل، في حين أن نموذج الدونة المجمعة تقنية تقريب محددة ضمن إطار أوسع. وتشكل مبرهنتا الحدين السفلي والعلوي أساسين نظريين مهمين للتحليل اللدن، بينما يوفر نموذج الدونة المجمعة أداة هندسية عملية للتحليل والتصميم المبسطين.

100 في الدونة المجمعة تحكم الاستجابة اللاخطية بما يلي

1. جزء لاخطي طوله L_p مجاور للعقدة.
2. نوابض لاخطية موضوعة عند الوصلة.

سنتناول كلاً من هذين الاعتبارين على حدة.

101 أولاً، من المهم ملاحظة أن منهج اشتقاق L_p ليس مهمة بسيطة. ويتطلب اشتقاق شامل ومفهوم لـL_p إعادة النظر في مفاهيم نوقشت سابقاً، مثل العلاقة بين الانحناء والترخيم (راجع §22.3.4). كما يتضمن أخذ

[3] لاحظ التشابه مع المنطقة اللدنة عند طرف شق في المعادن، أو منطقة عملية الكسر المحيطة بشق في الخرسانة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

عزم العطالة الفعال للكمرات الخرسانية المسلحة في الحسبان، وهو موضوع قد لا يكون تناول في هذا الكتاب تحديداً لكنه يرد عادة في الكتب الأساسية للخرسانة المسلحة. وبإعادة النظر في مفهوم الترخيم الناتج من الانحناء وإدماج عزم العطالة الفعال للكمرات الخرسانية المسلحة، يمكن الوصول إلى اشتقاق صحيح ومفهوم لـL_p.

61.3.1 الطول اللدن

102 يؤثر طول المفصل اللدن تأثيراً كبيراً في الإزاحة اللدنة (§61.3.1.4.1)، ولذلك يجب تحديده بأكبر قدر ممكن من الموثوقية.

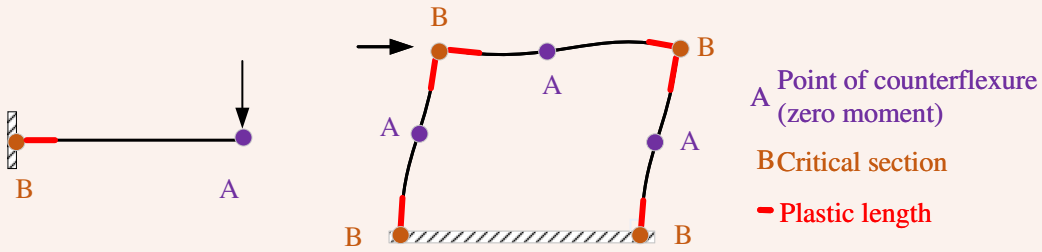
103 لتحديد الطول اللدن، يكون التسلسل كما يلي:

1. مواضع المفاصل اللدنة. مع أن مراجع كثيرة تستخدم كمرة كابولية للشرح، سنبين بدقة أكبر مواضع تلك الأطوال اللدنة وكيفية أخذها في أبسط مخطط ممكن للجسم الحر.
2. العلاقة النظرية بين الانحناء والتشوه.
3. عزم عطالة عناصر الخرسانة المسلحة (المتشققة) والانحناء المقابل
4. تحديد الأطوال اللدنة

باتباع هذا التسلسل المنهجي، يمكن تحديد الأطوال اللدنة بموثوقية، وهي بدورها تؤثر تأثيراً كبيراً في الإزاحة اللدنة للمنشأ (راجع §61.3.1.4.1).

61.3.1.1 المواضع المحتملة للمفاصل اللدنة

104 لتحديد الطول اللدن L_p وتعيين المفاصل اللدنة المحتملة، نبدأ برسم مخطط جسم حر لـ*الطول الممثل* بين نقطتين: A، وهي نقطة انقلاب مجاورة (عزم صفري أو نهاية حرة)، وB، وهي المقطع الحرج. ويوضح المخطط في الشكل 61.29.



شكل 61.29: تحديد المناطق اللدنة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.3.1.2 التشوه الناتج من الانحناء ($\Delta(\phi)$)

105 للتنبؤ بمطيلية المنشأ، من الضروري تحديد التشوه الحاصل عند بلوغ العزم الأقصى. ويتطلب ذلك فهم دوران العضو وترخيمه في الحالة القصوى. ويمكن الحصول على هاتين القيمتين بتحليل التوزيع الفعلي للانحناء داخل المنشأ.

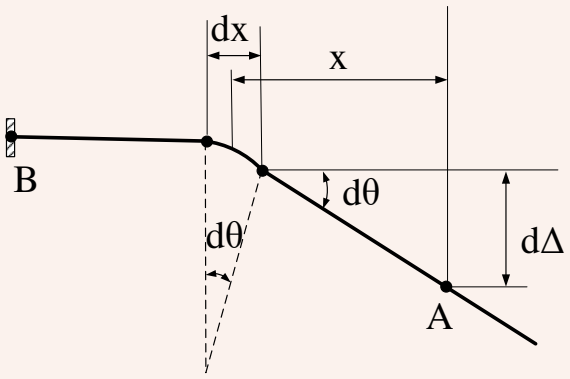
106 يمكن تحديد دوران العضو وترخيمه بتكامل الانحناءات على طول العضو. ويعرف الانحناء (§22.3، المعادلة 22.7) بأنه معدل *الدوران بين أي نقطتين*،

$$\phi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

وبأخذ الانحناءات في مواضع مختلفة وتكاملها، يمكن قياس دوران العضو وترخيمه وتوفير معلومات مهمة عن سلوكه في الحالات القصوى.

$$\theta(x) = \int_A^B \phi(x) dx$$

حيث إن dx عنصر طول من العضو. الشكل 61.30



شكل 61.30: ترخيم التشوه الانحنائي لعنصر

107 يبين الشكل 61.30 كابولاً ذا تشوه ناتج فقط من الدوران $d\theta$ على عنصر طوله dx. ويكون الدوران $d\theta$

$$d\theta = \phi dx$$

حيث إن ϕ انحناء العنصر. ويكون الترخيم المستعرض $d\Delta$ عند النقطة A عن *المماس* لمحور العضو عند النهاية المثبتة B، الناتج من الدوران $d\theta$ بين نهايتي العنصر، مساوياً

$$d\Delta = x d\theta = x\phi dx$$

ومن ثم يكون الترخيم المستعرض للنقطة A عن مماس محور العضو عند النقطة B، الناتج من الانحناء على كامل طول العضو بين النقطتين،

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x\phi dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

108 من المهم ملاحظة أن هذه المعادلات تمثل تعميماً بسيطاً لمبرهنات مساحة الانحناء. وهي تنطبق على الانحناءات المرنة واللدنة، مما يوسع مجال تطبيق المفهوم. وباستخدام هذه المعادلات يمكن تحليل سلوك المنشأ في المجالين المرن واللدن. .

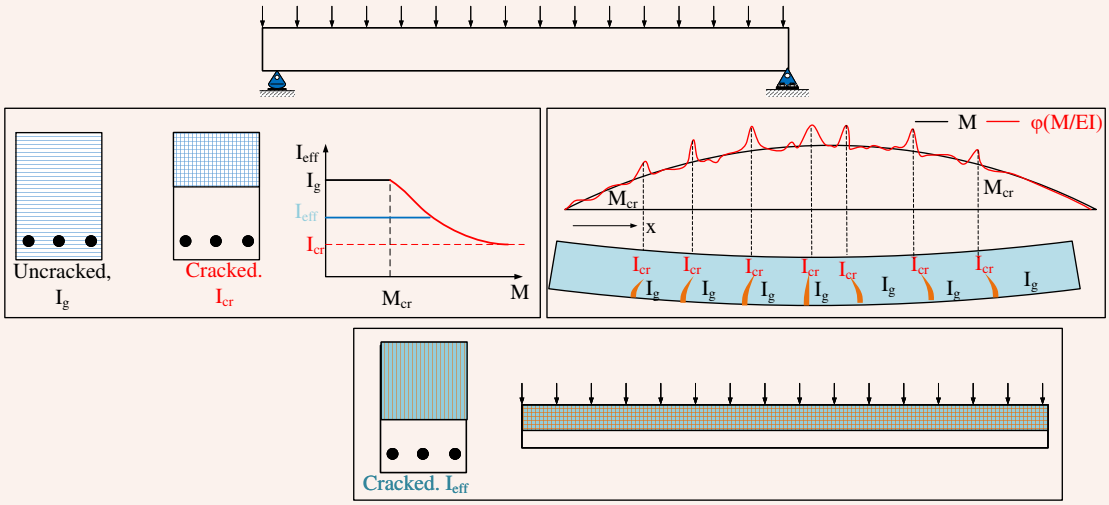
109 ومع ذلك، تجدر الإشارة إلى أن هذا النهج يهمل تأثير *تقسية الشد*. وتشير تقسية الشد إلى زيادة صلابة الأعضاء بسبب حمل الخرسانة للشد بين الشقوق. ولا تؤخذ هذه الظاهرة في الحسبان في المعادلات السابقة. وقد تؤثر تقسية الشد تأثيراً كبيراً في السلوك والاستجابة الكليين للمنشأ، ومن المهم مراعاتها في التحليلات والتصاميم الأكثر تقدماً.

61.3.1.3 عزم العطالة الفعال للخرسانة المسلحة والانحناء

110 لفهم نموذج الدونة المجمعة، من الضروري امتلاك فهم شامل للانحناء في كمرة خرسانية مسلحة وللتعريف المقابل لعزم العطالة الفعال.

111 في حالة الكمرة الخرسانية المسلحة البسيطة الارتكاز والمحملة بانتظام المبينة في الشكل 61.31، يطرح سؤال مهم: ما عزم العطالة الفعلي I المستخدم لحساب الترخيم؟ لكن مقصدنا في هذا السياق هو إبراز التعقيد المرتبط بتحديد توزيع الانحناء.

112 يتطلب تحديد توزيع الانحناء في كمرة خرسانية مسلحة مراعاة عوامل مختلفة، مثل سلوك الخرسانة وفولاذ التسليح، وتأثير التشقق، والتفاعل بين منطقتي الشد والضغط. وتسهم هذه العوامل في الطبيعة المعقدة لحساب توزيع الانحناء، ويعد الفهم الشامل لهذا التعقيد ضرورياً لتحليل سلوك المنشأ بدقة.



شكل 61.31: عزم العطالة الفعال في الخرسانة المسلحة

113 قبل التحميل يكون للكمرة عزم عطالة ثابت يساوي العزم الإجمالي (استناداً إلى مقطع غير متشقق) I_g. ومع تطبيق الحمل تدريجياً يرتفع مخطط العزم (المكافئ) حتى يبلغ القيمة القصوى $wL^2/8$.

114 عند موضع ما على طول الكمرة يبلغ العزم عزم التشقق المحلي ثم يتجاوزه (يرتفع المحور المحايد مع زيادة العزم). وفي النهاية ستحتوي الكمرة على شقوق عديدة. وعند تلك المواضع يكون عزم العطالة I_{cr}، وبينها يكون ببساطة I_g.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

115 يحول تغير عزم العطالة مخطط العزم المكافئ الأملس $M(x)$ إلى مخطط انحناء متعرج ($\phi(x) = M(x)/EI(x)$).

116 لأغراض حساب الترخيم، يلزم عزم عطالة "مكافئ"، وتوصي ACI، استناداً إلى الاقتراح الأصلي لـ-Bran son **andothers,** 1963، باستخدام تعبير متوسط موزون[4] لـ $I \to I_{\text{eff}}$

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3\right] I_{\text{cr}} \quad \textbf{(ACI 9.5.2.3)}$$

حيث

$$I_{\text{eff}} \leq I_g$$
$$M_{\text{cr}} = f_r' \frac{I_g}{y_b}$$
$$f_r' = 7.5\sqrt{f_c'}$$

وM_a العزم الأقصى (الخدمي) عند المرحلة التي يحسب فيها الترخيم

117 يعد تقييم الترخيم مسألة لاخطية، إذ $w \nearrow M \nearrow \frac{M_{\text{cr}}}{M_a} \searrow I_{\text{eff}} \searrow$ ولكمرة مستمرة

$$\Delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} \begin{cases} w \nearrow & \Delta \nearrow \\ I \searrow & \Delta \nearrow \end{cases}$$

لكننا غالباً ما نهمل هذه اللاخطية.

61.3.1.4 التشوه بدلالة أطوال المفاصل اللدنة

61.3.1.4.1 الخرسانة المسلحة

118 كما ذكر سابقاً، تكون عناصر الخرسانة المسلحة عرضة لتطور شقوق متعددة تحت ظروف التحميل. ويستلزم ذلك إدخال عزم عطالة فعال لمراعاة انخفاض صلابة المقطع المتشقق.

119 عندما يتعرض منشأ خرساني مسلح لتشوهات انحنائية غير مرنة بسبب الأحمال الزائدة الناتجة من الجاذبية أو القوى الجانبية، تتركز هذه التشوهات عادة ضمن طول محدود للمفصل. أي إن التشوه اللدن وما يرتبط به من إعادة توزيع العزوم يتمركزان داخل منطقة المفصل هذه.

120 يوفر إدراج مفصل لدن في التحليل الإنشائي ميزة مهمة بإتاحته *إعادة توزيع العزوم*. وقد تزيد إعادة توزيع العزوم مقاومة المنشأ زيادة كبيرة فوق القيمة التي تتنبأ بها النظرية المرنة.

121 لذلك نسعى إلى تحديد تعبيرات التشوهات استناداً إلى L_p.

122 يمكن بسهولة حساب المساهمة المرنة في الدوران والترخيم. ومن ناحية أخرى، يراعي المفصل اللدن وجود الشقوق، وزيادة صلابة الأعضاء بسبب الشد الذي تحمله الخرسانة بين الشقوق، وكذلك التشوهات الإضافية الناتجة من انزلاق ترابط التسليح.

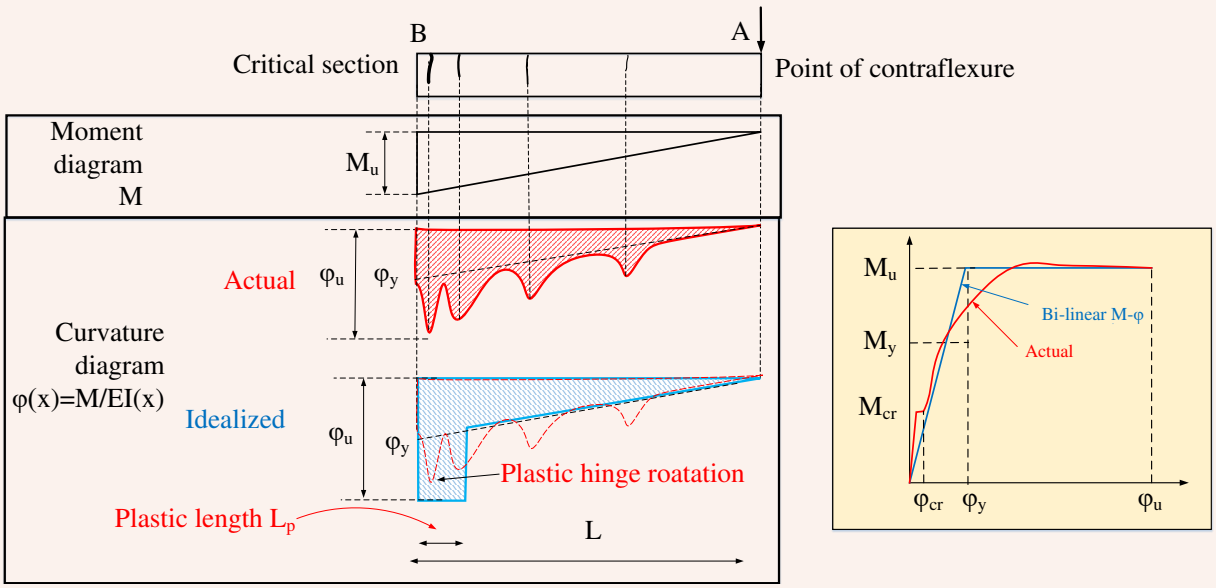
[4] لن تستخدم المعادلة المذكورة في هذا الكتاب. وقد أدرجت فقط لإقامة صلة بموضوع الخرسانة المسلحة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

123 نظراً إلى شبه استحالة تحديد منحنى الانحناء الفعلي بدقة في الممارسة، من الشائع تقريبه بنموذج ثنائي الخطية (مرن–لدن أو مرن–متصلد). ويبسط هذا التصور التحليل بتمثيل توزيع الانحناء بمنطقتين مميزتين.

124 بالرجوع إلى الشكل 61.32، يعرف التقريب ثنائي الخطية بالنقطتين A (نقطة الانقلاب) وB، حيث بلغ الانحناء الأقصى (أو المقطع الحرج). ويفترض هذا النموذج زيادة خطية في الانحناء حتى النقطة A، يتبعها انحناء ثابت بعد A وصولاً إلى B.

125 يوضح الشكل توزيع الانحناء على طول العضو، ومن المهم ملاحظة أن تغير عزم العطالة (كما في الشكل 61.31) يؤدي إلى تذبذبات في الانحناء. وتقابل كل قمة في الانحناء شقاً مناظراً داخل العضو.



شكل 61.32: مواضع الأطوال اللدنة (Park **and** Paulay, 1991)

126 في حين يكون مخطط العزم (M) خطياً، لا يكون مخطط الانحناء ($\phi = \frac{M}{EI}$) خطياً. وتنشأ هذه اللاخطية من تغير عزم العطالة، الذي قد يتأثر بوجود الشقوق في المنشأ. ويظهر مخطط الانحناء زيادة عند مواضع الشقوق بسبب انخفاض عزم العطالة المرتبط بها.

127 سنحدد في التحليل نقطتين مميزتين تقابلان ϕ_y وϕ_u. وبينهما ($\phi_y < \phi < \phi_u$) توجد منطقة موضعية من الدوران غير المرن تؤدي إلى تشكل مفصل لدن. ويسهم هذا الدوران غير المرن في تطور التشوهات اللدنة داخل المنشأ.

128 لتبسيط التحليل، نعرف مفصلاً لدناً مكافئاً يعد الانحناء اللدن ثابتاً على طوله. ويتيح هذا التبسيط تمثيل السلوك الأساسي للتشوهات اللدنة مع تقليل تعقيد التحليل.

129 يعطى الدوران θ بالعلاقة

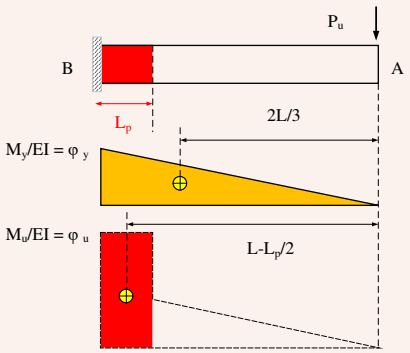
$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \begin{cases} \theta_e = \int_A^B \frac{M}{EI} dx & \text{الدوران المرن} \\ \theta_p = (\phi_u - \phi_y) L_p & \text{الدوران غير المرن} \end{cases} \tag{61.23}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

130 إذا كان الحمل الخارجي عند A حملاً مركزاً، فإن θ_{AB} تعطى بمبرهنة مساحة العزم الأولى[5].

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \underbrace{\phi_y \frac{L}{2}}_{\text{مرن}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p}_{\text{لدن}}$$

131 تعطى الإزاحة بين A وB، الشكل 61.33، بمبرهنة مساحة العزم الثانية[6]



شكل 61.33: إزاحة طرف كمرة كابولية من الخرسانة المسلحة بافتراض الدونة المجمعة

$$\begin{aligned} \Delta^u_{AB} &= \int_A^B x \phi_{AB} dx \\ &= \underbrace{\left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{مرن}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{لدن}} \end{aligned} \tag{61.24}$$

حيث إن x مسافة dx عن A. لاحظ أننا إذا عوضنا الحدود في المركبة المرنة، نحصل على التعبير المألوف $PL^3/3EI$[7]. أو

$$\Delta^u_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{M_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{مرن}} + \underbrace{(M_u - M_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{لدن}}\right] \tag{61.25}$$

[5] يساوي فرق الميل بين أي مقطعين من عضو انحنائي محمل مساحة مخطط M/EI بين هاتين النقطتين (المعادلة 22.16).
[6] يساوي الانحراف المماسي للنقطة 2 على عضو انحنائي محمل عن مماس منحنى الترخيم عند النقطة 1 (t_{21}) عزم مساحة مخطط الانحناء بين 1 و2 حول النقطة 2 (المعادلة 22.3.4.3).
[7] استبدل ϕ_y بـϕ، ثم $\frac{PL^3}{3EI} = \left(\frac{PL^2}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{ML}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \Delta^{el}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

132 لتحديد الطول اللدن، يجب إجراء اختبارات على كمرات كابولية[8]. وتشمل هذه الاختبارات قياس علاقات القوة–الإزاحة والعزم–الانحناء. ومن نتائج الاختبار يمكن اشتقاق نموذج ثنائي الخطية مرن–لدن مثالي. وتسمى هذه العملية *المعايرة*

133 يتضمن الإجراء إنشاء منحنى مكافئ ثنائي الخطية استناداً إلى نتائج الاختبار. فتحسب المساحة تحت المنحنى الأصلي (القوة–الإزاحة أو العزم–الانحناء)، ويرسم من الأصل خط له الميل الابتدائي نفسه للمنحنى. ثم يرسم خط أفقي بحيث تساوي المساحة تحت الخطين المساحة تحت المنحنى الأصلي. وتمثل نقطة تقاطع الخطين إزاحة/انحناء الخضوع، بينما تعد القيمة القصوى في المجال غير المرن القيمة النهائية.

134 باستخدام المعادلة 61.24، يمكن حل الطول اللدن L_p استناداً إلى إزاحة/انحناء الخضوع والإزاحة/الانحناء النهائيين الناتجين من الاختبار.

135 عند غياب معايرة خاصة بالمسألة لـL_p، يصبح الاعتماد على معادلات تجريبية ضرورياً. وتوفر هذه المعادلات تقديرات للطول اللدن استناداً إلى خصائص المنشأ وظروف التحميل المحددة.

الخرسانة غير المحصورة من هذه المعادلات نموذج (Baker, 1956) الشائع الاستخدام، الذي تبنته لاحقاً Institution of Civil Engineers (Bate **andothers,** 1962)

$$L_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{Z}{d}\right)^{0.25} c$$

حيث

$$k_1 = \begin{cases} 0.7 & \text{للفولاذ الطري} \\ 0.9 & \text{للفولاذ المشغول على البارد} \end{cases}$$

$$k2 = 1 + 0.5\frac{P}{P_u}$$

$$k_3 = 0.9 - \frac{0.3}{23.5}(f'_c - 11.7)$$

بافتراض $f'c$ = 0.85 x مقاومة مكعب الخرسانة) حيث تقاس f'_c بوحدة MPa
z مسافة المقطع الحرج إلى نقطة الانقلاب
P الحمل المحوري على العضو
P_u المقاومة القصوى للعضو تحت الحمل المحوري عند غياب عزم الانحناء.

المحصورة استناداً إلى (Baker **and** Amarakone, 1964)

$$L_p = 0.8 k_1 k_3 \frac{z}{d} c$$

حيث إن c عمق المحور المحايد عند الانهيار.

[8] تذكر أن هذا المنشأ المبسط يمثل ببساطة جزءاً من عنصر بين مقطع حرج ونقطة انقلاب.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

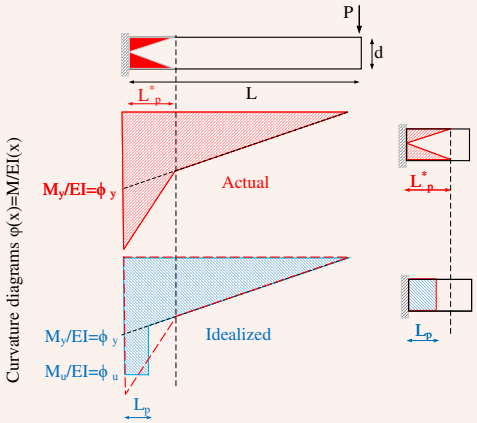
61.3.1.4.2 الفولاذ

136 بالنسبة إلى الفولاذ، وبالتذكير بأن $M_y = SF_y$ و $M_u = ZF_u$، يمكن إعادة كتابة المعادلة 61.25 كما يلي

$$\Delta^u_{AB} = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{مرن}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{لدن}}\right] \tag{61.26}$$

137 ما زال علينا تحديد الطول اللدن L_p. لذلك يفترض إمكان تقريب انتشار الدونة خطياً، كما في الشكل 61.34. ولإيجاد الطول المكافئ لمقطع ملدن بالكامل، نأخذ المساحة تحت المنطقتين المثلثتين اللتين تمثلان انتشار الدونة. ومن خلال إيجاد طول مكافئ ذي المساحة نفسها، يمكن تحديد طول لدن فعال.

138 يتيح هذا النهج تبسيط التحليل باعتبار منطقة لدنة مركزة ذات طول مكافئ. ومع أنه تقريب، فإنه يوفر طريقة عملية ومجدية لتقدير الطول اللدن عند غياب حلول تحليلية مفصلة أو بيانات تجريبية لمنشأ محدد.



شكل 61.34: إزاحة طرف كمرة كابولية فولاذية بافتراض الدونة المجمعة

139 من تشابه المثلثات

$$L^*_p = L\left(\frac{M_p - M_y}{M_p}\right) = L\left(1 - \frac{M_y}{M_p}\right)$$

لكن

$$\frac{M_y}{M_p} = \frac{S}{Z}$$

ومن ثم

$$L^*_p = L\left(1 - \frac{S}{Z}\right)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

140 افترضنا تغيراً خطياً في التلدن، وللتبسيط نسعى إلى تحديد طول لدن مكافئ L_p مساحته مساوية للمساحة السابقة:

$$2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{2}L_p^*\right) = L_p d \Rightarrow L_p = \frac{L_p^*}{2} = \frac{S-Z}{2S}L$$

141 ينبغي أن يكون الطول الحقيقي للمفصل اللدن بين L_p وL_p^*.

142 أما بالنسبة إلى الإزاحة، فنعود إلى المعادلة 61.26

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.3.1.5 مثال 61.1: مفصل لدن في عمود فولاذي

إذا اعتبرنا عموداً كابولياً بطول 12 ft (144 in) ومقطع W14×90 له خصائص المقطع الآتية: $S = 143$ in^3 و$Z = 157$ in^3 وF_y36 ksi و$E = 29,000$ ksi و$I = 999$ in^4، فإن الطول المميز يكون

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{S - Z}{2S} L \\ &= \frac{157 - 143}{2 \times 143}(144) = 0.049 \times 12 \times 7.0 \text{inch} \end{aligned}$$

تحصل الإزاحة من المعادلة 61.26

$$\Delta^u_{AB} = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{مرن}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{لدن}}\right]$$

$$= \frac{36}{29,000 \times 999}\left[\underbrace{\left(\frac{143}{2}(144)\right)\left(\frac{2 \times 144}{3}\right)}_{\text{مرن}} + \underbrace{(157-143)(7)\left(2 \times 144 - \frac{7}{2}\right)}_{\text{لدن}}\right]$$

$$= \underbrace{1.23"}_{\text{مرن}} + \underbrace{0.017"}_{\text{لدن}}$$

همم، لا تبدو *النتيجة* صحيحة، يجب تدقيق المعادلات ثلاث مرات! وأخيراً، تكون مطيلية الإزاحة

$$\mu = \frac{\Delta^{(el)} + \Delta^{(pl)}}{\Delta^{(el)}} = \frac{1.23 + 0.017}{1.23} = 1.014$$

61.3.2 نموذج فشل القص (مادة حالة الحد)

من رسالة الماجستير "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code" التي أعدها Segura, 2011.

61.3.2.1 مقدمة

143 لا يتضمن نموذج الدونة المجمعة سوى تدهور مقاومة الانحناء، إذ يسند خصائص مادة مرنة خطية صلبة لنوابض القص والمحور. ولذلك لا يمثل النموذج نمطي فشل القص والمحور، مع أن تأثيريهما حرجان نظراً إلى شدة الاستجابة الإنشائية عند فقد مقاومة القص والمحور. والواقع أن فشل قص العمود هو أشد أنماط الفشل، إذ يؤدي سريعاً إلى فقد قدرة حمل الحمل المحوري بسبب انخفاض مقاومة المقطع للقص.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

144 تعد الأداة الحسابية القادرة على التنبؤ ببدء الفشل الإنشائي أداة حاسمة للمهندسين في هندسة الزلازل القائمة على الأداء (الفصل 70) (PBEE). ويصدق ذلك خصوصاً عند النظر في قابلية المنشآت الخرسانية المسلحة القديمة للانهيار بسبب فشل القص والمحور. وتكون هذه المنشآت عرضة للانهيار بصفة خاصة لأن تسليحها العرضي الخفيف لا يعزز السلوك المطيلي تحت التحميل العرضي، وهي مشكلة في المنشآت الخرسانية المسلحة القديمة (قبل 1970s) المصممة قبل أحكام التصميم الزلزالي الحالية.

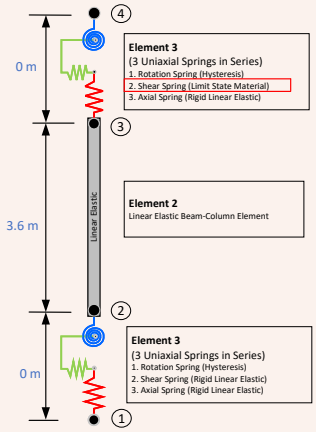
145 طور Elwood **and** Moehle, 2002، كأداة للتنبؤ بسلوك مثل هذا المنشأ، نموذجاً تجريبياً لتمثيل بدء الفشل وما يليه من تدهور المقاومة المؤدي إلى الانهيار. واقترحت نماذج حالة حد لفشلي القص والمحور استناداً إلى انجراف الطابق للعمود المتوقع عنده حدوث نمط الفشل المعني.

146 اختير نموذج حالة حد القص لتنفيذه في Mercury (Saouma, Kang **and** Haussmann, 2012) بوصفه مصهراً حسابياً لمحاكاة فشل قص الأعمدة الخرسانية المسلحة. ويمكن تطبيق النموذج في نمذجة الدونة الموزعة والمجمعة، مع أن فائدته الأكبر بلا شك تكون بوصفه مكوناً مكملاً لنموذج الدونة المجمعة.

61.3.2.2 نموذج حالة حد القص

147 يعتمد نموذج مادة حالة حد القص لتوفير أداة أخرى، إلى جانب نماذج تدهور المقاومة، لدراسة فقد المنشأ لمقاومته. ومن المهم الإشارة إلى الطبيعة التجريبية للنموذج ومن ثم محدودية تطبيقاته. وينطبق النموذج على الأعمدة ذات نسب التسليح العرضي المنخفضة ($\rho'' \leq 0.002$) المتوقع أن تفشل بالقص بعد حدوث خضوع الانحناء.

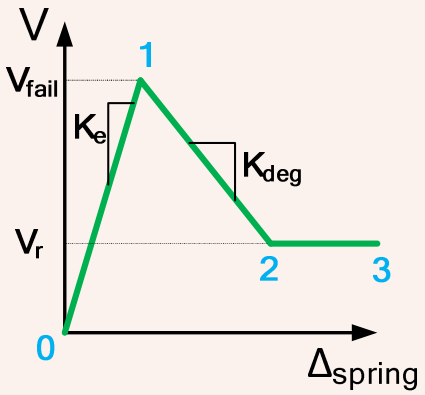
148 يستخدم عنصر قص ذو طول صفري لتعريف نموذج تأسيسي لاستجابة القص. وبتطوير الشكل 61.35 ليشمل نموذج حالة حد القص، يتضمن نموذج الدونة المجمعة عنصراً إضافياً ذا طول صفري عند أعلى العمود (العقدة 3)، مع إسناد نموذج *Hysteresis* في Mercury إلى نابض الدوران، ونموذج مرن خطي صلب إلى النابض المحوري، ونموذج حالة الحد إلى نابض القص، الشكل 61.35.



شكل 61.35: نموذج دونة مجمعة مع فشل القص

149 يعرف نموذج قص حالة الحد منحنى القوة–التشوه بثلاثة خطوط، الشكل 61.36: فرع مرن ابتدائي (0-1)، وفرع مقاومة متدهور (متلين) (1-2)، وفرع مقاومة متبقية (2-3).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.36: فشل قص حالة الحد

150 يعرف سطح فشل القص (سعة الانجراف) (الشكل 61.37) بالمعادلة التي اقترحها Elwood **and** Moehle, 2002. ويحدد سطح الفشل الانجراف الجانبي ($\frac{\Delta}{L}$) المتوقع أن يفشل عنده العمود بالقص بعد حدوث خضوع *الانحناء*. وهو دالة في نسبة التسليح العرضي (ρ'')، ومقاومة القص (v)، ومقاومة الخرسانة للضغط (f_c)، والحمل المحوري (P)، ومساحة المقطع الإجمالية (A_g). ولأن النموذج تجريبي، يعرف سطح الفشل بصورة مستقلة لوحدات S.I والوحدات الإنجليزية

وحدات S.I.
$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{40}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100}$$

الوحدات الإنجليزية
$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{500}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100}$$

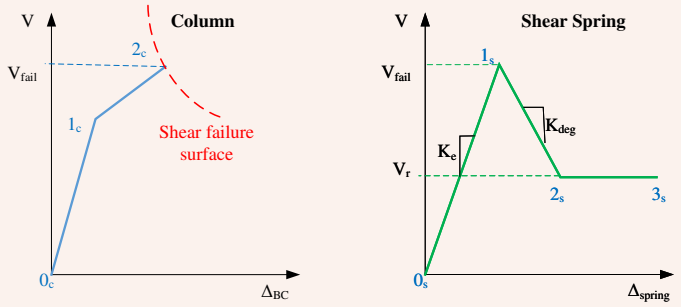
حيث

Δ_s إزاحة الطابق للعمود عند فشل القص
L ارتفاع العمود
ρ'' نسبة التسليح العرضي
A_g مساحة المقطع العرضي للعمود mm^2 أو in^2
v سعة القص (V/A_g [psi أو MPa])
f'_c مقاومة الخرسانة للضغط MPa أو psi
P = الحمل المحوري للعمود

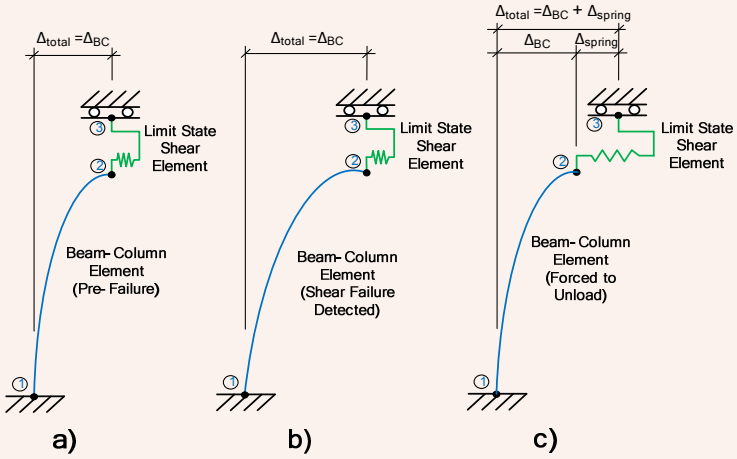
151 يعمل النموذج بمقارنة استجابة قوة–تشوه القص عند أعلى العمود (الشكل 61.35، العقدة 4) بسطح سعة الانجراف.

152 يفصل الشكل 61.37 بين استجابتي العمود ونابض القص. ويكون التشوه الجانبي للعمود (Δ_{BC}) هو الإزاحة عند العقدة 4، وتشوه النابض (Δ_{spring}) هو الإزاحة الأفقية من العقدة 3 إلى العقدة 4. وحتى يبلغ العمود سطح فشل القص (النقطة 2_c في الشكل 61.37) تكون استجابة نابض القص مرنة خطية ($0_s - 1_s$). وعند بلوغ سطح الفشل، تتدهور صلابة نابض القص ($1_s - 2_s$) انطلاقاً من نقطة الذروة (V_{fail}) التي تنبأ عندها سطح الفشل بحدوث فشل القص.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.37: استجابة نابض القص



شكل 61.38: استجابة عمود حالة الحد

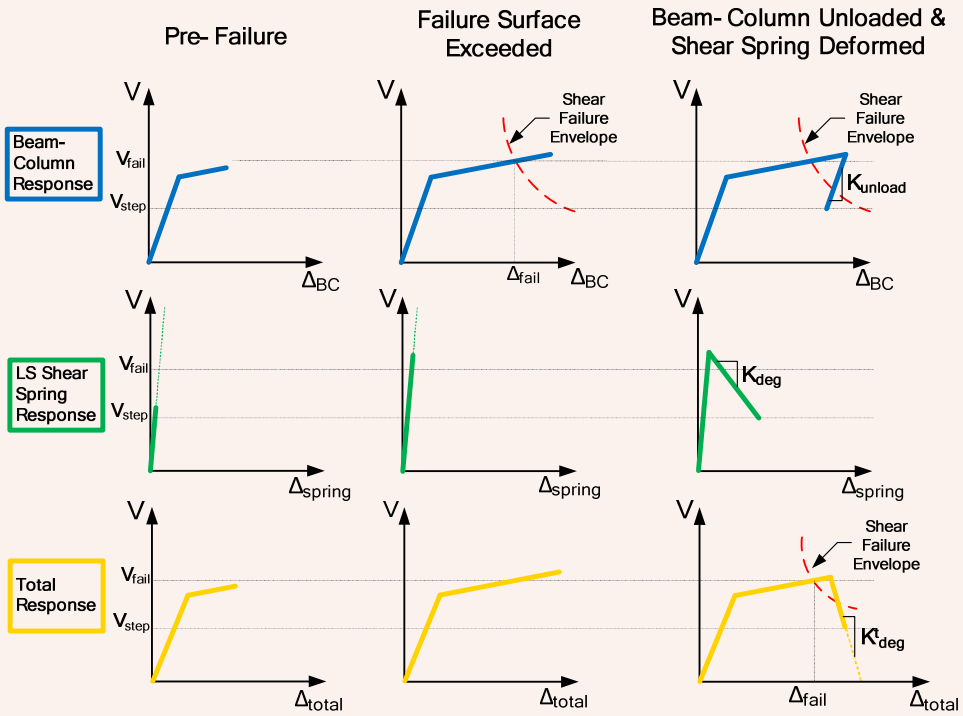
153 يفصل الشكل 61.38 استجابة العمود (Δ_{BC})، واستجابة النابض (Δ_{spring})، والاستجابة الكلية (Δ_{total}): أ) قبل بلوغ سطح الفشل، ب) أثناء الخطوة التي يبلغ فيها سطح الفشل، ج) عند تدهور صلابة القص.

154 يتكون عنصر الكمرة–العمود الأزرق من العنصر 1 والعنصر 2 والنابضين المحوري والدوراني للعنصر 3 (الشكل 61.35). وإذا عينت صلابة ابتدائية عالية جداً لنابض القص، فإن الاستجابة الكلية قبل الفشل تساوي استجابة انحناء العمود ($\Delta_{total} = \Delta_{BC}$). وفي الخطوة الزمنية التي يكتشف فيها سطح فشل القص الفشل، تصبح صلابة نابض القص سالبة وتغدو الاستجابة الكلية مزيجاً من استجابة انحناء العمود واستجابة نابض القص أحادية المحور لأن تشوهات القص لم تعد مهملة في النموذج. وعندما يبلغ سطح الفشل وتصبح صلابة نابض القص سالبة، تسمح الزيادة في التشوهات الجانبية الناتجة من تدهور صلابة القص بتفريغ عنصر العمود. وينتج من ذلك انخفاض تشوه انحناء العمود مع زيادة تشوه النابض.

155 يستخدم تحديد حالة الاستجابة قبل الفشل والاستجابة عند بدء تدهور صلابة نابض القص الصلابة المركبة لعنصر العمود وعنصر نابض القص.

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{K_{spring}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.39: استجابات حالة الحد المنفردة

إذا كان النابض شديد الصلابة في البداية، فإن الصلابة الكلية تساوي K_{BC}.

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{K_{BC}}$$
$$K_t = K_{BC}$$

156 بمجرد بدء الفشل، تتدهور صلابة نابض القص (K_{deg}) ويبدأ العمود التفريغ ($K_{BC} = K_{unload}$). ثم تصبح الصلابة الكلية المتدهورة مزيجاً منهما (الشكل 61.39).

61.3.3 نماذج Ibarra للتباطؤ المتضمنة تبديد الطاقة

157 نموذج Ibar نموذج Ibarra-Krawinkler (IKM) نموذج تباطؤ واسع الاستخدام لمحاكاة سلوك المنشآت الخاضعة للتحميل الدوري، ولا سيما أثناء الزلازل.

158 يتميز IKM بقدرته على تمثيل مجموعة من السلوكيات غير المرنة، مثل تدهور المقاومة والتخصر وتدهور الصلابة، وهي سلوكيات تلاحظ كثيراً في المنشآت الفعلية أثناء الأحداث الزلزالية.

من رسالة الماجستير "asticity Models And Developments
n An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code

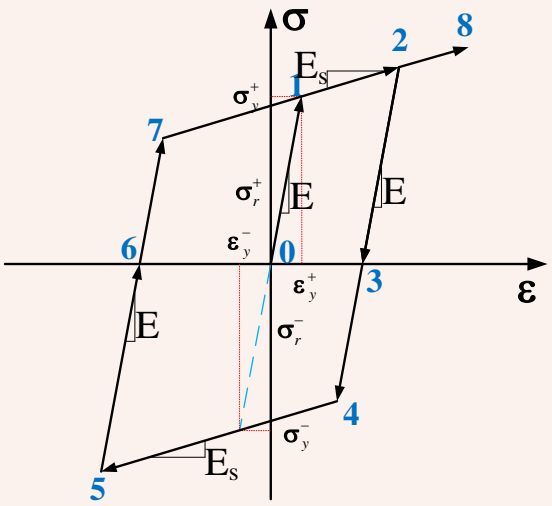
159 فيما يلي عرض مفصل لهذا النموذج واسع الاستخدام.

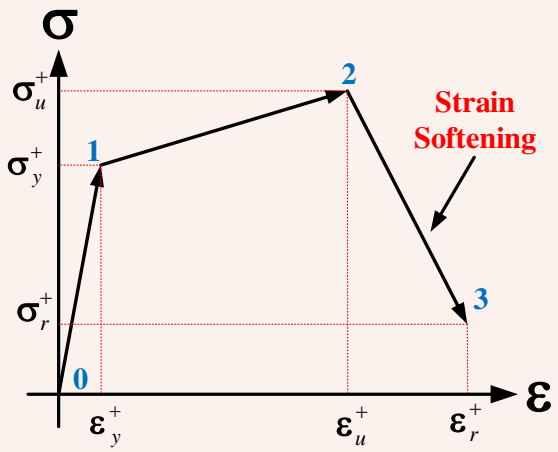
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

160 النموذج التأسيسي للتباطؤ هو نموذج يمثل سلوكاً مادياً معيناً. ومن استجابات التباطؤ المثالية: التحميل المرن، وتصلد الانفعال، والتفريغ المرن، وإعادة التحميل المرنة. فنموذج تصلد الانفعال التأسيسي مثلاً يمثل كلاً من هذه الاستجابات المثالية على امتداد دورة تحميل واحدة.

161 يبين الشكل 61.40 دورة تباطؤ لمادة ذات تصلد انفعال. ويظهر التحميل المرن بين النقطتين 0 و1، ثم تصلد الانفعال من 1-2، ثم التفريغ المرن (2-3) عند انعكاس الانفعال. وتلي إعادة التحميل المرنة (3-4) إعادة تحميل مع تصلد الانفعال (4-5)، ثم تفريغ مرن (5-6)، وإعادة تحميل مرنة (6-7)، وإعادة تحميل مع تصلد الانفعال (7-8).

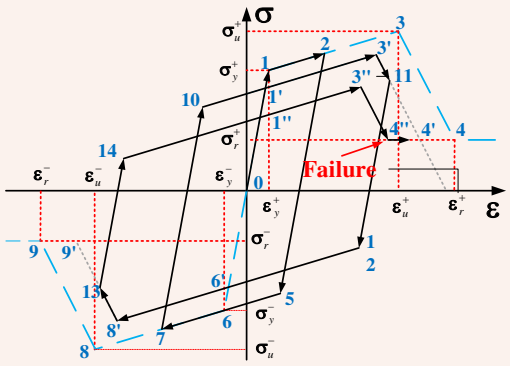
162 لاحظ التشابه مع أثر Bauschinger في الدونة §54.3.1، والمثال في §54.5.2.3.


σ
ε
E
E
E



شكل 61.41: فقد المقاومة بسبب تليين الانفعال

الخضوع (3 و6)، ونقاط المقاومة القصوى (3 و8)، ونقاط المقاومة المتبقية (4 و9) تنتقل نحو الأصل، مما يسبب حدوث نقطة الفشل عند قيمة انفعال أصغر من الانفعال المتبقي الأصلي.



شكل 61.42: تدهور المقاومة تحت التحميل الدوري العكسي

166 طورت نماذج عديدة لتمثيل فقد المقاومة في التباطؤ. ويمكن تقسيمها عموماً إلى مجموعتين: نماذج خطية متعددة الأجزاء، ونماذج ملساء ذات صلابة متغيرة باستمرار.

167 يعد نموذجا Bilinear وKent وPark المعدل نموذجيْن خطيين متعددي الأجزاء قادرين على تمثيل بعض خصائص سلوك التباطؤ. لكن نموذج Bilinear لا يمثل سلوك ما بعد الذروة ولا يراعي تدهور المقاومة تحت التحميل الدوري العكسي. ومع أن نموذج Kent وPark المعدل يمثل سلوك ما بعد الذروة، فإنه لا يراعي تدهور المقاومة.

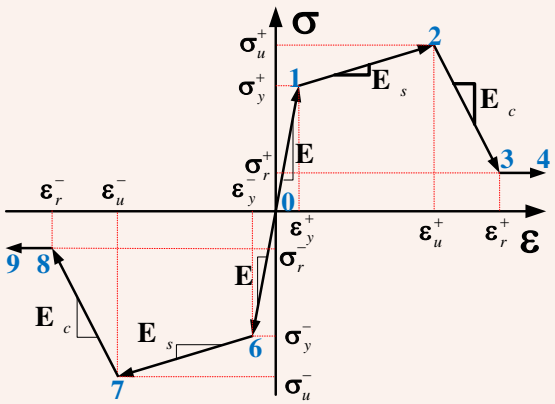
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

168 النماذج التي اقترحها Clough, 1966 وTakeda, Sozen **and** Nielsen, 1970 هي نماذج خطية متعددة الأجزاء تراعي صلابة إعادة التحميل وصلابة التفريغ، على الترتيب، استناداً إلى أقصى تشوه حدث في اتجاه التحميل في الدورات السابقة. ونموذج Wen-Buoc (Wen, 1976) نموذج أملس قادر على تمثيل تدهور الصلابة. واقترح Wang **andothers,** 2001 نموذجاً أملس يتضمن تدهور الصلابة والمقاومة؛ لكنه لا يتضمن فرع تليين بعد الذروة. ويمثل كل نموذج بفاعلية خصائص ظاهرة في الاختبارات الإنشائية، ويشكل مزيج هذه الخصائص أساس نماذج التباطؤ المنفذة في Mercury. ولتوفير هذه القدرات، ينفذ نموذجان تأسيسيان، استناداً إلى بحث Ibarra, 2004، كأداتين حسابيتين للتنبؤ باستجابة المنشأ بدلالة طاقة التباطؤ المبددة على امتداد دورات التحميل.

169 يقدم Ibarra ثلاثة نماذج للتباطؤ. الأول نموذج ثنائي الخطية معدل يتبع قواعد تباطؤ مشابهة لقواعد نموذج *Bilinear*. والنموذجان الآخران تعديلان لنموذج Clough ويسميان النموذج الموجه نحو الذروة، ولا يختلفان إلا بإدراج تأثيرات التخصر في ما يسمى نموذج التخصر.

170 يتبع كل من النموذج الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر العمود الفقري نفسه، الشكل 61.43، الذي تتدهور المقاومة انطلاقاً منه. ويتبع العمود الفقري فرعاً مرناً ابتدائياً حتى نقطة الخضوع (0-1)، وفرع تصلد انفعال حتى نقطة المقاومة القصوى (النهائية) (1-2)، وفرع تليين حتى سعة التشوه النهائية (2-3)، وفرع مقاومة متبقية بعد نقطة سعة التشوه (3-4).

171 يمثل العمود الفقري مسار التحميل تحت التحميل الرتيب عندما لا يحدث فقد مقاومة بالتباطؤ (§61.3.4.1). ولأغراض التوضيح، تعبر الأشكال الآتية عن النماذج التأسيسية بدلالة الإجهاد–الانفعال؛ لكن الوصف ينطبق أيضاً على علاقات القوة–الإزاحة والعزم–الانحناء. تقابل الرموز السفلية r، وy، وu السعات المتبقية والخضوعية والنهائية على الترتيب. ويقابل الرمز السفلي s فرع تصلد الانفعال، ويقابل الرمز السفلي c فرع ما بعد التغطية (التليين).



شكل 61.43: العمود الفقري لنموذج التباطؤ

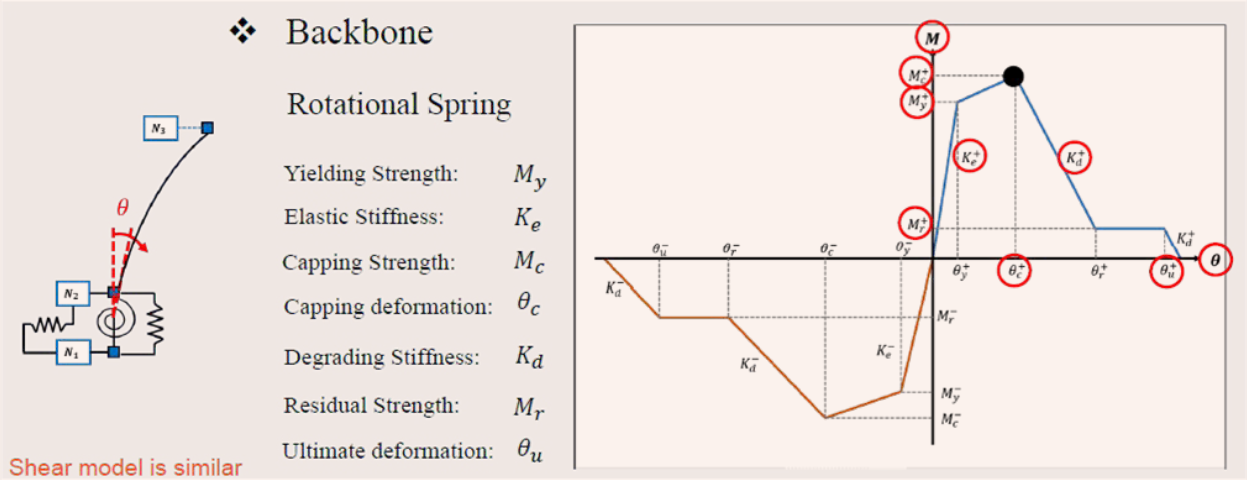
172 تقسم علاقة الإجهاد–الانفعال إلى أربع مناطق لمساري التحميل الموجب والسالب: فرع مرن، وفرع تصلد انفعال، وفرع تليين انفعال، وفرع مقاومة متبقية. ويعرض الجدول 61.2 ملخصاً للعمود الفقري الرتيب، بما في ذلك تحديد معامل المماس.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 61.2: معامل المماس

Path	Description	Loading in Positive Direction		Loading in Negative Direction	
		$E_{\tan}$	Strain (ε)	$E_{\tan}$	Strain (ε)
$0-1\&0-6$	Elastic Loading	$E^{+}-\frac{\sigma_y^{+}}{\varepsilon_y^{+}}$	$0 \le \varepsilon < \varepsilon_y^{+}$	$E^{-}-\frac{\sigma_y^{-}}{s_y^{-}}$	$\varepsilon_y^{+} < \varepsilon < 0$
$1-2\&6-7$	Strain Hardening	$E_s^{+}-\frac{\left(\sigma_u^{+}-\sigma_y^{+}\right)}{\left(\varepsilon_u^{+}-\varepsilon_y^{+}\right)}$	$\varepsilon_y^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_u^{+}$	$E_s^{-}-\frac{\left(\sigma_u^{-}-\sigma_y^{-}\right)}{\left(s_u^{-}-\varepsilon_y^{-}\right)}$	$\varepsilon_u^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$2-3\&7-8$	Strain Softening	$E_c^{+}-\frac{(\sigma_r^{+}-\sigma_u^{+})}{(\varepsilon_r^{+}-s_u^{+})}$	$\varepsilon_u^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_r^{+}$	$E_c^{-}-\frac{(\sigma_r^{-}-\sigma_u^{-})}{(s_r^{-}-\varepsilon_u^{-})}$	$\varepsilon_r^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$3-4\&8-9$	Residual Strength	0	$\varepsilon \ge \varepsilon_r^{+}$	0	$\varepsilon \le \varepsilon_r^{-}$

173 لاحظ أن للعمود الفقري المبين في الشكل 61.43 نظيراً للقص والانحناء، الشكل 61.44.



شكل 61.44: منحنى العمود الفقري للانحناء (Ghannoum, 2020)

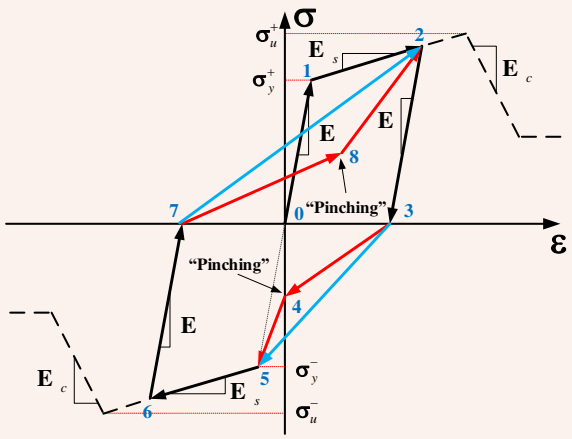
61.3.3.1 نماذج التباطؤ

174 يعرض الشكل 61.45 مسار الدورة الأساسي للنموذجين الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر المعتمدين للتنفيذ في Mercury. وتميز أوجه التشابه بين النموذجين بأسهم سوداء، والاختلافات بأسهم زرقاء (الموجه نحو الذروة) وحمراء (التخصر). ويحد النموذجين العمود الفقري الرتيب. وتظهر الدورة الأولى تحميلاً مرناً يتبعه تصلد الانفعال. وعند انعكاس الانفعال يحدث تفريغ مرن (من 2 إلى 3). ويعمل النموذجان بإعادة تحميل مستهدفة، إذ يتجه مسار إعادة التحميل إلى حالة أقصى تشوه في جميع الدورات السابقة. ولأن التشوه لم يحدث بعد في اتجاه الإجهاد السالب، تستهدف إعادة التحميل للدورة الأولى نقطة الخضوع السالبة (3-5). وفي النموذج الموجه نحو الذروة يستهدف مسار إعادة التحميل حالة أقصى التشوه مباشرة (3-5). أما في

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نموذج التخصر فيستهدف أولاً "نقطة انكسار" للتخصر (4). وتمثل نقطة الانكسار النقطة التي تمتلئ عندها شقوق المقطع وتستعاد بعض مقاومة الاحتكاك. وبعد نقطة الانكسار يتجه مسار إعادة التحميل إلى الحالة المستهدفة (4-5).

175 مع استمرار التحميل بعد الحالة المستهدفة يحدث تصلد الانفعال (5-6)، ويؤدي انعكاس الانفعال إلى تفريغ مرن (6-7). ثم تستهدف إعادة التحميل على الجانب الموجب نقطة أقصى تشوه في الدورات السابقة (2). وفي النموذج الموجه نحو الذروة يستهدف مسار إعادة التحميل حالة أقصى التشوه مباشرة (2-7). أما في نموذج التخصر فتستهدف إعادة التحميل أولاً نقطة الانكسار (7-8)، ثم تتجه إلى الحالة المستهدفة (8-2). ويناقش تحديد نقطة الانكسار في §61.3.3.1.2.



شكل 61.45: النموذجان الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر

61.3.3.1.1 النموذج الموجه نحو الذروة

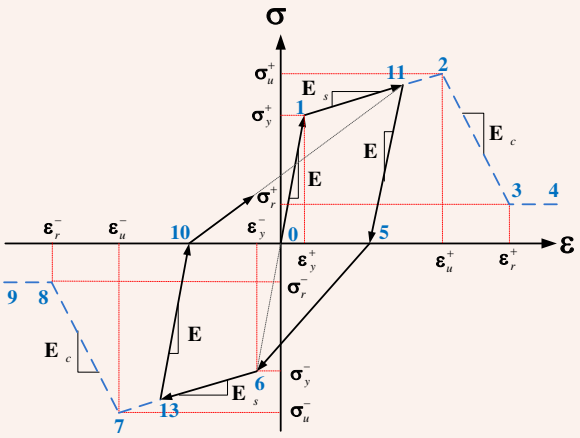
176 يبين الشكل 61.46 قواعد مسار التحميل الدوري الأساسية للنموذج الموجه نحو الذروة. ويشير مصطلح "الموجه نحو الذروة" إلى نقطة أقصى تشوه في دورات التحميل السابقة (النقطتان 2 و6 في الشكل 61.45). وتحدث إعادة التحميل في هذا النموذج مباشرة باتجاه هذه النقطة. وبالرجوع إلى الشكل 61.46، يحدث التحميل المرن من 0-1، ثم التحميل على فرع تصلد الانفعال من 1-11.

177 يؤدي انعكاس الانفعال إلى تفريغ مرن بين 11 و5. ويوجه التحميل الدوري نحو حالة مستهدفة تمثل حالة الإجهاد–الانفعال عند أقصى تشوه حدث في جميع الدورات السابقة (نقطة أقصى تشوه موجهة نحو الذروة). في البداية تكون الحالة المستهدفة نقطة الخضوع. ولأن الخضوع حدث في اتجاه التحميل الموجب (النقطة 1)، تخزن الحالة المستهدفة عند انعكاس الانفعال بوصفها النقطة التي حدث عندها الانعكاس (النقطة 11) *إذا تجاوزت هذه النقطة التشوه في جميع دورات التحميل السابقة*. وفي الرحلة الأولى في اتجاه التحميل السالب تستهدف إعادة التحميل نقطة الخضوع (النقطة 6). وتحدث إعادة تحميل متدهورة بين 5 و6، مظهرة تدهور الصلابة الملازم للنموذج الموجه نحو الذروة. ويلي التحميل على فرع تصلد الانفعال (6-13) انعكاس للانفعال وتفريغ مرن (13-10).

178 تخزن الحالة المستهدفة في اتجاه التحميل السالب عند 13. ويستهدف التحميل في الدورة اللاحقة هذه الحالة. ولذلك تستهدف إعادة التحميل على الفرع الموجب النقطة 11. ويقابل الرمز السفلي t الحالة

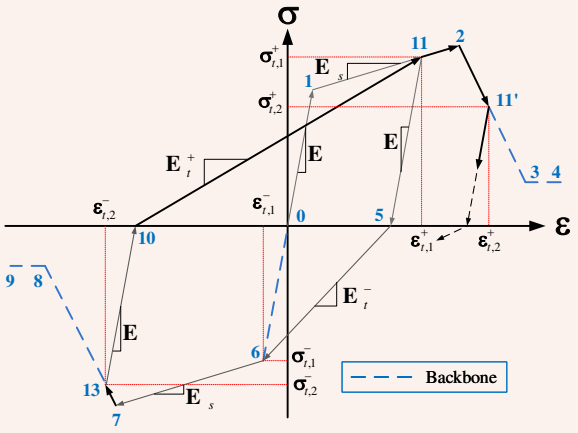
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المستهدفة. ومن المهم الإشارة إلى أنه ينبغي عدم الخلط بين معامل التحميل المستهدف (E_t) ومعامل المماس ($E_{\tan}$)؛ مع أنهما يكونان متساويين عند التحميل مباشرة إلى الحالة المستهدفة.



شكل 61.46: الدورة الأساسية للنموذج الموجه نحو الذروة

179 بالرجوع إلى الشكل 61.47، عندما يحدث انعكاس للانفعال على الفرع الموجب (النقطة 11')، تحدّث الحالة المستهدفة الموجبة إذا تجاوز التشوه عند الانعكاس حالة أقصى التشوه السابقة. ويحدث تفريغ مرن (11'-5')، ثم إعادة تحميل متدهورة باتجاه النقطة المستهدفة السالبة (13).



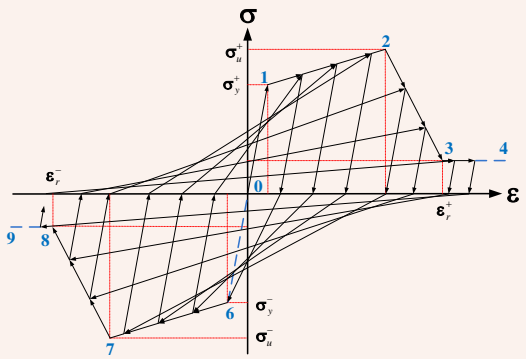
شكل 61.47: انعكاس الحمل وتحديث الحالة المستهدفة

180 على امتداد تاريخ تحميل دوري متزايد المقدار، يتبع النموذج الموجه نحو الذروة العمود الفقري الرتيب باتجاه فرع الإجهاد المتبقي كما يبين الشكل 61.48.

61.3.3.1.2 نموذج التخصر

181 يراعي نموذج التخصر سلوك إعادة التحميل الملازم للخرسانة المسلحة. وكما يتضح في الاختبارات الإنشائية، يؤدي تشقق المقطع أثناء التحميل غير المرن إلى مقاومة احتكاك أقل في اتجاه التحميل ما دامت

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.48: تاريخ حمل دوري متزايد يتبع النموذج الموجه نحو الذروة

الشقوق مفتوحة. ومع استمرار التحميل والسماح بامتلاء الشقوق تستعاد بعض مقاومة الاحتكاك. وينتج من ذلك فرع إعادة تحميل ذي مقاومة متخصرة بسبب انخفاض مقاومة الاحتكاك.

182 يتبع نموذج التخصر العمود الفقري الرتيب نفسه للنموذج الموجه نحو الذروة، ويتبع إعادة التحميل "الموجهة نحو الذروة" نفسها، مستهدفاً نقطة أقصى تشوه في الدورات السابقة. لكنه لا يستهدف حالة أقصى التشوه مباشرة عند إعادة التحميل. وبدلاً من ذلك، ومع امتلاء شقوق المقطع، يستهدف معامل المماس ما يسمى "نقطة انكسار" التخصر (النقطتان 14 و15 في اتجاهي التحميل السالب والموجب، على الترتيب). وتمثل نقطة الانكسار النقطة التي تمتلئ عندها شقوق المقطع وتستعاد بعض مقاومة الاحتكاك. وبعدها يتجه معامل المماس نحو الحالة المستهدفة. ومثل النموذج الموجه نحو الذروة، يلي التحميل المرن (0-1) وتصلد الانفعال (1-11) انعكاس للانفعال وتفريغ مرن (11-5).

183 تخزن الحالة المستهدفة الموجبة عند النقطة 11. وتستهدف إعادة التحميل المتدهورة أولاً نقطة الانكسار السالبة (14)، حيث تستعاد بعض الصلابة الأصلية (المعامل)، ثم تتجه إعادة التحميل نحو النقطة المستهدفة (6)، وهي نقطة الخضوع أثناء الرحلة الأولى.

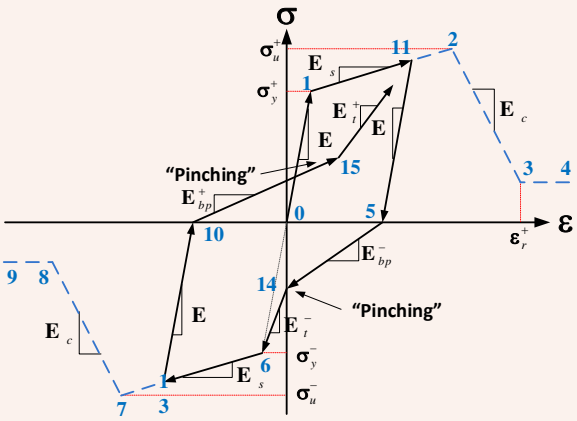
184 يتبع التحميل فرع تصلد الانفعال (6-13)، وعند حدوث انعكاس للانفعال تحدّث الحالة المستهدفة السالبة (13) ويحدث التفريغ المرن بين 13 و10. وتستهدف إعادة التحميل في الاتجاه الموجب أولاً نقطة الانكسار الموجبة (10-15)، ثم إعادة تحميل مقواة نحو الهدف (11-15).

185 تحدد حالة نقطة الانكسار باستخدام المعاملين κ_f وκ_d اللذين يحجمان الإجهاد المستهدف والانفعال عند نقطة الانقلاب بين التفريغ و إعادة التحميل في الاتجاه المعاكس (ε_5 وε_{10})، على الترتيب. ويحدد انفعال نقطة الانكسار مباشرة من الانفعال المستهدف بالعلاقة

$$\varepsilon_{bp}^{+/-} = (1-\kappa_d)\varepsilon_{5/10}^{+/-}$$

يحدد إجهاد نقطة الانكسار باستقراء إجهاد مرجعي ($\sigma_{ref,bp}^{+/-}$) عند الانفعال المستهدف، الشكل 61.50. وتحدد القيمة المرجعية بالعلاقة

$$\sigma_{ref,bp}^{+/-} = \kappa_f \sigma_t^{+/-}$$


σ
ε
"Pinching"
"Pinching"
E
E
E

186 للوضوح، يشرح أولاً تحديد قيم نقطة الانكسار على فرع التحميل الموجب (النقطة 15). ويحدد انفعال نقطة الانكسار الموجبة وإجهادها المرجعي بالعلاقتين

$$\varepsilon_{bp}^{+} = (1 - \kappa_d)\varepsilon_5^{+}$$
$$\sigma_{ref,bp}^{+} = \kappa_f \sigma_t^{+}$$

187 يحدد معامل المماس إلى نقطة الانكسار الموجبة (E_{bp}^{+}) بالعلاقة

$$E_{bp}^{+} = \frac{\sigma_{ref,bp}^{+}}{(\varepsilon_t^{+} - \varepsilon_{10})}$$

ويستخدم لحساب إجهاد نقطة الانكسار (σ_{bp}^{+})

$$\sigma_{bp}^{+} = E_{bp}^{+}(\varepsilon_{bp}^{+} - \varepsilon_{10})$$

188 ثم يحدد معامل المماس إلى الحالة المستهدفة باستخدام حالة الإجهاد–الانفعال عند نقطة الانكسار.

$$E_t^{+} = \frac{(\sigma_t^{+} - \sigma_{bp}^{+})}{(\varepsilon_t^{+} - \varepsilon_{bp}^{+})}$$

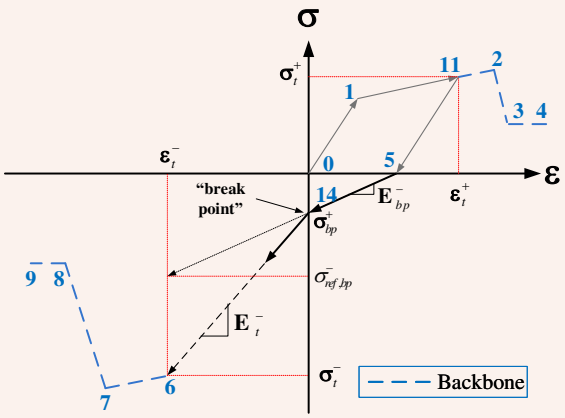
189 يتبع تحديد قيم حالة نقطة الانكسار السالبة العملية نفسها؛ لكن من المهم التأكيد مرة أخرى أن قيم نقطة الانكسار دالة في الحالة المستهدفة التي تعتمد على أقصى تشوه اتجاهي حدث في الدورات السابقة. ولأن التحميل غير المرن بلغ أولاً على فرع الإجهاد الموجب (النقطة 11)، فلم يحدث بعد تشوه غير مرن على الفرع السالب، ولذلك تبقى الحالة المستهدفة حالة الخضوع السالبة (النقطة 6) حتى يتجاوز التشوه الخضوعي في الاتجاه السالب. وفي هذه الحالة تحدد نقطة الانكسار الأولى لاتجاه التحميل السالب، فتقع على المحور الرأسي بما يقابل انفعالاً صفرياً.

190 باستخدام هذه المعلومات تحسب قيم الإجهاد–الانفعال لنقطة الانكسار الأولى أدناه.

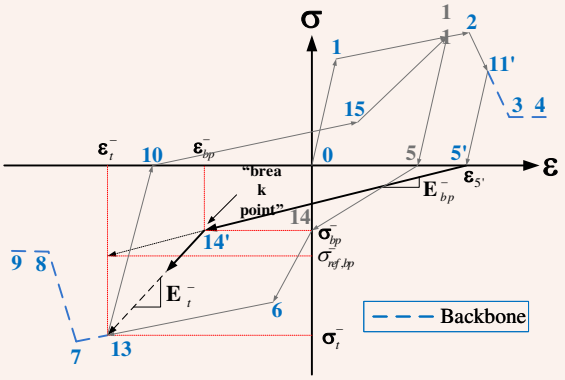
$$\varepsilon_{bp}^{-} = 0$$
$$\sigma_{ref,bp}^{-} = \kappa_f \sigma_t^{-}$$
$$E_{bp}^{-} = \frac{\sigma_{ref,bp}^{-}}{(\varepsilon_t^{-} \varepsilon_5)}$$
$$\sigma_{bp}^{-} = -E_{bp}^{-} \varepsilon_5$$

191 أثناء الدورة التالية، الشكل 61.52، عندما يحدث التفريغ على فرع الإجهاد الموجب (11’-5’) وتبدأ إعادة التحميل على الفرع السالب (5’-14’)، تحدد قيم نقطة الانكسار بدلالة الحالة المستهدفة السالبة (النقطة 13) باتباع العملية الموضحة لتحديد نقطة الانكسار الموجبة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.51: تحديد نقطة الانكسار الأولى

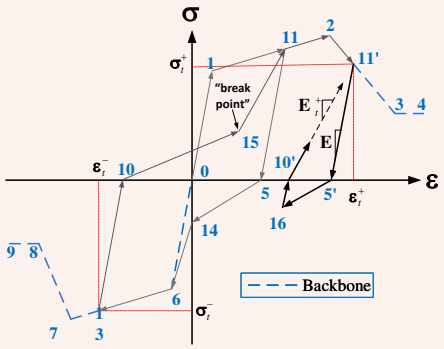


شكل 61.52: تحديث نقطة الانكسار

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\varepsilon_{bp}^{-} = (1 - \kappa_d)\,\varepsilon_{10}^{-}$$
$$\sigma_{ref,bp}^{-} = \kappa_f \sigma_t^{-}$$
$$E_{bp}^{-} = \frac{\sigma_{rf,,bp}^{-}}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_5\right)}$$
$$\sigma_{bp}^{-} = E_{bp}^{-}\left(\varepsilon_{bp}^{-} - \varepsilon_{5'}\right)$$
$$E_t^{-} = \frac{\left(\sigma_t^{-} - \sigma_{bp}^{-}\right)}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_{bp}^{-}\right)}$$

192 عندما يحدث انعكاس للانفعال على مسار إعادة التحميل، الشكل 61.53، ويؤدي التفريغ المرن (16-10’) إلى إعادة تحميل بعد نقطة الانكسار (15)، تستهدف إعادة التحميل الحالة المستهدفة (11’) مباشرة.



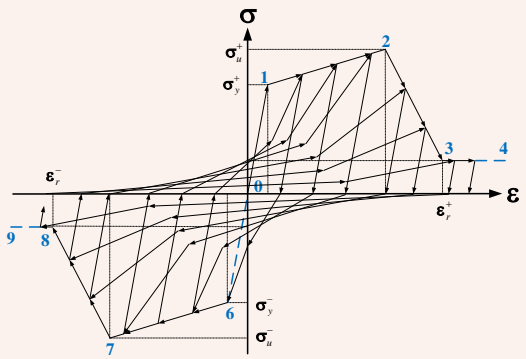
شكل 61.53: إعادة التحميل بعد نقطة الانكسار

193 على امتداد تاريخ تحميل دوري متزايد المقدار، يتبع نموذج التخصر العمود الفقري الرتيب باتجاه الإجهاد المتبقي عبر مسار “المقاومة المتخصرة” المبين في الشكل 61.54.

61.3.3.2 أنماط تدهور المقاومة

194 نماذج التباطؤ المعروضة أعلاه نماذج فعالة لمحاكاة سلوك ما بعد الخضوع. لكن النتائج المختبرية تشير إلى أن تعرض المنشأ لأحمال دورية عكسية يسبب فقد المقاومة، وأن إعادة التحميل لا تعود عادة بالكامل إلى العمود الفقري الرتيب.

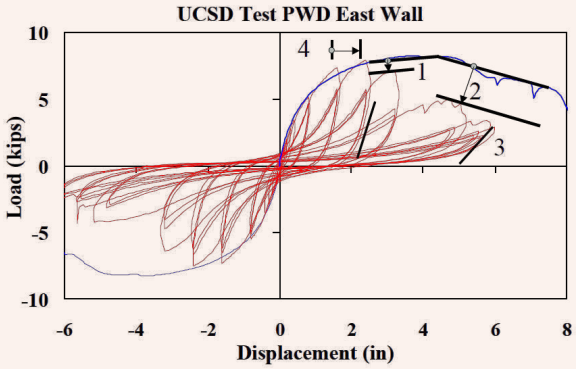
195 لمراعاة هذا السلوك، اقترح Ibarra, 2004 أربعة أنماط لتدهور المقاومة. ومن المهم الإشارة إلى أن أنماط تدهور المقاومة المعروضة في هذا القسم مخصصة للاستخدام مع نموذج تأسيسي للتباطؤ، لا كنموذج مستقل أو نماذج مستقلة. ولذلك يدرج كل من أنماط التدهور الأربعة هذه في النموذجين الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر المنفذين في Mercury. تراعي أنماط تدهور المقاومة فقد السعة الإنشائية الناتج من:



شكل 61.54: تاريخ تحميل دوري متزايد يتبع نموذج التخصر

1. تدهور مقاومة الخضوع (المقاومة الأساسية)
2. تدهور المقاومة القصوى (بعد التغطية)
3. تدهور صلابة (معامل) التفريغ
4. تدهور صلابة (معامل) إعادة التحميل

196 يقدم الشكل 61.55 نتائج اختبارات أجريت في University of California, San Diego (Ibarra, 2004). ويمثل الخط الأزرق نتائج اختبار تحميل رتيب معرفاً العمود الفقري الرتيب. وترسم نتائج اختبار التحميل الدوري العكسي بالأحمر، وتدرج مؤشرات لوصف آثار كل من أنماط التدهور الأربعة. ويظهر النمط 1 نقطة خضوع متناقصة مع تعرض المنشأ لرحلات دورية. ويظهر النمط 2 انتقالاً في فرع التليين يؤثر مباشرة في المقاومة القصوى. ويظهر النمط 3 تدهور صلابة (معامل) التفريغ، ويظهر النمط 4 انزياحاً في الانفعال.



شكل 61.55: نتائج المختبر الإنشائي في UCSD (Ibarra, 2004)

197 نفذ كل من أنماط التدهور الأربعة باستخدام معامل تبديد التباطؤ β الذي قدمه Rahnama وKrawinkler

(Rahnama & Krawinkler, 1993) لتدهور سعة طاقة التباطؤ المعرفة من المستخدم (E_{hys}). وتعرف سعة التباطؤ بأنها معامل للطاقة اللازمة لبلوغ الخضوع.

$$\beta_i = \left(\frac{E_i}{E_{hys} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

$$E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$$

حيث

E_i	طاقة التباطؤ المبددة في رحلة التحميل i
$\sum E_j$	طاقة التباطؤ المبددة في جميع رحلات التحميل السابقة
c	معامل معدل التدهور
γ	معامل سعة طاقة التباطؤ

198 تبدأ رحلة التحميل عند بلوغ المحور الأفقي وتنتهي عند قطعه مرة أخرى. ولذلك تحدث رحلات تحميل منفصلة على فرعي الإجهاد الموجب والسالب، وتستخدم لتحديث معاملات المقاومة على الفرع المقابل. ويكون معامل التبديد في البداية قيمة صغيرة ($\beta_i \ll 1$)، ويزداد مع تبديد الطاقة على امتداد تاريخ التحميل. ومع اقتراب الطاقة الكلية المبددة من السعة المرجعية، يقترب معامل التبديد من اللانهاية مشيراً إلى انهيار المنشأ. ولأغراض حسابية ينبغي أن تقع قيم β على امتداد تاريخ التحميل ضمن المجال $0 \leq \beta_i \leq 1$. وتشير القيم دون الصفر وفوق الواحد إلى استنفاد سعة طاقة التباطؤ المرجعية، وأن تدهور السعة الإنشائية سيؤدي إلى فقد قدرة المنشأ على حمل الأحمال. ويقترح Rahnama وKrawinkler المجال $0 \leq c \leq 1$ لمعامل معدل التدهور.

199 تبدأ أنماط التدهور في خفض السعة الإنشائية بعد بلوغ الخضوع في اتجاه واحد على الأقل. وتجرى تحديثات لكل نمط، باستثناء نمط صلابة التفريغ، عند قطع المحور الأفقي للنموذج، بما يقابل التغير من الإجهاد الموجب إلى السالب أو العكس. وتجرى التحديثات بصورة مستقلة لكل حالة إجهاد (موجبة أو سالبة) عندما يقطع التحميل المحور الأفقي ويتابع في اتجاه التحميل ذلك. فمثلاً، عندما يحدث التفريغ على الفرع الموجب ويبدأ التحميل على الفرع السالب، تحدّث سعة المقاومة الأساسية، وسعة ما بعد التغطية، وصلابة (معامل) إعادة التحميل على الجانب السالب. أما صلابة (معامل) التفريغ فتحدّث عند حدوث انعكاس للانفعال.

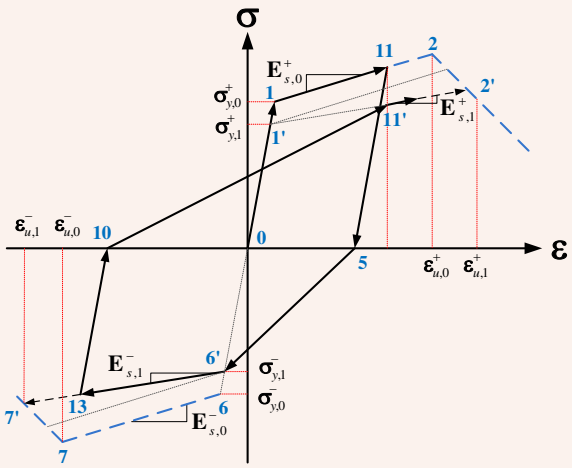
200 تبرز الأشكال المعروضة لأنماط التدهور نموذج التخصر، مع أن الفكرة تمتد إلى النموذج الموجه نحو الذروة بحذف نقاط الانكسار وإعادة التحميل مباشرة إلى النقاط المستهدفة.

61.3.3.2.1 نمط تدهور المقاومة الأساسية

201 يراعي نمط تدهور المقاومة الأساسية انخفاض المقاومة عند إعادة التحميل باتجاه فرع تصلد الانفعال، ممثلاً فيزيائياً النمط 1 في الشكل 61.55. وهو يزيح فرع تصلد الانفعال، الشكل 61.56، نحو الأصل بخفض إجهاد الخضوع (من 1 إلى 1') ومعامل التصلد (من $E_{s,o}^{\mp}$ إلى $E_{s,1}^{\mp}$) باستخدام معامل التبديد β_s.

202 تحدّث قيمة إجهاد الخضوع ومعامل التصلد عند قطع المحور الأفقي (النقطة 5 أو النقطة 10) لاتجاه التحميل وحده. ومرة أخرى، تفصل الأشكال المعروضة في هذا القسم إدماج أنماط التدهور في نموذج التخصر، مع أنها تنفذ بصورة مماثلة في النموذج الموجه نحو الذروة. والفرق الوحيد هو فرع إعادة التحميل الإضافي الذي يستهدف نقاط انكسار التخصر. تحدد القيم المتدهورة بالعلاقتين

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.56: نمط تدهور المقاومة الأساسية

$$\sigma_{y,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma_{y,i-1}^{+/-}$$
$$E_{s,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E_{s,i-1}^{+/-}$$

حيث

$\beta_{s,i}$ معامل تبديد المقاومة الأساسية للخطوة الزمنية i
$\sigma_{y,i-1}^{+/-}$ إجهاد الخضوع الاتجاهي للخطوة الزمنية i-1
$\sigma_{y,i}^{+/-}$ إجهاد الخضوع الاتجاهي للخطوة الزمنية i
$E_{s,i-1}^{+/-}$ معامل تصلد الانفعال الاتجاهي للخطوة الزمنية i-1
$E_{s,i}^{+/-}$ معامل تصلد الانفعال الاتجاهي للخطوة الزمنية i

$$\sigma_{y,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma_{y,i-1}^{+/-}$$
$$E_{s,i}^{+/-} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E_{s,i-1}^{+/-}$$

203 كما ذكر سابقاً، تجرى تحديثات مستقلة للقيم الموجبة والسالبة أثناء الخطوة التي يقطع فيها التحميل المحور الأفقي ويبدأ في ذلك الاتجاه. ويستخدم معامل تبديد المقاومة الأساسية ($\beta_{s,i}$) سعة تباطؤ مرتبطة بالمقاومة الأساسية يحددها معامل سعة التباطؤ γ_s.

$$E_{hys,s} = \gamma_s \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{s,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,s} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

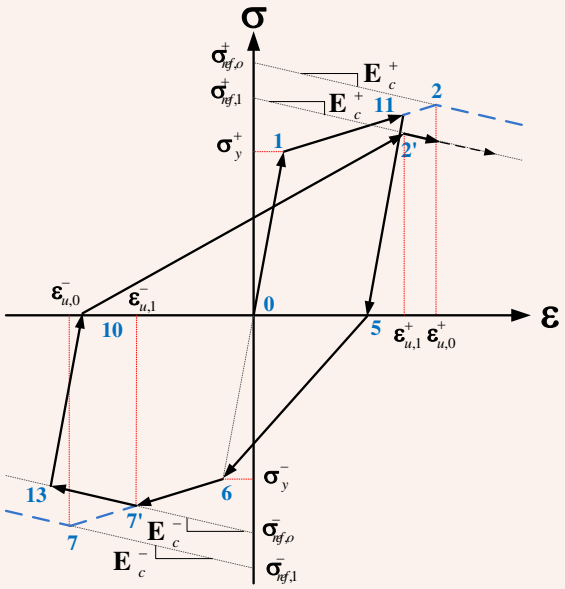
204 لاحظ أنه استناداً إلى الشرط $0 \leq \beta_{s,i} \leq 1$، لن تتدهور قيم إجهاد الخضوع وميل التصلد إلى ما دون

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الصفر. ونتيجة تدهور إجهاد الخضوع ومعامل التصلد، ينخفض كل من إجهاد الذروة (من 2 إلى 2’) والإجهاد المستهدف (من 11 إلى 11’)، ويتجه مسار دورات التحميل بسرعة أكبر نحو الفرع المتبقي.

61.3.3.2.2 نمط تدهور المقاومة بعد التغطية

205 يراعي نمط التدهور بعد التغطية انخفاض المقاومة عند إعادة التحميل باتجاه فرع ما بعد التغطية (التليين)، ممثلاً فيزيائياً النمط 2 في الشكل 61.55. ويزيح هذا النمط فرع التليين نحو الأصل بإزاحة نقطة المقاومة القصوى (من 2 إلى 2’). ويتم ذلك بتدهور قيمة إجهاد مرجعي تمثل قيمة إجهاد الذروة المستقرأة إلى المحور الرأسي (أي نقطة الانفعال الصفري) باستخدام معامل التليين. وتجرى التحديثات عند قطع المحور الأفقي لاتجاه التحميل وحده. ويبين الشكل 61.57 نمط تدهور المقاومة هذا لكود العناصر المحددة Mer-cury الذي كتبه المؤلفون (Saouma, Kang **and** Haussmann, 2012). يحدد الإجهاد المرجعي المتدهور



شكل 61.57: نمط تدهور المقاومة بعد التغطية

باستخدام معامل التبديد $\beta_{c,i}$ المقابل لنمط تدهور مقاومة التغطية.

$$\beta_{c,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,c} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\sigma^{+/-}_{ref,i} = \left(1 - \beta_{c,i}\right) \sigma^{+1-}_{ref,i-1}$$
$$E_{hys,c} = \gamma_c \sigma_y \varepsilon_y$$

حيث

γ_c معامل طاقة التباطؤ المرتبط بتدهور مقاومة التغطية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$\beta_{c,i}$ معامل تبديد مقاومة التغطية للخطوة الزمنية i
$\sigma^{+/-}_{ref,i-1}$ الإجهاد المرجعي الاتجاهي للخطوة الزمنية i-1
$\sigma^{+/-}_{ref,i}$ الإجهاد المرجعي الاتجاهي للخطوة الزمنية i

206 من المهم الإشارة إلى تثبيت معامل التليين، وأن تدهور إجهاد الذروة يتم فقط بتغيير الإجهاد المرجعي. وبعد تدهور الإجهاد المرجعي يجب تحديث إجهاد الذروة، وحالة الإجهاد–الانفعال المستهدفة، والانفعال المتبقي. ومع الزمن تجعل القيم المخفضة التحميل اللاحق يستهدف الفرع المتبقي.

61.3.3.2.3 نمط تدهور صلابة التفريغ

207 يراعي نمط تدهور صلابة التفريغ نمط التدهور 3 في الشكل 61.55. وهو فريد مقارنة بأنماط التدهور الأخرى. أولاً، لا يحدّث مستقلاً لفرعي الإجهاد الموجب والسالب. بل تجرى التحديثات للاتجاهين، مما يعني إمكان حدوث تدهور صلابة التفريغ بسرعة أكبر من الأنماط الأخرى.

208 كذلك لا يحدث التدهور عند قطع التحميل المحور الأفقي. بل تحدّث صلابة التفريغ عند حدوث انعكاس للانفعال، في الخطوة الزمنية التي يبدأ فيها التفريغ، الشكل 61.58. ويخفض هذا النمط معامل التفريغ باستخدام معامل التبديد المرتبط $\beta_{k,i}$.

$$E_{hys,k} = \gamma_k \sigma_y \varepsilon_y$$

$$\beta_{k,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,k} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

$$E_{u,i} = \left(1 - \beta_{k,i}\right) E_{u,i-1}$$

حيث

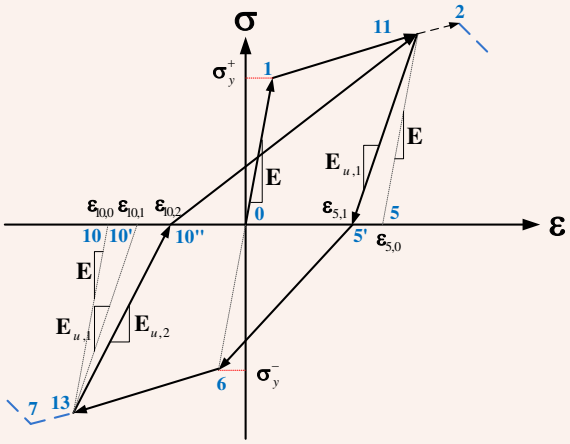
γ_k معامل طاقة التباطؤ المرتبط بتدهور صلابة التفريغ
$\beta_{k,i}$ معامل تبديد صلابة التفريغ للخطوة الزمنية i
$E_{u,i-1}$ معامل التفريغ للخطوة الزمنية i-1
$E_{u,i}$ معامل التفريغ للخطوة الزمنية i

209 على امتداد دورة كاملة واحدة يتدهور معامل التفريغ مرتين من قيمة مساوية للمرونة الابتدائية. وبذلك تنزاح قيم الانفعال عند النقطتين 5 و10 نحو الأصل (5-5’ و10-10’-10”)، مما يسرع التفريغ. ولأن هذا النمط قد يحدّث ضعف عدد مرات الأنماط الأخرى، ينبغي أن تصل قيمة γ الملائمة المرتبطة به إلى ضعف قيمة الأنماط الأخرى إذا كان متوقعاً تبديد طاقة مماثل في الاتجاهين (Ibarra, 2004). وإذا لم تختر قيمة γ مناسبة، تستنفد سعة التباطؤ مبكراً وتقترب قيمة $\beta_{k,i}$ من اللانهاية وتنخفض دون الصفر قبل وقت طويل من استنفاد سعة التباطؤ للأنماط الأخرى.

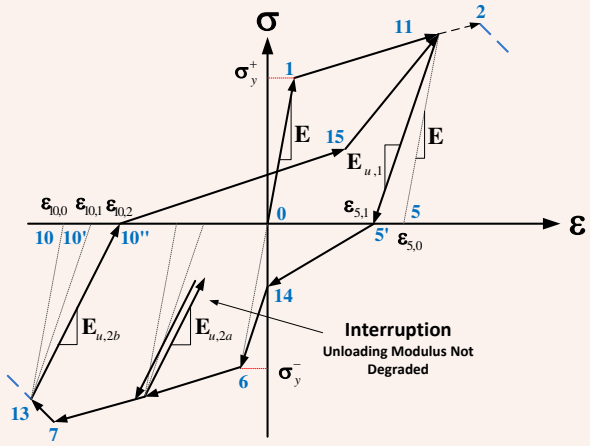
210 من الخصائص الفريدة الأخرى لنمط تدهور صلابة التفريغ أن التحديثات لا تجرى إلا إذا اكتمل التفريغ على فرع واحد (موجب أو سالب) وبدأت إعادة التحميل على الفرع المقابل، الشكل 61.59. وعندما لا يكتمل التفريغ وتبدأ إعادة التحميل على الجانب نفسه، يعد ذلك انقطاعاً وتهمل القيمة المحدثة ($E_{u,2a}$ في الشكل 3.19). وعند حدوث انعكاس آخر للانفعال تستبدل القيمة المتدهورة المهملة بقيمة جديدة ($E_{u,2b}$ في الشكل 61.59) استناداً إلى الطاقة المبددة الجديدة.

211 بعد اكتمال التفريغ تخزن القيمة المتدهورة الحالية وتخفض عند انعكاس الانفعال التالي. ومع تدهور صلابة التفريغ، يتضح ازدياد تبديد طاقة التباطؤ، مما يؤدي إلى تدهور سريع للأنماط الأخرى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 61.58: نمط تدهور صلابة التفريغ

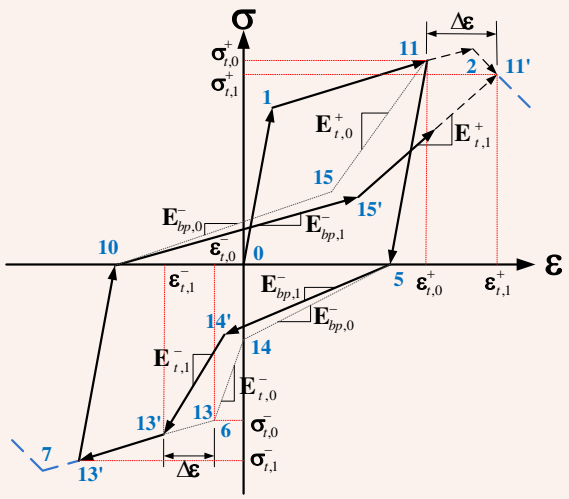


شكل 61.59: انقطاع التفريغ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.3.3.2.4 نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل

212 يراعي نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل النمط 4 في الشكل 61.55. ويزيد هذا النمط القيمة المطلقة للانفعال الاتجاهي المستهدف. وبذلك تبتعد النقاط المستهدفة (11-11’) ونقاط الانكسار (15-15’ و14-14’) عن الأصل، مما يخفض معامل إعادة التحميل. وتجرى التحديثات عند قطع المحور الأفقي لاتجاه التحميل وحده.



شكل 61.60: نمط التدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل

213 يزاح الانفعال المستهدف بتعديل قيمته باستخدام معامل تبديد إعادة التحميل المتسارع $\beta_{a,i}$.

$$E_{hys,a} = \gamma_a \sigma_y \varepsilon_y$$

$$\beta_{a,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,a} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$

$$\varepsilon_{t,i}^{+/-} = \left(1 + \beta_{a,i}\right) \varepsilon_{t,j-1}^{+/-}$$

حيث

γ_a معامل طاقة التباطؤ المرتبط بالتدهور المتسارع لصلابة إعادة التحميل
$\beta_{a,i}$ معامل تبديد إعادة التحميل المتسارع للخطوة الزمنية i
$\varepsilon_{t,i-1}^{+/-}$ الانفعال الاتجاهي المستهدف للخطوة الزمنية i-1
$\varepsilon_{t,i}^{+/-}$ الانفعال الاتجاهي المستهدف للخطوة الزمنية i

214 نتيجة انزياح الانفعال المستهدف تتسارع إعادة التحميل ويستهدف مسار التحميل الفرع المتبقي بسرعة أكبر كثيراً مع ازدياد تبديد طاقة التباطؤ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61.3.3.3 الخلاصة

215 اختير كل من النموذجين التأسيسيين للتباطؤ الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر، المناقشين في §61.3.3.1.1 و61.3.3.1.2 على الترتيب، للتنفيذ في Mercury. ويتبع النموذجان العمود الفقري الرتيب نفسه، الذي يتضمن فرع تحميل مرناً، وفرع تصلد انفعال، وفرع ما بعد التغطية، وفرع مقاومة متبقية. ويلتزم كل نموذج بإعادة تحميل موجهة نحو الذروة باتجاه نقطة أقصى تشوه حدث في دورات التحميل السابقة، والفرق الوحيد أن نموذج التخصر يتضمن فرع إعادة تحميل ثانياً يستهدف نقطة انكسار التخصر قبل استهداف حالة أقصى التشوه. ولمراعاة فقد المقاومة بالتباطؤ، اختيرت أنماط تدهور المقاومة والصلابة المعروضة في الأقسام 61.3.3.2.1-61.3.3.2.4 لإدراجها في كلا النموذجين المنفذين، الموجه نحو الذروة ونموذج التخصر.

61.3.4 نموذج Ghannoum

216 أعاقت محدودية بيانات الاختبارات وصعوبات تمثيل الشكل المنحني لعلاقات الحمل الجانبي–التشوه أثناء الدورات بمقاييس بسيطة معظم الأعمال السابقة في قياس سلوك التباطؤ الدوري للأعضاء الخرسانية.

61.3.4.1 منحنى العمود الفقري

217 يمكن تعريف استجابة غلاف العمود الفقري للنموذج للسلوك المتماثل وغير المتماثل، الشكل 61.61. وتمثل الفروع الأربعة الأولى في كل اتجاه تحميل المجالات المرنة والمتصلدة والمتدهورة والمتبقية، على الترتيب. وبالنسبة إلى فرعي المقاومة المتبقية، مساري الحمل 4^{+} أو 4^{-}، يدخل ميل سالب طفيف لتخفيف مشكلات التقارب العددي. وتضاف الفروع المتدهورة الثانية، مسارات الحمل 5^{+} أو 5^{-}، للوصول تدريجياً إلى مقاومة صفرية، ويسند إليها الميل نفسه للفرع المتدهور الأول في اتجاه التحميل المعني (مسارات الحمل 3^{+} أو 3^{-}).

218 اختير ميل التدهور هذا للبساطة لأن البيانات التجريبية في مجال المقاومة المتبقية قليلة. ويلزم إجمالاً أربعة عشر معاملاً يدخلها المستخدم لتعريف منحنيات العمود الفقري (سبعة معاملات لكل اتجاه تحميل). وهذه المعاملات هي الصلابة المرنة (K_e)، وعزم الخضوع (M_y)، وعزم التغطية (M_c)، ودوران التغطية (θ_c)، وصلابة الفرع المتدهور (K_d)، والعزم المتبقي (M_r)، والدوران النهائي (θ_u).

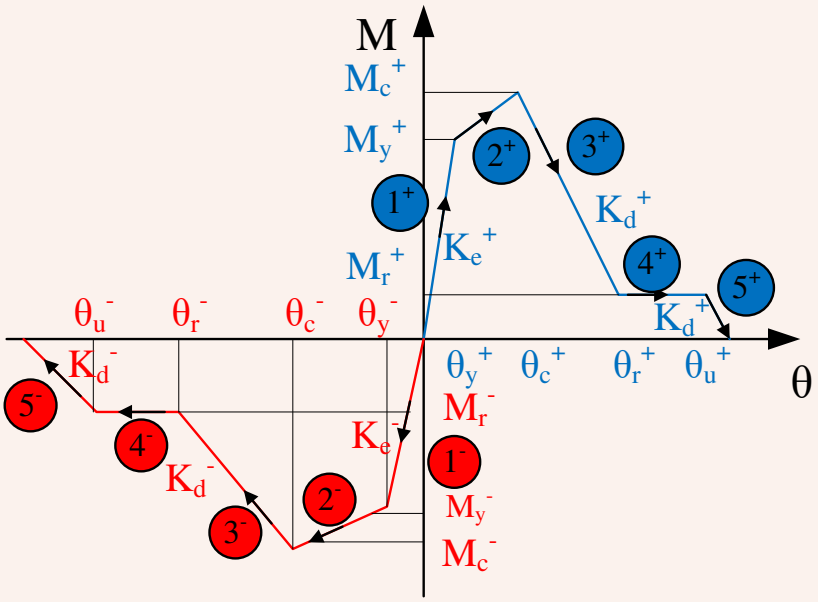
219 يمكن معايرة معاملات العمود الفقري لتمثيل استجابة رتيبة أو غلاف سلوك دوري، تبعاً لاحتواء مجموعة بيانات الأعمدة التجريبية على اختبارات أعمدة ذات سلوك دفع تدريجي أو سلوك دوري معكوس بالكامل.

61.3.4.2 السلوك الدوري

220 ينصب التركيز على تعريف سلوك القوة الجانبية–التشوه للأعمدة الخرسانية باستخدام معاملات كلية مثل تبديد الطاقة وعلاقات المقاومة والصلابة (Suselo, 2021). وتعرف علاقات جوانب السلوك الدوري الرئيسة بالنسبة إلى الخصائص الهندسية والتفصيلية للعمود وغيرها من الشروط الحدية ذات الصلة من قاعدة بيانات مطورة منفصلة (§62.3.2.3) تضم نحو 700 اختبار عمود.

221 كان من أهداف النموذج الرئيسة تقديم تعبير رياضي يستطيع تكرار هذه السمات على كامل مسار التحميل من التفريغ إلى إعادة التحميل، مع بقائه معرفاً بعدد قليل نسبياً من المعاملات التي يمكن استخراجها موضوعياً

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

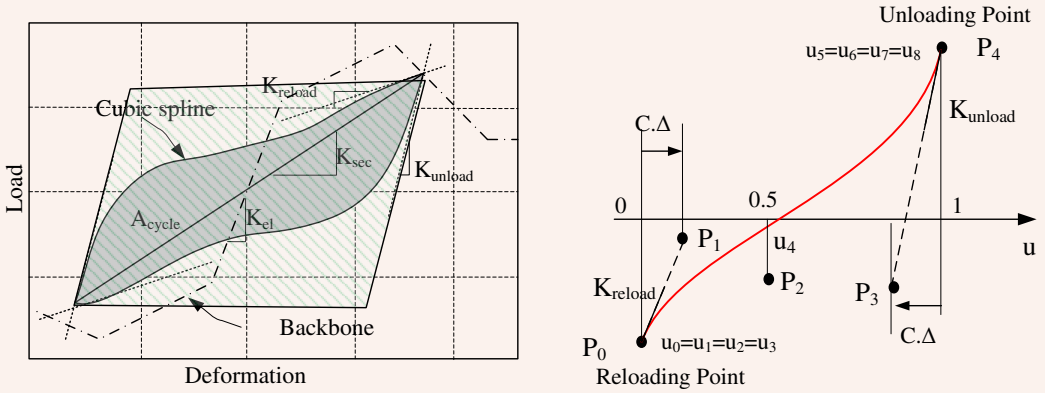


شكل 61.61: منحنى العمود الفقري (Ghorbani **andothers,** 2022)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من بيانات الاختبار وربطها بسهولة بالسلوك الفيزيائي. وقد تحقق ذلك بمنحنى B-spline من الدرجة الثالثة ذي خمس نقاط تحكم أدخل في النموذج الحسابي.

222 لا تتطلب معايرة منحنيات التباطؤ إلا ثلاثة معاملات ذات معنى فيزيائي، الشكل 61.62.



(b) (a)

شكل 61.62: نموذج تباطؤ قائم على spline تكعيبي (Suselo, 2021)

223 يتطلب منحنى B-spline من الدرجة الثالثة ذي خمس نقاط تحكم تسع عقد. وبتعيين ميل التفريغ وميل إعادة التحميل عند نقطتي نهاية منحنى B-spline، يجب أن تكون أول $p+1=4$ عقد وآخر $p+1=4$ عقد متطابقة، الشكل 61.62. وتمثل نقطتا التحكم الأخيرة والأولى النقطة التي يبدأ عندها التفريغ (نقطة التفريغ) والنقطة المستهدفة في اتجاه إعادة التحميل (نقطة إعادة التحميل). وتحدد هاتان النقطتان استناداً إلى قواعد التباطؤ. وترتبط نقطتا التحكم P_1 وP_3 بميلي النهايتين ومعامل شكل بالعلاقات

$$P_1 = P_0 + K_{unload}(C.\Delta)$$
$$P_3 = P + 4 - K_{reload}(C.\Delta)$$

حيث تعرف Δ بالعلاقة

$$\Delta = \frac{u_8 - u_0}{4}$$

وC معامل شكل يتحكم في شكل المنحنى ويتراوح بين 0 و1. وبعد تقييم بدائل عديدة، اعتمد معامل ثابت $C = 0.1$ لأنه أنتج شكل منحنى spline ممثلاً للسلوك الدوري للأعمدة الخرسانية.

224 ترتبط نقطة التحكم P_2 بنسبة الطاقة (ER) بالعلاقة

$$P_2 = (C.\Delta)(K_{reload} - K_{reload}) - \frac{1}{2}\frac{ER}{\Delta} + \frac{1}{2}(P_0 + P_4)$$

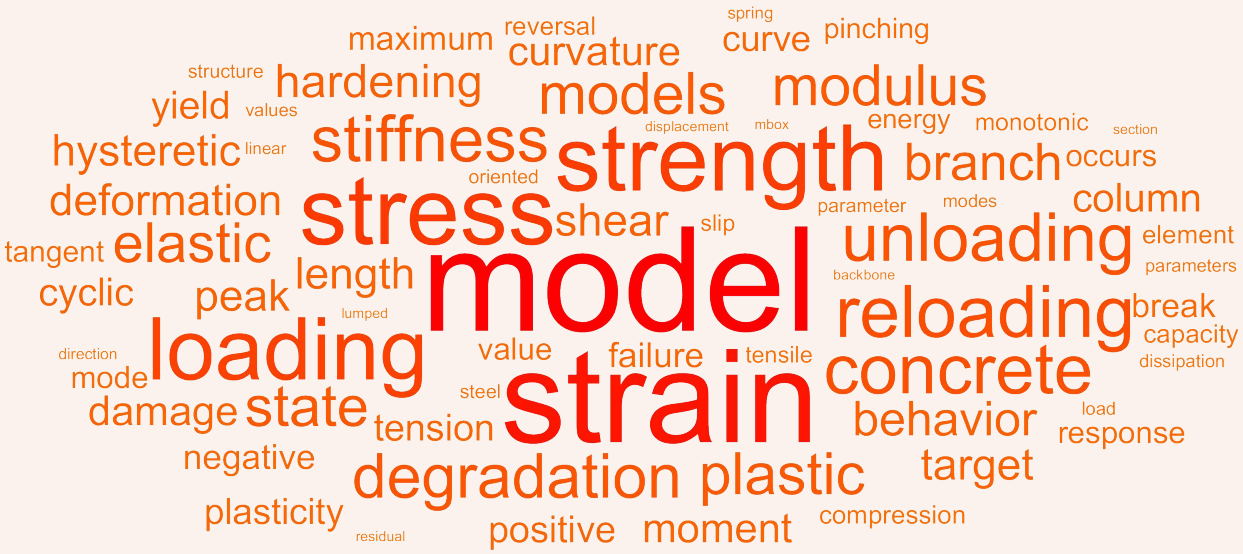
225 تعرف ER بأنها الطاقة داخل منحنى التباطؤ (المساحة الرمادية المظللة بشرطات) في الشكل 61.62b مقسومة على الطاقة داخل منحنى دورة مرنة–لدنة تبدأ وتنتهي عند النقطتين نفسيهما وبصلابة التفريغ نفسها

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(المساحة الخضراء المظللة بخطوط متصلة). ويحدد هذا المعامل، بالاشتراك مع ميلي النهايتين، مستوى التخصر أو مستوى تبديد الطاقة الذي يظهره النموذج أثناء التحميل الدوري.

226 يؤدي خفض قيمة ER إلى زيادة مستوى سلوك التخصر في هذا النموذج.

227 لذلك يكون العدد الكلي للمعاملات اللازمة لتعريف السلوك الدوري لنابض بهذا النموذج خمسة: نقطة التفريغ، وميل التفريغ، ونقطة إعادة التحميل، وميل إعادة التحميل، ونسبة الطاقة.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

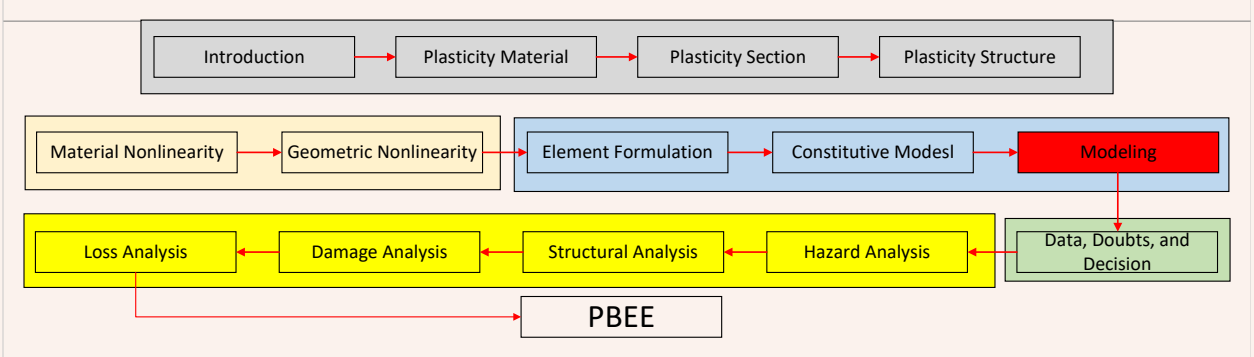
62 علم وفن نمذجة العناصر المحددة

ملخص

كثيراً ما يهمل عامل أساسي في تحليل العناصر المحددة، هو النمذجة. وكما يوحي هذا الفصل، فهي فن وعلم معاً، وقد تؤثر ممارستها في النتائج.

يقدم هذا الفصل للقارئ توصيات أساسية قبل أي دراسة بالعناصر المحددة. وبصورة أكثر تحديداً، يوضح كيفية فهم المسألة وصياغتها ثم تعريفها رياضياً، وكيفية جمع البيانات المطلوبة من مصادر متعددة وتوليفها، وكيفية تعريف النموذج الرياضي (العناصر المحددة). وبوجه خاص، يتناول النمذجة التي تعد، في هذا السياق، علم وفن معالجة ما سبق كله.

62.1 مقدمة 1929
62.1.1 التحقق من شبكة/تحليل العناصر المحددة 1932
62.1.2 مفاهيم التحقق والتصديق على النموذج 1933
62.2 إنشاء الشبكة 1934
62.2.1 العناصر الكبيرة 1934
62.2.2 المقطع العرضي 1940
62.2.3 “اختر وثبّت” 1941
62.2.4 ملاحظات ختامية 1941
62.3 تحديد معاملات التدهور 1942
62.3.1 المعايرة 1943
62.3.2 قاعدة بيانات معاملات النمذجة 1943



62.1 مقدمة

1 تعد النمذجة الصحيحة للمنشأ ضرورية لنجاح التحليل. وتزداد هذه الأهمية عند التعامل مع التحليل اللاخطي.

2 على خلاف ما قد يتبادر إلى الذهن، فإن نمذجة منشأ بعناصر أحادية البعد (1D) (كما نوقش في الفصل 60) ليست مباشرة كما قد تبدو أولاً. ويتناول هذا الفصل هذه التعقيدات.

3 يمثل التحليل اللاخطي بالعناصر المحددة للمنشآت الإطارية في النهاية موازنة بين:

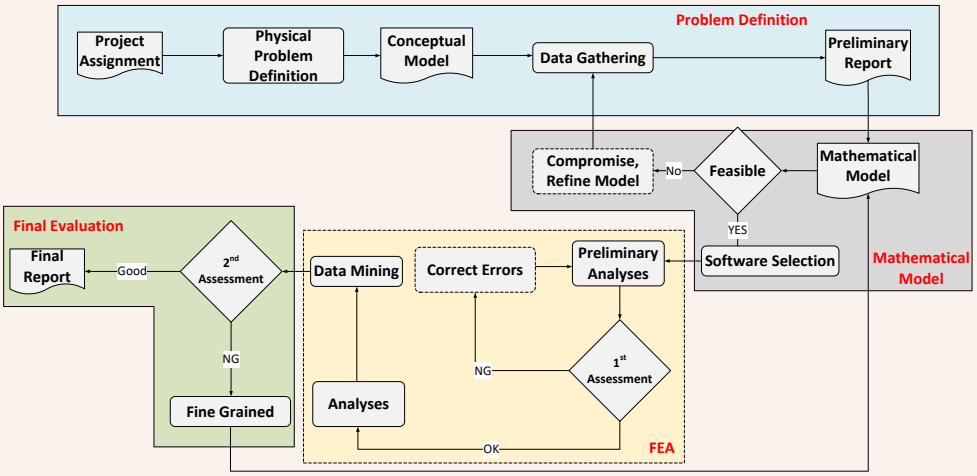
- الاحتياجات وقيود زمن الحساب،
- الفهم الصحيح للمسألة ومبادئ التحليل اللاخطي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- الأدوات الحسابية والخبرة الداخلية المتاحة.
- جودة النتائج المتوقعة.

عملية التحليل

4 يجب تخطيط التحليل وتنفيذه وتقييمه بعناية. وفي المنهج الأكثر صرامة يتكون من المراحل الآتية (الشكل 62.1):



شكل 62.1: عملية العناصر المحددة (مستوحاة من Bathe, 1996)

التحليل الأولي: يكون عادة مرناً خطياً، وتختبر هذه الخطوة تعريف خصائص المادة والشروط الحدية والأحمال.

التقييم الأولي: أجرِ "فحصاً واقعياً" للنتائج. هل تقع ضمن حدود معقولة أم تختلف كثيراً عما توقعه التقرير الأولي؟ تحقق من الأخطاء الواضحة في إدخال البيانات، أو خلط الوحدات، أو النتائج غير المتوقعة. هل تتسق الإزاحات مع الأحمال والشروط الحدية؟ هل مسار الحمل واقعي؟ حدد مناطق الشبكة التي تحتاج إلى تنقيح، والحاجة إلى زيادات مختلفة أو مخططات تكامل. هل معايير التقارب صارمة أكثر من اللازم؟

تصحيح الأخطاء: عالج المسائل التي أدت إلى نتائج أولية غير مقبولة.

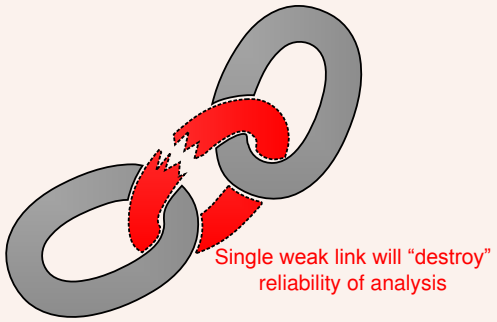
التحليل: حلل المنشأ تدريجياً، بدءاً من أبسط النماذج وصولاً إلى أكثرها تعقيداً.

استخراج البيانات: استخرج النتائج ذات الصلة من المخرجات. تتيح بعض البرمجيات تصدير بيانات محددة، بينما لا تتيحه أخرى. وقد يلزم استرداد النتائج من معالجات رسومية لاحقة أو ملفات مخرجات ASCII وتخزينها. ومن الأفضل جمع كل البيانات المستردة في ورقة Excel واستخدام أدوات مثل MATLAB أو Python لرسم البيانات عند الحاجة.

5 كثيراً ما تنشأ حالات الفشل واسعة النطاق من تفاصيل صغيرة أُغفلت، وكان يمكن وينبغي إدراجها في

النموذج عند النظر إليها لاحقاً. وفي المقابل قد يبذل جهد كبير في نمذجة تفاصيل أخرى غير ذات صلة. ويلزم النظر بعناية للتمييز بين ما هو ضروري وما ليس كذلك.

6 لذلك يجب تطبيق الاهتمام بالتفاصيل بصورة متجانسة على كامل العملية (الشكل 62.2). وقد يؤدي التقليل من أهمية جانب محدد في النمذجة إلى الفشل. فمثلاً، يعد فشل الترابط، مع أنه كثيراً ما يغفل، حرجاً تحت الأحمال الزلزالية عند قواعد الأعمدة.



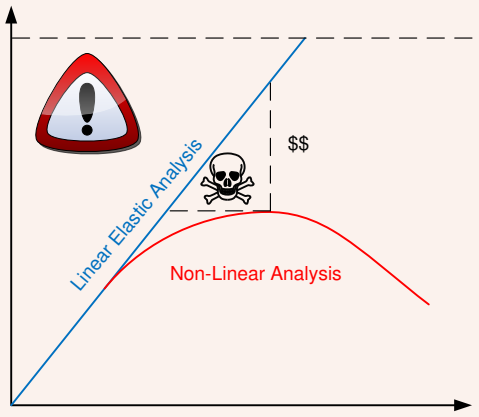
شكل 62.2: تعقيد النموذج الموزع بانتظام

متطلبات التحليل اللاخطي

7 قد يكون الاعتماد حصراً على التحليل المرن الخطي عند الحاجة إلى تحليل لاخطي مكلفاً وخطراً معاً. وغالباً ما يعتمد هذا الاعتماد على “حكم هندسي” محافظ جداً واعتباطي (ومتناقص).

8 قد يؤدي عدم التحديد الدقيق لحمل الفشل إلى “تجاوز” الهدف، مما ينتج تصميماً هشاً مفرطاً. ويميل التحليل الخطي أيضاً إلى تقليل تقدير الإزاحات، وقد ينطوي ذلك على أخطار كبيرة (الشكل 62.3).

9 قد تتطلب المسائل المعقدة أحياناً تحليلات معقدة.



شكل 62.3: مخاطر التحليل الخطي مقارنة بالتحليل اللاخطي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 بخلاف الحلول المرنة الخطية، ينتج التحليل اللاخطي عدة حلول مقبولة. وقد تنتج البرمجيات والنماذج والمحللون المختلفون نتائج مختلفة، ولا يعني ذلك بالضرورة أنها كلها "خاطئة" (مع أن بعضها قد يكون كذلك)، لكن يجب تفسيرها تفسيراً صحيحاً.

11 انتبه، فالتحليل اللاخطي ليس بديلاً عن الحكم الهندسي السليم. وينبغي أن يكون الملاذ الأخير، وألا يستخدم إلا بعد استنفاد المنطق السليم والتحليل الخطي والطرق المبسطة.

12 من الناحية المثالية، ينبغي استخدام التحليل اللاخطي للتحقق من افتراض راسخ أو قياسه كمياً قبل التحليل.

13 يتطلب إجراء تحليل لاخطي عناية كبيرة في إعداد البيانات وتفسير النتائج.

14 ينبغي أولاً فحص النتائج نوعياً؛ ويجب تجنب الإفراط في تحليل الدقة أو التركيز على تفاصيل غير مهمة مثل "المنزلة العشرية الثالثة".

تعريف 62.1: دور دراسات العناصر المحددة

تحليل العناصر المحددة مجرد أداة لتأكيد استجابة متوقعة من حكم هندسي متين وسليم أو قياسها كمياً.

اختيار الخبير

15 إذا تقرر إجراء تحليل لاخطي، فينبغي توخي عناية كبيرة في اختيار "الخبراء" القادرين على إجرائه. فقد اعتاد معظم المهندسين في الشركات الاستشارية إجراء تحليلات مرنة خطية وتصميمات تنظمها الأكواد.

16 من ناحية أخرى، يوجد عدد قليل من الباحثين الأكاديميين المتمرسين في إجراء التحليل اللاخطي لمنشأ معقد؛ لكنهم يميلون غالباً إلى تبسيط الجوانب المحيطية للنموذج والتركيز على جانب ضيق.

17 يجب أن يؤخذ في الاعتبار أن المسائل غير العادية تتطلب تقنيات غير عادية لدراستها على يد محللين مؤهلين جداً.

62.1.1 التحقق من شبكة/تحليل العناصر المحددة

بعد إنشاء شبكة عناصر محددة، يستحسن التحقق من قدرتها على التمثيل. ويمكن تقييم ذلك بمقارنة النموذجين النمطيين العددي والتجريبي. ويحدد الأول من تحليل نمطي وتحديد التردد الطبيعي الأول لنموذج العناصر المحددة. أما الثاني فيمكن الحصول عليه بإحداث اهتزاز قسري للمنشأ بواسطة هزاز ذي كتلة موضوعة لا مركزياً.

18 يمكن التحقق من شبكة تحليل لاخطي بتحليل "دفع تدريجي" لتحديد ما إذا كانت قادرة على تكرار نمط الفشل المتوقع (فمثلاً، هل عرفت عناصر الوصلة بصورة صحيحة تسمح بالفشل المتوقع؟). وأخيراً ينبغي التحقق المستقل من صلاحية النموذج اللاخطي استناداً إلى مكون إنشائي ممثل ذي استجابة تجريبية معلومة (انظر أدناه §62.3.1 للمعايرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.1.2 مفاهيم التحقق والتصديق على النموذج

19 كثيراً ما يفترض أن أكواد العناصر المحددة اللاخطية قد "صُدق عليها" لمجرد تمثيل البيانات المرصودة تجريبياً (الإزاحات عادة). وكثيراً ما يصاحب ذلك أشكال ملونة جداً ومقارنات متجاورة. يجب تذكر أن النماذج اللاخطية تحتوي على متغيرات كافية "لضبط" كثير منها ثم الحصول على ما يبدو نموذجاً مقبولاً. وينبغي تدقيق مثل هذا النموذج للتأكد من سلامة جميع الافتراضات ومعقوليتها وواقعية خصائص المادة المعتمدة. وبعبارة أخرى، لا تكفي المقارنة التصويرية السطحية وحدها.

20 يقال عادة إن كود العناصر المحددة يجب أن يُصدق عليه أو يُتحقق منه. وفي ما يلي بعض التعريفات اللازمة (Stewart, 2009) (Thacker **andothers,** 2004).

التحقق عملية تحديد ما إذا كان تنفيذ النموذج يمثل بدقة الوصف المفاهيمي الذي وضعه المطور للنموذج وحل النموذج. وتهتم بتحديد الأخطاء في النموذج وإزالتها بمقارنة الحلول العددية بحلول تحليلية أو مرجعية عالية الدقة. وباختصار، يتعامل التحقق مع الرياضيات المرتبطة بالنموذج.

التصديق عملية تحديد درجة تمثيل النموذج بدقة للعالم الحقيقي من منظور الاستخدامات المقصودة للنموذج. وتهتم بقياس دقة النموذج بمقارنة الحلول العددية بالبيانات التجريبية. وباختصار، يتعامل التصديق مع الفيزياء المرتبطة بالنموذج.

المعايرة عملية ضبط معاملات النمذجة العددية أو الفيزيائية في النموذج الحسابي لتحسين الاتفاق مع البيانات التجريبية.

التحقق من الكود عملية تحديد أن كود الحاسوب صحيح ويعمل كما هو مقصود.

النموذج الحاسوبي التنفيذ العددي للنموذج الرياضي، عادة في صورة تقسيم عددي، وخوارزميات حل، ومعايير تقارب.

النموذج المفاهيمي مجموعة الافتراضات والخوارزميات والعلاقات والبيانات التي تصف الواقع محل الاهتمام، والتي يمكن منها إنشاء النموذج الرياضي وتجربة التصديق.

الثقة احتمال وقوع تقدير عددي ضمن مجال محدد.

الخطأ نقص يمكن التعرف عليه في أي مرحلة أو نشاط من النمذجة والمحاكاة ولا ينتج من نقص المعرفة.

الإخلاص الفرق بين نتائج المحاكاة والتجربة.

غير القابل للاختزال chap:trustregion التغير الملازم للنظام الفيزيائي الجاري نمذجته.

النموذج الرياضي المعادلات الرياضية والقيم الحدية والشروط الابتدائية وبيانات النمذجة اللازمة لوصف النموذج المفاهيمي.

النموذج وصف مفاهيمي/رياضي/عددي لسيناريو فيزيائي محدد، يتضمن بيانات هندسية ومادية وابتدائية وحدية.

مراجعة النموذج عملية تغيير الافتراضات الأساسية أو البنية أو تقديرات المعاملات أو القيم الحدية أو الشروط الابتدائية للنموذج لتحسين الاتفاق مع النتائج التجريبية.

التنبؤ استخدام نموذج لاستشراف حالة نظام فيزيائي تحت ظروف لم يصدق النموذج عليها.

القابل للاختزال chap:trustregion نقص محتمل ينتج من نقص المعرفة، مثل معلومات غير مكتملة، أو فهم ضعيف للعملية الفيزيائية، أو تعريف غير دقيق أو وصف غير محدد لأنماط الفشل، إلخ.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.2 إنشاء الشبكة

21 بعد تناول صياغة العناصر (اللاخطية) والنماذج التأسيسية اللاخطية، أصبحنا مستعدين لدمجهما ومعالجة كيفية نمذجة الإطارات فعلياً، أي *إنشاء الشبكة*. وهي في معظمها علم مع جرعة صغيرة من الفن.

22 تؤثر الشبكة في دقة المحاكاة وتقاربها وسرعتها.

23 تجمع النمذجة بذلك نموذجاً *رياضياً*، أي الشبكة وخصائص المادة والحمل، من أجل تحليل العناصر المحددة اللاحق. ومن المهم الإشارة فوراً إلى أنه لا توجد طريقة واحدة "صحيحة" لنمذجة المنشأ، لأن النمذجة علم وفن معاً.

24 قبل البدء ينبغي أن نسأل أنفسنا بعض الأسئلة المهمة

- دونة مجمعة أم موزعة؟
- انزلاق الترابط؟
- تحليل دفع تدريجي أم تحليل عابر
- ما مقدار اللاخطية المتوقعة؟ حتى الذروة؟ أم بعد الذروة؟
- 2D أم 3D؟
- مقطع طبقي أم قوى مقطعية؟
- حالة حد؟
- التخميد: Rayleigh و/أو تباطؤي؟
- تحليل منفرد صارم أم تحليلات متعددة تقريبية (Monte-Carlo)؟

25 إنها دائماً *موازنة* بين:

- التوقعات وقيود الزمن/الكلفة.
- فهمنا للمسألة وللتحليل اللاخطي.
- البرمجيات/الخبراء المتاحون.
- جودة النتائج المتوقعة.

62.2.1 العناصر الكبيرة

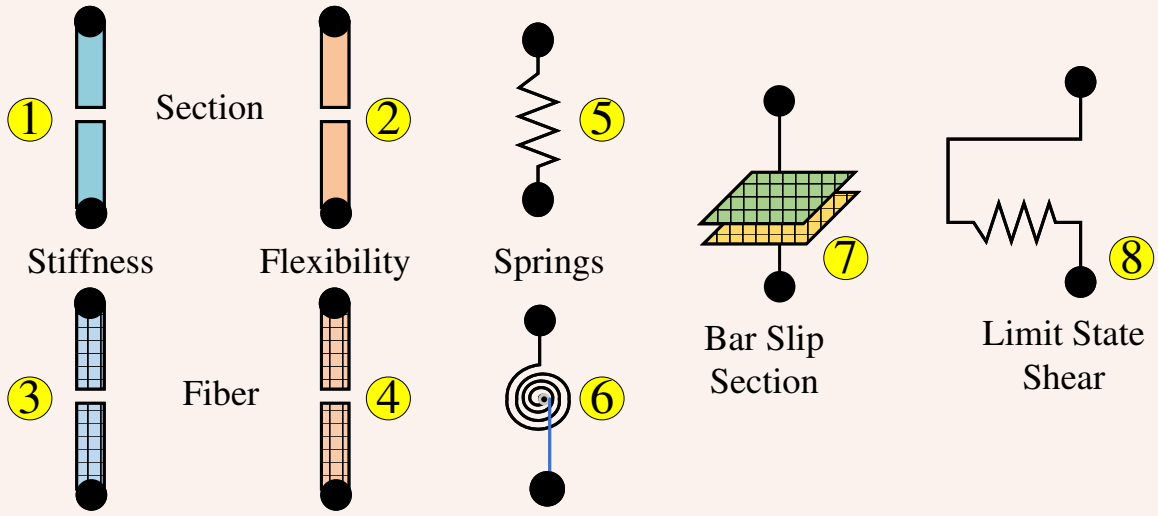
26 بخلاف العناصر المحددة القائمة على الأوساط المتصلة، يجب في سياق التحليل اللاخطي استخدام العناصر في أزواج (أو حتى ثلاثيات) لمجرد نمذجة وصلة أو كمرة–عمود. ويشار إلى توليفة هذه العناصر المنفردة (المصاغة في الفصل 60) باسم "العناصر الكبيرة"[1].

27 العناصر الأساسية المتاحة لنا هي المبينة في الشكل 62.4. وهي "الذرات" التي يمكن جمعها في "جزيئات" تمثل المكونات الإنشائية.

28 يجب تذكر أن الشاغل الرئيس لسلامة الأرواح هو الأعمدة.

[1] في العناصر المحددة الكلاسيكية، العنصر الكبير هو تجميع عدة عناصر في عنصر واحد، وتختزل درجات الحرية الداخلية إلى عدد قليل للاتصال ببقية الشبكة. أما هنا فلن يحدث تكثيف لدرجات الحرية، ومن ثم قد توجد عدة درجات حرية (داخلية) عند العقدة.

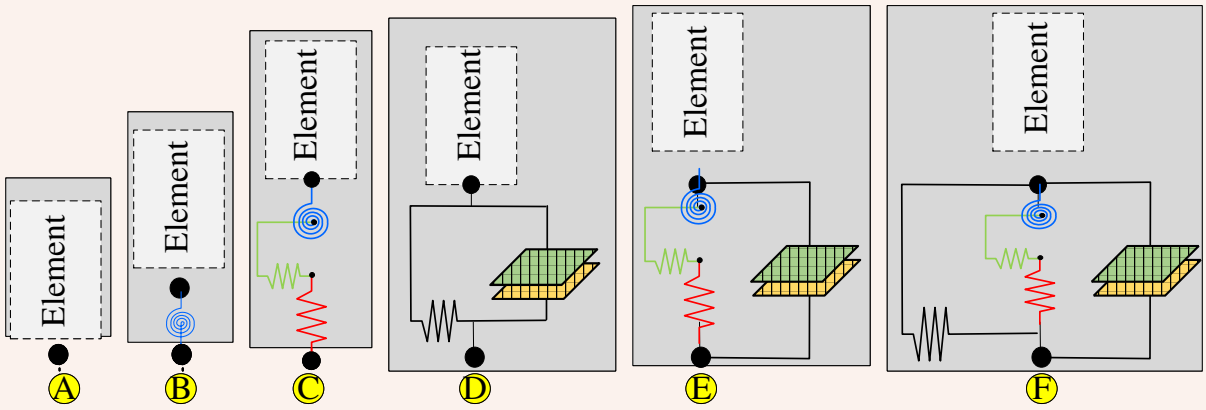
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 62.4: العناصر المحددة للتحليل اللاخطي للإطارات

29 تتسم وصلات نهايات الأعمدة بأهمية قصوى. وتبين في الشكل 62.5. وهي تتدرج من الأبسط (أي لا شيء) إلى الأعقد (نوابض وعناصر فرعية لحالة الحد).

30 في نموذج الدونة المجمعة، يتضمن العنصر متعدد المحاور ذو الطول الصفري نماذج المادة ويسمح باقتران درجات الحرية، ولا يتطلب إلا إدخال خصائص مادة العمود وخصائصه الهندسية. يوسع الجدول 62.1 شرح



شكل 62.5: وصلة نهاية العمود

الشكل.

31 قد تكون عناصر الكمرة–العمود بدورها بسيطة كنوع عنصر منفرد، أو قد تتكون من تجميع عناصر (عادة لمعالجة تمركز الضرر اللدن، أي المفصل اللدن).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 62.1: وصلات الأعمدة

	A	B	C	D	E	F
مفصل بسيط	✓	✓	✓	✓	✓	✓
نابض دوراني		✓	✓		✓	✓
نابضان دوراني & انتقالي			✓		✓	✓
قص حالة الحد				✓		✓
انزلاق الترابط					✓	✓

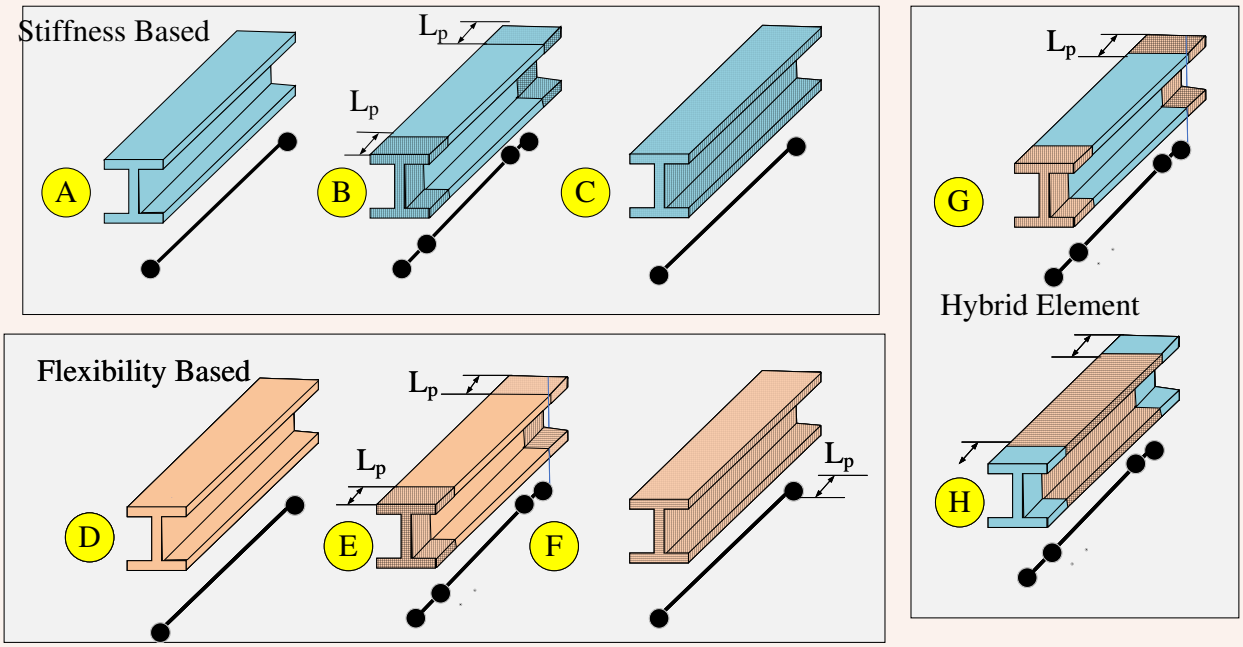
32 يبين اقتران الوصلات (الشكل 62.1) والعناصر (الشكل 62.6) في الجدول 62.2.

جدول 62.2: توافق الوصلة–العنصر

كمرة–عمود	A	B	C	D	E	F	G	H
الوصلات	1	1|3	3	2	2|4	4	[3|1],[4|2]	[4|2],[3|1]

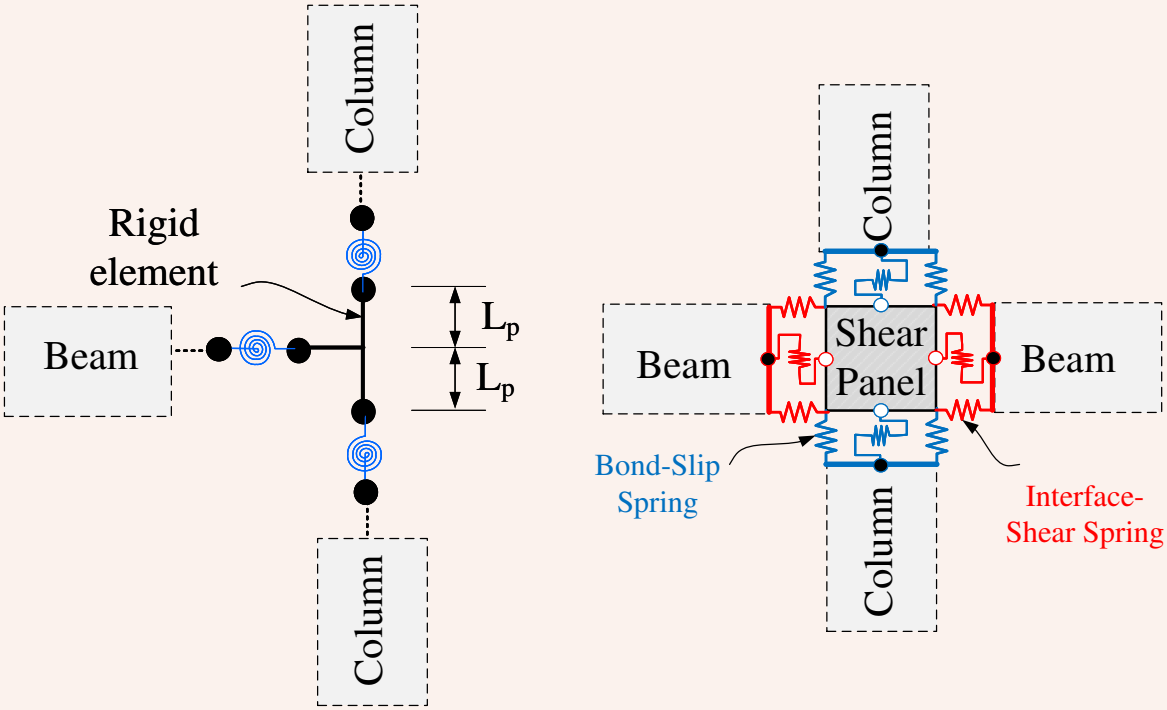
33 بالنسبة إلى الوصلات، لا يمكن ربط عناصر ذات طول صفري بعضها ببعض. كذلك يمنع الربط المباشر للعناصر تشوه القص والدوران المستقلين للوصلة (أي إنه اتصال صلب). وتبين الترتيبات الممكنة في الشكل 62.7.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 62.6: عناصر الكمرة أو العمود

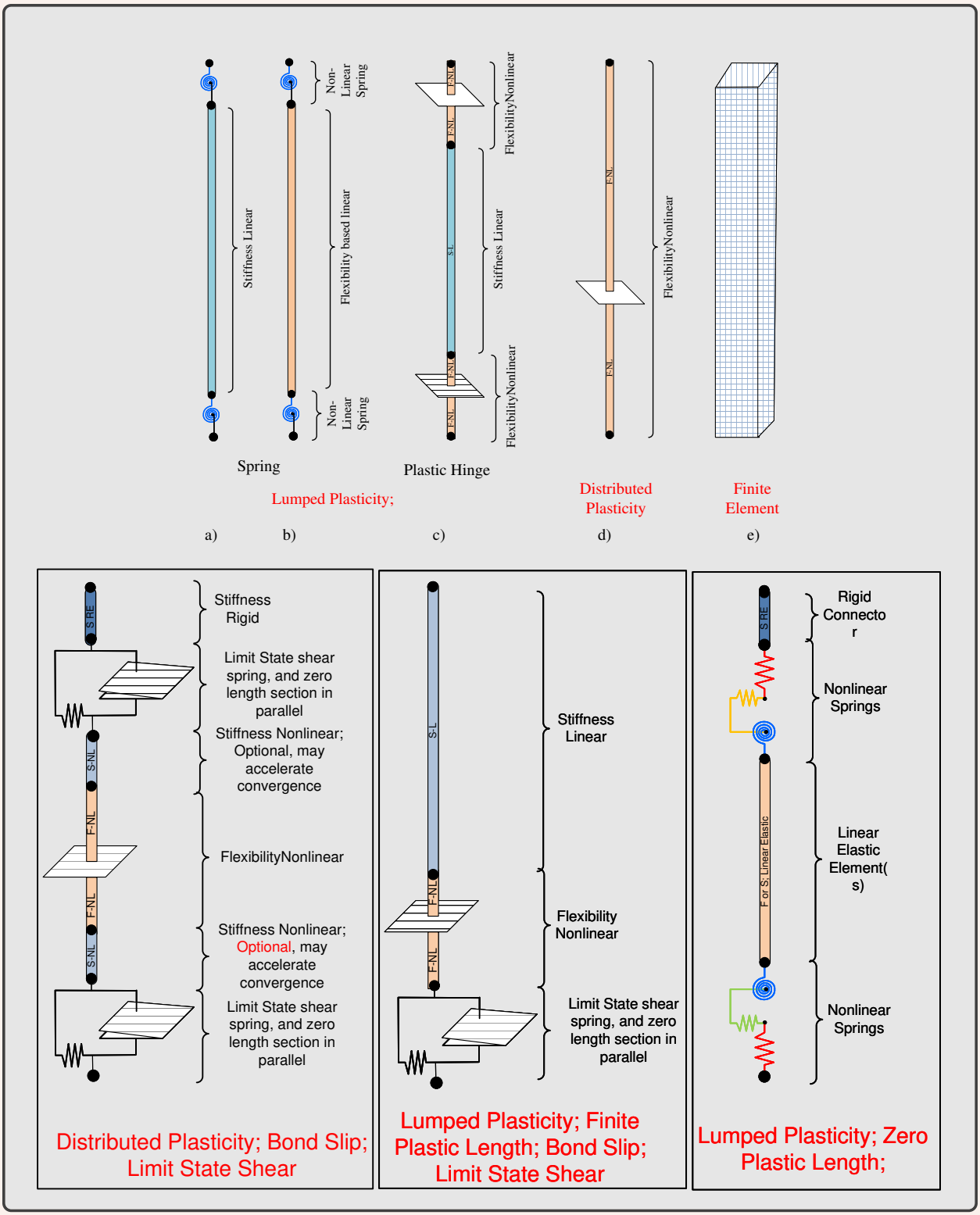
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 62.7: وصلات العمود–الكمرة

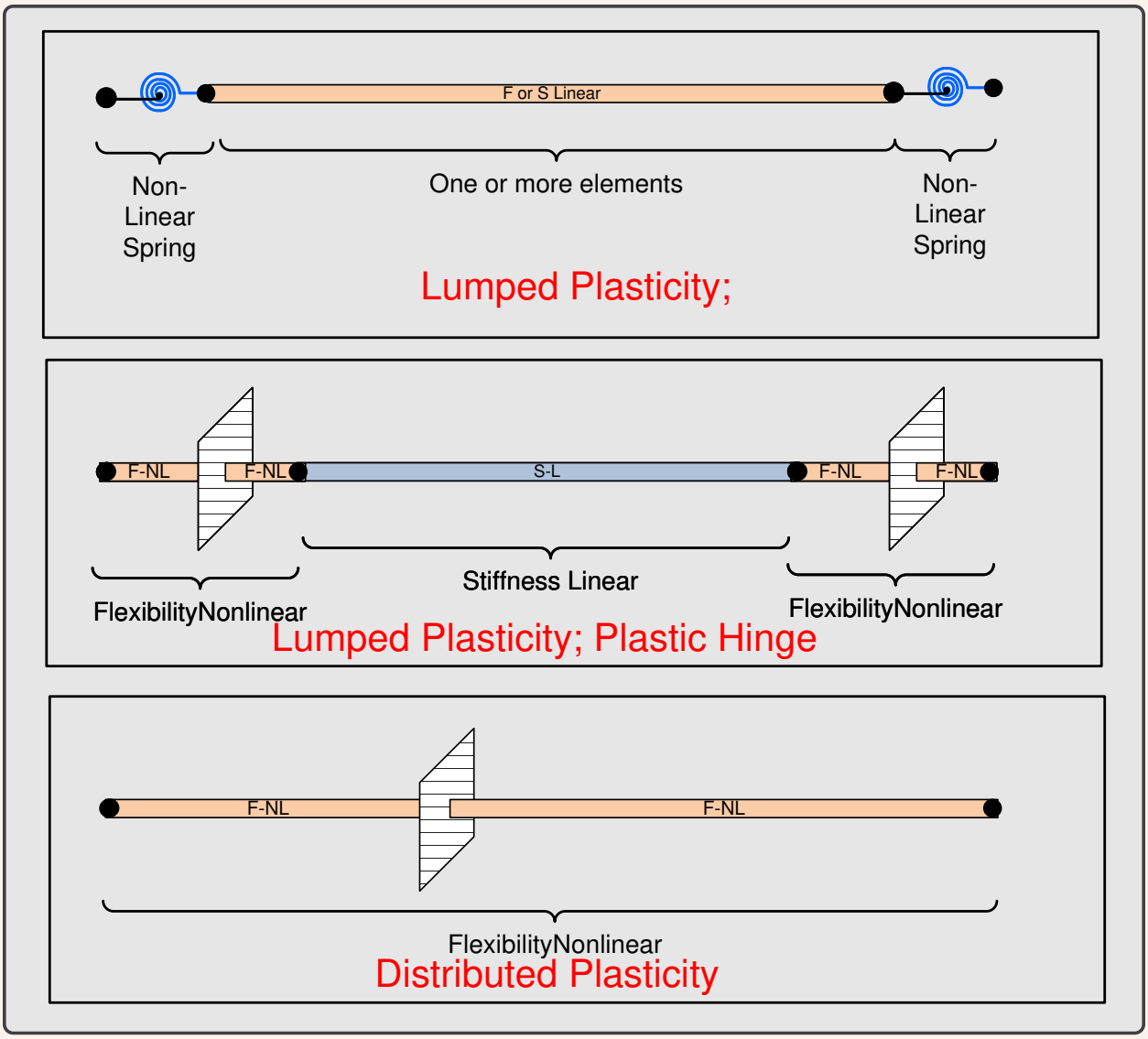
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.2.1.1 مثال 62.1: نمذجة العمود



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.2.1.2 مثال 62.2: نمذجة الكمرة



62.2.2 المقطع العرضي

34 تكتسب نمذجة المقطع العرضي أهمية خاصة في الدونة الموزعة. وفي التحليل ثنائي الأبعاد (2D) نشير إلى الطبقات، وفي التحليل ثلاثي الأبعاد (3D) نشير إلى الألياف.

35 ينبغي أن يكون واضحاً أن موضع z للطبقة في 2D غير مؤثر (ولا يلزم تحديده)، الشكل 62.8.

36 ينبغي أن نميز بين

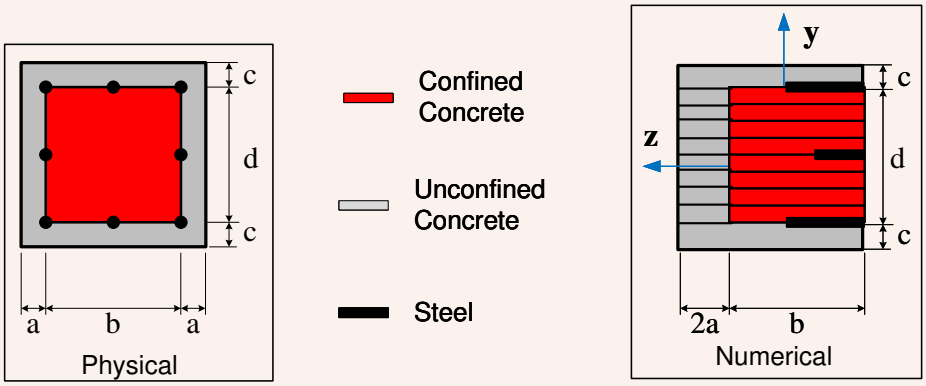
- الخرسانة غير المحصورة
- الخرسانة المحصورة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- التسليح

لأن لكل منها خصائص إجهاد–انفعال مختلفة، الشكل 61.12.

37 لاحظ إمكان وجود عدة طبقات عند المناسيب y نفسها.



شكل 62.8: نمذجة المقطع العرضي إلى طبقات

62.2.3 "اختر وثبّت"

38 في العناصر المحددة القائمة على الأوساط المتصلة، يتعايش نوعان من العناصر على الأكثر: الوسط المتصل والوصلة.

39 أما في تحليل الإطارات فالأمور أعقد كثيراً، إذ يمكن مزج أنواع مختلفة من العناصر في "عنصر كبير" لتحقيق النماذج المطلوبة.

40 باستخدام مكتبات العناصر والوصلات السابقة، يمكن إنشاء تبديلات مختلفة لإطار

41 يمكن تعريف جميع النماذج من الجدول 62.3.

جدول 62.3: خيارات نمذجة "اختر وثبّت"

الكمرة	الوصلة	العمود، الشكل 62.5		الشرط الحدي
الشكل 62.6	الشكل 62.7	العلوي	السفلي	الشكل 62.7

62.2.4 ملاحظات ختامية

42 بعض الملاحظات

1. في الدونة المجمعة، يمكن أن يكون النابض الدوراني لاخطياً أو مرناً–لدناً مثالياً (EPP)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. إذا كان متوقعاً حدوث تشوه لاخطي مفرط في نموذج الدونة الموزعة، فينبغي إضافة عناصر لاخطية قائمة على الصلابة عند كل نهاية.

43 يستخدم العنصر القائم على المرونة دائماً تقريباً مع العناصر الطبقية (ويمكن أيضاً تعريفه بدلالة قوى المقطع (N_x وM_z)).

3. عادة لا ندرج انزلاق الترابط للكمرات.
4. إذا أريدت نمذجة انزلاق الترابط، يمكن وضع عنصر مقطعي ذي طول صفري على التوازي مع العنصر ذي الطول الصفري.
5. في حالة اللاخطية الطفيفة، يكفي عنصر مرونة واحد، لكن يلزم ما لا يقل عن 3-4 عناصر قائمة على الصلابة.
6. للعناصر القائمة على الصلابة استخدم ثلاث نقاط تكامل (Gauss)، أما لعناصر المرونة فينبغي استخدام خمس نقاط تكامل (Gauss-Lobatto التي تتضمن نقطة تكامل عند كل نهاية).
7. الاختيار بين العنصر القائم على الصلابة أو المرونة ليس واضحاً.

62.3 تحديد معاملات التدهور

43 معاملات إدخال الدونة الموزعة (مقاطع الألياف) هي المعاملات المرتبطة عادة بمنحنى الإجهاد–الانفعال. ويمكن عموماً استنتاج المعاملات من مقاومة الخرسانة للضغط ومعامل المرونة.

44 ينبغي أن يستطيع نموذج الدونة المجمعة محاكاة آثار التفاعل المحوري–الانحنائي، وسلوك تشقق الخرسانة، وتقسية الشد، وغيرها من آثار انتشار الدونة بصورة صريحة. ويمكن تمثيل معظم هذه الآثار بعلاقات $P-\Delta$ أو $M-\theta$ الفريدة التي تشكل "بصمة" تصميم عمود معين، ومن ثم تمثل "معاملات تدهور" العنصر.

45 لأن هذه المنحنيات فريدة لكل ترتيب كمرة–عمود، يجب تحديد بصمتها. وهناك احتمالان، الجدول 62.4:

1. المعايرة
2. قاعدة البيانات

جدول 62.4: قياس التدهور

الرسومات	المعامل العددي	الطريقة
نعم	لا	المعايرة
لا	نعم	قاعدة البيانات

46 لأن الأعمدة أكثر العناصر أهمية لاستقرار المباني أثناء الزلازل، فعادة لا تعاير الكمرات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.3.1 المعايرة

47 تتضمن المعايرة

1. البحث في المراجع عن كمرة–عمود مماثلة (في الأبعاد والتسليح وخصائص الخرسانة) لتلك الجاري تحليلها، مع نتائج اختبارات مختبرية منشورة. لاحظ أن هذه البيانات لا تتضمن قيم الصلابة المقابلة (فهذه ترد منفصلة في قواعد البيانات، §62.3.2).
2. إجراء عدد من المحاكاة العددية و"ضبط" معاملات الإدخال حتى يصبح المنحنى التنبؤي قريباً بدرجة مرضية من المنحنى التجريبي.

48 ثم "تضبط" معاملات النموذج أساساً بحيث تكون الاستجابة التنبؤية أقرب ما يمكن إلى الاستجابة المحددة تجريبياً.

49 من الواضح أن مثل هذا التحديد "اليدوي" قد يستغرق وقتاً طويلاً وقد لا ينتج معاملات قريبة من المثلى. ويمكن أتمتة العملية وتحسينها بنهج تحديد المعاملات الموضح أدناه.

62.3.1.1 تحديد المعاملات

50 توصف هذه الطريقة بالتفصيل في الفصل 64 لأنها قابلة للتطبيق على موضوعات أخرى يناقشها هذا الكتاب.

62.3.2 قاعدة بيانات معاملات النمذجة

62.3.2.1 Peer/Berry

51 من بدائل المعايرة تحديد قواعد بيانات تسرد مواصفات الأعمدة ومعاملات التدهور المقابلة. ومن أكثرها استخداماً (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004).

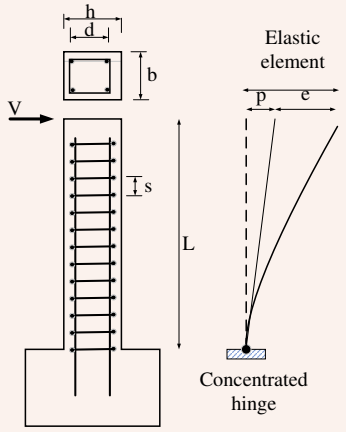
52 طور Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004 قاعدة بيانات واسعة الاستخدام للمباني الإطارية. وتحتوي على نتائج منشورة لاختبارات دورية استاتيكية ورتيبة لعدة مئات من عناصر الكمرة–العمود الخرسانية المسلحة. وتورد قاعدة البيانات لكل اختبار هندسة العمود وتسليحه وخصائص مواده وتاريخ القوة–الإزاحة ونمط الفشل الحاكم وغيرها من المعلومات ذات الصلة.

53 تورد جميع البيانات بدلالة ترتيب كابولي مكافئ، كما يبين الشكل 62.9. وبالنسبة إلى الأعمدة المختبرة بانحناء مزدوج، يحول Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004 العمود إلى عمود مكافئ بافتراض نقطة انقلاب ثابتة تقع عادة عند منتصف ارتفاع العمود.

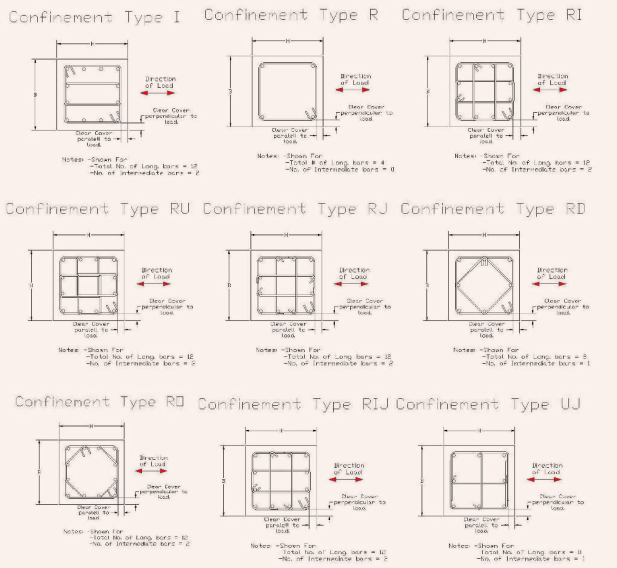
54 يمكن الوصول إلى قاعدة البيانات بسهولة عبر الويب، الشكل 62.11.

62.3.2.1.1 خصائص العمود

55 توضح الجداول المأخوذة من (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004) مجموعة البيانات الموجودة عادة في هذه القاعدة وقواعد البيانات المماثلة (الجداول 62.5-62.7).

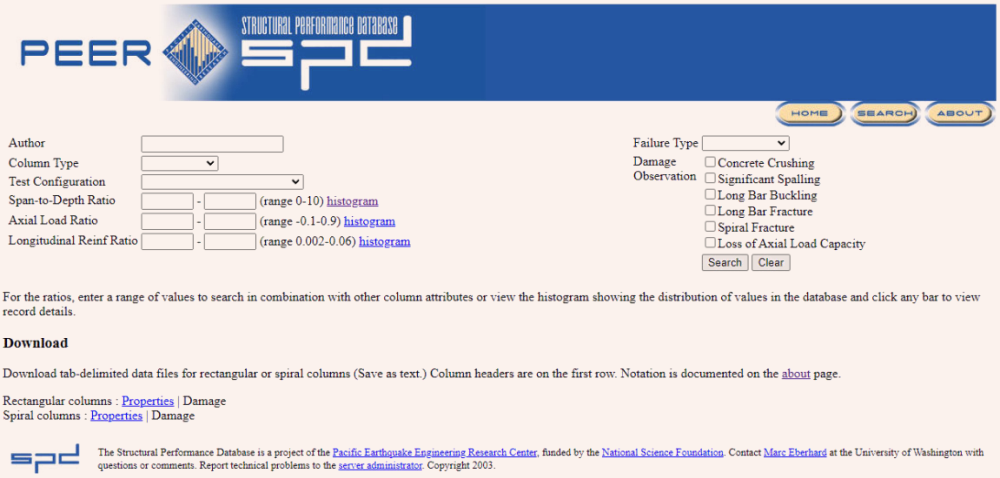


شكل 62.9: نموذج كابولي مثالي لكمرة–عمود خرسانية مسلحة (Haselton **andothers,** 2016)



شكل 62.10: أنواع الحصر (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 62.11: واجهة المستخدم الرسومية لقاعدة بيانات الأداء الإنشائي Peer (Berry, Parrish **and** Eber-hard, 2004)

جدول 62.5: خصائص المادة

نوع العمود	وصف الخاصية	الرمز	المادة
R, S	مقاومة الضغط المميزة للخرسانة (MPa)	f'_c	الخرسانة
S	إجهاد خضوع التسليح الطولي (MPa)	f_{yl}	التسليح الطولي
S	مقاومة الفولاذ القصوى للتسليح الطولي (MPa)	f_{su} طولي	
R	إجهاد خضوع القضبان الطولية الركنية (MPa)	f_{yl} ركن	
R	إجهاد خضوع القضبان الطولية الوسطية (MPa)	f_{yl} وسطية	
R	مقاومة الفولاذ القصوى للقضبان الطولية الركنية (MPa)	f_{su} ركن	
R	مقاومة الفولاذ القصوى للقضبان الطولية الوسطية (MPa)	f_{su} وسطية	
R, S	إجهاد خضوع التسليح العرضي (MPa)	f_{yt}	التسليح العرضي
R, S	مقاومة الفولاذ القصوى للتسليح العرضي (MPa)	f_{su} عرضي	

جدول 62.6: تصنيف المقطع العرضي

الكود	شكل المقطع العرضي	الرمز
2	مثمن	O
0	دائري	C
3	مربع	S

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 62.7: أكواد نمط الفشل

الكود	الفشل
1	انحناء
2	قص
3	انحناء–قص

جدول 62.8: هندسة العمود

نوع العمود	الوصف	الرمز	
R, S	عمق العمود (mm)	H أو D	الأبعاد الكلية للعمود
R	عرض العمود (mm)	B	
R, S	مساحة المقطع العرضي للعمود (mm^2)	المساحة (A_g)	
R, S	طول الكابولي المكافئ (mm)	L	
R, S	عدد قضبان التسليح الطولي	العدد الكلي للقضبان #	التسليح الطولي
S	قطر قضبان التسليح الطولي (mm)	قطر القضيب	
R	قطر القضبان الطولية الركنية (mm)	قطر قضيب الركن	
R	قطر القضبان الطولية الوسطية (mm)	قطر القضيب الوسطي	
R, S	طول وصلة التسليح الطولي	Lsplice	
R, S	نسبة التسليح الطولي (محسوبة).	نسبة التسليح	
R, S	قطر التسليح العرضي (mm)	قطر القضيب	التسليح العرضي
R, S	تباعد التسليح العرضي (mm)	التباعد	
R, S	نسبة التسليح العرضي الحجمية (الموردة)	النسبة الحجمية العرضية	
R, S	عدد قضبان القص العرضية في المقطع العرضي	Nv	
R	المسافة من السطح الخارجي للعمود إلى الحافة الخارجية للتسليح العرضي (mm)	الغطاء الصافي (مستطيل)	
S	المسافة من السطح الخارجي للعمود إلى مركز التسليح العرضي (mm)	الغطاء الصافي (حلزوني)	

جدول 62.9: تفاصيل الحصر

كود الحصر	الوصف	الرمز
1	روابط متشابكة	I
2	روابط مستطيلة (حول المحيط)	R
4	روابط مستطيلة ومتشابكة	RI
8	روابط مستطيلة وقضبان على شكل U	RU
6	روابط مستطيلة بخطافات J	RJ
3	روابط مستطيلة وقطرية	RD
7	روابط مستطيلة وثمانية الأضلاع	RO
5	روابط مستطيلة ومتشابكة، بخطافات J	RIJ
9	قضبان على شكل U بخطافات J	UJ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 62.10: تفاصيل الحصر

كود الحصر	الوصف
C	كابولي
DC	انحناء مزدوج
DE	مزدوج الطرفين
CFB	قاعدة مرنة
HH	رأس مطرقة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.3.2.1.2 ملخص مقاومات الانحناء

56 يرد ملخص لمقاومات الانحناء المحسوبة في الجدول 62.11

جدول 62.11: ملخص اختبارات الأعمدة المستطيلة المسلحة (Berry, Parrish **and** Eberhard, 2004)

رقم الاختبار #	المرجع	تعيين العمود	ملاحظات	M_{max} kN-m)	$\frac{M_{max}}{M_{ACI}}$	V_{max} (kN)	Δ_y (mm)	نمط الفشل
1	(Gill et al. (1979	No. 1		838	1.22	657	7.12	1
2	(Gill et al. (1979	No. 2		953	1.05	764	7.13	1
3	(Gill et al. (1979	No. 3		817	1.20	642	4.85	1
4	(Gill et al. (1979	No. 4		903	1.44	697	4.09	1
5	(Ghee et al. (1981	No. 3	120mm-75mm-تباعد القضبان 120mm	337	1.24	192	9.61	1
6	(Ghee et al. (1981	No. 4	120mm-75mm-تباعد القضبان 120mm	298	1.14	169	12.19	1
7	(Soesian, et al. (1986	No. 1		354	1.17	200	10.36	1
8	(Soesian, et al. (1986	No. 2		481	1.18	279	9.16	1
9	(Soesian, et al. (1986	No. 3		474	1.17	277	8.77	1
10	(Soesian, et al. (1986	No. 4		457	1.19	265	9.59	1
11	(Zahn et al. (1986	No. 7		398	1.35	213	11.88	1
12	(Zahn et al. (1986	No. 8		554	1.44	269	10.27	1
13	(Watson and Park (1989	No. 5		535	1.42	292	8.09	1
14	(Watson and Park (1989	No. 6		528	1.41	295	6.19	1
15	(Watson and Park (1989	No. 7		525	1.75	293	4.02	1
16	(Watson and Park (1989	No. 8		523	1.81	295	4.16	1
17	(Watson and Park (1989	No. 9		602	2.08	310	4.76	1
18	(Tanaka and Park (1990	No. 1	لُحمت أطواق التسليح العرضي	290	1.14	167	13.81	1
19	(Tanaka and Park (1990	No. 2		291	1.14	168	13.04	1
20	(Tanaka and Park (1990	No. 3		302	1.18	175	11.37	1
21	(Tanaka and Park (1990	No. 4		292	1.15	170	12.35	1
22	(Tanaka and Park (1990	No. 5		704	1.15	386	13.55	1
23	(Tanaka and Park (1990	No. 6		717	1.17	409	11.96	1
24	(Tanaka and Park (1990	No. 7		1070	1.34	588	9.68	1
25	(Tanaka and Park (1990	No. 8		1090	1.36	619	8.39	1
26	(Park and Paulay (1990	No. 9		727	1.21	393	10.71	1
27	(Arakawa et al. (1982	No. 102	مسند مرن	60	1.15	153	3.78	1
28	(Nagasaka (1982	HPRC10-63	الغطاء مقاس من الرسم	27	1.02	87	2.74	3
29	(Nagasaka (1982	HPRC19-32	الغطاء مقاس من الرسم	34	1.08	111	1.94	3
30	(Ohno and Nishioka (1984	L1	الغطاء مقاس من الرسم	201	1.30	119	9.49	1
31	(Ohno and Nishioka (1984	L2	الغطاء مقاس من الرسم	186	1.20	111	9.05	1
32	(Ohno and Nishioka (1984	L3	الغطاء مقاس من الرسم	172	1.11	104	9.79	1
33	(Ohue et al. (1985	2D16RS	الغطاء مقاس من الرسم، فشل انشطار-ترابط	41	1.08	98	4.55	3
34	(Ohue et al. (1985	4D13RS	الغطاء مقاس من الرسم، انشطار-	44	1.01	108	4.59	3

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

62.3.2.1.3 مثال

57 يقدّم Haselton **andothers,** 2008 مثالاً على استخدام قاعدة بيانات PEER، إذ بحث عن عمود-كمرة يحقق المعايير الآتية،

(تتطلب معادلة ACI 318-05 رقم 21-4 أن تكون $\rho_{sh} > 0.0075$ (0.006) $< \rho_{sb}$ (نسبة مساحة الحصر)

$$\frac{P}{A_g} f_c' < 0.30$$

$$f_c' < 40\text{MPa}$$

ونتج عن ذلك 30 اختباراً تجريبياً يحقق المعايير، وهي مبينة في الجدول 62.12.

62.3.2.2 Stanford/Lignos

58 طوّر Lignos **and** Krawinkler, 2013 ثلاث قواعد بيانات لنمذجة المكونات الإنشائية:

الكمرات الفولاذية ذات المقطع W: تتضمن قاعدة بيانات المقاطع الفولاذية W عدد 316 عينة. ومعظم هذه العينات كمرات ذات أجنحة عريضة (W أو H) تتراوح من W43×13 إلى W36×300. ويتمثل نمط التدهور الأساسي للتجميعات الفولاذية الفرعية المجموعة في الانبعاج الموضعي والانبعاج الالتوائي الجانبي، لأن التركيز ينصب على السلوك الدوري لوصلات الكمرة بالعمود بعد زلزال نورثريدج، المستخدمة على نطاق واسع في المنشآت الفولاذية الحديثة. وتشمل أربع وخمسون عينة كمرات تفشل بسبب كسر مبكر (غير مطيل) عند الوصلات. ولا تدخل العينات التي تفشل بالكسر الهش عند الوصلات في المناقشة التالية، لأن التركيز ينصب على وصلات الكمرة بالعمود التي تتدهور بطريقة مطيلة.

الأعمدة الفولاذية الأنبوبية المجوفة المربعة طُورت 120 نقطة بيانات تجريبية لأعمدة HSS (44 اختباراً رتيباً و76 اختباراً دورياً). وقد تعرضت هذه الأعمدة لحمل محوري مقترن بعزوم انحناء رتيبة أو دورية. وتتراوح نسبة N المطبق إلى حمل الخضوع المحوري $N_y (N/N_y$ للعينات المجموعة من 0 إلى 0.60. وتتراوح نسب عمق العمود D إلى السمك t، أي (D/t)، في مجموعة البيانات من 18 إلى 100. ويتراوح إجهاد الخضوع f_y لأعمدة HSS المجموعة من 276 إلى 500 MPa.

كمرات الخرسانة المسلحة: لم تُدرج في مجموعة البيانات إلا التجميعات الفرعية التي تشمل كمرات تفشل بالانحناء. وشملت قاعدة البيانات عينات كابولية، ومزدوجة الانحناء، ورأس مطرقة، وثابتة الطرف.

59 تحتوي قواعد بيانات المكونات الإنشائية الثلاث جميعها على المعلومات الآتية:

البيانات الوصفية: هندسة التشكيل، وخصائص المواد المقاسة، وتفاصيل البلاطة (في حالة العينات المركبة)، وتوزيع التسليح وتفاصيله (للخرسانة المسلحة)، إلخ.

مقتطفات التقارير التي تتضمن ملخصاً لاختبارات التجميع الفرعي و/أو المكونات.

النتائج المبلّغ عنها (أي القياسات والملاحظات كما وردت في وثائق الاختبار)، بما في ذلك السجلات المرقمنة لمخططات التخلف الهستيري العالمية للحمل والإزاحة.

البيانات المستنتجة بصيغة رقمية (أي المعلومات المستنتجة من البيانات الوصفية والبيانات المبلّغ عنها بغرض معايرة النماذج التحليلية)، بما في ذلك السجلات المرقمنة لمخططات التخلف الهستيري المستنتجة للعزم والدوران، وقص منطقة اللوحة V_{pz} مقابل تشوه القص γ للتجميعات الفرعية

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 62.12: نتائج دراسة المعايرة لـ 30 اختباراً تجريبياً (Haselton **andothers**, 2008)

	الخصائص الفيزيائية للعمود					البيانات المعايرة					المقارنة مع Fardis				
رقم الاختبار (قاعدة بيانات Eber- (hard	$P/A_g f'_c$	P/P_b	ρ_{sh}	s (mm)	f'_c (Mpa)	EI_{eff}/EI_g	EI_{stf2}/EI_g	α_s	$\theta_{cap,pl}$ (rad)*	إذا 1 لو حظت السعة*	λ	c	$\theta_{u,mono}^{pl}$ Fardis (rad)	$\theta_{cap,pl}$ محسوبة باستخدام Fardis θ_u^{pl} (rad)	$\theta_{cap,pl}$ / Fardis المعايرة
1	0.26	0.65	0.0071	80	23.1	0.008	0.25	0.47	0.01	– 0.028	0	136	1.0	0.032	0.010	0.36
6	0.21	0.55	0.0087	90	25.0	0.009	0.31	0.83	0.04	– 0.036	0	64	1.0	0.045	0.023	0.63
11	0.22	0.58	0.0067	117	28.3	0.010	0.34	0.75	0.07	– 0.078	0	74	1.0	0.046	0.024	0.31
18	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.010	0.30	0.65	0.02	– 0.083	0	114	1.0	0.050	0.028	0.33
19	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.33	0.77	0.02	– 0.069	0	89	1.0	0.050	0.028	0.40
20	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.34	1.92	0.02	– 0.065	0	41	1.0	0.050	0.028	0.42
21	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.32	1.14	0.01	– 0.073	0	159	1.0	0.050	0.028	0.38
22	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.18	0.35	0.03	– 0.038	0	132	1.0	0.075	0.053	1.41
23	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.19	0.40	0.03	– 0.070	0	145	1.0	0.075	0.053	0.76
24	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.010	0.28	0.79	0.04	– 0.050	0	105	1.0	0.057	0.035	0.69
25	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.011	0.27	0.73	0.01	– 0.046	0	127	1.0	0.057	0.035	0.75
26	0.10	0.26	0.0106	80	26.9	0.008	0.27	0.61	0.04	– 0.055	0	200	1.0	0.079	0.057	1.03
88	0.10	0.27	0.0061	76	29.1	0.010	0.34	0.55	0.05	– 0.016	0	123	1.0	0.060	0.038	2.37
90	0.10	0.27	0.0061	76	29.2	0.010	0.30	0.54	0.06	– 0.022	0	127	1.0	0.060	0.038	1.73
92	0.20	0.56	0.0061	76	29.4	0.014	0.30	0.64	0.02	– 0.019	0	82	1.0	0.052	0.030	1.58
94	0.26	0.72	0.0061	76	33.3	0.012	0.36	0.61	0.06	– 0.026	0	44	1.0	0.047	0.025	0.98
96	0.28	0.76	0.0061	76	31.0	0.010	0.43	0.67	0.01	– 0.028	0	45	1.0	0.045	0.023	0.83
الوسيط:	0.20	0.55	0.0078	76	29.2	0.011	0.27	0.50	0.04	0.08- 0.070	0.00	109	1.0	0.064	0.042	0.75
المتوسط:	0.17	0.48	0.0079	76	30.0	0.013	0.25	0.59	0.05	0.09- 0.063	0.13	106	1.0	0.065	0.043	0.80
معامل التباين:	0.45	0.45	0.21	0.24	0.16	0.32	0.32	0.59	0.76	0.37 0.46	2.59	0.39	0.00	0.27	0.41	0.57

*يمثل الدوران اللين حداً أدنى إذا لم تُلاحظ سعة قصوى (أي ميل تليين انفعالي) في البيانات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الفولاذية للكمرة بالعمود. وقد جُمعت هذه البيانات إما مباشرة من الباحثين الأفراد الذين أجروا التجربة (إذا كانت المعلومات متاحة رقمياً)، أو برقمنة مخططات التخلف الهستيري المذكورة مباشرة من التقارير التجريبية. ويمكن تنزيل مجموعة البيانات الكاملة، مع وثائق شاملة تصف رموز قواعد بيانات المكونات الإنشائية الثلاث، من مستودع NEES المركزي.

60 استُخدم لكل مجموعة بيانات نموذج معايرة للتدهور، ورُسمت دوال التوزيع التراكمي لمعاملات التدهور (باستخدام توزيع لوغاريتمي طبيعي).

62.3.2.3 UTSA/Ghannoum

61 ضمن تطوير نموذج جديد للدونة المجمعة للكمرة-العمود (§61.3.4)، أنشأ Suselo, 2021, Chapter 3 قاعدة بيانات UTSA التجريبية لأعمدة الخرسانة المسلحة للتحقق من نموذجهما.

62 من الخصائص المثيرة للاهتمام (وربما الفريدة) لهذه القاعدة طريقة تنسيقها. فهي تتكون من جزأين: أ) بيانات أولية (أي البيانات الخام المجموعة «كما هي»)، وب) بيانات ثانوية محسوبة ومستخرجة تحتوي على خصائص مشتقة من البيانات الأولية، إما محسوبة من معاملين أو أكثر (مثل نسبة الحمل المحوري)، أو مستخرجة من بيانات الحمل–الإزاحة.

62.3.2.4 العناصر المحددة المتصلة/Dolati

63 أُجريت معظم التجارب على الأعمدة الخرسانية، التي تُشتق منها نماذج قواعد البيانات، باستخدام بروتوكولات تحميل دوري معكوس بالكامل، ولم تُختبر سوى نسبة صغيرة من الأعمدة وفق بروتوكولات تحميل مختلفة. وتحتوي قاعدة بيانات أعمدة UTSA السابقة (وربما أصبحت الآن الأكبر) على 689 اختباراً للأعمدة، لم يستكشف منها سوى ثمانية بروتوكولات تحميل غير دورية معكوسة بالكامل. لذلك، ورغم أن النماذج المتاحة حالياً تلتقط آثار خصائص العمود وشروطه الحدية، فإنها لا تلتقط أثر تغير تواريخ التحميل على مقاومات الأعمدة.

64 لسد الفجوات في البيانات التجريبية المتعلقة بأثر تواريخ التحميل على مقاومات الأعمدة الخرسانية وقدرات تشوهها، أجرى Dolati, Matamoros **and** Ghannoum, 2023 تحليلات عناصر محددة متصلة.

65 عُيّرت نماذج العناصر المحددة المتصلة اللاخطية بالاستناد إلى اختبارات تجريبية لسبعة أعمدة تعرضت لبروتوكولات تحميل جانبي مختلفة. وأظهرت الأعمدة المختارة أنماط تدهور في المقاومة الجانبية ناتجة عن الانحناء والقص. واختيرت الأعمدة لتغطي نطاقاً من إجهادات القص، والمقاطع العرضية، والأحمال المحورية، وتباعد التسليح العرضي ونسبه، ونسب التسليح الطولي. وتعرضت جميع الأعمدة المختبرة لانهيار محوري بعد تراكم الضرر الناتج من التحميل الجانبي. ثم أخضعت نماذج الأعمدة المعايرة لسلسلة من بروتوكولات التحميل، شملت الدفع الرتيب وبروتوكولات التحميل الدوري المعكوس بالكامل بأعداد مختلفة من الدورات. وتُناقش آثار بروتوكولات التحميل الجانبي في تطور الضرر والمقاومة وقدرات التشوه.

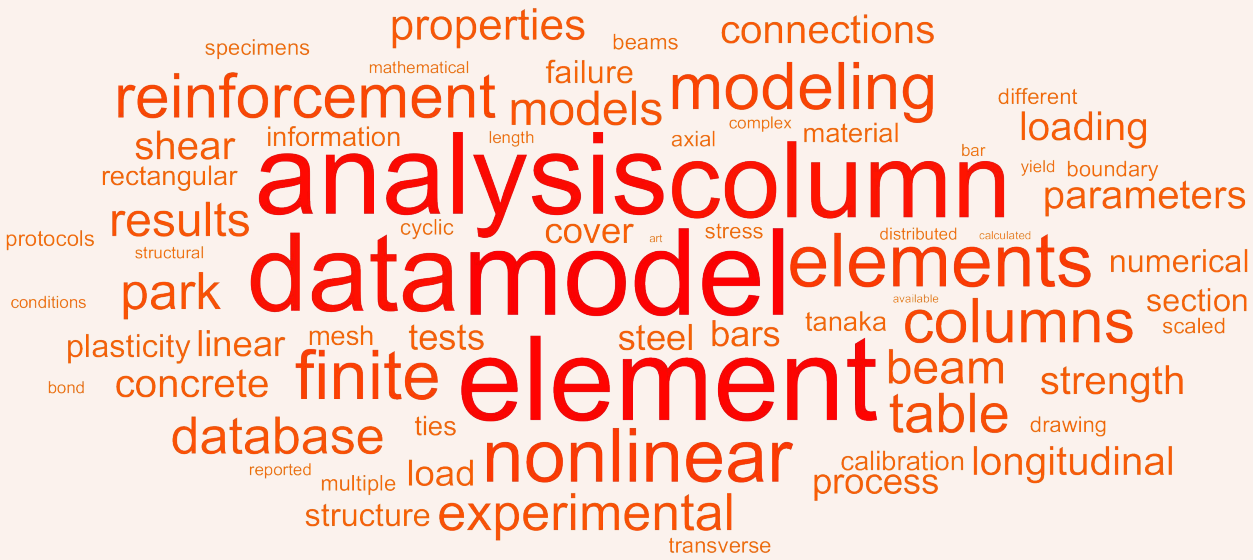
62.3.2.5 ACI-437-A

66 أنشأت ACI-437 (تقييم مقاومة المنشآت الخرسانية القائمة) مؤخراً لجنة فرعية (ACI 437-A) مهمتها إنشاء قاعدة بيانات أخرى تجمع معلومات عن بيانات الاختبارات المختبرية والميدانية معاً.

67 تشمل المعلومات المراد جمعها:

- نوع المنشأ: RC، PC، PT
- وصف العنصر: العمر، والنوع، والبحر، والعمق، والمقطع العرضي، والتسليح، ومقاومة الضغط، والسعة المتوقعة/المحسوبة
- سبب الاختبار: الانحناء، والقص، والقص الثاقب، ومعلومات خلفية أخرى
- بروتوكول الاختبار: رتيب أو CLT، ميداني أو مختبري
- التحميل والهندسة: حمل موزع، وأحمال مركزة، وبحور متعددة، إلخ.
- TLM: طريقة الحساب، ونسبة DL/LL، وTLM المطبق
- الكود: ACI 318 أو 562، وسنة النشر، ومقدار الحمل
- منشأ مُصلح أو جديد

68 بالنظر إلى تكوين اللجنة (الصناعة والأوساط الأكاديمية)، ووجودها ضمن منظمة وطنية كبيرة (ACI)، فمن المرجح أن تصبح مرجعاً قريباً.



تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فاصل: من التحليل الأمامي إلى تحديد المعلمات

يطوّر الفصلان التاليان أدوات متكاملة للتحليل الإنشائي في ظل عدم اليقين. يرسّخ الفصل 63 (*البيانات والشكوك*) كيفية تمثيل عدم اليقين القبلي في المدخلات ونشره وتحليله. أما الفصل 64 (*القرارات*) فيعكس المسألة: بالنظر إلى القياسات، ما قيم المعلمات التي تدعمها البيانات، وكيف ينبغي معايرة النماذج الحاسوبية؟

الفصل 63: التحليل الأمامي

البيانات والشكوك
|
+— جودة البيانات
|
+— تكميم عدم اليقين
| (التمثيل، النشر)
|
+— تحليل الحساسية
| (Morris، Sobol، Tornado)
|
+— الاستدلال البايزي
(القبلي، البعدي، MCMC)

الفصل 64: التحليل العكسي

القرارات
|
+— المسألة العكسية
|
+— إطار التطبيقات
|
+— متانة البيانات
| (المعالجة المسبقة بـRANSAC)
|
+— Levenberg–Marquardt
| (التقدير النقطي)
|
+— التحديد البايزي
| (التوزيع البعدي للمعلمات)
|
+— التنفيذ في MATLAB
|
+— مسارات العمل الهجينة

التكامل: يوفّر C-10-A أدوات التحليل الأمامي: تمثيل عدم اليقين القبلي، ونشره عبر النماذج، وتحديد المعلمات المهمة. ويطبّق C-10-B الطرق العكسية على مسألة تحديد المعلمات: فرز المرشحين باستخدام الحساسية، وملاءمة المعلمات للبيانات، وتكميم عدم اليقين البعدي. ويكملان معًا الدورة: عدم اليقين القبلي → النشر → الفرز بالحساسية → معايرة المعلمات → تنبؤات داعمة للقرار.

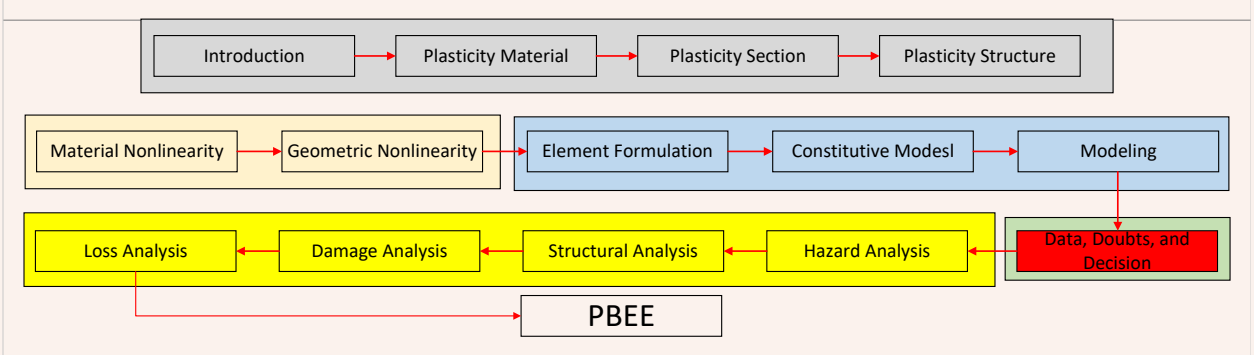
63 البيانات والشكوك: تحليل عدم اليقين والحساسية

ملخص

يطوّر هذا الفصل أدوات التحليل الأمامي اللازمة للانتقال من البيانات غير الكاملة إلى تنبؤات إنشائية قابلة للدفاع عنها. ويميّز أولاً بين التباين العشوائي، وعدم اليقين المعرفي، وخطأ القياس، وعدم تطابق شكل النموذج؛ ثم يوضح كيفية تمثيل عدم اليقين وترابطه ونشره عبر النماذج الحاسوبية. وتُعرض محاكاة مونت كارلو، وأخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق، والتقريبات الخطية وتقريبات تقدير النقاط، وتوسعات الفوضى متعددة الحدود مع افتراضاتها وحدودها.

يتناول النصف الثاني تحليل الحساسية. فتُستخدم المقاييس المحلية بتغيير عامل واحد في كل مرة، وطريقة Morris للفرز، ومؤشرات Sobol القائمة على التباين، ومخططات الإعصار، لتحديد المدخلات غير المؤكدة التي تتحكم في الاستجابة والمدخلات التي يمكن تثبيتها أو منحها أولوية أقل. ويُختتم الفصل ببيان كيف تصبح المعاملات المؤثرة مرشحة للتعيين. ثم يصوغ الفصل 64 تلك المسألة العكسية ويحلها.

63.1 مقدمة 1954
63.2 جودة البيانات ومصادر الشك 1955
63.3 تكميم عدم اليقين وتحليله 1955
63.3.1 توصيف عدم اليقين في المدخلات 1956
63.3.2 الاعتماد وأخذ العينات المترابطة 1957
63.3.3 نشر عدم اليقين 1960
63.3.4 تفسير عدم اليقين في المخرجات 1968
63.4 تحليل الحساسية 1969
63.4.1 طريقة Morris 1969
63.4.2 مؤشرات Sobol للحساسية القائمة على التباين 1974
63.4.3 مقارنة طرائق النشر والحساسية 1976
63.4.4 تحديد المتغيرات العشوائية المهمة 1976
63.4.5 مخططات الإعصار 1981
63.5 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات 1982



63.1 مقدمة

1 نادراً ما يبدأ التحليل الإنشائي بمدخلات دقيقة. فخصائص المواد تتغير داخل العنصر وعبر المنشأ؛ والأحمال والتأثيرات البيئية عشوائية؛ والقياسات ناقصة ومشوشة؛ والشروط الحدية مثالية؛ وكل نموذج حاسوبي يهمل بعض التفاصيل الفيزيائية. ولذلك فإن السؤال المحوري ليس ما إذا كان عدم اليقين موجوداً، بل ما إذا كان قد مُثّل بانضباط كافٍ لدعم القرار الجاري اتخاذه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2 يجب إبقاء ثلاث مهام منفصلة. أولاً، ينبغي فحص البيانات المتاحة من حيث الملاءمة والاتساق والانحياز والمشاهدات المفقودة والقيم الشاذة. ثانياً، يجب تمثيل عدم اليقين المتبقي ونشره عبر النموذج بحيث يصبح مدى الاستجابات المعقولة معروفاً. ثالثاً، يجب أن يحدد تحليل الحساسية المدخلات المسؤولة عن ذلك المدى. ويمنع فصل هذه المهام الخلط بين الحجم الكبير من البيانات والمعلومات الموثوقة.

3 يتناول هذا الفصل المسألة الأمامية

$$\mathbf{X} \longmapsto Y = g(\mathbf{X}),$$

حيث تُمرر متجهة المدخلات غير المؤكدة $\mathbf{X}$ عبر نموذج إنشائي إلى كمية واحدة أو أكثر من الكميات موضع الاهتمام Y. ويتناول الفصل 64 المسألة العكسية المكملة: فعند إعطاء قياسات Y، تُحدد المركبات المجهولة من $\mathbf{X}$ أو من متجهة المعاملات $\boldsymbol{\theta}$.

63.2 جودة البيانات ومصادر الشك

4 قبل تعيين توزيعات احتمالية، ينبغي للمحلل أن يميّز عدم اليقين من البيانات المعيبة. فقد تحتوي المشاهدات المتكررة على خطأ قياس عشوائي، أو انحياز منهجي، أو انجراف الحساسات، أو أخطاء نسخ، أو وحدات غير متسقة، أو قيماً محجوبة، أو فترات مفقودة. وتتطلب هذه الآثار معالجات مختلفة. فقد يُدمج الخطأ العشوائي في دالة الإمكان أو في مصفوفة تغاير القياس؛ ويتطلب الانحياز تصحيحاً أو معامل انحياز صريحاً؛ وقد تبرر مشاهدة تالفة منفردة تقديراً حصيناً؛ ولا ينبغي استبدال البيانات المفقودة بصمت من دون توثيق قاعدة الاستكمال.

5 ومن المهم بالقدر نفسه التمييز بين عدم يقين *المعاملات* وعدم *تطابق* النموذج. يعكس عدم يقين المعاملات المعرفة الناقصة بالكميات الموجودة ضمن النموذج المعتمد، مثل معامل المرونة أو ثابت زمن التدهور. أما عدم تطابق النموذج فهو الفرق بين النظام الفيزيائي وأفضل استجابة يستطيع النموذج المعتمد إنتاجها، حتى عندما تُختار معاملاته على النحو الأمثل. وقد يؤدي إجبار المعاملات على تعويض عدم تطابق منهجي في النموذج إلى ملاءمة ممتازة لكن إلى قيم معاملات مضللة فيزيائياً.

6 لذلك يسجل التحليل القابل للدفاع عنه: أصل كل مشاهدة ووحداتها؛ ودقة القياس وقابليته للتكرار؛ وأخذ العينات مكانياً وزمنياً؛ واستبعادات البيانات؛ والافتراضات المستخدمة لملء الفجوات؛ والنطاق الذي سيُستخدم فيه النموذج المعاير لاحقاً. وتصبح هذه السجلات جزءاً من نموذج عدم اليقين، لا مجرد خطوة تمهيدية غير رسمية.

63.3 تكميم عدم اليقين وتحليله

7 تختلف المصطلحات بين التخصصات. في هذا الكتاب، يدل تكميم عدم *اليقين* (UQ) على عملية التحليل الأمامي الكاملة: تحديد مصادر عدم اليقين، وتوصيف المدخلات غير المؤكدة واعتمادها المتبادل، ونشرها عبر النموذج، وتلخيص عدم اليقين الناتج في المخرجات، وتحديد المدخلات المهمة. ويدل *تحليل* عدم *اليقين*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(UA) على التفسير الموجه للقرار لتلك النتائج المنشورة. والتمييز بينهما هو تمييز في التركيز لا فصل صارم: إذ ينتج UQ معلومات عدم اليقين وينظمها، بينما يشرح UA معنى تلك المعلومات بالنسبة إلى القرار الهندسي.

جدول 63.1: المصطلحات المعتمدة في هذا الكتاب لتكميم عدم اليقين وتحليل عدم اليقين

تحليل عدم اليقين (UA)	تكميم عدم اليقين (UQ)	الجانب
تفسير عدم اليقين في مخرجات النموذج وإعداد التقارير عنه	سير العمل الكامل من توصيف المدخلات، مروراً بالنشر والحساسية، وصولاً إلى إعداد التقارير	النطاق
يستخدم نموذج المدخلات والنشر الذي أسسته دراسة UQ	النماذج الهامشية، والاعتماد، والفترات، والأدلة، وافتراضات شكل النموذج	المدخلات
الملخصات والفترات واحتمالات الذيل والمقارنات ذات الصلة بالقرار	التوزيعات، والعزوم، والكميات، واحتمالات التجاوز والفشل، ومقاييس الحساسية	المخرجات
يشرح معنى عدم اليقين المنشور بالنسبة إلى القرار الهندسي	ينتج معلومات عدم اليقين وينظمها	الدور

63.3.1 توصيف عدم اليقين في المدخلات

8 لا تكون دراسة النشر قابلة للدفاع عنها إلا بقدر جودة نموذج مدخلاتها. ويجب على المحلل تحديد مصدر كل عدم يقين، وتقرير ما إذا كان الوصف الاحتمالي مبرراً، وتحديد نطاقات أو توزيعات موثوقة، وتوثيق أي اعتماد بين المتغيرات. وينبغي إبقاء عدم يقين القياس وعدم تطابق شكل النموذج منفصلين عن التباين الفيزيائي كلما سمحت المعلومات المتاحة.

63.3.1.1 أنواع عدم اليقين

عدم اليقين العشوائي: تباين متأصل يبقى حتى مع المعرفة الكاملة، مثل تباين الحركة الأرضية من حدث إلى آخر أو التباين المكاني الحقيقي في خصائص المواد. ويُمثل عادة تمثيلاً احتمالياً، ولا يُزال بجمع مزيد من المعلومات عن تحقق معين.

عدم اليقين المعرفي: معرفة ناقصة بالنظام أو معاملاته أو بيئته. ويمكن غالباً تقليله بإجراء اختبارات إضافية أو تحسين القياسات أو النماذج الفيزيائية.

عدم يقين القياس: الخطأ العشوائي، والدقة المحدودة، وخطأ المعايرة، والانحياز في المشاهدات المستخدمة لتوصيف النموذج أو معايرته. وعادة ما يكون عدم يقين القياس معرفياً، رغم أن ضوضاء القياس المتكرر غالباً ما تُمثل احتمالياً.

عدم يقين شكل النموذج: عدم تطابق تسببه المثالية أو الآليات المهملة أو افتراضات القوانين التأسيسية أو التقسيم أو التقريبات العددية. ولا ينبغي امتصاصه تلقائياً في عدم يقين المعاملات.

عدم اليقين المختلط: تحتوي المسائل العملية عادة على عدة مصادر سابقة في آن واحد. فمثلاً، تباين الحركة الأرضية عشوائي، وعدم اليقين في توصيف الموقع معرفي، والتسارعات المسجلة تحتوي على خطأ قياس، والنموذج الإنشائي يعاني عدم تطابق في شكل النموذج.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63.3.1.2 التمثيل الرياضي

التوزيعات الاحتمالية: تكون مناسبة عندما تدعم البيانات أو المعرفة القبلية القابلة للدفاع عنها نموذجاً احتمالياً. تصف التوزيعات الهامشية المتغيرات المفردة؛ ويلزم توزيع مشترك أو نموذج اعتماد عندما تكون المتغيرات مترابطة. وتُلخص التوزيعات الشائعة في الملحق M.

الفترات والمجموعات الضبابية: مفيدة عندما تكون الحدود موثوقة لكن التكرارات أو الاحتمالات ليست كذلك. ولا تذكر الفترة إلا أن $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$. وتضيف الأوصاف الضبابية درجات عضوية، وقد تكون مفيدة للمعلومات اللغوية أو معلومات الخبراء، لكن ينبغي ألا تُفسر على أنها احتمال من دون افتراضات إضافية.

العزوم والكميات: يلخص المتوسط والتباين والتغاير والالتواء وكميات مختارة توزيعاً ما. والعزوم ملائمة للنشر الخطي، في حين تكون الكميات واحتمالات التجاوز غالباً أكثر إفادة لقرارات حالات الحد. وتُراجع العزوم الإحصائية في §M.4.1.

63.3.2 الاعتماد وأخذ العينات المترابطة

9 لا تحدد التوزيعات الهامشية نموذجاً مشتركاً لعدم اليقين. وعندما تشترك الكميات غير المؤكدة في أسباب فيزيائية أو اتجاهات مكانية أو تعرض بيئي أو عمليات قياس، يجب تمثيل اعتمادها صراحة. وقد يؤدي تجاهل الاعتماد إلى تضخيم تباين الاستجابة الإنشائية واحتمالات ذيلها أو كبحهما.

63.3.2.1 التغاير والارتباط

10 لمتغيرين عشوائيين X وY،

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big], \qquad \rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{63.1}$$

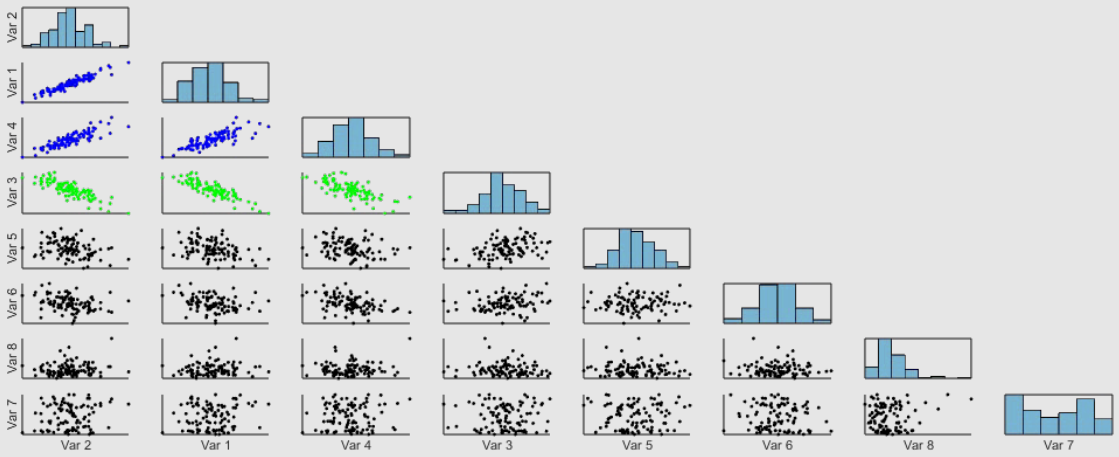
معامل الارتباط عديم الأبعاد ويتراوح بين -1 و$+1$. وتعني القيمة صفر انعدام الارتباط *الخطي*، لا الاستقلال بالضرورة. كما أن الارتباط لا يثبت السببية، ويمكن للقيم الشاذة أن تشوه بشدة معامل Pearson العادي.

63.3.2.1.0.1 مثال 63.1: مصفوفة الارتباط

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

يجمع مخطط المصفوفة أدناه بين المدرجات التكرارية الهامشية ومخططات الانتشار الزوجية لثمانية متغيرات. وقد أُدخل الاعتماد عمداً عند توليد العينات؛ فاستخدام توزيعات هامشية مختلفة وحده لا ينشئ ارتباطاً. ويفيد هذا المخطط في اكتشاف الاتجاهات الخطية والاعتماد اللاخطي والعناقيد والمشاهدات المنفردة قبل اعتماد مصفوفة ارتباط رسمية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ينبغي تفسير القيمة العددية لـ ρ في سياق التطبيق. فالأوصاف مثل «ضعيف» أو «قوي» ليست إلا قواعد إرشادية، ولا ينبغي أن تحل محل تقييم هندسي لكيفية تأثير الاعتماد في الكمية موضع الاهتمام.

جدول 63.2: أوصاف نوعية توضيحية لمقدار معامل ارتباط Pearson

مصطلح وصفي محتمل	المقدار
مهمل أو ضعيف جداً	$0.0 \le \lvert\rho\rvert < 0.1$
ضعيف	$0.1 \le \lvert\rho\rvert < 0.3$
متوسط	$0.3 \le \lvert\rho\rvert < 0.5$
قوي	$0.5 \le \lvert\rho\rvert < 0.7$
قوي جداً	$0.7 \le \lvert\rho\rvert < 0.9$
من قوي للغاية إلى اقتران خطي تام	$0.9 \le \lvert\rho\rvert \le 1.0$

11 يسجل الجدول 63.2 اصطلاحاً وصفياً شائعاً. والحدود ليست عالمية ولا تنقل دلالة إحصائية أو أهمية هندسية؛ فكلاهما يعتمد على حجم العينة وجودة البيانات والقرار الجاري اتخاذه.

63.3.2.2 التغاير المكاني

12 تُمثل الخاصية المتغيرة مكانياً بحقل عشوائي $X(\mathbf{s})$. ودالة تغايرها هي

$$C_X(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \operatorname{Cov}[X(\mathbf{s}), X(\mathbf{s}')]\,. \tag{63.2}$$

بالنسبة إلى حقل متجانس متساوي الخواص، يعتمد التغاير فقط على مسافة الفصل $h = \lVert \mathbf{s} - \mathbf{s}' \rVert$. ومن النماذج التوضيحية الشائعة

$$C_X(h) = \sigma_X^2 \exp\!\left(-\frac{h}{\ell_c}\right), \tag{63.3}$$

حيث تمثل ℓ_c طول الارتباط. وتنتج ℓ_c الصغيرة تغيراً مكانياً سريعاً؛ بينما تنتج ℓ_c الكبيرة مناطق واسعة تتغير معاً. ويمكن إدخال اللاتساوي الخواص بالسماح بأطوال ارتباط مختلفة في الاتجاهات المختلفة. ويعد

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

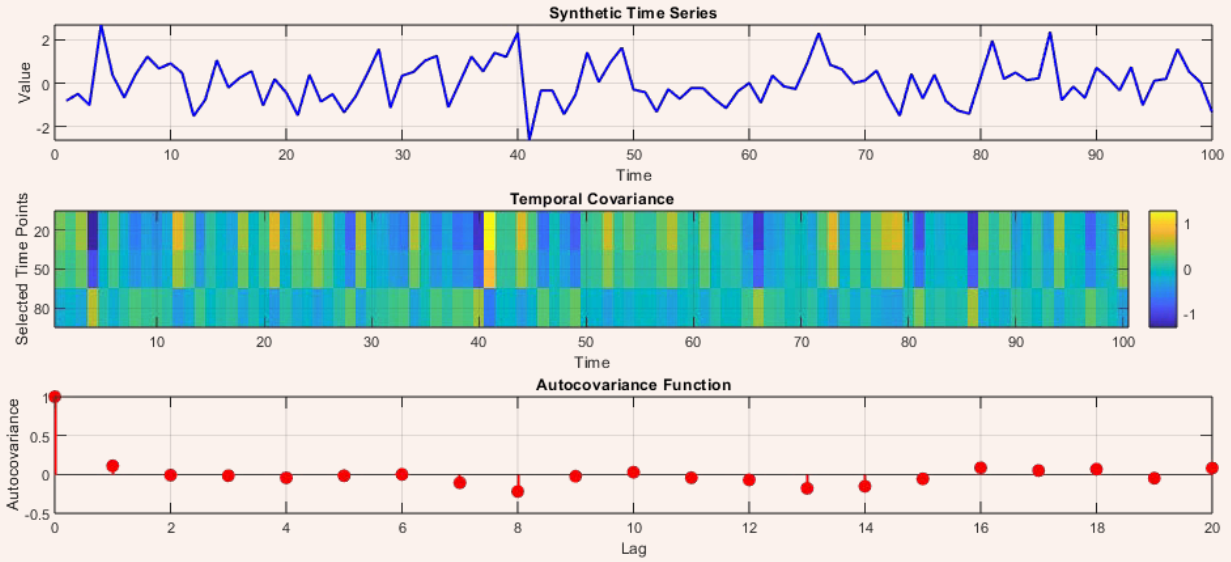
التغاير المكاني ضرورياً عند تعيين خصائص المواد للعناصر المحددة: فأخذ عينات مستقلة عنصراً بعنصر ينشئ عادة حقولاً خشنة بصورة غير واقعية.

63.3.2.3 التغاير الزمني

13 لعملية عشوائية X_t،

$$C_X(t,s) = \mathbb{E}\big[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)\big]\,. \tag{63.4}$$

إذا كانت العملية مستقرة بالمعنى الضعيف، فإن $C_X(t,s) = C_X(\tau)$ يعتمد فقط على الفاصل $\tau = |t-s|$. فمثلاً، تتمتع عملية الانحدار الذاتي المستقرة من الرتبة الأولى $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$، مع $|\phi| < 1$، بتغاير ذاتي يتناقص هندسياً مع الفاصل. والضوضاء البيضاء هي الحالة الحدية التي يكون فيها التغاير الذاتي النظري صفراً لكل فاصل غير صفري؛ ومع ذلك تُظهر العينات المحدودة تقديرات عشوائية صغيرة حول الصفر.



14 يوضح الشكل تسلسلاً مستقراً محاكى، وعرضاً تجريبياً للتغاير، ودالة تغاير ذاتي مقدرة. ولا يمثل الناتج التجريبي من زوج واحد من المشاهدات في حد ذاته تقديراً للتغاير؛ إذ يتطلب التغاير قيمة متوقعة أو متوسطاً على تحققات متكررة أو أصول زمنية تحت افتراض الاستقرار.

63.3.2.4 توليد عينات مترابطة

15 يكون أخذ العينات المستقل غير مناسب عندما يكون للمدخلات اعتماد ذو معنى. وللمتغيرات الغاوسية المشتركة ذات مصفوفة الارتباط $\mathbf{R}$، يمكن حساب عامل Cholesky $\mathbf{L}$ بحيث $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{T}$، وتوليد $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$، ثم وضع

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}_{\sigma}\mathbf{L}\mathbf{z}, \tag{63.5}$$

حيث تحتوي $\mathbf{D}_{\sigma}$ على الانحرافات المعيارية الهامشية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16 بالنسبة إلى الهوامش غير الغاوسية، يُستخدم غالباً بناء وصلة غاوسية: توليد متغيرات عادية معيارية مترابطة $\mathbf{z}_c = \mathbf{L}\mathbf{z}$، وتحويلها إلى متغيرات منتظمة $u_i = \Phi(z_{c,i})$، ثم أخيراً وضع $x_i = F_i^{-1}(u_i)$. ويكون الارتباط المفروض دقيقاً في الفضاء الغاوسي الكامن؛ لكن ارتباطات Pearson الناتجة في الفضاء الفيزيائي قد تختلف وقد تتطلب معايرة. ويمكن تمثيل اعتماد أكثر عمومية بوصلات أخرى أو بتوزيعات مشتركة مقدرة مباشرة.

63.3.3 نشر عدم اليقين

17 يقيّم نشر عدم اليقين كيفية تأثير نموذج المدخلات المشترك في استجابة النظام الإنشائي. وتعتمد الطريقة المطلوبة على تكلفة النموذج، واللاخطية، والأبعاد، وأهمية سلوك الذيل، وما إذا كان الهدف توزيعاً كاملاً للمخرجات أم عزوماً وكميات مختارة فقط.

63.3.3.1 محاكاة مونت كارلو (MCS)

18 محاكاة مونت كارلو إجراء عددي مباشر لنشر عدم اليقين:

1. أخذ عينة من نموذج المدخلات المشترك لـ $X_1, X_2, \ldots, X_n$، بما في ذلك أي اعتماد مفروض؛
2. تقييم $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ لكل تحقق؛
3. تقدير توزيع المخرجات أو العزوم أو الكميات أو احتمالات التجاوز أو الفشل المطلوبة من العينة الناتجة.

19 الطريقة بسيطة مفاهيمياً وعامة تقاربياً، لكن تقاربها الإحصائي بطيء وقد تكون تكلفتها الحسابية باهظة عندما يكون كل تقييم للنموذج مكلفاً. ولذلك ينبغي تقييم خطأ أخذ العينات لا استنتاجه من تشغيل واحد.

63.3.3.2 أخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق (LHS)

20 يحسن LHS التغطية بتقسيم كل توزيع هامشي إلى طبقات (Olsson **and** Sandberg, 2002). وبالنسبة إلى كثير من النماذج الملساء يقلل تباين أخذ العينات مقارنة بعينة عشوائية بسيطة مساوية في الحجم، رغم أن الفائدة تعتمد على دالة الاستجابة وعلى كيفية تمثيل الاعتماد بين المدخلات.

LHS تقنية لأخذ العينات الطبقية. فهو يقسم دالة التوزيع التراكمي لكل مدخل إلى N طبقات متساوية الاحتمال، ويختار قيمة واحدة من كل طبقة هامشية، ويجمع القيم في N متجهات مدخلات. ويكون التقسيم الطبقي دقيقاً في كل إسقاط أحادي البعد؛ بينما تعتمد تغطية الفضاء الكامل متعدد الأبعاد على اقتران العينات الهامشية أو تبديلها.

21 يوفر LHS غالباً تقديرات مفيدة بعدد أقل من تقييمات النموذج مقارنة بأخذ العينات العشوائي الصرف، لكنه لا يضمن الدقة بذاته؛ ولا يزال ينبغي التحقق من التقارب بزيادة حجم العينة أو تكرار التصميم.

1. تقسيم توزيعات المدخلات: لكل متغير مدخل X، قسّم دالة توزيعه التراكمي (CDF) إلى N فترات متساوية الاحتمال:
$$X_1, X_2, \dots, X_N, \quad \text{حيث} P(X_i) = \frac{1}{N}.$$
2. أخذ عينات طبقية: اختر قيمة واحدة من كل طبقة احتمالية.
3. جمع عينات المدخلات: للمتغيرات المدخلة المتعددة $X_1, X_2, \dots, X_n$، بدّل العينات عشوائياً لإنشاء N تركيبات مدخلات فريدة.
4. تشغيل محاكاة النموذج. لكل متجهة مدخلات، قيّم
$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n).$$
5. تكميم عدم اليقين في المخرجات: استخدم المخرجات لحساب المقاييس الإحصائية (§M.4.1)

22 يقارن الجدول 63.3 بين مونت كارلو وأخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق.

جدول 63.3: مقارنة بين MCS وLHS

الجانب	أخذ عينات مونت كارلو	أخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق (LHS)
التغطية الهامشية	قد تتكتل العينات وتترك فجوات.	تشغل نقطة واحدة بالضبط كل طبقة احتمالية هامشية.
الكفاءة	طريقة أساس ذات نظرية تقارب بسيطة.	غالباً ما تقلل التباين للاستجابات الملساء، لكن المكسب يعتمد على المسألة.
الاعتماد	سحب مباشر من النموذج المشترك المحدد.	تتطلب بناء يحافظ على الاعتماد أو إعادة ترتيب عندما تكون المدخلات مترابطة.
التحقق	زيادة N أو تكرار تشغيلات مستقلة.	زيادة N، وتكرار التصاميم، وفحص الحساسية للتبديل أو التصميم المحسن.

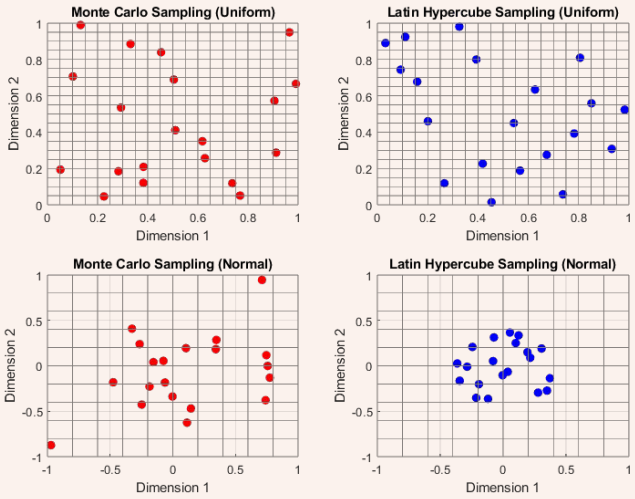
23 يوضح الشكل 63.1 الفروق بين أخذ عينات مونت كارلو التقليدي (MCS) وأخذ عينات المكعب اللاتيني الفائق (LHS) لبيانات ثنائية الأبعاد.

1. في المخطط الأيسر (MCS)، تتوزع العينات عشوائياً، مما يؤدي إلى تكتل ملحوظ في بعض المناطق وفجوات في مناطق أخرى. ويعكس هذا الانتشار غير المتساوي العشوائية المتأصلة في MCS، الذي لا يفرض تغطية منتظمة عبر فضاء العينة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. في المخطط الأيمن (LHS)، تُمثل كل طبقة هامشية مرة واحدة بالضبط. كما يعطي التبديل المعروض إسقاطاً ثنائي الأبعاد أكثر توازناً، رغم أن هذه الدرجة من الانتظام متعدد الأبعاد لا يضمنها كل تصميم LHS.
3. تتوافق المخططات العليا مع توزيعات منتظمة، والسفلى مع توزيع عادي ($\mu = 0$، $\sigma = 0.3$).

24 توضح المقارنة الميزة الأساسية لـ LHS: تغطية هامشية مضبوطة بعينة محدودة. ولا تزال الدقة تعتمد على حجم العينة، ونمذجة الاعتماد، ودالة الاستجابة، والتبديل المختار.



شكل 63.1: مقارنة بين MCS وLHS

25 يجمع المصطلح *LHS* (*Latin Hypercube Sampling*) بين فكرة المربع اللاتيني، أي استخدام كل طبقة مرة واحدة، وتمثيل المكعب الفائق لمجال مدخلات متعدد الأبعاد.

المربع اللاتيني: مصفوفة توافقية يظهر فيها كل رمز مرة واحدة بالضبط في كل صف وكل عمود. فمثلاً، في مربع لاتيني 3×3:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

يحتوي كل صف وعمود على ظهور واحد بالضبط لكل من A، وB، وC، مما يضمن توزيعاً طبقياً عبر المربع.

كُيف هذا المفهوم لأخذ العينات في أبعاد أعلى بضمان تقسيم كل عينة طبقياً على طول كل بُعد.

المكعب الفائق: امتداد الفترة والمربع والمكعب إلى n أبعاد؛ ويمثل فضاء العينة المطبع لـ n متغيرات مدخلة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63.3.3.2.0.1 مثال 63.2: المكعب اللاتيني الفائق: مثال محلول بمتغيرين

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

انظر في مسألة بسيطة بمتغيرين: نمذجة الإزاحة الإنشائية Y بدلالة معامل Young E والحمل المطبق P. نفترض:

$$E \sim \mathcal{N}\left(200\text{GPa}\,,\,(10\text{GPa}\,)^2\right), \tag{63.6}$$
$$P \sim \mathcal{U}(10\text{kN}\,,\,20\text{kN}\,), \tag{63.7}$$

ونرغب في توليد $N = 4$ تركيبات مدخلات فريدة باستخدام LHS.

الخطوة 1: تقسيم توزيعات المدخلات بالنسبة إلى E (توزيع عادي)، نقسم دالة توزيعه التراكمي إلى $N = 4$ فترات متساوية الاحتمال:

$$\text{الفترات}: \left[0,\frac{1}{4}\right),\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),\left[\frac{3}{4},1\right].$$

الكميات الموافقة لهذه الفترات هي:

$$\Phi^{-1}(0.125) \approx -1.150 \implies E_1 \approx 188.5\text{GPa}\,, \tag{63.8}$$
$$\Phi^{-1}(0.375) \approx -0.319 \implies E_2 \approx 196.8\text{GPa}\,, \tag{63.9}$$
$$\Phi^{-1}(0.625) \approx +0.319 \implies E_3 \approx 203.2\text{GPa}\,, \tag{63.10}$$
$$\Phi^{-1}(0.875) \approx +1.150 \implies E_4 \approx 211.5\text{GPa}\,. \tag{63.11}$$

بالنسبة إلى P (توزيع منتظم)، تكون الفترات والعينات المقابلة مباشرة:

$$P_1 = 10 + 0.125 \times 10 = 11.25\text{kN}\,, \tag{63.12}$$
$$P_2 = 10 + 0.375 \times 10 = 13.75\text{kN}\,, \tag{63.13}$$
$$P_3 = 10 + 0.625 \times 10 = 16.25\text{kN}\,, \tag{63.14}$$
$$P_4 = 10 + 0.875 \times 10 = 18.75\text{kN}\,. \tag{63.15}$$

الخطوتان 2–3: أخذ العينات الطبقية والتبديل تُسحب عينة واحدة من كل فترة، ثم تُبدل العينات عشوائياً عبر المتغيرات لتكوين تركيبات فريدة. ويعطي تبديل عشوائي للفهارس ما يأتي:

العينة	(GPa) E	(kN) P	ملاحظات
1	188.5	13.75	من الفترتين 1 و2
2	196.8	18.75	من الفترتين 2 و4
3	203.2	11.25	من الفترتين 3 و1
4	211.5	16.25	من الفترتين 4 و3

يضمن هذا التبديل أخذ عينة من كل فترة هامشية مرة واحدة بالضبط. لكنه لا يضمن تباعداً منتظماً في الفضاء الكامل متعدد الأبعاد، ولذلك قد توفر تبديلات بديلة أو تصاميم LHS محسنة خصائص إسقاط أفضل.

الخطوة 4: تشغيل محاكاة النموذج يُقيّم النموذج لكل تركيب. افترض أن نموذج الإزاحة هو:

$$Y = \frac{PL^3}{48EI}$$

حيث إن $L = 2\text{ m}$ و$I = 1 \times 10^{-5}\text{ m}^4$ ثابتان. والمخرجات هي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

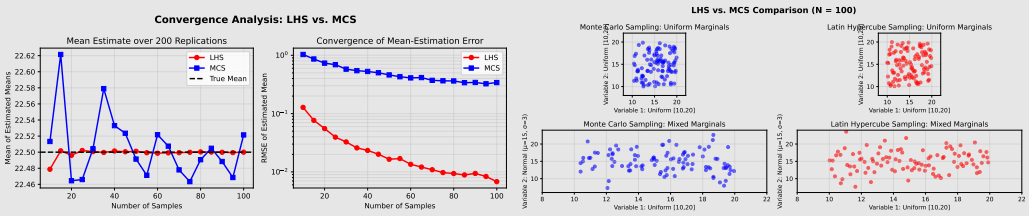
العينة	(GPa) E	(kN) P	(mm) Y
1	188.5	13.75	1.216
2	196.8	18.75	1.588
3	203.2	11.25	0.923
4	211.5	16.25	1.281

الخطوة 5: تكميم عدم اليقين في المخرجات من المخرجات $N = 4$:

$$\bar{Y} = \frac{1}{4}(1.216 + 1.588 + 0.923 + 1.281) \approx 1.252\text{mm}\,, \tag{63.16}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Y_i - \bar{Y})^2} \approx 0.236\text{mm}\,. \tag{63.17}$$

مع $N = 4$ عينات فقط، يكون هذا التقدير تقريبياً؛ وتوفر أحجام العينات الأكبر تقارباً إحصائياً أفضل.



يرد كود MATLAB® في §I.5.7؛ وانظر أيضاً §63.3.3.2.

63.3.3.3 بدائل تقريبية وبدائل بديلة لأخذ العينات المباشر

26 قد تتطلب محاكاة مونت كارلو كثيراً من تقييمات النموذج. ويقلل التقريبان الآتيان تلك التكلفة باستبدال أخذ العينات العشوائي بمجموعة صغيرة محددة من التقييمات. ويتحقق اقتصادهما بافتراضات أقوى، لذا يجب فحص دقتهما في ضوء لاخطية المسألة واعتمادها وأبعادها.

63.3.3.3.1 طريقة تقدير النقاط (PEM)

27 يشمل مصطلح *طريقة تقدير النقاط* عدة تقريبات مترابطة. والنسخة البسيطة المستخدمة هنا هي تصميم نقاط ركنية بمستويين: يُعطى كل مدخل القيمتين $\mu_i - k\sigma_i$ و$\mu_i + k\sigma_i$، ويُقيّم النموذج عند جميع الأركان الناتجة. ولا ينبغي الخلط بينها وبين مخططات تقدير النقاط الأكثر اقتصاداً والمطابقة للعزوم، التي تستخدم عدداً محدوداً فقط من النقاط الموزونة.

تعمل PEM كما يأتي:

1. لكل متغير مدخل X_i، حدد متوسطه μ_i وانحرافه المعياري σ_i.
2. عرّف قيمتين لكل مدخل: $\mu_i - k\sigma_i$ و$\mu_i + k\sigma_i$.
3. قيّم النموذج عند جميع تركيبات قيم المدخلات البالغ عددها 2^n، حيث n عدد المتغيرات المدخلة.
4. احسب متوسط المخرجات وتباينها وعزومها الإحصائية الأخرى استناداً إلى تقييمات النموذج.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

28 يمكن لتصميم الأركان إظهار الاستجابة عبر نطاق محدد ذي مستويين، لكنه لا يعيد عموماً إنتاج التوزيع الاحتمالي للمدخلات الأصلية أو عزوم المخرجات العليا. ويجب التصريح بالقيمة المختارة لـ k وأوزان النقاط. كما تنمو تكلفته أسياً مع عدد المدخلات.

63.3.3.3.1.1 مثال 63.3: مثال على طريقة تقدير النقاط

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

لنظام ما متغيران مدخلان:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: المتوسط = 10، والانحراف المعياري = 2.
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: المتوسط = 20، والانحراف المعياري = 3.

مخرجات النظام معطاة بـ:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

الهدف: استخدم طريقة تقدير النقاط (PEM) لتقدير متوسط Y وتباينه.

الخطوات:

1. عرّف قيمتين لكل متغير مدخل:

$$X_1 = \mu_{X_1} \pm \sigma_{X_1}, \quad X_2 = \mu_{X_2} \pm \sigma_{X_2}.$$

2. قيّم الدالة $Y = X_1^2 + 3X_2$ عند جميع تركيبات X_1 وX_2:

$$Y = f(X_1, X_2), \quad \text{لـ} (X_1, X_2) \in \{(8, 17), (8, 23), (12, 17), (12, 23)\}.$$

3. مع أوزان متساوية عند الأركان الأربعة، احسب العزوم التقريبية:

$$\widehat{\mu}_Y = 164, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

للمقارنة، العزوم الدقيقة تحت المدخلات العادية المستقلة المذكورة هي $\mu_Y = 164$ و$\mathrm{Var}(Y) = 1713$. والتوافق قريب في هذا المثال التربيعي، لكنه غير مضمون لاستجابة لاخطية عامة.

63.3.3.3.2 واحد في كل مرة (تقدير الفروق المحدودة بسلسلة Taylor، TSFD)

29 يبدأ هذا النهج المبسط بتوسع Taylor من الرتبة الأولى حول متجهة متوسطات المدخلات، ويحتفظ بالحدود الخطية فقط (Benjamin and Cornell, 1970). ولذلك يكون أكثر موثوقية عندما تكون الاستجابة ملساء محلياً ولاخطيتها طفيفة فقط عبر النطاق موضع الاهتمام.

$$\mu_F \approx F(\boldsymbol{\mu})$$

حيث تمثل $\boldsymbol{\mu}$ متجهة متوسطات المدخلات. وهذه المساواة تقريب من الرتبة الأولى؛ وللاستجابة اللاخطية، ليس من الضروري أن تساوي $\mathbb{E}[F(\mathbf{X})]$ القيمة $F(\mathbb{E}[\mathbf{X}])$. وللمتغيرات العشوائية المستقلة، يكون تقريب التباين المقابل من الرتبة الأولى

$$
\begin{aligned}
Var(F) = \sigma_F^2 &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 \\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &\approx \frac{F_i^+ - F_i^-}{2\sigma_i} \\
F_i^+ &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i + \sigma_i, \cdots, \mu_n) \\
F_i^- &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i - \sigma_i, \cdots, \mu_n)
\end{aligned}
$$

حيث تمثل σ_i الانحرافات المعيارية للمتغيرات. ومن ثم،

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{F_i^+ - F_i^-}{2} \right)^2}$$

30 يمكن تلخيص الإجراء (Bryant, Brokaw **and** Mlakar, 1993) كما يأتي:

1. أجر تحليلاً أولياً مع وضع جميع المتغيرات عند متوسطاتها. وتكون الاستجابة الناتجة تقريب الرتبة الأولى لمتوسط المخرجات.
2. أجر $2n$ تحليلاً، توضع فيه جميع المتغيرات مساوية لقيمها المتوسطة، باستثناء المتغير i، الذي يأخذ قيمة تساوي $\mu_i + \sigma_i$، ثم $\mu_i - \sigma_i$. ومن ثم، تتطلب هذه الطريقة $2n + 1$ تحليلاً.
3. لكل متغير x_i، احسب المساهمة الموقعة من الرتبة الأولى $c_i = (F_i^+ - F_i^-)/2$. ويوفر مقدارها مؤشراً محلياً للحساسية تجاه ذلك المتغير.
4. للمتغيرات المستقلة، ربّع المساهمات واجمعها وخذ الجذر التربيعي: $\sigma_F \approx \sqrt{\sum_i c_i^2}$. وللمتغيرات المترابطة، يجب أيضاً تضمين الحدود المتقاطعة للتغاير.
5. رتّب النتائج تنازلياً وشكّل ما يسمى «مخطط الإعصار».

31 لأن TSFD محلي، ينبغي الإبلاغ عن مقياس الاضطراب والنموذج الاحتمالي المعتمد. ولا تكون دراسة $\pm\sigma_i$ ذات معنى إلا عندما يكون σ_i مقياساً قابلاً للدفاع عنه لعدم اليقين وتظل الاستجابة ملساء بدرجة كافية عبر تلك الفترة.

63.3.3.3.2.1 مثال 63.4: مثال على طريقة الفروق المحدودة بسلسلة Taylor

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

استخدم المدخلات العادية المستقلة والاستجابة نفسيهما كما في مثال PEM السابق:

$$X_1 \sim N(10, 2^2), \qquad X_2 \sim N(20, 3^2), \qquad Y = X_1^2 + 3X_2.$$

عند نقطة المتوسط،

$$\widehat{\mu}_Y = F(10, 20) = 160.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مساهمتا الفروق المحدودة هما

$$c_1 = \frac{F(12,20) - F(8,20)}{2} = \frac{204 - 124}{2} = 40,$$
$$c_2 = \frac{F(10,23) - F(10,17)}{2} = \frac{169 - 151}{2} = 9.$$

لذلك،

$$\widehat{\sigma}_Y = \sqrt{40^2 + 9^2} = 41, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

العزوم الدقيقة هي $\mu_Y = 164$ و$\mathrm{Var}(Y) = 1713$. وتفوت طريقة الرتبة الأولى تصحيح المتوسط الناجم عن الحد التربيعي، وتقلل التباين قليلاً؛ وتوضح المقارنة اقتصادها وقيدها الخطي المحلي معاً.

63.3.3.3.3 توسع الفوضى متعدد الحدود (PCE)

32 توسع الفوضى متعدد الحدود (PCE) طريقة مستخدمة في تكميم عدم اليقين لتمثيل المتغيرات العشوائية أو الدوال العشوائية كسلسلة من متعددات الحدود المتعامدة.

33 المفاهيم الأساسية في PCE:

التمثيل الطيفي يشير التمثيل الطيفي إلى التعبير عن دالة بدلالة سلسلة من دوال الأساس، على غرار تمثيل سلاسل Fourier للإشارات باستخدام دوال الجيب وجيب التمام. وفي PCE تكون دوال الأساس *متعددات حدود متعامدة*، مكيّفة مع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المدخل.

متعددات الحدود المتعامدة تشكل متعددات الحدود المتعامدة دوال الأساس في PCE. وهذه المتعددات متعامدة بالنسبة إلى دالة وزن معينة تقابل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي. ومن أمثلتها:

- متعددات حدود *Legendre*: تُستخدم للمتغيرات العشوائية ذات التوزيعات المنتظمة.
- متعددات حدود *Hermite*: تُستخدم للمتغيرات العشوائية ذات التوزيعات العادية (الغاوسية).
- متعددات حدود *Laguerre*: تُستخدم للمتغيرات العشوائية ذات التوزيعات الأسية.

المتغير العشوائي ودالة الاستجابة *المتغير العشوائي* مدخل يتبع توزيعاً احتمالياً محدداً (مثل المنتظم أو العادي). و*دالة الاستجابة* هي المخرجات الحتمية لنظام يعتمد على المتغير العشوائي. فمثلاً، إذا كان x متغيراً عشوائياً، فقد تكون دالة الاستجابة $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$.

معاملات PCE تكمّم معاملات PCE مساهمة كل حد متعدد حدود في تقريب دالة الاستجابة. وتُحسب هذه المعاملات باستخدام تقنيات مثل ملاءمة المربعات الصغرى لتقليل الخطأ بين الدالة الفعلية وتقريبها متعدد الحدود.

63.3.3.3.3.1 مثال 63.5: توسع الفوضى متعدد الحدود

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

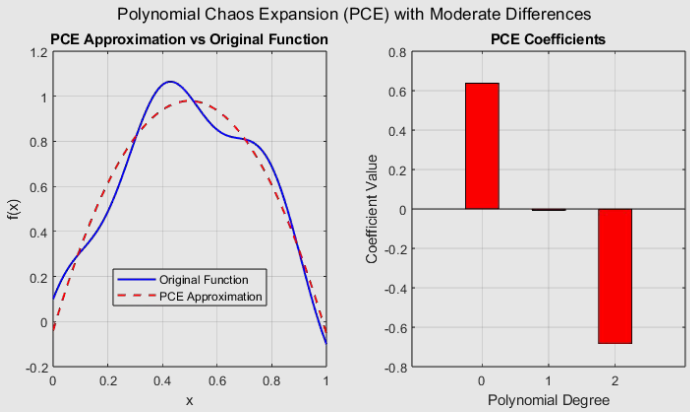
انظر في دالة الاستجابة $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$، حيث يتوزع x بانتظام على $[0,1]$. نقرّب f باستخدام متعددات حدود Legendre المزاحة، أو بصورة مكافئة متعددات حدود Legendre العادية المقيمة عند $2x-1$، بحيث يكون الأساس متعامداً بالنسبة إلى الكثافة المنتظمة على $[0,1]$.

1. توليد المتغير العشوائي: مجموعة عينات عشوائية موزعة بانتظام من x في النطاق $[0,1]$.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. إنشاء دوال الأساس: استخدام متعددات حدود Legendre المزاحة على $[0, 1]$، أو بصورة مكافئة متعددات حدود Legendre العادية المقيمة عند $2x - 1$، حتى درجة محددة.
3. حساب معاملات PCE: ملاءمة معاملات التوسع باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
4. تقريب الدالة: جمع دوال الأساس مع معاملاتها المقابلة لتقريب $f(x)$.

يمكن تصور نتائج PCE كما يأتي:



مخطط المقارنة: مخطط يقارن الدالة الأصلية $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ بتقريب PCE. وتُعرض الدالة الأصلية بخط أزرق متصل، بينما يُمثل تقريب PCE بخط أحمر متقطع. والتقريب دقيق بدرجة معقولة لكنه ينحرف قليلاً بسبب تعقيد الدالة الأصلية ومحدودية درجة متعدد الحدود المستخدمة في التوسع. وهذا يبرز المفاضلة بين البساطة الحسابية ودقة التقريب في PCE.

مخطط المعاملات: مخطط أعمدة يعرض معاملات PCE لكل درجة من متعدد الحدود. وتشير ارتفاعات الأعمدة إلى الأهمية النسبية لكل حد في توسع السلسلة. ولهذه الاستجابة ودرجة متعدد الحدود المعينتين، تهيمن معاملات الرتب الدنيا. وهذا النمط ليس عاماً: فقد تتطلب التدرجات الحادة أو الانقطاعات أو التذبذبات حدوداً كبيرة من الرتب العليا.

63.3.4 تفسير عدم اليقين في المخرجات

34 بعد نشر توزيع الاستجابة، يترجم تحليل عدم اليقين ذلك التوزيع إلى كميات ترتبط مباشرة بالسؤال الهندسي. ولا يقتصر عدم اليقين في المخرجات على العزوم. فوفقاً للقرار، تشمل الملخصات المفيدة دوال الكثافة الاحتمالية والتوزيع التراكمي، والمتوسطات والتباينات، وفترات التنبؤ أو المصداقية، والكميات، واحتمالات التجاوز، واحتمالات الفشل. وقد تكفي الاستجابة المتوسطة للمقارنة على مستوى الخدمة، بينما يتطلب تقييم حالة حدية عادة الاهتمام بالذيل المعني من التوزيع.

35 يجب مطابقة المقياس المبلّغ عنه مع تفسيره. ففترة الثقة تصف عدم اليقين في كمية سكانية مقدرة؛ وفترة التنبؤ تصف نطاق مشاهدة مستقبلية تحت النموذج المعتمد؛ وفترة المصداقية البايزية تصف الاحتمال اللاحق لكمية غير مؤكدة مشروطة بالنموذج والبيانات والافتراضات القبلية. وتجيب هذه الفترات عن أسئلة مختلفة، ولا ينبغي استخدامها بالتبادل.

36 ويعرض تحليل عدم اليقين القابل للدفاع عنه أيضاً الافتراضات التي تتحكم في النتيجة: التوزيعات الهامشية ونموذج الاعتماد المعتمدان، ومعالجة خطأ القياس وعدم تطابق النموذج، والتقارب العددي أو تقارب أخذ العينات، وحساسية الاستنتاج لافتراضات بديلة معقولة. وحيث يعتمد القرار على احتمال فشل صغير،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ينبغي للمحلل أن يبرهن أن طريقة أخذ العينات أو التقريب تحل الذيل المعني بدقة كافية، بدلاً من الاعتماد على العزوم العامة فقط.

37 يحدد النشر كم يمكن أن تتغير الاستجابة؛ ويحدد تحليل الحساسية *لماذا*. ولذلك يوزع القسم التالي تباين المخرجات بين المدخلات غير المؤكدة، ويحدد ما يستحق توصيفاً محسناً أو إبقاءً صريحاً في التحليلات اللاحقة أو تعييناً محتملاً للمعاملات.

63.4 تحليل الحساسية

38 يسأل نشر عدم اليقين عن مدى اتساع تغير المخرجات. ويسأل تحليل الحساسية عن سبب تغيرها. والتمييز أساسي: فقد يكون لنموذجين تباين المخرجات نفسه لكن معاملات متحكمة مختلفة جداً.

39 يمكن تنظيم طرائق الحساسية في أربع مجموعات:

- **طرائق المشتقات المحلية أو عامل واحد في كل مرة**، التي تصف الاستجابة قرب نقطة أساس مختارة؛
- **طرائق الفرز العالمية**، مثل Morris، التي تحدد بكفاءة المدخلات المهملة والمؤثرة عبر المجال الكامل؛
- **الطرائق العالمية القائمة على التباين**، مثل مؤشرات Sobol، التي تخصص تباين المخرجات للآثار الرئيسية والتفاعلات؛
- **الملخصات الرسومية**، مثل مخططات الإعصار، التي تعرض النطاق الناتج من اضطرابات محددة لعامل واحد في كل مرة.

40 لا توجد طريقة واحدة هي الأفضل عالمياً. فالفرز مناسب عندما تكون للنموذج مدخلات كثيرة ويكون كل تقييم مكلفاً. وتوفر المؤشرات القائمة على التباين تفكيكاً أكمل، لكنها تتطلب تقييماً أكثر بكثير. والمشتقات المحلية زهيدة التكلفة لكنها قد تفوت السلوك اللاخطي والتفاعلات بعيداً عن نقطة الأساس.

63.4.1 طريقة Morris

41 طريقة Morris تقنية فرز عالمية للنماذج ذات المدخلات غير المؤكدة الكثيرة والتقييمات المكلفة (Morris, 1991). وهي توزع اضطرابات عامل واحد في كل مرة في أنحاء فضاء المدخلات المقبول، وبذلك تحتفظ بكثير من اقتصاد الفروق المحدودة المحلية مع اكتشاف تغيرات الحساسية بعيداً عن خط أساس واحد. وترتب مخرجاتها الأساسية المتغيرات المؤثرة، وتلفت إلى لاخطية أو تفاعلات محتملة؛ لكنها لا تشكل تفكيكاً كاملاً للتباين.

طريقة Morris الأصلية

42 يضطرب نهج تقدير الفروق المحدودة بسلسلة Taylor (TSFD) متغيراً عشوائياً واحداً (RV) في كل مرة (عادة بمقدار $\pm\sigma$)، كما وُصف سابقاً. وهذا النهج، المسمى طريقة عامل واحد في كل مرة (OAT)، هو أساس طريقة *Morris* الموسعة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

43 يغيّر تصميم الآثار الأولية متغيراً عشوائياً واحداً في كل مرة على طول كل مسار، لكن مجموعة الآثار عالمية لأن المسارات تبدأ من مواقع مختلفة في فضاء المدخلات. ولا تعزل مؤشرات Morris حدود التفاعل الفردية؛ بل يشير التشتت الكبير للآثار الأولية إلى اللاخطية أو التفاعلات مع متغيرات عشوائية أخرى أو كليهما. ويُلخص تأثير كل متغير عشوائي بواسطة **الآثار الأولية (EEs)**.

44 في طريقة Morris، تُحسب الآثار الأولية لكل متغير عشوائي وتعمل مؤشرات للحساسية. وتشير القيمة الكبيرة للأثر الأولي إلى أن المتغير العشوائي المقابل يؤثر تأثيراً كبيراً في مخرجات النموذج. وتتضمن الخطوة الأولى في طريقة Morris اختيار نقاط ابتدائية عشوائياً في الفضاء الفائق المتقطع للمتغيرات العشوائية. وتُمثل هذه النقاط بدوائر سوداء ممتلئة في الشكل 63.2.

45 كثيراً ما تُمثل مجموعة المتغيرات العشوائية k لنقطة ابتدائية في فضاء الكميات الفائق، حيث:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m}, \tag{63.18}$$

مع X_i^j بوصفها القيمة المتقطعة j^{th} للمتغير العشوائي i^{th}، وF_i بوصفها دالة توزيعه التراكمي (CDF)، و$i = [1:k]$، و$j = [1:m]$، وm بوصفها عدد المستويات المتقطعة في CDF.

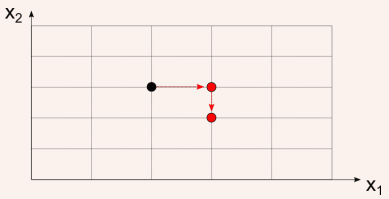
46 تتضمن الخطوة الثانية اضطراب متغير عشوائي واحد بزيادة صغيرة Δ، مع إبقاء جميع المتغيرات العشوائية الأخرى ثابتة.

47 تطبق الخطوة الثالثة الاضطراب نفسه Δ على متغير عشوائي آخر، وتكرر العملية حتى تضطرب جميع المتغيرات العشوائية k مرة واحدة. وتوضح الدوائر الحمراء الممتلئة في الشكل 63.2 هذه الخطوات. ويُختار عشوائياً تسلسل اضطراب المتغيرات العشوائية، وكذلك اتجاه الاضطراب ($+\Delta$ أو $-\Delta$).

48 لنظام ذي k متغيرات عشوائية، يتطلب المسار الواحد $k+1$ تقييماً للنموذج (توضحها الأسهم الحمراء في الشكل 63.2). وإذا استُخدم r من المسارات، يصبح العدد الكلي للتقييمات $r \times (k+1)$. وتُحسب الآثار الأولية لكل متغير عشوائي في مسار باستخدام المعادلة الآتية:

$$EE_i = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k)}{\Delta}, \tag{63.19}$$

حيث EE_i هو الأثر الأولي للمتغير العشوائي i^{th}، و$f(x_i)$ هو مخرج النموذج الموافق لقيمة المتغير العشوائي x_i.



شكل 63.2: مثال لمسار واحد من أجل $k = 2$.

49 اقترح Morris (Morris, 1991) مقياسين للحساسية يعتمدان على الآثار الأولية:

- **متوسط** الآثار الأولية (μ_i)، الذي يشير إلى الأثر الكلي للمتغير العشوائي i^{th} في المخرجات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

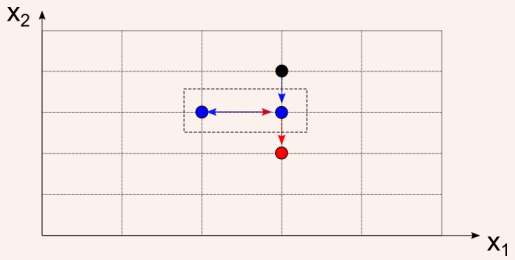
- **الانحراف المعياري** للآثار الأولية (σ_i)، الذي يعكس مساهمة المتغير العشوائي i^{th} في اللاخطية أو التفاعلات مع متغيرات عشوائية أخرى.

50 لمعالجة آثار الإلغاء المحتملة عندما تكون للآثار الأولية قيم موجبة وسالبة، يُستخدم عادة متوسط القيم المطلقة للآثار الأولية (μ_i^*) بدلاً من μ_i. ويضمن هذا التعديل بقاء مقاييس الحساسية حصينة حتى عندما تُظهر الآثار الأولية إشارات متعاكسة.

طريقة Morris المحسنة

51 يمكن لمسارات Morris المولدة عشوائياً أن تتراكب أو تتكتل، ولا سيما على شبكة خشنة. وتقلل التقييمات المتكررة أو المتقاربة تنوع فضاء المدخلات المستكشف، وقد تجعل المؤشرات المقدرة أقل استقراراً عند ميزانية حسابية ثابتة.

52 عرض الشكل 63.2 مساراً واحداً. ويبين الشكل 63.3 الظاهرة الإضافية موضع الاهتمام: قد تتطابق المسارات المولدة بصورة مستقلة أو تتكتل، مما يقلل تنوع فضاء المدخلات المستكشف.



شكل 63.3: نقاط متراكبة أو متكتلة تقاربياً من مسارات Morris مختلفة.

53 لذلك اقتُرحت بدائل للمسارات المائلة للفضاء وللنقاط الشعاعية (Sohier, Farges **and** Piet-Lahanier, 2014). والغرض منها تقليل التراكب الممكن تجنبه وتحسين التغطية؛ لكنها لا تستطيع ضمان أخذ عينة من كل سمة لاخطية للاستجابة.

54 **تحويل المتغيرات العشوائية إلى فضاء الكميات.** في النهج المحسن:

- تُحوّل جميع المتغيرات العشوائية k إلى فضاء كميات مطبع $[0, 1]$، حيث يقابل كل بُعد دالة التوزيع التراكمي (CDF) $F_i(X_i^j)$ للمتغير العشوائي.
- تُعطى قيمة الكمية j^{th} للمتغير العشوائي i^{th} بـ:

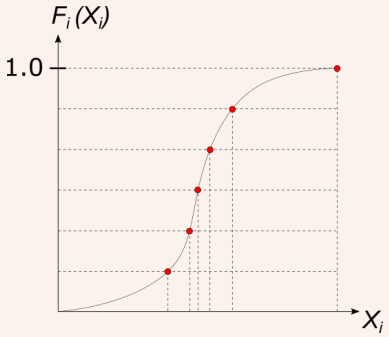
$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m},$$

حيث m عدد المستويات المتقطعة. ويضمن هذا التحويل تمثيلاً منتظماً للمتغيرات عبر نطاقاتها، بصرف النظر عن توزيعاتها الأصلية.

توضح عملية التحويل هذه في الشكل 63.4.

55 تتضمن استراتيجية أخذ العينات المحسنة:

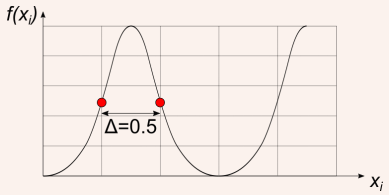
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 63.4: متغير عشوائي ودالة توزيعه التراكمي (CDF).

- أخذ *عينات المكعب اللاتيني الفائق (LHS)*: تُختار النقاط الابتدائية باستخدام LHS لتحسين تغطية فضاء المدخلات وتقليل احتمال اختيار نقاط بداية متطابقة أو متراكبة.
- حجم خطوة *ثابت* (Δ): يضمن حجم خطوة ثابت ($\Delta = 0.5$) في فضاء الكميات اضطرابات متسقة عبر المسارات. وتُطبق الاضطرابات **بترتيب ثابت** بدلاً من العشوائي، مما يمنع التراكبات أكثر.

56 **أحجام خطوات متناوبة.** قدّم Sohier, Piet-Lahanier **and** Farges, 2015 أحجام خطوات متناوبة ($\Delta = 0.5$ و$\Delta = 0.375$) للتعامل بفعالية مع الاستجابات الدورية أو التذبذبية. ويوضح الشكل 63.5 مثالاً يفشل فيه حجم خطوة ثابت في التقاط التباين في استجابة نموذج دورية.



شكل 63.5: استجابة دورية لمتغير عشوائي x_i. قد تفشل أحجام الخطوات الثابتة في اكتشاف التغيرات الدورية.

57 **تصميم النقاط الشعاعية.** يستبدل تحسين آخر كل مسار باضطرابات من مركز مشترك:

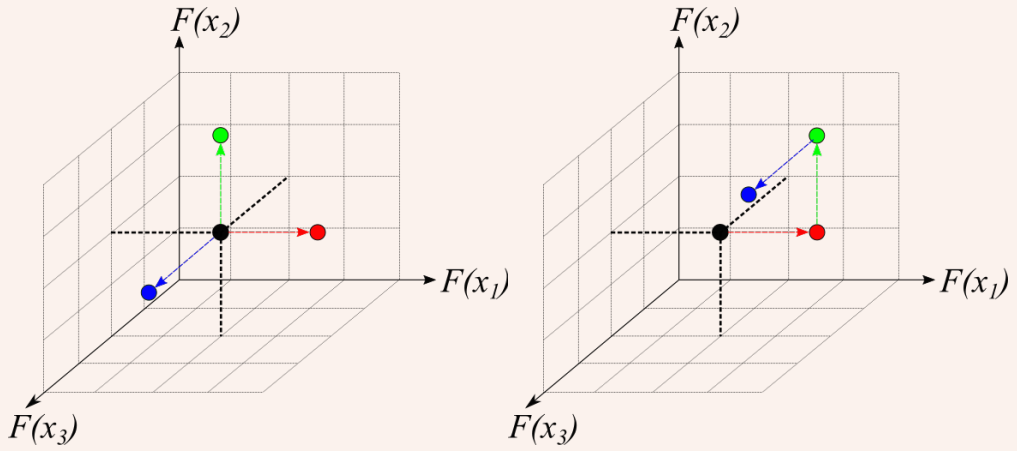
- بدلاً من إنشاء مسار باضطراب المتغيرات تسلسلياً، تستخدم الطريقة المحسنة نقطة مركزية في فضاء الكميات.
- يُضطرب كل متغير بصورة مستقلة من هذا المركز، مما يلغي التكرار ويحسن كفاءة أخذ العينات.

يقارن الشكل 63.6 بين النهج التقليدي القائم على المسار (أ) ونهج النقاط الشعاعية (ب).

58 باختصار، تدمج طريقة Morris المحسنة التحسينات الأساسية الآتية:

- التحويل إلى فضاء الكميات: يضمن تمثيلاً منتظماً للمتغيرات.
- التهيئة بـ LHS: تحسن التغطية الهامشية وقد تقلل التراكب.
- أحجام خطوات ثابتة أو متناوبة: تقلل خطر أن تفوت خطوة واحدة سمات مختارة للاستجابة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) المسار (b) النقاط الشعاعية

شكل 63.6: مقارنة بين طريقتي المسار (أ) والنقاط الشعاعية (ب) من أجل $k = 3$ متغيرات عشوائية في فضاء الكميات الفائق.

- أخذ عينات النقاط الشعاعية: يتجنب الاعتماد التسلسلي لخطوات المسار وقد يقلل التقييمات المتكررة.

يمكن لهذه التحسينات أن تحسن تغطية الفضاء وتقلل التقييمات المتكررة. وينبغي تقييم فائدتها للاستجابة المعنية، ولا سيما عندما يكون وجود الدورية أو الانقطاعات أو التفاعلات القوية معقولاً.

63.4.1.1 مثال 63.6: طريقة Morris

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

انظر في النظام نفسه من الأمثلة السابقة:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

حيث المدخلات هي:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: المتوسط = 10، والانحراف المعياري = 2.
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: المتوسط = 20، والانحراف المعياري = 3.

الهدف استخدام طريقة Morris لتحديد الآثار الأولية لـ X_1 وX_2 في المخرج Y.

خطوات طريقة Morris

1. طبّع نطاقات المدخلات إلى $[0, 1]$.
2. ولّد نقطة أساس $\mathbf{X}_{\text{baseline}}$.
3. اضطرب متغيراً مدخلاً واحداً في كل مرة بحجم خطوة Δ، مع إبقاء المتغيرات الأخرى ثابتة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4. احسب الآثار الأولية لكل متغير كما يأتي:

$$EE = \frac{f(\mathbf{X}_{+i}) - f(\mathbf{X})}{\Delta},$$

حيث $\mathbf{X}_{+i}$ هو المدخل المضطرب.

5. كرر ذلك لمسارات متعددة واجمع النتائج (متوسط EE وانحرافه المعياري).

63.4.2 مؤشرات Sobol للحساسية القائمة على التباين

59 توفر مؤشرات Sobol تفكيكاً عالمياً لتباين المخرجات لنموذج

$$Y = g(X_1, \dots, X_k), \tag{63.20}$$

ذي مدخلات مستقلة تبادلياً. وتحت شروط معيارية للتكامل التربيعي، يمكن كتابة الاستجابة على صورة تفكيك تحليل التباين الدالي

$$g(\mathbf{X}) = g_0 + \sum_i g_i(X_i) + \sum_{i<j} g_{ij}(X_i, X_j) + \cdots + g_{1\dots k}(X_1, \dots, X_k), \tag{63.21}$$

ويتفكك التباين إلى مساهمات متعامدة،

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \cdots + V_{1\dots k}. \tag{63.22}$$

وهذا التفكيك أساس مؤشرات الحساسية العالمية التي قدمها Sobol', 2001.

63.4.2.1 مؤشرات الرتبة الأولى

60 مساهمة الرتبة الأولى للمدخل X_i هي

$$V_i = \operatorname{Var}_{X_i}\!\left(\mathbb{E}[Y \mid X_i]\right), \tag{63.23}$$

ومؤشر Sobol المطبع له هو

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}. \tag{63.24}$$

ومن ثم فإن S_i هو جزء تباين المخرجات المفسر بتغيير X_i وحده، بعد المتوسط على توزيعات جميع المدخلات الأخرى. وإذا كان $S_i = 0.60$، فإن الأثر الرئيسي لـ X_i يمثل 60% من تباين المخرجات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63.4.2.2 مؤشرات التفاعل والأثر الكلي

61 يقيس مؤشر الرتبة الثانية $S_{ij} = V_{ij}/V(Y)$ التباين الناجم عن تفاعل X_i وX_j الذي لم يُنسب بالفعل إلى أي من الأثرين الرئيسيين. وتُعرّف مؤشرات الرتب العليا بصورة مماثلة. وللمدخلات المستقلة،

$$\sum_{i} S_i + \sum_{i<j} S_{ij} + \cdots + S_{1\cdots k} = 1. \tag{63.25}$$

وبالتالي فإن $1 - \sum_i S_i$ هو المساهمة المجمعة لجميع التفاعلات.

62 يجمع مؤشر الأثر الكلي كل حد تباين يتضمن X_i:

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\operatorname{Var}_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\mathbb{E}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}])}{V(Y)} \tag{63.26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{X}_{\sim i}}\left(\operatorname{Var}_{X_i}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}]\right)}{V(Y)}, \tag{63.27}$$

حيث تدل $\mathbf{X}_{\sim i}$ على جميع المدخلات عدا X_i. ويقيس الفرق $S_{T_i} - S_i$ مدى مشاركة X_i في التفاعلات.

63.4.2.3 التفسير

- تشير S_i الكبيرة إلى أثر مباشر قوي.
- تشير S_{T_i} الكبيرة مع S_i صغيرة إلى أن المتغير مهم أساساً من خلال التفاعلات.
- إذا كانت S_{T_i} قريبة من الصفر، فيمكن عادة تثبيت X_i في أي موضع ضمن توزيعه المحدد مع أثر ضئيل في تباين المخرجات.
- إذا كان مجموع مؤشرات الرتبة الأولى قريباً من الواحد، يكون النموذج جمعياً تقريباً عبر المجال المدروس.

63.4.2.4 الحساب والتكلفة

63 تُقدر مؤشرات Sobol عادة بمصفوفات أخذ عينات مقترنة وتقييمات «التقاط–تثبيت». ويتطلب تصميم شائع الاستخدام نحو $N(k+2)$ تقييماً للنموذج لتقدير جميع مؤشرات الرتبة الأولى والأثر الكلي لـ k من المدخلات؛ ويزيد تقدير جميع مؤشرات الرتبة الثانية التكلفة عموماً إلى نحو $N(2k+2)$ (Saltelli, 2002). ولأن المؤشرات نفسها تقديرات مونت كارلو، ينبغي فحص التقارب والإبلاغ عن فترات الثقة عندما يكون ذلك ممكناً.

64 قد تصبح الطريقة باهظة عندما يكون كل تحليل عناصر محددة لاخطي مكلفاً. ويمكن حينئذ ملاءمة نماذج بديلة، أو توسعات فوضى متعددة الحدود، أو نماذج مختزلة الرتبة أولاً، ثم تقييم مؤشرات Sobol على النموذج البديل بعد التحقق من دقته التنبؤية.

63.4.2.5 العلاقة بفرز Morris

65 تجيب طريقتا Morris وSobol عن سؤالين مترابطين لكن مختلفين. فـMorris طريقة فرز أساساً: باستخدام $r(k+1)$ تقييماً ترتب المدخلات باستعمال μ_i^*، وتشير إلى لاخطية أو تفاعلات محتملة من خلال

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

σ_i. أما تحليل Sobol فهو تفكيك كمي للتباين: يفصل المساهمات المباشرة والكلية، لكنه يتطلب عادة تقييماً أكثر بكثير. ولذلك يكون التسلسل العملي استخدام Morris لإزالة المدخلات المهملة ثم تطبيق تحليل Sobol على المجموعة المختزلة.

66 يفترض التفكيك الكلاسيكي في المعادلة 63.22 مدخلات مستقلة. ومع المدخلات المترابطة، لا تعود الآثار الرئيسية والتفاعلية مفصولة بصورة فريدة بواسطة تفكيك ANOVA الكلاسيكي. وينبغي حينئذ النظر في المؤشرات الشرطية أو المجمعة، أو مقاييس التخصيص مثل آثار Shapley؛ وعلى الأقل يجب التصريح بنموذج الاعتماد صراحة.

63.4.3 مقارنة طرائق النشر والحساسية

67 يميز الجدول 63.4 طرائق نشر عدم اليقين من طرائق الحساسية. وقد تدعم تصاميم أخذ العينات مثل LHS أياً من المهمتين، لكنها ليست مقاييس حساسية بذاتها.

جدول 63.4: مقارنة طرائق نشر عدم اليقين والحساسية

القيد الرئيسي	التفاعلات	التكلفة المعتادة	الدور الأساسي	الطريقة
تقارب إحصائي بطيء للنماذج المكلفة	ملتقطة ضمناً	N تقييمات	عدم اليقين في المخرجات	مونت كارلو العادي
يعتمد مكسب الكفاءة على الاستجابة ومعالجة الاعتماد	ملتقطة من خلال النموذج المقيّم	N تقييمات	تصميم أخذ عينات لـ UQ أو SA	LHS
صالحة قرب خط الأساس فقط؛ ضعيفة للاخطية القوية	غير محلولة	$2k+1$ تقييماً	النشر والترتيب المحليان	TSFD/OAT من الرتبة الأولى
نمو أسي وتمثيل خشن بمستويين	مضمنة عند الأركان المأخوذة عيناتها	2^k تقييماً	عزوم مخرجات تقريبية	تصميم ركني بمستويين
لا يخصص مساهمات تفاعل منفصلة	يشار إليها بالاشتراك مع اللاخطية من خلال σ_i	$r(k+1)$ تقييماً	فرز عالمي	Morris
تكلفة حسابية عالية؛ والصيغة الكلاسيكية تفترض مدخلات مستقلة	مكممة من خلال آثار الرتبة الأولى والعليا والكلية	نحو $N(k+2)$ لمؤشرات الرتبة الأولى والكلية	تفكيك عالمي للتباين	Sobol

63.4.4 تحديد المتغيرات العشوائية المهمة

68 يُفسر فرز Morris المعياري عادة بواسطة μ_i^* وσ_i. ويقدم إجراء النقاط الشعاعية المعدل المستخدم في المثال التالي قاعدة عتبة إضافية (Gakuhari, 2021). ولأن هذه القاعدة خاصة بذلك الإجراء، فلا ينبغي عرضها كجزء من طريقة Morris العالمية.

69 لتكن M_i^* أكبر قيمة مطلقة للأثر الأولي المرصود للمتغير العشوائي i. عند كل تحديث:

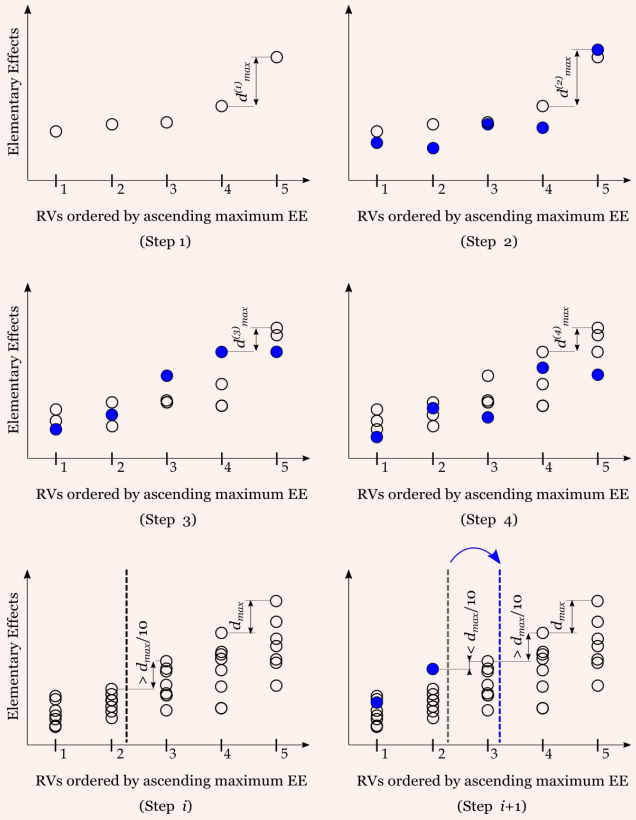
1. رتّب قيم M_i^* تصاعدياً وعرّف الفجوات المتجاورة $d_j = M^*_{(j+1)} - M^*_{(j)}$.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. لتكن $d_{\max}^{(q)} = \max_j d_j$ بعد التحديث q. تابع التهيئة حتى تحقق ثلاث قيم متتالية

$$\min\left(d_{\max}^{(q-2)}, d_{\max}^{(q-1)}, d_{\max}^{(q)}\right) \geq \frac{1}{2}\max\left(d_{\max}^{(q-2)}, d_{\max}^{(q-1)}, d_{\max}^{(q)}\right). \tag{63.28}$$

3. بعد التهيئة، افحص القيم المرتبة بدءاً من طرف الحساسية المنخفضة، وضع العتبة عند أول فجوة متجاورة تحقق $d_j \geq d_{\max}/10$. وتُصنف المتغيرات فوق العتبة مؤقتاً على أنها مهمة.
4. أعد حساب الآثار الأولية للمتغيرات دون العتبة. وإذا تغير التصنيف، فأعد المتغير المقبول حديثاً وكرر التحديث السابق.



شكل 63.7: التهيئة وما بعد التهيئة في إجراء الفرز المعدل بالنقاط الشعاعية

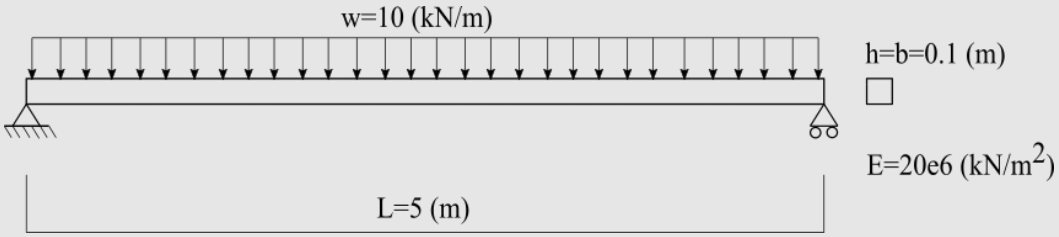
63.4.4.1 مثال 63.7: طريقة Morris؛ تحديد المتغيرات المهمة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من Gakuhari, 2021

يُوضح إجراء النقاط الشعاعية المعدل بكمرة بسيطة الاستناد خاضعة لحمل موزع بانتظام. والكمية موضع الاهتمام هي الإزاحة الرأسية القصوى عند منتصف البحر.

يُعامل الحمل المنتظم w، وطول الكمرة L، وارتفاع المقطع h على أنها RV1، وRV2، وRV3 على التوالي. ويُعطى كل منها توزيعاً عادياً بمعامل تباين قدره 10%، وتُقيّم القيم العظمى الجارية M_i^* للقيم المطلقة للآثار الأولية.



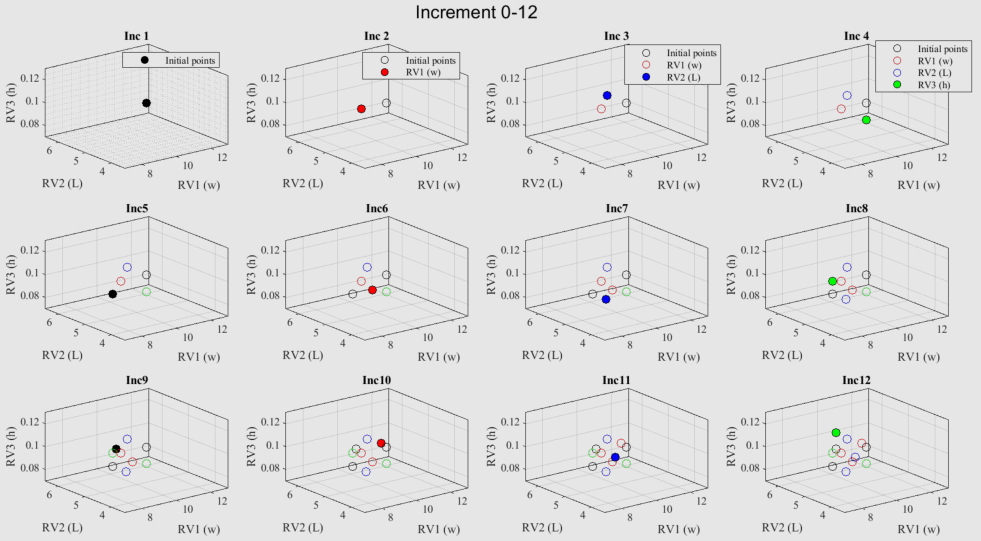
لأن مخرجات هذا التحليل هي التشوه الرأسي عند مركز الكمرة، يمكن تقييم أثر كل متغير عشوائي مسبقاً بالمعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} I &= \frac{bh^3}{12} \\ \delta &= \frac{5wL^4}{384EI} \\ &= \frac{5wL^4}{32Ebh^3} \end{aligned} \tag{63.29}$$

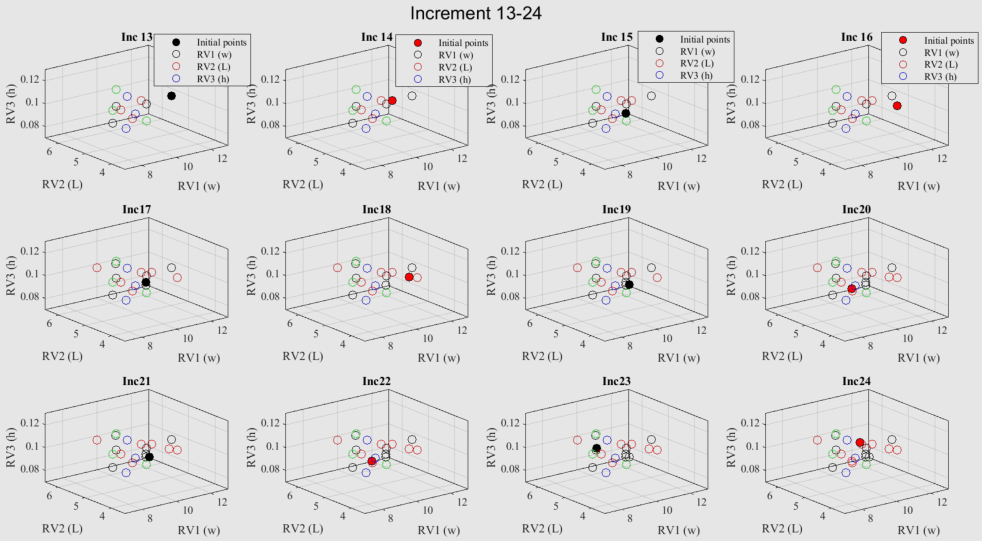
تتنبأ الأسس التحليلية بالترتيب: ينبغي أن يهيمن L (RV2) لأن $\delta \propto L^4$، يليه h (RV3)، الذي له $\delta \propto h^{-3}$. ويدخل الحمل w (RV1) خطياً.

تُظهر اللوحات أدناه، في فضاء الكميات $[0,1]$، النقاط المختارة عند تقييمات متتالية للآثار الأولية. ويضيف كل صف تهيئة مركزاً واحداً وثلاث نقاط شعاعية، مما ينتج أثراً أولياً واحداً لكل متغير عشوائي. وتوفر ثلاثة تحديثات من هذا النوع $d_{\max}^{(1)}$، و$d_{\max}^{(2)}$، و$d_{\max}^{(3)}$. ولأن شرط الاستقرار في المعادلة 63.28 متحقق، تنتهي التهيئة عند الزيادة 12، ويُصنف RV2 وRV3 مؤقتاً على أنهما مهمان.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



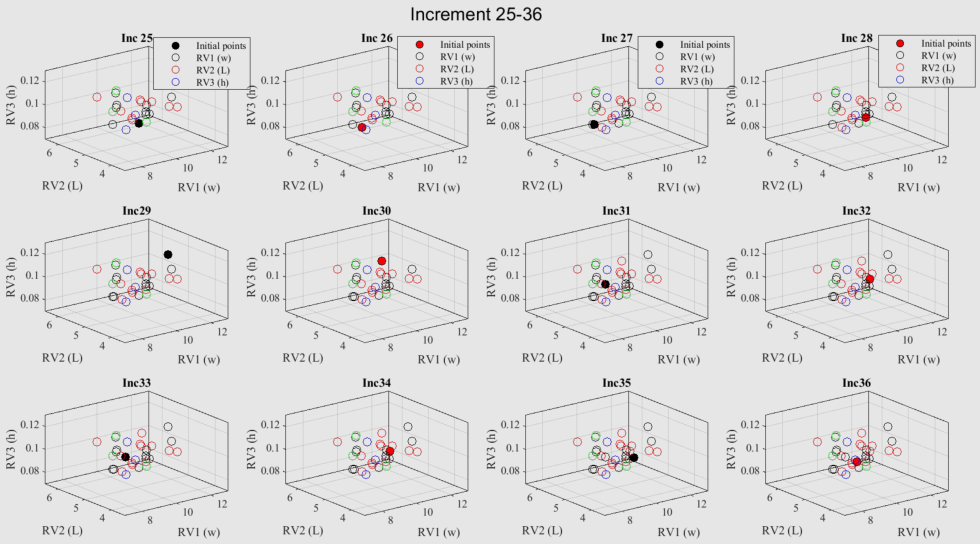
التهيئة



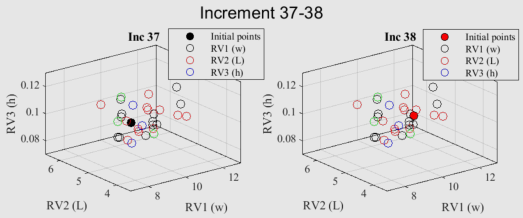
ما بعد التهيئة (RV2 وRV3 ثابتان)

المتغيرات العشوائية المختارة في فضاء كمياتها (Inc=0-24)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



ما بعد التهيئة (RV2 وRV3 ثابتان)



ما بعد التهيئة (RV2 وRV3 ثابتان)

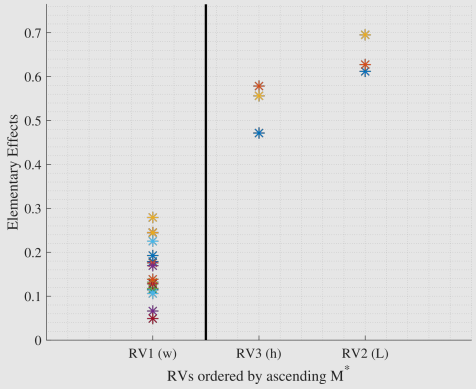
المتغيرات العشوائية المختارة في فضاء كمياتها (Inc=25-38)

بعد التهيئة، يبقى RV2 وRV3 في المجموعة المهمة؛ وتركز تقييمات ما بعد التهيئة اللاحقة على RV1 لتحديد ما إذا كان تصنيفه يتغير.

الميزانية المحددة هي $(n_{\mathrm{RV}}+1)\times 10 = 40$ تقييماً للأثر الأولي (Sohier, Farges **and** Piet-Lahanier, 2014). ولأن آخر تقييمين مجدولين يقابلان RV2 وRV3، وقد احتُفظ بهما بالفعل، فلا تُكتسب منهما معلومات تصنيف إضافية، ويتوقف الإجراء الموضح عند الزيادة 38.

يتفق الترتيب الناتج مع المعادلة 63.29: لطول الكمرة التأثير الأكبر في الإزاحة، يليه ارتفاع المقطع، بينما يكون للحمل الموزع بانتظام أصغر تأثير قائم على الأس عبر نطاقات نسبية متقاربة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



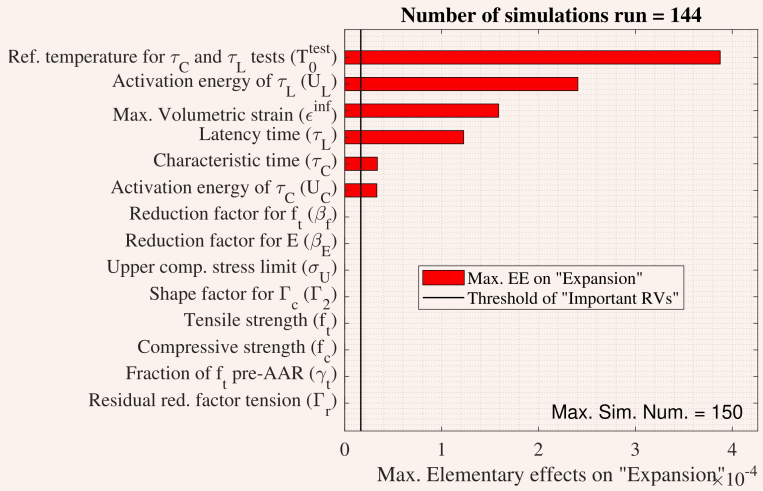
نتائج اختبار الكمرة البسيطة.

63.4.5 مخططات الإعصار

70 مخطط الإعصار ملخص رسومي لدراسة محددة لعامل واحد في كل مرة. فلكل مدخل، يُقيّم النموذج عند قيم منخفضة وعالية مختارة بينما تبقى جميع المدخلات الأخرى عند خط أساس. وتُرسم فترة المخرجات الناتجة كشريط أفقي، وتُرتب الأشرطة حسب الطول.

71 يسهل شرح مخططات الإعصار وهي مفيدة للفرز الأولي، لكنها محلية بالنسبة إلى خط الأساس والنطاقات المختارة. ولا تكشف التفاعلات بذاتها، وقد يتغير ترتيبها عندما يتغير خط الأساس أو فترة الاضطراب. وتُعرض نتائج Morris بصورة طبيعية أكثر في مخطط σ–μ^*، بينما تُعرض نتائج Sobol كمؤشرات للرتبة الأولى وللأثر الكلي؛ وقد يلخص مخطط أعمدة أياً منهما، لكن ينبغي تسميته وفق المقياس الأساسي.

72 يوضح الشكل 63.8 حالة لا يكون فيها إلا للمتغيرات الستة الأولى تأثير مادي تحت قاعدة الاضطراب المعتمدة. ويمكن لنتيجة كهذه أن تدعم اختزال مجموعة المعاملات قبل بدء التحليل العكسي.

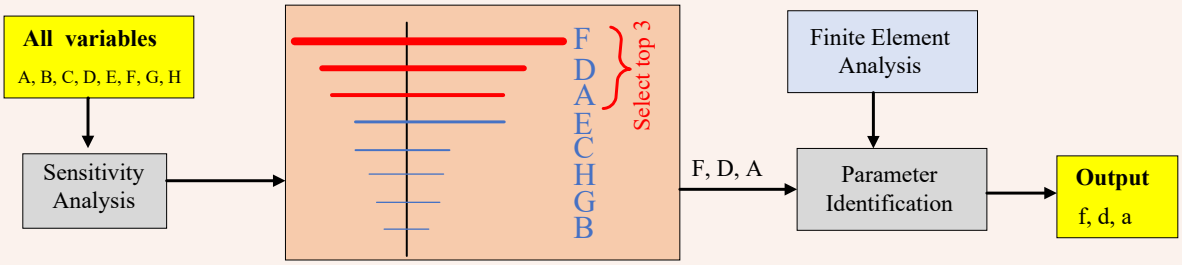


شكل 63.8: مثال على ترتيب الحساسية (Gakuhari, 2021)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

63.5 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات

73 يحدد تحليل الحساسية المعاملات التي يمكنها تغيير التنبؤات؛ ويسأل تعيين المعاملات عن قيم تلك المعاملات المدعومة بالقياسات. والتمييز مهم. فالمعامل ذو الحساسية الكلية المهملة لا يمكن عادة تعيينه من الاستجابة المختارة، مهما بلغت درجة تطور المحسن. وعلى العكس، قد يظل المعامل شديد الحساسية صعب التعيين إذا كان أثره غير قابل تقريباً للتمييز من أثر معامل آخر، الشكل 63.9.



شكل 63.9: يحدد تحليل الحساسية المعاملات المرشحة؛ ويحدد تعيين المعاملات القيم التي تدعمها المشاهدات

74 لذلك يكون التسلسل العملي كما يأتي:

1. تحديد الكميات موضع الاهتمام ونطاقات المعاملات المعقولة؛
2. فرز المعاملات والإبقاء على ما له تأثير مادي؛
3. فحص ما إذا كانت للمعاملات المحتفظ بها بصمات استجابة مميزة؛
4. تعيين المجموعة الفرعية القابلة للدفاع عنها فقط، مع تثبيت الباقي أو تجميعه أو تنظيمه.

جدول 63.5: الأدوار المتميزة والمتكاملة لتحليل الحساسية وتعيين المعاملات

تعيين المعاملات	تحليل الحساسية	الجانب
أي قيم المعاملات تدعمها المشاهدات؟	أي المدخلات يمكن أن تغير المخرجات المختارة تغيراً مادياً؟	السؤال
القياسات، ونموذج البواقي، والنموذج الأمامي	النطاقات أو التوزيعات المعقولة والنموذج الأمامي	المعلومات المستخدمة
قيم المعاملات المعايرة وعدم يقينها أو تشخيصاتها	الترتيب، أو الفرز، أو تخصيص التباين	النتيجة الأساسية
قد يظل معامل حساس غير قابل للتعيين عندما تختلط الآثار	لا يمكن تعلم معامل غير حساس من الاستجابة المختارة	تحذير الفشل

75 يطوّر الفصل 64 المسألة العكسية بالتفصيل. فهو يصوغ المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة، ويفحص قابلية التعيين وعدم تطابق النموذج، ويقارن بين نهج Levenberg–Marquardt وRANSAC والنهج البايزي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ولذلك ينتهي هذا الفصل حيث تبدأ مسألة القرار: بمجموعة مختزلة ذات معنى فيزيائي من المعاملات ووصف صريح لعدم اليقين المتبقي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

64 القرارات: طرائق تعيين المعاملات

ملخص

أسس الفصل 63 كيفية توصيف المدخلات غير المؤكدة ونشرها عبر النماذج الحاسوبية، وكيفية ترتيب تأثيرها من خلال تحليل الحساسية. ويتناول هذا الفصل المسألة العكسية: تحديد قيم المعاملات التي تدعمها المشاهدات وتكميم مقدار الثقة الذي ينبغي وضعه فيها.

يصوغ الفصل المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة، ويشرح قابلية التعيين، والتحجيم، والحدود، والتنظيم، وعدم تطابق النموذج، والمعايرة، والتحقق. ثم يقارن بين تحسين Levenberg–Marquardt، وRANSAC للبيانات الملوثة بقيم شاذة كبيرة، والاستدلال البايزي لعدم اليقين اللاحق في المعاملات. ويترجم دليل برنامج MATLAB–تحليل العناصر المحددة الكامل النظرية إلى سير عمل عناصر محددة مدفوع بجداول البيانات. ويدمج القسم الأخير الجزأين A وB ويمهد للفصول اللاحقة المؤدية إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE).

64.1 تعيين المعاملات بوصفه مسألة عكسية . 1984
64.2 التطبيقات وإطار القرار 1986
64.2.1 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات 1986
64.2.2 إطار القرار: أي طريقة ومتى؟ . . 1986
64.3 جودة البيانات والحصانة 1986
64.3.1 مصادر تلوث البيانات 1986
64.3.2 تقدير التوافق الحصين: RANSAC 1987
64.4 خوارزمية Levenberg–Marquardt . 1990
64.4.1 نهج النمذجة واختيار النموذج . . 1991
64.4.2 المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة 1991
64.4.3 خطوة تحديث Leven-berg–Marquardt وحدس الخوارزمية 1991
64.4.4 مثال 64.1: ملاءمة نموذج قطع زائد لاخطي 1992
64.4.5 التحجيم والحدود والتنظيم . . . 1994
64.4.6 قابلية التعيين 1995
64.4.7 عدم تطابق النموذج 1996
64.5 تعيين المعاملات البايزي 1996
64.5.1 تعيين المعاملات البايزي: الإعداد 1997
64.5.2 تقدير MAP والتقديرات النقطية 1997
64.5.3 أخذ العينات اللاحق وMCMC للمعاملات 1998
64.5.4 مثال 64.2: انحدار بايزي بأساس تربيعي وأخذ عينات Metropo-lis–Hastings 1998
64.5.5 مثال محلول: الاستدلال البايزي لمعاملات التدهور 1999
64.5.6 متى يُستخدم التعيين البايزي . . 1999
64.6 خوارزمية Levenberg–Marquardt عملياً 2000
64.6.1 ممارسة المربعات الصغرى . . . 2002
64.7 سير العمل الهجين وأفضل الممارسات . . 2009
64.7.1 المعايرة والتحقق 2009
64.7.2 التطبيقات الإنشائية 2009
64.7.3 إطار قرار سير العمل 2010
64.8 الجسر إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء 2010

64.1 تعيين المعاملات بوصفه مسألة عكسية

[1] يعد تعيين المعاملات حاسماً لعدة تطبيقات رئيسية: (i) معايرة *النموذج*—مواءمة نماذج العناصر المحددة مع النتائج التجريبية المستمدة من الاختبارات المختبرية أو الميدانية؛ (ii) *مراقبة الصحة الإنشائية*—تحسين نماذج العناصر المحددة لتطابق بيانات الحساسات وتتبع التغيرات مع الزمن؛ و(iii) تحديد نموذج *الطلب*—إنشاء نماذج الطلب الزلزالي للتصميم القائم على الأداء (انظر §67.5).

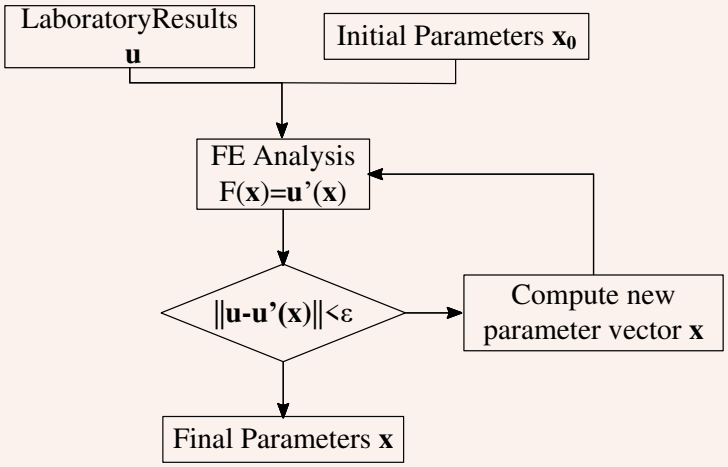
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

سير عمل تعيين المعاملات

تتبع عملية تعيين المعاملات سير عمل تكرارياً مدفوعاً بالبيانات يوضحه الشكل 64.1. والخطوات الأساسية هي:

1. **الإعداد الأولي:** احصل على نتائج المختبر أو الموقع (القياسات)، وأنشئ مجموعة أولية من قيم المعاملات $\mathbf{x}_0$ استناداً إلى المعرفة السابقة أو معايير التصميم أو المراجع.
2. **تقييم النموذج:** نفّذ تحليل عناصر محددة (FE) باستخدام قيم المعاملات الحالية للحصول على تنبؤات النموذج.
3. **تقييم الخطأ:** قارن تنبؤات النموذج بقياسات المختبر/الموقع بحساب البواقي (الأخطاء). ويكمّم معيار البواقي مدى ملاءمة المعاملات الحالية للبيانات.
4. **فحص التقارب:** إذا كانت البواقي صغيرة بدرجة مقبولة (أي يطابق النموذج البيانات)، فتوقف—تم تعيين المعاملات. وإلا فانتقل إلى الخطوة 5.
5. **تحديث المعاملات:** استخدم خوارزمية تحسين لحساب قيم معاملات محسنة $\mathbf{x}_{new}$ ينبغي أن تقلل البواقي.
6. **التكرار:** عد إلى الخطوة 2 بالمعاملات المحدثة وكرر حتى التقارب.

حلقة التغذية الراجعة هذه هي جوهر تعيين المعاملات: يُعامل النموذج بوصفه دالة $f(\mathbf{x})$ تحول المعاملات إلى تنبؤات، ويُستخدم التحسين لإيجاد قيم المعاملات التي تطابق المشاهدات أفضل مطابقة.



شكل 64.1: مبدأ نهج تعيين النظام: تحسين تكراري للمعاملات لتقليل عدم التطابق بين النموذج والبيانات.

رياضياً، لتحتوِ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ القياسات، ولتحتوِ $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ تنبؤات النموذج المقابلة. ومتجهة البواقي هي

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}. \tag{64.1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5 تكون المسألة العكسية صعبة عندما يكون النموذج لاخطياً، أو تكون البيانات شحيحة أو مترابطة، أو تنتج عدة تركيبات من المعاملات استجابات متشابهة، أو تحتوي المشاهدات على قيم شاذة أو عدم تطابق منهجي.

64.2 التطبيقات وإطار القرار

6 تشترك مجالات التطبيق الثلاثة المذكورة أعلاه—معايرة النموذج، ومراقبة الصحة الإنشائية، وتحديد الطلب الزلزالي—في بنية مشتركة: يجب أن تُعلم المشاهدات معاملات مجهولة تؤثر في التنبؤات. ويعتمد اختيار طريقة تقدير المعاملات على جودة البيانات، ولاخطية النموذج، والميزانية الحسابية، وعواقب عدم اليقين.

64.2.1 من تحليل الحساسية إلى تعيين المعاملات

7 تحليل الحساسية شرط مسبق، وليس بديلاً للتعيين. ويحدد الفصل 63 المعاملات القادرة على التأثير في الاستجابات المختارة. وينبغي أن يبدأ التحليل العكسي بتلك المجموعة المختزلة. فتُثبت المعاملات ذات الحساسية الكلية المهملة؛ وتُجمع المعاملات ذات الآثار التي يصعب تمييز بعضها من بعض، أو تُنظم، أو تستنير بقياسات إضافية. ويحسن هذا الاختزال الكفاءة الحسابية وقابلية التفسير معاً.

64.2.2 إطار القرار: أي طريقة ومتى؟

8 يشرح هذا الفصل ثلاثة نهج:

Levenberg-Marquardt (القسم 64.4): الخيار الافتراضي لمعظم المسائل. سريع ومستقر وكفء حسابياً عندما تكون البيانات غاوسية إلى حد كبير. وينتج تقدير نقطة وعدم يقين تقريبي للمعاملات.

RANSAC (القسم 64.3.2): يوصى به عند الاشتباه في قيم شاذة كبيرة أو تأكيد وجودها. ويحدد مجموعة توافق من البيانات الداخلية قبل إعادة الملاءمة بالمربعات الصغرى. وهو حصين أمام التلوث الذي يضلل L-M.

الاستدلال البايزي (§ 64.5): ضروري عندما يلزم عدم اليقين اللاحق الكامل لصنع القرار. وهو أعلى تكلفة حسابياً لكنه يوفر فترات مصداقية، وارتباطات لاحقة، وحساسية للافتراضات القبلية.

9 قد يجمع سير عمل عملي بين هذه الطرائق: استخدام RANSAC لتنظيف البيانات، وتطبيق L-M للمعايرة والتحقق الأوليين، واستخدام الاستدلال البايزي إذا كان عدم يقين المعاملات يؤثر مادياً في القرارات اللاحقة.

64.3 جودة البيانات والحصانة

64.3.1 مصادر تلوث البيانات

10 تحتوي القياسات الحقيقية من المختبرات والمواقع على مصادر مختلفة للخطأ والتلوث:

- **ضوضاء القياس:** أخطاء عشوائية، غاوسية تقريباً، متأصلة في الحساسات والأجهزة.
- **الانحياز المنهجي:** إزاحة أو انجراف ثابت في القياسات بسبب معايرة الأجهزة أو التأثيرات البيئية.
- **تعطل الحساس:** فشل مؤقت أو دائم لجهاز مراقبة، ينتج قراءات شاذة أو مجمدة.
- **القيم الشاذة الكبيرة:** نقاط معزولة ناجمة عن أخطاء إدخال البيانات، أو تداخل عابر، أو أعطال المعدات.
- **عدم مطابقة النموذج:** عدم تطابق منهجي بين تنبؤات النموذج والمشاهدات بسبب فيزياء أو شروط حدية غير ممثلة.

11 تُعالج ضوضاء القياس الغاوسية طبيعياً بالمربعات الصغرى (القسم 64.4). وتتطلب القيم الشاذة الكبيرة والتلوث المنهجي معالجة مسبقة أو طرائق حصينة.

64.3.2 تقدير التوافق الحصين: RANSAC

12 يقدّر توافق العينات العشوائية (RANSAC) نموذجاً من بيانات ملوثة بقيم شاذة كبيرة (Fischler and Bolles, 1981). ومن الأفضل فهمه بوصفه حلقة بحث خارجية عن التوافق. فتُلاءم المعاملات المرشحة مع مجموعات فرعية عشوائية دنيا أو صغيرة؛ وتُصنف جميع المشاهدات بواسطة عتبة للبواقي؛ ويُحتفظ بأقوى مجموعة توافق؛ ثم تُعاد ملاءمة المعاملات النهائية باستخدام جميع النقاط الداخلية المقبولة.

64.3.2.1 الخوارزمية

1. اختر مجموعة فرعية عشوائية كبيرة بما يكفي لتقدير النموذج.
2. لائم متجهة معاملات مرشحة مع تلك المجموعة الفرعية.
3. احسب البواقي لمجموعة البيانات الكاملة، وصنف المشاهدات باستخدام عتبة معلنة.
4. قيّم المرشح بعدد النقاط الداخلية، وعند الاقتضاء بجودة الملاءمة ضمن مجموعة التوافق.
5. كرر للعدد المحدد من المحاولات أو العدد المحدث تكيفياً.
6. أعد ملاءمة النموذج باستخدام جميع النقاط الداخلية من أفضل مجموعة توافق.
7. راجع المشاهدات المستبعدة واختبر الملاءمة النهائية على بيانات مستقلة.

13 إذا كان كسر النقاط الداخلية تقريباً w، وحجم العينة الأدنى s، والاحتمال المطلوب لسحب مجموعة فرعية داخلية بالكامل مرة واحدة على الأقل p، فإن تقريب التخطيط المألوف هو

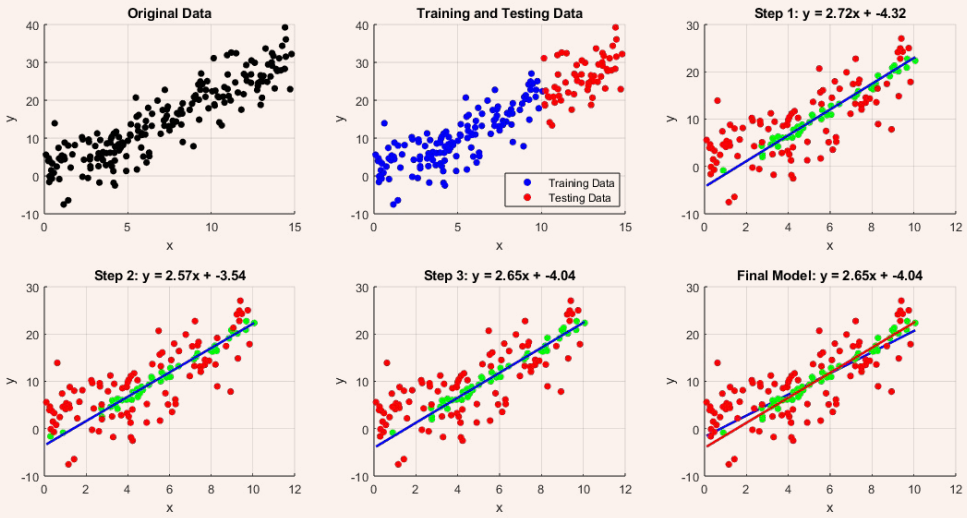
$$N \geq \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^s)}. \tag{64.2}$$

ولأن w مجهول في البداية وقد تكون افتراضات أخذ العينات غير كاملة، ينبغي تحديث عدد المحاولات بتحفظ مع العثور على مجموعات توافق أفضل.

14 ينبغي ربط عتبة النقاط الداخلية بعدم يقين القياس أو بتقدير حصين للمقياس، لا اختيارها لمجرد تعظيم عدد النقاط المقبولة. يعالج RANSAC التلوث الكبير؛ لكنه لا يستبدل نموذجاً احتمالياً لضوضاء القياس العادية.

مثال على الانحدار الخطي البسيط

15 يظهر مثال لتطبيق RANSAC على الانحدار الخطي البسيط في الشكل 64.2. وتختار الخوارزمية تكرارياً مجموعات فرعية عشوائية، وتلائم خطوطاً مع كل منها، وتحسب عدد نقاط البيانات الواقعة ضمن عتبة يحددها المستخدم. ويُختار الخط الذي يلتقط أكبر عدد من النقاط الداخلية بوصفه أفضل نموذج.



شكل 64.2: مثال توضيحي للانحدار الخطي باستخدام RANSAC

التطبيق على تدهور الخرسانة

16 يظهر مثال أكثر عملية وتفصيلاً في الشكل 64.3، الذي يوضح تطبيق RANSAC على تعيين نماذج تدهور من المبادئ الأولى في لباب خرسانية مستخرجة من موقع. والهدف تقدير معاملات دالة تحليلية تحكم تدهور الخرسانة بسبب تفاعل القلويات والركام (AAR).

17 من اللباب الميدانية المستخرجة من سد Seminoe، قيس معامل المرونة (E)، ومقاومة الشد (f_t)، ومقاومة الضغط (f_c') عند أعماق وأعمار مختلفة. وكان الهدف ملاءمة نموذج من المبادئ الأولى مع بيانات التدهور هذه مع تصفية ضوضاء القياس والقيم التجريبية الشاذة.

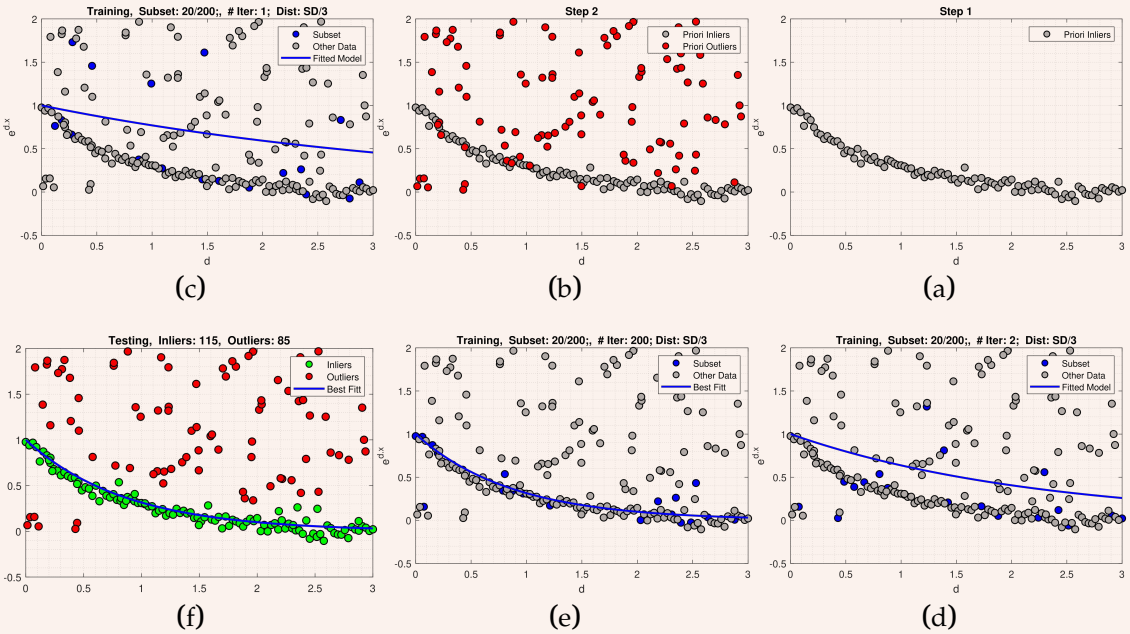
18 تتبع الكمية موضع الاهتمام (QoI)—خصائص الخرسانة المتدهورة—ما يأتي:

$$\frac{\mathrm{QoI}}{\mathrm{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d)\cdot D(t) \tag{64.3}$$

حيث تمثل QoI_0 القيمة الأولية (غير المتضررة) لخاصية الخرسانة، و$D(t)$ الضرر المطبع بدلالة الزمن t، و$f(d)$ معامل تصحيح يأخذ في الحسبان تغير الضرر المعتمد على العمق في السد.

19 يُنمذج معامل العمق كما يأتي:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 64.3: تطبيق RANSAC على تدهور الخرسانة: دراسة حالة (Gakuhari, 2021)

$$f(d) = A \cdot d + B \tag{64.4}$$

حيث يمثل المعاملان A وB تطور الضرر المعتمد على العمق.

20 بالنسبة إلى الضرر المعتمد على الزمن، نُظر في نموذجين متنافسين من المبادئ الأولى استناداً إلى حركية AAR:

$$D(t)|_{\text{النموذج 1}} = (1-\beta)\frac{(1-e^{-t/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - t)/\tau_C}} \tag{64.5}$$

أو:

$$D(t)|_{\text{النموذج 2}} = (1-\beta)\frac{\int_0^t \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - s)/\tau_C}} ds}{\int_0^{t_{\text{end}}} \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L - s)/\tau_C}} ds} \tag{64.6}$$

حيث تمثل τ_C الزمن المميز، وτ_L فترة الكمون، وβ الضرر المقارب طويل الأمد.

21 **عملية RANSAC:**

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22 لأن القياسات الميدانية من السدود تمتد سنوات عديدة ومواقع متعددة لاستخراج اللباب، فإن البيانات تحتوي حتماً على أخطاء قياس وقد تحتوي على قيم شاذة. وينبغي، من حيث المبدأ، أن تلائم غالبية النقاط نموذج AAR من المبادئ الأولى إذا أمكن تحديد القيم الشاذة وإزالتها فقط. ويقترح RANSAC مجموعة توافق تحت النموذج والعتبة المحددين؛ لكن تبقى المراجعة الهندسية مطلوبة قبل معاملة النقاط المستبعدة على أنها غير صالحة.

- **مرحلة البحث عن التوافق:** • **التهيئة:** يحدد المستخدم عدد التكرارات N، وحجم العينة n لكل تكرار، وعتبة تحمل الخطأ (ETT).
- تُحمّل البيانات الميدانية (العمق، والعمر، وخصائص الخرسانة).
- تنفيذ حلقة على N تكراراً: لكل تكرار، اختر عشوائياً n من نقاط البيانات.
- لائم نموذج تدهور AAR مع المجموعة الفرعية ذات n نقطة.
- التقييم: احسب عدد نقاط البيانات الكلية التي تكون مقادير بواقيها دون عتبة تحمل الخطأ (ETT).
- بعد N تكراراً، احتفظ بالنموذج ذي أعلى تقييم (أكثر النقاط الداخلية).
- **مرحلة التصنيف وإعادة الملاءمة:** • اختر النموذج الحاصل على أعلى تقييم أثناء البحث عن التوافق.
- باستخدام هذا النموذج الأفضل، صنف جميع نقاط البيانات على أنها داخلية أو شاذة.
- أعد ملاءمة المعاملات باستخدام جميع النقاط الداخلية المحددة، وافحص المشاهدات المستبعدة قبل التخلص منها نهائياً.

23 **رؤية حاسمة:** في تطبيق تدهور الخرسانة هذا، يمنح النموذج القائم على الفيزياء معيار النقاط الداخلية تفسيراً هندسياً قابلاً للدفاع عنه: تُحكم النقطة مقارنة بآلية تدهور متوقعة لا بمنحنى مرن اعتباطي. ويمكن أيضاً تطبيق RANSAC على النماذج التجريبية والمدفوعة بالبيانات، لكن النموذج المفرط في المرونة قد يمتص التلوث بدلاً من كشفه، ويبقى الاستقراء خطراً بوجه خاص.

24 بمجرد تحديد أفضل مجموعة نقاط داخلية، تُحسن المعاملات $(A,\ B,\ \tau_C,\ \tau_L,\ \beta)$ باستخدام انحدار المربعات الصغرى التقليدي على البيانات الداخلية فقط، مما يعطي تقديرات أقل تأثراً بالتلوث الكبير المستبعد.

25 يعد RANSAC ذا قيمة خاصة في مراقبة الصحة الإنشائية للبنية التحتية المتقادمة لأن بيانات الحساسات الحقيقية والقياسات التجريبية كثيراً ما تحتوي على قراءات زائفة وأعطال حساسات وأخطاء عابرة. ومن خلال اقتراح مجموعة توافق قابلة لإعادة الإنتاج للمراجعة الهندسية، يستطيع RANSAC تقليل تأثير القراءات التالفة بشدة؛ لكنه لا يثبت أن كل مشاهدة مستبعدة خاطئة.

64.4 خوارزمية Levenberg–Marquardt

26 خوارزمية Levenberg–Marquardt (L-M) هي عماد تعيين المعاملات عملياً. فهي تجمع عناصر من تحسين Gauss–Newton والانحدار المتدرج، مما يجعلها حصينة عبر نطاق واسع من الاخطيات مع بقائها كفؤة حسابياً. ويضبط معامل التخميد التكيفي فيها تلقائياً بين التقارب السريع قرب الحل والخطوات الحذرة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في التضاريس الصعبة—وهو توازن جعلها الخيار الافتراضي لمسائل المربعات الصغرى اللاخطية في الهندسة الإنشائية، والهيدرولوجيا، وعلوم المواد، ومجالات كثيرة أخرى.

27 للنظرية الخوارزمية الكاملة لطرائق منطقة الثقة وتحليل التقارب، انظر الملحق Q. يطوّر هذا القسم الصياغة العملية: كيفية إعداد دالة الهدف الموزونة، والتعامل مع التحجيم والحدود، وتشخيص قابلية التعيين، واستخراج عدم يقين المعاملات من تقريب التغاير المحلي. ويوضح مثال محلول لملاءمة قطع زائد الخوارزمية أثناء العمل.

64.4.1 نهج النمذجة واختيار النموذج

28 يبدأ تعيين المعاملات باختيار صنف النموذج:

النماذج القائمة على الفيزياء: تُشتق من الميكانيكا أو الديناميكا الحرارية أو النقل أو الحركية. وعادة تكون لمعاملاتها دلالة فيزيائية، مما يدعم الاستقراء والتفسير الهندسي، لكن قد يبقى عدم تطابق النموذج.

النماذج المدفوعة بالبيانات: تستنتج علاقة دالية من المشاهدات ببنية فيزيائية محدودة. وقد تلائم الاتجاهات المعقدة بكفاءة، لكنها معرضة لمخاطر الاستقراء وقد تتطلب بيانات أكثر.

النماذج الهجينة: تجمع نواة قائمة على الفيزياء مع تصحيح تجريبي، أو نموذج بديل، أو حد لعدم التطابق. ويمكنها تحسين التنبؤات مع الاحتفاظ بالقيود الفيزيائية، شريطة أن تكون أدوار المكونين قابلة للتعيين.

29 في تطبيق معين، يقيد اختيار صنف النموذج المعاملات التي يمكن تقديرها من البيانات المتاحة. وسيعاني نموذج ذو درجات حرية كثيرة جداً بالنسبة إلى البيانات ضعف قابلية التعيين؛ بينما قد يهمل نموذج ذو درجات قليلة جداً فيزياء مهمة وينتج انحيازاً (عدم تطابق النموذج).

64.4.2 المربعات الصغرى اللاخطية الموزونة

30 تصغر المربعات الصغرى اللاخطية العادية

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}. \tag{64.7}$$

وعندما تكون للقياسات وحدات أو تباينات أو ارتباطات مختلفة، تكون دالة الهدف القابلة للدفاع عنها هي المربعات الصغرى الموزونة،

$$\Phi_W(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}, \tag{64.8}$$

حيث $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ مصفوفة تغاير خطأ القياس. ومع مشاهدات مستقلة ذات انحرافات معيارية s_i، يكافئ ذلك تصغير البواقي المطبعة r_i/s_i. وينبغي تجنب الترجيح العددي الاعتباطي لأنه يغير المعنى الهندسي للملاءمة بصمت.

64.4.3 خطوة تحديث Levenberg–Marquardt وحدس الخوارزمية

31 مع مصفوفة Jacobian $\mathbf{J} = \partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\theta}$، تحل خطوة Levenberg–Marquardt

$$\left(\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{J} + \lambda\mathbf{D}\right)\Delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \tag{64.9}$$

حيث تتحكم λ في التخميد وتوفر $\mathbf{D}$ التحجيم.

32 **حدس الخوارزمية:** يتحكم معامل التخميد λ في منطقة الثقة الفعالة، لكنه ليس في ذاته نصف قطر منطقة الثقة. وتنتج القيمة الكبيرة لـ λ خطوة قصيرة ومخمّدة بشدة، تقابل نوعياً منطقة ثقة صغيرة؛ وعندما تكون $\mathbf{D}$ قطرية وموجبة، يصبح الاتجاه شبيهاً بالمتدرج بعد التحجيم. ومع تناقص λ، تقترب الخطوة من خطوة Gauss–Newton ويمكن أن تتقارب بسرعة قرب حد أدنى حسن السلوك. ولا يكون التقارب التربيعي ممكناً إلا تحت شروط مواتية إضافية، ولا ينبغي افتراضه عموماً. وتظل الخوارزمية محلية وقد تتقارب إلى حلول مختلفة من نقاط بداية مختلفة.

64.4.4 مثال 64.1: ملاءمة نموذج قطع زائد لاخطي

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

هذا المثال صغير عمداً بما يكفي لإعادة إنتاجه يدوياً أو ببضعة أسطر من MATLAB®، لكنه لاخطي حقاً في أحد معاملاته المجهولة. انظر في النموذج

$$g(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{a}{b + x}, \qquad \boldsymbol{\theta} = [a, b]^T, \qquad a > 0, \quad b > 0. \tag{64.10}$$

بخلاف متعدد الحدود الخطي في معاملاته، فإن هذا النموذج لاخطي في b، ولذلك تتغير مصفوفة Jacobian فيه مع تقدم التكرارات.

البيانات الاصطناعية واصطلاح البواقي

لأغراض التدقيق، تُولد المشاهدات بدقة من

$$\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$$

عند المواقع الخمسة $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. ومن ثم،

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = 6/(2 + x_i)$	3.000000	2.000000	1.500000	1.200000	1.000000

لا تُضاف ضوضاء قياس في هذا المثال التعليمي، ولذلك تكون دالة الهدف الدنيا صفراً تماماً في الحساب الدقيق. ومع البيانات الحقيقية المشوشة، لا يتطابق تقدير المربعات الصغرى عموماً بصورة دقيقة مع المعاملات المستخدمة لتوليد الاستجابة الأساسية الخالية من الضوضاء.

في كامل المثال، عرّف

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}, \tag{64.11}$$

بحيث

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

لكل مشاهدة،

$$\frac{\partial g_i}{\partial a} = \frac{1}{b + x_i}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial b} = -\frac{a}{(b + x_i)^2}.$$

نقطة البداية وقاعدة التخميد

ابدأ من

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T, \qquad \lambda_1 = 10^{-2},$$

واستخدم تحجيم Marquardt

$$\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}\left(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k\right).$$

في كل محاولة، حل

$$\left(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \lambda_k \mathbf{D}_k\right) \Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\mathbf{J}_k^T \mathbf{r}_k. \tag{64.12}$$

إذا خفضت نقطة المحاولة Φ، فاقبلها وضع $\lambda_{k+1} = \lambda_k/10$؛ وإلا فارفضها واحتفظ بالمعاملات الحالية، وضع $\lambda_k \leftarrow 10\lambda_k$ قبل إعادة حساب خطوة المحاولة. وتُستخدم قاعدة عامل العشرة البسيطة هذه فقط لجعل المثال شفافاً. وتستخدم التطبيقات الإنتاجية عادة نسبة التخفيض الفعلي إلى المتنبأ به لتحديث التخميد بسلاسة أكبر.

التكرار الأول كاملاً

عند $\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T$،

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 4.000000 & 2.000000 & 1.333333 & 1.000000 & 0.800000 \end{bmatrix}^T,$$

ولذلك

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0 & -0.166667 & -0.200000 & -0.200000 \end{bmatrix}^T, \qquad \Phi_0 = 0.553888889.$$

مصفوفة Jacobian هي

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & -4.000000 \\ 0.500000 & -1.000000 \\ 0.333333 & -0.444444 \\ 0.250000 & -0.250000 \\ 0.200000 & -0.160000 \end{bmatrix}.$$

النواتج المطلوبة هي

$$\mathbf{J}_0^T \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.46361111 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.28563086 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_0^T \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.85444444 \\ -3.84392593 \end{bmatrix}.$$

لأن $\mathbf{D}_0 = \operatorname{diag}(1.46361111, 17.28563086)$ و $\lambda_1 = 0.01$، فإن النظام الخطي الأول هو

$$\begin{bmatrix} 1.47824722 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.45848717 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} -0.85444444 \\ 3.84392593 \end{bmatrix}.$$

يعطي الحل

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0.99934608 \\ 0.49165043 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 4.99934608 \\ 1.49165043 \end{bmatrix}.$$

عند نقطة المحاولة المقبولة،

$$\Phi_1 = 0.071941238 < \Phi_0,$$

فتُقبل الخطوة، وتكون قيمة التخميد التالية $\lambda_2 = 10^{-3}$.

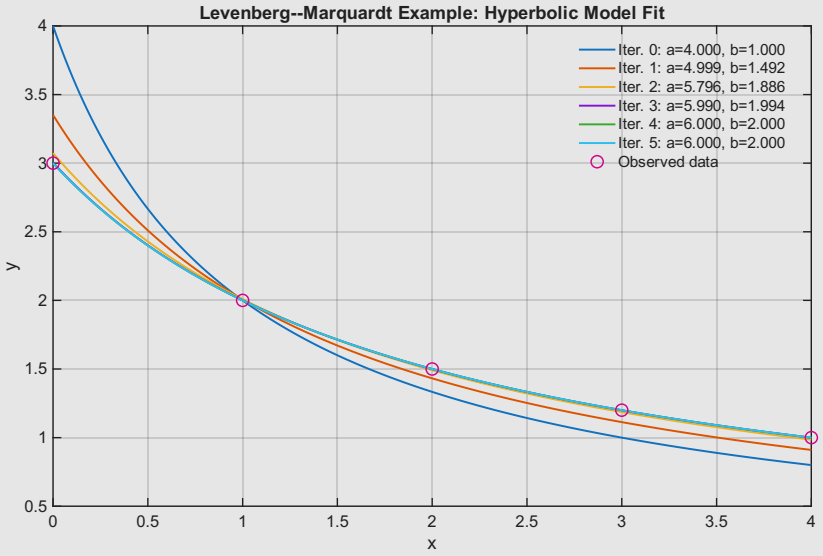
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التكرارات اللاحقة

تؤدي إعادة تقييم البواقي ومصفوفة Jacobian عند كل نقطة مقبولة إلى التسلسل الآتي. أُجريت جميع الحسابات بدقة مزدوجة؛ وقُربت القيم المبلّغ عنها للعرض فقط.

التكرار المقبول	λ_k	a_k	b_k	$\Phi_k = \frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k$
0	–	4.000000	1.000000	5.538889×10^{-1}
1	10^{-2}	4.999346	1.491650	7.194124×10^{-2}
2	10^{-3}	5.795603	1.885772	2.971964×10^{-3}
3	10^{-4}	5.990433	1.994207	8.259246×10^{-6}
4	10^{-5}	5.999974	1.999984	6.810857×10^{-11}
5	10^{-6}	6.000000	2.000000	2.295319×10^{-20}

تتغير مصفوفة Jacobian مع b، مما يؤكد أن هذه مسألة مربعات صغرى لاخطية حقيقية. وتقترب التكرارات المقبولة من الحل الدقيق $\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$، وتقترب دالة الهدف من الصفر حتى دقة الآلة. وستترك محاولة مرفوضة متجهة المعاملات دون تغيير، وتزيد λ قبل حساب خطوة جديدة.



يرد برنامج MATLAB®يعيد إنتاج جدول التكرارات في الملحق I.5.1. وهو يستخدم اصطلاح البواقي ومصفوفة التحجيم وقاعدة التخميد نفسها كما في الاشتقاق أعلاه.

ويعامل عداد التكرارات المقبولة منفصلاً عن عداد المحاولات. ولذلك تزيد المحاولة المرفوضة λ وتعيد حساب الخطوة من دون تقديم جدول التكرارات خطأً.

64.4.5 التحجيم والحدود والتنظيم

33 ينبغي أولاً جعل المعاملات المقاسة بمقاييس عددية مختلفة جداً لابعدية أو تعيين مقادير تمثيلية لها. ويمكن للحدود أن تمنع القيم المستحيلة فيزيائياً، لكن دفع معامل مراراً إلى حد قد يشير إلى بيانات غير كافية أو تحجيم ضعيف أو عدم تطابق النموذج، لا إلى نجاح التعيين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

34 للمسائل ناقصة التحديد أو ضعيفة التعيين، يمكن استخدام دالة هدف منظمة:

$$\Phi_R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r} + \frac{\alpha}{2}\,\|\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)\|_2^2 . \tag{64.13}$$

يعاقب الحد الثاني الابتعاد عن القيم القبلية أو المرجعية. ويختار التنظيم حلاً واحداً من بين حلول كثيرة؛ لكنه لا ينشئ معلومات، ويجب الإبلاغ عن شدته α.

64.4.6 قابلية التعيين

35 تسأل *قابلية التعيين البنيوية* عما إذا كانت المشاهدات الدقيقة الخالية من الضوضاء تستطيع من حيث المبدأ تحديد المعاملات بصورة فريدة. وتسأل *قابلية التعيين العملية* عما إذا كانت المشاهدات المتاحة المحدودة والمشوشة تحددها بدقة مقبولة.

36 قرب حل مرشح، تُشخص قابلية التعيين العملية من مصفوفة Jacobian الموزونة $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{J}$:

- **نقص الرتبة:** رتبة أقل من عدد المعاملات تعني أن تركيباً واحداً على الأقل من المعاملات غير قابل للتعيين محلياً.
- **القيم المفردة الصغيرة:** تشير القيم المفردة الصغيرة جداً إلى اتجاهات ضعيفة المعلومات؛ وتكون المعاملات المقابلة ضعيفة التحديد.
- **عدد الشرط الكبير:** يشير $\kappa = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} > 10^6$ إلى سوء تكييف شديد وضعف قابلية التعيين.
- **أعمدة Jacobian المتشاركة خطياً:** تشير الأعمدة المتشاركة خطياً تقريباً إلى معاملات لا يمكن تمييز آثارها من البيانات.
- **ارتباطات المعاملات القوية:** تشير الارتباطات المقدرة $0.95 <$ إلى تركيبات معاملات تعويضية؛ فتغيير أحدها لملاءمة البيانات يتطلب تغيير آخر.

37 لذلك يكون معيار البواقي الصغير ضرورياً لكنه غير كافٍ. فقد يلائم نموذج المشاهدات تقريباً بدقة مع بقاء المعاملات الفردية غير فريدة. وتشمل المعالجات إضافة أنواع استجابة مستقلة، وتغيير مواقع الحساسات أو مسارات التحميل، وتثبيت المعاملات غير الحساسة، وتجميع المعاملات المترابطة، واستخدام التنظيم أو التوزيعات القبلية الغنية بالمعلومات، وتكرار التحليل من نقاط بداية متعددة.

38 بالنسبة إلى البيانات المختبرية والتجريبية، يمكن تسهيل هذه العملية كثيراً بتقدير التوافق الحصين (RANSAC، القسم 64.3.2)، الذي يزيل القيم الشاذة الكبيرة قبل تقدير المعاملات بـL-M.

64.4.6.1 تقريب عدم اليقين المحلي

39 إذا كان نموذج البواقي مناسباً، والحل داخلياً، والخطية كافية، فإن تقريب التغاير المحلي هو

$$\operatorname{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \approx c\,\left(\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{J}\right)^{-1}, \tag{64.14}$$

40 عندما تكون $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}^{-1}$ مصفوفة الدقة المطلقة المعروفة (تباينات القياس)، فإن $c = 1$ ويكون التغاير محجماً بصورة صحيحة. وعندما تحتوي $\mathbf{W}$ على أوزان نسبية فقط (مثل معكوس القيم الاسمية)، يقدر c عادة بوصفه تباين البواقي الموزون:

$$c \approx \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r}}{m - n_p}, \tag{64.15}$$

حيث m عدد المشاهدات وn_p عدد المعاملات. ويضمن ذلك أن يعكس عدم يقين المعاملات جودة ملاءمة البيانات ودقة القياس معاً. ويكون التقريب غير موثوق للقيود الفعالة، واللاخطية الواضحة، وضعف قابلية التعيين، ودوال الهدف متعددة الأنماط، أو عدم تطابق النموذج. وتكون ملفات تعريف الإمكان، أو تحليلات bootstrap، أو التوزيعات اللاحقة البايزية أكثر إفادة في تلك الحالات.

64.4.7 عدم تطابق النموذج

41 ملاحظة مفاهيمية مفيدة[1] هي

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{64.16}$$

حيث تمثل $\boldsymbol{\varepsilon}$ خطأ القياس وتمثل $\boldsymbol{\delta}$ عدم تطابق النموذج المنهجي. وإذا جرى تجاهل $\boldsymbol{\delta}$، فقد يشوه المحسن المعاملات ذات المعنى الفيزيائي لتعويض الآليات المفقودة. ويمكن للمعايرة البايزية أن تمثل عدم التطابق صراحة (Kennedy **and** O'Hagan, 2001)؛ وينبغي للمعايرة الحتمية على الأقل فحص أنماط البواقي لاكتشاف اعتماد منهجي على الحمل أو الزمن أو الموقع أو نوع الاستجابة.

64.5 تعيين المعاملات البايزي

42 يوفر الاستدلال البايزي إطاراً عاماً لتحديث المعرفة القبلية بالبيانات الرصدية. وفي تعيين المعاملات، تُعامل معاملات النموذج المجهولة كمتغيرات عشوائية، وينتج جمع المعلومات القبلية مع دالة الإمكان توزيعاً لاحقاً يصف قيم المعاملات التي يدعمها كلا مصدري المعلومات.

43 طريقة Levenberg–Marquardt (القسم 64.4) وRANSAC (القسم 64.3) نهجان للتحسين أساساً: ينتجان تقديرات نقطية، تكملها معلومات عدم يقين خطية محلية أو معلومات توافق. أما التعيين البايزي فينتج توزيعاً لاحقاً كاملاً. ويمكنه تمثيل عدم يقين غير متماثل أو متعدد الأنماط، وارتباطات المعاملات، وتأثير الافتراضات القبلية، ونشر عدم يقين المعاملات إلى التنبؤات والقرارات اللاحقة.

44 يكون الاستدلال البايزي أعلى قيمة عندما يؤثر عدم اليقين اللاحق مادياً في هوامش الأمان، أو تنبؤات العمر الخدمي، أو تقديرات الموثوقية، أو القرارات المستنيرة بالمخاطر. وهو طبيعي أيضاً عندما ينبغي للمعلومات من الاختبارات السابقة أو المراجع أو القيود الفيزيائية أو حكم الخبراء أن تؤثر في التعيين، وعندما يلزم التحديث المتسلسل عند توافر بيانات جديدة.

[1] المعادلة (64.16) مماثلة شكلياً لـ المعادلة (46.2)، المقدمة في الاشتقاق التغايري لمعادلة Euler–Lagrange: تعبّر كلتاهما عن كمية مرجعية معززة باضطراب جمعي. والتشابه بنيوي فقط. ففي المعادلة (46.2)، تدل δu على تغير مقبول، بينما في المعادلة (64.16)، تدل δ على عدم تطابق منهجي للنموذج، وتدل ε على خطأ القياس.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

64.5.1 تعيين المعاملات البايزي: الإعداد

45 تجمع نظرية Bayes المعرفة القبلية بالمعاملات المجهولة مع المعلومات الواردة في المشاهدات:

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}. \tag{64.17}$$

هنا، $p(\boldsymbol{\theta})$ هو التوزيع القبلي، و$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ هو الإمكان، و$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ هو التوزيع اللاحق، و

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta} \tag{64.18}$$

هو الدليل، أو الإمكان الهامشي. ويطبع الدليل التوزيع اللاحق. ولا يلزم صراحة في أخذ عينات Metropolis–Hastings لأنه يُختزل من نسبة القبول.

46 بافتراض خطأ قياس غاوسي جمعي ذي مصفوفة تغاير $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$، يكون الإمكان

$$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \, |\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))^{T} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) \right], \tag{64.19}$$

حيث m عدد المشاهدات. ويمكن تمثيل عدم تطابق النموذج بصورة منفصلة، مثلاً من خلال الحد الجمعي المقدم في المعادلة (64.16). وإذا أُهمل عدم التطابق، يكون عدم اليقين اللاحق مشروطاً بالنموذج المفترض، ولا ينبغي تفسيره على أنه يحسب خطأ شكل النموذج تلقائياً.

47 قد ترمز التوزيعات القبلية للمعاملات إلى الإيجابية، أو الحدود المقبولة، أو قيم المراجع أو قواعد البيانات، أو نتائج الاختبارات المصاحبة، أو معلومات أخرى قابلة للدفاع عنها. وعندما تكون المعلومات القبلية ضعيفة، تكون التوزيعات القبلية ضعيفة المعلومات عبر نطاقات موثوقة فيزيائياً أفضل من توزيعات قبلية منتشرة اعتباطياً. وتعد محاكاة التنبؤ القبلي—أخذ عينات للمعاملات من التوزيع القبلي، وتشغيل النموذج، وفحص الاستجابات الناتجة—تشخيصاً مهماً قبل استخدام البيانات.

64.5.2 تقدير MAP والتقديرات النقطية

48 إذا لزم متجهة معاملات واحدة، فإن تقدير *الأقصى لاحقاً* (MAP) هو منوال التوزيع اللاحق:

$$\boldsymbol{\theta}^{*}_{\mathrm{MAP}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}). \tag{64.20}$$

49 بالنسبة إلى إمكان غاوسي، يُحصل على تقدير MAP بصورة مكافئة بتصغير حد مربعات صغرى موزون معززاً بسالب لوغاريتم التوزيع القبلي:

$$\boldsymbol{\theta}^{*}_{\mathrm{MAP}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})^{T} \mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) - \log p(\boldsymbol{\theta}) \right]. \tag{64.21}$$

وهذا مشابه حسابياً للمربعات الصغرى الموزونة (القسم 64.4.2)، إذ يعمل لوغاريتم التوزيع القبلي كحد تنظيم. ومع توزيع قبلي منتظم على المنطقة المقبولة، يتطابق تقدير MAP مع تقدير الإمكان الأقصى. وتشمل الملخصات النقطية الأخرى المتوسط اللاحق والوسيط اللاحق؛ ولا ينقل أي منهما وحده شكل التوزيع اللاحق الكامل أو بنية اعتماده.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

64.5.3 أخذ العينات اللاحق وMCMC للمعاملات

50 للحصول على التوزيع اللاحق الكامل بدلاً من تقدير نقطي، تولد طرائق مونت كارلو بسلسلة Markov (MCMC) عينات من $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ من دون الحاجة إلى تقييم ثابت تطبيع التوزيع اللاحق. وفي خوارزمية Metropolis–Hastings، تُسحب متجهة محاولة $\boldsymbol{\theta}'$ من كثافة اقتراح $q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})$ وتُقبل باحتمال

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')q(\boldsymbol{\theta}^{(s)} \mid \boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{64.22}$$

بالنسبة إلى اقتراح مسيرة عشوائية متماثل، تُختزل كثافتا الاقتراح، ومن ثم

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{64.23}$$

تشكل الحالات المقبولة والمتكررة سلسلة Markov يكون توزيعها المستقر هو التوزيع اللاحق تحت شروط الانتظام المعتادة.

51 تُهمل عادة العينات الأولية المتأثرة بشدة بنقطة البداية باعتبارها فترة احتراق. والعينات المتتالية مترابطة، ولذلك فإن عدد السحوبات المخزنة ليس عدد السحوبات المستقلة. وينبغي أن تشمل التشخيصات مخططات المسار، ودوال الارتباط الذاتي، وحجم العينة الفعال، وسلاسل متعددة مهيأة من نقاط متباعدة. ولتحليلات السلاسل المتعددة، تقدم قيم $\widehat{R}$ القريبة من الواحد دليلاً—لا برهاناً—على أن السلاسل بلغت توزيعاً مستقراً مشتركاً. ويعتمد طول السلسلة المطلوب على المسألة، وينبغي تحديده من الخلط وحجم العينة الفعال لا من عدد تكرارات عالمي.

64.5.4 مثال 64.2: انحدار بايزي بأساس تربيعي وأخذ عينات Metropolis–Hastings

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

انظر في نموذج الانحدار

$$y_i = \theta_1 x_{1i}^2 + \theta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{64.24}$$

حيث إن θ_1 وθ_2 مجهولان. وتستخدم الاستجابة أساساً تربيعياً في x_1، لكن النموذج خطي في المعاملات المجهولة. وهذه البنية البسيطة مقصودة: فمع توزيعات قبلية غاوسية وσ معلومة، يتاح التوزيع اللاحق الدقيق تحليلياً، ولذلك يمكن استخدامه لتدقيق تطبيق MCMC.

تُولد المشاهدات الاصطناعية باستخدام

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{true}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \qquad \sigma = 1, \qquad n = 50, \tag{64.25}$$

وتُعطى توزيعات قبلية غاوسية مستقلة:

$$\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 10^2), \qquad j = 1, 2. \tag{64.26}$$

يُستخدم اقتراح مسيرة عشوائية غاوسي متماثل، ولذلك يُعطى احتمال القبول بالمعادلة (64.23). ويولد البرنامج 10,000 حالة، ويهمل أول 2,000 منها كفترة احتراق، ويحسب المتوسطات اللاحقة، والانحرافات المعيارية، وفترات

مصداقية 95%، وارتباط المعاملات، ومخططات المسار، ودوال الارتباط الذاتي، ونطاق استجابة تنبؤي لاحق. كما يقارن تقديرات MCMC بالتوزيع اللاحق الغاوسي الدقيق وبتقدير المربعات الصغرى العادية.

يستخدم التطبيق المختصر سلسلة واحدة للوضوح التعليمي. وينبغي للتحليل الإنتاجي استخدام سلاسل متعددة متباعدة والإبلاغ عن $\widehat{R}$ وحجم العينة الفعال. ويُعامل الانحراف المعياري للضوضاء على أنه معلوم؛ وفي تحليل أكمل يمكن إعطاؤه توزيعاً قبلياً واستنتاجه بالاشتراك مع معاملات الانحدار.

يرد كود MATLAB® المقابل في § I.5.8.

64.5.5 مثال محلول: الاستدلال البايزي لمعاملات التدهور

52 انظر في نموذج التدهور المعتمد على الزمن المقدم في القسم 64.3.2:

$$\frac{\mathrm{QoI}}{\mathrm{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d)\cdot D(t),$$

حيث تتبع $D(t)$ نموذج حركية AAR من المبادئ الأولى بمعاملات τ_C (الزمن المميز)، وτ_L (فترة الكمون)، وβ (الضرر المقارب).

53 يعطي التحليل البايزي توزيعات قبلية قابلة للدفاع عنها لكل معامل:

- $\tau_C > 0$: مقياس الزمن المميز، مثلاً توزيع قبلي لوغاريتمي طبيعي متمركز على قيم المراجع.
- $\tau_L > 0$: فترة الكمون، مع توزيع قبلي قد يستنير بدرجة الحرارة ومحتوى القلويات.
- $\beta \in (0,1)$: الضرر الكسري طويل الأمد، ممثلاً مثلاً بتوزيع قبلي منتظم أو بيتا.

54 يجمع الإمكان القياسات الميدانية لكميات مثل معامل المرونة والمقاومة عند أعماق وأعمار متعددة مع تقديرات أخطاء القياس الخاصة بها. ثم ينتج أخذ عينات MCMC سحوبات لاحقة، مما يتيح:

- كثافات لاحقة هامشية لكل معامل؛
- فترات مصداقية 95% قائمة على الكميات أو مناطق أعلى كثافة لاحقة؛
- ارتباطات المعاملات اللاحقة وتحديد الاختلاط؛
- منحنيات تدهور تنبؤية لاحقة مع نطاقات عدم يقين.

55 إذا كشف التوزيع اللاحق ارتباطاً قوياً بين معاملين، مثل τ_C وτ_L، فقد لا تفصل البيانات المتاحة أثريهما. وقد تلزم حينئذ أنواع استجابة إضافية، أو قياسات في أزمنة أو مواقع مختلفة، أو توزيع قبلي أغنى بالمعلومات. وتقارن فحوص التنبؤ اللاحق الاستجابات المرصودة باستجابات مكررة مولدة تحت سحوبات لاحقة، وتساعد في كشف قصور منهجي في النموذج.

64.5.6 متى يُستخدم التعيين البايزي

56 يكون تعيين المعاملات البايزي ذا قيمة خاصة عندما:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **تكون المعلومات القبلية جوهرية:** ينبغي للاختبارات التاريخية، أو القيود النظرية، أو معرفة الخبراء أن تؤثر في المعايرة.
- **يكون عدم اليقين اللاحق الكامل حرجاً:** تعتمد القرارات على احتمالات الذيل أو فترات المصداقية، لا على التقديرات النقطية فقط.
- **يجب تكميم ارتباط المعاملات:** يجب أن يكشف التحليل ما إذا كانت المعاملات معينة بصورة مستقلة أو مختلطة بسبب مجموعة القياسات.
- **يلزم التحديث المتسلسل:** تصل مشاهدات جديدة مع الزمن، ويصبح التوزيع اللاحق لتحليل ما توزيعاً قبلياً للتحليل التالي.
- **يكون عدم تطابق النموذج مهماً:** تلزم معالجة صريحة لخطأ النموذج المنهجي لتجنب نسبة كل عدم التطابق إلى المعاملات.

57 تتطلب الطرائق البايزية حسابياً أكثر من تحسين Levenberg–Marquardt، وتحتاج تشخيصات دقيقة لأخذ العينات. وفي المقابل، توفر فترات مصداقية، واعتماداً مشتركاً للمعاملات، وعدم يقين تنبؤي لاحقاً، وتمثيلاً شفافاً للمعلومات القبلية—وهي كميات قد تكون أساسية في القرارات الإنشائية عالية العواقب.

64.6 خوارزمية Levenberg–Marquardt عملياً

58 للنظرية الخوارزمية الكاملة لطرائق منطقة الثقة وتحليل تقارب Levenberg-Marquardt، انظر الملحق Q. يركز هذا القسم على التطبيق العملي لخوارزمية Levenberg-Marquardt في MATLAB مقترنة بتحليل العناصر المحددة.

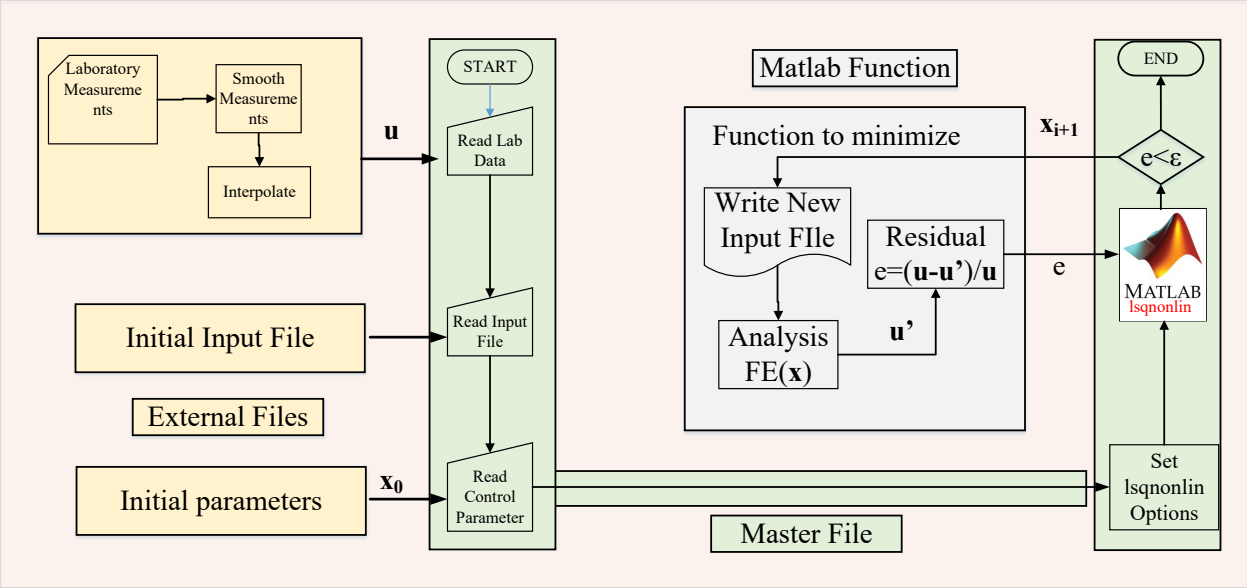
كود MATLAB® 59 يوصف كود MATLAB®في الشكل Q.2، ومن السهل نسبياً اتباعه.

60 لاحظ أن التحليل يركز في هذه الحالة على سد متأثر بتفاعل القلويات والركام (AAR). والهدف تحديد معاملات نموذج AAR بحيث تطابق إزاحات قمة السد من تحليل العناصر المحددة القياسات الميدانية مطابقة وثيقة.

1. تُقرأ القياسات الميدانية وتُعدل.
2. يُقرأ ملف إدخال التحكم ويُقسم إلى ثلاثة أجزاء: جزء مركزي يحتوي الأسطر التي سيعدلها الكود (المرتبطة بخصائص AAR)، وجزآن مجاوران سيبقيان دون تغيير. وتُسجل أرقام أسطر الفصل المقابلة لاستخدامها لاحقاً بواسطة دالة التصغير.
3. تُقرأ المتغيرات التي يحددها المستخدم من ملف Excel خارجي.
4. تُضبط معاملات التحسين.
5. ثم تُستدعى الدالة `lsqnonlin`، §Q.3.

تعريف الدالة 61 جزء حاسم من الخوارزمية هو تعريف الدالة المراد تصغيرها.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 64.4: مخطط تدفق إجراء تعيين المعاملات

1. اكتب ملف إدخال جديداً بدلالة x؛ وفي التكرار الأول، استخدم القيم الافتراضية $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. ويسهل ذلك التقسيم السابق لملف التحكم.
2. أجر تحليل العناصر المحددة (باستخدام Merlin في هذه الحالة).
3. استخرج الإزاحات المحسوبة، $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$، من ملف المخرجات.
4. احسب البواقي $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$.
5. احسب معيار البواقي e.
6. أعد متجهة البواقي الجديدة إلى المحسن.

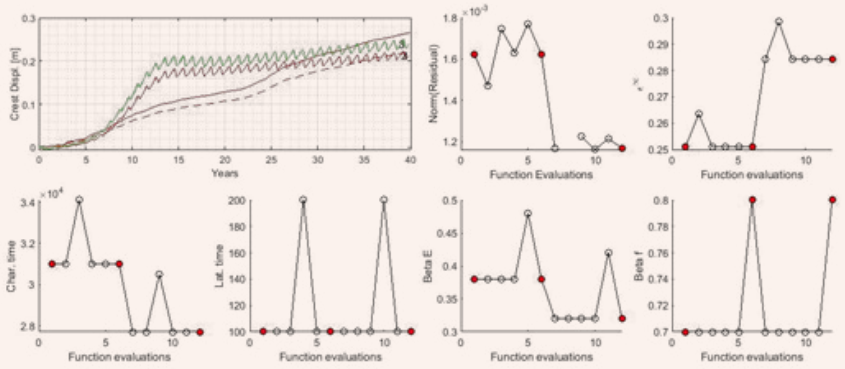
62 تحكم الدالة `lsqnonlin` اكتمال البرنامج استناداً إلى متجهة البواقي والخيارات المختارة سابقاً (§ Q.3). ولأن دالة الهدف تتطلب بيانات بالإضافة إلى متجهة المعاملات، تُمرر كميات إضافية (مثل $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) على أنها متغيرات `global` في هذا التطبيق.

63 يرد كود MATLAB®لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية في § I.6.1.

التصور في الزمن الحقيقي 64 لأن محاكاة العناصر المحددة اللاخطية للمسائل المعقدة مكلفة حسابياً، ولأن تعيين المعاملات يتطلب كثيراً من هذه التحليلات، فإن العملية الكلية كثيفة الحساب.

65 لذلك تُستخدم واجهة مستخدم رسومية، الشكل Q.3. والربع الأول مخطط للإزاحات الوسيطة ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) مقارنة بالمقاسة ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$). أما الأرباع الثلاثة الأخرى فهي مخططات لمتغيرات مختارة يراد تعيينها (ε^{∞}، وτ_I، وτ_c) بدلالة أرقام التكرارات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 64.5: واجهة مستخدم رسومية لدالة بواقي واحدة وخمسة متغيرات. انظر الشكل 64.7 لمثال أشمل.

64.6.1 ممارسة المربعات الصغرى

66 لمعايرة العناصر المحددة التقليدية، التسلسل الموصى به هو: تطبيع البواقي أو وزنها؛ وفرز المعاملات؛ وفحص رتبة Jacobian؛ واختيار حدود ونقاط بداية قابلة للدفاع عنها فيزيائياً؛ والتشغيل من بدايات عدة؛ وفحص بنية البواقي؛ والتحقق المستقل. ويطوّر الفصل Q الخوارزميات العددية، ويحتوي الملحق I.4 على كود MATLAB®المقابل، الذي يرد وصفه الكامل فيما يلي.

64.6.1.1 برنامج MATLAB لتعيين المعاملات: الوصف

67 توفر الأقسام السابقة الإطار الرياضي. يوثق هذا القسم تطبيقاً مدفوعاً بالبيانات يقرن محسن `lsqnonlin` في MATLAB بمحلل عناصر محددة خارجي. ورغم أن هذا الإصدار مطبق باستخدام ATENA (برنامج تحليل العناصر المحددة، FEAP)، فإن البنية المعيارية للبرنامج تجعل تكييف الكود مع أي حزمة أخرى لتحليل العناصر المحددة مباشراً. ويحدث التطبيق معاملات مواد مختارة، ويشغل المحلل، ويقرأ الاستجابات المراقبة، ويقيم البواقي، ويسجل تاريخ التعيين من دون تعديل ملفات الإدخال الأصلية.

نظرة عامة على البرنامج 68 تُقرأ جميع المعلومات الخاصة بالمسألة من جدول بيانات واحد، `Log.xlsx`. ومع قياسات ميدانية أو مختبرية ونموذج FEAP تعتمد استجابته على معاملات مجهولة، ينفذ البرنامج التسلسل الآتي:

1. قراءة أسماء الملفات، وأسماء المعاملات، وأسماء المراقبات، وعبارات التجميع، والقيم المستهدفة، وخيارات المحلل من ورقة `Input`؛
2. قراءة متجهة المعاملات الأولية $\mathbf{x}_0$ والنطاقات الموصى بها من ملف إدخال FEAP؛
3. إنشاء نسخة عمل مؤقتة من ملف الإدخال؛
4. إنشاء ورقة سجل جديدة على هيئة صفوف باسم `PI #n`؛
5. إجراء تشغيل جاف عند $\mathbf{x}_0$ للتحقق من سلسلة MATLAB–FEAP كاملة؛
6. تشغيل `lsqnonlin`؛ وعند كل تقييم للدالة، تحديث الإدخال المؤقت، وتشغيل FEAP، وتحليل المخرجات، وتجميع التنبؤات، وإعادة متجهة البواقي؛

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

7. تحديث لوحة معلومات تعرض نسب التنبؤ إلى الهدف، ومقادير البواقي على مقياس لوغاريتمي، وتطور المعاملات؛
8. تسجيل كل تكرار مكتشف للمحسن مع طابعه الزمني، والزمن المنقضي، وقيم المعاملات، ونسب التنبؤ إلى الهدف، والبواقي؛
9. الإبلاغ عن المعاملات المعينة، ومعيار البواقي، وعلم الخروج، وإحصاءات التكرار.

69 صُمم التطبيق ليبقى مستقلاً عن المسألة. ويمكن أن يتغير عدد المعاملات والتنبؤات وعبارات التجميع والقياسات المستهدفة كلها من دون تغييرات في مصدر MATLAB. وتُكتب تحويلات الوحدات صراحة في عبارات جدول البيانات؛ ولا يطبق الكود عاملاً خفياً للتحويل من الانفعال إلى الانفعال الميكروي.

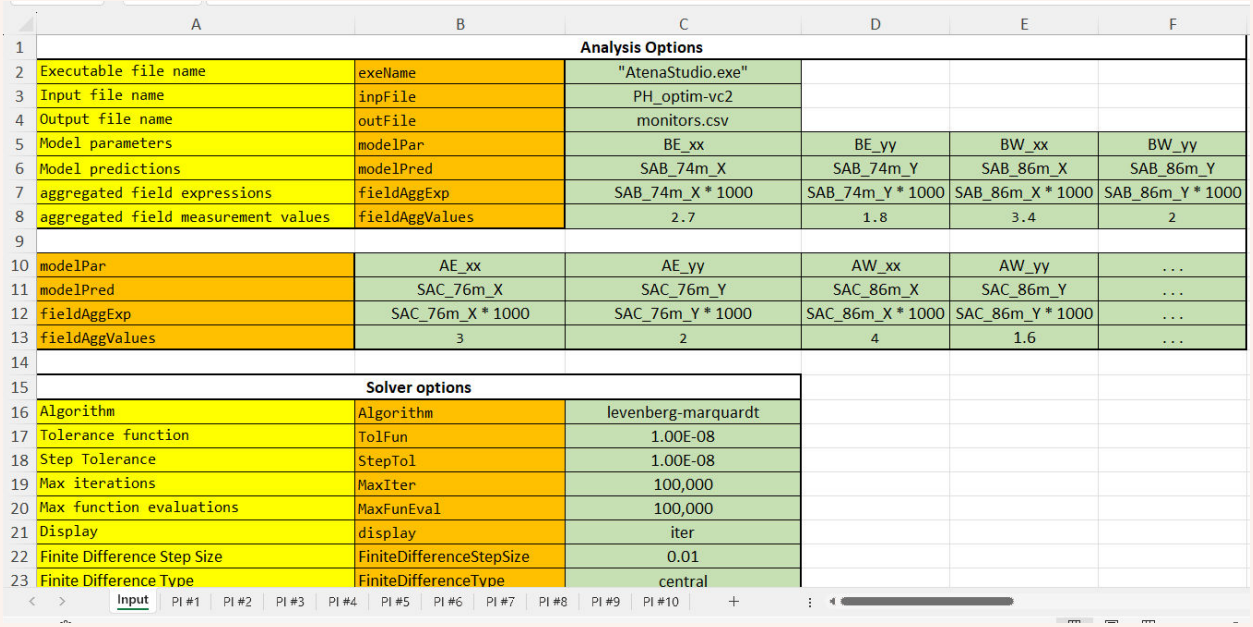
بنية المجلد

```
/FEAP
|-- entry point: ParIdentification.m (Main.m)
|-- main function and nested minfunc ParIdentification.m
|-- control spreadsheet and PI logs Log.xlsx
|-- original FEAP input (never modified) input.dat)
|-- working copy (overwritten) input_temp.dat)
|-- FEAP output (overwritten) output.dat)
|
'-- /functions
    |-- createTempInputFile.m
    |-- extractEvaluateValues.m
    |-- initPISheet.m
    |-- logIterationToSheet.m
    |-- readInputSheet.m
    |-- readModelPredValues.m
    |-- runAnalysis.m
    |-- runLSQnonlin.m
    |-- updateEvaluateValues.m
    |-- updatePlots.m
    |
    '-- /private
        |-- buildFieldAggFunctions.m
        |-- findKey.m
        |-- isMissingLike.m
        |-- normalizeText.m
        |-- readNumericVectorByKey.m
        |-- readScalarByKey.m
        |-- readTextVectorByKey.m
        '-- toText.m
```

70 لا يلزم المساعد السابق `xlsColLetter.m` لمسجل PI الحالي ذي الصفوف. ويجمع المساعد `buildFieldAggFunctions.m` عبارات جدول البيانات كما كُتبت تماماً، من دون إلحاق عامل تحجيم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول بيانات التحكم: Log.xlsx [71] تستخدم ورقة `Input`، الشكل 64.6، تخطيطاً قائماً على الكلمات المفتاحية. ويحتوي العمود A على تسمية وصفية، ويحتوي العمود B على المفتاح الذي يقرؤه MATLAB، وتحتوي الأعمدة من C فصاعداً على قيمة واحدة أو أكثر.



	A	B	C	D	E	F
1	**Analysis Options**					
2	Executable file name	exeName	"AtenaStudio.exe"			
3	Input file name	inpFile	PH_optim-vc2			
4	Output file name	outFile	monitors.csv			
5	Model parameters	modelPar	BE_xx	BE_yy	BW_xx	BW_yy
6	Model predictions	modelPred	SAB_74m_X	SAB_74m_Y	SAB_86m_X	SAB_86m_Y
7	aggregated field expressions	fieldAggExp	SAB_74m_X * 1000	SAB_74m_Y * 1000	SAB_86m_X * 1000	SAB_86m_Y * 1000
8	aggregated field measurement values	fieldAggValues	2.7	1.8	3.4	2
9						
10	modelPar	AE_xx	AE_yy	AW_xx	AW_yy	...
11	modelPred	SAC_76m_X	SAC_76m_Y	SAC_86m_X	SAC_86m_Y	...
12	fieldAggExp	SAC_76m_X * 1000	SAC_76m_Y * 1000	SAC_86m_X * 1000	SAC_86m_Y * 1000	...
13	fieldAggValues	3	2	4	1.6	...
14						
15	**Solver options**					
16	Algorithm	Algorithm	levenberg-marquardt			
17	Tolerance function	TolFun	1.00E-08			
18	Step Tolerance	StepTol	1.00E-08			
19	Max iterations	MaxIter	100,000			
20	Max function evaluations	MaxFunEval	100,000			
21	Display	display	iter			
22	Finite Difference Step Size	FiniteDifferenceStepSize	0.01			
23	Finite Difference Type	FiniteDifferenceType	central			

شكل 64.6: ملف بيانات الإدخال لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية بطريقة Levenberg–Marquardt

يبحث الكود بالمفتاح لا برقم صف ثابت.

جدول 64.1: مدخلات تكوين تمثيلية في `Log.xlsx`

التكوين	المفتاح	قيمة تمثيلية
الملف التنفيذي	`exeName`	`D:\FEAP\AtenaConsole.exe`
ملف الإدخال	`inpFile`	`PH_optim-vc2`
ملف المخرجات	`outFile`	`monitors.csv`
معاملات النموذج	`modelPar`	`BE_xx, BE_yy, BW_xx, BW_yy, ...`
تنبؤات النموذج	`modelPred`	`SAB_74m_X, SAB_74m_Y, ...`
عبارات التجميع	`fieldAggExp`	`SAB_74m_X*1000, ...`
القياسات المستهدفة	`fieldAggValues`	`2.7, 1.8, 3.4, 2, ...`
الخوارزمية	`Algorithm`	`levenberg-marquardt`
تسامح الدالة	`TolFun`	`1e-8`
تسامح الخطوة النسبي	`StepTol`	`1e-8`
الحد الأقصى للتكرارات	`MaxIter`	`100000`
الحد الأقصى للتقييمات	`MaxFunEval`	`100000`
خطوة الفروق المحدودة	`FiniteDiffStepSize`	`0.01`
نوع الفروق المحدودة	`FiniteDiffType`	`central`
العرض	`display`	`iter`

[72] يجب أن تطابق الأحرف الكبيرة والصغيرة والهجاء الدقيق لكل مفتاح في جدول البيانات الإصدار المتوقع من `readInputSheet.m`. وداخلياً، قد يطبع القارئ هذه الأسماء—فمثلاً قد تُخزن `StepTol` بوصفها `S.tolX`—لكن يجب أن يستخدم جدول البيانات نفسه المفتاح المطبق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الوحدات وعبارات التجميع [73] تُقرأ قيم مراقبات FEAP بوحداتها الأصلية. وإذا أخرج FEAP الانفعال بينما كانت الأهداف بالانفعال الميكروي، فإن التحويل يوضع في عبارة جدول البيانات، مثلاً

```
fieldAggExp    = 1e6*(M02+M08+M12)/3
fieldAggValues = 136 237 228 132
```

وهذا يجعل اصطلاح الوحدات مرئياً ويمنع تطبيق العامل نفسه مرتين.

أوراق سجل PI [74] ينشئ كل تشغيل الورقة التالية المتاحة، `PI` #1، و`PI` #2، وهكذا. ورأس الصفوف هو

```
| <...Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters
<...Pred/Target...> | <Residual>
```

الصف 2 هو التكرار 0 ويحتوي $\mathbf{x}_0$ بزمن منقضٍ صفري. ويلحق كل تكرار مكتشف لاحق متجهة المعاملات، ونسب التنبؤ إلى الهدف، والبواقي. وهذه الصيغة قابلة للفرز مباشرة ومناسبة للرسم أو المعالجة اللاحقة المستقلة.

ملفات إدخال FEAP ومخرجاته [75] تقع المعاملات المراد تعيينها في عبارات `EVALUATE`. وتوفر القيمة الحالية التخمين الأولي، ويوفر التعليق الاختياري النطاق الموصى به:

```
EVALUATE "EcD1 = /*# EcD1 */ 62000"
Recommended range 10000 - 50000 //
```

لا يُستبدل الملف الأصلي أبداً؛ وتُكتب جميع التحديثات في النسخة المؤقتة.

[76] يفحص محلل المخرجات كتل المراقبة المطلوبة ويستخرج آخر قيمة استجابة صالحة لكل مراقب. وتُحاذى أسماء التنبؤات مع اللواحق المدرجة في `modelPred`. وينبغي للقيم المفقودة أو غير المنتهية أو غير المطابقة أن توقف التشغيل الجاف بدلاً من تمريرها بصمت إلى المحسن.

سير عمل التحسين ودالة الهدف [77] لتكن $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ متجهة تنبؤات FEAP المجمعة و$\mathbf{y}$ متجهة الهدف. يعيد البرنامج

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \tag{64.27}$$

إلى `lsqnonlin`، التي تصغر $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$. وإذا كانت للأهداف وحدات أو مستويات عدم يقين مختلفة اختلافاً كبيراً، فينبغي تطبيعها أو وزنها كما وُصف في §64.4.2؛ وإلا هيمنت أكبر البواقي العددية على الملاءمة.

البواقي الموزونة والمترابطة في التطبيق [78] يمكن تحويل دالة الهدف إلى مربعات صغرى موزونة إحصائياً من دون تغيير المحسن. وللقياسات المستقلة ذات الانحرافات المعيارية المعلنة s_i، أعد البواقي المطبعة:

```
res = (predicted - target) ./ sigmaMeasurement;
```

ثم تصغر `lsqnonlin` القيمة $\sum_i r_i^2/s_i^2$. وينبغي الاحتفاظ بالبواقي الهندسية الخام في السجل حتى لا يخفي التطبيع مقدار عدم الملاءمة أو وحداته.

[79] لأخطاء القياس المترابطة ذات مصفوفة التغاير $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$، احسب عامل Cholesky السفلي $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$، وأعد البواقي المبيضة مسبقاً:

```
rawRes = predicted(:) - target(:);
L      = chol(SigmaMeasurement,'lower');
res    = L \ rawRes;
```

المعيار المربع الناتج هو $\mathbf{r}^T\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}\mathbf{r}$. ويجب أن تكون مصفوفة التغاير موجبة التحديد ومعبر عنها بوحدات متسقة مع متجهة البواقي الخام.

التشغيل الجاف 80 قبل التحسين، تُقيّم `minfunc` مرة واحدة عند $\mathbf{x}_0$. ويتحقق ذلك من تحديث الملف، وتنفيذ المحلل، وتحليل المخرجات، والتجميع، وتقييم البواقي. ويُعاد رسم النتيجة كتكرار 0 عند تقييم الدالة 0، ولا تُحسب كتكرار للمحسن.

التكرارات وتقييمات الدالة 81 مع مصفوفة Jacobian للفروق المحدودة، قد يتطلب تكرار واحد للمحسن نحو $n_{\mathrm{par}}+1$ تقييماً للدالة للفروق الأمامية، ونحو $2n_{\mathrm{par}}+1$ للفروق المركزية، بالإضافة إلى خطوات المحاولة المرفوضة أو التقييمات الداخلية الأخرى. لذلك فإن استنتاج التكرارات الحقيقية فقط من نمط ثابت لعدد الدوال هو تقريب. وتكون دالة مخرجات للمحسن أفضل عندما تلزم أحداث التكرار الدقيقة.

التحجيم والتسامحات والحدود 82 تُوفر مقادير معاملات تمثيلية من خلال `TypicalX`؛ ويستخدم الكود قيم منتصف النطاق عند توافر نطاقات موصى بها محدودة. ويكون تسامح الخطوة في جدول البيانات عديم الأبعاد، وقد يُحول داخلياً إلى مقياس مطلق. ولا تضمن التسامحات الصغيرة جداً حلاً أدق، وقد تسبب تشغيلات عناصر محددة غير ضرورية.

83 تكون النطاقات الموصى بها ذات قيمة لفحص $\mathbf{x}_0$، واكتشاف الانجراف نحو قيم غير معقولة، وتكوين خوارزميات تفرض الحدود. ويجب على المحلل التحقق من أن خوارزمية `lsqnonlin` المختارة وإصدار MATLAB يفرضان القيود المقصودة لأبعاد المسألة. وقد تتقارب ملاءمة ناقصة التحديد عددياً مع بقائها غير فريدة.

لوحة المعلومات والتشخيصات 84 تفصل لوحة المعلومات تقييمات الدالة عن التكرارات المقبولة، وتعرض:

- نسب التنبؤ إلى الهدف على مقياس خطي؛
- البواقي المطلقة على مقياس لوغاريتمي؛
- تطور كل معامل؛
- علامة مميزة للتكرار 0 وعلامات منفصلة للتكرارات المقبولة.

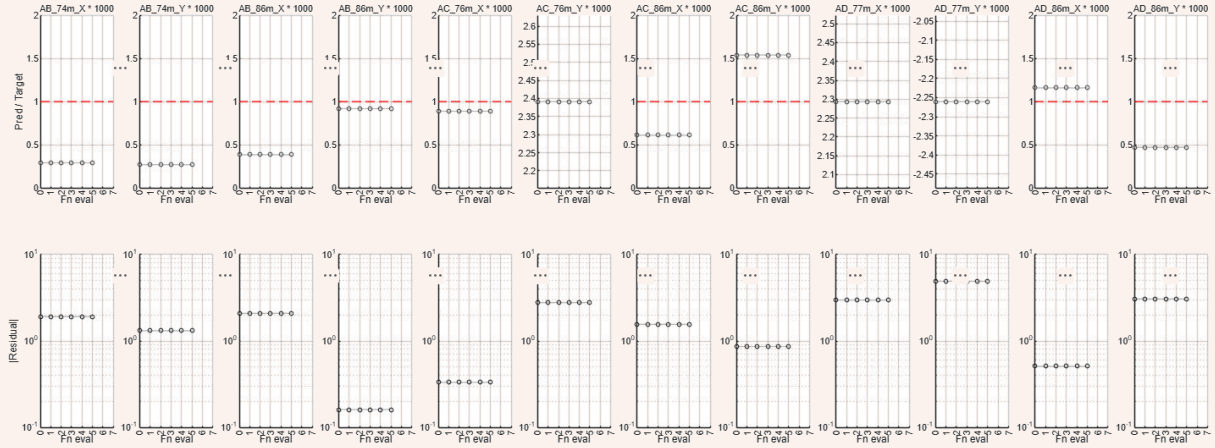
85 لا ينبغي الحكم على التقارب من معيار البواقي وحده. وينبغي أن تشمل المراجعة النهائية علم الخروج، ومواقع المعاملات بالنسبة إلى الحدود، وأنماط البواقي، وارتباطات المعاملات أو القيم المفردة لمصفوفة Jacobian، والحساسية للتخمين الأولي، والتحقق مقابل مشاهدات لم تُستخدم للمعايرة.

تشخيصات قابلية التعيين الموصى بها بعد التشغيل 86 عندما تُطلب مخرجاً، تعيد `lsqnonlin` مصفوفة Jacobian للبواقي عند النقطة النهائية. وينبغي أرشفة الكميات الآتية مع المعاملات الملائمة:

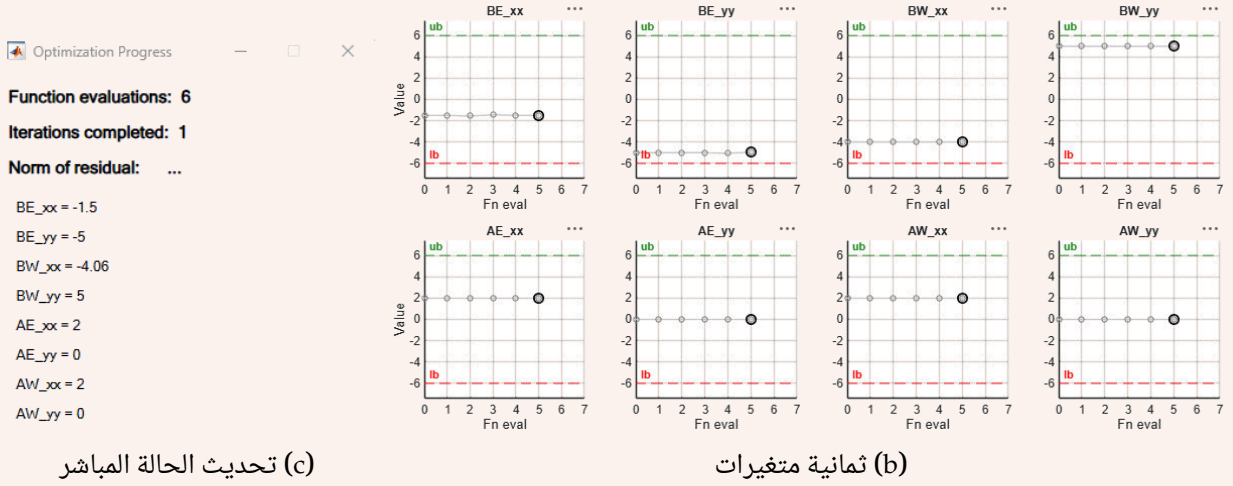
- الرتبة العددية والقيم المفردة لمصفوفة Jacobian الموزونة أو المطبعة؛
- عدد شرطها، مع العتبة المستخدمة لإعلان قرب نقص الرتبة؛
- تغاير تقريبي للمعاملات أو مصفوفة ارتباط عندما تكون الافتراضات الخطية المحلية قابلة للدفاع عنها؛
- تغير الحل تحت تخمينات أولية وخطوات فروق محدودة وحدود مقبولة بديلة؛
- مخططات ملف التعريف أو إعادة الملاءمة المقيدة للمعاملات المشتبه في ضعف قابليتها للتعيين.

87 هذه التشخيصات امتدادات موصى بها لسير عمل إعداد التقارير؛ ولا ينبغي وصفها بأنها مخرجات تلقائية ما لم يكن الكود المقابل قد طُبق وتحقق منه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(a) اثنا عشر هدفاً متنبأ به والبواقي المرتبطة بها



(c) تحديث الحالة المباشر

(b) ثمانية متغيرات

شكل 64.7: لوحة معلومات لتحسين المربعات الصغرى اللاخطية بطريقة Levenberg–Marquardt: 12 هدفاً متنبأ به و8 متغيرات.

الدوال العامة
الدوال المساعدة الخاصة
بنى البيانات الرئيسية ومتغيرات زمن التشغيل
إضافة مسألة تعيين جديدة

1. استبدل ملفات إدخال ATENA ومخرجاتها أو أعد تسميتها.
2. حدّث `exeName` و`inpFile` و`outFile` في `Log.xlsx`.
3. أدخل أسماء المعاملات، ولواحق المراقبات، وعبارات التجميع، والقياسات المستهدفة.
4. تحقق من الوحدات وأدرج صراحة كل تحويل في `fieldAggExp`.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 64.2: الدوال الرئيسية في برنامج تعيين المعاملات

الغرض	الدالة
قراءة كل التكوين القائم على الكلمات المفتاحية وإنشاء البنية S.	`readInputSheet`
قراءة x_0، والحدود الدنيا، والحدود العليا من أسطر `EVALUATE` المطابقة.	`extractEvaluateValues`
إنشاء نسخة العمل مع إدراج `temp_` قبل الامتداد.	`createTempInputFile`
استبدال قيم المعاملات في الإدخال المؤقت؛ ويُستخدم وضع صامت اختياري أثناء التشغيل الجاف.	`updateEvaluateValues`
تشغيل FEAP تزامنياً وإعادة حالته ومخرجات وحدة التحكم.	`runAnalysis`
تحليل المخرجات وإعادة قيم المراقبة المحاذاة مع `modelPred`.	`readModelPredValues`
إنشاء ورقة `PI` #n التالية ذات الصفوف وكتابة التكرار 0.	`initPISheet`
إلحاق رقم التكرار، والزمن، والمعاملات، والنسب، والبواقي.	`logIterationToSheet`
تكوين `lsqnonlin` وتنفيذها.	`runLSQnonlin`
إنشاء لوحات معلومات البواقي والمعاملات وتحديثها.	`updatePlots`

جدول 64.3: الدوال المساعدة الخاصة التي يستخدمها قارئ جدول البيانات وطبقة التجميع

الغرض	الدالة
العثور على مفتاح وإعادة أول قيمة غير فارغة إلى يمينه.	`readScalarByKey`
إعادة جميع القيم النصية غير الفارغة إلى يمين مفتاح.	`readTextVectorByKey`
إعادة جميع القيم العددية غير الفارغة إلى يمين مفتاح.	`readNumericVectorByKey`
تجميع عبارات التجميع في جدول البيانات إلى مقابض دوال من دون تحجيم خفي.	`buildFieldAggFunctions`
تحديد مفتاح غير حساس لحالة الأحرف في خلايا ورقة العمل الخام.	`findKey`
التعرف على مدخلات جدول البيانات الفارغة أو المفقودة أو البيضاء أو غير المنتهية كما هو مطبق.	`isMissingLike`
تحويل قيمة ورقة عمل إلى نص للمقارنة المطبعة.	`toText`
تطبيع النص المحول، بما في ذلك إزالة المسافات غير الفاصلة.	`normalizeText`

جدول 64.4: الحقول الرئيسية لبنية التكوين `S`

الغرض	النوع	الحقل
أسماء الملف التنفيذي للمحلل وملفي الإدخال/الإخراج	نص	`exeName`، `inpFile`، `outFile`
أسماء المعاملات المراد تحديثها في ملف إدخال FEAP	قائمة	`modelPar`
أسماء المراقبات المراد استخراجها من مخرجات FEAP	قائمة	`modelPred`
عبارات جدول البيانات المستخدمة لتجميع التنبؤات وإجراء تحويل الوحدات	قائمة	`fieldAggExpr`
القياسات المستهدفة	متجهة	`fieldAggValues`
مقابض الدوال المجمعة الموافقة لعبارات التجميع	قائمة	`fieldAggFcn`
حدود المحسن	قياسي	`maxFunEval`، `maxIter`
تسامحات الدالة والخطوة المطبعة داخلياً	قياسي	`tolFun`، `tolX`
خوارزمية المحسن ووضع العرض	نص	`algorithm`، `display`
حدود المعاملات الدنيا والعليا أو النطاقات الموصى بها	متجهات	`lb`، `ub`

جدول 64.5: متغيرات مختارة لزمن التشغيل في `ParIdentification.m`

الغرض	النوع	المتغير
المعاملات الأولية والحدود المقبولة المقروءة من ملف الإدخال	متجهات	$x0$، `lb`، `ub`
ملف إدخال FEAP المؤقت المستبدل عند كل تقييم	نص	`inpFileTemp`
ورقة سجل التعيين الحالية ذات الصفوف	نص	`piSheetName`
عدادا تقييم الدالة والتكرار المكتشف	أعداد صحيحة	`nFnEval`، `nIter`
تاريخ المعاملات	مصفوفة	`X`
أحدث التنبؤات المجمعة والبواقي	متجهات	`predictedLast`، `resLast`
المعاملات النهائية، ومعيار البواقي، ومتجهة البواقي	مخرجات	`x`، `resnorm`، `res`
سبب الإنهاء وإحصاءات المحسن	مخرجات	`exitflag`، `output`

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. تحقق من أن لكل معامل معين قيمة أولية ونطاقاً قابلين للدفاع عنهما في ملف الإدخال.
6. نفّذ التشغيل الجاف وافحص جميع البواقي قبل السماح للتحسين غير المراقب بالاستمرار.
7. بعد التقارب، كرر التشغيل من قيم أولية بديلة وتحقق من النموذج المعاير بصورة مستقلة.

88 لا ينبغي أن يلزم تغيير كود MATLAB عندما تتبع المسألة الجديدة اصطلاحي الإدخال والإخراج نفسيهما. ويلزم تغيير الكود عندما تتغير صيغة المحلل، أو محلل المراقبات، أو قاعدة الترجيح، أو منطق التحسين.

قرارات التصميم والقيود

التسجيل بالصفوف: يسهل ترشيح صف واحد لكل تكرار ورسمه وتصديره مقارنة بالتنظيم السابق القائم على الأعمدة.

التشغيل الجاف كتكرار 0: تُمرن سلسلة المحلل الخارجي الكاملة قبل التحسين، بينما تبقى النتيجة مميزة بصرياً عن تاريخ المحسن الرسمي.

تحجيم الوحدات الصريح: يُسجل كل تحويل في `fieldAggExp`؛ ولا تلحق دوال MATLAB عامل تحجيم خفياً.

التكوين المدفوع بجدول البيانات: يمكن للكود نفسه خدمة نماذج مختلفة عندما تتوافق اصطلاحات ملفاتها ومراقباتها.

اكتشاف التكرار: يكون استنتاج التكرارات من أعداد تقييمات الدالة تقريبياً، ولا سيما مع الفروق المركزية أو الخطوات المرفوضة أو تغييرات الخوارزمية. ودالة المخرجات هي التطبيق طويل الأمد المفضل.

موثوقية العملية الخارجية: ينبغي فحص حالة خروج كل تشغيل FEAP، وإنشاء المخرجات المتوقعة، وحداثة الملف، وقيم المراقبات المنتهية قبل قبول البواقي.

64.7 سير العمل الهجين وأفضل الممارسات

64.7.1 المعايرة والتحقق

89 تستخدم المعايرة المشاهدات لتقدير المعاملات. ويختبر التحقق النموذج المعاير مقابل مشاهدات أو مسارات تحميل أو مواقع أو فترات زمنية مستقلة. وإعادة استخدام البيانات نفسها للمهمتين تقيس الملاءمة لا القدرة التنبؤية. وكلما كانت مجموعة البيانات صغيرة، ينبغي استخدام التحقق المتقاطع، أو الحساسات المحتجزة، أو مرحلة تجريبية منفصلة لكشف فرط الملاءمة.

64.7.2 التطبيقات الإنشائية

90 تنطبق طرائق تعيين المعاملات عبر دورة حياة الهندسة الإنشائية كاملة:

- **معايرة القوانين التأسيسية:** ملاءمة معاملات ذات معنى فيزيائي مع الاستجابات المختبرية، ثم التحقق تحت مسارات تحميل مختلفة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **مراقبة الصحة الإنشائية:** تحديث نماذج العناصر المحددة من الترددات، وأشكال الأنماط، والانفعالات، والإزاحات، أو الاتجاهات طويلة الأمد، مع مراعاة جودة الحساسات والتأثيرات البيئية.
- **البنية التحتية المتقادمة:** جمع البيانات الميدانية مع المعرفة القبلية لاستنتاج مقادير التدهور ومعدلاته وتغيره المكاني.
- **الطلب والهشاشة الزلزاليان:** نشر عدم يقين المعاملات إلى نماذج الطلب، واحتمالات الحالات الحدية، ودوال الهشاشة.
- **التحديث المتسلسل:** استيعاب المشاهدات الجديدة عند وصولها باستخدام المرشحات البايزية أو المعايرة الدفعية المتكررة.

64.7.3 إطار قرار سير العمل

91 قد يجمع سير عمل هجين عملي استراتيجيات متعددة بالتسلسل:

1. **تنظيف البيانات:** إذا اشتُبه في قيم شاذة أو تلوث كبير، طبّق RANSAC (القسم 64.3.2) لتحديد مجموعة توافق حصينة من البيانات الداخلية.
2. **المعايرة الأولية:** استخدم Levenberg-Marquardt (القسم 64.4) على البيانات المنظفة للحصول على تقديرات أولية للمعاملات والفرز لمشكلات قابلية التعيين.
3. **التحقق المستقل:** اختبر النموذج المعاير مقابل بيانات محتجزة أو شروط تحميل مختلفة.
4. **عدم اليقين اللاحق:** إذا أثر عدم يقين المعاملات مادياً في القرارات اللاحقة، فاستخدم الاستدلال البايزي (القسم 64.5) لتكميم التوزيعات اللاحقة، وفترات المصداقية، والحساسيات للافتراضات القبلية.
5. **مسار التدقيق:** احتفظ بسجلات استبعادات البيانات، والأوزان، والتوزيعات القبلية، وإصدارات النموذج، وتشخيصات التقارب لضمان قابلية إعادة الإنتاج ومراجعة النظراء.

92 ينبغي أن تحافظ كل مرحلة على أدلة موثقة لخيارات النمذجة والنتائج. ويحسن هذا الانضباط الصرامة العلمية والتواصل العملي مع أصحاب المصلحة معاً.

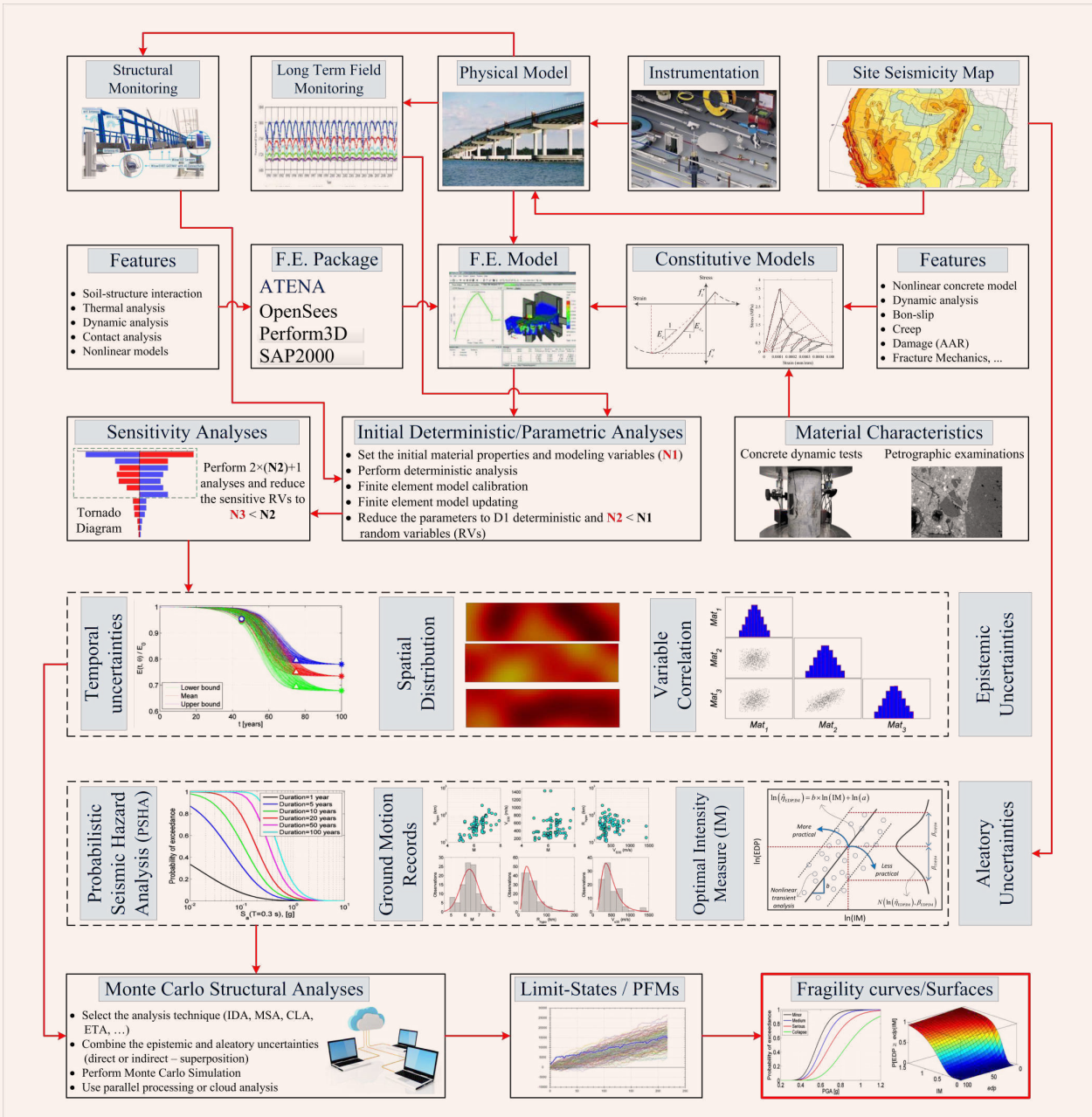
64.8 من البيانات والشكوك والقرارات إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء

93 الغرض من القسم الأخير هو التركيب. أسس الفصل 63 كيفية تأثير المدخلات غير المؤكدة وجودة البيانات في التنبؤات الإنشائية؛ وأسس هذا الفصل كيفية استنتاج معاملات مختارة من المشاهدات. وهما يوفران معاً الجسر المنهجي إلى الفصول التالية عن علم الزلازل (الفصل 66)، والتحليل الحاسوبي المتقدم (الفصل 68)، وتقييم الخطر الزلزالي (الفصل 69)، وصولاً إلى PBEE (الفصل 70).

94 ظهر التصميم الزلزالي القائم على الأداء لأن الامتثال للكود وحده لا يبين الأداء المتوقع لمنشأ معين، أو الضرر المحتمل، أو العواقب الناتجة (Hamburger **andothers,** 2004). وتتطلب PBEE سلسلة من النماذج

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تربط خطر الموقع والاستجابة الإنشائية والضرر والعواقب. وتحتوي كل وصلة على عدم يقين، وتحتوي عدة وصلات على معاملات يجب معايرتها من أدلة مختبرية أو ميدانية.



شكل 64.8: تكامل توصيف الموقع، وتطوير النموذج، وعدم اليقين، وتعيين المعاملات، والتحليل الإنشائي، وتقييم الهشاشة

95 سير العمل الملخص في الشكل 64.8 هو:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

توصيف الموقع: إنشاء نموذج زلزالية الموقع، وخصائصه الفيزيائية، وأجهزته، وسجل المراقبة طويل الأمد، وعند الفائدة بيانات اختبار الاهتزاز القسري.

نموذج العناصر المحددة: اختيار سمات التحليل المطلوبة، والنماذج التأسيسية، وأوصاف المواد، والشروط الحدية، والمنصة الحاسوبية. وسجّل افتراضات شكل النموذج صراحة.

التحليل الحتمي الأولي: التحقق من الاتزان، والوحدات، والشروط الحدية، وآليات الاستجابة المهيمنة قبل إدخال المدخلات العشوائية أو التحسين.

فرز الحساسية: تعيين نطاقات أو توزيعات معقولة للمدخلات المرشحة. وقد تستخدم دراسة أولية منخفضة التكلفة $2N + 1$ تقييماً لعامل واحد في كل مرة ومخطط إعصار؛ بينما تُفرز مسألة لاخطية عالية الأبعاد على نحو أفضل بواسطة Morris. وإذا لزم تخصيص كمي للتباين بعد الفرز، فطبّق مؤشرات Sobol على المجموعة المختزلة.

تعيين المعاملات: استخدام القياسات لمعايرة المعاملات المؤثرة والقابلة للتعيين عملياً. وزن البواقي وفق عدم يقين القياس، وفحص رتبة Jacobian وارتباط المعاملات، واستخدام طرائق حصينة عندما تكون القيم الشاذة الكبيرة معقولة، والتحقق المستقل من النموذج المعاير.

عدم اليقين المعرفي: تمثيل المعرفة الناقصة بخصائص المواد، والحقول المكانية، والشروط الحدية، وحالات التدهور، والمعاملات المعايرة، وعدم تطابق النموذج. والحفاظ على الاعتماد من خلال نماذج التغاير أو التوزيعات المشتركة.

عدم اليقين العشوائي: تمثيل التباين المتأصل، ولا سيما تباين الحركة الأرضية من حدث إلى آخر ومن سجل إلى آخر. ويوفر تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي منحنيات الخطر؛ ثم تُختار السجلات ومقاييس الشدة المناسبة (PEER, 2014; Padgett, Nielson **and** DesRoches, 2008).

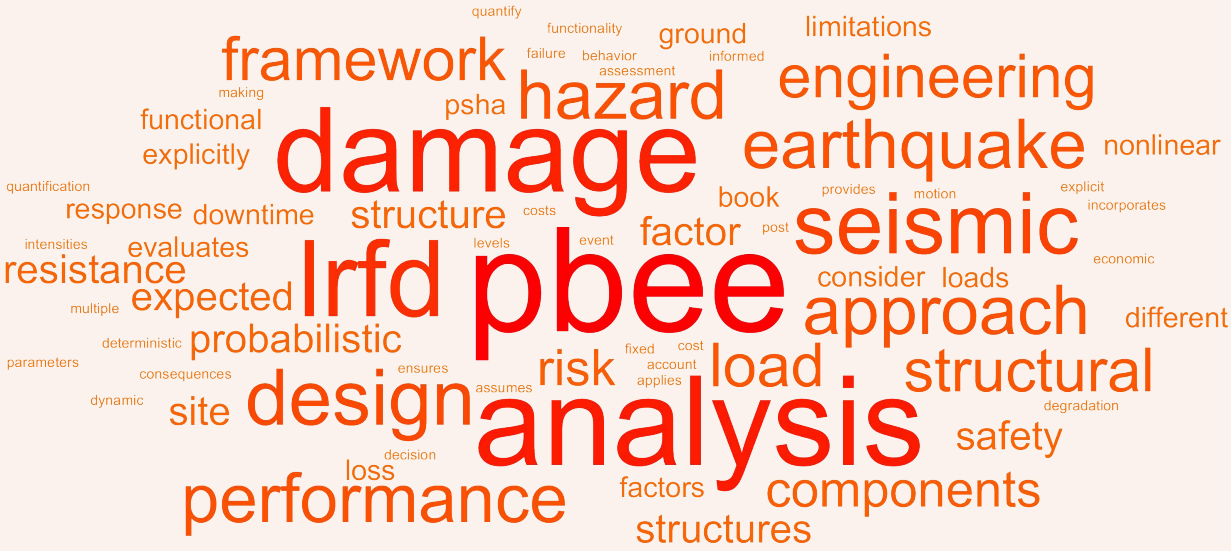
التحليل الإنشائي الاحتمالي: نشر عدم اليقين المعرفي والعشوائي عبر التحليلات اللاخطية باستخدام مونت كارلو، أو LHS، أو النماذج البديلة، أو طرائق أخرى متحقق منها. ويجب ألا يتحقق الاقتصاد الحسابي بإهمال مصادر عدم اليقين المؤثرة.

دوال السعة والضرر: تعريف الحالات الحدية وأنماط الفشل المحتملة باستخدام الميكانيكا، والتجارب، والمشاهدات، وكميات الاستجابة المعايرة.

الهشاشة والأداء: إنشاء منحنيات أو سطوح الهشاشة ودمجها مع نماذج الخطر والعواقب لدعم القرارات المستنيرة بالمخاطر.

96 هذا التسلسل ليس أحادي الاتجاه تماماً. فقد تُطلق بيانات مراقبة جديدة إعادة المعايرة؛ وقد يكشف تحليل الحساسية الحاجة إلى قياسات إضافية؛ وقد يكشف التحقق عدم تطابق النموذج؛ وقد تحدد نتائج PBEE أي عدم يقين يؤثر أكثر في القرار. وتوفر الفصول التالية مكونات الخطر والتحليل اللازمة لإكمال هذه الحلقة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

65 فاصل

ملخص

يمثّل هذا الفصل انتقالًا بين التصميم التقليدي بمعاملات الأحمال والمقاومة (LRFD) وهندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE). فعلى الرغم من أن LRFD يوفّر إطارًا حتميًا للسلامة، فإنه يفتقر إلى التقييم الصريح للضرر وتكميم المخاطر.

تتجاوز PBEE هذه القيود بدمج تحليل الخطر وتقييم الاستجابة الإنشائية وتقدير الضرر وتقييم الخسائر ضمن منهج موحّد مستنير بالمخاطر.

يعرض هذا الفصل الدافع إلى اعتماد PBEE ويقدّم بنية الكتاب التي تتدرج منهجيًا نحو إطار شامل لـPBEE من "أسفل إلى أعلى".

65.1 قيود التصميم بمعاملات الأحمال والمقاومة (LRFD) 2014

65.2 لماذا ننتقل إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)؟ 2015

65.3 المكونات الأربعة لـPBEE 2015

65.4 بنية الكتاب 2016

65.1 قيود التصميم بمعاملات الأحمال والمقاومة (LRFD)

1 يُعد التصميم بمعاملات الأحمال والمقاومة (LRFD، §35.3)، منهجية واسعة الاستخدام في الهندسة الإنشائية، ولا سيما في تصميم الفولاذ والخرسانة. ومع أنه يوفّر إطارًا احتماليًا لمراعاة عدم اليقين في الأحمال وخصائص المواد، فإن له قيودًا عدة تستلزم الانتقال إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE):

- **فحص السلامة على مستوى واحد** يضمن LRFD بقاء المنشآت آمنة تحت الأحمال المصعّدة المحددة مسبقًا، لكنه لا ينظر صراحةً في معايير الأداء التي تتجاوز المقاومة وقابلية الخدمة، مثل قابلية الإصلاح بعد الزلزال أو زمن التعطل.
- **غياب الاعتبار الصريح للضرر:** يضمن LRFD عدم انهيار المنشأ عند حالات الحد الأقصى، لكنه لا يكمّم الضرر المتوقع عند شدات زلزالية مختلفة. وقد تتعرض المنشآت المصممة وفق LRFD لضرر كبير في حدث زلزالي، ما يؤدي إلى ارتفاع تكاليف الإصلاح أو فقدان الوظيفة.
- **عدم المرونة في سيناريوهات التحميل المعقدة:** يعتمد LRFD نهجًا خطيًا قائمًا على المعاملات، ولا يراعي صراحةً السلوك غير الخطي أو التدهور أو الضرر التراكمي. وهو يفترض تراكيب أحمال ثابتة، في حين أن الأفعال الزلزالية ديناميكية وتختلف في الشدة والمدة والمحتوى الترددي.
- **هوامش سلامة موحّدة بدلًا من التصميم القائم على المخاطر:** يطبّق LRFD معاملات مقاومة عامة لا تخص الموقع أو المنشأ. ولا يميّز بين المنشآت ذات العواقب الأكبر للفشل (مثل المستشفيات مقارنة بالمستودعات). وتُطبّق فلسفة التصميم نفسها على مناطق تختلف مخاطرها الزلزالية اختلافًا كبيرًا.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

العجز عن مراعاة chap:trustregion في الحركة الأرضية: يفترض LRFD مجموعة حتمية من معاملات الأحمال، بينما تولّد الزلازل طلبات شديدة التباين. ولا يدمج تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي (PSHA) لتكميم تباين الخطر الخاص بالموقع.

65.2 لماذا ننتقل إلى هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)؟

2 تعالج هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) هذه القيود بالانتقال من نهج إلزامي قائم على الكود إلى إطار مستنير بالمخاطر يقيّم المنشآت عند شدات زلزالية متعددة. ومن أهم مزاياها:

أهداف أداء صريحة: بدلًا من فحص المقاومة وقابلية الخدمة فقط، تقيّم PBEE مستويات أداء متعددة:

- **تشغيلي (O)**: لا ضرر مهم، ويبقى المنشأ عاملًا.
- **إشغال فوري (IO)**: ضرر طفيف قابل للإصلاح بالكامل.
- **سلامة الأرواح (LS)**: ضرر متوسط قابل للإصلاح، لكن المنشأ لا يعمل فورًا.
- **منع الانهيار (CP)**: ضرر شديد من دون فشل شامل.

تكميم مباشر للعواقب الاقتصادية والوظيفية: تدمج PBEE اتخاذ القرار على أساس التكلفة من خلال تقدير:

- تكاليف الإصلاح المتوقعة.
- زمن التعطل المتوقع.
- الخسائر البشرية المتوقعة.

تصميم قائم على المخاطر باستخدام تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي (PSHA): تدمج PBEE منحنيات خطر الحركة الأرضية الخاصة بالموقع بدلًا من استخدام معاملات أحمال ثابتة، مما يسمح بأن يعكس التصميم الخطر الزلزالي الفعلي.

التحليل غير الخطي والسلوك الإنشائي الواقعي: تعتمد PBEE على تحليل السجل الزمني غير الخطي (NLTHA)، فتلتقط تطور الضرر والخضوع والتدهور، وهي أمور لا يلتقطها LRFD.

نهج موجّه نحو المرونة؛ لا يراعي LRFD صراحةً الوظيفة بعد الزلزال، بينما تمكّن PBEE المهندسين من التصميم للتعافي السريع بعد الحدث.

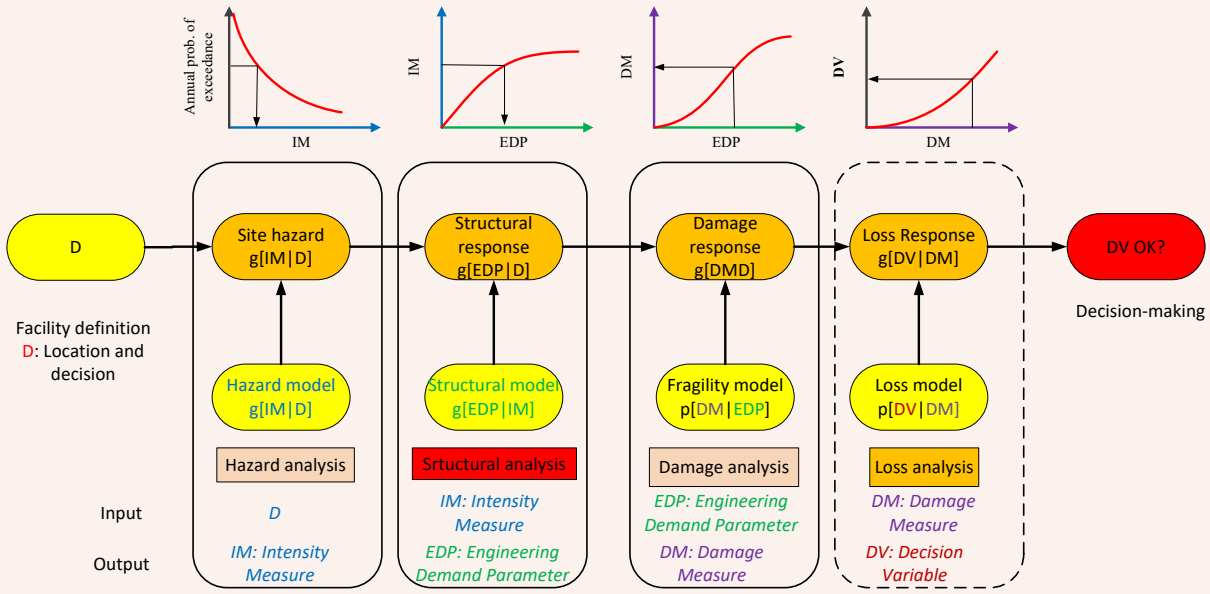
65.3 المكونات الأربعة لـPBEE

3 تتكون PBEE من أربعة مكونات مترابطة، كما يوضح الشكل 65.1:

1. **تحليل الخطر:** يكمّم احتمال التعرض لمستويات مختلفة من اهتزاز الأرض في موقع معين باستخدام *تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي* (chapter 66، PSHA).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. **التحليل الإنشائي:** يقيّم استجابة المنشأ للأحمال الزلزالية، بما في ذلك *التحليل الديناميكي غير الخطي* ومعلمات الطلب الهندسي (EDPs)، chapter 68.
3. **تحليل الضرر:** يستخدم معلمات الاستجابة لتقدير الضرر المادي في *المكونات الإنشائية وغير الإنشائية*، chapter 69.
4. **تحليل الخسائر:** يحوّل الضرر إلى *خسائر اقتصادية* وزمن *تعطل* وتقديرات *للخسائر البشرية*، بما يتيح اتخاذ القرار على أساس التكلفة، chapter 70.



شكل 65.1: المكونات الأربعة لـPBEE

65.4 بنية الكتاب

4 يوجد نهجان ممكنان لتقديم PBEE:

1. نهج من أعلى إلى أسفل: تقديم نظرة عامة عن PBEE أولًا، ثم مناقشة كل من مكوناتها الأربعة على حدة.
2. نهج من أسفل إلى أعلى: استكشاف كل مكوّن بالتفصيل أولًا، ثم تركيبها ضمن إطار PBEE.

5 يعتمد هذا الكتاب نهج *أسفل إلى أعلى*. وبناءً عليه، تتناول الفصول الأربعة التالية تحليل الخطر والتحليل الإنشائي وتحليل الضرر وتحليل الخسائر كلًا على حدة. ثم يدمج الفصل الأخير هذه العناصر، ليشكّل **ذروة إطار PBEE.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

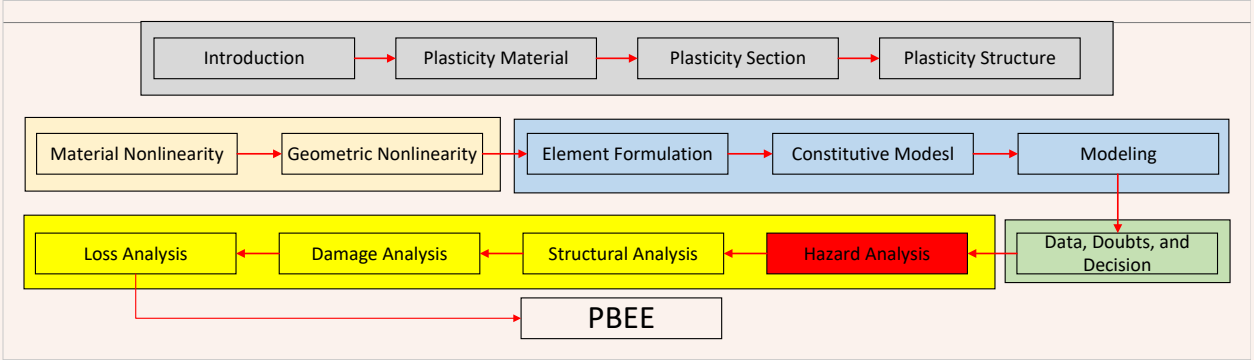
2017

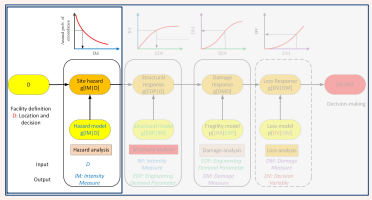
66 تحليل الخطر

ملخص

يشرح هذا القسم أساسيات تحليل الخطر الزلزالي بوصفه جزءاً من هندسة الزلازل. ووفق *Elnashai* **and** *Di Sarno, 2015*، فإن هندسة الزلازل فرع هندسي معني بتقدير عواقب الزلازل وتخفيفها. وهي موضوع متعدد التخصصات يشارك فيه علماء الزلازل، والمهندسون الإنشائيون والجيوتقنيون، والمعماريون، ومخططو المدن، وتقنيو المعلومات، وعلماء الاجتماع.

66.1 مقدمة 2018
66.2 علاقة التكرار 2018
66.3 نموذج التوهين 2020
66.3.1 الأساسيات 2020
66.3.2 Boore وJoyner و1997) Fumel) 2021
66.3.3 التقييم البارامتري 2022
66.4 تحليل الخطر الزلزالي الحتمي 2024
66.5 تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي 2025
66.6 زمن الوقوع 2026
66.7 منحنيات الخطر الزلزالي 2027
66.8 خرائط الخطر الزلزالي 2029
66.9 تفكيك الخطر الزلزالي 2029
66.10 أطياف الاستجابة المستهدفة 2030
66.11 محاكاة الحركة الأرضية العشوائية 2034
66.11.1 نموذج Rezaeian وKi-Der (ureghian (r-d 2035
66.11.2 نموذج Yamamoto وBaker (y-b 2036
66.12 دوال إثارة زمن التحمل 2038
66.12.1 الجيل الأول من ETEFs 2038
66.12.2 الجيل الثاني من ETEFs 2039
66.12.3 الجيل الثالث من ETEFs 2040
66.12.4 الجيل الرابع من ETEFs 2040
66.12.5 الجيل الخامس من ETEFs . . . 2041
66.13 مثال 66.1: تحليل الخطر الزلزالي . . . 2043





كتبه M. Amin Hariri-Ardebili في *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures;* بواسطة Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021 *From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

66.1 مقدمة

يعتمد الخطر الزلزالي المرتبط بمنطقة ما على 1) احتمال وقوع زلزال يسبب مستوى معيناً من اهتزاز الأرض (الخطر الزلزالي)، و2) الضعف الإنشائي للمنشآت. ويتطلب تحليل الخطر الزلزالي نموذجين منفصلين:

- نموذج الزلزالية (علاقة/قانون التكرار): يصف التوزيع الجغرافي لمناطق المصادر النشطة المحتملة (المصادر الزلزالية التكتونية) وتوزيع المقادير في كل مصدر.
- نموذج التوهين: يصف أثر زلزال ناشئ من مصدر زلزالي تكتوني محدد، في أي موقع معين، بدلالة المقدار والمسافة من المصدر إلى الموقع.

66.2 علاقة التكرار

تعبر علاقات التكرار عن احتمال وقوع زلزال بحجم معين في المصدر المعطى خلال فترة زمنية محددة، مثل سنة واحدة. وتُعبر علاقة التكرار-المقدار لـ Gutenberg **and** Richter, 1954 كما في الشكل 66.1:

$$\ln N_M = a - b\,M$$
$$\log N_M = a' - b'\,M$$

حيث إن a وb ثوابت للنموذج يمكن تقييمها من بيانات الرصد الزلزالي بواسطة ملاءمة المربعات الصغرى. وتمثل N_M عدد الزلازل ذات المقدار الأكبر من أو المساوي لـ M لكل وحدة زمن ووحدة مساحة. والعلاقة بين a وa'، وكذلك بين b وb'، هي:

$$a = 2.3025a', \qquad b = 2.3025b'$$

قيم نموذجية لـ a' وb' (Kaila **and** Narain, 1971):

- غرب كندا: $a' = 5.05$؛ $b' = 1.09$
- اليابان: $a' = 6.86$؛ $b' = 1.22$
- غرب الولايات المتحدة: $a' = 5.94$؛ $b' = 1.14$
- شرق الولايات المتحدة: $a' = 5.79$؛ $b' = 1.38$

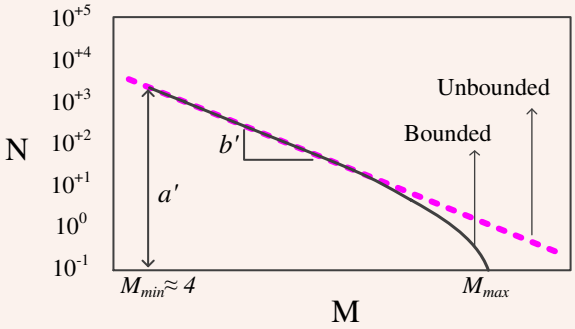
يمكن ملاحظة أن $\frac{1}{N_M}$ يمثل فترة العودة بوحدات الزمن.

تعود سجلات الأحداث ذات $M < 4$، رغم كثرتها، إلى بضع سنوات فقط. وعادة تُستبعد هذه البيانات عند حساب علاقة المقدار-التكرار لأنها قد تعطي انحيازاً مضللاً. ومن ثم، $M_{min} \approx 4$. ومن ناحية أخرى، يوجد لكل خط صدع مقدار أقصى يمكن بلوغه. وينشأ M_{max} بسبب قيود فيزيائية تحد الحجم الأقصى للحدث. لذلك ينبغي تعديل قانون التكرار لالتقاط M_{max}.

يمكن كتابة قانون تكرار Gutenberg-Richter المحدود (المعدل) كعلاقة تربيعية، الشكل 66.1:

$$N_M = N_{M_{min}} e^{-b(M-M_{min})} \; ; \quad M > M_{min}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 66.1: قانون تكرار Gutenberg-Richter (المحدود)

حيث $N_{M_{min}} = e^{a-bM_{min}}$.

باعتبار أن الاحتمال يمكن تفسيره كتكرار نسبي، يمكن حينئذ التعبير عن التوزيع الاحتمالي التراكمي (المبين بحرف F كبير) لمقدار الزلزال كما يأتي:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{M}}(M) &= P\left[\mathfrak{M} < M | \mathfrak{M} > M_{min}\right] \\ &= \frac{N_{M_{min}} - N_M}{N_{M_{min}}} = 1 - e^{-b(M-M_{min})} \end{aligned}$$

وتكون دالة الكثافة الاحتمالية المقابلة (المبينة بحرف f صغير):

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{d}{dM} F_{\mathfrak{M}}(M) = be^{-b(M-M_{min})}$$

لذلك، يُعدل Gutenberg-Richter المحدود أكثر بتطبيق حد أعلى:

$$N_M = N_{M_{min}} \frac{e^{-b(M-M_{min})} - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}};\ M_{min} \le M \le M_{max}$$

وتصبح دالة التوزيع التراكمي المقابلة

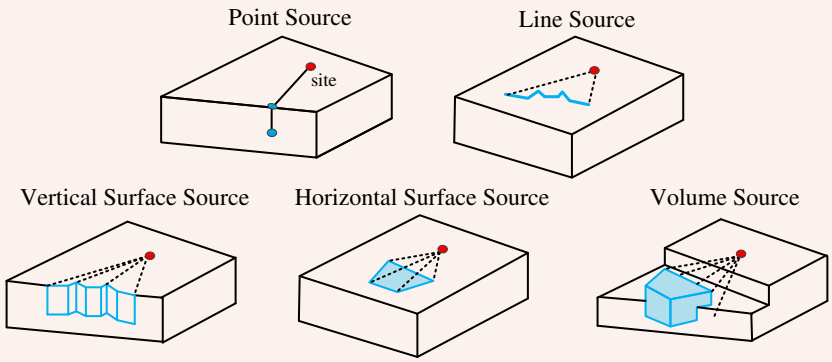
$$F_{\mathfrak{M}}(M) = P\left[\mathfrak{M} < M | M_{min} \le M \le M_{max}\right] = \frac{1 - e^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

وأخيراً، تكون دالة الكثافة الاحتمالية المقابلة

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{be^{-b(M-M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max}-M_{min})}}$$

ينطبق قانون التكرار على المساحة الهندسية لمصدر زلزال معين. ولذلك يصبح تعريف هندسة مصادر الزلازل حرجاً في تحليل الخطر الزلزالي. وبوجه عام، يمكن تصنيف المصدر الزلزالي كأحد النماذج الآتية (Filiatrault, 2013)، الشكل 66.2:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 66.2: تصنيف المصادر الزلزالية

- المصادر النقطية: تقع الزلازل الناشئة من النشاط البركاني عادة في مناطق صغيرة بما يكفي لوصفها كمصادر نقطية. ويمكن أيضاً اعتبار الصدوع قصيرة طول التمزق مصادر نقطية.
- المصدر الخطي: تكون مستويات الصدوع الممتدة إلى السطح محددة جيداً عادة، وتولد زلازل ضحلة على السطح أو قربه. ويمكن اعتبار هذه المصادر مصادر خطية أحادية البعد.
- مصدر السطح الرأسي: يمكن استخدامه لنمذجة مناطق ذات زلازل أعمق لكنها محددة جيداً.
- مصدر السطح الأفقي: في المناطق التي يكون فيها التصدع الزلزالي ضعيف التحديد (مثل شمال شرق أمريكا)، لا يسهل تحديد الصدوع الفردية. وإذا وقعت زلازل ضحلة في هذه المناطق، فيمكن تصنيفها كمصادر سطحية أفقية.
- المصدر الحجمي: في المناطق التي يكون فيها التصدع الزلزالي ضعيف التحديد وتقع زلازل عميقة، تُوصف بمصادر حجمية كبيرة. ويمكن أن يتغير عمق البؤرة.

66.3 نموذج التوهين

66.3.1 الأساسيات

علاقة التوهين دالة تُستخدم لتقدير مقاييس مختلفة لشدة الحركة الأرضية بدلالة المقدار والمسافة (Atkinson **and** Boore, 1995; Somerville **andothers**, 1997; Youngs **andothers**, 1997).

$$\text{IM} = f\left(M, R\right) \tag{66.1}$$

حيث IM مقياس الشدة، مثل PGA، و$S_a(0.2s)$، إلخ.

في الواقع، تشارك متغيرات كثيرة يصعب أيضاً تقييمها بصورة صحيحة. ولذلك يرتبط مستوى مرتفع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من chap:trustregion بعلاقات التوهين. وتسمى علاقات التوهين أحياناً معادلات التنبؤ بالحركة الأرضية (GMPE). *معادلة التنبؤ بالحركة الأرضية* والصيغة الدالية الأشهر للمعادلة 66.1 هي:

$$\log(\mathrm{IM}) = \log(b_1) + \log\left[f_1(M)\right] + \log\left[f_2(R)\right] + \log\left[f_3(M,R)\right] + \log\left[f_4(E_i)\right] + \log(\varepsilon)$$

حيث E_i هو التأثير المحتمل للمصدر والموقع والبنى الجيولوجية والجيوتقنية؛ وε معامل يمثل chap:trustregion والأخطاء.

66.3.2 Boore وJoyner و1997) Fumel)

اقتُرحت مئات من GMPE لمناطق مختلفة ومع مراعاة مستويات تعقيد متنوعة. ولخص Douglas, 2011 جميع تلك العلاقات من 1964-2010. فمثلاً، اقترح Boore, Joyner **and** Fumal, 1997 المعادلة الآتية للقيم الطيفية في المواقع الصخرية:

$$\ln(\mathrm{Y}) = b_1 + b_2(M-6) + b_3(M-6)^2 + b_5\ln(r) + b_V\ln\left(\frac{V_S}{V_A}\right)$$

حيث

$$r = \sqrt{r_{jb}^2 + h^2}$$

$$b_1 = \begin{cases} b_{1SS} & \text{لزلازل الانزلاق المضربي} \\ b_{1RV} & \text{لزلازل الانزلاق العكسي} \\ b_{1ALL} & \text{إذا لم تكن الآلية محددة} \end{cases}$$

المتغير Y هو التسارع الطيفي (تخميد 5%) بوحدة [g]؛ وM مقدار العزم، وV_S متوسط سرعة موجة القص بوحدة [m/s] في أعلى 30 m من المقطع موضع النظر، وV_A سرعة موجة القص المرجعية بوحدة [m/s].

r_{jb} أقرب مسافة أفقية بوحدة [km] من الموقع إلى الإسقاط السطحي للمصدر، وh العمق. وجميع المعاملات بوحدة [km] ومدرجة في الجدول 66.1.

يمكن تقدير V_S ببساطة من الجدول 66.2. ويمكن ملاحظة أن Y القيمة الوسيطة للتسارع الطيفي. ولذلك، تكون $\ln(\mathrm{Y})$ القيمة المتوسطة المتنبأ بها. إضافة إلى ذلك، فإن $\sigma_{\ln(\mathrm{Y})}$ هو الانحراف المعياري لـ $\ln(\mathrm{Y})$.

التعريفات المختلفة لمسافة الموقع إلى المصدر هي، الشكل 66.3:

- مسافة التمزق: أقصر مسافة من المحطة إلى سطح التمزق.
- مسافة Joyner-Boore: أقصر مسافة أفقية إلى الإسقاط الرأسي للتمزق.
- المسافة المولدة للزلازل: أقصر مسافة من موقع إلى نقطة على سطح تمزق أعمق من عمق أدنى معين مولد للزلازل.
- العمق المولد للزلازل: عمق المواد السطحية (يفترض أن التمزق قريب السطح في الرواسب غير مولد للزلازل).
- المسافة البؤرية: المسافة من المحطة إلى البؤرة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 66.1: المعاملات المعتمدة على الفترة لنموذج Boore, Joyner **and** Fumal, 1997

الفترة	b_{1ss}	b_{1RV}	b_{1ALL}	b_2	b_3	b_5	b_V	V_A	h	$\sigma_{\ln(Y)}$
0	0.313-	0.117-	0.242-	0.527	0	0.778-	0.371-	1396	5.57	0.52
0.1	1.006	1.087	1.059	0.753	0.226-	0.934-	0.212-	1112	6.27	0.479
0.12	1.109	1.215	1.174	0.721	0.233-	0.939-	0.215-	1452	6.91	0.485
0.14	1.135	1.261	1.208	0.707	0.23-	0.938-	0.228-	1718	7.18	0.489
0.16	1.112	1.257	1.192	0.702	0.226-	0.935-	0.248-	1910	7.24	0.495
0.18	1.063	1.222	1.151	0.705	0.216-	0.93-	0.27-	2037	7.16	0.499
0.2	0.999	1.17	1.089	0.711	0.207-	0.924-	0.292-	2118	7.02	0.502
0.22	0.925	1.104	1.019	0.721	0.198-	0.918-	0.315-	2158	6.83	0.508
0.24	0.847	1.033	0.941	0.732	0.189-	0.912-	0.338-	2178	6.62	0.511
0.26	0.764	0.958	0.861	0.744	0.18-	0.906-	0.36-	2173	6.39	0.514
0.28	0.681	0.881	0.78	0.758	0.168-	0.899-	0.381-	2158	6.17	0.518
0.3	0.598	0.803	0.7	0.769	0.161-	0.893-	0.401-	2133	5.94	0.522
0.4	0.212	0.423	0.311	0.831	0.12-	0.867-	0.487-	1954	4.91	0.538
0.5	0.122-	0.087	0.025-	0.884	0.09-	0.846-	0.553-	1782	4.13	0.556
0.6	0.401-	0.203-	0.314-	0.928	0.069-	0.83-	0.602-	1644	3.57	0.569
0.7	0.634-	0.452-	0.555-	0.962	0.053-	0.818-	0.639-	1545	3.2	0.582
0.8	0.829-	0.666-	0.76-	0.992	0.041-	0.809-	0.666-	1476	2.98	0.593
0.9	0.993-	0.848-	0.933-	1.018	0.035-	0.802-	0.685-	1432	2.89	0.604
1	1.133-	1.009-	1.08-	1.036	0.032-	0.798-	0.698-	1406	2.9	0.613
1.1	1.249-	1.145-	1.208-	1.052	0.03-	0.795-	0.706-	1396	2.99	0.622
1.2	1.345-	1.265-	1.315-	1.064	0.032-	0.794-	0.71-	1400	3.14	0.629
1.3	1.428-	1.37-	1.407-	1.073	0.035-	0.793-	0.711-	1416	3.36	0.637
1.4	1.495-	1.46-	1.483-	1.08	0.039-	0.794-	0.709-	1442	3.62	0.643
1.5	1.552-	1.538-	1.55-	1.085	0.044-	0.796-	0.704-	1479	3.92	0.649
1.6	1.598-	1.608-	1.605-	1.087	0.051-	0.798-	0.697-	1524	4.26	0.654
1.7	1.634-	1.668-	1.652-	1.089	0.058-	0.801-	0.689-	1581	4.62	0.66
1.8	1.663-	1.718-	1.689-	1.087	0.067-	0.804-	0.679-	1644	5.01	0.664
1.9	1.685-	1.763-	1.72-	1.087	0.074-	0.808-	0.667-	1714	5.42	0.669
2	1.699-	1.801-	1.743-	1.085	0.085-	0.812-	0.655-	1795	5.85	0.672

جدول 66.2: تقدير V_S استناداً إلى صنف الموقع

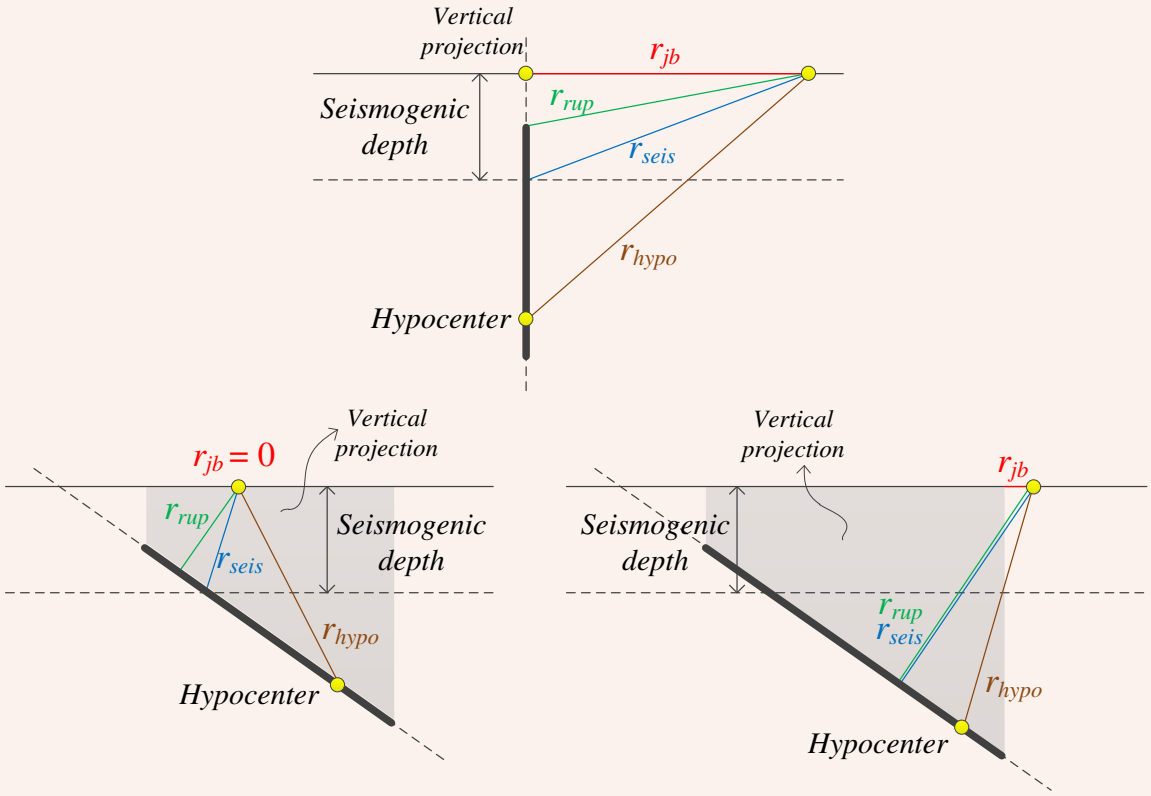
صنف موقع NEHRP B	1070 m/s
صنف موقع NEHRP C	520 m/s
صنف موقع NEHRP D	250 m/s
صخر	620 m/s
تربة	310 m/s

66.3.3 التقييم البارامتري

يمكن اشتقاق الملاحظات المعممة الآتية لـ GMPE، الشكل 66.4:

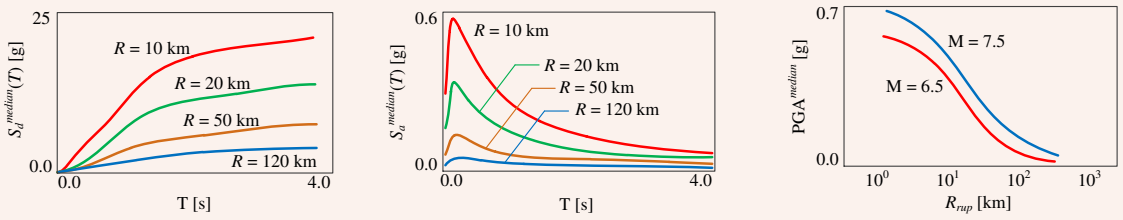
- تؤدي زيادة المسافة إلى خفض مقياس الشدة (Y).
- تؤدي زيادة المقدار إلى رفع مقياس الشدة (Y).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 66.3: تصنيف المسافات من الموقع إلى المصدر

- لا يؤثر المقدار والمسافة في الشدة فقط، بل في الشكل الطيفي أيضاً.



(b) التطور الطيفي المعتمد على الفترة

(a) تأثيرا R وM

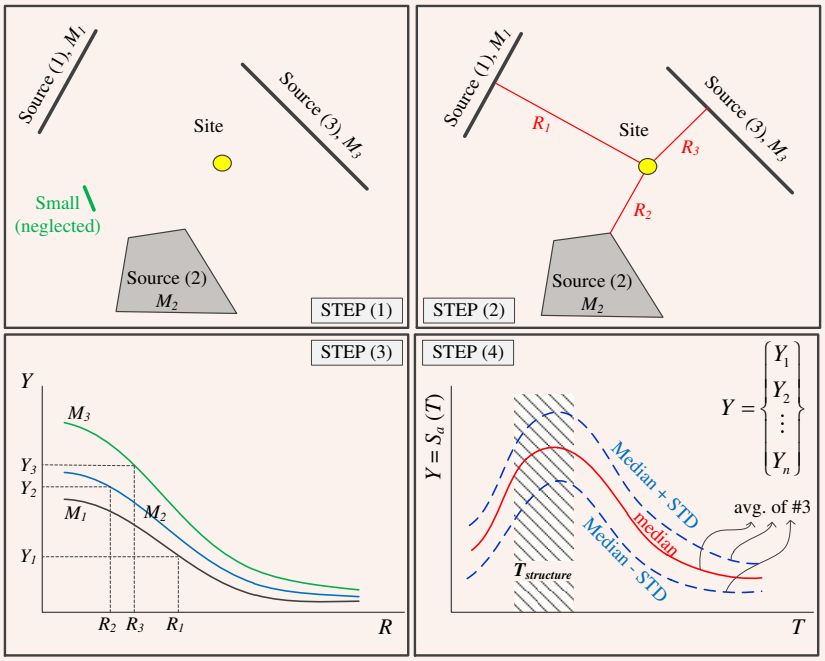
شكل 66.4: دراسة بارامترية لـ GMPE

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

66.4 تحليل الخطر الزلزالي الحتمي

يستخدم تحليل الخطر الزلزالي الحتمي (DSHA) الجيولوجيا والزلزالية التاريخية لتحديد مصادر الزلازل وتفسير أقوى زلزال (الحالة الأسوأ) يستطيع كل مصدر إنتاجه بصرف النظر عن الزمن. ويتضمن الإجراء تطوير سيناريو زلزالي وتوصيف ذلك السيناريو. ويتطلب تطبيق DSHA أربع خطوات منفصلة، الشكل 66.5:

- الخطوة 1: تحديد وتوصيف (الهندسة والمقدار الأقصى) جميع مصادر الزلازل القادرة على توليد اهتزاز مهم في الموقع.
- الخطوة 2: حساب المسافة من المصدر إلى الموقع لكل مصدر محدد في الخطوة 1 (وفق علاقة التوهين، يمكن استخدام المسافة المركزية أو البؤرية).
- الخطوة 3: اختيار الزلزال المتحكم. وهو الزلزال الذي سيولد أكبر اهتزاز في الموقع باستخدام علاقة توهين مناسبة.
- الخطوة 4: تعريف الخطر في الموقع استناداً إلى الزلزال المتحكم. ويمكن التعبير عن الخطر بالقيم الطيفية، أو التسارع الأرضي الأقصى، أو السرعة الأرضية القصوى، أو الإزاحة الأرضية القصوى، إلخ.



شكل 66.5: تحليل الخطر الزلزالي الحتمي

- المزايا:
  - بسيط التطبيق،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- إجراء محافظ حيث تكون السمات التكتونية محددة جيداً (مصادر خطية).

- العيوب:

- صعب التطبيق على المصادر الموزعة القريبة من الموقع،
- لا تُعالج chap:trustregion جيداً،
- لا تُقدم معلومات عن احتمال الزلزال المتحكم،
- لا تُقدم معلومات عن مستوى الاهتزاز المحتمل خلال عمر المنشأ في الموقع.

66.5 تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي

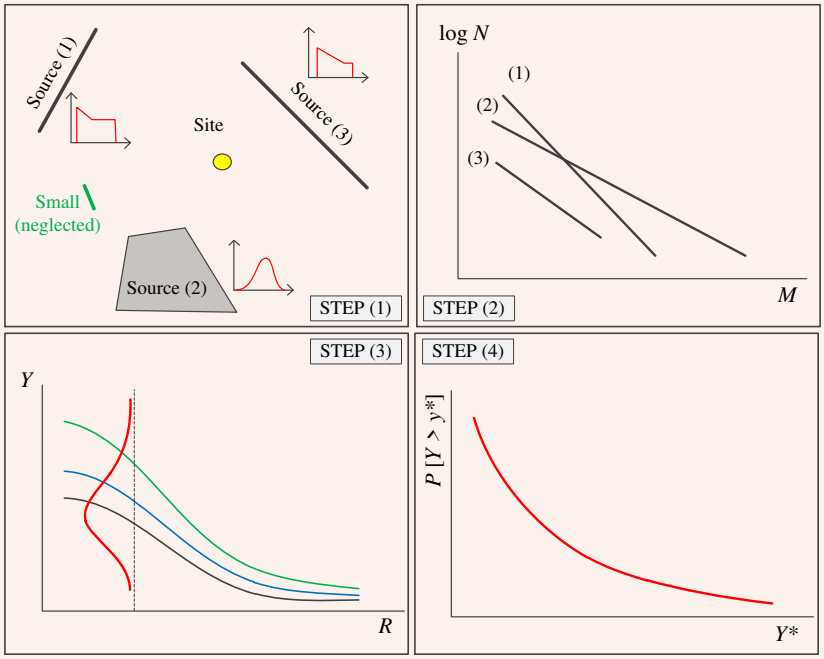
استُخدم تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي (PSHA)، الذي اقترحه C.A. Cornell (1968)، لتحديد زلزال التصميم لجميع المواقع في الولايات المتحدة. ويعطي تكميمًا نسبياً لزلزال التصميم، لموقع معين، بدلالة المعاملات الزلزالية (PGA، وPGV، و$S_a(T_i)$). ويأخذ PSHA في الحسبان حالات عدم اليقين المرتبطة بوقوع الزلازل المهمة وآثارها. ولا يستطيع التنبؤ بتاريخ الزلازل المستقبلية في المناطق الزلزالية النشطة أو مقدارها أو موقعها أو آثارها.

يستخدم نهج PSHA عناصر DSHA ويضيف تقييماً لاحتمال وقوع حركات أرضية بمقدار معين. ويحسب التحليل مباشرة احتمال أو تكرار وقوع زلازل مختلفة المقدار على كل مصدر زلزالي مهم وحالات عدم اليقين المتأصلة. ويدمج PSHA مباشرة احتمال وقوع كل زلزال مقداري في أي جزء من المصدر. ويمكن أيضاً استخدام نتائج نهج PSHA لتحديد تركيبات المقدار والمسافة الأكبر إسهاماً في الخطر. ويتطلب تطبيق PSHA أربع خطوات منفصلة، (الشكل 67.3) تُعرض مرة أخرى أدناه:

- الخطوة 1: تعريف المصادر المولدة للزلازل: لموقع معين، تُرسم مناطق جغرافية تمثل المصادر الزلزالية التكتونية. ولكل منطقة، يُفترض أن احتمال وقوع الزلازل متساوٍ على كامل المساحة السطحية (المصدر المولد للزلازل).
- الخطوة 2: تعريف نموذج الزلزالية: لكل مصدر، تُعرّف علاقة مقدار-تكرار من النوع $\ln N_M = a - b\,M$. وتُستخدم الزلزالية التاريخية لإنشاء معاملات هذه العلاقة. كما يُعرّف مقدار قطع، M_{max}، لكل مصدر.
- الخطوة 3: تعريف نموذج التوهين: تُحدد علاقة توهين بين كل مصدر وموقع معين. وعادة تُستخدم علاقة التوهين نفسها للمنطقة كاملة.
- الخطوة 4: حساب منحنى الخطر للموقع:

- الخطوة 4-1: حساب معدل تكرار مستوى معين من الحركة الأرضية: تُجمع علاقات التوهين مع علاقات المقدار-التكرار لإيجاد العدد السنوي للزلازل التي تسبب مستوى حركة أرضية مختاراً في أي موقع معين.
- الخطوة 4-2: حساب الاحتمال السنوي لتجاوز مستوى حركة أرضية مختار: يُستخدم توزيع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 66.6: تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي

احتمالي نظري لحساب الاحتمال السنوي لتجاوز مستوى حركة أرضية مختار في أي موقع معين. ويستند الحساب إلى معدل التكرار المحسوب في الخطوة 4-1.

- الخطوة 4-3: رسم خطوط كنتور ذات احتمال سنوي ثابت للتجاوز: تُكرر جميع الخطوات السابقة (1 إلى 4-2) لكل موقع معين. ثم تُرسم خطوط الكنتور لمعامل الحركة الأرضية المختار. وتستند هذه الخطوط إلى الاحتمال السنوي نفسه للتجاوز على كامل المساحة السطحية.

66.6 زمن الوقوع

يُحصل على معدل التكرار، N، وفترة العودة، T_R، من الزلزالية التاريخية لمنطقة ما. ويمكن الحصول على تنبؤات بافتراض أن تسلسل وقوع الزلازل يتبع نموذج توزيع احتمالي نظري.

في PSHA، يُنظر عادة في نموذج Poisson الاحتمالي، الذي يفترض أن الزلازل مستقلة مكانياً وزمنياً (نموذج مولد للزلازل). ويُعطى الاحتمال، $P_n(y)_t$، لوقوع n من الزلازل التي تنتج قيمة للمعامل الزلزالي موضع الاهتمام أكبر من أو مساوية لـ y في موقع معين خلال زمن معين t بـ:

$$P_n(y)_{t|N} = \frac{(Nt)^n \; e^{-Nt}}{n!}$$

حيث N عدد الزلازل السنوي (معدل التكرار) الذي ينتج قيمة للمعامل الزلزالي موضع الاهتمام أكبر من أو مساوية لـ y في الموقع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويكون الاحتمال، $P_n(y)_{t|N}$، لوقوع زلزال واحد على الأقل يسبب قيمة للمعامل الزلزالي موضع الاهتمام أكبر من أو مساوية لـ y في الموقع خلال زمن معين t مساوياً لـ 1 ناقص الاحتمال، $P_n(y)_{t|N}$، لعدم وقوع زلزال يسبب قيمة للمعامل الزلزالي موضع الاهتمام أكبر من أو مساوية لـ y في الموقع، الشكل 66.7a.

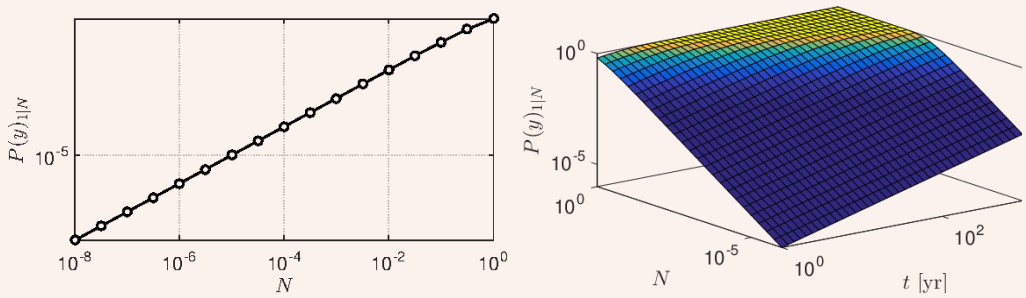
$$P(y)_{t|N} = 1 - e^{-Nt} \tag{66.2}$$

بالنظر إلى الاحتمال السنوي (t = 1 سنة)، تؤول المعادلة إلى، الشكل 66.7b.

$$P(y)_{1|N} = 1 - e^{-N} \tag{66.3}$$

للقيم الصغيرة من N، يكون النموذج المبسط

$$P(y)_{1|N} = N$$



(b) المعادلة 66.3 (a) المعادلة 66.2

شكل 66.7: نموذج Poisson الاحتمالي

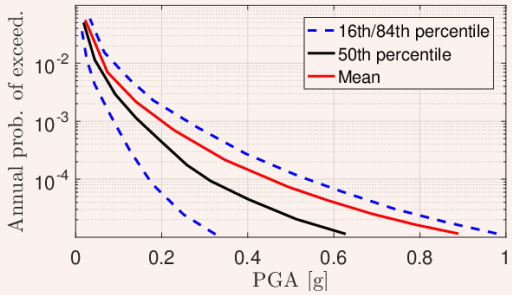
66.7 منحنيات الخطر الزلزالي

الناتج الأساسي لـ PSHA هو منحنى الخطر الزلزالي، الذي يبين المعدل أو الاحتمال السنوي لتجاوز مستوى محدد من الحركة الأرضية في موقع السد. وفي أي منحنى خطر، يعرض المحور الرأسي الاحتمال السنوي للتجاوز (أو فترة العودة)، والمحور الأفقي معامل مقياس الشدة (IM). وعادة تكون منحنيات الخطر الزلزالي أداة مهمة ومفيدة في تحليل مخاطر السدود والمنشآت النووية. ويبين الشكل 66.8 منحنيات خطر زلزالي نموذجية في موقع سد Pine Flat.

توجد أكواد حاسوبية مختلفة لإنتاج منحنى خطر زلزالي. فمثلاً، يعد *OpenSHA Hazard Curve Calculator* على www.opensha.org/apps من أشهر الأكواد المتاحة على الإنترنت.

استناداً إلى توصيات (USBR-manual, 2011 USBR)، فإن مقياس الشدة الأكثر شيوعاً في توليد منحنيات الخطر للسدود هو PGA؛ لكن يُستخدم $S_a(T = 1sec)$ عادة للسدود الترابية، وغالباً ما تُستخدم منحنيات الفترات الأقصر مثل $S_a(T = 0.2sec)$ أو $S_a(T = 0.4sec)$ للسدود الخرسانية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 66.8: عينة من منحنيات الخطر الزلزالي المتوسطة والكسرية

مع إتاحة توقع تمزق الزلازل ومعادلات التنبؤ بالحركة الأرضية، يُقدر منحنى الخطر الزلزالي كما يأتي (Applied Technology Council, 2012a):

$$\lambda\left(Y \geq y\right) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{m=M_{min}}^{M_{max,f}} \sum_{\varrho=1}^{N_{\varrho,f,m}} \left(\lambda\left(f, m, \varrho\right) - \lambda\left(f, m + \Delta m, \varrho\right)\right) \times \left(1 - F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)\right)$$

حيث،

$$F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right) = \frac{1}{N_a} \sum_{a=1}^{N_a} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{exp\left(\mu_{\ln Y,a}\right)}\right)}{\sigma_{\ln Y,a}}\right)$$

- Y معامل IM لاهتزاز الموقع، وعادة $S_a(T_1, \xi = 5\%)$،
- y قيمة معينة لـ Y،
- $\lambda\left(Y \geq y\right)$ المعدل المتوسط الذي قد يشهد به الموقع اهتزازاً بشدة y أو أكبر، ويشار إليه هنا بالخطر الزلزالي،
- f فهرس للصدوع في توقع تمزق الزلزال، $f = 1, 2, ..., N_f$،
- N_f عدد الصدوع في توقع تمزق الزلزال،
- m مقدار العزم، بزيادات مقدارها Δm = 0.1؛ $m = M_{min}$، و$M_{min} + \Delta m$، و$M_{min} + 2\Delta m$، و...، $M_{max,f}$،
- M_{min} المقدار الأدنى المدروس، مثل 5.0،
- $M_{max,f}$ المقدار الأقصى الذي يُعتقد أن الصدع f قادر على إنتاجه، وفق توقع تمزق الزلزال،
- ϱ فهرس للمواقع المتقطعة على طول أثر الصدع حيث تُقسم مراكز الزلازل، $\varrho = 1, 2, ..., N_{\varrho,f,m}$،
- $N_{\varrho,f,m}$ عدد المواقع المتقطعة على طول الصدع f حيث يمكن أن يتمركز زلزال مقداره m،
- $\lambda\left(f, m, \varrho\right)$ التكرار المتوسط الذي يمكن للصدع f أن ينتج به زلازل مقدارها m أو أكبر في الموقع ϱ، وفق توقع تمزق الزلزال،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- $F_{Y|f,m,\varrho}(y)$ احتمال أن تكون شدة الاهتزاز $Y \leq y$ نظراً إلى زلزال على الصدع f مقداره m ومركزه عند ϱ،
- a فهرس لمعادلات التنبؤ بالحركة الأرضية المستخدمة هنا، $a = 1, 2, ..., N_a$،
- N_a عدد معادلات التنبؤ بالحركة الأرضية المستخدمة،
- Φ دالة التوزيع التراكمي العادي المعياري المقيمة عند الحد بين القوسين. وتفترض هذه الأطروحة أن جميع معادلات التنبؤ بالحركة الأرضية تفترض أن Y موزع لوغاريتمياً طبيعياً مشروطاً بالمقدار والمسافة والآلية، إلخ.
- $\mu_{\ln Y,a}$ القيمة المتوقعة للوغاريتم الطبيعي لـ Y تحت معادلة التنبؤ بالحركة الأرضية a.
- $\sigma_{\ln Y,a}$ الانحراف المعياري الكلي للوغاريتم الطبيعي لـ Y تحت معادلة التنبؤ بالحركة الأرضية a.

66.8 خرائط الخطر الزلزالي

تُنتج خرائط الخطر الزلزالي الوطنية عادة باستخدام منحنيات الخطر مع عدة قيم للتسارع الطيفي مخمدة بنسبة 5% عند فترات 0.0 (PGA)، و0.2، و0.3، و0.5، و0.75، و1.0، و2.0 ثانية. وتُستخدم معدلات التكرار السنوي N = 0.00211، و0.00103، و0.00040 في السنة للحصول على القيم المقابلة لاحتمالات تجاوز 10%، و5%، و2% خلال 50 سنة. وعادة يُحسب احتمال التجاوز باستخدام نموذج Poisson الاحتمالي (المستقل عن الزمن). وبالنسبة إلى خرائط الخطر الأمريكية، افتُرضت شروط موقع صخري صلب منتظم بمتوسط سرعة موجة قص يبلغ 760 m/s في أعلى 30 m من القشرة.

تُعرض عينات من خرائط الخطر الزلزالي للولايات المتحدة في الشكل 66.9. وتبين خرائط الخطر الوطنية لهيئة المسح الجيولوجي الأمريكية (USGS) توزيع مستويات اهتزاز الزلازل ذات احتمال معين للوقوع في الولايات المتحدة. ويمكن إنشاء خريطة خطر مخصصة باستخدام تطبيق USGS على الإنترنت[1]

66.9 تفكيك الخطر الزلزالي

تُفيد مخططات تفكيك الخطر الزلزالي لأنها توفر رؤية واضحة لإسهام المعاملات المختلفة في عملية اختيار السجلات. كما يمكن استخدامها لتحديد المصدر المتحكم في الخطر عند موقع السد.

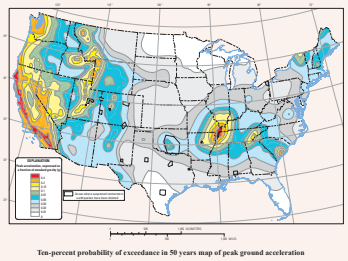
يبين مخطط التفكيك تركيبات المقدار والمسافة الأكثر إسهاماً في منحنى الخطر. وهو مفيد لاختيار تواريخ زمنية للزلازل لتحليل تاريخ الاستجابة. ويعتمد مخطط التفكيك على الشدة موضع الاهتمام واحتمال التجاوز. وعملياً، يُحصل على التفكيك عددياً على زيادات صغيرة في المقدار، Δm، والمسافة، Δr.

$$C(M,R) = \frac{N(m \leq M < m + \Delta m\,;\; r \leq R < r + \Delta r)}{N_{total}}$$

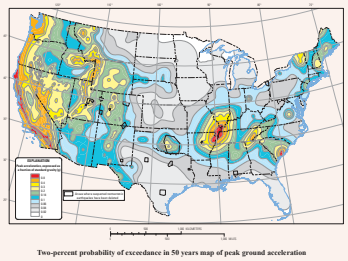
حيث $N(M,R)$ معدل تكرار الزلازل ذات المقدار والمسافة حول m وr، وN_{total} معدل التكرار الكلي في الموقع.

[1] خريطة الخطر المخصصة لـUSGS

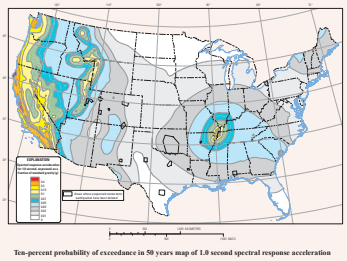
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



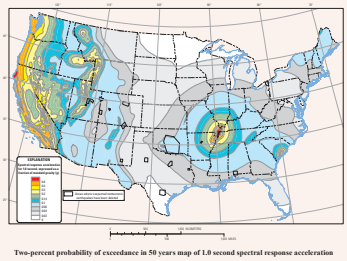
PGA ؛b) 10%/50yr)



PGA ؛a) 2%/50yr)



$S_a(T = 1.0s)$ ؛d) 10%/50yr)



$S_a(T = 1.0s)$ ؛c) 2%/50yr)

شكل 66.9: عينات من خرائط الخطر الأمريكية

يبين الشكل 66.10 مخططات التفكيك الزلزالي لجامعة Colorado Boulder مع مقاييس شدة وفترات عودة مختلفة على وسط صخري (USGS, 2003). ويمكن إيجاد المسافة والمقدار والحد بين الأحداث المنوالية في كل حالة.

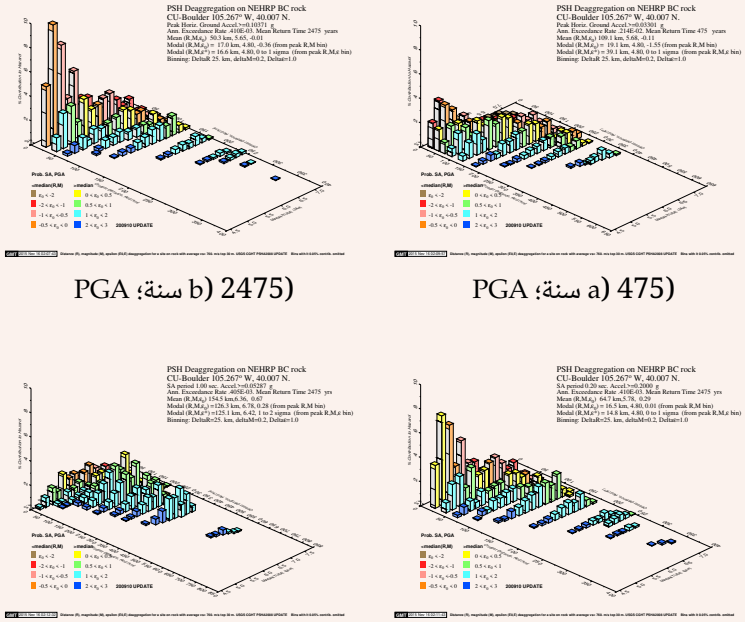
66.10 أطياف الاستجابة المستهدفة

يلزم طيف واحد لكل فترة من فترات الخطر الزلزالي العديدة المستخدمة في التحليل، والمختارة من منحنى الخطر الزلزالي للموقع. وثمة ثلاثة أنواع شائعة من الأطياف:

- أطياف الخطر المنتظم (UHS)
- الأطياف الشرطية (CS)
- أطياف المتوسط الشرطي (CMS)

تُحسب UHS *أطياف الخطر المنتظم* من منحنيات الخطر الزلزالي. ويتم ذلك بتطوير منحنيات خطر لعدة فترات اهتزاز لتعريف أطياف الاستجابة. ثم، لاحتمال تجاوز أو فترة عودة معينة، تؤخذ القيم من منحنيات الخطر لكل تسارع طيفي، ويولد «طيف استجابة متساوي الخطر». وهكذا، تُولد منحنيات أطياف الاستجابة

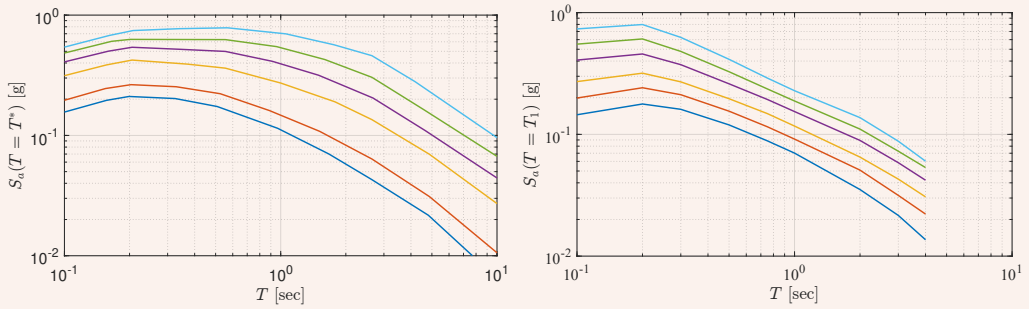
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



a) 475 سنة؛ PGA)
b) 2475 سنة؛ PGA)
c) 2475 سنة؛ $S_a(T = 0.2s)$
d) 2475 سنة؛ $S_a(T = 1.0s)$

شكل 66.10: عينات من مخططات التفكيك الزلزالي لجامعة Colorado Boulder

لفترات العودة المحددة موضع الاهتمام، وعادة 10,000 و50,000 سنة، لكن غالباً عند فترات عودة أقل أو وسيطة أو حتى أعلى. ويبين الشكل 66.11a طيف UHS للاتجاه الأفقي فقط عند موقع سد افتراضي.



a) UHS ($T_1 = 0.3$ s)
b) CMS ($T^* = 2.5$ s)

شكل 66.11: مقارنة أطياف استجابة مختلفة

من ناحية أخرى، فإن CS، الأطياف الشرطية، هي طيف استجابة يحدد التوزيع الاحتمالي لتسارعات طيفية مختلفة عبر نطاق من الفترات مشروطاً بالتسارع الطيفي عند فترة معينة (فترة الشرط)، T^* (Lin **and** Baker, 2014). ويحسب الطيف الشرطي الارتباطات بين التسارعات الطيفية عند فترات مختلفة لحساب الطيف المتوقع وتباينه (Baker **and** Jayaram, 2008). ويعرض الشكل 66.11b عينة CMS عند مستويات خطر مختلفة لمنشأ ذي $T^* = 2.5$ s.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

للأحداث المتكررة، ينبغي أن يكون لـ UHS وCMS شكلان متشابهان. وللأحداث النادرة، يكون مقدار CMS أصغر عند بعض الفترات من UHS لأن طيف المتوسط الشرطي يكمّم طيفاً أقل تحفظاً وأكثر واقعية لزلزال واحد. ويختلف CS عن CMS فقط في أنه يأخذ chap:trustregion في القيم الطيفية بالحسبان. وسيوفر استخدام CMS أو CS تقديرات أدق للاستجابة عند شدة معينة من اهتزاز الزلزال مقارنة بـUHS، لكن يلزم جهد إضافي لتوليد هذه الأنواع من الأطياف.

الإصدار الموسع من CMS، الذي يأخذ معاملات حركة أرضية أخرى غير أطياف الاستجابة بالحسبان، هو مقياس الشدة الشرطي المعمم (Bradley, 2010) (GCIM). وتستند هذه الطريقة أساساً إلى إنشاء التوزيع متعدد المتغيرات لأي مجموعة من مقاييس IM للحركة الأرضية مشروطة بوقوع مقياس IM محدد للحركة الأرضية (يُحصل عليه عادة من PSHA).

يمكن تلخيص الخطوات الأساسية لحساب CMS، المعتمدة من (Lin **and** Baker, 2014)، كما يأتي:

- تحديد معاملات إدخال الزلزال، بما في ذلك التسارع الطيفي المستهدف، $S_a(T^*)$، عند فترة الشرط، T^*، باستخدام PSHA والمقدار المتوسط السببي للزلزال المرتبط، M، والمسافة، R، وآلية التمزق، وحالة الموقع، θ.
- حساب المتوسط اللوغاريتمي، $\mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i)$، والانحراف المعياري، $\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)$، للتسارع الطيفي عند جميع الفترات، T_i، باستخدام نماذج GMPE.
- حساب إبسيلون، $\varepsilon(T_i)$، (عدد الانحرافات المعيارية التي تختلف بها $\ln S_a(T_i)$ عن القيمة الطيفية المتوسطة المتنبأ بها بواسطة GMPE معين) لأي قيمة $S_a(T_i)$:

$$\varepsilon(T_i) = \frac{\ln S_a(T_i) - \mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i)}{\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)}$$

- حساب متوسط التسارع الطيفي اللوغاريتمي الشرطي، $\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$، باستخدام نموذج الارتباط (Baker **and** Jayaram, 2008) الذي يحدد معامل الارتباط بين زوجي قيم إبسيلون عند فترتين، $\rho\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)$، كما يأتي:

$$\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i) + \rho\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)$$

- حساب الانحراف المعياري الشرطي، $\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$، كما يأتي:

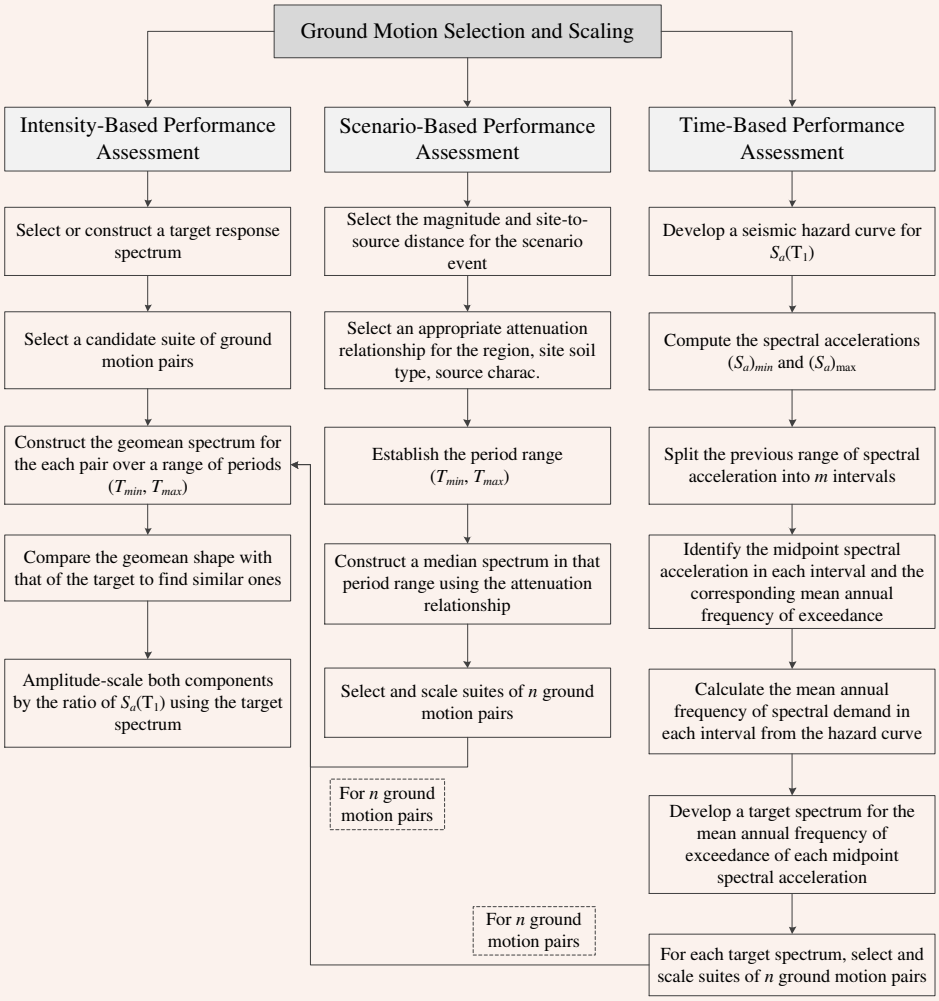
$$\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)\sqrt{1-\rho^2\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)}$$

- يحدد جمع الانحراف المعياري الشرطي وقيمة المتوسط الشرطي توزيعاً كاملاً لقيم التسارع الطيفي اللوغاريتمي عند جميع الفترات. ويُسمى توزيع الطيف الناتج CS، تمييزاً له من CMS الذي لا يأخذ التباين بالحسبان.

تقييمات الأداء القائمة على الشدة (IBPA)

تقيّم هذه الطريقة أداء منشأ بافتراض تعرضه لشدة اهتزاز محددة. وفي حالة المنشآت الإطارية، تُعرّف شدة الاهتزاز بأطياف استجابة تسارع مرن مخمدة بنسبة 5%. ويُستخدم هذا التقييم عادة عندما يتعرض المنشأ لاهتزاز زلزال ذي طيف استجابة محدد (مثل طيف استجابة التصميم) (Applied Technology Council, 2012b)، الشكل 66.12.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 66.12: مقارنة اختيار الحركة الأرضية وتحجيمها لـIBPA وSBPA وTBPA

تقييمات الأداء القائمة على السيناريو (SBPA)

تقيّم هذه الطريقة أداء منشأ بافتراض تعرضه لآثار زلزال بمقدار محدد يقع في موقع محدد بالنسبة إلى موقع المنشأ. وقد تكون تقييمات السيناريو مفيدة لصناع القرار ذوي المنشآت الواقعة قرب صدع نشط واحد أو أكثر. وتشبه التقييمات القائمة على السيناريو التقييمات القائمة على الشدة إلى حد كبير، عدا أن chap:trustregion في شدة الزلزال، بالنظر إلى السيناريو، تؤخذ بالحسبان (Applied Technology Council, 2012b)، الشكل 66.12.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تقييمات الأداء القائمة على الزمن (TBPA)

تقيّم هذه الطريقة أداء منشأ خلال فترة زمنية مع أخذ جميع الزلازل المحتملة في تلك الفترة واحتمال وقوع كل منها بالحسبان. وتأخذ التقييمات القائمة على الزمن chap:trustregion في مقدار الزلازل المستقبلية وموقعها، وكذلك شدة الحركة الناتجة عنها، بالحسبان. وتفيد التقييمات القائمة على سنة واحدة في تقييمات التكلفة-المنفعة المستخدمة للاختيار بين معايير أداء بديلة (Applied Technology Council, 2012b).

يقارن الشكل 66.12 الإجراء خطوة بخطوة لاختيار الحركة الأرضية وتحجيمها استناداً إلى الطرائق الثلاث المذكورة أعلاه. وتجدر الإشارة إلى أنه في TBPA، تكون القيم الموصى بها للمعاملات المقدمة في الشكل 66.12 كما يأتي: $(S_a)_{min}$ = 0.05 g، وترتبط $(S_a)_{max}$ بالتكرار السنوي للتجاوز البالغ $0.00002/yr$ (أي وقوع 1 مرة في 50,000 سنة). وعادة يُوصى بأن يكون عدد الفترات m هو 8.

66.11 محاكاة الحركة الأرضية العشوائية

رغم أن استخدام سجلات الحركة الأرضية الحقيقية طريقة معيارية في التقييم الزلزالي للمنشآت، فقد يعاني محدودية عدد الحركات الأرضية المسجلة (التي قد تغطي نطاقاً ضيقاً ومتقطعاً من الخطر الزلزالي)، وقد يستلزم محاكاة سجلات حركة أرضية إضافية لاستخدامها في سياق PBEE.

تستطيع معظم تقنيات محاكاة الحركة الأرضية توليد سلسلة زمنية للتسارع استناداً إلى سيناريو خطر زلزالي معين، مما يجعلها خياراً ممتازاً للاستخدام في SBPA (Rezaeian **and** Der Kiureghian, 2010؛ Yamamoto **and** Baker, 2013). وبوجه عام، يمكن تقسيم هذه التقنيات إلى مجموعتين (Yamamoto, 2011; Taborda **and** Roten, 2014; Rezaeian **and** Sun, 2014):

- تحاكي النماذج القائمة على الفيزياء الحركة الأرضية بنمذجة تمزق الصدع، وانتشار الموجات، وتضخيم الموقع قريب السطح صراحة. وهي تتطلب معلومات دقيقة لتوفير تقدير جيد للحركات الأرضية الحقيقية. ويكون تطبيق هذا النهج مكلفاً عموماً، وهو غير دقيق جداً للحركات عالية التردد (Pitarka **andothers**, 1998; Taborda **and** Roten, 2014).
- تحاكي النماذج العشوائية السلسلة الزمنية للحركة الأرضية مباشرة، وتُعاير تجريبياً استناداً إلى مجموعة البيانات الموجودة. وهذا النهج غير مكلف حسابياً بوجه عام. ويمكن إنشاء النماذج العشوائية باستخدام إحدى الطرائق الآتية (Rezaeian **and** Der Kiureghian, 2010): 1) تمرير ضوضاء بيضاء عبر مرشح (Shinozuka **and** Sata, 1967)، و2) تمرير قطار نبضات Poisson عبر مرشح خطي (Cornell, 1964)، و3) نموذج متوسط متحرك بالانحدار الذاتي (Hoshiya **and** Hasgur, 1978)، و4) نماذج طيفية تطورية (Priestley, 1965). وللحصول على تقدير جيد للحركات الأرضية الحقيقية، ينبغي أن يحسب النموذج كلاً من عدم الاستقرار الزمني (تغير المقدار مع الزمن) وعدم الاستقرار الطيفي (تغير التردد مع الزمن).

يشرح هذا القسم نموذجين عشوائيين للحركة الأرضية طُورا حديثاً ويُستخدمان على نطاق واسع.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

66.11.1 نموذج Rezaeian وr-d (Der Kiureghian)

طور Rezaeian وDer Kiureghian نموذجاً عشوائياً كاملاً غير مستقر للحركة الأرضية يستند إلى عملية ضوضاء بيضاء مرشحة ومعدلة ذات معاملات متغيرة زمنياً (Rezaeian **and** Der Kiureghian, 2008)، (Rezaeian **and** Der Kiureghian, 2010). وفي هذا النموذج تُفصل الخصائص غير المستقرة زمنياً وطيفياً تماماً، مما يسهل تعيين معاملات النموذج. وللنموذج عدد صغير من المعاملات ذات تفسيرات فيزيائية. ويمكن التعبير عن السلسلة الزمنية المتقطعة لتسارع الحركة الأرضية كما يأتي:

$$\hat{x}\left(t|\boldsymbol{\theta},\mathbf{W}\right)=\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{h\left[t-t_i,\boldsymbol{\theta}(t_i)\right]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k}h\left[t-t_j,\boldsymbol{\theta}(t_j)\right]^2}}w\left(i\Delta t\right),$$
$$k\Delta t<t<(k+1)\Delta t$$

حيث $\mathbf{W}=[w\left(i\Delta t\right);i=1,2,...,N_T]$ تسلسل ضوضاء بيضاء غاوسي، وΔt فترة التقسيم المختارة، و$\boldsymbol{\theta}$ متجهة معاملات نموذج بأبعاد n_θ (أي $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n_\theta}]$)، و$\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)$ دالة التعديل الزمني، و$h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(\tau)\right]$ دالة نبضة وحدية ناتجة من استجابة التسارع الزائف لمهتز خطي أحادي درجة الحرية ذي تردد طبيعي معتمد على الزمن $\omega_f(\tau)$ ونسبة تخميد $\zeta_f(\tau)$، حيث تدل τ على زمن النبضة.

$$h\left[t-\tau,\boldsymbol{\theta}(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{\omega_f(\tau)}{\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}}\exp\left[-\omega_f(\tau)\zeta_f(\tau)(t-\tau)\right] & \\ \qquad\sin\left[\omega_f(\tau)\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}(t-\tau)\right] & \tau\le t\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

تأخذ دالة التردد المعتمد على الزمن صورة خطية، بينما تُفترض دالة التخميد ثابتة:

$$\omega_f(\tau)=\omega_{mid}+\omega'\left(\tau-t_{mid}\right)\ ;\qquad \zeta_f(\tau)=\zeta_f$$

حيث تشير ω_{mid} إلى التردد المركزي، وω' تغير التردد، وt_{mid} منتصف زمن مدة الحركة القوية (الزمن الذي تبلغ فيه شدة Arias نسبة 45% من قيمتها النهائية).

بالنسبة إلى دالة التعديل، تُختار دالة من نوع غاما تتحكم فيها ثلاثة معاملات:

$$\beta\left(t,I_A,\alpha_2,\alpha_3\right)=\underbrace{\sqrt{I_A\frac{(2\alpha_3)^{2\alpha_2-1}}{\Gamma\left(2\alpha_2-1\right)}}}_{\text{الشدة}}\underbrace{t^{\alpha_2-1}}_{\text{الشكل}}\underbrace{e^{-\alpha_3 t}}_{\text{المدة}}$$

حيث $\Gamma(.)$ دالة غاما، وI_A شدة Arias المحجمة، وα_2 وα_3 معاملا التحكم في الشكل والمدة، ويمكن ربطهما بفيزياء المسألة من خلال المدة الفعالة، $D_{5-95}=I_A^{95\%}-I_A^{5\%}$، و$t_{mid}$، على التوالي. وأخيراً، تُمرر الدالة المحاكية بمرشح عالي التمرير لضمان سرعة متبقية صفرية.

يمكن تلخيص متجهة معاملات نموذج الحركة الأرضية كما يأتي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$\boldsymbol{\theta} = \{I_A, D_{5-95}, t_{mid}, \omega_{mid}, \omega', \zeta_f\}$. وقد طُورت علاقات تنبؤية لكل معامل من معاملات النموذج بملاءمة النموذج العشوائي مع مجموعة فرعية من قاعدة بيانات الحركات القوية للجيل التالي من التوهين (NGA). وتصف هذه النماذج التنبؤية $\boldsymbol{\theta}$ بدلالة خصائص الزلزال والموقع الآتية: 1) مقدار العزم (M_w)، و2) أقرب مسافة إلى التمزق (R_{rup}) بوحدة [km]، و3) سرعة موجة القص لأعلى 30 m من التربة (V_{S30}) بوحدة [m/s]، و4) آلية الصدع (F_{mech})، سواء انزلاق مضربي أو عكسي. وتأخذ المعادلات التجريبية الصورة العامة الآتية:

$$\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right] = \mu\left(M_w, R_{rup}, V_{S30}, F_{mech}, \mathbf{c}\right) + \eta + \sigma$$

حيث θ معامل نموذج، و$\Phi[.]$ دالة التوزيع التراكمي الغاوسي المعياري (CDF)، وF_θ دالة التوزيع التراكمي لـ θ (المحددة تجريبياً). وبعد ذلك، تحول $\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right]$ معامل النموذج من الفضاء الفيزيائي إلى الفضاء العادي المعياري. وμ المتوسط المتنبأ به بدلالة خصائص الزلزال والموقع، وتمثل $\mathbf{c}$ متجهة معاملات الانحدار. إضافة إلى ذلك، فإن η وσ متغيران عشوائيان عاديان صفريا المتوسط، ويشيران إلى أخطاء بين الأحداث وداخل الحدث على التوالي. ويمكن إيجاد معاملات الانحدار، وتباينات حدود الخطأ، والارتباطات بين معاملات النموذج في (Rezaeian **and** Der Kiureghian, 2010).

66.11.2 نموذج Yamamoto وy-b (Baker)

استخدم Yamamoto وBaker تحويل حزم المويجات (WPT) (وهو الإصدار الموسع من تحويل المويجات المتقطع، DWT) لتكميم خصائص الزمن والتردد للسلاسل الزمنية لتوليد حركات أرضية عشوائية (Yamamoto **and** Baker, 2013)، (Ya-mamoto, 2011). ويزيد WPT المرونة في التحكم في الدقة في مجالي الزمن والتردد. إضافة إلى ذلك، تكون دوال الأساس متعامدة، مما يتيح إعادة بناء السلسلة الزمنية بسهولة.

يُعرّف WPT الأمامي والعكسي كما يأتي:

$$c^i_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^i_{j,k}(t)dt \; ; \quad x(t) = \sum_{i=1}^{2^j}\sum_{k=1}^{2^{N-j}} c^i_{j,k}\psi^i_{j,k}(t)$$

حيث $x(t)$ السلسلة الزمنية، و2^N عدد نقاط البيانات فيها، و$c^i_{j,k}$ يمثل المجموعة i^{th} من حزم المويجات عند معامل المقياس j^{th}، وk معامل الانتقال، و$\psi^i_{j,k}$ دالة WPT.

ينتج WPT سلسلة زمنية ذات عدد قليل من معاملات حزم المويجات كبيرة المقدار وكثير من المعاملات صغيرة المقدار. واستخدم Yamamoto وBaker هذه الميزة وعرّفا مجموعتين من معاملات حزم المويجات: رئيسية (تحتوي نحو 70% من الطاقة الكلية في الحركة الأرضية) وثانوية (تحتوي 30% المتبقية من الطاقة). ونتيجة لذلك، تكون معاملات حزم المويجات الكلية تركيباً من هاتين المجموعتين:

$$\left|c^i_{j,k}\right|^2 = \left|c^i_{j,k,maj}\right|^2 + \left|c^i_{j,k,min}\right|^2$$

حيث $c^i_{j,k,maj}$ و$c^i_{j,k,min}$ معاملا حزم المويجات الرئيسية والثانوية.

يتطلب هذا النموذج 13 معلماً لتحديد خصائص السلسلة الزمنية للتسارع من حيث الزمن والتردد تحديداً كاملاً. وتُصنَّف هذه المعلمات هنا، أما الصياغة التفصيلية فيُحال القارئ إلى (Yamamoto **and** Baker, 2013).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- للمجموعة الرئيسية: 1) المركز الزمني $E(t)_{maj}$، 2) التباين الزمني $S^2(t)_{maj}$، 3) المركز الطيفي $E(f)_{maj}$، 4) التباين الطيفي $S^2(f)_{maj}$، 5) الارتباط بين زمن المعاملات وترددها $\rho(t,f)_{maj}$، 6) متوسط مربعات سعات معاملات حزم المويجات $E(a)_{maj}$،
- للمجموعة الثانوية: 7) المركز الزمني $E(t)_{min}$، 8) التباين الزمني $S^2(t)_{min}$، 9) المركز الطيفي $E(f)_{min}$، 10) التباين الطيفي $S^2(f)_{min}$، 11) الارتباط بين زمن المعاملات وترددها $\rho(t,f)_{min}$،
- 12) عشوائية سعة حزم المويجات $S(\xi)$، و13) مربع التسارع التراكمي E_{acc}.

تتسم حزم المويجات في المجموعة الرئيسية بعشوائية قوية مقارنةً بنظيراتها في المجموعة الثانوية. لذلك تُنمذج مربعات السعات والمواقع الزمنية-الترددية لحزم المويجات كلٌّ على حدة

$$a_{maj} \sim \text{Exponential}\left[E\left(\left|c^i_{j,k,maj}\right|^2\right)\right]$$
$$\left[t_{k,maj}, f_{i,maj}\right] \sim \text{Lognormal}\left[M_{maj}, \Sigma_{maj}\right]$$

حيث a_{maj} مربعات سعات معاملات حزم المويجات في المجموعة الرئيسية، و$t_{k,maj}$ و$f_{i,maj}$ مركزا الموقعين الزمني والترددي لمعاملات المويجات الرئيسية، ويُعرَّف M_{maj} وΣ_{maj} كما يأتي:

$$M_{maj} = \begin{bmatrix} E\left(\ln t_{k,maj}\right) & E\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_{maj} = \begin{bmatrix} S^2\left(\ln t_{k,maj}\right) & Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) \\ Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) & S^2\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$

ومن ناحية أخرى، يمكن تقدير حزم المويجات في المجموعة الثانوية بدوال لوغاريتمية طبيعية ثنائية المتغير للزمن والتردد والبواقي (ولا يتطلب ضبطها سوى خمسة معلمات):

$$\left|c^i_{j,k,min}\right|^2 = \frac{1}{2\pi S\left(\ln t_{k,min}\right) S\left(\ln f_{i,min}\right)\sqrt{1-\rho^2\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)}}$$
$$\times \frac{1}{\ln t_{k,min}.\ln f_{i,min}} \exp\left[-\frac{W_1^2 - 2\rho\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right) W_1 W_2 + W_2^2}{2\left(1-\rho^2\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)\right)}\right] \times \xi_{k,i}$$

حيث $t_{k,min}$ و$f_{i,min}$ مركزا الموقعين الزمني والترددي لمعاملات المويجات الثانوية، وρ معامل الارتباط، و$\xi_{k,i}$ متغير عشوائي لوغاريتمي طبيعي يُستخدم للمعايرة، ويُعرَّف متغيران وسيطان كما يأتي: $W_1 = \frac{\ln t_{k,min} - E(\ln t_{k,min})}{S(\ln t_{k,min})}$ و $W_2 = \frac{\ln f_{i,min} - E(\ln f_{i,min})}{S(\ln f_{i,min})}$.

وأخيراً، لتوليد حركة أرضية لسيناريو زلزالي معين، تُربط المعلمات الـ13 بمعلمات ذلك السيناريو باستخدام تحليل انحدار ذي مرحلتين. وقد استُخدمت مجموعة كبيرة من الحركات الأرضية المسجلة من قاعدة بيانات NGA لتقدير المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم وبالصيغة الدالية الآتية:

$$Y = \alpha + \beta_1 M_w + \beta_2 \ln M_w + \beta_3 \exp M_w + \beta_4\left(R_{hyp} - R_{rup}\right) + \beta_5 \ln\sqrt{R_{rup}^2 + h^2} + \beta_6 \ln V_{S30} + \eta + \sigma$$

حيث Y اللوغاريتم الطبيعي لمعلم من معلمات النموذج، وσ وη بواقي داخل الحدث وبين الأحداث، على التوالي. ويُسند المعلم h لتجنب التنبؤ بقيم كبيرة للغاية لـY عند القيم الصغيرة لـR_{hyp} (المسافة البؤرية)، أما المعلمات α وβ_i فهي معاملات انحدار يمكن إيجادها في (Yamamoto, 2011) و(Yamamoto **and** Baker, 2013).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

66.12 دوال إثارة زمن التحمل

يتطلب الاستخدام العملي لطريقة زمن التحمل (ET) دوال إثارة مناسبة لزمن التحمل (ETEFs) تؤدي إلى نتائج تحليل متسقة. يستعرض هذا القسم الأجيال المختلفة لـETEF وكذلك دوال الهدف المستخدمة في إنتاجها[2]. وفي طريقة زمن التحمل، تُستخدم ETEFs دوالَّ إدخال للحمل الديناميكي. وتغطي طريقة ET جميع مستويات الشدة في دالة إثارة واحدة. وبعبارة أخرى، يقابل كل زمن في إثارة زمن التحمل مستوى شدة معيناً. وتُولَّد ETEFs عادةً بحيث تتوافق مع أطياف التصميم المطلوبة أو مجموعات الحركات الأرضية، ومع شدات تتزايد بمرور الزمن. ويُعد التوافق مع الحركات الأرضية والتصاعد خاصيتين رئيسيتين لـETEF يجب مراعاتهما عند محاكاة هذه الدوال الاصطناعية. وتتحقق خاصية التصاعد بتطبيق منحنى لزيادة السعة، ويمكن لهذا المنحنى أن يتخذ أشكالاً مختلفة. وفي إثارات زمن التحمل الأولى، اعتُمد منحنى خطي (يتناسب فيه التسارع الأقصى طردياً مع الزمن). كما دُرست أشكال أسية لمحاكاة إثارات زمن تحمل متوافقة مع السرعة المطلقة التراكمية (Mashayekhi **andothers,** 2018b).

ويُعد التوافق مع الحركات الأرضية خاصية مهمة أخرى لإثارة زمن التحمل. وللحركات الأرضية ثلاث خصائص رئيسية: الشدة، والمحتوى الترددي، والمدة. ولإنتاج محاكاة فعالة لإثارة زمن التحمل لا بد من مراعاة هذه الخصائص الثلاث. وبما أن أطياف الاستجابة تعكس محتوى الحركات الترددي وسعتها بصورة كافية، فإن إدخال أطياف الاستجابة في عملية المحاكاة يعني مراعاة السعة والمحتوى الترددي على نحو مناسب.

تُعرف المتطلبات المذكورة أعلاه بقيود المحاكاة. ويكون عدد قيود المحاكاة عادةً أكبر بكثير من عدد المتغيرات، بصرف النظر عن طريقة تعريف المتغيرات المستخدمة، Mashayekhi, Estekanchi **and** Vafai, 2019a; Mashayekhi, Estekanchi **and** Vafai, 2019b. ولأن الطرق التحليلية لا توفر إجراءً عملياً لمحاكاة ETEFs، تُستخدم أساليب التحسين.

يشرح هذا القسم توليد ETEFs. وتختلف دوال حمل التسارع القائمة من حيث الطيف المستهدف، ومدى الفترات، ودوال الهدف، والخطوة الزمنية، وطول المدة، وخوارزمية التحسين. وهذه الإثارات متاحة على الإنترنت من خلال موقع طريقة زمن التحمل. ويمكن تمييز خمسة أجيال من إثارات زمن التحمل على مسار تطور إنتاج ETEF.

66.12.1 الجيل الأول من ETEFs

وُلِّدت إثارات الجيل الأول فقط لتقديم المفهوم الأساسي لطريقة ET، وإثارات هذا الجيل غير مناسبة للاستخدام العملي. واستُخدم في محاكاتها مفهوم الأنماط العشوائية غير المستقرة في السعة والمحتوى الترددي. وفي هذه الطريقة، يُعبَّر عن دوال الإثارة بجمع عدد محدود من الدوال التوافقية كما يأتي:

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

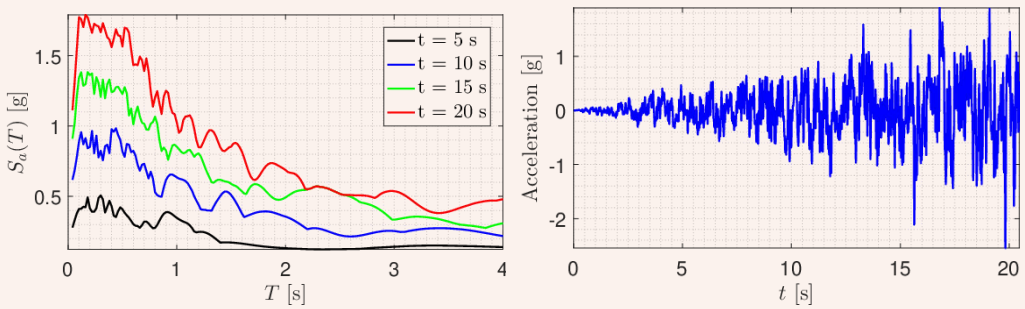
حيث N عدد الدوال التوافقية، وω_i وϕ_i التردد الزاوي وزاوية الطور للدالة الجيبية i^{th}، وA_i سعة التردد.

اعتُمدت إثارة عشوائية ذات توزيع غاوسي بمتوسط صفري وانحراف معياري مقداره واحد. واختير عدد نقاط بيانات التسارع مساوياً لـ2048، مع تسارع أقصى مقداره 1.0 g. ثم اعتُمدت دالة تعديل مناسبة. ولإزالة

[2] كُتب هذا القسم بالتعاون مع الأستاذ H.E. Estekanchi والدكتور M.R. Mashayekhi.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نطاقات التردد غير المرغوبة، رُشحت الإثارات بتقنية تحويل فورييه العكسي. وكان الهدف محاكاة إثارة تطابق طيفاً معيناً، والطيف المستهدف هو طيف تصميم نموذجي لكود زلزالي. وعُدِّلت الإشارة لتطابق دالة التسارع الطيفي بضبط سعات طيف فورييه. وتكرر هذا الإجراء حتى تحقق توافق مقبول. ثم عُدِّل مخطط التسارع المستقر الناتج بتطبيق دالة منحنى خطي جعلته متصاعداً من حيث التسارعات القصوى عبر فترات زمنية مختلفة. وقد أدت مخططات التسارع هذه الغرض من عرض مفهوم تحليل زمن التحمل بكفاءة. ويبين الشكل 66.13a عينة من السجل الزمني للتسارع من الجيل الأول.



(a) السجل الزمني للتسارع؛ ETA20ac01 (الجيل 1) (b) أطياف الاستجابة؛ ETA20a01 (الجيل 2)

شكل 66.13: عينة من ETEF

66.12.2 الجيل الثاني من ETEFs

في الجيل الثاني، تُراعى أطياف التسارع والإزاحة في عملية المحاكاة. ويمكن أن يكون الطيف المستهدف متوسط أطياف مجموعة من الحركات الأرضية أو طيفاً متوافقاً مع الكود. وفي هذا الجيل استُخدمت تقنيات التحسين للمرة الأولى لمحاكاة ETEFs جديدة. وفي سياق التحسين، يُعبَّر عن المعادلات بدلالة دوال الهدف. وتظهر دالة الهدف لهذه السلسلة في المعادلة 66.4، وهي تراعي طيفي التسارع والإزاحة.

$$F(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i) \right]^2 + \alpha \left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i) \right]^2 \right\} \tag{66.4}$$

حيث a_g إثارة زمن التحمل المطلوبة، وα معلم الوزن النسبي الذي يضبط الجزاء الفعلي المنسوب إلى انحراف الإزاحة مقارنة بانحرافات التسارع عن القيم المستهدفة. تجعل القيم العالية لـα دالة الهدف أكثر حساسية لفروق استجابة الإزاحة، بينما تجعلها القيم المنخفضة لـα أكثر حساسية لفروق أطياف التسارع. و$S_{aC}(T,t)$ طيف استجابة التسارع المستهدف عند الزمن t والفترة T، ويمكن أن يكون طيف تسارع تصميمياً مقنناً أو متوسط طيف مجموعة من الحركات الأرضية. و$S_{uC}(T,t)$ طيف استجابة الإزاحة المستهدف عند الزمن t والفترة T. أما $S_u(T,\tau)$ و$S_a(T,\tau)$ فهما طيفا استجابة الإزاحة والتسارع لإثارة زمن التحمل عند الفترة T والزمن τ. وt_{target} الزمن المستهدف الذي تنتج عنده إثارات زمن التحمل الطيف المستهدف. وينبغي أيضاً مراعاة اختيار زمن مستهدف مناسب. ففي الحالة اللاخطية العامة، إذا كان الزمن المستهدف منخفضاً جداً فقد لا يتاح للمنشأ وقت للمرور بعدد معقول من الدورات اللاخطية. أما إذا كان مرتفعاً جداً فسيصبح عدد الدورات كبيراً على نحو غير واقعي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لا تُدرج مطابقة الاستجابة اللاخطية في توليد إثارات زمن التحمل من الجيل الثاني. غير أن إدراج الفترات الطويلة في محاكاتها يتيح استخدامها في التحليل الديناميكي اللاخطي بدقة معقولة. ويبين الشكل 66.13b أطياف تسارع ETA20a01، وهي أول سلسلة مولدة في الجيل الثاني. ويمكن ملاحظة أن أطياف تسارع هذه الإثارة تتزايد خطياً.

66.12.3 الجيل الثالث من ETEFs

في محاكاة الجيل الثالث، روعي أيضاً توافق الاستجابات اللاخطية. وعلى غرار صياغة محاكاة إثارات زمن التحمل من الجيل الثاني، يُحاكى الجيل الثالث بتعريف معامل المقاومة R وفق الصياغة الآتية:

$$S_u(T,t,R) = \max\left(|u(\tau)|\right); \quad \tau \in [0,t]$$

$$S_{uT}(T,t,R) = \frac{t}{t_{target}} \times S_{uT}(T,R) \times \frac{T^2}{4\pi^2}; \quad \tau \in [0,t]$$

$$F(a_g) = \sum_{T_k=0}^{T_k=T_{max}} \sum_{R_j=0}^{R_j=R_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_u(T_k,R_j,t_i) - S_{uT}(T_k,R_j,t_i)\right]^2$$

على خلاف الجيل الثاني الذي يتطلب حساب دالة الهدف فيه عند كل فترة تحليلاً ديناميكياً واحداً لجميع الأزمنة، يتطلب حساب دالة الهدف للجيل الثالث عند كل فترة تحليلاً ديناميكياً منفصلاً لكل زمن. وهذا يعقّد محاكاة إثارات زمن التحمل من الجيل الثالث.

66.12.4 الجيل الرابع من ETEFs

في الجيل الرابع، تُدرج أيضاً المعلمات المرتبطة بالمدة في إجراء المحاكاة. ومع أن طيفي التسارع والإزاحة يمثلان شدة الحركات الأرضية ومحتواها الترددي تمثيلاً جيداً، فإن توصيفها الملائم يتطلب مراعاة خصائص المدة إلى جانب الشدة والمحتوى الترددي. وعلى الرغم من اقتراح تعريفات متنوعة للمدة في أدبيات هندسة الزلازل (O'Hara **and** Jacobson, 1991; Wang **andothers**, 2016; Bommer **and** Martinez-Pereira, 1999; Bolt, 1973)، أُدرجت السرعة المطلقة التراكمية (CAV) في محاكاة ETEFs من الجيل الرابع. ويقترح Campbell **and** Bozorgnia, 2012 إمكان استخدام CAV للتقييم السريع للضرر المحتمل في فئة عامة من المنشآت التقليدية. ويُمثل CAV رياضياً بالعلاقة $CAV = \int_0^{t_{max}} |a(t)|\,dt$، حيث $a(t)$ السجل الزمني للتسارع، وt_{max} المدة.

استُخدمت دوال الهدف في المعادلة 66.5 لمحاكاة سلسلة "ETA40lc". وتحسب الحدود الثلاثة الأولى البواقي بطريقة نسبية، بينما تحسب الحدود الثلاثة الأخرى البواقي بطريقة مطلقة. وأظهر Mashayekhi **andothers**, 2018b أن الجمع بين الحدود المطلقة والنسبية ينتج إثارة زمن تحمل أكثر كفاءة. وتكامل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

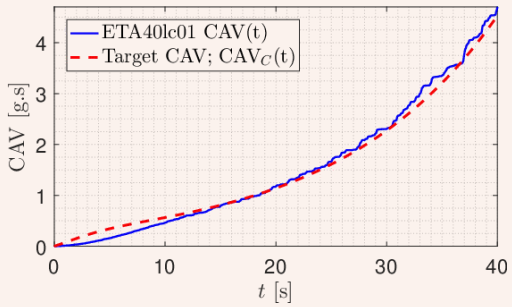
دوال الهدف هذه البواقي على كامل نطاقي الزمن والفترة. وتجدر الإشارة إلى أن أطياف التسارع، وأطياف الإزاحة الخطية، وCAV مأخوذة في الحسبان في هذه الدوال.

$$F_{CAV-M}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{S_a(T_j,t_i)-S_{aC}(T_j,t_i)}{S_{aC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{S_u(T_j,t_i)-S_{uC}(T_j,t_i)}{S_{uC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{CAV(t_i)-CAV_C(t_i)}{CAV_C(t_i)}\right]^2 \\ + \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ + \alpha_{S_u} \left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ \alpha_{CAV} \left[CAV(t_i) - CAV_C(t_i)\right]^2 \end{array} \right\} \tag{66.5}$$

حيث a_g السجل الزمني للتسارع.

تأخذ دوال الهدف هذه a_g مدخلاً؛ وα_{S_u} وα_{CAV} معاملا وزن يتحكمان في مساهمة البواقي المرتبطة بطيف الإزاحة وCAV، على التوالي.

لا يلزم أن يكون منحنى التصاعد الذي يتحكم في شكل زيادة أطياف التسارع مع الزمن خطياً. وقد استُخدم منحنى أسي لهذه السلسلة. ويقارن الشكل 66.14 قيمة CAV لـETA40lc01 بالقيمة المستهدفة، ويُلاحظ توافق ملحوظ بينهما.



شكل 66.14: قيمة CAV لـETA40lc01 مقابل القيمة المستهدفة

66.12.5 الجيل الخامس من ETEFs

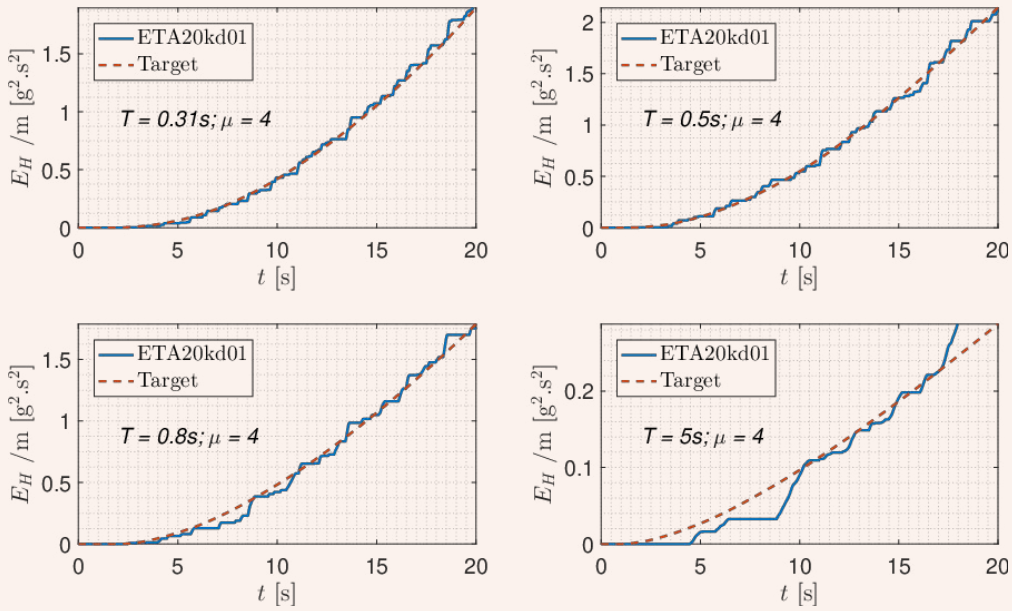
في الجيل الخامس، تُدرج أيضاً الطاقة الهستيرية الممتصة في عملية التوليد. وتجدر الإشارة إلى أن طلب الطاقة الهستيرية الممتصة يُستخدم مؤشراً لمعلم الضرر التراكمي. وتُعتمد دالة زيادة خطية لأطياف التسارع، وتُحسب رياضياً دالة زيادة مقابلة لأطياف الإزاحة اللاخطية والطاقة الهستيرية. ويمكن إيجاد إجراء تفصيلي لحساب دوال الزيادة لطلب الإزاحة اللاخطية والطاقة الهستيرية في Mashayekhi **andothers,** 2018a.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

والمعادلة 66.6 هي دالة الهدف التي تحسب مربعات الفروق بين الخصائص الديناميكية لإثارات زمن التحمل والحركات الأرضية المستهدفة:

$$F_{ETEF}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 + \sum_{\mu_k=1}^{\mu_k=\mu_{max}} \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{matrix} \alpha_{u_m}\left[u_m(\mu_k,T_j,t_i) - u_{mC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \\ +\alpha_{E_H}\left[E_H(\mu_k,T_j,t_i) - E_{HC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \end{matrix} \right\} \tag{66.6}$$

حيث $a_g(t)$ السجل الزمني للتسارع، و$S_a(t,T)$ و$u_m(t,T,\mu)$ و$E_H(t,T,\mu)$ الخصائص الديناميكية لإثارات زمن التحمل، و$S_{aC}(t,T)$ و$u_{mC}(t,T,\mu)$ و$E_{HC}(t,T,\mu)$ الخصائص الديناميكية للحركات الأرضية. وتمثل E_H الطاقة الهستيرية، وu_m إزاحة الاستجابة اللاخطية. ويقارن الشكل 66.15 الطاقة الهستيرية لـETA20kd01 بالقيمة المستهدفة عند أربع فترات مختلفة.



شكل 66.15: الطاقة الهستيرية لـETA20kd01 مقابل القيمة المستهدفة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



زلزال بوبايان، للفنان فرناندو بوتيرو، 1999. متحف بوتيرو، بوغوتا، كولومبيا.

66.13 مثال 66.1: تحليل الخطر الزلزالي

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

يعرض هذا المثال تحليلاً احتمالياً للخطر الزلزالي (PSHA) وتفكيكاً زلزالياً لمبنى شاهق من 30 طابقاً في لوس أنجلوس، كاليفورنيا. والهدف هو تقدير الاحتمال السنوي لتجاوز مستويات مختلفة من التسارع الأرضي الأقصى (PGA)، وتحديد السيناريوهات الزلزالية المهيمنة التي تسهم في الخطر الزلزالي.

الإطار الزلزالي التكتوني

- يقع موقع المبنى على بعد 50 km من صدع سان أندرياس، وهو صدع انزلاقي مضربي رئيسي له تاريخ في إنتاج زلازل بقوة M7.8–8.2. - توجد صدوع إضافية متوسطة (M5.5–6.5) ضمن مسافة 20 km من الموقع. - يُصنَّف الموقع تربةً صلبة (فئة الموقع C) بمتوسط سرعة موجة قص قدره $V_{S30} = 600$ m/s.

نموذج النشاط الزلزالي (علاقة التكرار)

باستخدام قانون غوتنبرغ-ريختر:

$$\log N_M = a' - b' M \tag{66.7}$$

حيث:

- معلمات النشاط الزلزالي الإقليمي:
  - كاليفورنيا: $a' = 6.2$، $b' = 1.1$
- القدر الأدنى: $M_{min} = 4.5$
- القدر الأقصى: $M_{max} = 8.0$
- فترة عودة حدث بقدر $M \geq 7.5$: 200 سنة
- المعدل السنوي لوقوع زلازل $M \geq 6.0$: 0.03 حدث/سنة

نموذج التوهين (GMPE)

باستخدام GMPE لبور وجوينر وفومال (1997):

$$\ln \text{PGA} = b_1 + b_2 (M - 6) + b_5 \ln(r_{jb} + h) \tag{66.8}$$

حيث:

- $M = 7.5$
- مسافة جوينر-بور: $r_{jb} = 50$ km
- حد العمق: $h = 5.0$ km
- التسارع الأرضي الأقصى المتوقع: $0.22g$ (القيمة الوسيطة)

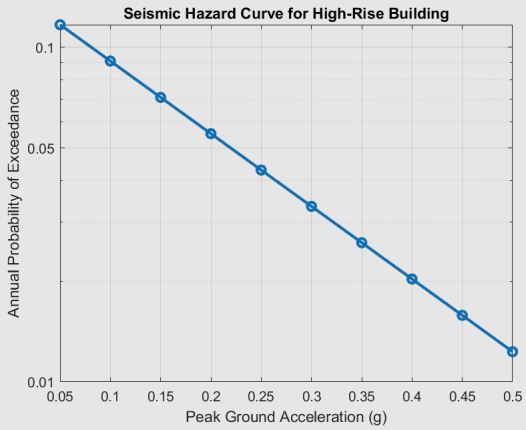
تحليل الخطر الزلزالي

يوضح منحنى الخطر الزلزالي احتمال تجاوز مستويات مختلفة من التسارع الأرضي الأقصى (PGA) في الموقع. ويُنشأ منحنى الخطر باستخدام نموذج اضمحلال أسي لاحتمال التجاوز:

$$P(Y \geq y) = \lambda_0 e^{-by} \tag{66.9}$$

حيث λ_0 احتمال التجاوز الأساسي وb معدل الاضمحلال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



يبين الجدول الآتي الاحتمال السنوي للتجاوز عند مستويات مختلفة من الحركة الأرضية.

الاحتمال السنوي للتجاوز	(PGA (g
0.12	0.05
0.06	0.1
0.015	0.2
0.003	0.3

تفكيك الخطر الزلزالي

يحدد تفكيك الخطر الزلزالي السيناريوهات الزلزالية الأرجح إسهاماً في الخطر عند مستوى معين من التسارع الطيفي. ويُعد هذا التحليل بالغ الأهمية لاختيار حركات أرضية ممثلة للتصميم الإنشائي.

عند $S_a(T = 1.0s) = 0.8g$، يكون السيناريو الزلزالي الأرجح هو:

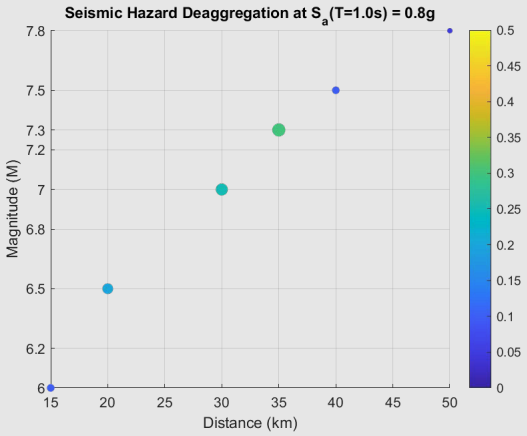
- **القدر:** $M = 7.3$
- **المسافة:** $R = 35$ km
- **نوع التمزق:** انزلاقي مضربي

وتشمل الإسهامات الإضافية في الخطر:

- يسهم $M6.5$ عند 20 km بنحو 20%
- يسهم $M7.8$ عند 50 km بنحو 30%
- يسهم $M7.0$ عند 40 km بنحو 50% (السيناريو المهيمن)

يبين مخطط التفكيك الآتي الإسهامات النسبية لأزواج القدر والمسافة المختلفة في مستوى الخطر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



المناقشة والدلالات الهندسية

توفر نتائج منحنى الخطر وتحليل التفكيك رؤى مهمة للتصميم الزلزالي:

- يقابل السيناريو الزلزالي الأشد خطورة حدثاً بقدر $M7.3$ على بعد 35 km، مما يشير إلى ضرورة مراعاة التأثيرات الزلزالية للمجال القريب.
- يبلغ احتمال التجاوز السنوي عند PGA = 0.2g مقدار 1.5%، وقد يؤثر ذلك في قرارات التصميم الزلزالي وفق مستويات الخطر المستهدفة.
- تساعد نتائج التفكيك في اختيار سجلات الحركة الأرضية للتحليل اللاخطي للسجل الزمني، بما يضمن تنبؤات واقعية للاستجابة الإنشائية.

الخلاصة

تشير نتائج PSHA إلى أن *الخطر* الأهم في موقع المبنى الشاهق يأتي من زلازل بقدر $M7.3$ تقع على مسافة 35 km. وتساعد هذه النتائج المهندسين في تحديد *معلمات التصميم الزلزالي* المناسبة للسلامة الإنشائية. ويوفر منحنى الخطر أساساً لتقييم احتمال شدات الحركة الأرضية المختلفة، بينما يحدد تحليل التفكيك السيناريوهات الزلزالية المهيمنة التي تسهم في الخطر الزلزالي.

كود MATLAB®موجود في §I.7.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

67 تحليل الخطر الزلزالي II

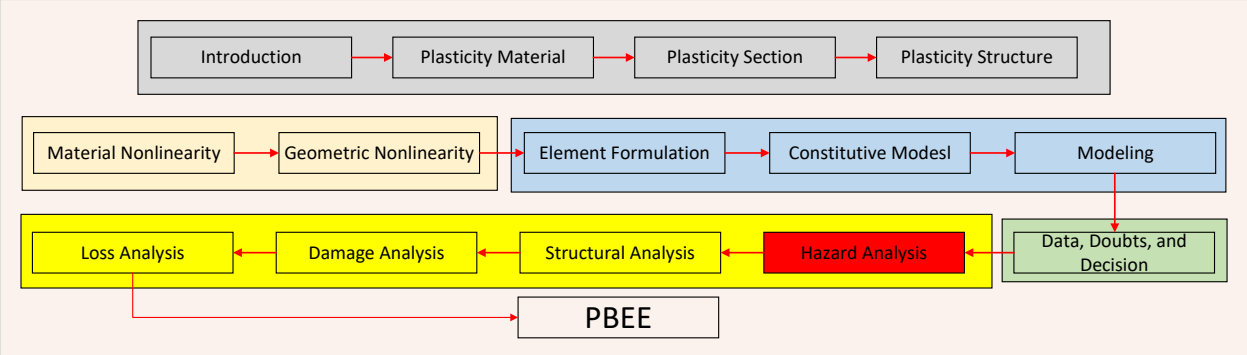
ملخص

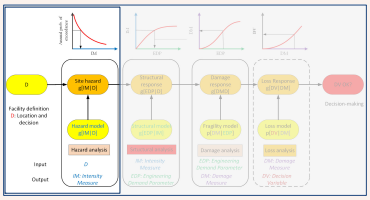
بناءً على المفاهيم الأساسية لتحليل الخطر الزلزالي المعروضة في الفصل 66، يوسّع هذا الفصل المناقشة بتناول الجوانب الرئيسية اللازمة لإجراء تقييم شامل للخطر.

ويقدم الإطار الاحتمالي المستخدم لتحديد المعدل السنوي لتجاوز شدات الحركة الأرضية، ويستكشف إنشاء منحنيات الخطر وتفسيرها.

كما يدمج تحليل الخطر الزلزالي الهندسي (ESRA) لتقييم آثار الخطر الزلزالي في الأداء الإنشائي والقدرة على الصمود. ويدرس الفصل أيضاً دور فترات العودة في التصميم الزلزالي، وتطبيق أشجار المنطق لتحديد chap:trustregion، والتقاطع بين التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) وهندسة الزلازل القائمة على الأداء. وتوفر هذه المنهجيات المتقدمة رؤى حاسمة لتصميم منشآت قادرة على تحمل الأحداث الزلزالية مع إدارة الخطر بفعالية.

67.1 مقدمة 2048
67.2 المعدل السنوي للتجاوز 2049
67.3 منحنى الخطر 2050
67.4 تحليل الخطر الزلزالي الهندسي (ESRA) 2051
67.4.1 مثال 67.1: حسابات فترة العودة 2052
67.5 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) بوصفه SHA + ESRA 2052





67.1 مقدمة

مع أن تحليل الخطر الزلزالي عولج بتفصيل كبير في الفصل 66، بقيت بعض الجوانب دون معالجة، ولا سيما ما يتصل منها بالتطبيقات العملية وامتدادات الإطار الاحتمالي. ويبني هذا الفصل على الأسس الموضوعة في الفصل السابق باستكشاف مكونات رئيسية أخرى مثل منحنيات الخطر، وفترات العودة، وتحليل الخطر

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزلزالي الهندسي. كما يدمج الأساليب الاحتمالية مع تقييمات الأداء الإنشائي، ليقدم منظوراً أشمل لتحديد الخطر الزلزالي. ومن خلال توسيع هذه الموضوعات، نردم الفجوة بين النمذجة النظرية للخطر ودلالاتها العملية للتصميم الهندسي وتخفيف المخاطر.

1 مع أن تحليل الخطر الزلزالي عولج بتفصيل كبير في الفصل 66، بقيت بعض الجوانب دون معالجة[1].

2 رغم نهج «من أسفل إلى أعلى»، تُغطى الأجزاء المفقودة هنا.

3 تحليل الخطر الزلزالي (SHA) هو عملية تقييم إمكان حدوث اهتزاز أرضي وغيره من الآثار المرتبطة بالزلازل في موقع معين نتيجة النشاط الزلزالي. ويهدف إلى تحديد احتمال الأحداث الزلزالية وشدتها، بما يوفر معلومات حاسمة لتصميم المنشآت، وتقييم المخاطر، والتخطيط للقدرة على الصمود أمام الزلازل.

67.2 المعدل السنوي للتجاوز

4 في التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA)، يُعد *المعدل السنوي للتجاوز* (λ) لمقياس شدة حركة أرضية معين (IM) مقياساً أساسياً. فهو يحدد احتمال أن تتجاوز الحركة الأرضية مستوى شدة معيناً خلال سنة:

$$\lambda(IM) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} P(IM > x \mid m, r)\, f_M(m)\, f_R(r)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}r,$$

حيث:

- $P(IM > x \mid m, r)$: احتمال أن يتجاوز مقياس الشدة x في ظل زلزال بقدر m على مسافة r.
- $f_M(m)$: دالة كثافة احتمال قدر الزلزال، المشتقة من نماذج التكرار مثل علاقة غوتنبرغ-ريختر.
- $f_R(r)$: دالة كثافة احتمال المسافة من المصدر إلى الموقع، التي تراعي النشاط الزلزالي الإقليمي وتأثيرات التوهين.
- $m_{\min}, m_{\max}, r_{\min}, r_{\max}$: حدود القدر والمسافة، المختارة لتشمل جميع المصادر الزلزالية ذات الصلة بالموقع.

5 يمثل المعدل السنوي للتجاوز (λ) عدد المرات المتوقع في المتوسط أن تُتجاوز فيها شدة حركة أرضية معينة (IM) خلال سنة واحدة في موقع معين. وهو يجمع احتمالات جميع السيناريوهات الزلزالية الممكنة، مع ترجيح كل سيناريو باحتمال وقوعه وإسهامه في شدة الحركة الأرضية. ويوفر هذا المقياس إطاراً احتمالياً لتحديد الخطر الزلزالي.

6 يُشتق الاحتمال $P(IM > x \mid m, r)$ عادةً من معادلات التنبؤ بالحركة الأرضية (GMPEs)، التي تنمذج شدة الاهتزاز المتوقعة وفق القدر، والمسافة من المصدر إلى الموقع، والظروف الخاصة بالموقع مثل خصائص التربة.

7 يستخدم PSHA غالباً أشجار المنطق لتمثيل أوجه عدم اليقين المعرفي في توصيف المصدر الزلزالي،

[1] إذ اخترت عدم تعديل الفصل الذي كتبه Amin Hariri-Ardebili في *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ونماذج التكرار، وGMPEs. ويمثل كل فرع من الشجرة نموذجاً أو افتراضاً مختلفاً، مع أوزان مسندة تعكس درجة الثقة بكل خيار. وتُجمع هذه الإسهامات المرجحة لإنتاج تقدير احتمالي شامل للخطر.

67.3 منحنى الخطر

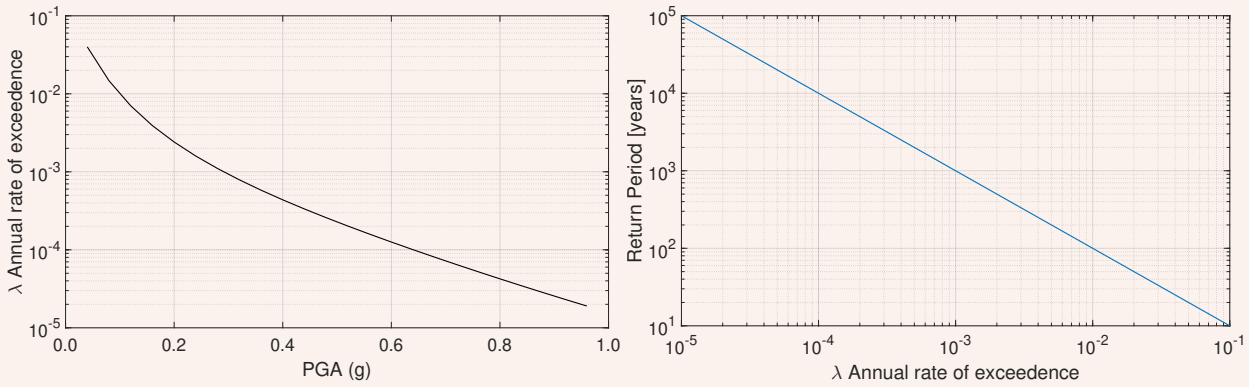
يمثل منحنى *الخطر* العلاقة بين λ (المعدل السنوي للتجاوز) وIM (مقياس الشدة، مثل التسارع الأرضي الأقصى (PGA) أو التسارع الطيفي (SA))، كما يبين الشكل 67.1:

معدل تجاوز مستوى معين من الحركة الأرضية في الموقع. $= \lambda(IM)$

8 تُستخدم منحنيات الخطر من أجل:

- تقدير احتمال التعرض لحركات أرضية مسببة للضرر خلال العمر الافتراضي للمبنى، وهو أمر حاسم لهندسة الزلازل القائمة على الأداء.
- اختيار مستويات الحركة الأرضية المقابلة لفترات عودة محددة (مثل احتمال تجاوز 10% خلال 50 سنة أو 2% خلال 50 سنة)، وهي شائعة الاستخدام في أكواد التصميم الزلزالي.
- تقييم استجابات المبنى وهوامش السلامة تحت سيناريوهات زلزالية مختلفة، بما يدعم التصميم الإنشائي وتخفيف المخاطر.

9 تختلف منحنيات الخطر اختلافاً كبيراً بين المواقع، بما يعكس الفروق في النشاط الزلزالي المحلي، والقرب من الصدوع، وظروف التربة الخاصة بالموقع. فالمواقع القريبة من الصدوع النشطة مثلاً تُظهر عادةً معدلات تجاوز سنوية أعلى لمستوى الشدة نفسه مقارنة بالمواقع الواقعة في مناطق أقل نشاطاً.



شكل 67.1: منحنى الخطر. يوضح المخطط الأيسر مفهوم فترات العودة، بينما يبين المخطط الأيمن منحنى خطر لموقع معين.

10 في أبسط صورة، تكون العلاقة بين فترة العودة (T) والمعدل السنوي للتجاوز (λ) أساسية. وفترة العودة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

هي متوسط الفاصل الزمني بين مرات تجاوز شدة حركة أرضية معينة في موقع ما. ويُعبَّر عن هذه العلاقة كما يأتي:

$$\lambda = \frac{1}{T}, \quad \text{أو، بصورة مكافئة،} \quad T = \frac{1}{\lambda}.$$

11 على سبيل المثال، تقابل فترة عودة مقدارها 475 سنة احتمال تجاوز سنوياً يقارب 0.0021 (0.21%)، بينما تقابل فترة عودة مقدارها 2,475 سنة احتمالاً مقداره 0.0004 (0.04%). وتُستخدم هذه القيم على نطاق واسع في التصميم الزلزالي للمنشآت العادية والحرجة، على التوالي.

12 من المهم ملاحظة أن فترة العودة لا تعني وقوع حدث معين بدقة عند هذه الفواصل الزمنية، بل تمثل متوسط فاصل التكرار، مع حساب الاحتمالات على أطر زمنية متعددة. فمثلاً، تعني فترة عودة مقدارها 475 سنة احتمال تجاوز قدره 10% خلال 50 سنة.

67.4 تحليل الخطر الزلزالي الهندسي (ESRA)

13 يشير تحليل الخطر الزلزالي الهندسي إلى عملية تقييم وتحديد المخاطر المحتملة المرتبطة بالزلازل على المنشآت الهندسية، والبنية التحتية، والمجتمع.

14 وهو يوسّع تحليل الخطر الزلزالي (SHA) بإدراج *قابلية التأثر* (مدى احتمال تضرر المنشأ) و*التعرض* (قيمة البنية التحتية المتأثرة أو أهميتها). وتحدد هذه العوامل مجتمعةً النتائج المتوقعة للأحداث الزلزالية.

15 إذا افترضنا توزيع بواسون لتمثيل وقوع الزلازل بوصفها أحداثاً عشوائية ومستقلة مع الزمن، فإن احتمال حدوث تجاوز واحد على الأقل لمستوى حركة أرضية خلال فترة زمنية t يُعطى بالعلاقة:

$$P_E = 1 - e^{-\lambda t}.$$

وبحلها لإيجاد معدل التجاوز λ، نحصل على:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - P_E)}{t}.$$

وباستخدام ذلك في تعريف فترة العودة:

$$T_R = \frac{t}{-\ln(1 - P_E)}.$$

16 تفترض المعادلة المبسطة $T_R = 1/\lambda$ معدل تجاوز سنوياً ثابتاً λ، وهي تقريب صالح لاحتمالات التجاوز الصغيرة (P_E) خلال الزمن t. ويصح هذا التقريب عندما تكون λt صغيرة، مما يؤدي إلى:

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t.$$

17 ومن ثم يمكننا التعبير عن λ بدلالة P_E:

$$P_E \approx \lambda t \quad \Longrightarrow \quad \lambda \approx \frac{P_E}{t}.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18 ومن ذلك:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{t}{P_E}.$$

لكن عند القيم الأكبر لـP_E، ينبغي استخدام العلاقة اللوغاريتمية للحصول على دقة أعلى.

67.4.1 مثال 67.1: حسابات فترة العودة

لنتأمل نطاقات الاحتمال النموذجية للتجاوز:

- مستوى أساس التصميم (DBL): $P_E \in [20\%, 64\%]$،
- مستوى التصميم الأقصى (MDL): $P_E \in [10\%, 20\%]$.

بالنسبة إلى سد عمره التصميمي $t = 100$ سنة، نحسب معدلات التجاوز وفترات العودة كما يأتي:

1. عند $P_E = 0.20$ (DBL، احتمال تجاوز 20%):

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0.20)}{100} = -\frac{\ln(0.80)}{100} \approx 0.00223.$$

وباستخدام معدل التجاوز هذا، تكون فترة العودة المقدرة:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00223} \approx 450 \text{ سنة}.$$

2. عند $P_E = 0.10$ (MDL، احتمال تجاوز 10%):

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0.10)}{100} = -\frac{\ln(0.90)}{100} \approx 0.00105.$$

وباستخدام معدل التجاوز هذا، تكون فترة العودة المقدرة:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00105} \approx 1,000 \text{ سنة}.$$

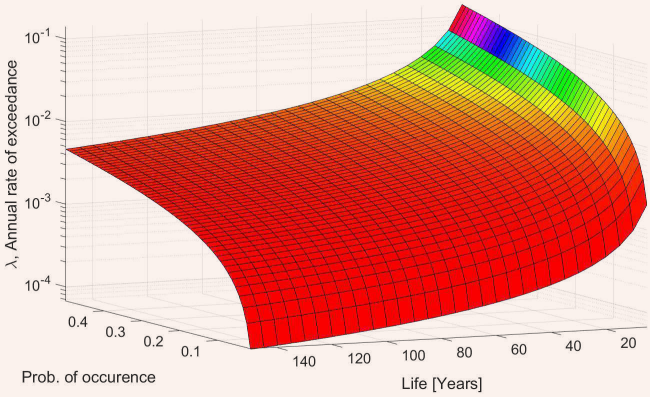
67.5 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) بوصفه SHA + ESRA

19 ينتج تحليل الخطر الزلزالي الهندسي (ESRA) المعدل السنوي للتجاوز λ، الذي يمثل احتمال وقوع حدث واحد على الأقل خلال عمر معين t (الشكل 67.3).

20 يوفر تحليل الخطر الزلزالي (SHA) العلاقة بين المعدل السنوي للتجاوز λ ومقياس الشدة (IM).

21 يدمج التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) بين ESRA وSHA لتقدير احتمال مستويات مختلفة من الاهتزاز الأرضي في موقع معين خلال مدة محددة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

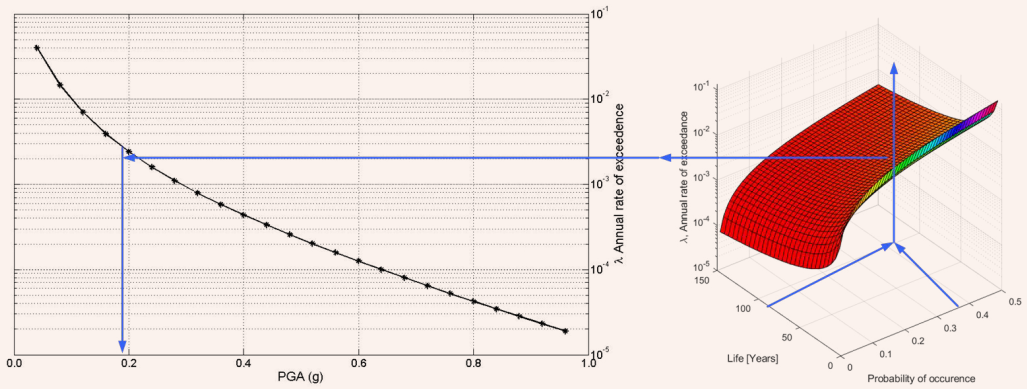


شكل 67.2: سطح تحليل الخطر الزلزالي الهندسي

22 على خلاف تقييمات الخطر الزلزالي الحتمية التي تركز على سيناريوهات زلزالية بعينها، يراعي PSHA أوجه عدم اليقين في وقوع الزلزال، وقدره، وموقعه، وحركته الأرضية، فيوفر مقياساً احتمالياً للخطر الزلزالي.

23 يتبع النهج عملية منظمة، كما يوضح الشكل 67.3:

1. حدِّد: (a) العمر موضع الاهتمام (بالسنوات) و(b) احتمال الوقوع.
2. استخرج λ من سطح ESRA (الشكل 67.2).
3. استخدم منحنى SHA لتحديد التسارع الأرضي الأقصى (PGA) المقابل (الشكل 67.1).



شكل 67.3: التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA).

24 بعد تحديد PGA، تُختار (أو تُولَّد) مجموعة من n سجلات زمنية لتسارع الحركة الأرضية لإجراء تحليلات متعددة.

25 وتُستخرج من هذه التحليلات معلمات الاستجابة الرئيسية وتُمثل بيانياً:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مقياس الشدة (IM) تمثيل كمي لخصائص الحركة الأرضية، وعادةً ما يكون التسارع الأرضي الأقصى (PGA) أو التسارع الطيفي.

معلم الطلب الهندسي (EDP) كمية استجابة إنشائية ذات صلة بتقييم السلامة، مثل قص القاعدة، أو الانجراف بين الطوابق، أو تسارع الطابق.

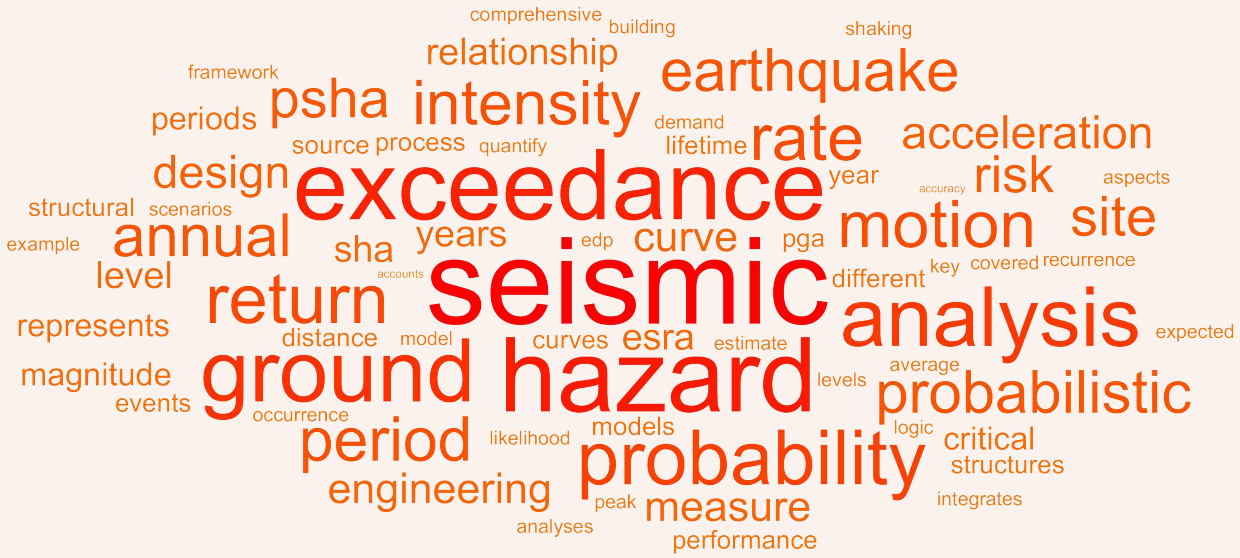
26 تتكرر هذه العملية m مرة لمستويات شدة مختلفة لتطوير نماذج احتمالية للطلب الزلزالي.

27 في جميع الحالات نمثل EDP مقابل IM، وهو نموذج *الطلب الزلزالي* الذي غالباً ما يُمثَّل بالعلاقة

$$EDP = a.IM^b$$

حيث a وb معاملا انحدار يُستخرجان من التحليلات الديناميكية اللاخطية (انظر الفصل 52)

28 تنبيه: تعتمد نتائج PSHA اعتماداً كبيراً على دقة نماذج الإدخال، بما فيها توصيف المصدر؛ وقد تكون بياناته التاريخية محدودة للأحداث النادرة والمتطرفة؛ كما قد يصعب على أصحاب المصلحة غير المتخصصين تفسير النتائج الاحتمالية.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68 التحليل الإنشائي

ملخص

يعرض هذا الفصل منهجيات متقدمة في التحليل الزلزالي، تشمل مناهج متعددة تُستخدم لتقييم السعة الزلزالية لمنشآت مثل المباني والجسور. ويستكشف الأسس النظرية والتطبيقات العملية لطرائق متنوعة، منها تحليل الدفع (POA)، وتحليل الشرائح المتعددة (MSA)، والتحليل الديناميكي المتزايد (IDA)، وتحليل السحابة (CLA)، وتحليل زمن التحمل (ETA)، مع إبراز مزايا كل منها وقيودها.

يُناقش تحليل الدفع بتوسع بوصفه إجراءً لاخطياً ساكناً واسع الاستخدام يوفر فهماً للسلوك الإنشائي غير المرن تحت حمل جانبي يُطبق تدريجياً. وتُحلل المخرجات الرئيسية مثل منحنى السعة ونقطة الأداء لتسهيل فهم قدرة المنشأ على الصمود أمام القوى الزلزالية. كما تُقدم تعريفات أساسية، منها دالة السعة، وعلاقات المؤثر-الاستجابة، ومعلمات الطلب الهندسي، لإنشاء إطار مفاهيمي شامل للتحليل الزلزالي.

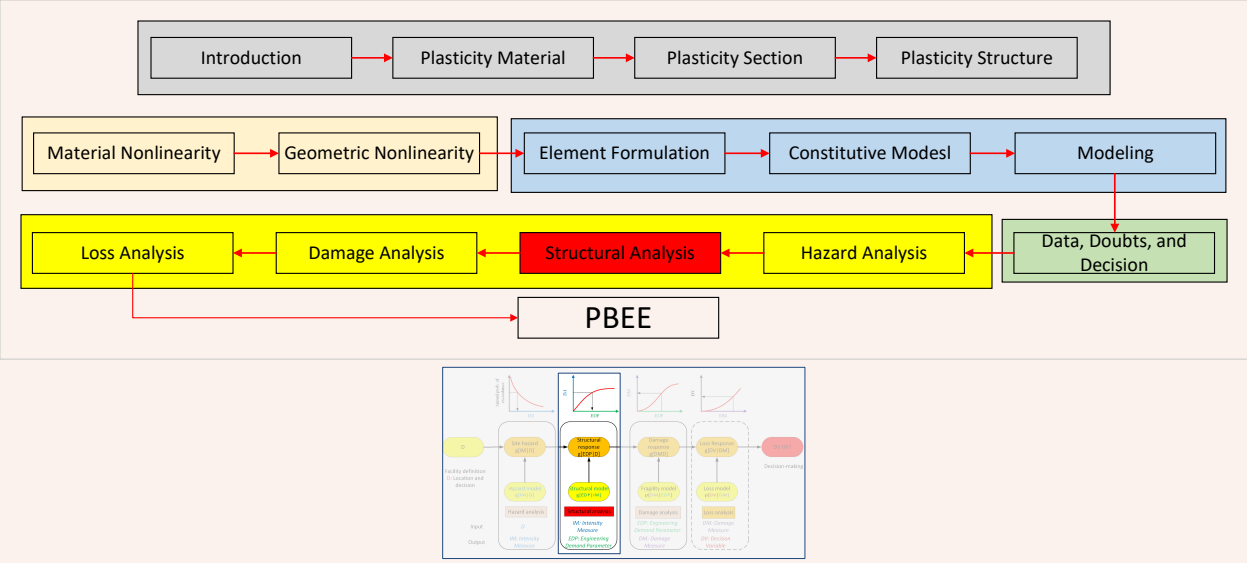
تُدرس كل منهجية من حيث أساسها النظري، واعتبارات تنفيذها، وتطبيقاتها العملية. ويناقش الفصل بصورة منهجية مناهج النمذجة، وتعريفات أنماط الحمل، وإجراءات التحميل المتزايد، وتفسير بيانات الاستجابة الإنشائية. كما تُحلل أنماط حمل متنوعة، منها التوزيعات المثلثية المعكوسة، والمستطيلة، وتوزيعات النمط الأول، لتوضيح آثارها في نتائج التحليل.

وللربط بين النظرية والتطبيق، تُعرض دراستان تفصيليتان لحالتين. يتناول المثال الأول إطاراً فولاذياً خاضعاً لتحليل زلزالي، موضحاً تحديد المفاصل اللدنة، وسعات قص القاعدة، وحدود التشوه. ويقدم المثال الثاني تقييماً معمقاً لتصميم ركيزة جسر واقعي، يتضمن تحليل طيف الاستجابة، وحسابات العزم اللدن، ومعايير التقييم القائم على الأداء وفق إرشادات AASHTO للتصميم الزلزالي للجسور.

ويختتم الفصل بتأكيد أهمية هذه المنهجيات في هندسة الزلازل القائمة على الأداء وتقييم الصمود الإنشائي. ومن خلال تقديم منهجية منظمة ودراسات حالات عملية، يشكل هذا الفصل مورداً مهماً للمهندسين العاملين في التقييم الزلزالي للمنشآت وتصميمها.

68.1 مقدمة 2056
68.2 تعريفات أساسية 2057
68.3 السعة والطلب 2058
68.3.1 علاقات الطلب بالسعة 2058
68.3.2 طرائق تقدير الطلب 2058
68.3.3 مبادئ تصميم السعة 2059
68.4 طرائق التحليل الزلزالي 2060
68.4.1 تحليل الدفع (POA) 2060
68.4.2 التحليل الديناميكي المتزايد (IDA) 2095
68.4.3 تحليل الشرائح المتعددة (MSA) 2097
68.4.4 تحليل السحابة (CLA) 2099
68.4.5 تحليل زمن التحمل (ETA) 2100
68.4.6 الخلاصة 2102
68.5 ما التالي؟ 2104

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



68.1 مقدمة

1 يُعد التقييم الدقيق لاستجابة المنشأ للأحداث الزلزالية جانباً حاسماً من هندسة الزلازل. وعلى مر السنين، طُورت طرائق تحليلية وعددية متنوعة لتقييم الأداء الزلزالي للمباني والجسور وغيرها من البنى التحتية.

2 وتوفر هذه المنهجيات، التي تتدرج من المناهج الساكنة المبسطة إلى المحاكاة الديناميكية الشاملة، طيفاً من الأدوات للمهندسين للتنبؤ بالسلوك الإنشائي وتخفيف المخاطر الزلزالية.

3 يمكن تصنيف طرائق التحليل الزلزالي عموماً إلى مناهج خطية ولاخطية، مع تمييز إضافي بين التقنيات الساكنة والديناميكية. والتحليلات الخطية المرنة التقليدية، مع كفاءتها الحسابية، كثيراً ما تعجز عن تمثيل النطاق الكامل للتشوهات غير المرنة وآليات الضرر التي تتعرض لها المنشآت أثناء الزلازل القوية. أما الطرائق اللاخطية فتوفر تمثيلاً أكثر واقعية للأداء الإنشائي بمراعاة اللاخطية المادية والهندسية.

4 يقدم هذا الفصل مناقشة معمقة لمنهجيات التحليل الزلزالي الرئيسية، مع التركيز على التقنيات اللاخطية التي توفر رؤى أعمق للصمود الإنشائي. ومن بينها تحليل الدفع، وهو إجراء ساكن لاخطي برز لقدرته على تقريب السلوك غير المرن بمتطلبات حسابية منخفضة نسبياً. وتقدم طرائق متقدمة أخرى، مثل التحليل الديناميكي المتزايد (IDA)، وتحليل الشرائح المتعددة (MSA)، وتحليل زمن التحمل (ETA)، منظورات ديناميكية للأداء الإنشائي تحت إثارات زلزالية متفاوتة.

5 يتمثل جانب حاسم من التحليل الزلزالي في تفسير معلمات الاستجابة الرئيسية، بما فيها منحنيات السعة، ومعلمات الطلب، وآليات الفشل. وتوجّه هذه المؤشرات قرارات التصميم، واستراتيجيات التدعيم، وتقييمات المخاطر. كما عززت الأدوات الحاسوبية الحديثة، مثل SAP2000 وETABS وOpenSees، دقة هذه الطرائق وقابليتها للتطبيق بدرجة كبيرة، ويسرت عمليات محاكاة إنشائية معقدة بكفاءة متزايدة.

6 يتابع الفصل بعرض منهجي للأسس النظرية، والأطر المنهجية، والتطبيقات العملية لتقنيات التحليل الزلزالي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن خلال المناقشات المقارنة ودراسات الحالات، يهدف إلى تزويد المهندسين والباحثين بفهم شامل لمزايا كل نهج وقيوده، بما يدعم في النهاية اتخاذ قرارات مستنيرة في التصميم والتقييم المقاومين للزلازل.

7 في الفصل التالي (69) سنتناول التقييم الكمي للتحليل الزلزالي اللاخطي الذي يغطيه هذا الفصل.

68.2 تعريفات أساسية

8 لنبدأ بالتمييز بين المصطلحات المختلفة المرتبطة بـ"سعة" النظام الإنشائي.

منحنى السعة: يشير هذا المفهوم في تعريفه الأصلي إلى منحنى لاخطي للقوة-الإزاحة (Freeman, 1978)؛ ويُحدد بتحميل المنشأ ساكناً لحساب إزاحة السقف *مقابل* قص القاعدة. ويُشار إلى هذا المنحنى أيضاً باسم منحنى *الدفع* (Freeman, 1998). وفي المختبر، يمكن تسجيل منحنى الحمل-الإزاحة بتطبيق بروتوكولات للتحكم في الحمل أو التحكم في الإزاحة، وفق المرافق المتاحة. غير أن اختبار التحكم في الإزاحة يتيح التقاط سلوك ما بعد الفشل. ويمكن أيضاً تمثيل منحنى السعة التقليدي بدلالة الطاقة المبددة، ويُسمى حينئذ منحنى *السعة القائم على الطاقة* (D'Ambrisi **and** Mezzi, 2015).

مخطط السعة: يشير هذا المفهوم إلى التسارع الزائف مقابل إحداثي طيف التشوه (Chopra **and** Goel, 1999)؛ ويُحسب بقسمة قص القاعدة على الكتلة النمطية الفعالة في نمط الاهتزاز الأساسي، وقسمة الإزاحة القصوى على معامل مشاركة الكتلة. ويسمى هذا المخطط أيضاً *طيف السعة*.

دالة السعة: تُعرَّف بأنها العلاقة بين معلم خارجي (أو داخلي) يؤثر في سعة المنشأ، ويُسمى أيضاً "المؤثر" (S)، وبين "استجابة" (R) النظام على المستوى الكلي. وعلى خلاف منحنى السعة التقليدي، تُعد دالة السعة مفهوماً أعم ويمكن توليدها بأي من البادئات الموضحة في المقدمة؛ كما أنها لا تقتصر على الفعل الزلزالي وحده.

المؤثر: يمكن أن يكون 1) حملاً رتيباً، أو دورياً، أو معتمداً على الزمن (أو إزاحة، أو تسارعاً، أو ضغطاً) يزداد تدريجياً؛ أو 2) معلم مقاومة يتناقص تدريجياً أو تدهوراً في خصائص المقاومة؛ أو 3) معلماً حرجاً متقطعاً يتزايد/يتناقص في نظام ويؤدي إلى الفشل. وفي PBEE، يسمى S عادةً معلم قياس الشدة (IM). أما هنا فيُعرَّف S تعريفاً أعم ويشير إلى أي كمية قد يؤدي تغيرها (المستمر أو المتقطع) إلى فشل تدريجي للنظام وانهياره النهائي.

الاستجابة: تمثل سلوك النظام تحت المؤثر المتغير، وتُعرض بمعنى مطلق أو نسبي. وقد تكون R: 1) متغير ضرر واحداً (DV)، مثل الانجراف أو تبديد الطاقة؛ أو 2) مزيجاً من عدة متغيرات DV بدلالة مؤشر الضرر (DI)؛ أو 3) أي مؤشر لمراقبة السلامة (Wang, Gu **and** Bao, 2013). وفي هندسة الزلازل، تسمى R عادةً معلم الطلب الهندسي (Vamvatsikos **and** Cornell, 2004) (EDP).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

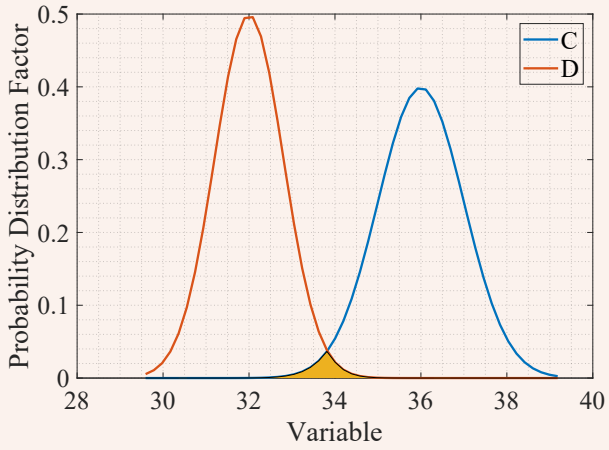
68.3 السعة والطلب

68.3.1 علاقات الطلب بالسعة

9 يُعد فهم التفاعل بين السعة والطلبات في التحليل الإنشائي أساسياً لضمان السلامة، والوظيفية، والكفاءة الاقتصادية.

10 تحدد العلاقة بين السعة والطلبات ما إذا كان المنشأ قادراً على أداء وظيفته المقصودة تحت الظروف الاعتيادية والقصوى. ويجب أن تكون للمنشأ سعة كافية تتجاوز الطلبات المتوقعة، مع هامش أمان لمراعاة أوجه عدم اليقين في سلوك المواد، وتقديرات الأحمال، ووقوع الزلازل، والقدر، والحركة الأرضية، وجودة الإنشاء. ويُعبَّر عن هذا التوازن غالباً بمعامل أمان أو نسبة الطلب إلى السعة.

11 توصف السعة والطلبات عادةً بتوزيع احتمالي غاوسي، الشكل 68.1، يعكس التباين الكامن في المواد، والتنفيذ، والعوامل البيئية. وتتيح هذه التوزيعات للمهندسين تحديد احتمال الفشل بتحليل التداخل بين منحنيي السعة والطلب.



شكل 68.1: الطبيعة الاحتمالية للسعة والطلب

68.3.2 طرائق تقدير الطلب

12 تمثل الطلبات الأحمال والإجهادات التي يتعرض لها المنشأ خلال عمره، بما فيها الجاذبية، والرياح، والزلازل، وغيرها من القوى البيئية أو التشغيلية.

13 في سياقنا، سنحتاج إلى تحديد معلمات طلب هندسي (EDP) بعينها ومعايير قبول مناسبة لتقييم مستويات الأداء كمياً.

14 معلمات EDP هي كميات استجابة قابلة للقياس (عادةً القيم القصوى للقص والقوى والتشوهات، والانجرافات بين الطوابق، أو تسارعات الطوابق في المكونات الإنشائية وغير الإنشائية.

15 يُتحقق من الأداء عبر مقارنة الطلبات المحسوبة بمعايير القبول (السعة) لمستوى الأداء المطلوب.

16 تُحدد EDP من خلال

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تطوير النموذج الإنشائي: يُنشأ نموذج تفصيلي للمنشأ في برنامج للتحليل الإنشائي. ويمثل النموذج خصائص المواد، والهندسة، والشروط الحدية، وخصائص التخميد.

اختيار الحركات الأرضية: تُختار حركات أرضية خاصة بالموقع وفق تحليل الخطر الزلزالي. وقد تكون هذه الحركات سجلات زلازل حقيقية أو مخططات تسارع مولدة اصطناعياً.

الخطر الزلزالي: يشير إلى إمكان الاهتزاز الأرضي في موقع ما نتيجة الزلازل. ويُحدد الخطر بدلالة احتمال تجاوز مستويات محددة من الحركة الأرضية، مثل التسارع الأرضي الأقصى (PGA) أو التسارع الطيفي (SA).

التحليل الديناميكي: **التحليل اللاخطي للسجل الزمني:** هو أكثر الطرائق شيوعاً في PBEE لتحديد EDPs. ويُعرَّض المنشأ للحركات الأرضية المختارة، وتُحسب الاستجابة في كل خطوة زمنية.

تحليل الدفع الساكن: في بعض الدراسات الأبسط، تُقرب EDPs باستخدام التحليل الساكن اللاخطي.

التحليل الخطي: قد يُستخدم تحليل طيف الاستجابة الخطي في بعض الحالات، لكنه أقل دقة لـPBEE.

تسجيل EDPs: تنتج التحليلات سجلات زمنية أو قيماً قصوى لـEDPs لكل حركة أرضية. ويُجرى تحليل إحصائي لهذه النتائج (مثل المتوسط، أو الوسيط، أو المئين 90) لتقييم الأداء.

17 قد تكون نتائج التحليلات اللاخطية حساسة لمعلمات الإدخال المفترضة وأنواع النماذج المستخدمة، بحسب التكوين الإنشائي.

18 يجب أن تكون لدينا توقعات واضحة بشأن أجزاء المنشأ المتوقع أن تتعرض لتشوهات غير مرنة ثم نستخدم التحليلات من أجل

1. تأكيد مواقع التشوهات غير المرنة
2. توصيف:

- طلبات التشوه في العناصر الخاضعة للخضوع.
- طلبات القوى في العناصر غير الخاضعة للخضوع.

19 يمكن لمفاهيم تصميم السعة أن توفر أداءً موثوقاً.

68.3.3 مبادئ تصميم السعة

20 تصميم السعة مفهوم أساسي في هندسة الزلازل، طُوِّر لضمان سلوك مطيلي وقابل للتنبؤ للمنشآت تحت القوى الزلزالية. ويعطي هذا المبدأ الأولوية للتحكم في آليات الفشل بالمنشآت، بهدف تعظيم تبديد الطاقة ومنع أنماط الفشل الهش. ومن خلال التأكيد على المطيلية وتسلسل هرمي للمقاومة، يضمن تصميم السعة أداء المنشآت بأمان أثناء الزلازل.

21 تتمثل الفكرة الجوهرية لتصميم السعة في إنشاء تسلسل هرمي للمقاومة بين المكونات الإنشائية. ففي الإطارات المقاومة للعزوم مثلاً، تُصمم الكمرات عمداً لتخضع قبل الأعمدة. ويضمن ذلك تمكّن المنشأ من

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تبديد الطاقة الزلزالية بتشكل مفاصل لدنة في الكمرات، مع بقاء الأعمدة مرنة ومستقرة. ويُسمى هذا النهج غالباً مفهوم «العمود القوي، الكمرة الضعيفة»، وهو يقلل خطر الانهيار ويعزز السلوك الإنشائي القابل للتنبؤ.

22 المطيلية عنصر محوري في تصميم السعة. إذ تُفصّل المكونات الإنشائية لتتحمل تشوهات غير مرنة كبيرة دون فقد قدرتها على حمل الأحمال. وتتيح هذه القدرة على التشوه اللدن للمنشأ امتصاص الطاقة وتبديدها أثناء الزلزال. ولتحقيق ذلك، يتجنب التصميم بعناية آليات الفشل الهش، مثل فشل القص، أو الانبعاج، أو فشل التماسك. وتُعد أنماط الفشل هذه غير مرغوبة لأنها تحدث فجأة ودون إنذار.

23 تُستخدم أيضاً معاملات المقاومة الزائدة لضمان التسلسل الهرمي المقصود للمقاومة. فعلى سبيل المثال، تُصمم الأعمدة والأساسات بمقاومة أكبر من الكمرات، مما يمنع حالات الفشل غير المقصودة في المكونات الحرجة. وبالمثل، تُصمم الدعامات في أنظمة الإطارات المدعمة لتخضع في الشد مع بقائها مستقرة في الضغط، بما يضمن وقوع تبديد الطاقة على النحو المقصود.

24 تمتد مبادئ تصميم السعة إلى طيف متنوع من الأنظمة الإنشائية. ففي الإطارات الخرسانية المسلحة المقاومة للعزوم، تُصمم المفاصل اللدنة لتتشكل عند نهايات الكمرات أثناء الأحداث الزلزالية. وتتيح هذه المفاصل للكمرات التعرض لدورانات كبيرة، فتبدد الطاقة بفعالية وتحمي الأعمدة وسائر أجزاء المنشأ. وفي جدران القص، يضمن تصميم السعة حدوث الخضوع الانحنائي قبل فشل القص الهش، مما يعزز السلوك المطيلي للجدار.

25 من أهم فوائد تصميم السعة قابلية التنبؤ التي يوفرها لأداء المنشأ أثناء الزلازل. فمن خلال التحكم في مواضع الفشل وتسلسله، يستطيع المهندسون ضمان سلوك المنشآت بطريقة مضبوطة وآمنة. ويعزز هذا النهج السلامة أيضاً بمنع الانهيارات المفاجئة وإتاحة وقت كافٍ للشاغلين للإخلاء. كما أن تصميم السعة مجدٍ اقتصادياً، إذ يركز السلوك المطيلي في مناطق محددة، فيقلل الحاجة إلى الإفراط في تصميم سائر أجزاء المنشأ.

26 تُدمج مبادئ تصميم السعة في أكواد التصميم الزلزالي الحديثة، مثل ASCE/SEI 7 في الولايات المتحدة، وEurocode 8 في أوروبا، وقانون معايير البناء الياباني. وتشتمل هذه الأكواد على الأفكار الأساسية للمطيلية، والتسلسل الهرمي للمقاومة، وتبديد الطاقة، بما يضمن قدرة المنشآت على تحمل القوى الزلزالية وحماية الأرواح والممتلكات.

68.4 طرائق التحليل الزلزالي

68.4.1 تحليل الدفع (POA)

النظرية

27 تحليل الدفع إجراء ساكن لاخطي يُستخدم لتقدير السعة الزلزالية للمنشآت. وهو شائع بصفة خاصة في الهندسة الإنشائية لتقييم أداء المباني والجسور تحت الأحمال الزلزالية.

28 على خلاف التحليلات الزلزالية الديناميكية، يوفر تحليل الدفع رؤية تفصيلية للسلوك غير المرن للمنشأ،

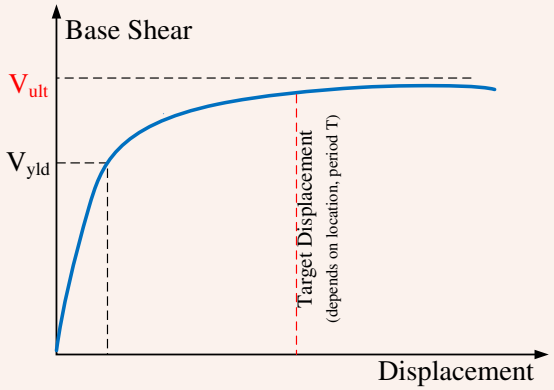
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بما في ذلك آليات فشله، من خلال محاكاة استجابته لأحمال جانبية تتزايد تدريجياً. ومع زيادة مقدار الحمل، تُكتشف الوصلات الضعيفة (المفاصل اللدنة) وأنماط فشل المنشأ.

29 المخرج الرئيسي لتحليل الدفع هو منحنى *السعة* أو منحنى *الدفع*، الذي يمثل العلاقة بين قص القاعدة وإزاحة السقف. ويتيح هذا المنحنى للمهندسين تحديد السعة الزلزالية للمنشأ وتقييم مدى تحقيقه لأهداف الأداء تحت مستويات خطر متنوعة.

30 طورت وثيقتا (ATC-40, 1996) (ATC-40) و(FEMA, 1997b) (FEMA-273) إجراءات النمذجة، ومعايير القبول، وإجراءات تحليل الدفع. وتحدد هاتان الوثيقتان معايير القوة-التشوه للمفاصل المستخدمة في تحليل الدفع.

31 تتيح الطريقة تتبع تسلسل الخضوع والفشل على مستويي العنصر والمنشأ، فضلاً عن تطور منحنى السعة الكلي للمنشأ، الشكل 68.2. وهذا يحدد أساساً الطلب على المنشأ.



شكل 68.2: منحنى السعة

الأهداف الرئيسية

32 يخدم تحليل الدفع عدة أغراض حاسمة:

- تقييم الأداء الإنشائي: تقييم الاستجابة غير المرنة للمنشأ.
- تحديد نقاط الضعف: اكتشاف نقاط الفشل المحتملة والمكونات الحرجة.
- تحديد السعة الزلزالية: تقدير قص القاعدة، وإزاحة السقف، وطلبات المطيلية.
- تقييم احتياجات التدعيم: توجيه استراتيجيات التقوية والتدعيم لتحسين الأداء الزلزالي.

الافتراضات والقيود

33 رغم فعالية تحليل الدفع، فإنه يعتمد على افتراضات محددة قد تحد من قابليته للتطبيق:

- يفترض التحليل أن الاستجابة يهيمن عليها نمط *الاهتزاز الأساسي*، مما يجعله مناسباً في المقام الأول للمباني المنخفضة والمتوسطة الارتفاع.
- تُفترض عادةً شروط مساندة ثابتة، وتُهمل *تأثيرات الأنماط العليا* ما لم تُجر تحليلات دفع متعددة بأنماط حمل مختلفة.
- لا تُمثَّل التأثيرات الديناميكية، مثل المدة، والمحتوى الترددي، وتفاعل التربة-المنشأ.

خطوات تحليل الدفع

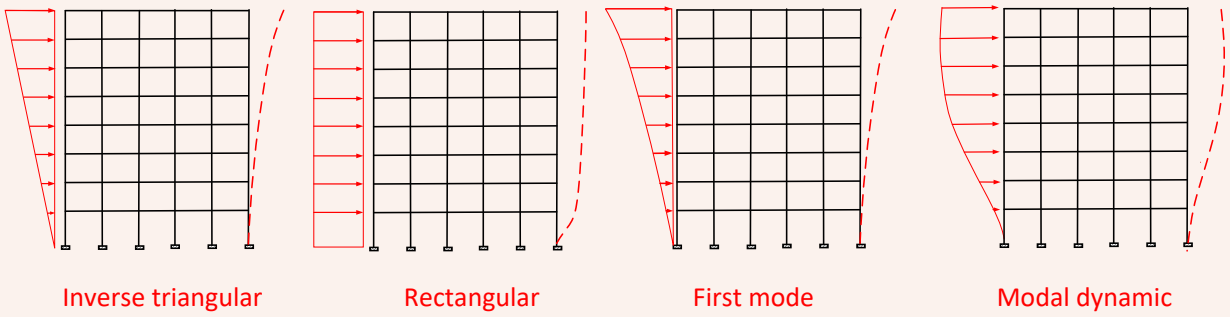
نمذجة المنشأ

- استخدم نموذجاً *إنشائياً* لاخطياً لتمثيل الهندسة، وخصائص المواد، والشروط الحدية.
- عرّف المفاصل اللدنة في المواقع الحرجة، مثل وصلات الكمرة-العمود، أو قواعد الأعمدة، أو منتصف بحور الكمرات.
- مثّل سلوك المادة بعلاقة قوة-تشوه (مثل النماذج ثنائية الخط أو ثلاثية الخط).

تطبيق أحمال الجاذبية تُطبق أحمال الجاذبية الساكنة، بما فيها الأحمال الميتة وجزء من الأحمال الحية، لضمان اتزان المنشأ قبل التحميل الجانبي.

تعريف أنماط الحمل الجانبي تشمل أنماط الحمل الشائعة، الشكل 68.3:

- حمل مثلثي معكوس: نمط حمل يزداد خطياً من القاعدة إلى القمة، ويمثل توزيعاً مثلثياً مقلوباً.
- حمل مستطيل: توزيع حمل منتظم يُطبق على ارتفاع المنشأ.
- حمل النمط الأول: نمط حمل يتناسب مع شكل النمط الأساسي للمنشأ.
- حمل ديناميكي نمطي: توزيع حمل مشتق من الإسهامات النمطية للتحليل الديناميكي، ويمثل تأثيرات الأنماط العليا.



شكل 68.3: الأحمال الجانبية لتحليل الدفع

التحميل المتزايد

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- طبّق القوى أو الإزاحات الجانبية تدريجياً حتى قيمة مستهدفة. ويمكن تحديد الإزاحة المستهدفة من طيف الاستجابة

$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)C_s$$

حيث Δ الإزاحة الطيفية، وT الفترة، وC_s المعامل الزلزالي المرن.

- أجرِ فحوص الاتزان والتوافق في كل خطوة.
- استمر حتى وقوع فشل كلي أو موضعي (مثل تشكل مفصل لدن، أو إزاحة مفرطة).

مراقبة الاستجابة الإنشائية تشمل معلمات الاستجابة الرئيسية:

- قص القاعدة: القوة الجانبية الكلية التي يقاومها المنشأ.
- إزاحة السقف: مقياس قدرة المنشأ على التشوه.
- تشكل المفاصل اللدنة: مواضع السلوك غير المرن وتسلسله.

تطوير منحنى السعة مثّل قص القاعدة مقابل إزاحة السقف لإنشاء منحنى *الدفع* الذي يمثل الاستجابة غير المرنة الكلية للمنشأ.

تفسير المخرجات

منحنى السعة يُقسم منحنى الدفع إلى:

- المنطقة المرنة: الاستجابة الأولية.
- المنطقة غير المرنة: الاستجابة اللاخطية التي تُظهر تدهوراً تدريجياً في الصلابة.
- نقطة الانهيار: نقطة قص القاعدة الأقصى أو سعة الإزاحة القصوى.

نقطة الأداء يحدد تقاطع *طيف الطلب* (من التحليل الزلزالي) مع منحنى السعة *نقطة الأداء*، التي تمثل الإزاحة المتوقعة أثناء الزلزال.

أنماط تشكل المفاصل توفر المفاصل اللدنة رؤى حول آليات الفشل والوصلات الضعيفة المحتملة. استخدم تسلسلات تشكل المفاصل للتحقق مما إذا كان المنشأ يُظهر *سلوكاً مطيلياً* (مفضلاً) أو *سلوكاً هشاً* (غير مرغوب).

الانجراف والمطيلية احسب نسب الانجراف بين الطوابق وطلب المطيلية الكلي لضمان تحقيق المنشأ لأهداف الأداء التصميمية.

التطبيقات

- التصميم القائم على الأداء: تقييم الأداء تحت مستويات مختلفة من الخطر الزلزالي (الإشغال الفوري، سلامة الأرواح، منع الانهيار).
- تصميم التدعيم: تقييم فعالية تقنيات التقوية الإنشائية (مثل إضافة دعامات أو جدران قص).
- تقييم الضرر: تقدير الضرر المحتمل في المنشآت القائمة لتخطيط الاستجابة للكوارث.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

اعتبارات متقدمة

- تأثيرات الأنماط العليا: أجرِ تحليلات دفع متعددة بأنماط حمل متنوعة لمراعاة الأنماط العليا، ولا سيما في المنشآت العالية أو غير المنتظمة.
- تحليل الدفع التكيفي: حدّث نمط توزيع الحمل ديناميكياً مع تشكل المفاصل وتغير الصلابة.
- الأدوات البرمجية: تسهّل أدوات مثل SAP2000 وETABS وOpenSees تحليل الدفع بميزات مدمجة لنمذجة المفاصل اللدنة والسلوك اللاخطي.
- نماذج المواد اللاخطية: أدرج نماذج خاصة بالمواد (مثل الخرسانة المحصورة وخضوع الفولاذ) لمحاكاة السلوك الواقعي بصورة أفضل.

مقارنة بالتحليل الزلزالي

34 يُقارن تحليل الدفع بالتحليل الزلزالي في الجدول 68.1.

جدول 68.1: مقارنة تحليل الدفع بالتحليل الزلزالي

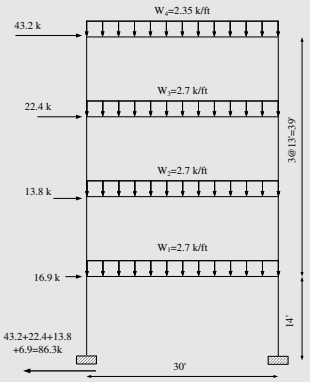
التحليل الزلزالي	تحليل الدفع	الجانب
أو إجراء ديناميكي لاخطي	إجراء ساكن لاخطي	midrule الطبيعة
يراعي الخصائص الديناميكية مباشرةً، بما فيها تأثيرات الحركة الأرضية	يهمل الخصائص الديناميكية (مثل قوى العطالة المعتمدة على الزمن)	التأثيرات الديناميكية
غالباً ما يقتصر على الاستجابة المرنة ما لم يُستخدم التحليل اللاخطي	يركز على الاستجابة غير المرنة وآليات الفشل	السلوك الممثل
تُمثَّل بالكامل في التحليل الديناميكي	تُهمل ما لم تُجر تحليلات متعددة	تأثيرات الأنماط العليا
أكثر كثافة حسابياً، ولا سيما للتحليل الديناميكي اللاخطي	أبسط حسابياً ويتطلب موارد أقل	التعقيد
استجابات السجل الزمني، والإسهامات النمطية، وتبديد الطاقة	منحنى السعة، وأنماط تشكل المفاصل، وطلبات المطيلية	المخرجات
مطلوب للمنشآت العالية أو غير المنتظمة أو الحرجة	مناسب للمنشآت المنخفضة والمتوسطة الارتفاع ذات التكوينات المنتظمة	قابلية التطبيق

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

68.4.1.1 مثال 68.1: مثال على منحنى الطلب

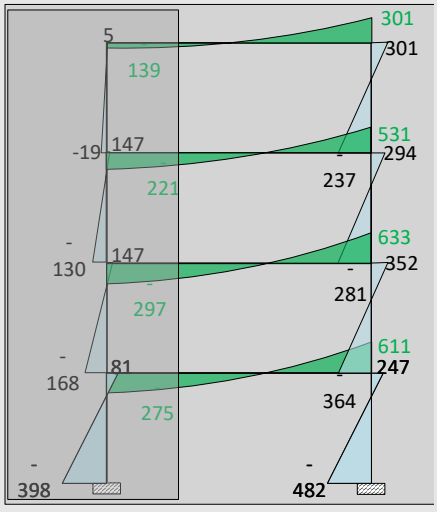
Chaoو Goelـل لزالزل ةمواقم ةيذالوف تآشنم :ءادألا بلع مئاقلا ندللا ميمصتلا نم سبتقم

نسعى إلى تحديد منحنى الطلب للإطار الآتي، حيث F_y= 50 ksi، وE=30,000 ksi، مع إهمال تشوهات المحور والقص، وافتراض علاقة عزم-انحناء مرنة-لدنة تماماً.



- يُجرى أولاً تحليل مرن، وقد حققت جميع العناصر الشرط $M_{max} < M_p = F_y Z_x$.

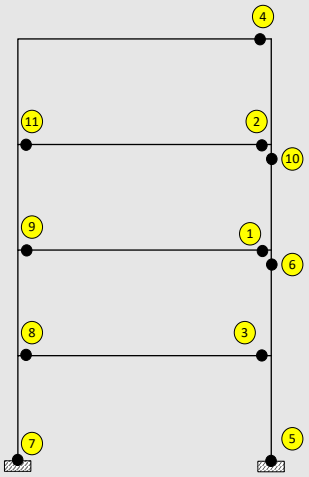
الطابق	$M_{u,req}$ (k-ft)	الكمرة القطاع	M_p (k-ft)	$M_{u,req}$ (k-ft)	العمود القطاع	M_p (k-ft)
4	301	W16x40	304	301	W16x40	304
3	531	W24x55	558	294	W16x40	304
2	633	W24x62	638	364	W21x44	398
1	611	W24x62	638	482	W21x55	525

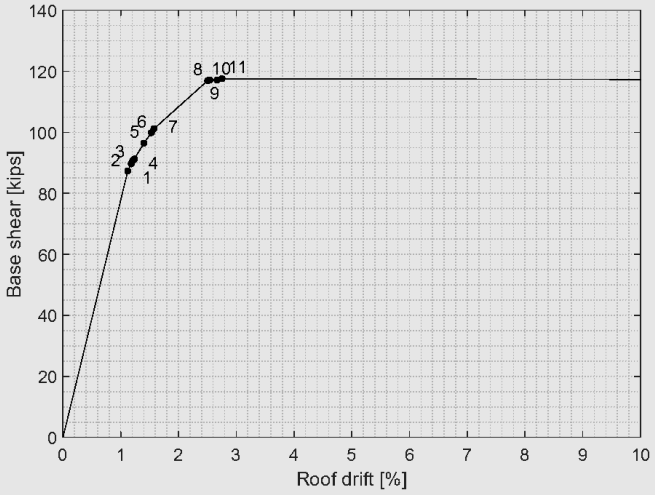


- يُبيَّن أدناه قص القاعدة (القوة الجانبية الكلية) مقابل نسبة انجراف السقف (إزاحة السقف/الارتفاع)، ومواضع تشكل المفاصل اللدنة وتسلسلها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- تبلغ القوة الجانبية عند الحد المرن حين يتشكل أول مفصل لدن 87.6 kips، وهي أعلى بقليل من قيمة التصميم البالغة 86.3 kips.
- ابتداءً من تلك النقطة، تحدث إعادة توزيع للعزوم مع تشكل المفاصل اللدنة تباعاً، ويبلغ الإطار مقاومته القصوى البالغة 117.5 kips عند نسبة انجراف للسقف مقدارها 2.7%.
- تبين أن آلية الخضوع هي آلية تأرجح جزئية عبر 3 طوابق، بمفاصل لدنة عند نهايات الكمرات وقواعد الأعمدة، وعند أعلى الطابقين الثاني والثالث.
- نسبة المطيلية (V_{ult}/V_y) هي 1.36.





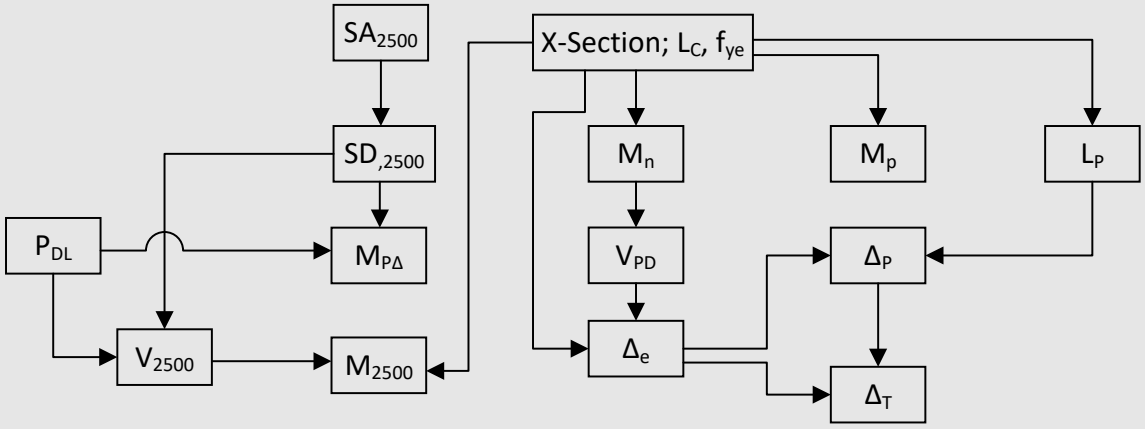
68.4.1.2 مثال 68.2: تحليل الدفع؛ مثال عملي

ةبحاص ةغايص ةلأسملا: Marilyne Lefebvre (Kiewit Engineering Co.)
لولحلا: Marilye Lefebvre، Victor Saouma، Cody Harrington، Mohammad Salchi، Mohammad T. Nikoukalam

صياغة المسألة

سيُقسم هذا العرض إلى أجزاء متعددة. أولاً تُصاغ المسألة في §68.4.1.2. ثم يتعين إجراء تحليل طيف استجابة للموقع لتحديد إزاحة التصميم الواجب استيعابها، §68.4.1.2. وعند هذه النقطة يمكن تحديد السعة بالحسابات اليدوية (وفق كود AASHTO)، §68.4.1.2. ويتضمن ذلك حسابات طول المفصل اللدن، والعزوم اللدنة وقص القاعدة المقابل، ثم الإزاحات المرنة واللدنة.

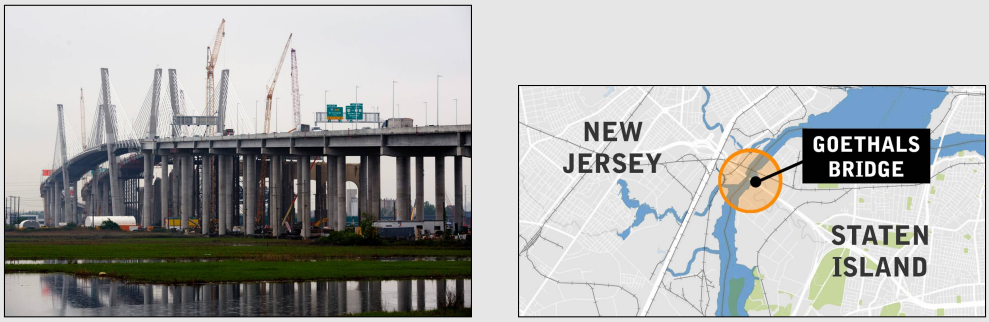
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



نص المسألة

يعتمد التكليف الآتي على تحليل تجريه شركة Kiewit، وسيعطيك تصوراً عما يُنفذ عادةً في شركة تصميم.

يقع جسر Goethals خارج مدينة نيويورك. ويعبر Arthur Kill (مضيق Staten Island) بين Staten Island، NY وElisabeth، NJ، الشكل 68.4. والبحر الرئيسي للجسر الجديد جسر مدعوم بالكابلات، بينما يتكون المدخلان من كمرات صندوقية قطاعية مسبقة الصب. ويحل الجسر الجديد محل جسر فولاذي كابولي بُني خلال عشرينيات القرن 20 الصاخبة. وفي هذا التمرين، ستحلل تصميم ركيزة بحر المدخل من جهة New Jersey تحت حمل زلزال التصميم. وتُختار ركيزة واحدة مقطعاً ممثلاً، ويُجرى عليها تحليل دفع.



شكل 68.4: موقع الجسر وصورته

طول العمود (L_c) هو 40 ft؛ وطول الخازوق حتى نقطة التثبيت (L_S) هو 60 ft؛ وقطر الخازوق المحفور (d_s) هو 8 ft؛ وf_{cc} للعمود 5,000 psi، وأخيراً f_{cs} للخازوق هو 4,000 psi.

الجزء 1: تحليل طيف الاستجابة

يُلخص طيف استجابة التصميم للموقع في الجدول 68.2، حيث C_S معاملات الزلازل المرنة. اختر فئة الموقع F لفترة 2,500 سنة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.2: طيف استجابة التصميم لمنشآت مدخل NJ

فئة A، 1,000 yr			فئة A، 2,500 yr			فئة F، 1,000 yr			فئة F، 2,500 yr		
(sec) T	C_s	(ft) Δ	(sec) T	C_s	(ft) Δ	(sec) T	C_s	(ft) Δ	(sec) T	C_s	(ft) Δ
0.00	0.072	0	0.00	0.244	0	0.00	0.270	0	0.00	0.520	0
0.04	0.144	0.000217	0.04	0.578	0.000754	0.04	0.379	0.000495	0.04	1.144	0.001493
0.05	0.144	0.000294	0.05	0.566	0.001155	0.05	0.407	0.000829	0.05	1.300	0.002651
0.10	0.144	0.001175	0.10	0.508	0.004143	0.10	0.543	0.004432	0.10	1.300	0.010603
0.15	0.144	0.002643	0.15	0.451	0.008277	0.15	0.680	0.012479	0.15	1.300	0.023857
0.20	0.144	0.004698	0.20	0.394	0.012854	0.20	0.680	0.022185	0.20	1.300	0.042413
0.22	0.144	0.005531	0.22	0.381	0.01503	0.22	0.680	0.026844	0.22	1.300	0.05132
0.30	0.104	0.007634	0.30	0.328	0.024053	0.30	0.680	0.049917	0.30	1.300	0.095429
0.45	0.069	0.011446	0.45	0.228	0.037685	0.45	0.200	0.033033	0.45	0.813	0.134198
0.50	0.062	0.012724	0.50	0.195	0.039762	0.50	0.167	0.033985	0.50	0.650	0.132541
0.60	0.056	0.01649	0.60	0.177	0.051914	0.60	0.100	0.029363	0.60	0.552	0.162083
1.00	0.031	0.025448	1.00	0.104	0.084826	1.00	0.040	0.032625	1.00	0.160	0.130502
2.00	0.025	0.081237	2.00	0.050	0.163127	2.00	0.016	0.052201	2.00	0.055	0.17944
3.00	0.019	0.136537	3.00	0.040	0.293629	3.00	0.013	0.092982	3.00	0.035	0.256925
4.00	0.012	0.160517	4.00	0.030	0.391505	4.00	0.009	0.121802	4.00	0.025	0.326254
5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818	5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818
									6.00		0.5

المطلوب

1. ارسم طيف استجابة C_s.
2. استقرئ المنحنى، وحدد قيمة C_S عند T = 6 ثوانٍ.
3. ارسم طيف استجابة الإزاحة.
4. استقرئ المنحنى، وحدد الإزاحة عند T = 6 ثوانٍ.

الجزء 2: السعة (حسابات يدوية للركيزة)

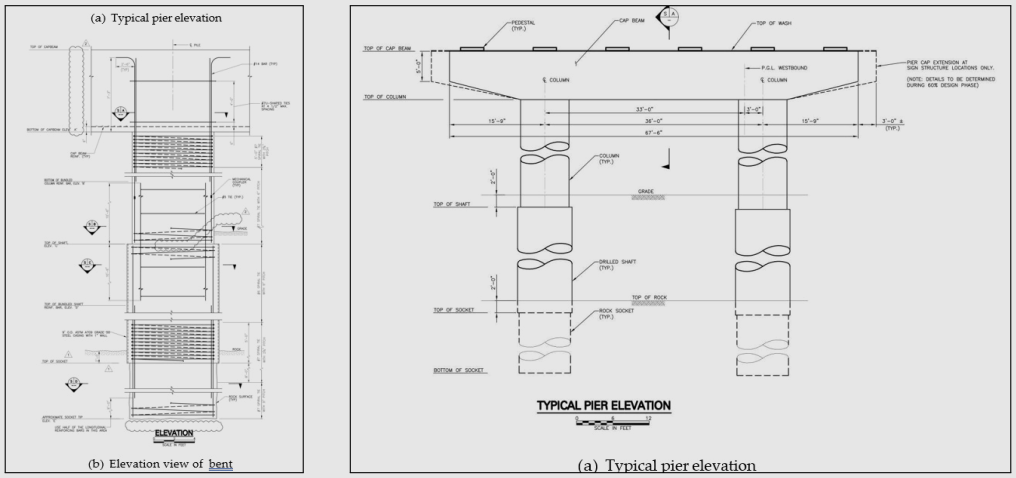
ستحتاج إلى الرجوع إلى النسخة المرفقة من الطبعة 2 من *مواصفات دليل AASHTO للتصميم الزلزالي للجسور وفق LRFD* (AASHTO, Seismic, 2011). ويمكن الوصول إلى النسخة الإلكترونية من موقع مكتبة CU.

خصائص الحامل مبيّنة أدناه:

1. طول العمود = 40 feet
2. طول الخازوق المحفور = 60 feet
3. قطر العمود =7 feet
4. قطر الخازوق المحفور = 8 feet
5. مقاومة ضغط العمود وغطاء الركيزة (f'_c) = 5 ksi
6. مقاومة ضغط الخازوق المحفور (f'_c) = 4 ksi
7. افترض أن غطاء الركيزة كمرة مستطيلة بعمق 7’-0” وعرض 8’-6”. ركّز فقط على الجزء الواقع بين العمودين. وأهمل امتدادات غطاء الركيزة والركائز القصيرة عند تحليل الركيزة. خصائص الحامل هي:
8. قطاع العمود: افترض أن تباعد قضبان التسليح يقارب 6 inches.
9. قطاع الخازوق المحفور: أهمل الغلاف الفولاذي. الغطاء الصافي 4 inches. افترض أن تباعد قضبان التسليح يقارب 6 inches للقضبان #14 و9 inches للقضبان # 18.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

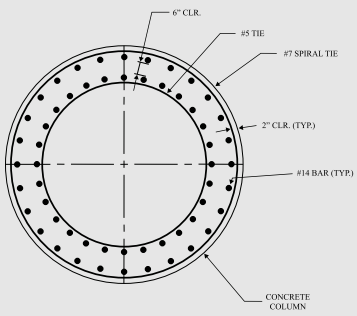
تظهر المساقط والواجهات النموذجية لركائز بحور المدخل في الشكلين 68.5 و68.6



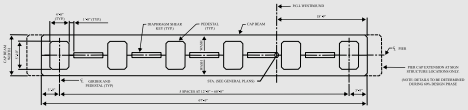
(b) واجهة الحامل (a) واجهة ركيزة نموذجية

شكل 68.5: أبعاد الأعمدة والركيزة

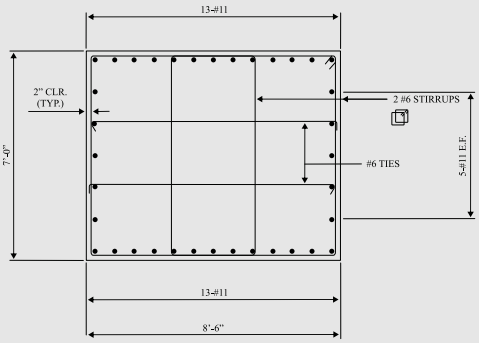
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



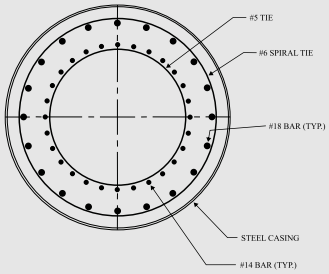
(b) قطاع SB



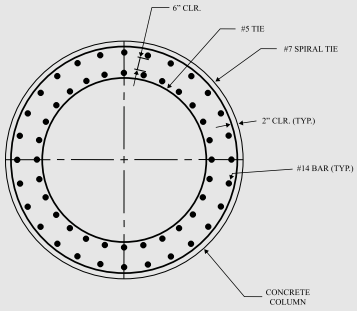
(a) مسقط ركيزة نموذجي



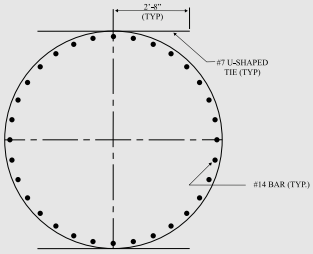
(d) قطاع SA



(c) قطاع SC



(f) قطاع العمود عند القاعدة



(e) قطاع العمود عند كمرة الغطاء

شكل 68.6: القطاعات العرضية للأعمدة والخازوق

لماذا خازوق محفور؟

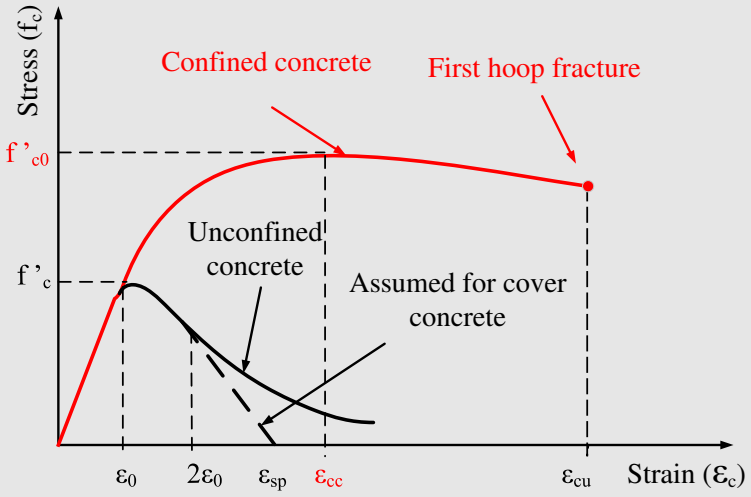
وفق (AASHTO, Seismic, 2011)، يتعين تصميم الخازوق المحفور عنصراً محمياً بالسعة في المنطقة الزلزالية B-D (والمراد أن يبقى مرناً أثناء الزلزال). وبهذه الطريقة يمكن رؤية أي ضرر في العمود وإصلاحه.

المطلوب

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. استناداً إلى المخططات، حدد نظام مقاومة الزلازل كما ورد في (AASHTO, Seismic, 2011, chap. 3) (أي هل هو النوع 1، أو النوع 2، إلخ؟).

6. ~~أوجد سعة العزم الاسمية للعمود. تُمنح نقاط إضافية إذا استطعت إيجاد M_{ne} باستخدام توزيع إجهاد Mander~~ (Mander, Priestley **and** Park, 1988)، الشكل 68.7 ~~بدلاً من كتلة إجهاد Whitney~~.



شكل 68.7: علاقة الإجهاد-الانفعال للتحميل الرتيب للخرسانة المحصورة وغير المحصورة (Mander, Priestley **and** Park, 1988)

(Whitney، M_n = 6,220 (kip-ft±10%)؛ Mander، M_n = 8,551 (kip-ft±10%))

7. باستخدام (AASHTO, Seismic, 2011, chap 8)، حدد مقاومة الخضوع المتوقعة f_{ye} لقضيب التسليح إذا كان من فولاذ ASTM A706 (ملاحظة: f_y = 60 ksi).

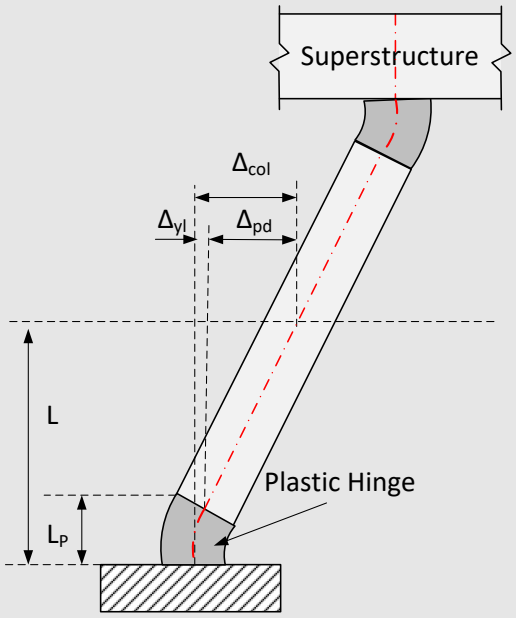
8. حدد طول المفصل اللدن التحليلي L_p للعمود. تلميح: راجع (AASHTO, Seismic, 2011, §4.11).

$$L_P = 0.08L_C + 0.15f_{ye}d_{bl} \geq 0.3f_{ye}d_{bl} \quad (4.11.6\text{-}1)$$

حيث

L طول العمود من نقطة العزم الأقصى إلى نقطة انقلاب العزم (in.)
f_{ye} مقاومة الخضوع المتوقعة لقضبان تسليح العمود الطولية (ksi)
d_{bl} القطر الاسمي لقضبان تسليح العمود الطولية (in.)

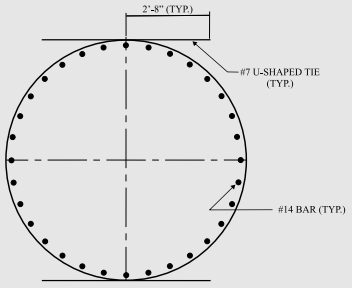
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

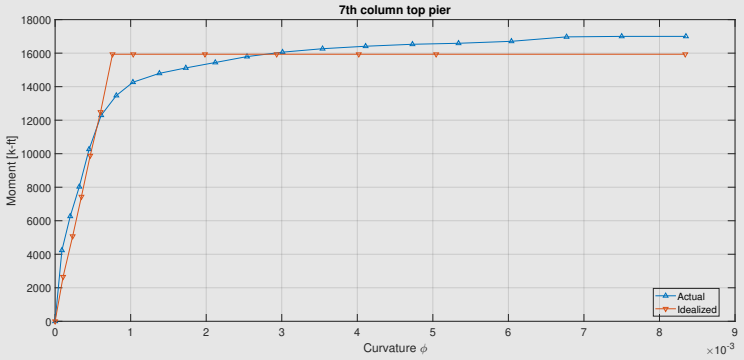


شكل 68.8: الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

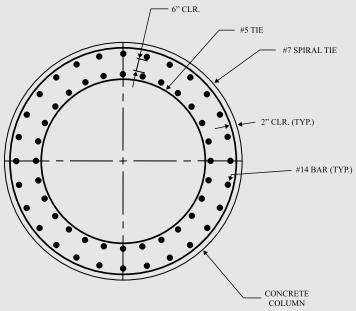
9. باستخدام البيانات في `P-M-Diagrams.xlsx`، حدد العزم اللدن M_p عند أعلى العمود، وقاعدة العمود، وفي الخازوق المحفور. ارسم منحنيات العزم-الانحناء المثالية هذه (انظر AASHTO, Seismic, 2011, figures C4.9.1 and 8.5.1). وبيّن أي هذه العزوم هو الأصغر (سنستخدمه لمقارنة نتائجنا في الجزء 3). وافترض الآن أن حمل التصميم المحوري على العمود هو P_{DL} = 2,500 kips (ويشمل ذلك الوزن الذاتي للركيزة). ينبغي أن تساوي العزوم اللدنة القيم المبينة في الشكل 68.9.

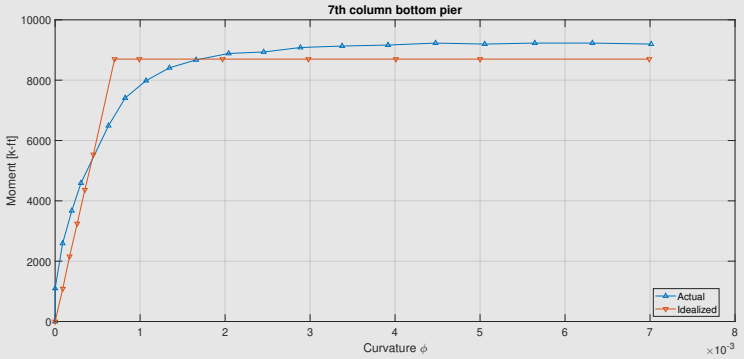
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



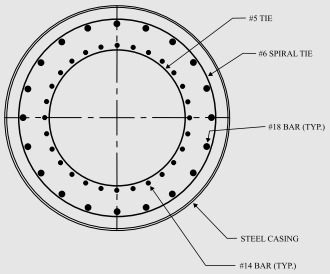


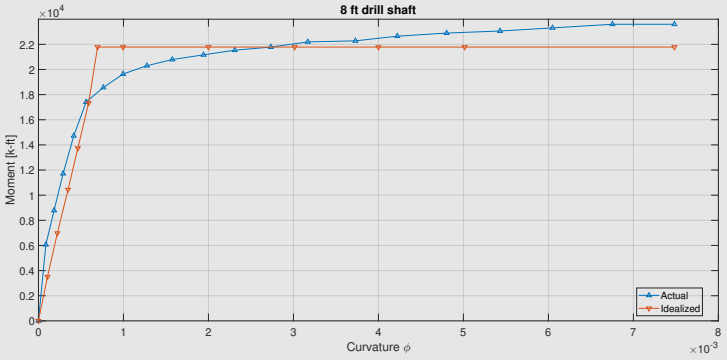
(a) عمود بقطر 7ft عند أعلى الركيزة؛ M_P=15,839 kip-ft ±10%)





(b) العزم-الانحناء لعمود بقطر 7 ft عند أسفل الركيزة؛ M_P=8,662 kip-ft ±10%)





(c) العزم-الانحناء لخازوق محفور بقطر 8 ft؛ M_P=21,786 kip-ft ±10%)

شكل 68.9: منحنيات العزم-الانحناء والعزوم اللدنة

10. ما قيمة القص V_p اللازمة لتطور العزم اللدن؟
11. أوجد الإزاحة المرنة للعمود Δ_e. **تلميح:** ارجع إلى AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2، وطبّق مساحة مخطط العزم.
12. أوجد الإزاحة اللدنة للعمود Δ_{pd}. وافترض أن الانحناء اللدن Φ_{pd} هو 0.005/ft.
13. أوجد الإزاحة الكلية عند أعلى العمود (Δ_{total}).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجزء 3: تحديد أحمال الطلب

حمل التصميم المحوري على العمود هو P_{DL} = 2,500 kips.

المطلوب

14. ما العزم عند قاعدة العمود الناتج عن تأثيرات $P\Delta$؟ هل $M_{P\Delta}$ أصغر/أكبر/مساوٍ لـ$0.25M_P$؟
15. ما القص V_{2500} عند قاعدة العمود؟
16. ما العزم M_{2500} عند قاعدة العمود الناتج عن قوة القص هذه؟ هل M2500 أصغر/أكبر/مساوٍ لـ$0.25M_P$؟
17. هل عزم الطلب أكبر/أصغر/مساوٍ للعزم المسموح به الموجود في الجزء 2؟ في AASHTO، يساوي معامل Φ للانحناء 0.9 إذا كان المقطع محكوماً بالشد، أو 0.7 إذا كان محكوماً بالضغط.

الجزء 4: تحليل الدفع

حُددت إزاحة كلية تقريبية من كود AASHTO، ونسعى الآن إلى إجراء تحليل دفع والوصول إلى قيمة أكثر دقة.

سنحتاج إلى استخدام برنامج لإجراء التحليلات المختلفة (RISA أوSAP أو أي كود مرن آخر).

يوضح الشكل AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 4.8-2 تسلسل المفاصل اللدنة المفترض لإطار ركيزة. وللتبسيط، سنفترض أن غطاء الركيزة صلب—وبذلك لا نحتاج إلا إلى التعامل مع إزاحة الأعمدة. ضع هذا التسلسل في الاعتبار خلال تقدمنا في تحليل الدفع.

المطلوب

18. قدّم رسماً توضيحياً لنموذجك، مع التأكد من تمييز ترميز العناصر والعقد بوضوح (تُقبل الأشكال الخطية). نمذج الركيزة والخوازق المحفورة معاً. وافترض أن الخازوق المحفور مثبت عند أسفل نموذجك.
19. كما في الجزء 2، حدد العزم اللدن M_P عند أعلى العمود، وقاعدة العمود، وفي الخازوق المحفور. جدول النتائج من P = 0 kips إلى P = 5,000 kips (ΔP = 500 kips). *تُستخرج من ملف* `P-M.xlsx` *المتاح*).
20. ضع قوة أفقية مقدارها 1-kip عند أعلى العمود. وبيّن القوة المحورية، والعزم، والإزاحة عند كل عقدة في نموذجك.
21. زد قوة القص تدريجياً حتى يتشكل مفصل. عند أي قوة وفي أي موضع يتشكل المفصل؟
22. جدول نتائجك. وبيّن عند كل عقدة القوة المحورية، والعزم، والإزاحة.
23. ضع مفصلاً عند العقدة (وتأكد من انعدام العزم عند المفصل). ومرة أخرى، ضع قوة أفقية مقدارها 1-kip عند أعلى العمود. وبيّن القوة المحورية، والعزم، والإزاحة عند كل عقدة في نموذجك.
24. زد قوة القص تدريجياً حتى يتشكل مفصل. عند أي قوة وفي أي موضع يتشكل المفصل؟
25. جدول نتائجك مرة أخرى.
26. ضع مفصلاً عند العقدة، وواصل دفع العمود (أي مرتين إضافيتين).
27. اجمع القوى الأفقية من السيناريوهات الأربعة. واجمع أيضاً القوة المحورية، والعزم، والإزاحات عند كل عقدة.
28. أين سنرى الفشل في الركيزة؟ هل يتبع معايير الفشل الواردة في AASHTO؟
29. ما الإزاحة عند أعلى العمود لحظة الفشل؟
30. قارن تحليل الدفع بالحسابات اليدوية المنفذة في الجزء 2. أي التحليلين تراه أكثر تحفظاً؟
31. هل تصميم الركيزة كافٍ (أي هل القص والعزم المحسوبان من تحليل الدفع أكبر/أصغر/مساويان لأحمال التصميم التي حسبناها في الجزء 3)؟

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مساعدة

التحليلات الإنشائية

لتيسير مهمتك، حُلّل الإطار على مراحل متتابعة، وتظهر النتائج في الجدول 68.3.

جدول 68.3: التحليلات المتتابعة لتحليل الدفع

V (K)	العقدة	P_{eq} (K)	M_{EQ}^{i} (K-ft)	Δ (in)
1	N1	0.81-	28.84	0.00
	N2	0.81-	1.17-	0.01-
	N3	0.81-	21.17-	0.01-
	N4	0.81	28.82	0.00
	N5	0.81	1.17-	0.01-
	N6	0.81	21.17-	0.01-
1	N1	0.56-	28.15	0.00
	N2	0.56-	11.23	0.01-
	N3	0.56-	0.00	0.02-
	N4	0.56	43.47	0.00
	N5	0.56	0.37	0.01-
	N6	0.56	28.37-	0.02-
1	N1	0.75-	0.00	0.00
	N2	0.75-	0.00	0.02-
	N3	0.75-	0.00	0.03-
	N4	0.75	60.61	0.00
	N5	0.75	0.63	0.02-
	N6	0.75	39.38-	0.03-

تحديد تشكل المفاصل

بعد كل تحليل، سيتعين تحديد موضع تشكل المفصل التالي (أو المفاصل التالية). وينبغي إكمال جدول كالآتي:

V (K)	العقدة (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	لدن مفصل؟	$M_P/M_{eq,Tot}$
04	Ni	-	-	-	-	-	-	-	-
	Nj	-	-	-	-	-	-	-	-

- تُستخرج P_{EQ} وM_{EQ}^{i} وΔ من نتائج التحليل السابق (الجدول 68.6) مضروبةً في قوة القص في العمود 1 (سنتناول ذلك بعد قليل).
- P_{total} هو مجموع P_{DL} (Kip 2,500) وP_{eq}.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- يساوي $M_{EQ,total}$ ببساطة مجموع جميع القيم السابقة والقيمة الحالية. فمثلاً في الجدول 68.9، $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$، وبالنسبة إلى N1

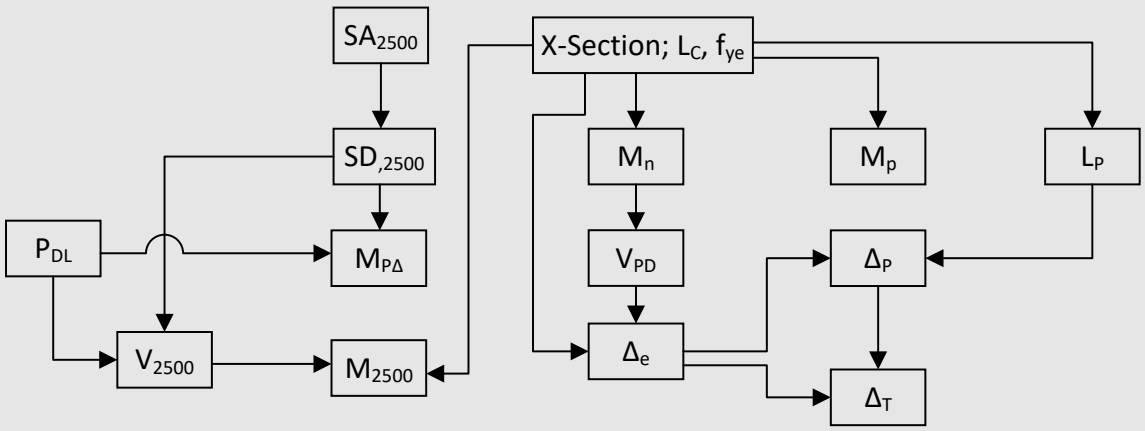
$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- يتطلب M_P عناية خاصة لأن القوى المحورية في المقاطع تتغير مع زيادة القوة الأفقية عند الأعلى، فتتغير سعات العزم أيضاً. لذلك يستخدم جدول Excel دالة `trend` التي تبحث عن تقريب بالمربعات الصغرى لدالة خطية بين نقطتي نهاية كما يأتي:
=TREND('P vs Mp'!$D$3:$D$53,'P vs Mp'!$A$3:$A$53,F10)
في التحليل الحالي، $0 < P_{total} < 5,000$.

- نفترض أن المفصل اللدن التالي سيتشكل عندما $M_{eq,Tot} \geq 0.95M_p$

لكن المسألة لاخطية في الحقيقة، لأن شرط تشكل المفصل يعتمد على مقدار القص في هذه الخطوة. لذلك سنزيد قيمة V (بمقدار 10 kips) حتى يتشكل مفصل واحد. وفي هذه الحالة تكون القيمة 40.

التفاعل بين المهام



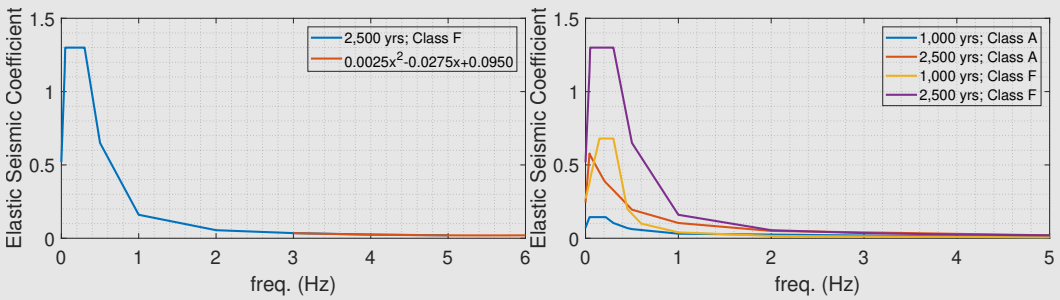
الحل

الجزء 1: تحليل طيف الاستجابة

عُرض معامل C_s للموقع المحدد ولفترتي 1000 و2500 سنة للفئتين A وFg في الجدول 68.2

① تظهر مخططات C_s وطيف استجابة الإزاحة (مع الاستقراء إلى 6 sec.) في الشكل 68.10.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



b) 2,500 سنة، الفئة F) (a) الكل

شكل 68.10: تحليل طيف الاستجابة (C_S)

يمكن تحويل معاملات الزلازل المرنة (C_S) إلى إزاحات طيفية (Δ) من خلال

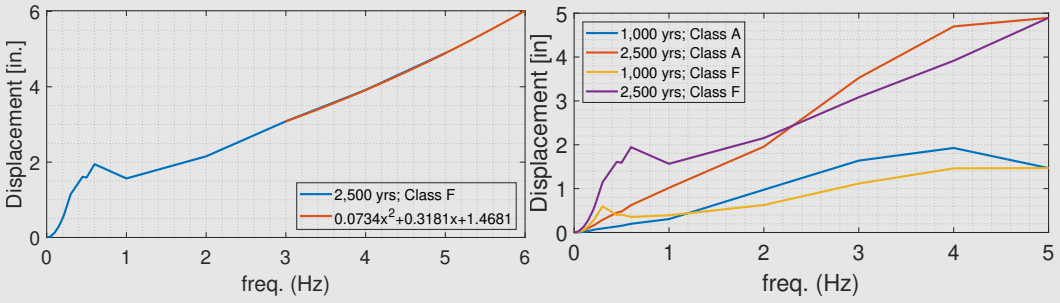
$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 C_S \tag{68.1}$$

② يعطي التقريب التربيعي لنقاط البيانات الثلاث الأخيرة

$$C_S = 0.0025f^2 - 0.0275f + 0.0950 \tag{68.2}$$

وبالتعويض في المعادلة 68.2 عند $T = 6$ sec، نحصل على C_s=0.02 (وكذلك من الشكل 68.11b)

③ يظهر طيف استجابة الإزاحة في الشكل 68.11.



b) 2,500 سنة، الفئة F) (a) الكل

شكل 68.11: تحليل طيف استجابة الإزاحة

④ ينتج عن ذلك C_S حتى T = 6 ثوانٍ، Δ = 6 in.

الجزء 2: السعة (حسابات يدوية للركيزة)

نظام مقاومة الزلازل

ينص AASHTO, Seismic, 2011, §3.3 على أن نظام مقاومة الزلازل (ERS) للجسور يجب أن يوفر مسار حمل موثوقاً ومتواصلاً لنقل القوى الناجمة عن الزلازل إلى التربة المحيطة، ووسائل كافية لتبديد الطاقة و/أو التقييد للتحكم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الموثوق بالإزاحات الناجمة عن الزلازل. ويجب أن تكون جميع عناصر الجسر الإنشائية وعناصر الأساس قادرة على تحقيق الإزاحات المتوقعة بما يتفق مع متطلبات استراتيجية التصميم المختارة للمقاومة الزلزالية وسائر المتطلبات الإنشائية.

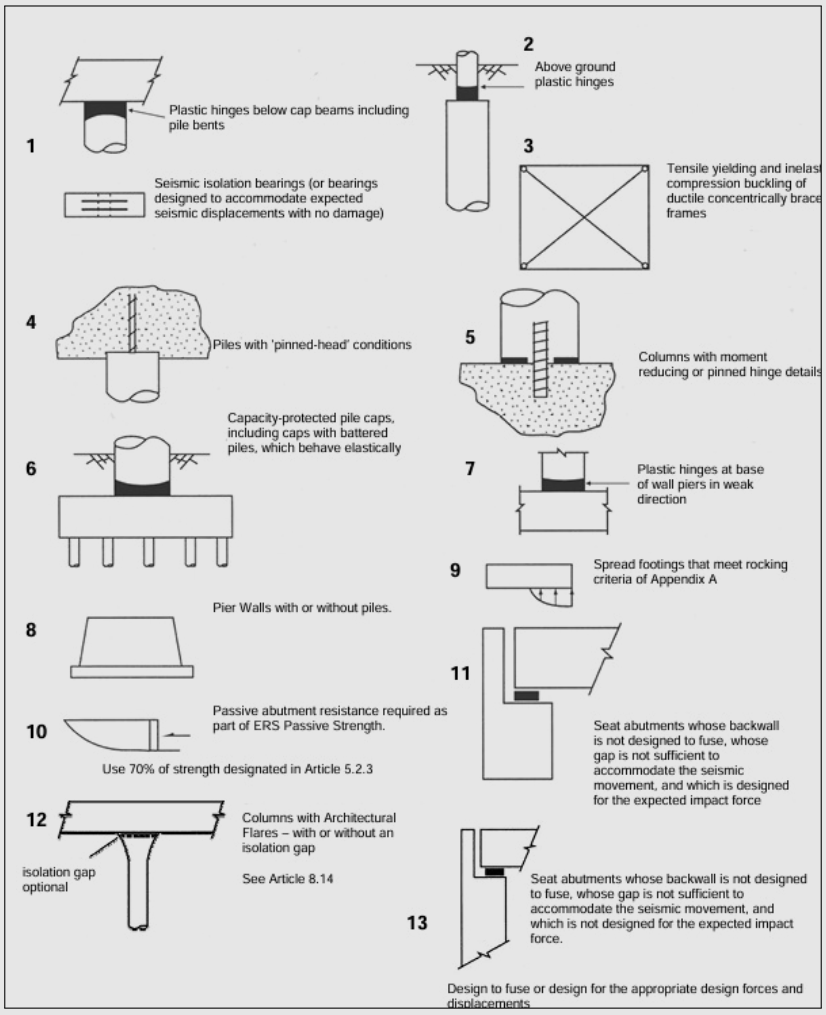
وينبغي أن يستند التصميم إلى استراتيجيات التصميم الزلزالي الكلية الثلاث الآتية، المستخدمة في مواصفات الدليل هذه وفق خصائص السلوك المتوقعة لنظام الجسر، الشكل 68.12:

النوع 1 بنية سفلية مطيلية مع بنية علوية مرنة أساساً: تشمل هذه الفئة تشكل المفاصل اللدنة التقليدي في الأعمدة والجدران، والمساند الطرفية التي تحد قوى العطالة بتعبئة مقاومة التربة السلبية كاملة. وتشمل أيضاً الأساسات التي قد تحد قوى العطالة بتشكل مفاصل داخل الأرض، مثل حوامل الخوازيق والمساند الطرفية المتكاملة على الخوازيق.

النوع 2 بنية سفلية مرنة أساساً مع بنية علوية مطيلية: تنطبق هذه الفئة فقط على البنى العلوية المستقيمة غير المنحرفة ذات الكمرات المركبة من قطاعات فولاذية I وإطارات عرضية مطيلية عند المساند. ويجب أن يوافق المالك على استخدام هذه الاستراتيجية وفق معايير ومنهجية تصميم خاصة بالحالة.

النوع 3 بنية علوية وسفلية مرنتان مع آلية مصهر بينهما: تشمل هذه الفئة المنشآت المعزولة زلزالياً، والمنشآت التي تُستخدم فيها أجهزة إضافية لتبديد الطاقة، مثل المخمدات، للتحكم في قوى العطالة المنقولة بين البنيتين العلوية والسفلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 68.12: عناصر مقاومة الزلازل المسموح بها (AASHTO, Seismic, 2011) (ERES)

⑤ يتضح من الشكل 68.5a أن البنية العلوية موضع الدراسة كمرة خرسانية مسلحة، وأن الجسر غير معزول زلزالياً ولا تُستخدم فيه أجهزة إضافية لتبديد الطاقة؛ لذلك فإن نظام مقاومة الزلازل للجسر هو النوع 1.

سعة العزم الاسمية

⑥ لاحظ أن حسابات العزم الاسمي غير معروضة هنا، وقد قدمتها `Kiewit`

يُعرّف AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 سعة العزم الاسمية المتوقعة، M_{ne}، بدلالة مقاومتي الخرسانة وفولاذ التسليح عندما يبلغ انفعال الخرسانة مقدار 0.003 أو يبلغ انفعال فولاذ التسليح انفعال الشد الأقصى المخفض كما هو معرف في الجدول 68.4.

يظهر عمود القاعدة في الشكل 68.6b، ونسعى إلى حساب سعة العزم الاسمية باستخدام كتلة إجهاد Whitney أو نموذج Mander[a]

باستخدام كتلة إجهاد Whitney، وُجد أن سعة العزم الاسمية للعمود عند القاعدة هي M_{ne} = 6,220 (kip-ft ±10%) (Whitney).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

في نموذج Mander (Mander, Priestley **and** Park, 1988)، الشكل 68.7، يوصف منحنى الإجهاد-الانفعال بالكامل بمعادلات ذات 3 معلمات

$$\frac{f_c}{f'_{cc}} = \frac{n\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)}{(n-1)+\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^n} \tag{68.3}$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \tag{68.4}$$

$$E_c\ (\text{MPa}) = 5,000\sqrt{f'_c\ (\text{MPa})} \tag{68.5}$$

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \tag{68.6}$$

ε_{cc} هو الانفعال عند مقاومة الضغط القصوى للخرسانة المحصورة:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0}\left[1+5\left(\frac{f'_{cc}}{f'_c}-1\right)\right]$$

ويُعطى f'_{cc}، أي مقاومة ضغط الخرسانة المحصورة، بالعلاقة:

$$f'_{cc} = f'_c\left(-1.254+2.254\sqrt{1+\frac{7.94f'_t}{f'_c}}-2\frac{f'_t}{f'_c}\right)$$

حيث يُعطى f'_t بالعلاقة:

$$f'_t = \frac{1}{2}k_e\rho_s f_{yh}$$

حيث ρ_s = نسبة حجم فولاذ الحصر العرضي إلى حجم قلب الخرسانة المحصورة، وf_{yh} = مقاومة خضوع التسليح العرضي، وk_e = معامل الحصر. بالنسبة إلى الحلقات الدائرية:

$$k_e = \frac{\left(1-\frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1-\rho_{cc}}$$

وبالنسبة إلى اللوالب الدائرية

$$k_e = \frac{1-\frac{s'}{2d_s}}{1-\rho_{cc}}$$

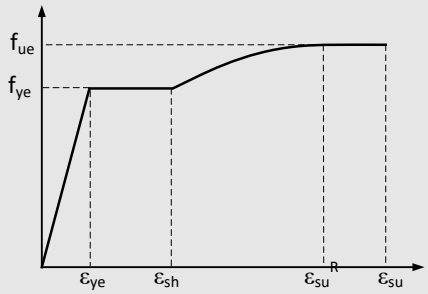
حيث ρ_{cc} = نسبة مساحة التسليح الطولي إلى مساحة قلب المقطع، وs' = التباعد الصافي بين القضبان اللولبية أو الحلقية، وd_s = قطر اللولب.

باستخدام نموذج Mander لتعريف منحنى الإجهاد-الانفعال، وُجد أن سعة العزم الاسمية للعمود عند القاعدة هي

$$M_{ne} = 8,551(\pm 10\%)\ \text{(kip-ft; Mander)} \tag{68.7}$$

⑦ **مقاومة الخضوع المتوقعة** f_{ye} ينص AASHTO, Seismic, 2011, §8.4.2 على تمثيل فولاذ التسليح بعلاقة إجهاد–انفعال تُظهر جزءاً مرناً أولياً، وهضبة خضوع، ونطاق تصلد بالانفعال يزداد فيه الإجهاد مع الانفعال، الشكل 68.13 (AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.4.2-1).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 68.13: نموذج الإجهاد-الانفعال لفولاذ التسليح

عند غياب بيانات محددة، ينبغي استخدام خصائص فولاذ التسليح الواردة في الجدول 68.4.

جدول 68.4: خصائص الإجهاد لقضبان فولاذ التسليح (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1)

	الرمز	مقاس القضيب	ASTM A 706	ASTM A 615 (الدرجة 60)
إجهاد الخضوع الأدنى المحدد (ksi)	fy	18# –3#	60	60
إجهاد الخضوع المتوقع (ksi)	f_{ye}	18# –3#	68	68
مقاومة الشد المتوقعة (ksi)	f_{ue}	18# –3#	95	95
انفعال الخضوع المتوقع	ε_{ye}	18# –3#	0.0023	0.0023
		8# –3#	0.0150	0.0150
		9#	0.0125	0.0125
بداية التصلد بالانفعال	ε_{sh}	11# & 10#	0.0115	0.0115
		14#	0.0075	0.0075
		18#	0.0050	0.0050
انفعال الشد الأقصى المخفض	ε_{su}^{R}	10# –4#	0.090	0.060
		18# –11#	0.060	0.040
انفعال الشد الأقصى	ε_{su}	10# –4#	0.120	0.090
		18# –11#	0.090	0.060

في المنطقة المرنة، يؤخذ معامل المرونة، E_s، مساوياً لـ29,000 ksi. ووفق الجدول 68.4، وُجد أن مقاومة الخضوع المتوقعة لقضيب ASTM A706 بمقاس #3-#18 هي 68 ksi.

⑧ **طول المفصل اللدن** L_p ينص AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.6 على أن طول المفصل اللدن التحليلي للأعمدة، L_p، يؤخذ مساوياً لطول العمود المكافئ الذي يُفترض ثبات الانحناء اللدن عليه لتقدير الدوران اللدن، الشكل 68.16. وتُحدد الإزاحة اللدنة لعنصر مكافئ من نقطة العزم الأقصى إلى نقطة انقلاب العزم على أساس الدوران اللدن.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بالنسبة إلى الأعمدة الخرسانية المسلحة المتصلة بقاعدة أو غطاء حامل متكامل أو خازوق كبير القطر أو خازوق مغلف، يمكن تحديد طول المفصل اللدن، L_P بالبوصة، من AASHTO, Seismic, 2011, Equation 4.11.6-1:

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl}$$

حيث:

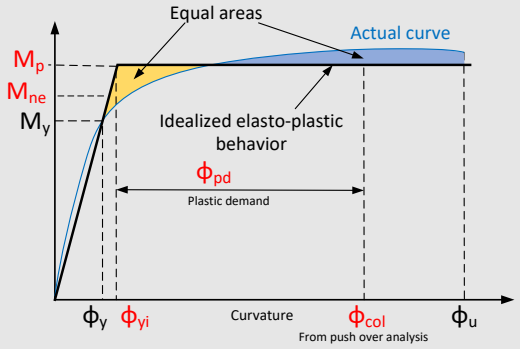
L طول العمود من نقطة العزم الأقصى إلى نقطة انقلاب العزم (in.)
f_{ye} مقاومة الخضوع المتوقعة لقضبان تسليح العمود الطولية (ksi)
d_{bl} القطر الاسمي لقضبان تسليح العمود الطولية (in)

لأن تفاعل التربة والخازوق لا يؤخذ في الحسبان في هذا المشروع، فإن الارتفاع الكلي للركيزة هو مجموع ارتفاع العمود (40 ft) والخازوق (60 ft). وفي هذه الحالة تقع نقطة الانقلاب تقريباً عند منتصف ارتفاع الركيزة ($L \simeq 50$ ft). لذلك:

$$L_c \simeq 50 \times 12 = 600 \text{ (in)} \tag{68.8}$$
$$f_{ye} = 68 \text{ (ksi)} \tag{68.9}$$
$$d_{bl} = 1.693 \text{ (in)} \tag{68.10}$$
$$L_P = \max\{0.08 \times 600 + 0.15 \times 68 \times 1.693, 0.3 \times 68 \times 1.693\} \tag{68.11}$$
$$= \max\{65.3, 34.5\} = 65.3 \text{ (in)} \tag{68.12}$$

⑨ **العزم اللدن** M_p ينص AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 على حساب سعة العزم اللدن لجميع العناصر الخرسانية المطيلية بتحليل العزم-الانحناء ($M - \Phi$) على أساس خصائص المواد المتوقعة. ويجب أن يتضمن تحليل العزم-الانحناء القوى المحورية الناتجة عن الحمل الميت إلى جانب القوى المحورية الناتجة عن الانقلاب.

ينبغي تمثيل منحنى ($M - \Phi$) تمثيلاً مثالياً باستجابة مرنة-لدنة تماماً لتقدير سعة العزم اللدن للمقطع العرضي للعنصر. ويجب أن يمر الجزء المرن من المنحنى المثالي بالنقطة التي تحدد خضوع أول قضيب تسليح. وتُستخرج سعة العزم اللدن المثالية بمساواة المساحات بين منحنيي ($M - \Phi$) الفعلي والمثالي بعد نقطة خضوع أول قضيب تسليح، كما يبين الشكل 68.14 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.5-1.



شكل 68.14: العزم-الانحناء (مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)

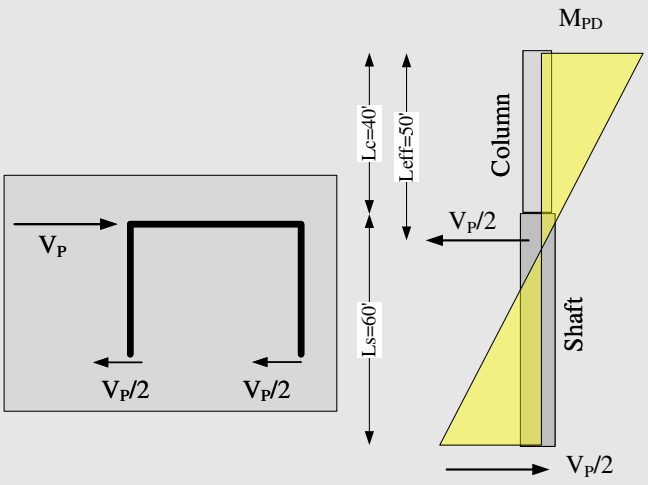
تُحدد منحنيات العزم-الانحناء للمقاطع عند أعلى العمود، وقاعدة العمود، وفي الخازوق المحفور مع المنحنيات المثالية المقابلة كما يأتي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لاحظ مرة أخرى وجود جزء بطول 2-inch في أسفل العمود (حيث القارنة) تنقطع فيه قضبان التسليح الخارجية. ولا تعمل القارنة إلا موصلاً—فلا تُكتسب منها أي مقاومة. ويلاحظ أيضاً وجود فجوة مقدارها 2" فوق الخازوق المحفور مباشرةً بين أعلى الخازوق وطرف قضبان التسليح الخارجية. وفي الحالتين، ينبغي حساب العزم اللدن في أسفل العمود بالاعتماد فقط على الخرسانة المحصورة المتشكلة داخل قضبان التسليح الداخلية.

وفق النتائج، يكون العزم اللدن عند قاعدة العمود هو الأصغر. غير أن ذلك لا يعني أن أول مفصل لدن سيتشكل عند قاعدة العمود، لأن نسبة السعة إلى الطلب تتحكم في ترتيب تشكل المفاصل اللدنة في المنشأ.

10 **القص** V_p من الاستاتيكا، يتشكل أول مفصل لدن عند أعلى العمود، ويكون القص المقابل، V_p، اللازم لتطور أول عزم لدن في كلا العمودين، الشكل 68.15، هو



شكل 68.15: توزيع العزم على ارتفاع الركيزة

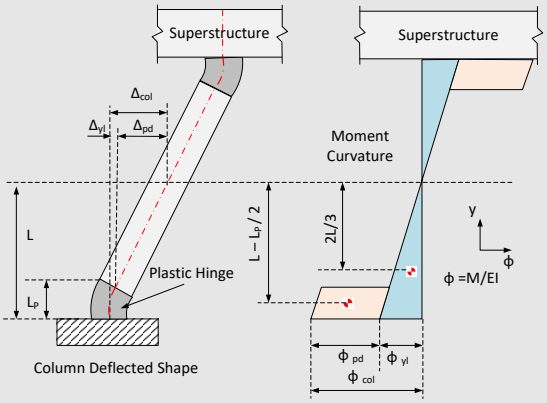
بالنسبة إلى أعلى العمود ذي القطر 7ft، $M_p = 15,839$ k-ft

$$L_{eff} = \frac{L_C + L_S}{2} = \frac{60 + 40}{2} = 50\text{ft} \tag{68.13}$$

$$\frac{V_P}{2} L_{eff} = M_c^t \Rightarrow V_P = 2\frac{M_c^t}{L_{eff}} = 2\frac{15,839}{50} = 634\text{ (kips)} \tag{68.14}$$

11 **الإزاحة المرنة** Δ_e نستخدم طريقة مساحة الانحناء لتحديد دوران العنصر وانحرافه[b]، الشكل 68.16.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 68.16: الشكل المتشوه للركيزة ومخطط الانحناء؛ مقتبس من AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \text{ 1st curvature area theorem} \tag{68.15}$$

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld} \frac{L}{2}\right) \times \frac{2}{3} L \text{ 2nd curvature area theorem} \tag{68.16}$$

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C} \tag{68.17}$$

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)} \tag{68.18}$$

$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi \times 7^4 \times 12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)} \tag{68.19}$$

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5} \tag{68.20}$$

$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3} (50 \times 12) = 2.32 \text{ inch} \tag{68.21}$$

(68.22)

12 **الإزاحة اللدنة** Δ_{PD} يمكن تقدير Φ_{PD} من الشكل 68.9b بقيمة 0.005/ft. يمكن تحديد الإزاحة اللدنة من المعادلات الآتية

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \tag{68.23}$$

$$\Phi_{PD} = 0.005 \times \frac{65.3}{12} = 0.0272 \tag{68.24}$$

$$\Delta_{PD} = \theta_P \left(L_C - \frac{L_P}{2}\right) \tag{68.25}$$

$$= 0.0272 \left((50 \times 12 - \frac{65.3}{2}\right) \simeq 15.4 \text{ (in.)} \tag{68.26}$$

13 **الإزاحة الكلية** Δ_{total} الإزاحة الكلية هي مجموع الإزاحتين المرنة واللدنة:

$$\Delta_{tot} = \Delta_e + \Delta_{PD} = 2.3 + 15.4 = 17.7 \text{ (in.)} \tag{68.27}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الجزء 3: أحمال الطلب

حمل التصميم المحوري على العمود هو P_{DL} = 2,500 kips.

14 العزم عند قاعدة العمود الناتج عن تأثيرات $P\Delta$ يغطي AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.5 متطلبات تأثيرات $P-\Delta$، وينص AASHTO, Seismic, 2011, Eq. 4.11.5-1 على أنه بالنسبة إلى الأعمدة الخرسانية المسلحة

$$P_{DL}\Delta_r \leq 0.25M_P$$

حيث

P_{DL} الحمل الميت غير المعامل (kips)
Δ_r الإزاحة الجانبية النسبية بين نقطة انقلاب العزم وأبعد نهاية للمفصل اللدن (in.).
هنا، تكون هي الإزاحة من أطياف الاستجابة لفترة 2,500 سنة.
M_P سعة العزم اللدن المثالية للعمود الخرساني المسلح على أساس خصائص المواد المتوقعة (kip-in.)

تنص تعليقات AASHTO المقابلة على إمكان إهمال تأثيرات $P-\Delta$. وبالنسبة إلى الأعمدة التي لا تحقق المعادلة السابقة، يكون للمصمم خيار تطبيق واحد أو أكثر مما يأتي:

- زيادة سعة عزم العمود بإضافة تسليح طولي.
- ضبط الخصائص الديناميكية للجسر كما نوقش في AASHTO, Seismic, 2011, §4.1.3.
- إعادة تكوين الجسر لتقليل طلب الحمل الميت المؤثر في العمود.
- استخدام التحليل اللاخطي للسجل الزمني لمراعاة تأثيرات $P-\Delta$ صراحةً.

الطريقة الصارمة الوحيدة لمراعاة تأثيرات $P-\Delta$ مع الطلبات الزلزالية هي استخدام تحليل لاخطي للسجل الزمني. وعند استخدام هذا التحليل، يلزم اعتماد نماذج للصلابة بعد الخضوع، وتدهور الصلابة، وصلابة إزالة الحمل قادرة على تمثيل استجابة المنشأ المتوقعة نتيجة التحميل الدوري الناجم عن الزلازل. ونظراً إلى تعقيد هذا النوع من التحليل، يُوصى بتحقيق متطلبات المعادلة 1-4.11.5 كلما كان ذلك عملياً.

$$M_{P-\Delta} = P_{DL}\Delta_r \quad (68.28)$$
$$P_{DL} = 2,500 \text{ (Kip)} \quad (68.29)$$
$$\Delta_r = 6 \text{ (in.) From Eq. 68.1} \quad (68.30)$$
$$M_{P-\Delta} = (2,500)(0.5) = 1,250 \text{ (kip-ft)} \quad (68.31)$$
$$0.25 * M_P = 0.25(8,662) = 2,166 \text{ (kip-ft)} \checkmark \quad (68.32)$$

حيث يُحدد M_P من الشكل 68.9b. ومن ثم، لا يُتوقع أن تؤثر تأثيرات $P-\Delta$ تأثيراً مهماً في الاستجابة، وتُفترض مهملة.

15 القص V_{2500} عند قاعدة العمود هو القص الناتج عن حدث فترة العودة 2,500 سنة، ويُحدد من

$$V_{2500} = C_S P_{DL} = (0.02)(2,500) = 50 \text{ (kips)}$$

يُحدد C_S عند $T = 6$ sec من الشكل 68.10b أو المعادلة 68.2، بينما تكون القوة المحورية معطاة.

16 M_{2500} عند قاعدة العمود يُحدد عزم فترة العودة 2,500 سنة عند قاعدة العمود من

$$M_{2500} = V_{2500}L_C = (50)(40) = 2,000 < M_P \text{ (kip-ft.)}$$

وهو أقل من سعة العمود البالغة 8,662 k-ft. (الشكل 68.9b).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

17 **عزم الطلب مقابل العزم المسموح به** العزم المسموح به هو

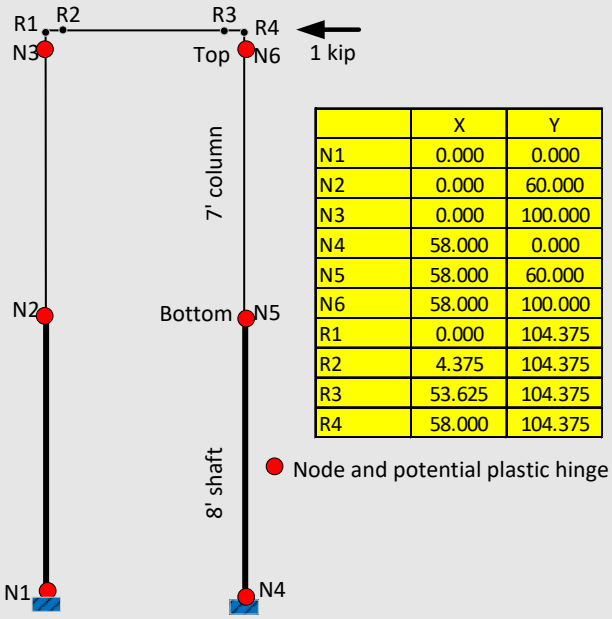
$$\phi M_{ne} = (0.9)(8,551) = 7,695.9 \text{ (kip-ft)} \quad (68.33)$$
$$> M_{2500}(2,000) \quad (68.34)$$

حيث يأتي M_{ne} من المعادلة 68.7.

الجزء 4: جزء تحليل الدفع

18 **توضيح النموذج** مع افتراض كمرة غطاء صلبة، لا يلزم سوى نمذجة الأعمدة، ويُفترض اتصالها اتصالاً صلباً بالصخر الأساس.

تعرض Kiewit التحليل الساكن المرن للدفع خطوة بخطوة وفق الشبكة المبينة في الشكل 68.17. وتُوصف الأعمدة ببساطة بمساحة المقطع، وعزم العطالة، ومعامل المرونة. ولذلك لا يلزم تعريف مادة لاخطية ولا مقطع ليفي في النمذجة البرمجية.



	X	Y
N1	0.000	0.000
N2	0.000	60.000
N3	0.000	100.000
N4	58.000	0.000
N5	58.000	60.000
N6	58.000	100.000
R1	0.000	104.375
R2	4.375	104.375
R3	53.625	104.375
R4	58.000	104.375

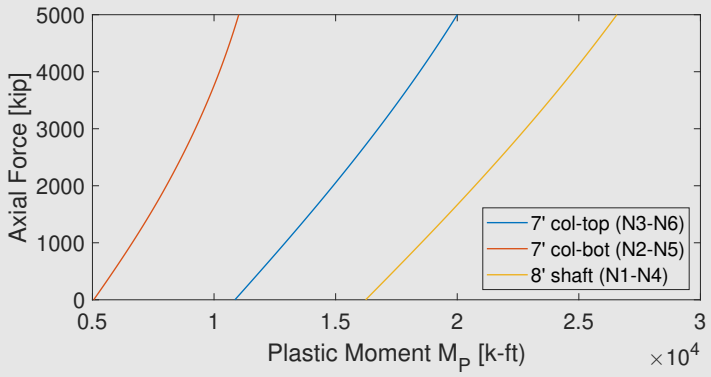
شكل 68.17: نموذج Risa

19 **العزم اللدن M_P عند أعلى الأعمدة** يبين الجدول 68.5 (المستخرج من جدول البيانات $N - M_p$ المتاح لك) سعات العزم للمقاطع الثلاثة المختلفة ولنطاق من القوى المحورية (بزيادات مقدارها 100 kips). وتُستخدم سعات العزم هذه خلال تحليل الدفع لمراعاة تأثير القوة المحورية في سعات عزم المقاطع مع دفع المنشأ وتغير القوى المحورية نتيجةً لذلك. (ΔP = 500 kips). وتظهر أيضاً في الشكل 68.18.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.5: سعات العزم للمقاطع الثلاثة المختلفة ضمن نطاق من القوى المحورية

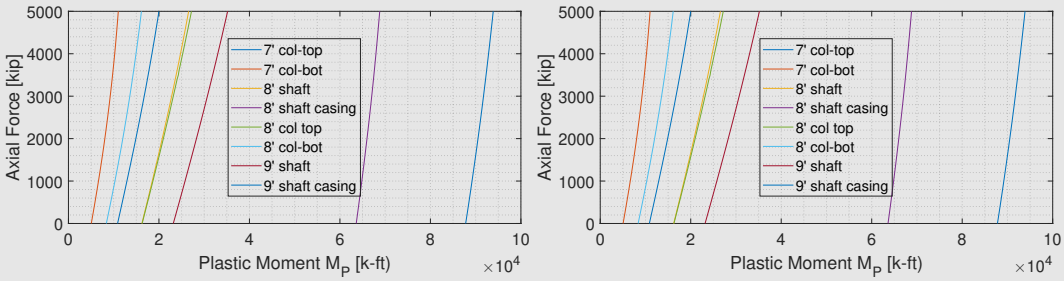
	عمود 7 ft (أعلى)	عمود 7 ft (أسفل)	خازوق 8 ft
(K) P	(K-ft) M_p	(K-ft) M_p	(K-ft) M_p
-	10,858	5,051	16,234
100	11,067	5,216	16,467
200	11,276	5,379	16,698
300	11,484	5,541	16,929
400	11,692	5,702	17,159
500	11,899	5,862	17,388
600	12,105	6,020	17,617
700	12,312	6,177	17,846
800	12,517	6,332	18,073
900	12,721	6,485	18,299
1,000	12,924	6,637	18,525
1,100	13,126	6,787	18,750
1,200	13,327	6,934	18,974
1,300	13,528	7,080	19,196
1,400	13,727	7,224	19,419
1,500	13,924	7,366	19,639
1,600	14,121	7,505	19,859
1,700	14,318	7,643	20,077
1,800	14,512	7,778	20,296
1,900	14,706	7,911	20,512
2,000	14,898	8,040	20,727
2,100	15,089	8,169	20,941
2,200	15,278	8,295	21,154
2,300	15,467	8,419	21,366
2,400	15,654	8,541	21,576
2,500	15,839	8,662	21,786
2,600	16,024	8,780	21,994
2,700	16,207	8,897	22,200
2,800	16,388	9,011	22,405
2,900	16,568	9,122	22,610
3,000	16,747	9,232	22,812
3,100	16,925	9,340	23,013
3,200	17,101	9,445	23,214
3,300	17,275	9,549	23,412
3,400	17,448	9,651	23,609
3,500	17,619	9,751	23,805



شكل 68.18: مخطط التفاعل للأعمدة الثلاثة المطلوبة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تُعطى العزوم اللدنة لجميع المقاطع (الحسابات غير معروضة هنا) في الشكل 68.19.



شكل 68.19: العزوم اللدنة

شرح معامل 0.95 ϕ مقدم من `Marilyne Lefebvre`

أعتقد أن المعامل 0.95 في المعادلة $M_{EQ} \leq 0.95 M_p$ هو معامل تخفيض يُطبق على العزم اللدن، وهو متوسط معاملي الحمل الواردين في (AASHTO, LRFD, 2017) (مواصفات AASHTO LRFD لتصميم الجسور) و(AASHTO, Seismic, 2011) (مواصفات AASHTO الزلزالية). وسأشرح أدناه فلسفة استخدام معامل الحمل هذا:

في الطبعة 8 من AASHTO LRFD، وُضع حد لسعة الانحناء للعمود في التصميم القائم على القوى. ولأن LRFD لا يحسب طلب المطيلية، أُضيف معامل تخفيض مقداره 0.9 إلى العزم اللدن توخياً للتحفظ:

> *يلزم تصميم الأعمدة ثنائياً محورياً ودراستها تحت كل من القوة المحورية الدنيا والقصوى. وخفضت الطبعة السابقة من هذه المواصفات معامل مقاومة الانحناء من 0.9 إلى 0.5 مع زيادة الحمل المحوري من O إلى $0.20 f'_c A_g$، بسبب الاتجاه نحو انخفاض سعة المطيلية مع زيادة الحمل المحوري. وقد خُفف هذا المتطلب في هذه الطبعة، لكن أُضيف متطلب $P-\Delta$ (المادة 4.7.4.5) للحد من الطلب على سعة المطيلية بسبب الانحراف المفرط. كما أُبقيت معاملات R عند مستوياتها السابقة (المادة 3.10.7)، رغم زيادة فترة عودة زلزال التصميم من 500 إلى 1.000 سنة. وفي كل من أحكام NCHRP 12-49 و20-7(192)، يساوي معامل مقاومة الانحناء الموصى به 1.0. غير أنه نظراً إلى أن المواصفات الحالية قائمة على القوى ولا تحسب طلب المطيلية صراحةً كما في أحكام 12-49 و20-7(193)، فإن قصر المعامل على 0.9 يُعد مبرراً بدلاً من تحليل أكثر صرامة.*
>
> (C5.11.4.1.2](AASHTO, LRFD, 2017]

وفي الواقع، يساوي معامل مقاومة الحمل هذا في (AASHTO, Seismic, 2011) مقدار 1.0، نظراً إلى استخدام تركيب الحمل 1.0EQ + 1.0DC + 1.0DW + 0.5LL وخصائص المواد المتوقعة (أي f'_{ce} وf_{ye}).

عادةً ما يُفضل في منطقة زلزالية عالية مثل California وWashington استخدام التصميم القائم على الإزاحة، لأن متطلبات المطيلية وسعة الإزاحة في AASHTO Seismic أكثر صرامة منها في AASHTO LRFD.

يعمل التصميم القائم على الإزاحة بصورة مختلفة قليلاً عن التصميم القائم على القوى، لكن تحليل الدفع يُنفذ بالطريقة نفسها—فبدلاً من زيادة قوة أفقية، تُزاد إزاحة.

غير أننا في هذا المثال نعرض التصميم القائم على القوى باستخدام تحليل الدفع (أي نزيد قوة القص حتى يتشكل مفصل لدن).

لأن Goethals يقع في المنطقة الزلزالية A (SD1 = 0.03)، لا تشترط AASHTO Seismic أن يكون الخازوق عنصراً محمياً بالسعة. ومن واجهة هذا الحامل (انظر مستند Word المرفق)، يمكن ملاحظة أن قفص العمود الداخلي وحده ممتد داخل الخازوق، بينما لا يمتد قفص العمود اللولبي داخله.

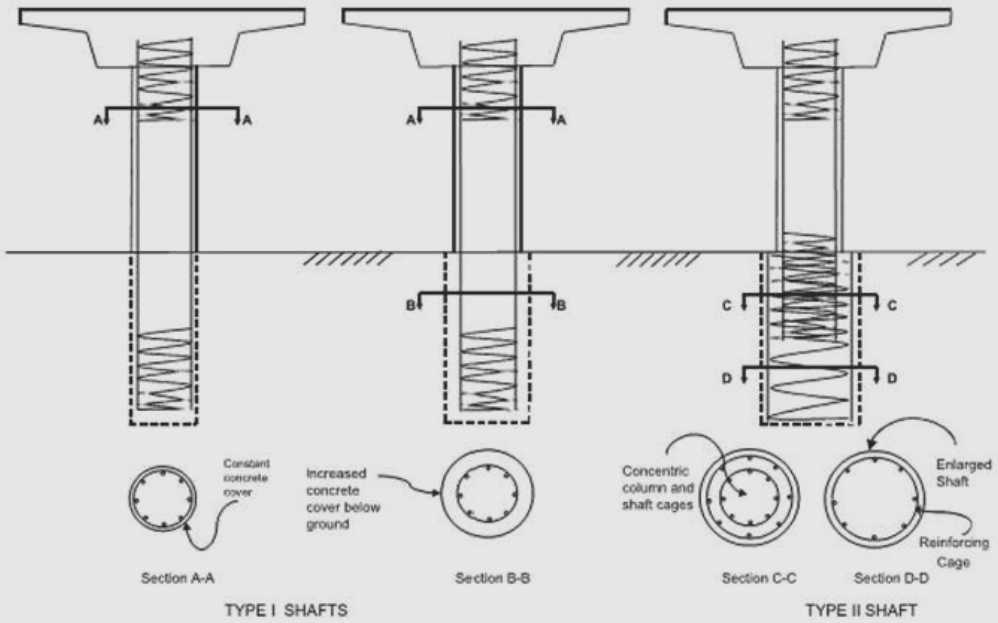
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يوجد قفص داخلي بطول 21’-0” ممتد داخل الخازوق، لكن التسليح العرضي عبارة عن روابط. ولا يمتد التسليح اللولبي في العمود إلى داخل الخازوق كما في العنصر المعتاد المحمي بالسعة. لذلك قررنا، استناداً إلى هذين الأمرين، أن الخازوق لا يتصرف بمرونة تامة، أي إن المفصل اللدن قد يتشكل داخله. ومن خلال تحليل الدفع الذي أجريناه على RISA، انتهينا إلى تأكيد أن آلية فشل هذا الحامل هي تشكل مفصل عند قاعدة الخازوق.

أما معامل الحمل، فلأن الخازوق المحفور ليس عنصراً محمياً بالسعة، لا نرى أن استخدام معامل حمل 1.0 للتصميم المطيلي للعمود مناسب، إذ أسست AASHTO Seismic معامل الحمل 1.0 على عنصر محمي بالسعة. ولذلك، بدلاً من استخدام معامل تخفيض حمل 1.0، استخدمنا اعتباطياً في التصميم الأولي 0.95 في تحليلنا إذا أردنا مواصلة استخدام معادلات AASHTO LRFD (وهو متوسط المعاملين في AASHTO LRFD وAASHTO Seismic). وتسمح المادة C5.11.4.1.2 باستخدام معامل مختلف عن 0.9 إذا أجرينا تحليلاً أكثر صرامة من مجرد الاعتماد على معادلات الكود (أي حساب سعة إزاحة العمود—وهو ما فعلناه بتحليل الدفع). وقد أضفنا ببساطة معامل تخفيض للسعة اللدنة للعمود لمراعاة تشكل المفصل اللدن في الخازوق.

قدم CALTRANS, 2013 شرحاً جيداً لتكويني الخازوق المختلفين (انظر اللقطة أدناه، من Caltrans Seismic Design Criteria Version 1.7)، الشكل 68.20

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



Type I shafts are designed so the plastic hinge will form below ground in the shaft. The concrete cover and area of transverse and longitudinal reinforcement may change between the column and Type I shaft, but the cross section of the confined core is the same for both the column and the shaft. The global displacement ductility demand, μ_D for a Type I shaft shall be as specified in Section 2.2.4, with an upperbound value corresponding to that of the supported column.

Type II shafts are designed so the plastic hinge will form at or above the shaft/column interface, thereby, containing the majority of inelastic action to the ductile column element. Type II shafts are usually enlarged shafts characterized by a reinforcing cage in the shaft that has a core diameter larger than that of the column it supports. Type II shafts shall be designed to remain elastic. See Section 7.7.3.2 for design requirements for Type II shafts.

Figure 2.2.4-1 Shaft Definitions

NOTE:
Generally, the use of Type II shafts should be discussed and approved at the Type Selection Meeting. Type II Shafts will increase the foundation costs, compared to Type I Shafts, however there is an advantage of improved post-earthquake inspection and repair. Typically, Type I shafts are appropriate for short columns, while Type II shafts are used in conjunction with taller columns. The end result shall be a structure with a balanced stiffness as discussed in Section 7.

شكل 68.20: تعريف Caltran للخازوق(CALTRANS, 2013)

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ينبغي عموماً مناقشة استخدام خوازيق النوع II والموافقة عليه في اجتماع اختيار النوع. وستزيد خوازيق النوع II تكاليف الأساس مقارنة بخازوق النوع 1، غير أن لها ميزة تحسين الفحص والإصلاح بعد الزلزال. وعادةً ما تناسب خوازيق النوع I الأعمدة القصيرة، بينما تُستخدم خوازيق النوع II مع الأعمدة الأطول. ويجب أن تكون النتيجة النهائية منشأ ذا صلابة متوازنة كما نوقش في القسم 7.

(CALTRANS, 2013)

20 **التحليل I؛ بلا مفاصل؛ قبل اللدونة** نبدأ بتحليل الإطار (غير المحدد استاتيكياً) باستخدام برنامج لقوة جانبية وحدية مقدارها 1 kip، الجدول 68.6.

جدول 68.6: نتائج التحليل؛ بلا مفاصل

$V(K)$	العقدة	(K) P_{eq}	(K-ft) M_{EQ}	(in) Δ
1	N1	0.805-	28.84	0.000
	N2	0.805-	1.17-	0.008-
	N3	0.805-	21.17-	0.013-
	N4	0.805	28.82	0.000
	N5	0.805	1.17-	0.008-
	N6	0.805	21.17-	0.013-

21-22 **التحليل المتزايد I (جدول البيانات)** ننشئ جدولاً جديداً (جدول بيانات)، حيث

- تُستخرج P_{EQ} وM^i_{EQ} وΔ من نتائج التحليل السابق (الجدول 68.6) مضروبةً في قوة القص في العمود 1 (سنتناول ذلك بعد قليل).
- P_{total} هو مجموع P_{DL} (Kip 2,500) وP_{eq}.
- يساوي $M_{EQ,total}$ ببساطة مجموع جميع القيم السابقة والقيمة الحالية. فمثلاً في الجدول 68.9، $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$، وبالنسبة إلى N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

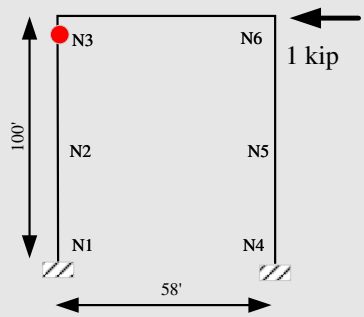
- يتطلب M_P عناية خاصة لأن القوى المحورية في المقاطع تتغير مع زيادة القوة الأفقية عند الأعلى، فتتغير سعات العزم أيضاً. لذلك يستخدم جدول Excel دالة `trend` التي تبحث عن تقريب بالمربعات الصغرى لدالة خطية بين نقطتي نهاية كما يأتي:
(F10,53A:3AP vs Mp'!',53D:3DTREND('P vs Mp'!=
في التحليل الحالي، $0 < P_{total} < 5,000$.
- نفترض أن المفصل اللدن التالي سيتشكل عندما $M_{eq,Tot} \geq 0.95M_p$

لكن المسألة لاخطية في الحقيقة، لأن شرط تشكل المفصل يعتمد على مقدار القص في هذه الخطوة. لذلك سنزيد قيمة V (بمقدار 10 kips) حتى يتشكل مفصل واحد. وفي هذه الحالة تكون القيمة 670 kips.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.7: ضبط القص المؤدي إلى تشكل المفصل الأول

V (K)	العقدة (K-ft)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	لدن مفصل؟	$M_P/M_{eq,Tot}$
076	N1	539.66-	19,322	0.00	1,960	19,322	20,531	لا	1.06
	N2	539.66-	784-	5.19-	1,960	784-	7,796	لا	9.94-
	N3	539.66-	14,186-	8.79-	1,960	14,186-	14,704	نعم	1.04-
	N4	539.66	19,310	0.00	3,040	19,310	22,769	لا	1.18
	N5	539.66	785-	5.19-	3,040	785-	9,085	لا	11.58-
	N6	539.66	14,182-	8.78-	3,040	14,182-	16,687	لا	1.18-



شكل 68.21: النموذج المرن المعدل بعد تشكل المفصل اللدن الأول

جدول 68.8: نتائج التحليل؛ مفصل واحد

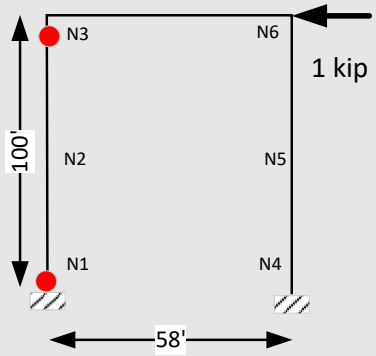
V (K)	العقدة	P_{eq} (K)	M_{EQ}^2 (K-ft)	Δ (in)
1	N1	0.565-	28.15	0.000
	N2	0.565-	11.23	0.009-
	N3	0.565-	0.00	0.022-
	N4	0.565	43.47	0.000
	N5	0.565	0.37	0.012-
	N6	0.565	28.37-	0.021-

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.9: ضبط القص المؤدي إلى المفصل الثاني

V (K)	العقدة	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	لدن مفصل؟	$M_P/M_{eq,Tot}$
01	N1	5.65-	282	0.00	1,955	19,603	20,519	نعم	1.05
	N2	5.65-	112	0.09-	1,955	672-	7,789	لا	11.59-
	N3	5.65-	0	0.22-	1,955	14,186-	14,694	نعم	1.04-
	N4	5.65	435	0.00	3,045	19,744	22,781	لا	1.15
	N5	5.65	4	0.12-	3,045	781-	9,092	لا	11.64-
	N6	5.65	284-	0.21-	3,045	14,466-	16,697	لا	1.15-

25-23 مفصل واحد



شكل 68.22: النموذج المرن المعدل بعد تشكل المفصل اللدن الثاني

جدول 68.10: نتائج التحليل؛ مفصلان

(K) V	العقدة	(K) P_{eq}	(K-ft) M^3_{EQ}	(in) Δ
1	N1	0.755-	0.00	0.000
	N2	0.755-	0.00	0.019-
	N3	0.755-	0.00	0.031-
	N4	0.755	60.61	0.000
	N5	0.755	0.63	0.017-
	N6	0.755	39.38-	0.030-

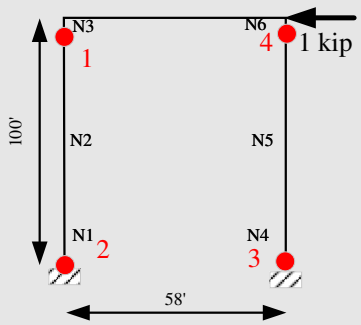
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.11: ضبط القص المؤدي إلى المفصلين الثالث والرابع

V (K)	العقدة	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K-ft)	Δ (in)	P_{total} (K)	$M_{EQ,total}$ (K-ft)	M_p (K-ft)	لدن مفصل؟	$M_P/M_{eq,total}$
04	N1	30.18-	0	0.00	1,925	19,603	20,457	نعم	1.04
	N2	30.18-	0	0.74-	1,925	672-	7,753	لا	11.54-
	N3	30.18-	0	1.24-	1,925	14,186-	14,638	نعم	1.03-
	N4	30.18	2,425	0.00	3,075	22,169	22,844	نعم	1.03
	N5	30.18	25	0.67-	3,075	755-	9,128	لا	12.08-
	N6	30.18	1,575-	1.20-	3,075	16,041-	16,753	نعم	1.04-

26-27 مفصلان

27 آلية الانهيار (بأربعة مفاصل) أصبحت لدينا الآن آلية، الشكل 68.23، ونحتاج إلى جمع الأحمال.



شكل 68.23: آلية الانهيار مع تشكل 4 مفاصل لدنة

في الجدول 68.12:

$$
\begin{aligned}
V_{tot} &= 670 + 10 + 40 = 720 \\
P^{N6}_{eq,Tot} &= 539.6 + 5.65 + 30.18 = 575.49 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 19,310 + 435 + 2,425 = 22,169 \\
\Delta^{N5}_{Tot} &= -5.19 - 0.12 - 0.67 = -5.97 \\
P^{N5}_{Tot} &= 2,500 + 575.49 = 3,075 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 22,169 \text{ from last analysis}
\end{aligned}
$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.12: مجموع القوى والعزوم والإزاحات عند الفشل

V_{Tot}	العقدة	$P_{EQ,Tot}$	$M_{EQ,Tot}$	Δ_{Tot}	P_{Tot}	$M_{EQ,Tot}$	M_p
027	N1	575.49-	19,603	0.00	1,925	19,603	20,457
	N2	575.49-	672-	6.02-	1,925	672-	7,753
	N3	575.49-	14,186-	10.25-	1,925	14,186-	14,638
	N4	575.49	22,169	0.00	3,075	22,169	22,844
	N5	575.49	755-	5.97-	3,075	755-	9,128
	N6	575.49	16,041-	10.19-	3,075	16,041-	16,753

28 **فشل الركيزة** وُصف أعلاه التشكل التدريجي للمفاصل اللدنة الذي يؤدي في النهاية إلى آلية عمود. ويتناول (AASHTO, Seismic, 2011, §4.7) مواضع تشكل المفاصل اللدنة. وفي هذا التحليل، يُتوقع تطور المفاصل اللدنة عند أعلى الركيزة وأسفلها.

ومن ثم، يتوافق التصميم مع مواصفات AASHTO.

29 **إزاحة أعلى العمود عند الفشل** من الجدول 68.12 تقع إزاحة أعلى العمود عند العقدة 3 وتساوي 10.25 inch (المقابلة لـN3).

30 **مقارنة تحليل الدفع بالحسابات اليدوية** أعطت الحسابات اليدوية $\Delta_{tot} = 17.7$ inch من المعادلة 68.27،

بينما أعطى تحليل الدفع $\Delta_{tot} = 10.19$ inch.

من الواضح أن الحساب اليدوي أكثر تحفظاً.

31 **تقييم تصميم الركيزة** تبلغ سعة القص 360 kip ($V_{tot}/2$kips)، وهي تتجاوز بكثير حمل التصميم $V_{2,500}$=50 kip. وبالمثل، تتجاوز سعات العزم ($M_{eq,total}$) المحسوبة في تحليل الدفع بكثير أحمال التصميم المحسوبة في الجزء 3 (M_{2500}=2,000 kip-ft).

لذلك التصميم كافٍ.

---

[a] أجرينا في الصف تمريناً مماثلاً، وإن كان بمعادلة أبسط قليلاً (Desayi, 1964) من معادلة Mander ولمقاطع مستطيلة. ويمكن توسيع الكود بسهولة لإجراء التحليلات في هذا القسم.

[b] النظرية 1st: *يساوي تغير الميل بين نقطتين مساحة مخطط الانحناء (M/EI) بينهما.*
النظرية 2nd (المطبقة هنا): *تساوي الإزاحة بين نقطتين عزم المساحة تحت مخطط الانحناء بالنسبة إلى نقطة الشكل المتشوه.*

68.4.2 التحليل الديناميكي المتزايد (IDA)

القسم الآتي منقول من *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* بقلم Mahdavi, 2023.

35 التحليل الديناميكي المتزايد (IDA) طريقة لتقييم الاستجابة الإنشائية تحت التحميل الزلزالي. في هذا النهج، يُقاس كل سجل للحركة الأرضية منهجياً إلى مستويات متعددة من مقياس الشدة (IM)، ويُحسب معلم الطلب الهندسي (EDP) لكل مستوى مقاس (Vamvatsikos **and** Cornell, 2002).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

36 ثم يُنشأ منحنى IDA بربط قيم EDP عند مستويات الشدة المختلفة، وغالباً باستخدام تقريب الشرائح (Vamvatsikos **and** Cornell, 2004).

37 تُستخدم هذه الطريقة على نطاق واسع في تقييم الهشاشة الزلزالية، إذ تتيح للباحثين تحديد احتمال الانهيار عند مستويات شدة مختلفة. وتضمن حدوث الانهيار الإنشائي عند شدات مرتفعة بما يكفي، مما يجعلها مفيدة للتقييم الزلزالي الاحتمالي.

38 غير أن قياس الحركات الأرضية قد يشوه محتواها الترددي، مؤدياً إلى أشكال غير واقعية للسجلات قد تؤثر في تنبؤات الاستجابة الإنشائية (Haselton **andothers,** 2011).

39 لتقييم احتمال الانهيار، يركز IDA على حساب:

$$P\left[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im\right]$$

40 توجد ثلاثة مناهج رئيسية لتقدير الهشاشة باستخدام IDA:

الهشاشة القائمة على سعة EDP بنتائج IDA الكاملة يُجرى IDA برسم منحنيات IDA وتعريف الانهيار عندما يتجاوز الطلب، EDP_d، السعة الإنشائية، EDP_c (Zareian **andothers,** 2010). ويُحسب احتمال الانهيار عند مستوى شدة معين كما يأتي:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{IM}=im]=\sum_{\text{all }edp_c}P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{EDP}_c=edp_c,\mathrm{IM}=im]P[\mathrm{EDP}_c=edp_c]$$

يوضح الشكل 68.24a قيم سعة EDP لسجلات حركة أرضية مختلفة، إلى جانب طلب EDP عند مستويين محددين من IM. وبحساب احتمالات الانهيار لكل مستوى IM وتمثيل النتائج، يمكن الحصول على منحنى هشاشة تجريبي، ثم تقريبه باستخدام دالة توزيع تراكمية لوغاريتمية طبيعية (CDF).

الهشاشة القائمة على سعة IM بنتائج IDA الكاملة يُحدد مقياس شدة سعة الانهيار، IM_{cap}، بوصفه النقطة المقاربة على كل منحنى IDA (الشكل 68.24b). ويُعطى احتمال الانهيار بالعلاقة:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{IM}_{cap}<\mathrm{IM}=im]$$

تُستخرج دالة الهشاشة بتقريب CDF لوغاريتمية طبيعية لبيانات الانهيار. وتُستخدم عادةً طريقتان إحصائيتان لتقدير المعلمين اللوغاريتميين الطبيعيين، η وβ:

طريقة العزوم (MM) يقدّر نهج MM القيمة η (الوسيط) وβ (الانحراف المعياري اللوغاريتمي) بمطابقة عزوم التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي مع بيانات الانهيار:

$$\hat{\eta}=\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_T}\ln(\mathrm{IM}_{cap_i})}{N_T}\right),$$

$$\hat{\beta}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_T}\left[\ln(\mathrm{IM}_{cap_i})-\ln(\hat{\eta})\right]^2}{N_T-1}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث N_T هو العدد الكلي لسجلات الحركة الأرضية.

تقدير الإمكان الأعظم (MLE) يقدّر MLE القيمتين η وβ بتعظيم دالة لوغاريتم الإمكان:

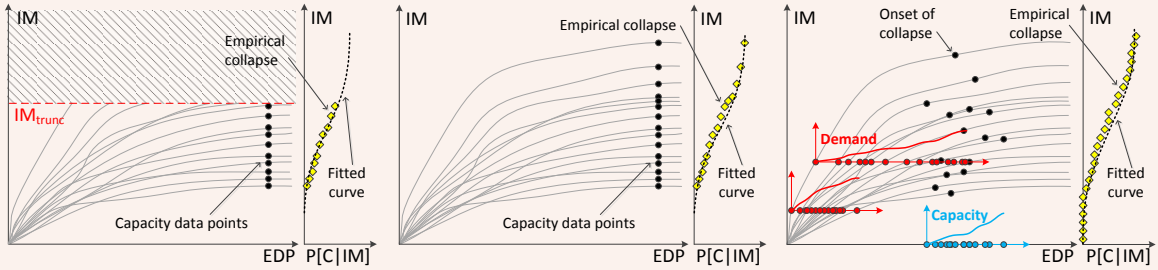
$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{N_T} \ln\left\{\phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right\}$$

يوفر MLE عادةً تقديرات أدق للمعلمات، ولا سيما لمجموعات البيانات الصغيرة.

الهشاشة القائمة على سعة IM بنتائج IDA المبتورة في IDA المبتور، يُقصر مستوى IM الأقصى على IM_{trunc}، أي إن بعض السجلات لا تصل إلى الانهيار (الشكل 68.24c). وينتج عن ذلك بيانات مراقبة، مما يتطلب دالة إمكان معدلة:

$$\mathcal{L}(\eta\,,\beta\,;\,\mathbf{IM}_{cap}\,,\text{IM}_{trunc}) = \left(\prod_{i=1}^{N_C}\phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right) \times \left(1-\Phi\left(\frac{\ln(\text{IM}_{trunc}) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right)^{N_T-N_C}$$

حيث N_C عدد السجلات المؤدية إلى الانهيار. وتُقدر المعلمات η وβ باستخدام تقدير الإمكان الأعظم مع البيانات المراقبة (MLECD) (Baker, 2015)، بما يضمن تقييماً دقيقاً للهشاشة لمجموعات البيانات المبتورة.



(a) قائم على سعة EDP؛ IDA كامل (b) قائم على سعة IM؛ IDA كامل (c) قائم على سعة IM؛ IDA مبتور

شكل 68.24: منحنيات مفاهيمية لهشاشة الانهيار قائمة على طريقة IDA

68.4.3 تحليل الشرائح المتعددة (MSA)

القسم الآتي منقول من Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

41 على خلاف التحليل الديناميكي المتزايد (IDA)، الذي تُقاس فيه مجموعة ثابتة من الحركات الأرضية تدريجياً، يجري تحليل الشرائح المتعددة (MSA) تحليلات عند عدة مستويات شدة محددة منفصلة (SILs).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

42 عندما تُجرى التحليلات لثلاثة مستويات SIL أو أكثر، تسمى الطريقة MSA (Cornell **and** Jalayer, 2002). وإذا استُخدم مستوى SIL واحد أو مستويان فقط، يسمى النهج تحليل شريحة مفردة (SSA) وتحليل شريحتين (DSA)، على التوالي.

43 يوفر MSA مرونة أكبر مقارنة بـIDA. ولا يلزم أن تكون الفواصل بين مستويات SIL المتعاقبة منتظمة؛ ففي الشكل 68.25a مثلاً، يكون التباعد بين SIL_2 وSIL_3، وكذلك بين SIL_6 وSIL_7، أكبر منه في الحالات الأخرى. ويمكن أن يُعزى هذا التباين إلى ترددات التجاوز المحددة المطلوبة للتحليل.

44 كما يمكن أن يتباين عدد الحركات الأرضية المسندة إلى كل SIL، وقد تختلف الحركات المختارة لكل شريحة، ولا سيما عند استخدام طيف شرطي للاختيار.

45 عدد مستويات SIL اختياري، لكن زيادته تحسن دقة تقريب منحنى الهشاشة على حساب جهد حسابي إضافي. وفي الشكل 68.25a، تُجرى التحليلات لثمانية مستويات SIL، لكن يمكن إضافة المزيد حتى تصل جميع الحركات الأرضية إلى الانهيار.

46 نظراً إلى اختلاف الحركات الأرضية المختارة بين الشرائح، قد يساوي احتمال الانهيار التجريبي لـSIL_i احتمال SIL_{i+1} أو يتجاوزه. وفي الشكل 68.25a، يكون احتمال الانهيار التجريبي لـSIL_4 أعلى منه لـSIL_5، بينما يتطابق عدد نقاط بيانات الانهيار في SIL_7 وSIL_8.

تقدير الوسيط والانحراف المعياري اللوغاريتمي

47 يمكن تقدير الوسيط والانحراف المعياري اللوغاريتمي لدالة الهشاشة بإحدى الطرق الثلاث الآتية.

مجموع مربعات الخطأ (SSE) تقلل هذه الطريقة مجموع مربعات الأخطاء بين كسور الانهيار المرصودة والاحتمالات التي تتنبأ بها دالة الهشاشة:

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmin} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_{C_i}}{N_{T_i}} - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right)^2$$

حيث N_{C_i} وN_{T_i} عدد حالات الانهيار والعدد الكلي للحركات الأرضية عند $IM = im_i$، على التوالي، وm عدد مستويات IM.

تقدير الإمكان الأعظم (MLE) بافتراض استقلال أحداث الانهيار وعدم الانهيار عند كل SIL، يمكن استخدام توزيع ثنائي الحدين. ودالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ثنائي الحدين باحتمال p هي:

$$\mathcal{L}(p\,;\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{u_i}{v_i} p_i^{v_i} \left(1-p_i\right)^{u_i - v_i}$$

حيث يمثل v_i عدد حالات الانهيار في u_i تجربة. ويمكن كتابة دالة الإمكان لـMSA كما يأتي:

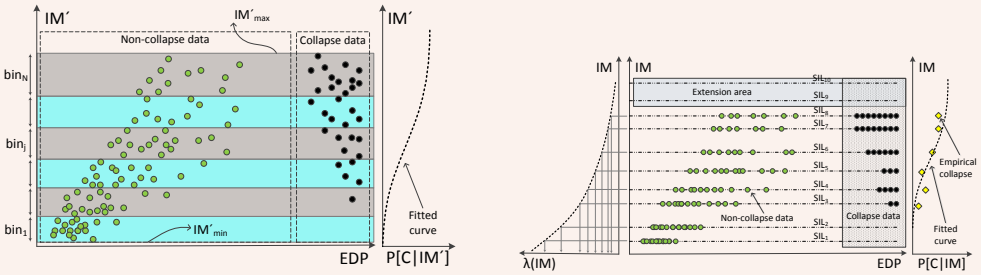
$$\mathcal{L}(\eta,\beta;\,\mathbf{IM},\mathbf{N_T},\mathbf{N_C}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right)^{N_{C_i}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right]^{N_{T_i} - N_{C_i}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

غالباً ما يكون تعظيم لوغاريتم دالة الإمكان أنسب، مما يعطي المعلمات المقدرة (Baker, 2015):

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{m} \left(\ln\binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} + N_{C_i} \ln\left(\Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right) + (N_{T_i} - N_{C_i}) \ln\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta}\right)\right)\right)$$

الانحدار الخطي في الفضاء المحول (LRTS) تُعرف هذه أيضاً بالطريقة B في Porter, Kennedy **and** Bachman, 2007، وتُستخدم عندما تُختار الحركات الأرضية وفق مقياس شدة بديل (IM′). وفي هذه الحالات، لا يعود SSE وMLE قابلين للتطبيق، لأن نقاط بيانات الانهيار لا تكون مقيدة بمستويات SIL محددة مسبقاً، بل تنتشر في فضاء IM′ (الشكل 68.25b). ويتألف الإجراء من تحديد قيم IM'_i لكل نقطة بيانات، وتقسيمها إلى N فئة حيث $N = \lfloor\sqrt{M}\rfloor$، وتحديد متوسط مقياس الشدة لكل فئة. ثم يُقرب خط انحدار في الفضاء المحول للحصول على η وβ اللذين يحددان دالة الهشاشة.



(a) قائم على IM الأساسي (b) قائم على IM′ البديل

شكل 68.25: منحنيات مفاهيمية لهشاشة الانهيار قائمة على طريقة MSA

68.4.4 تحليل السحابة (CLA)

القسم الآتي منقول من Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

48 تحليل السحابة (CLA) إجراء يُعرّض فيه المنشأ لمجموعة كبيرة نسبياً من الحركات الأرضية غير المقاسة أو كما سُجلت، ويحلل عددياً.

49 إذا اختيرت سجلات الحركة الأرضية من فئة محددة مسبقاً، فإنها تمثل سيناريو زلزال يتميز بـ(M_{bin}, R_{bin})، حيث يقابل M_{bin} وR_{bin} قدر الفئة ومسافتها الممثلين، على التوالي (Jalayer, 2003).

50 تُنشأ من نتائج التحليل العلاقة بين معلم الطلب الهندسي (EDP) ومقياس الشدة (IM)، فتتكون ما يسمى **استجابة السحابة**.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

[51] يُستخدم CLA غالباً مع تحليل الطلب الزلزالي الاحتمالي (PSDA). ومن الافتراضات المقبولة على نطاق واسع أن نقاط البيانات المنفصلة المستخرجة من CLA تُظهر اتجاهاً خطياً في الفضاء اللوغاريتمي، يقابله قانون قوة في الفضاء الحسابي (Jankovic **and** Stojadi-novic, 2004; Ramamoorthy, Gardoni **and** Bracci, 2006; Padgett, Nielson **and** DesRoches, 2008):

$$\eta_{\text{EDP|IM}} = a \cdot \text{IM}^b \tag{68.35}$$

حيث a وb ثابتا انحدار، و$\eta_{\text{EDP|IM}}$ القيمة الوسيطة لـEDP في ظل IM. ويُقدر الانحراف المعياري اللوغاريتمي لـEDP في ظل IM، ويرمز إليه بـ$\beta_{\text{EDP|IM}}$، كما يأتي:

$$\beta_{\text{EDP|IM}} = \sigma_{\ln(\text{EDP|IM})} \approx \sqrt{\frac{\sum \left(\ln(edp_i) - \ln(a \cdot \text{IM}^b)\right)^2}{n-2}} \tag{68.36}$$

حيث n عدد التحليلات العابرة اللاخطية.

68.4.5 تحليل زمن التحمل (ETA)

القسم الآتي منقول من Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

تحليل زمن التحمل (ETA) إجراء دفع ديناميكي يُستخدم لتقدير الأداء الزلزالي للمنشآت عند تعرضها لإثارات متصاعدة مصممة مسبقاً (Estekanchi, Vafai **and** Sadeghazar, 2004). وتُصمم دوال التسارع المحاكية لتهز المنشأ تدريجياً من **مستوى إثارة منخفض** تبقى عنده الاستجابة مرنة، إلى **مستوى إثارة متوسط** يبدأ عنده السلوك اللاخطي، وأخيراً إلى **مستوى إثارة مرتفع** يصل عنده المنشأ إلى الفشل. ويُلتقط هذا التطور الكامل للاستجابة ضمن تحليل **واحد** للسجل الزمني.

توليد دوال تسارع زمن التحمل (ETAFs)

يكمن تحدٍ رئيسي في ETA في توليد *دوال تسارع زمن التحمل* (*ETAFs*) (Nozari **and** Estekanchi, 2011)، التي حسّنها لاحقاً Mashayekhi **and** Estekanchi, 2013. وتتألف عملية إنتاج ETAFs من الخطوات الآتية:

الخطوة 1: توليد دالة تسارع عشوائية مستقرة تُولد دالة التسارع، ويرمز إليها بـ$Z(t)$، باستخدام $\delta t = 0.01$، و$N_{pnt} = 2^{11}$ عقدة، وتسارع أرضي أقصى (PGA) = $1.0g$. وعدد النقاط، N_{pnt}، اختياري.

الخطوة 2: التحويل إلى مجال التردد طبّق تحويل فورييه للحصول على:

$$Z(i\omega) = \mathcal{F}(Z(t)),$$

حيث i الوحدة التخيلية وω التردد.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الخطوة 3: تطبيق دالة ترشيح تُطبق دالة ترشيح لتشكيل المحتوى الترددي بحيث يشبه الحركات الأرضية الحقيقية (Clough **and** Penzien, 1993):

$$A\left(i\omega\right)=\frac{1+2i\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2+2i\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}}\ \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2+2i\xi_2\frac{\omega}{\omega_2}}\ Z\left(i\omega\right)$$

يمثل الحد الأول مرشح تمرير منخفض، بينما يمثل الثاني مرشح تمرير عالٍ. وتقابل المعلمات ω_1 وξ_1 وω_2 وξ_2 ترددات هذه المرشحات ومعاملات تخميدها.

الخطوة 4: ضبط المحتوى الترددي لمطابقة الطيف المستهدف تُجرى عدة تكرارات لتعديل المحتوى الترددي، بما يضمن توافق طيف الاستجابة المولد مع الطيف المستهدف:

$$A^{new}\left(i\omega\right)=A^{old}\left(i\omega\right)\frac{S_a^{\text{trg}}(\omega)}{S_a^{\text{gen}}(\omega)}$$

حيث $S_a^{\text{trg}}(\omega)$ الطيف المستهدف (من أكواد البناء أو تحليل الخطر الزلزالي الاحتمالي)، و$S_a^{\text{gen}}(\omega)$ الطيف المولد.

الخطوة 5: تعديل السجل الزمني للتسارع تُطبق دالة منحنى خطي، $l(t)=t/t_{\text{trg}}$، على السجل الزمني للتسارع لضمان التصاعد مع الزمن. والمعلم t_{trg}، الذي يساوي عادةً 10 ثوانٍ، اختياري.

الخطوة 6: تحسين أطياف الاستجابة تُعدّل أطياف استجابة التسارع والإزاحة باستخدام دالة تحسين في المجال الزمني:

$$\underset{a_g}{minF}(a_g)=\int_0^{T_{max}}\int_0^{t_{max}}\left\{\left[S_a(T,t)-\frac{t}{t_{\text{trg}}}S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2+\chi_0\left[S_d(T,t)-\frac{t}{t_{\text{trg}}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2\right\}$$

حيث a_g هي ETAF المطلوبة، وχ_0 معلم وزن، و$t_{\max}$ و$T_{\max}$ الزمن والفترة القصويان، على التوالي، في عملية التحسين. ويظهر نموذج من ETAF في الشكل 68.26a.

اشتقاق دالة السعة

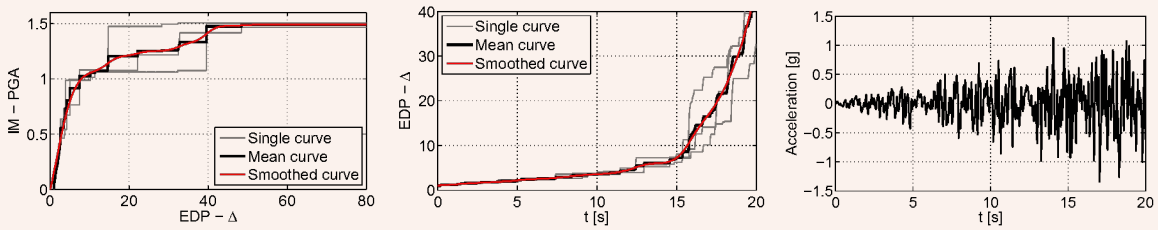
للحصول على دالة سعة، يجب أولاً تحديد منحنى ETA (الشكل 68.26b). ويمثل منحنى ETA القيمة المطلقة القصوى لـEDP مع الزمن:

$$\Omega\left(\text{EDP}(t)\right)\equiv\max\left\{\text{Abs}\left(\text{EDP}(\tau):\tau\in[0,t]\right)\right\}$$

ثم يُحوّل معلم الزمن إلى IM، مستفيداً من العلاقة المباشرة بين الزمن والتسارع (الشكل 68.26a). وأخيراً، تُحوّل إحداثيات **EDP-IM** إلى إحداثيات **IM-EDP**، فتنتج دالة سعة متدرجة. ويمكن تنعيم هذه الدالة لاحقاً (الشكل 68.26c).

نظراً إلى أن ETAF *الواحدة* تخضع لـchap:trustregion بسبب طبيعتها العشوائية، يُستخدم عادةً متوسط ثلاث ETAFs مختلفة لتحسين الموثوقية (Hariri-Ardebili **and** Mirzabozorg, 2014; Hariri-Ardebili **and** Saouma, 2015).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(c) دالة السعة (b) منحنى ETA (a) عينة ETAF

شكل 68.26: توليد دالة السعة القائمة على ETA

68.4.6 الخلاصة

52 يمكن إجراء تحليل الهشاشة الزلزالية بمنهجيات مختلفة، لكل منها مزاياها وقيودها. وقد ناقش هذا الفصل خمسة مناهج واسعة الاستخدام: تحليل الدفع التقليدي (POA)، والتحليل الديناميكي المتزايد (IDA)، وتحليل الشرائح المتعددة (MSA)، وتحليل السحابة (CLA)، وتحليل زمن التحمل (ETA).

53 يقدم الجدول 68.13 مقارنة بين هذه المنهجيات، بينما يلخص الشكل 68.28 خصائصها وتطبيقاتها الرئيسية.

تحليل الدفع التقليدي (POA)

54 تحليل الدفع التقليدي (POA) طريقة *ساكنة* تُستخدم لتقدير الاستجابة الزلزالية للمنشآت تحت أحمال جانبية رتيبة متزايدة.

55 تفترض الطريقة إمكان تمثيل الاستجابة الإنشائية بنمط تحميل ثابت واحد، يعتمد عادةً على شكل النمط الأساسي. ومع أن POA كفء حسابياً وواسع الاستخدام في التصميم الزلزالي القائم على الأداء، فإنه لا يمثل *تأثيرات الأنماط العليا* ولا *تباين التحميل الزلزالي الديناميكي*.

56 يوفر POA تقديراً لمنحنى السعة، لكنه يفتقر إلى قدرات التقييم الاحتمالي.

التحليل الديناميكي المتزايد (IDA)

57 IDA طريقة *ديناميكية* تُقاس فيها سجلات الحركة الأرضية تدريجياً إلى مستويات متعددة من مقياس الشدة (IM)، وتُحسب قيم معلم الطلب الهندسي (EDP) المقابلة.

58 يتيح منحنى *IDA*، المنشأ باستخدام هذه النتائج، إجراء تقييم زلزالي احتمالي بتحديد احتمالات الانهيار عند مستويات IM مختلفة.

59 يوضح الشكل 68.24 مناهج مختلفة لتقدير الهشاشة قائمة على IDA. ومع أن IDA يوفر بيانات شاملة للاستجابة الإنشائية، فله قيود، مثل احتمال تشوه المحتوى الترددي للحركة الأرضية عند قياس السجلات.

تحليل الشرائح المتعددة (MSA)

60 يحسن MSA نهج IDA بإجراء تحليلات زلزالية عند عدة *مستويات شدة منفصلة (SILs)* بدلاً من قياس السجلات باستمرار.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

61 يعزز هذا النهج المتانة الإحصائية ويتيح تقديراً أدق للهشاشة. وعلى خلاف IDA، لا يفترض MSA مجموعة ثابتة من الحركات الأرضية؛ إذ يمكن استخدام سجلات مختلفة عند مستويات IM مختلفة.

62 تتضح مرونة MSA في الشكل 68.25 الذي يبين كيفية اختيار مستويات SIL. وتُستخرج احتمالات الانهيار التجريبية عند كل SIL، ويمكن تطبيق تقنيات انحدار مختلفة—مثل مجموع مربعات *الأخطاء (SSE)*، وتقدير *الإمكان الأعظم (MLE)*، والانحدار *الخطي في الفضاء المحول (LRTS)*—لتقدير دالة الهشاشة.

تحليل السحابة (CLA)

63 يختلف CLA عن IDA وMSA بتعريض المنشأ لـمجموعة كبيرة من *الحركات الأرضية غير المقاسة*، بدلاً من زيادة مستويات IM تدريجياً.

64 ينتج عن ذلك *استجابة سحابية*، حيث يُمثل EDP مقابل IM لجميع السجلات. والميزة الرئيسية لـCLA أنه يمثل *التباين الطبيعي* في سجلات الحركة الأرضية دون تعديلها اصطناعياً.

65 يُفترض غالباً أن العلاقة بين EDP وIM تتبع قانون قوة، كما هو موضح في المعادلة 68.35.

66 ثم يُقدر *الانحراف المعياري اللوغاريتمي لـEDP* في ظل *IM* باستخدام المعادلة 68.36، بما يوفر نهجاً كفؤاً وإن كان مبسطاً لتقييم الهشاشة الزلزالية.

تحليل زمن التحمل (ETA)

67 ETA طريقة دفع ديناميكي تُعرّض فيها المنشآت *لإثارات متصاعدة مصممة مسبقاً* بدلاً من سجلات زلازل حقيقية.

68 تُولد دوال *تسارع زمن التحمل (ETAFs)* لزيادة الشدة الزلزالية تدريجياً، بما يتيح تقييم السلوك الإنشائي عبر حالات المرونة، واللاخطية، والفشل ضمن تحليل واحد للسجل الزمني. وتُفصّل عملية توليد ETAFs في الشكل 68.26 الذي يوضح كيفية تعديل السجلات الزمنية للتسارع لتطابق الأطياف المستهدفة وتحسن خصائص الاستجابة.

69 المخرج النهائي هو *دالة سعة* تصف استجابة المنشأ مع الزمن وتوفر معلومات الهشاشة بصيغة IM-EDP.

المقارنة والتطبيقات

70 تخدم كل من هذه المنهجيات الخمس أغراضاً مختلفة وفق مستوى الدقة، والكلفة الحسابية، والافتراضات المعنية. ويقدم الشكل 68.27 نظرة مقارنة عامة للتحليلات العابرة اللاخطية، موضحاً متطلبات بيانات الإدخال والاستجابات الإنشائية المتوقعة للمناهج المختلفة.

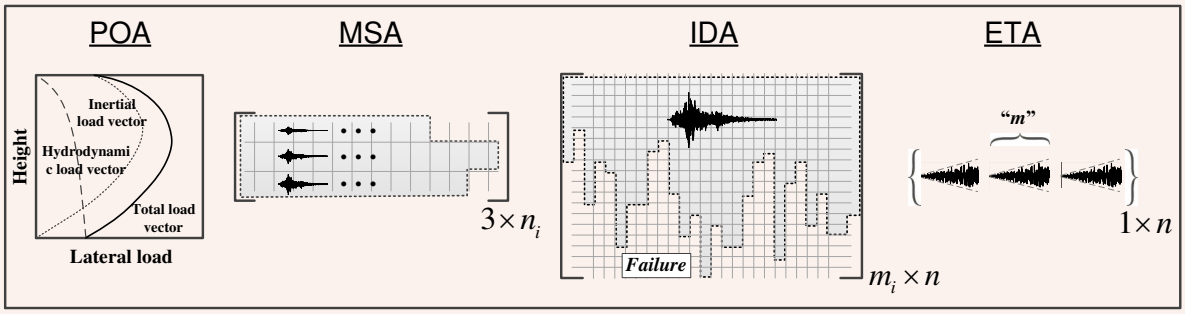
71 بالإضافة إلى ذلك، يقدم الجدول 68.13 مقارنة متجاورة بين POA وIDA وMSA وCLA وETA.

الشكل 68.28

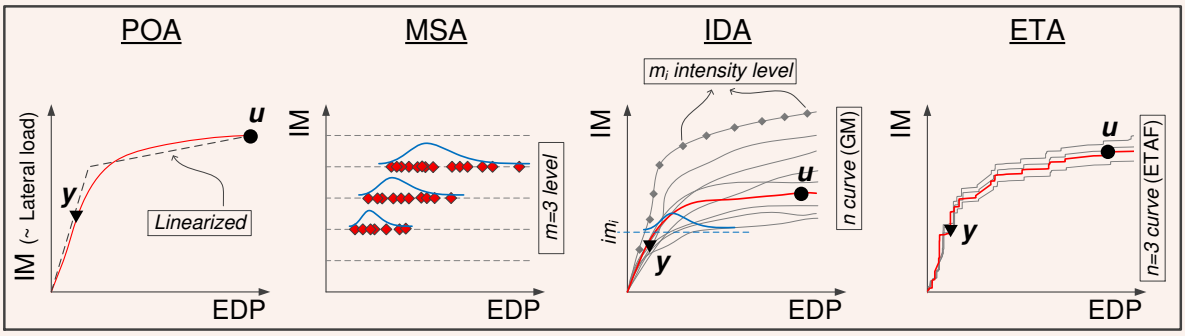
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 68.13: مقارنة طرائق التحليل الإنشائي الزلزالي

الطريقة	النوع	بيانات الإدخال	الكلفة الحسابية	تحليل احتمالي	القيود
POA	ساكن	منحنى دفع واحد	منخفضة	لا	يهمل التأثيرات الديناميكية، ولا يمثل التباين
IDA	ديناميكي	حركات أرضية مقاسة	مرتفعة	نعم	تشوه المحتوى الترددي بسبب القياس
MSA	ديناميكي	مستويات IM متعددة، سجلات غير مقاسة	متوسطة	نعم	يتطلب حركات أرضية متعددة لكل SIL
CLA	ديناميكي	مجموعة كبيرة من السجلات غير المقاسة	متوسطة	نعم	يفترض اتجاهاً لوغاريتمياً خطياً في علاقة EDP-IM
ETA	ديناميكي	إثارات مولدة اصطناعياً	متوسطة	لا	قد لا تطابق الإثارة الاصطناعية السجلات الحقيقية



(a) أنواع الإدخال الممكنة المختلفة للتحليلات العابرة اللاخطية (باستثناء POA)



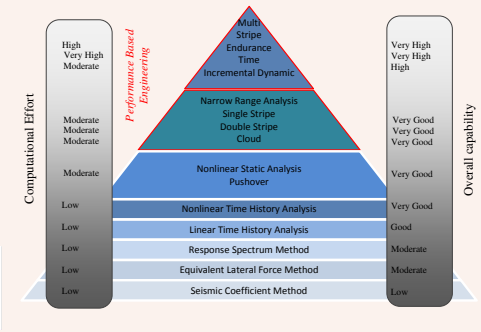
(b) نتيجة التحليل لأغراض التقييم

شكل 68.27: إبراز أربع استراتيجيات مختلفة (Hariri-Ardebili, Saouma **and** Porter, 2016)

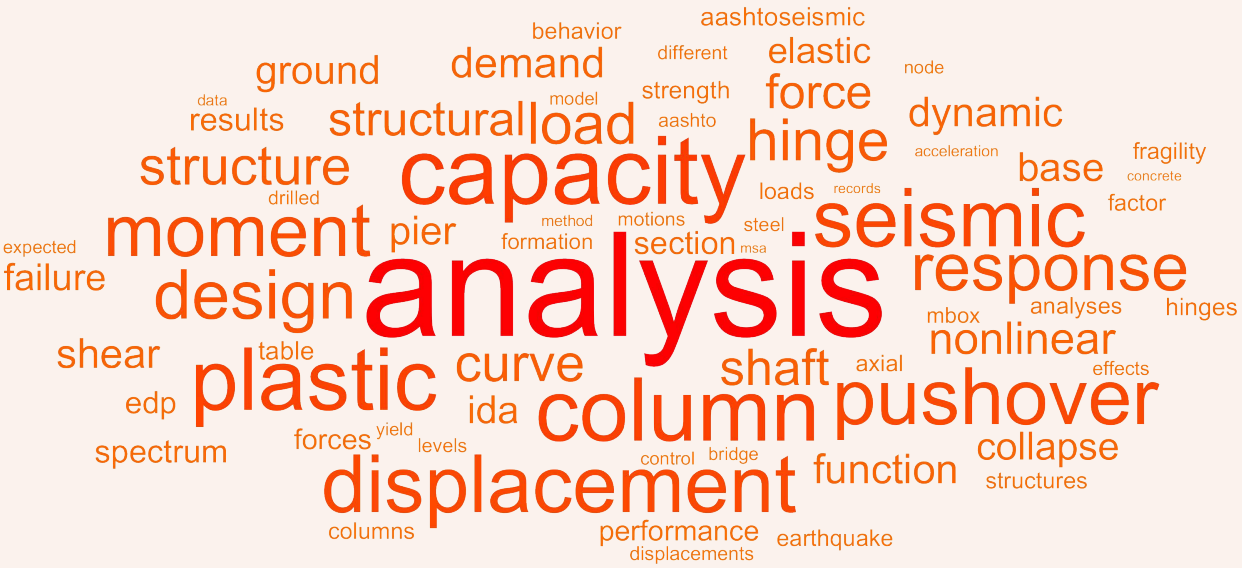
68.5 ما التالي؟

72 في الفصل التالي (69)، سنقيّم كمياً التحليل الزلزالي اللاخطي المناقش في هذا الفصل.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 68.28: التعقيدات النسبية للتحليل الزلزالي



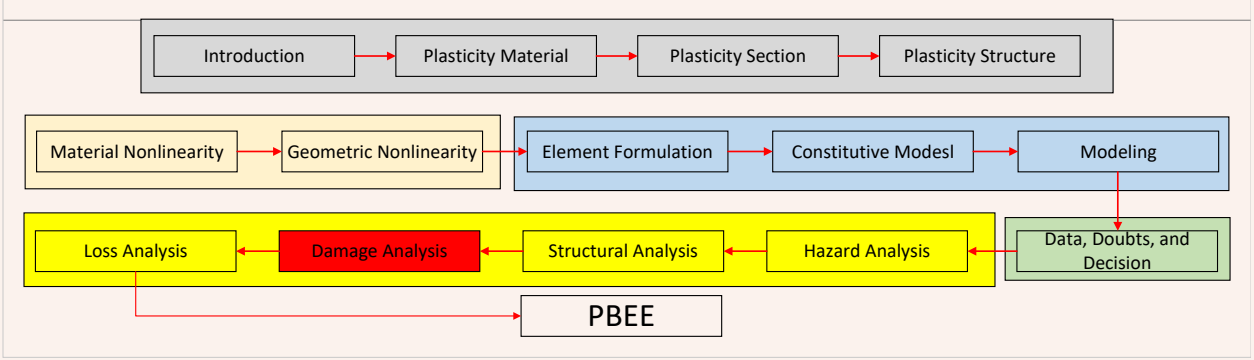
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

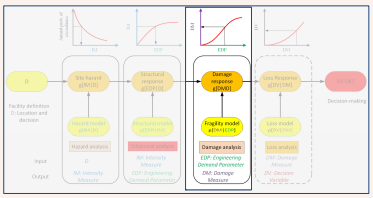
69 تحليل الضرر

ملخص

يعرض هذا الفصل إطاراً لتحديد الضرر الإنشائي الناجم عن الزلازل وتقييمه كمياً، بدمج المناهج الحتمية والاحتمالية. وانطلاقاً من مفهوم الحالات الحدية—وهي العتبات الفاصلة بين الأداء المقبول وغير المقبول—يستكشف الفصل تسلسلاً هرمياً يمتد من حالة التشغيل إلى حالة منع الانهيار. وتُقدم مؤشرات ضرر متنوعة لكل من التحليل الخطي (نسب الطلب إلى السعة، والمدة غير المرنة التراكمية) والتحليل اللاخطي (المؤشرات القائمة على التشوه والطاقة). ويقر الانتقال إلى التقييم الاحتمالي بأوجه عدم اليقين في الطلب الزلزالي والسعة الإنشائية، مستخدماً معلمات الطلب الهندسي بدائل كمية لحالات الضرر. وتُعرض العتبات المعتمدة لحدود الانجراف، ومؤشرات الضرر، ونسب الطلب إلى السعة مع مستويات الأداء المقابلة لها. ومن خلال وضع تحليل الضرر ضمن الإطار الأوسع لهندسة الزلازل القائمة على الأداء، يوضح الفصل كيف تترجم هذه المفاهيم التقنية الاستجابات الإنشائية المعقدة إلى تقييمات ذات معنى لاتخاذ قرارات مستنيرة.

69.1 مقدمة 2107
69.2 الحالات الحدية 2108
69.2.1 التسلسل الهرمي للحالات الحدية 2108
69.2.2 الإطار الاحتمالي 2108
69.2.3 التطبيق في إطار PBEE 2109
69.2.4 المعايرة والتحقق 2109
69.2.5 اعتبارات متعددة الأهداف . . . 2109
69.2.6 الارتباط بمؤشرات الضرر 2110
69.3 مؤشرات الضرر 2110
69.3.1 مؤشرات الضرر ومعايير الأداء . 2110
69.3.2 الانتقال إلى التقييم الاحتمالي للضرر 2111
69.3.3 التمثيل الاحتمالي للضرر 2112
69.3.4 مقاييس الضرر ومعلمات الطلب الهندسي (EDP) 2113
69.3.5 chap:trustregion في تقييم الضرر 2113
69.3.6 مقاييس الضرر الكمية 2113
69.4 الأداء 2115
69.4.1 إطار الهندسة القائمة على الأداء 2115
69.4.2 مستويات الأداء ومعايير القبول 2117
69.4.3 دمج الحالات الحدية ومؤشرات الضرر ومستويات الأداء 2118
69.5 الانتقال إلى منحنيات الهشاشة وتقييم المخاطر 2119





الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

69.1 مقدمة

1 يمثل تقييم الضرر الإنشائي الواجهة الحاسمة بين التحليل الهندسي واتخاذ القرار في التصميم والتدعيم الزلزاليين. ومع أن تقنيات التحليل اللاخطي المتقدمة توفر رؤى للسلوك الإنشائي، فلا بد من تفسيرها باستخدام مقاييس الضرر ومعايير الأداء لتوجيه قرارات هندسية ذات معنى. ويعرض هذا الفصل إطاراً منهجياً لتحليل الضرر في سياق هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)، يدمج المناهج الحتمية والاحتمالية لتحديد آثار التحميل الزلزالي في الأنظمة الإنشائية كمياً.

2 يقوم أساس تحليل الضرر على مفهوم الحالات الحدية—وهي عتبات محددة بوضوح تفصل الأداء المقبول عن غير المقبول. وتنشئ هذه الحالات تسلسلاً هرمياً لأهداف الأداء يمتد من القدرة التشغيلية الكاملة إلى منع الانهيار. وبتعريف هذه الحدود، ننشئ إطاراً منظماً لتقييم الاستجابة الإنشائية قياساً إلى توقعات أصحاب المصلحة والمتطلبات التنظيمية. وتقر المعالجة الاحتمالية للحالات الحدية بأوجه عدم اليقين الكامنة في الأحداث الزلزالية والسلوك الإنشائي، فتتيح تقييماً مستنيراً بالمخاطر بدلاً من حكم ثنائي بالنجاح أو الفشل.

3 تعمل مؤشرات الضرر أدوات كمية تقيس مدى اقتراب المنشأ من تجاوز حالاته الحدية المحددة. ففي التحليلات الخطية المرنة، توفر مؤشرات مثل نسب الطلب إلى السعة (DCR)، والمدة غير المرنة التراكمية (CID)، والمساحة غير المرنة التراكمية (CIA) رؤى في مقدار الضرر المحتمل ومدته ونطاقه. وفي السياقات اللاخطية، تمثل مؤشرات أكثر تطوراً الآثار المتراكمة للخضوع، والتشقق، وتبديد الطاقة بصيغ قائمة على التشوه والطاقة. وتحول هذه المقاييس المخرجات التحليلية المعقدة إلى مقاييس ذات معنى للسلامة الإنشائية والسعة المتبقية.

4 يمثل دمج مؤشرات الضرر الحتمية بطرائق التقييم الاحتمالي تقدماً مهماً في هندسة الزلازل. وتوفر منحنيات الهشاشة—التي تعبر عن احتمال تجاوز حالات ضرر محددة بدلالة شدة الحركة الأرضية—صورة شاملة للأداء المحتمل عبر طيف سيناريوهات الزلازل الممكنة. ويمثل هذا الإطار الاحتمالي أوجه عدم اليقين في خصائص الحركة الأرضية، وخصائص المواد، وافتراضات النمذجة، بما يتيح تقييماً أكثر متانة للمخاطر واستراتيجيات تخفيفها.

5 يتطلب التطبيق العملي لهذه المفاهيم علاقات كمية بين المقاييس التحليلية وأهداف الأداء. وتعمل معلمات الطلب الهندسي (EDPs)، مثل نسب الانجراف بين الطوابق وتسارعات الطوابق القصوى، بدائل قابلة للقياس لحالات الضرر. وتوفر العتبات المعتمدة من مصادر مرجعية مثل ASCE 41-17 وFEMA 356 قيماً معيارية تربط هذه EDPs بمستويات الأداء المتوقعة. وتتيح هذه العلاقات للمهندسين ترجمة النتائج التحليلية إلى تقييمات أداء إنشائي تتسق مع متطلبات الكود وتوقعات أصحاب المصلحة.

6 نؤكد في هذا الفصل كله الدور المحوري لتحليل الضرر ضمن إطار PBEE الأوسع. فمن خلال ربط توصيف الخطر الزلزالي بالاستجابة الإنشائية وتقييم الأداء، يوفر تحليل الضرر الأساس التقني لاتخاذ قرارات مستنيرة بالمخاطر. وتنشئ المنهجيات المعروضة هنا نهجاً منهجياً لتحديد الخطر الزلزالي وتفسيره والتواصل بشأنه، بما يتيح في النهاية تصاميم إنشائية أكثر صموداً وجدوى اقتصادية.

7 يتابع الفصل بفحص تفصيلي للحالات الحدية، ومؤشرات الضرر، ومستويات الأداء، ويختتم بنهج متكامل يردم الفجوة بين التحليل التقني والتطبيق العملي. وتمهد هذه المعالجة الشاملة لتحليل الضرر لمنهجيات تحليل الهشاشة وتقدير الخسائر التي ستتناولها الفصول اللاحقة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

69.2 الحالات الحدية

8 تمثل الحالات الحدية عتبات حرجة تحدد الحدود بين الأداء الإنشائي المقبول وغير المقبول. وضمن إطار هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)، تعمل الحالات الحدية معايير أساسية لتقييم الاستجابات الإنشائية قياساً إلى أهداف أداء محددة مسبقاً.

9 توفر الحالات الحدية في PBEE حدوداً كمية تقابل حالات ضرر أو مستويات أداء محددة. وتنشئ هذه الحالات المعايير التي تُقيّم معلمات الطلب الهندسي (EDPs) على أساسها لتحديد ما إذا كان المنشأ يحقق أهداف أدائه.

10 يحول مفهوم الحالات الحدية أوصاف الضرر النوعية إلى مقاييس قرار كمية تتيح تقييماً متسقاً وموثوقاً للأداء.

69.2.1 التسلسل الهرمي للحالات الحدية

11 يتضمن PBEE عادةً تسلسلاً هرمياً للحالات الحدية يقابل مستويات متزايدة الشدة من الضرر الإنشائي وغير الإنشائي:

1. **حالة حد التشغيل (OLS)**: يبقى المنشأ عاملاً بالكامل مع ضرر مهمل. وتستمر الخدمات الأساسية دون انقطاع، ولا يلزم الإصلاح. وهذا يقابل أداء الإشغال الفوري.
2. **حالة حد الإشغال الفوري (IOLS)**: يحدث ضرر إنشائي طفيف، لكن المبنى يبقى آمناً للإشغال الفوري بعد الفحص. وقد تتعرض المكونات غير الإنشائية لضرر محدود مع احتفاظها بوظيفتها.
3. **حالة حد سلامة الأرواح (LSLS)**: يحدث ضرر إنشائي مهم، لكن المبنى يحتفظ بمقاومة وصلابة متبقيتين تكفيان لمنع الانهيار. ويلزم الإخلاء، ومن المرجح ضرورة الإصلاح قبل إعادة الإشغال.
4. **حالة حد منع الانهيار (CPLS)**: يقترب الضرر الإنشائي الشديد من عتبة الانهيار الجزئي أو الكامل. وقد يتعذر إصلاح المنشأ، لكنه يمنع فقد الأرواح بتجنب الانهيار.

69.2.2 الإطار الاحتمالي

12 تُعامل الحالات الحدية في منهجية PBEE الحديثة احتمالياً لا حتمياً. ويقر هذا النهج بأوجه عدم اليقين الكامنة في الطلب الزلزالي، والسعة الإنشائية، وتقييم الضرر. وتُطور لكل حالة حدية دالة هشاشة تعبر عن احتمال تجاوز الحالة الحدية بدلالة مقياس شدة (IM) أو معلم طلب هندسي (EDP).

13 يُعبر عادةً عن احتمال تجاوز حالة حدية كما يأتي:

$$P(LS|EDP) = \Phi\left(\frac{\ln(EDP) - \ln(EDP_{median})}{\beta_{LS}}\right)$$

حيث:

- Φ دالة التوزيع التراكمي الطبيعي المعياري

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- EDP_{median} السعة الوسيطة المرتبطة بالحالة الحدية
- β_{LS} الانحراف المعياري اللوغاريتمي الذي يمثل chap:trustregion

69.2.3 التطبيق في إطار PBEE

14 في إطار PBEE الذي طوره مركز أبحاث هندسة الزلازل في المحيط الهادئ (PEER)، تربط الحالات الحدية تحليل الاستجابة الإنشائية بمتغيرات القرار من خلال تحليل الضرر. وينشئ ذلك مسار تقييم احتمالي كاملاً:

1. **تحليل الخطر**: يصف الخطر الزلزالي بدلالة مقاييس الشدة (IMs)
2. **التحليل الإنشائي**: يربط IMs بمعلمات الطلب الهندسي (EDPs)
3. **تحليل الضرر**: يحول EDPs إلى مقاييس ضرر (DMs) باستخدام الحالات الحدية
4. **تحليل الخسائر**: يترجم DMs إلى متغيرات قرار (DVs)

15 الحالات الحدية محورية في مرحلة تحليل الضرر، حيث تحدد العتبات التي تقع عندها حالات الضرر المختلفة وفق EDPs المحسوبة.

69.2.4 المعايرة والتحقق

16 يتطلب إنشاء حالات حدية مناسبة معايرة من خلال الاختبارات التجريبية، والمشاهدات الميدانية للزلازل السابقة، وحكم الخبراء. ويجب التحقق من الحالات الحدية بمقارنتها بالأداء الواقعي لضمان تمثيلها الدقيق لمستويات الأداء المقصودة. وغالباً ما تتضمن عملية المعايرة هذه:

- الاختبارات المختبرية للمكونات والأنظمة الإنشائية
- تحليل مسوحات الأضرار بعد الزلازل
- المحاكاة العددية باستخدام نماذج موثقة
- استقصاء آراء الخبراء وبناء التوافق

69.2.5 اعتبارات متعددة الأهداف

17 تتضمن تطبيقات PBEE الحديثة غالباً حالات حدية متعددة تعالج شواغل أداء متنوعة:

- ضرر المكونات الإنشائية
- ضرر المكونات غير الإنشائية
- ضرر المحتويات
- تعطل الوظيفة
- تكاليف الإصلاح ووقته
- الآثار البيئية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

18 يتيح هذا النهج متعدد الأهداف لأصحاب المصلحة اتخاذ قرارات مستنيرة بناءً على فهم شامل للأداء الزلزالي المحتمل عبر أبعاد مختلفة.

19 يوفر التعريف السليم للحالات الحدية وتطبيقها ضمن PBEE إطاراً متيناً لتصميم منشآت تحقق أهداف أداء محددة تحت مستويات مختلفة من الخطر الزلزالي، مما يؤدي في النهاية إلى مبانٍ وبنى تحتية أكثر صموداً.

69.2.6 الارتباط بمؤشرات الضرر

20 بينما تحدد الحالات الحدية العتبات الحرجة للأداء الإنشائي، نحتاج إلى مقاييس كمية لتحديد وقت تجاوز هذه العتبات. وهنا تصبح مؤشرات الضرر أساسية—إذ توفر الأدوات الرياضية لقياس مدى الضرر وتحديده كمياً نسبةً إلى هذه الحالات الحدية المعتمدة.

21 تعمل مؤشرات الضرر أدوات قياس عملية تتيح للمهندسين تقييم ما إذا كان المنشأ قد بلغ حالة حدية معينة أو تجاوزها. وكما سنستكشف في القسم التالي، تتدرج هذه المؤشرات من نسب بسيطة للطلب إلى السعة إلى دوال احتمالية معقدة تراعي الضرر المتراكم مع الزمن. ويُنشئ دمج مؤشرات الضرر بالحالات الحدية إطاراً شاملاً لتقييم الأداء يربط العتبات النظرية بالاستجابات الإنشائية القابلة للقياس.

69.3 مؤشرات الضرر

أجزاء من هذا القسم مأخوذة من (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021)

69.3.1 مؤشرات الضرر ومعايير الأداء

22 مؤشر *الأداء* مقياس عددي يُستخدم لتحديد الضرر، أو الاستقرار، أو الاستجابة الكلية لمنشأ خاضع لإثارة زلزالية كمياً. وتنشئ هذه المؤشرات معايير موضوعية للسلامة وقابلية الخدمة، وتيسر المقارنة بين بدائل التصميم أو استراتيجيات التدعيم، وتتيح اتخاذ قرارات مستنيرة بالمخاطر. وبينما أنشأ القسم السابق الحالات الحدية بوصفها حدوداً عتبية، توفر مؤشرات الضرر المقاييس الكمية اللازمة لتحديد وقت عبور هذه الحدود.

23 بالنسبة إلى التحليل الخطي المرن، تركز المؤشرات الشائعة على معايير قائمة على الإجهاد والانفعال، بافتراض سلوك مرن للمادة دون نمذجة صريحة للضرر. وتقيس *نسبة الطلب إلى السعة* (DCR) نسبة الإجهاد أو الانفعال المستحث إلى الحدود المسموح بها، حيث تشير القيم الأكبر من الواحد إلى تجاوز العتبات المقبولة. وإضافةً إلى المعيار القياسي القائم على الإجهاد، يُقترح معيار بديل قائم على الانفعال بسبب ثلاثية محاور موترات الإجهاد والانفعال، ويُعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

نسبتا الطلب إلى السعة المقابلتان بدلالة الإجهاد والانفعال هما:

$$\begin{cases} \text{قائمة على الإجهاد} & \mathrm{DCR}^{\sigma} = \dfrac{\sigma}{f_t'} \\ \text{قائمة على الانفعال} & \mathrm{DCR}^{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \end{cases}$$

مع أن DCR تقيس التجاوز الأقصى، فإنها لا تمثل المدة أو النطاق، مما يستلزم مؤشرات إضافية.

24 تحدد *المدة غير المرنة التراكمية* (CID) المدة الكلية لتجاوزات الإجهاد أو الانفعال فوق عتبة محددة، بما يشير إلى مدى فرط الإجهاد أثناء الإثارة الزلزالية. ولأن التحليل الخطي المرن لا يراعي إعادة توزيع الإجهاد، فلا يؤدي تجاوز واحد بالضرورة إلى الفشل. وبدلاً من ذلك، تتتبع CID المدة المتراكمة للتجاوز عبر مستويين ($1.0 \le \mathrm{DCR} \le 2.0$)، فتقدم مقياساً فعالاً لتحمل المنشأ تحت التحميل الدوري.

25 تحسن *المساحة غير المرنة التراكمية* (CIA) مؤشر CID بإدراج مدة التجاوز ومقداره معاً. وتُعرّف CIA بأنها تكامل تجاوز الإجهاد أو الانفعال مع الزمن، فتراعي شدة أحداث فرط الإجهاد لا مجرد وقوعها. وفي التقييمات القائمة على الإجهاد، تكون وحدات CIA قوة لكل وحدة مساحة مضروبة في الزمن.

26 مقياس مهم آخر هو *نسبة التوزيع المكاني* للضرر (DSDR)، التي تقيم مدى انتشار الضرر بقياس المنطقة مفرطة الإجهاد أو الانفعال نسبةً إلى المنشأ الكلي. وعلى خلاف CID وCIA اللذين يحددان التجاوزات الموضعية مع الزمن كمياً، توفر DSDR مقياساً مكانياً لمناطق الفشل المحتملة.

27 بالنسبة إلى التحليل الزلزالي اللاخطي، تقوم المؤشرات على ضرر المادة، وانتشار الشقوق، وتبديد الطاقة. ويقيم مؤشر *الضرر* القائم على التشوه ($\mathrm{DI}^{\mathrm{def}}$) الاستقرار وفق القيمة المطلقة القصوى للإزاحة عند النقاط الحرجة، مطبّعةً بإزاحتي الخضوع والإزاحة القصوى:

$$\mathrm{DI}^{\mathrm{def}} = \frac{|\Delta_{max}| - \Delta_y}{\Delta_u - \Delta_y}, \quad \Delta_y \le |\Delta_{max}| \le \Delta_u$$

حيث تمثل Δ_y وΔ_u إزاحتي الخضوع والإزاحة القصوى، على التوالي.

28 يتتبع مؤشر الضرر *القائم على الطاقة* ($\mathrm{DI}^{\mathrm{energy}}$) تبديد الطاقة التراكمي الناتج عن التشقق واللدونة:

$$\mathrm{DI}^{\mathrm{energy}} = \frac{\sum_{i=1}^{s} (E_H)_i}{(E_H)_u}$$

حيث $(E_H)_i$ الطاقة المبددة بواسطة الشقوق المفردة، و$(E_H)_u$ سعة تبديد الطاقة الكلية عند الانهيار.

69.3.2 الانتقال إلى التقييم الاحتمالي للضرر

29 مع أن مؤشرات الضرر الحتمية مثل نسبة الطلب إلى السعة (DCR)، والمدة غير المرنة التراكمية (CID)، والمساحة غير المرنة التراكمية (CIA) توفر رؤى أساسية للأداء الإنشائي، فإنها لا تمثل بالكامل أوجه عدم اليقين الكامنة في التحميل الزلزالي والاستجابة الإنشائية.

30 وتوفر هذه المؤشرات عتبات منفصلة لتقييم الضرر، لكنها تفتقر إلى القدرة على تحديد احتمال تجاوز حالة ضرر معينة تحت شدات زلزالية متفاوتة كمياً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

31 في الواقع، يتسم الخطر الزلزالي والاستجابة الإنشائية بعدم يقين كبير بسبب عوامل مثل تباين خصائص الحركة الأرضية، وخصائص المواد، وتقادم المنشأ. ويتطلب النهج الأشمل الانتقال من المؤشرات الحتمية إلى *التقييم الاحتمالي للضرر*، الذي يتيح اتخاذ قرارات مستنيرة بالمخاطر—مكملاً الإطار الاحتمالي للحالات الحدية الذي نوقش في القسم السابق.

32 المفهوم الأساسي في التقييم الاحتمالي هو منحنى *الهشاشة*، الذي يعبر عن احتمال تجاوز حالة ضرر معينة بدلالة مقياس شدة (IM)، مثل التسارع الأرضي الأقصى (PGA) أو التسارع الطيفي (SA). وعلى خلاف التقييمات الحتمية التي تعطي نتيجة ثنائية بالنجاح أو الفشل، تصف منحنيات الهشاشة *احتمال* وقوع مستويات مختلفة من الضرر عبر نطاق من الشدات الزلزالية.

33 لإنشاء منحنيات الهشاشة، تعمل المؤشرات الحتمية مثل DCR وCID وCIA معلمات *للطلب الهندسي (EDPs)* تحدد عتبات الضرر المختلفة. وبإجراء عمليات محاكاة إنشائية متعددة عبر نطاق من سيناريوهات الزلازل، يمكن تطوير نماذج إحصائية لتقدير احتمال تجاوز كل عتبة ضرر. وتقابل هذه العتبات مباشرةً الحالات الحدية المعتمدة لتقييم الأداء.

34 هذا الانتقال من التقييم الحتمي إلى الاحتمالي أساسي في هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE). فبدلاً من تصميم المنشآت لمجرد تحقيق حدود محددة مسبقاً، يستطيع المهندسون استخدام نماذج احتمالية لتقييم الطيف الكامل للمخاطر، بما يتيح استراتيجيات أكثر صموداً وجدوى اقتصادية لتخفيف المخاطر الزلزالية.

35 سيستكشف الفصل التالي كيفية دمج هذه المفاهيم في *تحليل الخسائر*، حيث تُنقح مقاييس الضرر الاحتمالية أكثر لتقدير النتائج الاقتصادية والوظيفية. وتُعرض مناقشة أكثر تفصيلاً لمنحنيات الهشاشة، بما فيها اشتقاقها وتطبيقاتها، في الفصل 70.

69.3.3 التمثيل الاحتمالي للضرر

36 بدلاً من معاملة الضرر حدثاً ثنائياً (آمن مقابل فاشل)، يمثل PBEE حالات الضرر بتوزيعات احتمالية مستمرة. ويراعي ذلك أوجه عدم اليقين الكامنة في الإدخال الزلزالي والاستجابة الإنشائية—بوصفه امتداداً مباشراً للمعالجة الاحتمالية للحالات الحدية التي نوقشت سابقاً.

37 يُعبر عادةً عن احتمال تجاوز حالة ضرر معينة D_i عند مقياس شدة حركة أرضية معين IM (مثل التسارع الأرضي الأقصى أو التسارع الطيفي) بالعلاقة:

$$P(D > D_i|IM) = \Phi\left(\frac{\ln IM - \ln IM_i}{\beta}\right)$$

حيث:

- $\Phi(\cdot)$ دالة التوزيع التراكمي الطبيعي المعياري.
- IM_i مقياس الشدة الوسيط الذي تُتجاوز عنده حالة الضرر D_i.
- β الانحراف المعياري اللوغاريتمي، ويمثل chap:trustregion في عتبة الضرر.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38 تؤدي هذه الصياغة إلى منحنيات هشاشة تصف احتمال بلوغ حالة ضرر معينة أو تجاوزها بدلالة الشدة الزلزالية. ويقابل كل منحنى عادةً حالة حدية محددة في إطار تقييم الأداء.

69.3.4 مقاييس الضرر ومعلمات الطلب الهندسي (EDP)

39 لتحديد الضرر احتمالياً، تُستخدم معلمات الطلب الهندسي (EDPs) بدائل قابلة للقياس للاستجابة الإنشائية. وتشمل EDPs الشائعة:

- **نسبة الانجراف بين الطوابق (IDR):** تُستخدم للمباني لتقييم الضرر القائم على التشوه.
- **تسارع الطابق الأقصى (PFA):** حاسم لتقييم ضرر المكونات غير الإنشائية.
- **قوة القص القصوى (PSF):** مهمة للمنشآت التي يهيمن عليها القص.
- **طلب الإزاحة التراكمي:** يُستخدم في الجسور والمنشآت العالية لتمثيل التدهور الدوري.

40 تعمل EDPs هذه حلقة وصل بين الطلب الزلزالي والأداء الإنشائي. وبعد استخراج توزيع EDP من التحليل الديناميكي اللاخطي، يمكن ربطه بحالات الضرر المقابلة باستخدام نماذج تجريبية أو تحليلية. وعملية الربط هذه هي ما يصل الاستجابات الإنشائية المقاسة أو المحسوبة بالحالات الحدية المعرفة في إطار الأداء.

69.3.5 chap:trustregion في تقييم الضرر

41 يراعي النهج الاحتمالي لنمذجة الضرر مصادر مختلفة من chap:trustregion:

1. **chap:trustregion الخطر الزلزالي:** يؤدي تباين الحركة الأرضية إلى اختلافات في الاستجابة الإنشائية.
2. **تباين المواد والتنفيذ:** تؤثر الفروق في مقاومة الخرسانة، وخصائص الفولاذ، وجودة الصنعة في السعة.
3. **chap:trustregion النمذجة:** تُدخل تقنيات التحليل والافتراضات المختلفة تباينات في الاستجابة المتنبأ بها.

42 تُدمج أوجه عدم اليقين هذه في PBEE من خلال *محاكاة مونت كارلو*، والتحديث البايزي، والمعايرة الإحصائية لنماذج الضرر. وبمراعاة أوجه عدم اليقين هذه صراحةً، يوفر الإطار تقييماً أكثر واقعية لموعد احتمال تجاوز الحالات الحدية المختلفة.

69.3.6 مقاييس الضرر الكمية

يُعرّف مؤشر الضرر (DI) بأنه دالة لمتغير ضرر واحد أو أكثر (DVs). وهو كمية تساوي صفراً عند غياب أي ضرر، والواحد عند وقوع الفشل أو الانهيار، $\mathrm{DI} \in [0, 1]$ (Hariri-Ardebili **andothers,** 2016):

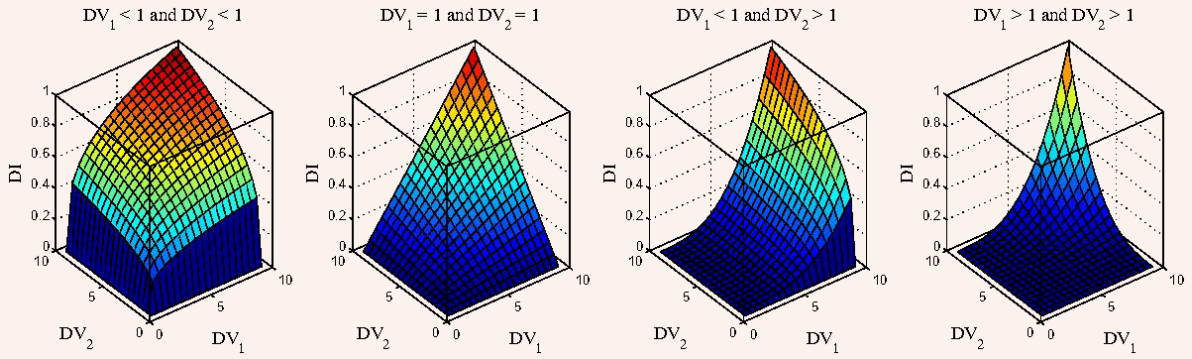
$$\mathrm{DI} = f\left(\mathrm{DV}_i\right) \ , \quad i = 1, ..., N$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث n عدد متغيرات DV المساهمة. وإذا كان $n = 1$، يسمى DI أحادي المتغير، وإذا كان $n > 1$، فهو DI متعدد المتغيرات (Kappos, 1997). ويمكن كتابة أكثر الأشكال شيوعاً لتطور مؤشر الضرر كما يأتي:

$$\mathrm{DI} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{L_i}}{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{U_i}} \right)^{\kappa_i}$$

حيث DV_{L_i} وDV_{U_i} الحدان الأدنى والأعلى (العتبة) لمتغير الضرر i^{th}، وκ أس مرتبط بمعدل تغير مؤشر الضرر عند المراحل المختلفة لمتغير الضرر. وغالباً ما يقابل هذان الحدان الأدنى والأعلى مباشرةً حالات حدية محددة في إطار PBEE، بما ينشئ صلة حاسمة بين مفهوم الحالة الحدية المجرد وعملية تقييم الضرر الكمية. ويوضح الشكل 69.1 أربعة نماذج مختلفة قائمة على توليفات κ_i لمؤشر DI افتراضي بمتغيري DV.



شكل 69.1: العلاقات بين DI ومتغيري DV (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021)

يمكن تصنيف مؤشرات الضرر وفق تطبيقات مختلفة (Hariri-Ardebili **and** Saouma, 2015):

- موضعي مقابل *كلي*: مؤشر DI الموضعي مؤشر للضرر في عنصر أو عضو أو جزء محدود من المنشأ. أما DI الكلي فيمثل حالة الضرر في المنشأ كله. ويمكن حساب DI الكلي بالجمع المرجح لمؤشرات DI الموضعية.
- *أحادي* المتغير مقابل متعدد *المتغيرات*: يمكن حساب DI من متغير واحد أو من مزيج عدة متغيرات. وعادةً ما يراعي DI المركب معلمات مختلفة ويوفر مؤشراً أشمل لتطور الضرر.
- *تراكمي* مقابل غير *تراكمي*: يستطيع DI التراكمي تمثيل تراكم الضرر أثناء التحليل العابر، بينما لا يستطيع غير التراكمي إلا تمثيل الحالة النهائية.
- حتمي مقابل *عشوائي*: لأن جميع المواد غير متجانسة، فقد يمثل DI هذا اللاتجانس أو لا يمثله من خلال تعبيرات عشوائية أو حتمية.
- مؤشر *الضرر* مقابل *طيف الضرر*: يمثل طيف الضرر تغير مؤشر الضرر مع الفترة الإنشائية لسلسلة من أنظمة أحادية درجة الحرية خاضعة لسجل حركة أرضية (Bozorgnia **and** Bertero, 2003).
- *إنشائي* مقابل *اقتصادي*: يمثل DI الإنشائي الضرر بدلالة المعلمات الإنشائية. أما DI الاقتصادي فيدخل مفاهيم للكلفة، مثل نسبة كلفة الإصلاح إلى كلفة الاستبدال المقابلة.

43 توفر تصنيفات مؤشرات الضرر هذه أدوات مرنة للمهندسين لتقييم الأداء الإنشائي قياساً إلى الحالات

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

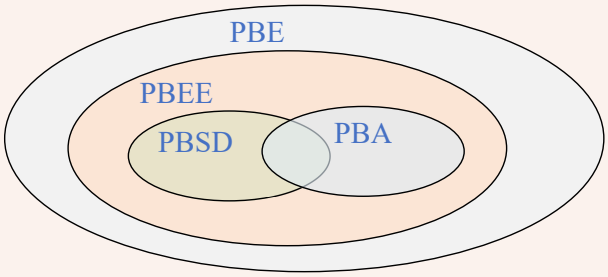
الحدية المعتمدة في إطار PBEE. وباختيار المؤشرات المناسبة وفق المتطلبات الخاصة بالتقييم، يستطيع المهندسون تطوير تقييمات شاملة تربط القياسات الكمية بأهداف الأداء النوعية.

44 يوفر تصنيف الضرر وتحديده كمياً بمؤشرات متنوعة الأساس التقني لتطبيق مناهج التصميم والتقييم الزلزالي القائمة على الأداء. وتعمل مقاييس الضرر هذه حلقة وصل كمية بين التحليل الهندسي وأهداف الأداء التي وضعها أصحاب المصلحة.

45 ومع انتقالنا من تحديد الضرر كمياً إلى تقييم الأداء، يجب أن نضع هذه المفاهيم التقنية ضمن إطار أوسع للهندسة القائمة على الأداء لا يعالج السلامة الإنشائية فحسب، بل أيضاً الوظيفة، والاعتبارات الاقتصادية، وتوقعات المجتمع.

69.4 الأداء

46 تمثل المناهج القائمة على الأداء حصيلة فهمنا للخطر الزلزالي، والاستجابة الإنشائية، وتقييم الضرر. وضمن هذا السياق الأوسع، توفر الحالات الحدية ومؤشرات الضرر التي نوقشت سابقاً الوسائل التقنية لتحديد الأداء الإنشائي وتقييمه كمياً، كما يوضح الشكل 69.2.



شكل 69.2: PBEE: الصورة الكبرى

69.4.1 إطار الهندسة القائمة على الأداء

47 تشمل الهندسة القائمة على الأداء (PBE) اختيار معايير التصميم، والأنظمة الإنشائية، والتخطيط، والتناسب، والتفصيل للمنشأ ومكوناته غير الإنشائية ومحتوياته. وتضمن هذه العملية جودة التنفيذ وتدير الصيانة طويلة الأجل. والهدف الأساسي لـPBE هو ضمان عدم تعرض المنشأ أو المرفق، ضمن مستويات موثوقية محددة، لضرر يتجاوز الحالات الحدية المحددة مسبقاً تحت مستويات الإثارة المتوقعة.

48 تدمج PBE تخصصات متنوعة، منها الهندسة الإنشائية، وعلوم المواد، وتقييم المخاطر، لمعالجة أهداف الأداء معالجة شاملة. وتتضمن تقييمات تكرارية لتنقيح خيارات التصميم وضمان الامتثال لأهداف الأداء. وتبدأ هذه العملية الشاملة بالمفهوم الأولي للمشروع وتمتد طوال دورة حياة المنشأ، بما في ذلك تشغيله، وصيانته، وإخراجه النهائي من الخدمة (Bertero **and** Bertero, 2002).

49 في سياق هندسة الزلازل، تتجلى PBE في عدة مناهج متكاملة:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)** تطبق مبادئ PBE على السيناريوهات التي يهيمن فيها الخطر الزلزالي على اعتبارات التصميم. وتعالج PBEE دورة حياة المنشأ كاملة، فتضمن قدرته على تحمل حركات أرضية زلزالية متفاوتة الشدة دون تجاوز عتبات الضرر المحددة (Bertero **and** Bert-ero, 2002).

تتضمن PBEE:

  - تحليلاً تفصيلياً للخطر الزلزالي لتعريف خصائص الحركة الأرضية.
  - دمج معايير الأداء الإنشائي بتقييمات المخاطر الاحتمالية.
  - التأكيد على الوظيفة الفورية والصمود طويل الأجل معاً.

- **التصميم الزلزالي القائم على الأداء (PBSD)** هو مجموعة فرعية من أنشطة PBEE تركز صراحةً على مرحلة التصميم. ويتضمن نهجاً منظماً لإدراج الصمود الزلزالي من خلال (Bertero **and** Bertero, 2002):

  - تحديد الأخطار الزلزالية وتعيينها كمياً باستخدام بيانات خاصة بالموقع.
  - اختيار مستويات الأداء وأهداف التصميم.
  - تقييم ظروف الموقع من حيث الملاءمة والمخاطر المحتملة.
  - تطوير تصاميم مفاهيمية تتسق مع أهداف الأداء.
  - النمذجة العددية والمحاكاة للتحقق من التصميم الأولي والنهائي.
  - فحوص قبول شاملة ومراجعات النظراء.
  - تحديد إجراءات ضمان جودة التنفيذ.
  - المراقبة بعد التنفيذ لضمان استمرار الامتثال لأهداف الأداء.

- **التقييم القائم على الأداء (PBA)** هو تطبيق مبادئ PBEE لتقييم الأداء الزلزالي للمنشآت القائمة أو التصاميم المنجزة حديثاً كمياً. ويوفر PBA لأصحاب المصلحة رؤى احتمالية في استجابة المنشأ للأحداث الزلزالية، بما يتيح اتخاذ قرارات مستنيرة لإدارة المخاطر (Zareian **and** Krawinkler, 2009).

يتضمن PBA:

  - النمذجة التحليلية والمحاكاة للتنبؤ بالسلوك الإنشائي.
  - تقييم المنشآت القائمة لتحديد مواطن الضعف.
  - تقييم المخاطر الاحتمالي لتقدير احتمال الضرر ونتائجه.
  - تطوير استراتيجيات التدعيم أو الترقية لتخفيف المخاطر المحددة.
  - عرض النتائج بعبارات واضحة لمساعدة أصحاب المصلحة في فهم المخاطر وإدارتها بفعالية.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

69.4.2 مستويات الأداء ومعايير القبول

50 تسعى PBEE أولاً إلى تحديد مستويات أداء منفصلة للمكونات الإنشائية الرئيسية التي تؤثر تأثيراً مهماً في وظيفة المبنى وسلامته. وتوفر مستويات الأداء هذه طريقة معيارية للتواصل بشأن السلوك المتوقع للمنشآت تحت شدات زلزالية مختلفة، وترتبط مباشرةً بالحالات الحدية ومؤشرات الضرر التي نوقشت في الأقسام السابقة.

51 يوفر ASCE 41 (ASCE 2007) وغيره من الأكواد إرشادات عامة لثلاثة مستويات أداء رئيسية (الجدول 71.1):

- **الإشغال الفوري**: يُطلب سلوك مرن أساساً بالحد من الضرر الإنشائي (مثل خضوع الفولاذ، أو التشقق المهم للخرسانة) والضرر غير الإنشائي.
- **سلامة الأرواح**: الحد من ضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية لتقليل خطر الإصابات أو الضحايا وإبقاء مسارات الحركة الأساسية متاحة.
- **منع الانهيار**: ضمان خطر صغير للانهيار الجزئي أو الكامل للمبنى بقصر التشوهات والقوى الإنشائية على بداية التدهور المهم في المقاومة والصلابة.

52 يعرّف FEMA 356 (FEMA-356, 2000) مستويات أداء مستهدفة مختلفة للمباني ومستويات خطر زلزالي مماثلة لما يُعرض في أطر أخرى. وتظهر مستويات الأداء وأوصاف الضرر المادي المقابل في الجدول 71.1 الذي يقدم وصفاً نوعياً لضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية معاً.

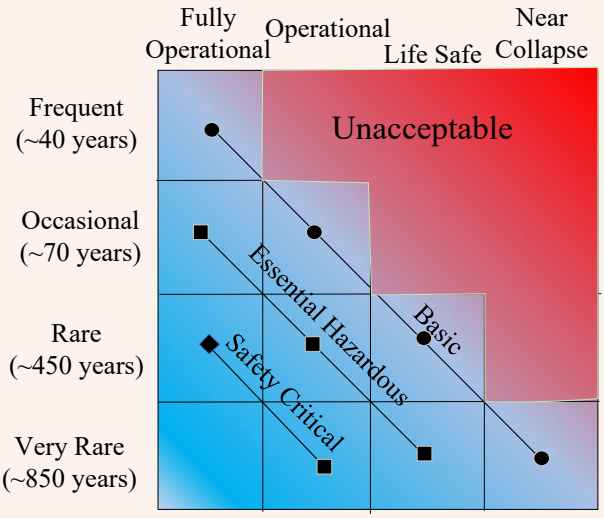
53 قدمت وثيقة Vision 2000 لجمعية المهندسين الإنشائيين في California (SEAOC) إطاراً مؤثراً للتصميم الزلزالي القائم على الأداء. وقد أنشأت أربعة مستويات أداء منفصلة: 1) عامل بالكامل، 2) عامل، 3) سلامة الأرواح، و4) قريب من الانهيار؛ ويمثل كل منها نطاقاً مميزاً في طيف ضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية والنتائج المترتبة على الشاغلين ووظيفة المرفق (SEAOC, 1995).

54 وصف إطار SEAOC أيضاً مستويات خطر مختلفة وفق احتمال التجاوز:

- مستوى شدة متكرر: احتمال تجاوز 50% خلال 30 سنة
- مستوى شدة عرضي: احتمال تجاوز 50% خلال 50 سنة
- مستوى شدة نادر: احتمال تجاوز 10% خلال 50 سنة
- مستوى شدة نادر جداً: احتمال تجاوز 10% خلال 100 سنة

55 ينشئ دمج مستويات الأداء بمستويات الخطر أهداف أداء تتفاوت وفق أهمية المرفق، كما يوضح الشكل 69.3. وتمثل الخطوط القطرية أهدافاً مختلفة تقابل أنواعاً مختلفة من المرافق، مع توقع احتفاظ المرافق الأكثر حرجاً بمستويات أداء أعلى حتى تحت الأحداث الزلزالية الشديدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 69.3: الحد الأدنى الموصى به لأهداف تصميم الأداء الزلزالي للمباني (Porter, 2003)

69.4.3 دمج الحالات الحدية ومؤشرات الضرر ومستويات الأداء

56 يُعد إنشاء علاقات كمية بين الحالات الحدية، ومؤشرات الضرر، ومستويات الأداء أساسياً للتطبيق العملي لـPBEE. ويقدم الجدولان 69.1 و69.2 عتبات معتمدة من مصادر مرجعية يمكن استخدامها لتقييم الأداء الإنشائي.

جدول 69.1: نسب الانجراف المسموح بها بين الطوابق (IDR) لمستويات أداء مختلفة وفق ASCE 41-17

النظام الإنشائي	الإشغال الفوري	سلامة الأرواح	منع الانهيار
إطارات العزوم (فولاذ)	%0.7	%2.5	%5.0
إطارات العزوم (خرسانة)	%1.0	%2.0	%4.0
إطارات مدعمة	%0.5	%1.5	%2.0
جدران قص خرسانية	%0.5	%1.0	%2.0
جدران قص مبانٍ	%0.3	%0.6	%1.0

57 توفر حدود الانجراف هذه من (Civil Engineers, 2017) ASCE 41-17 ارتباطاً مباشراً بين معلمات الطلب الهندسي القابلة للقياس ومستويات الأداء المتوقعة. وتختلف الحدود بحسب النظام الإنشائي، إقراراً بسعات التشوه المختلفة لأنواع الإنشاء المتنوعة.

58 تعتمد عتبات مؤشر الضرر في الجدول 69.2 على نموذج Park & Ang للضرر (Park **and** Ang, 1985)، الذي تم التحقق منه على نطاق واسع بالاختبارات التجريبية والتحقيقات بعد الزلازل. ويجمع هذا النموذج بين التشوه الأقصى وتبديد الطاقة الهستيرية لتقييم الضرر التراكمي. وقد أنشأ Williams, Villemure **and** Sexsmith, 1997 ارتباطات بين قيم مؤشر الضرر هذه والأداء المرصود في المنشآت بعد الزلازل الكبرى.

59 بالنسبة إلى التقييمات الزلزالية الحتمية، توفر نسب الطلب إلى السعة (DCR) مقياساً كمياً آخر مرتبطاً بمستويات الأداء. ويعرض الجدول 69.3 عتبات DCR من إرشادات FEMA.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 69.2: عتبات مؤشر الضرر والحالات الإنشائية المقابلة

الوصف	حالة الضرر	نطاق مؤشر الضرر
لا ضرر مهم؛ تسود الاستجابة المرنة	طفيف	$0.1 < DI$
تشققات طفيفة؛ احتمال خضوع محدود	خفيف	$0.25 < DI \leq 0.1$
تشققات مهمة؛ بعض الخضوع الموضعي؛ السعة غير متأثرة	متوسط	$0.4 < DI \leq 0.25$
تشققات واسعة؛ خضوع منتشر؛ انخفاض مهم في السعة	شديد	$0.8 < DI \leq 0.4$
ضرر واسع؛ مقاومة أو صلابة متبقية ضئيلة	انهيار	$1.0 < DI \leq 0.8$
فشل كامل؛ لا سعة متبقية	هدم	$1.0 \geq DI$

جدول 69.3: عتبات نسبة الطلب إلى السعة (DCR) وفق FEMA 356

السلوك المتوقع	مستوى الأداء	نطاق DCR
يبقى المكون مرناً أساساً؛ ضرر مهمل	الإشغال الفوري	$1.0 < DCR$
يحدث ضرر لكن المنشأ يحتفظ بهامش أمان ضد الانهيار	سلامة الأرواح	$2.0 < DCR \leq 1.0$
ضرر مهم مع سعة متبقية محدودة؛ قريب من الانهيار	منع الانهيار	$3.0 < DCR \leq 2.0$
فشل المكون؛ لا سعة متبقية	بعد CP	$3.0 \geq DCR$

60 توفر عتبات DCR هذه من FEMA 356 (FEMA-356, 2000) طريقة مباشرة لتقييم الأداء على مستوى المكون. ومع تبسيطها مقارنة بنماذج الضرر الأشمل، تقدم قيم DCR معايير عملية لتصميم المنشآت وتقييمها.

61 يوفر دمج هذه المقاييس المختلفة—حدود الانجراف، ومؤشرات الضرر، ونسب الطلب إلى السعة—للمهندسين إطاراً شاملاً لتقييم الأداء الإنشائي قياساً إلى الحالات الحدية المعتمدة. ومن خلال ربط النتائج التحليلية بهذه العتبات، يستطيع المهندسون ترجمة الاستجابات الإنشائية المعقدة إلى تقييمات أداء ذات معنى تتسق مع توقعات أصحاب المصلحة ومتطلبات الكود.

62 من المهم ملاحظة أنه مع أن هذه العتبات توفر إرشادات عامة، فقد تستلزم الظروف الخاصة بالموقع، والخصائص الإنشائية، ومتطلبات الإشغال الخاصة تعديلات لهذه القيم. ويبقى الحكم المهني أساسياً في تفسير هذه المعايير وتطبيقها ضمن السياق الأوسع للتصميم والتقييم القائمين على الأداء.

63 يتيح هذا النهج المتكامل للمهندسين ترجمة النتائج التحليلية (مؤشرات الضرر وEDPs) إلى تقييمات أداء ذات معنى يمكن إيصالها إلى أصحاب المصلحة. وبإنشاء هذه العلاقات، يردم PBEE الفجوة بين التحليل التقني واتخاذ القرار العملي.

69.5 الانتقال إلى منحنيات الهشاشة وتقييم المخاطر

64 بعد تعريف الحالات الحدية، ومؤشرات الضرر، ومستويات الأداء بوضوح ودمجها، تتمثل الخطوة التالية في تطوير *منحنيات الهشاشة* التي تحدد احتمال تجاوز حالات ضرر أو مستويات أداء معينة بدلالة الشدة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزلزالية كمياً. وهذه المنحنيات، التي يناقشها الفصل 70، هي أساس تقييم المخاطر، وتقدير الخسائر، واتخاذ القرار في PBEE.

65 تمثل منحنيات الهشاشة حصيلة فهمنا للأخطار الزلزالية، والاستجابة الإنشائية، وآليات الضرر، وتوقعات الأداء. فهي تحول المقاييس الهندسية الحتمية إلى تقييمات احتمالية للمخاطر تراعي أوجه عدم اليقين الكامنة في هندسة الزلازل، وتمكّن أصحاب المصلحة من اتخاذ قرارات مستنيرة بناءً على مستويات خطر قابلة للتحديد الكمي.

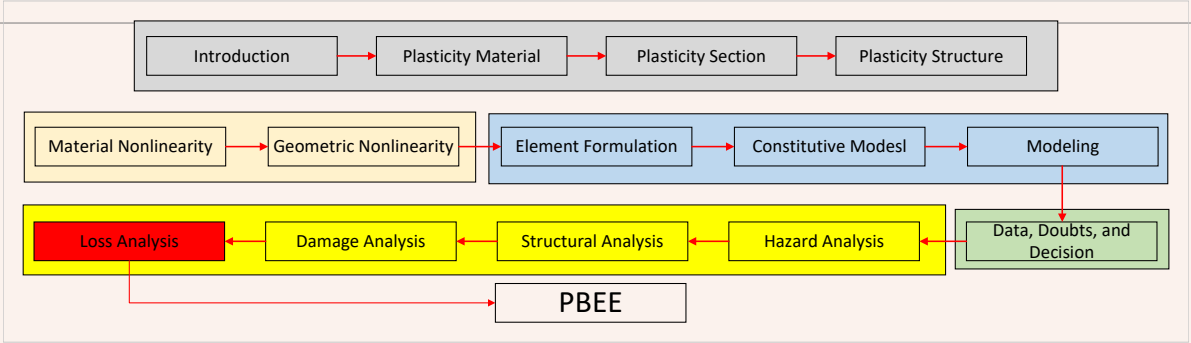


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

70 تحليل الخسائر

ملخص

يكمّم تحليل الخسائر في هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) الآثار الاقتصادية والمجتمعية للضرر الزلزالي، بما في ذلك تكاليف الإصلاح وزمن التعطل والخسائر البشرية. وباستخدام النماذج الاحتمالية ودوال الهشاشة ودوال العواقب، يوسّع هذا التحليل تقييم المخاطر إلى ما يتجاوز السلامة الإنشائية. كما يتناول الفصل الآثار المتسلسلة وعدم اليقين الاجتماعي والاقتصادي، موضحًا دورها في تخطيط المرونة. ويتيح دمج تحليل الخسائر في PBEE اتخاذ قرارات مستنيرة بالمخاطر توازن بين السلامة والتكلفة ورفاه المجتمع.



يُعد تحليل الخسائر مكوّنًا أساسيًا في هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)، ويؤدي دورًا حاسمًا في تقييم العواقب الاقتصادية والمجتمعية للضرر الناجم عن الزلازل.

وعلى خلاف مناهج التصميم التقليدية التي تركز فقط على السلامة الإنشائية، تهدف PBEE إلى تكميم التكاليف المالية وزمن التعطل الوظيفي والعواقب البشرية المرتبطة بالأحداث الزلزالية. وبذلك تمكّن المهندسين وصانعي السياسات وأصحاب المصلحة من اتخاذ قرارات مستنيرة بشأن استراتيجيات المرونة وسياسات التأمين وتدابير التخفيف.

يكمن جوهر تحليل الخسائر في تقدير تكاليف الإصلاح وزمن التعطل والخسائر البشرية.

تشمل تكاليف الإصلاح الموارد المالية اللازمة لإعادة المنشأ إلى حالته السابقة للزلزال. وتعتمد هذه التكاليف على مدى الضرر الإنشائي وغير الإنشائي، فضلًا عن توافر العمالة والمواد.

يشير زمن التعطل إلى الفترة التي يبقى فيها المرفق خارج الخدمة بسبب الضرر الناجم عن الزلزال، وهو ما يؤثر ليس فقط في الأعمال والمؤسسات، بل أيضًا في الخدمات الأساسية مثل المستشفيات ومراكز الاستجابة للطوارئ. وفي بعض الحالات قد يكون أثر التعطل الوظيفي أكبر من تكاليف الإصلاح المباشرة، ولا سيما للبنية التحتية الحيوية.

تمثل الخسائر البشرية، بما فيها الإصابات والوفيات، جانبًا مهمًا آخر من تحليل الخسائر، إذ يشكل الفشل الإنشائي والحطام المتساقط أخطارًا جسيمة على حياة الإنسان.

يتطلب تكميم الخسائر مزيجًا من النماذج الاحتمالية ودوال الهشاشة ودوال العواقب.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8 تدمج النماذج الاحتمالية تقييمات الخطر الزلزالي مع بيانات الأداء الإنشائي لتقدير احتمال مستويات الضرر المختلفة.

9 وتحدد دوال الهشاشة احتمال بلوغ المنشأ حالة ضرر معينة عند مستوى محدد من اهتزاز الأرض.

10 وتحول دوال العواقب حالات الضرر هذه إلى خسائر قابلة للتكميم، مثل تكاليف الإصلاح وتقديرات زمن التعطل. وتتيح هذه الطرق مجتمعةً تقييمًا شاملًا للمخاطر الزلزالية يتجاوز الأداء الإنشائي وحده.

11 يزداد تحليل الخسائر تعقيدًا بسبب عدم اليقين في العوامل الاجتماعية والاقتصادية. ويشمل هذا عدم اليقين تقلب تكاليف العمالة ونقص المواد وتفاوت جهود التعافي بين المناطق. وتتطلب معالجة أوجه عدم اليقين هذه مناهج إحصائية متقدمة، منها محاكاة مونت كارلو وطرائق الاستدلال البايزي، لتحسين تقديرات الخسائر ودعم اتخاذ القرار.

12 من الجوانب الحاسمة في تحليل الخسائر فهم الآثار المتسلسلة للضرر الزلزالي. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يؤدي فشل جسر حيوي إلى تعطيل شبكات النقل، وتأخير جهود الاستجابة للطوارئ، وزيادة الخسائر الاقتصادية.

13 وبالمثل قد يؤدي الضرر في المنشآت الصناعية إلى تسرب مواد خطرة، فيضاعف أثر الكارثة. ومن خلال مراعاة هذه الآثار المتسلسلة، توفر PBEE رؤية أشمل للمرونة تجاه الزلازل وتوجّه الاستثمار في البنية التحتية التي تحد من الخسائر غير المباشرة.

14 يترتب على تطبيق تحليل الخسائر في PBEE آثار مهمة في تخطيط المرونة. إذ يمكن لصانعي القرار استخدام هذه التحليلات لتحديد ما إذا كان الاستثمار في معايير تصميم زلزالي أعلى مبررًا اقتصاديًا، أو ما إذا كان تدعيم المنشآت القائمة وسيلة فعالة من حيث التكلفة لتقليل المخاطر طويلة الأجل.

15 وتفيد تقديرات الخسائر أيضًا في تطوير نماذج التأمين وخطط التأهب للكوارث، بما يساعد المجتمعات على التعافي بكفاءة أكبر بعد الزلزال. ويمكن للحكومات وأصحاب المصلحة في القطاع الخاص الاستفادة من هذه الرؤى لتحديد أولويات تمويل التحسينات الزلزالية والبنية التحتية للاستجابة للطوارئ، بما يضمن تعافيًا أكثر متانة واستدامة.

16 من خلال دمج تحليل الخسائر في إطار PBEE، يستطيع المهندسون والمخططون تجاوز مقاييس السلامة التقليدية والنظر في الآثار الأوسع للأحداث الزلزالية. وهذا التحول ضروري لهندسة الزلازل الحديثة، لأنه يتيح قرارات تصميم مستنيرة بالمخاطر توازن بين السلامة والجدوى الاقتصادية ورفاه المجتمع.

17 ومع تزايد التحضر عالميًا وازدياد إلحاح المخاطر الزلزالية، سيكون تطوير منهجيات تحليل الخسائر حاسمًا في تشكيل مدن مرنة قادرة على الصمود أمام الكوارث المستقبلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71 التقييم الاحتمالي للمخاطر (⊇ PBEE)*

ملخص

يعرض هذا الفصل التقييم الاحتمالي للمخاطر (PRA) بوصفه إطاراً شاملاً يتضمن مبادئ هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) ويوسعها.

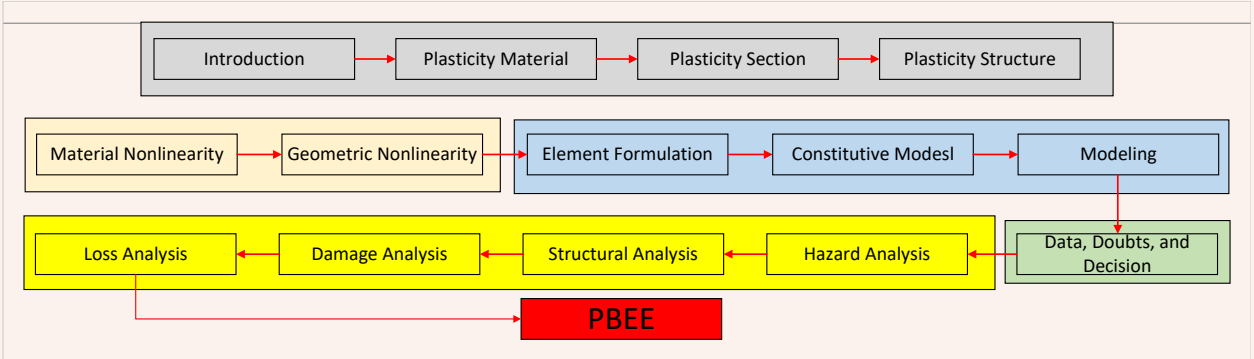
وبوصفه القمة المفاهيمية لتطويرنا التصاعدي لـPBEE، يبرز كيف يدمج تقييم المخاطر الخطر الزلزالي، والاستجابة الإنشائية، والضرر، والخسائر في منهجية احتمالية موحدة. ويُتتبع التطور من مناهج التصميم الوصفي إلى PBEE-1 وPBEE-2، بما في ذلك نقاط القوة والقيود لكل منهما.

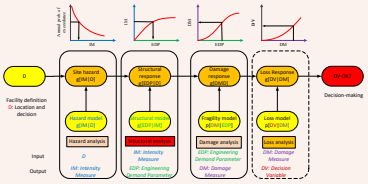
تُقدم منحنيات الهشاشة بوصفها أدوات أساسية ضمن هذا الإطار، إذ توفر الصلة الاحتمالية بين معلمات الطلب الهندسي ومقاييس الضرر، وتتيح تحديد chap:trustregion في الأداء الإنشائي وغير الإنشائي كمياً.

71.1 نماذج فكرية جديدة: هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) 2125
71.1.1 قيود تصميم معامل الحمل والمقاومة (LRFD) 2125
71.1.2 الجزء I: أهداف أداء صريحة . . 2125
71.1.3 الجزء II: التحديد المباشر للنتائج الوظيفية والاقتصادية كمياً: . . . 2127
71.1.4 إجراء تطبيق PBEE 2130
71.2 من الاستجابة إلى الضرر: منحنيات الهشاشة 2133
71.2.1 الأسس والتعريفات 2133
71.2.2 تطوير منحنيات الهشاشة . . . 2134
71.2.3 التمثيلات الرياضية 2135
71.2.4 الدالة المستمرة مقابل المصفوفة المنفصلة 2135
71.3 الدور في إطار PBEE 2138
71.4 مثال 71.1: مثال كامل على PBEE . . 2138
71.5 المحطات التاريخية والوثائق التأسيسية . 2143

الملاحق

الجزء الأول: مواد مرجعية أساسية





*يشير الرمز ⊇ إلى أن التقييم الاحتمالي للمخاطر يُعامل بوصفه مجموعة أشمل من هندسة الزلازل القائمة على الأداء.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71.1 نماذج فكرية جديدة: هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)

71.1.1 قيود تصميم معامل الحمل والمقاومة (LRFD)

1 يبدأ هذا الفصل بإعادة النظر في الأفكار الرئيسية المقدمة في *الفاصل* (chapter 65) لإبراز قيود فلسفات التصميم التقليدية.

2 يُستخدم تصميم معامل الحمل والمقاومة (LRFD)، الذي نوقش في §35.3، على نطاق واسع في الهندسة الإنشائية، ولا سيما تصميم الفولاذ والخرسانة. ومع أن LRFD يشتمل على مفاهيم احتمالية لمراعاة أوجه عدم اليقين في الأحمال وخصائص المواد، فإنه يطرح عدة قيود تحفز الانتقال نحو PBEE:

فحص أمان أحادي المستوى: يضمن LRFD السلامة الإنشائية تحت أحمال معامَلة محددة مسبقاً، لكنه لا يعالج أهداف أداء أوسع مثل قابلية الإصلاح بعد الزلزال، أو مدة التعطل الوظيفي، أو الصمود.

غياب المراعاة الصريحة للضرر: يركز LRFD على منع الانهيار تحت الحالات الحدية القصوى، دون تحديد الضرر المتوقع عبر شدات زلزالية مختلفة كمياً. ونتيجةً لذلك، قد تبقى المنشآت قائمة لكنها تتعرض لضرر واسع وتتكبد تكاليف إصلاح مرتفعة.

عدم المرونة لسيناريوهات التحميل المعقدة: يعتمد LRFD على تراكيب خطية للأحمال ومعاملات ثابتة، مما يحد قدرته على معالجة السلوك اللاخطي، والتدهور، والضرر التراكمي تحت التحميل الزلزالي الديناميكي.

هوامش أمان موحدة: يطبق LRFD معاملات أمان عامة بصرف النظر عن نوع الإشغال أو الخطر الزلزالي الخاص بالموقع. ولذلك كثيراً ما تُصمم المرافق الحرجة والمباني العادية لمستويات الأمان نفسها، بصرف النظر عن اختلاف النتائج المجتمعية للفشل.

غياب التكامل مع خطر الموقع الخاص: لا يشتمل LRFD على التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA)، ومن ثم يهمل التباين chap:trustregion الكامنين في الحركات الأرضية الزلزالية في مواقع بعينها.

3 طُورت هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) للتغلب على قيود المناهج الوصفية القائمة على الأكواد. وهي تقدم إطاراً مستنيراً بالمخاطر يقيم صراحةً الأداء الإنشائي عبر شدات زلزالية متعددة.

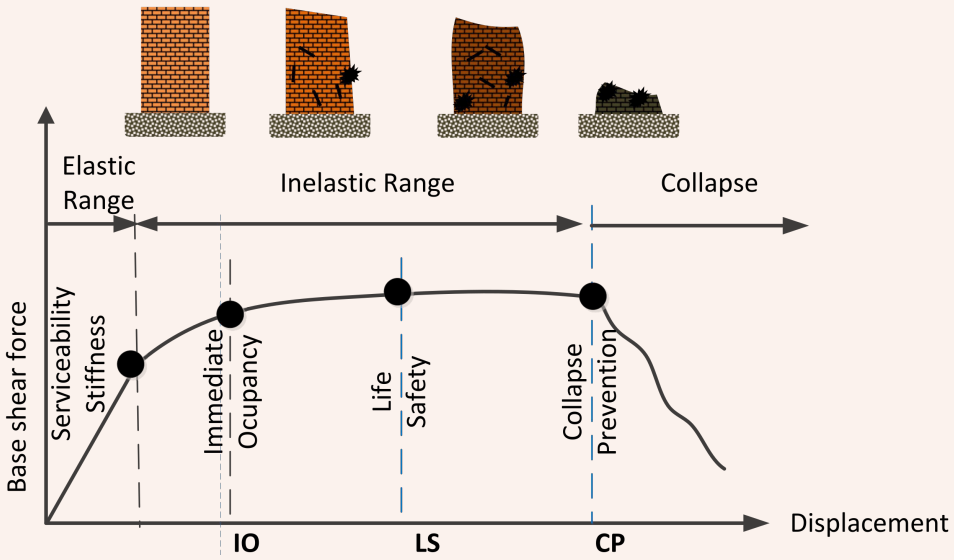
71.1.2 الجزء I: أهداف أداء صريحة

71.1.2.1 الطريقة

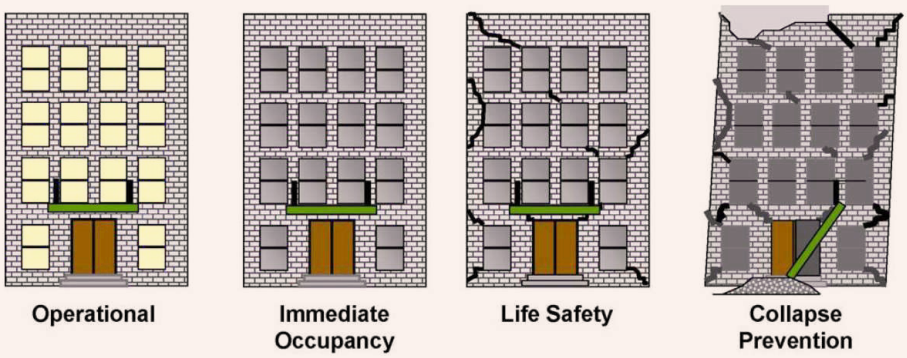
4 لمعالجة القيود المذكورة سابقاً، قدم الجيل الأول من PBEE أهداف أداء منفصلة للمباني الخاضعة للطلبات الزلزالية (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a)، الشكل 71.2،

- *تشغيلي (O)*: لا ضرر مهم؛ يبقى المنشأ عاملاً بالكامل.
- *إشغال فوري (IO)*: ضرر طفيف؛ المبنى آمن وقابل للإصلاح.
- *سلامة الأرواح (LS)*: ضرر متوسط؛ المنشأ قابل للإصلاح لكنه غير عامل دون تدخل.
- *منع الانهيار (CP)*: ضرر شديد؛ يتجنب المبنى الانهيار الكلي لكنه قد يكون قريباً من الفشل.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل 71.1: وصف مفاهيمي للجيل الأول من PBEE؛ (Whittaker03, Hamburger **and** Mahoney, 2003)



شكل 71.2: رسوم توضيحية لمستويات الأداء المنفصلة، (FEMA, 2012)

5 يُوضح هذا الإطار المفاهيمي في الشكل 71.1 ويُلخص أكثر في الجدول 71.1 (Whittaker03, Hamburger **and** Mahoney, 2003).

71.1.2.2 قيود PBEE-1

6 رغم ابتكاراته، كانت لـPBEE-1 عدة أوجه قصور:

- تقييم *قائم على المكونات*: قُيّم الأداء وفق حدود المكونات المفردة لا سلوك النظام ككل.
- معايير قبول *ذاتية*: استندت عتبات أداء كثيرة إلى حكم الخبراء، وافتقرت إلى تحقق تجريبي متين.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول 71.1: نطاق ضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية لمستويات أداء مستهدفة مختلفة للمباني (الجدول FEMA-356, 2000) (C1-2)

تشغيلي	الإشغال الفوري	سلامة الأرواح	منع الانهيار	مستويات الأداء
خفيف جداً	خفيف	متوسط	شديد	الضرر الكلي
لا انجراف دائم. يحتفظ المنشأ إلى حد كبير بمقاومته وصلابته الأصليتين. تشققات طفيفة في الواجهات والقواطع والأسقف وكذلك العناصر الإنشائية. تعمل جميع الأنظمة المهمة للتشغيل العادي.	لا انجراف دائم. يحتفظ المنشأ إلى حد كبير بمقاومته وصلابته الأصليتين. تشققات طفيفة في الواجهات والقواطع والأسقف وكذلك العناصر الإنشائية. يمكن إعادة تشغيل المصاعد. تعمل الحماية من الحريق.	تبقى بعض المقاومة والصلابة المتبقية في جميع الطوابق. تعمل العناصر الحاملة لأحمال الجاذبية. لا فشل خارج المستوى للجدران ولا انقلاب للحواجز. بعض الانجراف الدائم. ضرر في القواطع. قد يتجاوز إصلاح المبنى الجدوى الاقتصادية.	صلابة ومقاومة متبقيتان ضئيلتان، لكن الأعمدة والجدران الحاملة تعمل. انجرافات دائمة كبيرة. بعض المخارج مسدودة. فشلت الحشوات والحواجز غير المدعمة أو قاربت الفشل. المبنى قريب من الانهيار.	المكونات الإنشائية
ضرر مهمل. تتوفر الكهرباء والمرافق الأخرى، وربما من مصادر احتياطية.	المعدات والمحتويات آمنة عموماً، لكنها قد لا تعمل بسبب عطل ميكانيكي أو غياب المرافق.	خُففت مخاطر السقوط، لكن كثيراً من الأنظمة المعمارية والميكانيكية والكهربائية متضررة.	ضرر واسع.	المكونات غير الإنشائية

- تركيز غير *كافٍ* على غير *الإنشائي*: تجاهلت الإجراءات إلى حد كبير الضرر غير الإنشائي، رغم أثره المهم في الخسائر والوظيفة.
- *نتائج* غير متحققة وتحفظ: لم تُتحقق تنبؤات الأداء بدقة، مما أدى غالباً إلى تصاميم متحفظة.
- *انفصال أصحاب المصلحة*: لم يعالج الإطار أولويات أصحاب المصلحة مثل كلفة الإصلاح، أو مدة التعطل، أو استمرارية الأعمال.
- *احتمال المسؤولية القانونية*: عرّض سوء فهم أهداف الأداء بوصفها ضمانات المهندسين لخطر قانوني.

7 حفزت هذه القيود تطوير إطار أكثر شمولاً—PBEE-2.

71.1.2.3 التصميم مقابل التحليل

8 كما تميز الهندسة الإنشائية (§35.1.1) بين التصميم والتحليل، توسع PBEE هذه الثنائية:

التصميم الزلزالي القائم على الأداء (PBSD): تصميم منشآت جديدة لتحقيق أهداف أداء محددة تحت التحميل الزلزالي.

التقييم القائم على الأداء (PBA): تقييم كمي لأداء منشأ، ينطبق على المباني القائمة والجديدة معاً.

71.1.3 الجزء II: التحديد المباشر للنتائج الوظيفية والاقتصادية كمياً:

71.1.3.1 مقدمة

9 تعني PBEE تصميم المرافق الهندسية وتقييمها وتنفيذها بحيث يلبي أداؤها تحت الأحمال الشائعة والقصوى احتياجات الملاك والمستخدمين والمجتمع وأهدافهم المتنوعة.

10 وفي 1997 قرر مركز أبحاث هندسة الزلازل في المحيط الهادئ (PEER) تطوير منهجية أكثر متانة لهندسة

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الزلازل القائمة على الأداء، سُميت PBEE للجيل التالي (وتسمى أيضاً PBEE-2 أوPEER PBEE). ويسهل إطار PEER PBEE الذي طوره PEER *الحساب المباشر لآثار* chap:trustregion والعشوائية في كل خطوة من الإجراء القائم على الأداء.

11 وبصورة أكثر تحديداً:

- يقيم التصميم الزلزالي القائم على الأداء صراحةً كيف يُرجح أن يؤدي المبنى، في ظل *الخطر* الذي يُرجح أن يتعرض له، مع مراعاة أوجه عدم اليقين الكامنة في تحديد الخطر المحتمل وأوجه عدم اليقين في تقييم الاستجابة الفعلية للمبنى.
- على خلاف LRFD، فإنه لا يقصر نفسه على مستوى خطر واحد، بل مستويات متعددة.
- يُقاس الأداء بدلالة احتمال وقوع *إصابات*، وتكاليف إصلاح واستبدال، ومدة إصلاح، ووضع لافتة عدم الأمان.
- يمكن تقييم الأداء لـسيناريو زلزال أو شدة معينة، أو مع مراعاة جميع الزلازل التي قد تقع واحتمال كل منها خلال فترة زمنية محددة.
- يُعبّر عن الأداء بسلسلة من مستويات الأداء المنفصلة المحددة بوصفها تشغيلياً، وإشغالاً فورياً، وسلامة الأرواح، ومنع الانهيار.
- قدم مفهوم *الأداء* المرتبط بضرر المكونات الإنشائية وغير الإنشائية معاً. وطُورت أهداف الأداء بربط أحد مستويات الأداء هذه بمستوى محدد من الخطر الزلزالي.
- هو واقع الممارسة بين الشركات المتقدمة، وهو راسخ جيداً
- غير أنه:

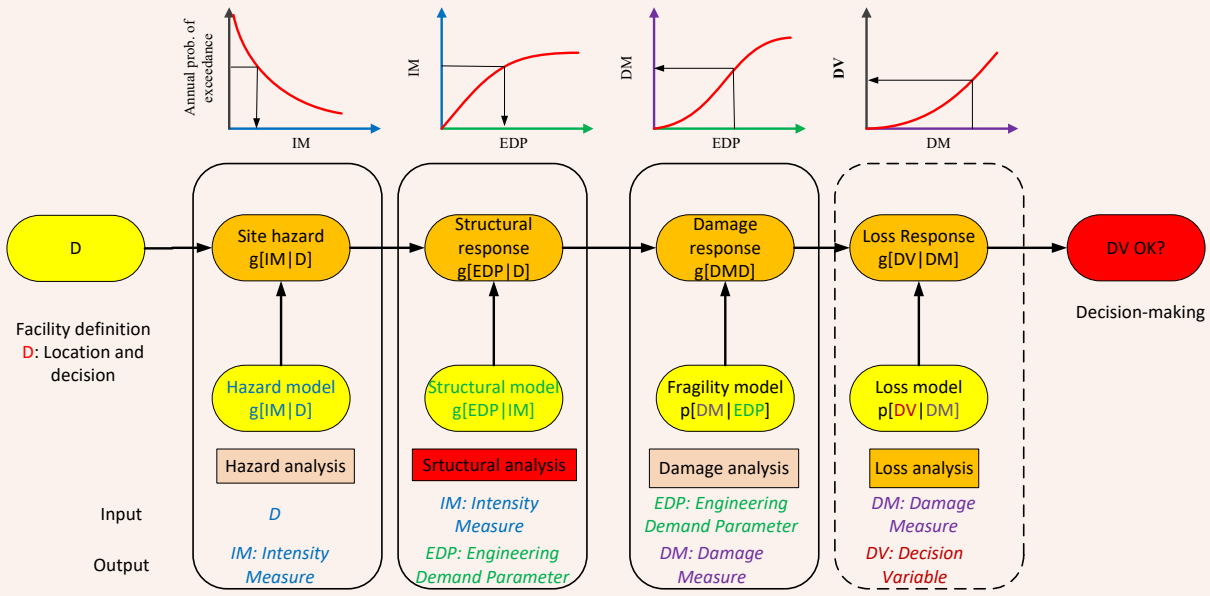
  – الحالات الحدية قائمة على المكونات وليست على النظام كله حقيقةً، (ماذا لو فشل مكون واحد، هل يطلق انهياراً متتالياً؟)
  – يعالج حدث MCE فقط (50years/%2).
  – معالجة محدودة لـchap:trustregion والاحتمال.
  – معلومات محدودة للتصميم فوق الكود.

71.1.3.2 الإطار العام

12 يظهر الإطار العام لـPEER PBEE في الشكل 71.3. وهو يقسم تقييم الأداء الزلزالي إلى أربع خطوات رئيسية، الشكل 71.3:

1. *تحليل الخطر*: يحدد احتمال التعرض لمستويات مختلفة من الاهتزاز الأرضي في موقع معين باستخدام *التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي* (chapter 66، PSHA).
2. *التحليل الإنشائي*: يقيم الاستجابة الإنشائية للأحمال الزلزالية، مع إدراج *التحليل الديناميكي اللاخطي* ومعلمات الطلب الهندسي (chapter 68، EDPs).
3. *تحليل الضرر*: يستخدم معلمات الاستجابة لتقدير الضرر المادي لـ*المكونات الإنشائية وغير الإنشائية*، chapter 69.

4. *تحليل الخسائر*: يترجم الضرر إلى *خسائر اقتصادية*، ومدة *تعطل*، وتقديرات *إصابات*، بما يتيح اتخاذ قرارات قائمة على الكلفة، chapter 70.



شكل 71.3: المكونات الأربعة لـPBEE

[13] تُمثل نتائج كل خطوة من هذه الخطوات بمتغير معمم: مقياس الشدة (IM)، ومعلم الطلب الهندسي (EDP)، ومقياس الضرر (DM)، ومتغير القرار (DV). ويمكن التعبير عن هذه العملية بتكامل ثلاثي هو تطبيق لنظرية الاحتمال الكلي (Porter, 2003): index[p2]damage! measure index[p2]decision variable

$$g\,[\mathrm{DV}|\mathrm{D}] = \int\int\int p\,[\mathrm{DV}|\mathrm{DM},\mathrm{D})\,p\,[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP},\mathrm{D}] \\ p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM},\mathrm{D}]\,g\,[\mathrm{IM}|\mathrm{D}]\,d\mathrm{IM}.d\mathrm{EDP}.d\mathrm{DM} \tag{71.1}$$

حيث يدل $p\,[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]$ على دالة التوزيع التراكمي المتمم لـX المشروط بـY، ويدل $g\,[\mathrm{X}|\mathrm{Y}]$ على متوسط معدل الوقوع السنوي لـX في ظل Y، ويدل D على موقع المرفق وخصائصه الإنشائية وغير الإنشائية وغيرها. ولاحظ أننا سنحذف مستقبلاً الاشتراط على D للتبسيط.

IM: يصف مقياس *الشدة* خصائص الحركة الأرضية للزلزال كمياً. ويُعبّر عن هذا المعلم عادةً بدالة لمتوسط الاحتمال السنوي للتجاوز، $g\,[\mathrm{IM}]$.

EDP: يصف معلم *الطلب الهندسي* استجابة المكونات الإنشائية وغير الإنشائية والمحتويات للاهتزاز الزلزالي. ونواتج هذه الخطوة هي احتمالات شرطية، $p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM}]$.

DM: يصف مقياس *الضرر* الحالة المادية للمكونات الإنشائية وغير الإنشائية. وتشمل DMs أوصافاً فعالة للضرر لتوصيف الوظيفة، والجاهزية للإشغال، وسلامة الأرواح، والإصلاحات اللازمة للمبنى. ونواتج هذه الخطوة احتمالات شرطية، $p\,[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP}]$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

DV: يعمل متغير *القرار* على ترجمة تقديرات الضرر إلى كميات مفيدة للمكلفين باتخاذ قرارات مرتبطة بالمخاطر. وتشمل DVs المستخدمة حالياً، والمحددة بوصفها مقاييس قرار، الخسائر المالية المباشرة، ومدة التعطل (أو مدة الاستعادة)، والوفيات (الإصابات). ونواتج هذه الخطوة احتمالات شرطية، p [DV|DM].

14 كما ذُكر سابقاً، تُستخدم الخسائر المالية المباشرة، ومدة التعطل، والإصابات متغيرات قرار في منهجية PBEE-2 لتقييم أداء المنشآت. يستخدم Applied Technology Council, 2012b ثلاثة أنواع من تقييمات الأداء: 1) قائم على الشدة، و2) قائم على السيناريو، و3) قائم على الزمن.

71.1.3.3 الفروق بين PBEE 1 وPBEE 2

يمثل التطور من PBEE 1 (هندسة الزلازل القائمة على الأداء للجيل الأول) إلى PBEE 2 (هندسة الزلازل القائمة على الأداء للجيل الثاني) تقدماً مهماً في المنهجية والنطاق والتطبيق. وفيما يأتي نظرة عامة إلى أهم الفروق، ملخصة في الجدول 71.2.

الفروق الرئيسية

- *الإطار المنهجي*: اعتمد PBEE 1 على طرائق حتمية ومعايير وصفية، بينما قدم PBEE 2 إطاراً احتمالياً متعدد التخصصات (Center, 2010).
- *الخطوات التحليلية*: صاغ PBEE 2 إطاراً معيارياً يدمج تحليل الخطر، والتحليل الإنشائي، وتحليل الضرر، وتحليل الخسائر، وهي خطوات لم تُفصل صراحةً في PBEE 1 (FEMA, 2012).
- *النطاق*: وسع PBEE 2 تركيزه ليشمل الأنظمة غير الإنشائية، والآثار الاجتماعية، والاعتبارات الاقتصادية، على خلاف نهج PBEE 1 المتمركز حول المنشأ (American Society of Civil Engineers, 2017).
- *تمثيل الحركة الأرضية*: يدمج PBEE 2 التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA) واختيار حركة أرضية خاصة بالموقع، بينما استخدم PBEE 1 أوصافاً مبسطة للخطر (Civil Engineers, 2022).
- *مقاييس الأداء*: يقيم PBEE 2 تكاليف الإصلاح، ومدة التعطل، والوفيات، والوظيفة، إضافةً إلى السلامة الإنشائية (FEMA, 2012).
- *اتخاذ القرار*: يوفر PBEE 2 معلومات قابلة للتنفيذ لاتخاذ قرارات مستنيرة بالمخاطر، متجاوزاً امتثال PBEE 1 القائم على الكود (Center, 2010).

71.1.4 إجراء تطبيق PBEE

15 بعد استكشاف المكونات الأربعة الأساسية لـPBEE—الخطر، والاستجابة الإنشائية، والضرر، والخسائر—من أسفل إلى أعلى، نصف الآن التسلسل الكامل للخطوات اللازمة لتطبيق تقييم هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE). وهذا المنظور الإجرائي من أعلى إلى أسفل مفيد بصفة خاصة للمهندسين والمحللين الذين يطبقون PBEE عملياً.

جدول 71.2: مقارنة بين PBEE 1 وPBEE 2

الجانب	PBEE 1	PBEE 2
المنهجية	حتمية، وصفية	احتمالية، متعددة التخصصات (Center, 2010)
الخطوات التحليلية	دمج ضمني للخطر والطلب والضرر	إطار معياري: تحليلات الخطر، والإنشاء، والضرر، والخسائر (FEMA, 2012)
النطاق	الأنظمة الإنشائية فقط	الأنظمة الإنشائية وغير الإنشائية، والآثار الاجتماعية والاقتصادية (American Society of Civil Engineers, 2017)
الحركة الأرضية	أوصاف مبسطة للخطر	التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (PSHA)، واختيار خاص بالموقع (Civil Engineers, 2022)
مقاييس الأداء	السلامة الإنشائية (مثل سلامة الأرواح)	السلامة الإنشائية، وتكاليف الإصلاح، ومدة التعطل، والوفيات، والوظيفة (FEMA, 2012)
اتخاذ القرار	امتثال قائم على الكود	قرارات مستنيرة بالمخاطر ومركزة على أصحاب المصلحة (Center, 2010)

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

16 تتألف العملية من مجموعة تحليلات متداخلة، تنتقل من الخطر الزلزالي إلى متغيرات القرار (DVs)، وتدرج أوجه عدم اليقين في كل خطوة. ويمكن بيان الخطوات كما يأتي:

1. عرّف المرفق وأهداف الأداء:

- صف المنشأ وموقعه وإشغاله واستخدامه.
- حدد أولويات أصحاب المصلحة (مثل سلامة الأرواح، والاستمرارية الوظيفية، وحدود كلفة الإصلاح، وعتبات مدة التعطل).
- اختر متغيرات القرار المناسبة (مثل الإصابات، والكلفة، ومدة التعافي).

2. أجرِ التحليل الاحتمالي للخطر الزلزالي (chapter 66، PSHA):

- طور منحنيات خطر للحركة الأرضية خاصة بالموقع لمقاييس شدة مختارة (IMs)، وعادةً التسارع الطيفي عند الفترة الأساسية.
- اختر حركات أرضية ممثلة لفترات عودة أو مستويات خطر مختلفة (مثل 10%، و2%، و0.5% خلال 50 سنة).

3. أجرِ التحليل الإنشائي لاشتقاق معلمات الطلب الهندسي (chapter 68، EDPs):

- أنشئ نموذجاً لاخطياً للمنشأ (أو استخدم نماذج قائمة).
- أجرِ تحليلات ديناميكية لاخطية أو تحليلات سجل الاستجابة تحت الحركات الأرضية المختارة.
- استخرج EDPs مثل الانجراف بين الطوابق، وتسارع الطابق، وتشوه المكونات.
- قدّر توزيعات الاحتمال الشرطية $p(\text{EDP}|\text{IM})$.

4. أجرِ تحليل الضرر، chapter 69:

- اربط EDPs بمقاييس الضرر (DMs) للمكونات الإنشائية وغير الإنشائية معاً.
- استخدم دوال الهشاشة أو العلاقات التجريبية لتقييم $p(\text{DM}|\text{EDP})$.
- راعِ العتبات الخاصة بالمكونات والوظيفة بعد الحدث.

5. أجرِ تحليل الخسائر، chapter 70:

- اربط DMs بمتغيرات القرار (DVs)، مثل الإصابات، وكلفة الإصلاح، ومدة التعطل.
- قيّم $p(\text{DV}|\text{DM})$ باستخدام نماذج الخسائر أو دوال التعافي.
- اجمع الخسائر عبر المكونات للحصول على مقاييس الخسارة الكلية المتوقعة.

6. كامل عبر جميع أوجه عدم اليقين:

- أجرِ التكامل الاحتمالي عبر IM وEDP وDM وDV باستخدام نظرية الاحتمال الكلي:

$$g[\text{DV}] = \int\int\int p[\text{DV}|\text{DM}]\, p[\text{DM}|\text{EDP}]\, p[\text{EDP}|\text{IM}]\, g[\text{IM}]\, d\text{IM}\, d\text{EDP}\, d\text{DM}$$

- استخدم محاكاة مونت كارلو أو التكامل العددي عندما لا تتوفر تعبيرات مغلقة الصيغة.

7. أبلغ النتائج وفسرها:

- اعرض نواتج مثل الخسارة السنوية المتوقعة (EAL)، ومنحنيات تجاوز الخسارة، والنتائج القائمة على السيناريو.
- استخدم النتائج لتوجيه تخفيف المخاطر، أو قرارات التصميم، أو ترتيب أولويات التدعيم، أو التواصل مع أصحاب المصلحة.

17 يوفر هذا التسلسل الإجرائي خريطة طريق عملية لتطبيق PBEE في التصميم والتقييم معاً. ومع إمكان تطوير كل خطوة بمستويات متفاوتة من التفصيل والتطور، يضمن الإطار المتكامل قياس الأداء بدلالة النتائج المهمة للمجتمع.

71.2 من الاستجابة إلى الضرر: منحنيات الهشاشة

18 يربط إطار PBEE المبين في القسم السابق المدخلات الزلزالية بمتغيرات قرار ذات معنى عبر سلسلة من العلاقات الشرطية: مقاييس الشدة (IMs)، ومعلمات الطلب الهندسي (EDPs)، ومقاييس الضرر (DMs)، ومتغيرات القرار (DVs). وبينما ينتج التحليل الإنشائي معلمات EDP مثل الانجراف بين الطوابق أو تسارعات الطوابق، يتطلب اتخاذ القرار معلومات عن الضرر ونتائجه.

19 دور *منحنيات الهشاشة* هو ردم هذه الفجوة—بين الاستجابة الإنشائية والضرر المادي. وتحدد هذه المنحنيات احتمال تجاوز مكون إنشائي أو غير إنشائي لحالة ضرر محددة عند مستوى معين من الطلب الزلزالي (عادةً EDP) كمياً. ولذلك فهي الصلة الاحتمالية بين التحليل الإنشائي اللاخطي ونمذجة الضرر/الخسائر في PBEE.

20 دالة الهشاشة محورية في PBEE، ولا سيما في إضفاء الصيغة الرسمية على chap:trustregion في بدء الضرر وتطوره. وهي تتيح الانتقال من الفحوص الحتمية إلى وصف احتمالي للأداء الإنشائي. وتقدم الأقسام الآتية تعريفات الهشاشة، والفروق، وطرائق النمذجة، ودورها ضمن إطار PBEE الأوسع.

71.2.1 الأسس والتعريفات

21 يمثل منحنى *الهشاشة* الاحتمال الشرطي لتجاوز نظام أو مكون إنشائي حالة حدية (LS) معينة بدلالة مقياس شدة *(IM)*، مثل التسارع الطيفي (Sa) أو التسارع الأرضي الأقصى (PGA):

$$P[\text{LS}|\text{IM} = im]$$

22 وبصورة أكثر رسمية، يمكن التعبير عن الهشاشة كما يأتي:

$$P[D \geq C_{LS}|\text{IM} = im] = P\left[\frac{D}{C_{LS}} \geq 1 \mid \text{IM} = im\right]$$

حيث D الطلب وC_{LS} عتبة السعة للحالة الحدية.

23 في PBEE، يُعبر عن الهشاشة غالباً على مستوى EDP إلى DM:

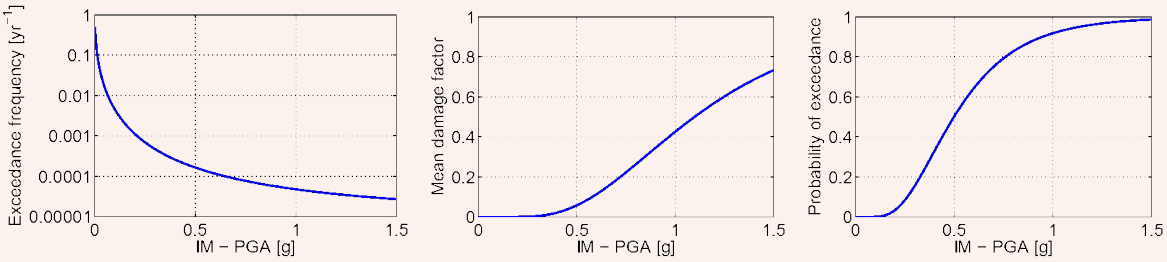
$$P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

تعكس هذه الصيغة كيفية ربط الهشاشة الاستجابة الإنشائية بالضرر المتوقع.

المصطلحات: الهشاشة مقابل قابلية التأثر مقابل الخطر

- تحدد *الهشاشة* احتمال تجاوز حالة ضرر في ظل طلب معين كمياً.
- تحدد *قابلية التأثر* الخسائر المتوقعة (مثل الكلفة، ومدة التعطل، والإصابات) في ظل الخطر كمياً.
- تحدد *منحنيات الخطر* تكرار تجاوز قيم IM (مخرج PSHA) كمياً.

24 تدعم هذه العناصر الثلاثة مجتمعةً تقييم المخاطر وتقدير الخسائر. ويوضح الشكل 71.4 الفرق بينها.



(a) منحنى الهشاشة (b) منحنى قابلية التأثر (c) منحنى الخطر

شكل 71.4: مقارنة منحنيات الهشاشة الزلزالية وقابلية التأثر والخطر

71.2.2 تطوير منحنيات الهشاشة

مصادر بيانات الهشاشة

- تجريبية ميدانية: مشاهدات بعد الزلازل؛ حقيقية لكنها محدودة.
- تحليلية: محاكاة لاخطية للسجل الزمني (IDA، MSA).
- استدلالية: رأي الخبراء؛ تُستخدم عند ندرة البيانات.
- تجريبية مختبرية: اختبارات مختبرية؛ نادرة بسبب الكلفة.
- هجينة: تجمع البيانات التجريبية والتحليلية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

معالجة الانهيار والاستجابات القصوى

25 إذا لوحظ انهيار أو عدم استقرار عددي أثناء المحاكاة، فينبغي إعادة صياغة الهشاشة لمراعاة هذه الأحداث:

$$P[EDP \geq edp|IM] = P[EDP \geq edp|IM, \text{NoCollapse}](1-P[\text{Collapse}|IM])+P[\text{Collapse}|IM]$$

حالات ضرر مفردة مقابل متعددة

26 يمكن التعبير عن الهشاشة عبر سلسلة حالات حدية ($_i$LS)، تقابل كل منها حالة ضرر ($_i$DS). وعند نمذجتها تتابعياً:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_i|IM] - P[\text{LS}_{i+1}|IM]$$

27 أما في الأنظمة المتوازية:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_1|IM] \cdot P[\text{DS}_i|\text{LS}_1]$$

71.2.3 التمثيلات الرياضية

النموذج اللوغاريتمي الطبيعي (القائم على IM)

$$P[\text{LS}|IM = im] = \Phi\left(\frac{\ln(im) - \ln(\eta)}{\beta}\right)$$

حيث η السعة الوسيطة وβ التشتت.

النماذج الخطية المعممة (GLMs)

28 تعبر GLMs عن الهشاشة باستخدام دوال ربط (مثل probit وlogit وlog-log المتممة). فعلى سبيل المثال:

$$\text{Logit: } P = \frac{e^{\theta_0+\theta_1 IM}}{1+e^{\theta_0+\theta_1 IM}}$$

29 توفر GLMs مرونة في الشكل الدالي ويمكن استخدامها لتقييم ملاءمة النموذج عبر تمثيلات مختلفة.

71.2.4 الدالة المستمرة مقابل المصفوفة المنفصلة

30 يمكن أيضاً تصنيف نتائج تحليل الهشاشة وفق كيفية تمثيلها: إما دالة مستمرة (أي منحنى هشاشة) أو جدول قيم منفصلة يُعرف باسم مصفوفة احتمال الضرر (DPM) (Erberik, 2015).

31 يمكن تصنيف منحنيات الهشاشة وفق عدد الحالات الحدية التي تمثلها:

مفرد: يمثل احتمال تجاوز حالة حدية (LS) محددة أو عتبة لمعلم طلب هندسي (EDP).

متعدد: يمكن استخدام مجموعة منحنيات هشاشة تقابل حالات حدية مختلفة لوصف ملف حالة الضرر الكامل لنظام إنشائي.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

32 تحدد الحالات الحدية (LS) (انظر القسم 69.2) العتبات بين حالات الضرر المختلفة (DS)، التي يمكن وصفها نوعياً (مثل خفيف، ومتوسط، وواسع) أو كمياً باستخدام مؤشر ضرر (DI). وفي نظام ذي N_{LS} حالة حدية، توجد $N_{\text{DS}} = N_{\text{LS}} + 1$ حالة ضرر مقابلة. وتمثل حالة الضرر 0 (DS_0) الحالة غير المتضررة.

33 يمكن تعريف حالات الضرر بطريقتين متميزتين:

تتابعي: (أي مرتبة) يجب أن يتقدم النظام عبر DS_i قبل بلوغ DS_{i+1}. ويكون احتمال وجوده في حالة ضرر محددة:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im] - P[\text{LS}_{i+1} \mid \text{IM} = im], & 1 \leq i < N_{\text{DS}} \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im], & i = N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{71.2}$$

متزامن: (أي متوازٍ) تُقيَّم كل حالة ضرر بصورة مستقلة:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im] \cdot P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1], & 1 \leq i \leq N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{71.3}$$

34 لاحظ أنه في حالة التقييم المتزامن، قد يتجاوز مجموع احتمالات جميع حالات الضرر 1.0:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{DS}}} P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1] > 1.0$$

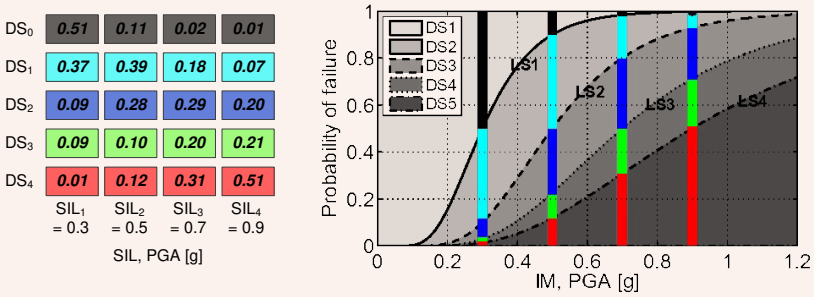
index[p2]Damage! Probability Matrix

35 إن مصفوفة احتمال الضرر (DPM): هي مصفوفة تعرض قيماً منفصلة لاحتمالات حالات الضرر عند مستويات مختارة من الشدة الزلزالية (SILs). يمثل كل عمود مستوى منفصلاً من IM، بينما يقابل كل صف حالة ضرر محددة. ومع أن كل منحنى هشاشة هو دالة مستمرة، فإن DPM تمثل أخذ عينات منفصلة من هذه الدوال عند قيم IM ثابتة.

منحنى الهشاشة مقابل سطح الهشاشة

36 يربط منحنى *الهشاشة* احتمال تجاوز حالة ضرر بمقياس شدة IM *واحد*. أما سطح الهشاشة فيأخذ في الحسبان متغيرات متعددة، الشكل 71.6:

- مقاييس شدة متجهية: الهشاشة بوصفها دالة في مقياسين أو أكثر من مقاييس الشدة، مثل $P[\text{LS}|IM_1, IM_2]$
- *الهشاشة المعتمدة على الزمن*: نمذجة التقادم أو التدهور من خلال $P[\text{LS}(t)|IM]$



(a) منحنى الهشاشة (b) مصفوفة احتمال الضرر

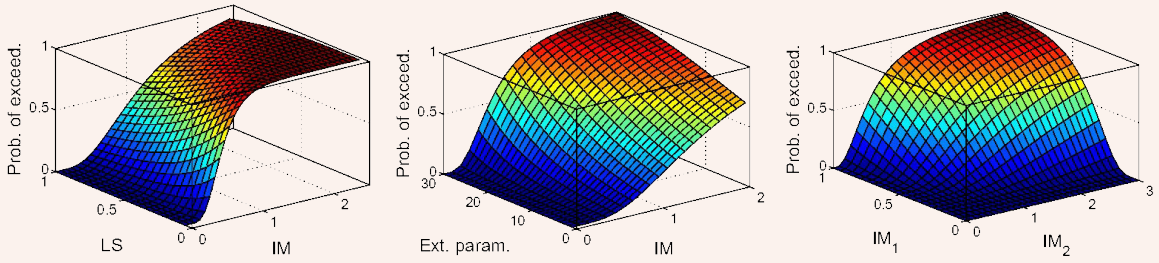
شكل 71.5: العلاقة بين منحنى الهشاشة ومصفوفة احتمال الضرر

جدول 71.3: مقارنة تمثيلات الهشاشة المستمرة والمنفصلة

السمة	منحنى الهشاشة (مستمر)	احتمال الضرر	مصفوفة (منفصلة)
التمثيل	دالة ملساء (مثل دالة التوزيع التراكمي اللوغاريتمية الطبيعية)	جدول احتمالات عند مستويات IM منفصلة	
دقة البيانات	غير محدودة ضمن المجال	مقتصرة على النقاط المأخوذة كعينات	
قابلية الاستخدام	الأفضل للأطر التحليلية	مفيدة للتقييمات القائمة على السيناريوهات	
صيغة التخزين التفسير	معاملات الدالة (مثل μ، β) دالي	مصفوفة قيم جدولي	

- *هشاشة مجال الحالة الحدية*: سطوح احتمالية عبر متصل من الحالات الحدية.

37 تكتسب هذه التعميمات أهمية خاصة للأنظمة المعقدة مثل السدود أو المحطات النووية.



(a) معلمًا IM (b) IM + معلم خارجي (c) IM + تغير LS

شكل 71.6: جوانب مختلفة من سطوح الهشاشة الزلزالية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71.3 الدور في إطار PBEE

38 في سياق هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)، تؤدي دوال الهشاشة دور روابط أساسية في سلسلة من العلاقات الشرطية التي تكمم انتقال chap:trustregion من الحركة الأرضية إلى الاستجابة الإنشائية والضرر، وصولاً في النهاية إلى مقاييس القرار مثل الخسارة الاقتصادية أو الإصابات.

39 يُصاغ هذا التقدم الاحتمالي، الشكل 71.3، في إطار PEER لـ PBEE، الذي يحسب التكرار السنوي المتوسط لتجاوز متغير قرار (DV) معين باستخدام مبرهنة الاحتمال الكلي. وتكامل الصياغة الأساسية على مقاييس الشدة (IM)، ومعلمات الطلب الهندسي (EDP)، ومقاييس الضرر (DM) للحصول على معدل تجاوز عتبة DV محددة:

$$\lambda_{\mathrm{DV}}(dv) = \int_{dm}\int_{edp}\int_{im} P[\mathrm{DV} \geq dv \mid \mathrm{DM} = dm] \times dP[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]\, dP[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]\, |\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{IM}}(im)|$$

40 في هذه الصياغة، تمثل الهشاشة الصلة الأساسية بين الاستجابة الإنشائية والضرر أو الخسارة الناتجين. ويكمم الحد $P[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]$ — الذي يسمى أحياناً هشاشة الطلب (Mackie **and** Stojadi-novic, 2005) — احتمال تجاوز طلب إنشائي لعتبة محددة عند مستوى معين من الشدة الزلزالية. وهذا يعكس الاستخدام التقليدي للهشاشة في الديناميكا الإنشائية.

41 إلا أن الهشاشة تُعرّف بصورة أضيق ضمن إطار PEER لـ PBEE، بوصفها الاحتمال الشرطي لتجاوز مقياس ضرر معين عند معرفة الاستجابة الإنشائية:

$$\text{Fragility} = P[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]$$

يلتقط هذا التعريف الانتقال من الاستجابة الفيزيائية إلى حالة الضرر، ويمثل خطوة احتمالية أساسية في منهجية PBEE (Porter, Kennedy **and** Bachman, 2007; Gunay **and** Mosalam, 2013). وتجدر الإشارة إلى أن المعادلتين 71.2 و71.3، اللتين تصفان احتمالات حالات الضرر التتابعية والمتزامنة، يمكن إعادة صياغتهما بدلالة تعبير الهشاشة هذا.

42 إجمالاً، تشكل دوال الهشاشة العمود الفقري لتحويل PBEE الخطر الزلزالي إلى مقاييس أداء قابلة للتطبيق.

71.4 مثال 71.1: مثال كامل على PBEE

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

يقدم هذا المثال مثالاً عددياً لهندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE)، ويغطي المكونات الأربعة الرئيسة كلها:

- *تحليل الخطر الزلزالي* - تقدير احتمالات تجاوز الحركة الأرضية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- *التحليل الإنشائي* - حساب الاستجابة الإنشائية تحت الأحمال الزلزالية.
- *تحليل الضرر* - تقييم الضرر المادي استناداً إلى الاستجابة.
- *تحليل الخسائر* - تقدير الخسائر الاقتصادية، وزمن التعطل، والإصابات.

وُضعت الافتراضات الآتية في هذه الدراسة:

- يقع الموقع في وسط مدينة لوس أنجلوس.
- المبنى إطار عزوم فولاذي من ثلاثة طوابق.
- الدور الأساسي للمبنى هو $T_1 = 1.2$ ثانية.
- تُقاس شدة الحركة الأرضية بالتسارع الطيفي $S_a(T_1)$.
- معلم الطلب الهندسي (EDP) هو النسبة القصوى للانجراف بين الطوابق θ.

تحليل الخطر الزلزالي

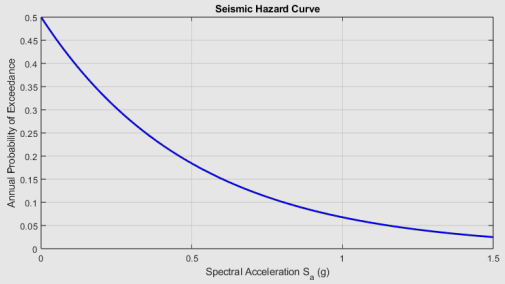
يُنَمذج احتمال تجاوز تسارع طيفي S_a على النحو الآتي:

$$\lambda(S_a) = Ae^{-BS_a}$$

حيث المعلمات الخاصة بالموقع هي:

- $A = 0.5$ (معامل التحجيم)
- $B = 2.0$ (معدل التناقص)

يظهر أدناه منحنى الخطر المحسوب استناداً إلى هذا النموذج.



التحليل الإنشائي: منحنى IDA

تتميز الاستجابة الإنشائية بنسبة الانجراف بين الطوابق θ، التي تُقَرّب كما يأتي:

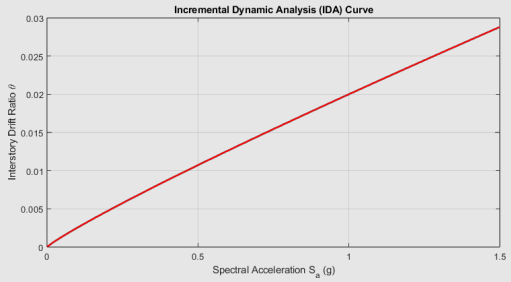
$$\theta = C_1 S_a^{C_2}$$

حيث الثوابت التجريبية هي:

- $C_1 = 0.02$
- $C_2 = 0.9$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تُشتق هذه العلاقة من التحليل الديناميكي المتزايد (IDA).



تحليل الضرر: منحنيات الهشاشة

تحدد منحنيات الهشاشة احتمال تجاوز حالات الضرر المختلفة استناداً إلى نسبة الانجراف θ:

$$P(D_i|\theta) = \Phi\left(\frac{\ln(\theta) - \ln(\theta_{50})}{\beta}\right)$$

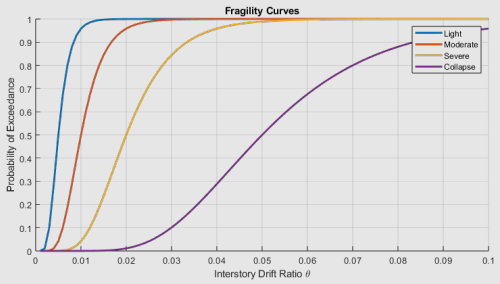
حيث:

- θ_{50} هي سعة الانجراف الوسيطة.
- $\beta = 0.4$ تمثل التشتت (معامل chap:trustregion).

حالات الضرر الأربع المدروسة هي:

حالة الضرر	θ_{50} نسبة الانجراف الوسيطة	β التشتت
ضرر خفيف	(%0.5) 0.005	0.4
ضرر متوسط	(%1.0) 0.01	0.4
ضرر شديد	(%2.0) 0.02	0.4
انهيار	(%5.0) 0.05	0.4

تظهر منحنيات الهشاشة أدناه



تقدير الخسائر

تُحسب الخسارة المتوقعة كما يأتي:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

حيث احتمالات الضرر ونتائج الخسارة هي:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإصابات (%)	زمن التعطل (أيام)	كلفة الإصلاح ($M)	حالة الضرر
0.0	2	0.1	خفيف
0.01	14	0.5	متوسط
0.1	60	2.0	شديد
5.0	300	10.0	انهيار

باستخدام احتمالات الضرر المحسوبة:

- كلفة الإصلاح المتوقعة: $0.59M.
- زمن التعطل المتوقع: 10.4 أيام.
- الإصابات المتوقعة: 0.01%.

تقدير الخسائر

تُحسب الخسارة المتوقعة كما يأتي:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

استُخدم احتمال تجاوز حالات الضرر المختلفة لإسناد الخسائر إلى كل عينة. واستُخدمت التوزيعات الاحتمالية لكل حالة ضرر لإدخال العشوائية في الحسابات.

عُرّفت حالات الضرر والاحتمالات المرتبطة بها كما يأتي:

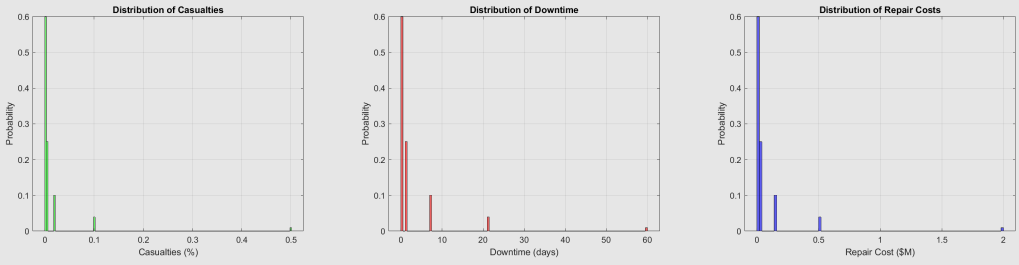
الخسائر المسندة	الاحتمال	حالة الضرر
كلفة الإصلاح: $0.1M، زمن التعطل: 2 يوم، الإصابات: 0.0%	90%	ضرر خفيف
كلفة الإصلاح: $0.5M، زمن التعطل: 14 يوم، الإصابات: 0.01%	60%	ضرر متوسط
كلفة الإصلاح: $2.0M، زمن التعطل: 60 يوم، الإصابات: 0.1%	10%	ضرر شديد
كلفة الإصلاح: $10.0M، زمن التعطل: 300 يوم، الإصابات: 5.0%	0%	انهيار

لإدخال التباين، طُبّقت توزيعات طبيعية على الخسائر بانحرافات معيارية مقدارها 10% من القيم المتوسطة.

تُلخص أدناه القيم المتوقعة الناتجة من المحاكاة.

المقياس	القيمة المتوقعة (المتوسط)	الانحراف المعياري
كلفة الإصلاح المتوقعة	1.08M$	0.25M$
زمن التعطل المتوقع	30.76 يوم	8.5 يوم
الإصابات المتوقعة	0.48%	0.12%

توضح المدرجات التكرارية الآتية توزيع كلف الإصلاح وزمن التعطل الناتج من محاكاة مونت كارلو.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث تُعطى احتمالات الضرر ونتائج الخسارة أدناه.

حالة الضرر	كلفة الإصلاح ($M)	زمن التعطل (أيام)	الإصابات (%)
خفيف	0.1	2	0.0
متوسط	0.5	14	0.01
شديد	2.0	60	0.1
انهيار	10.0	300	5.0

ملاحظة

في تحليل الخسائر ضمن PBEE، من الممكن جداً أن يكون الانحراف المعياري أكبر من المتوسط. ويحدث ذلك لأسباب عدة مرتبطة بطبيعة النمذجة الاحتمالية في تقدير الخسائر.

التوزيعات الملتوية إلى اليمين: غالباً ما تتبع توزيعات الخسائر في PBEE توزيعات ذات ذيول ثقيلة وملتوية إلى اليمين، مثل التوزيعات اللوغاريتمية الطبيعية أو توزيعات باريتو. ويمكن أن تُظهر هذه التوزيعات تبايناً كبيراً نسبةً إلى المتوسط.

الاستجابات الإنشائية اللاخطية: غالباً ما تُظهر نماذج الضرر والخسارة تبايناً عالياً بسبب chap:trustregion في خصائص الحركة الأرضية، والاستجابة الإنشائية، ودوال الهشاشة. ويمكن للخسائر النادرة ولكن القصوى أن تزيد الانحراف المعياري زيادة كبيرة.

chap:trustregion المضاعِفة في نماذج الكلفة: غالباً ما تجمع نماذج كلفة الإصلاح، المستخدمة في تقدير الخسائر، عدة أوجه من عدم اليقين، منها زمن الإصلاح، وكلف العمالة، وكلف المواد، والخسائر الاقتصادية غير المباشرة. وعندما تُمثل هذه بعشوائية مضاعِفة (مثلاً باستخدام توزيعات لوغاريتمية طبيعية)، يمكن أن يكون معامل الاختلاف (COV) كبيراً.

محاكاة مونت كارلو وسلوك الذيل الثقيل: عند استخدام أخذ عينات مونت كارلو لتقدير الخسائر، يمكن للتحققات القصوى (مثل الانهيار الإنشائي الكلي المؤدي إلى خسارة كارثية) أن ترفع الانحراف المعياري نسبةً إلى المتوسط.

بالنسبة إلى توزيع لوغاريتمي طبيعي بمعلمتين μ_X وσ_X، يُعطى المتوسط والانحراف المعياري بما يأتي:

$$E[X] = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$
$$\mathrm{Std}(X) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1}$$

يتجاوز الانحراف المعياري المتوسط عندما:

$$\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1} > 1 \tag{71.4}$$

وهذا يُبسّط إلى:

$$\sigma_X^2 > \ln(2) \approx 0.693 \tag{71.5}$$

في PBEE، تؤدي chap:trustregion في نماذج الضرر والكلفة غالباً إلى كون σ_X^2 أكبر من 1، مما يجعل $\sigma > \mu$ أمراً شائعاً.

يُعطى كود هذا المثال في §I.7.2.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

71.5 المحطات التاريخية والوثائق التأسيسية

43 تشكل تطور هندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE) بفعل سلسلة من الوثائق التأسيسية الصادرة عن FEMA وASCE وPEER وATC. وقد قدمت هذه الأعمال مفاهيم ومنهجيات أساسية تشكل اليوم العمود الفقري لتقييم المخاطر الزلزالية والتصميم الحديثين، الجدول 71.4.

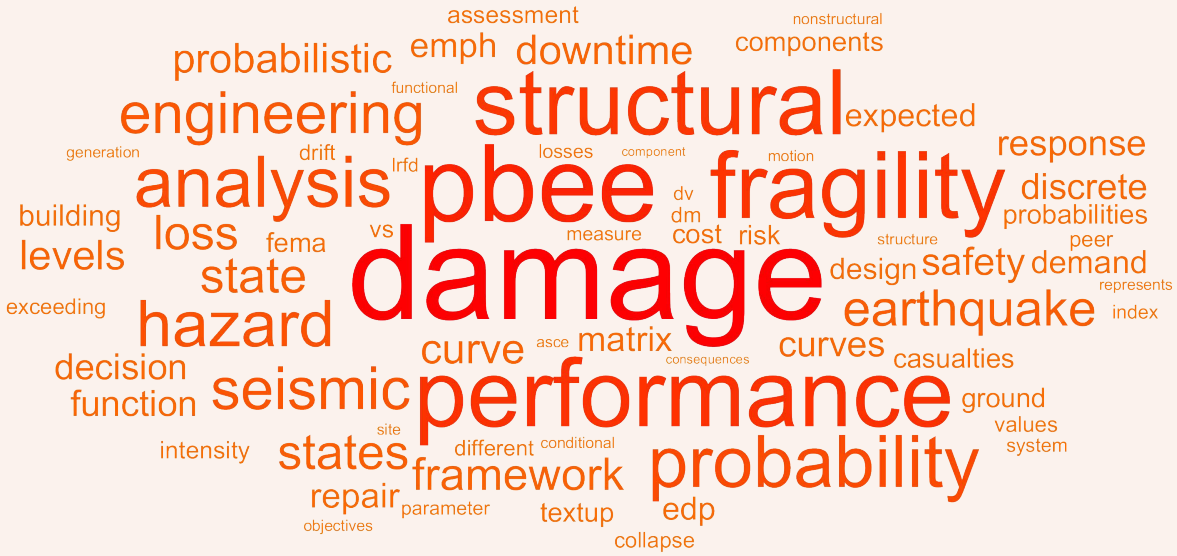
- *ATC-13 (1985)* — قدمت تقديرات مبكرة للهشاشة والخسائر قائمة على آراء الخبراء عبر أنواع المباني، ووضعت أساس تحليل القابلية للتضرر (ATC-13, 1985).
- *FEMA 273/274 (1997)* — قدمت أهداف أداء مرتبطة بمستويات الخطر الاحتمالية ومستويات الأداء مثل الإشغال الفوري، وسلامة الأرواح، ومنع الانهيار (FEMA, 1997b; FEMA, 1997a).
- *FEMA 356 (2000)* — معيار أولي دمج FEMA 273/274 في صيغة ملائمة للمهندسين، وشكل لاحقاً أساس ASCE 41 (FEMA-356, 2000).
- *إطار PEER (2003)* — أضفى مركز أبحاث هندسة الزلازل في المحيط الهادئ الصيغة الرسمية على منهجية PBEE-2، وقدم سلسلة IM–EDP–DM–DV والتكامل الاحتمالي (Porter, 2003; Center, 2010).
- *FEMA P-58 (2012–2021)* — قدمت إطاراً احتمالياً شاملاً لتقييم أداء المباني الفردية، بما في ذلك الوظائفية، وزمن التعطل، وتقدير الخسائر (FEMA, 2012).
- *ASCE 7* و*ASCE 41* — أدرجا التصميم والتقييم القائمين على الأداء في أكواد الهندسة الإنشائية السائدة (Civil Engineers, 2022; American Society of Civil Engineers, 2017).

44 أرست هذه الوثائق، إلى جانب المنهجيات المتطورة مثل نمذجة الخسائر القائمة على الهشاشة ومقاييس الأداء القائمة على الزمن، PBEE بوصفها أحدث الممارسات في الهندسة المستنيرة بالمخاطر الزلزالية.

جدول 71.4: الوثائق الأساسية في التطور التاريخي لهندسة الزلازل القائمة على الأداء (PBEE).

الإسهام الأساسي	الجهة	الوثيقة	السنة
تقديرات للهشاشة والخسائر قائمة على آراء الخبراء	ATC	ATC-13	1985
أهداف أداء مرتبطة بمستويات الخطر وحالات الضرر	FEMA	FEMA 273/274	1997
معيار أولي قاد إلى ASCE 41 للمباني القائمة	FEMA	FEMA 356	2000
سلسلة IM–EDP–DM–DV؛ نمذجة الأداء الاحتمالية	PEER	إطار PEER	2003
خسائر وزمن تعطل ووظائفية احتمالية خاصة بالمبنى	FEMA	FEMA P-58	2012–21
معايير تحميل حديثة تتضمن أحكاماً قائمة على الأداء	ASCE	ASCE 7	2022
تقييم زلزالي محدث للمباني القائمة	ASCE	ASCE 41	2023

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الملاحق

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

A الوحدات

A.1 وحدات النظام الدولي 2146
A.2 البادئات والمضاعفات المترية 2147
A.3 الوحدات ومعاملات التحويل 2147
A.4 ملخص القوة والطول والشغل والإجهاد في الوحدات المترية المختلفة 2148
A.5 تحويل الكميات الفيزيائية من الوحدات المترية إلى الوحدات الإمبراطورية . . . 2148

A.1 وحدات النظام الدولي

الكمية	الأبعاد		الوحدات
	تقنية	الوحدات الأساسية	التعريف
الطول	L	L	m
الزمن	t	t	s
الكتلة	M	M	Kg
درجة الحرارة	T	T	K
الكثافة الكتلية (ρ)	$M.L^{-3}$	$M.L^{-3}$	Kgm^{-3}
القوة (F)	F	$M.L.t^{-2}$	N
الإجهاد	$F.L^{-2}$	$M.L^{-3}.t^{-2}$	MPa

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

A.2 البادئات والمضاعفات المترية

البادئة	الاختصار	المضاعف
تيرا	T	10^{12}
غيغا	G	10^{9}
ميغا	M	10^{6}
كيلو	k	10^{3}
هكتو	h	10^{2}
ديكا	da	10
ديسي	d	10^{-1}
سنتي	c	10^{-2}
ميلي	m	10^{-3}
ميكرو	μ	10^{-6}
نانو	n	10^{-9}
بيكو	p	10^{-12}

A.3 الوحدات ومعاملات التحويل

الطول	m ((متر	1 inch = 0.0254 m	1 m = 39.37 inch
القوة	N ((نيوتن	1 lb = 4.4482 N	1 N = 0.22481 lb
الكتلة	Kg ((كيلوغرام	1 lbm = 0.45359 Kg	1 Kg=2.2046 lb
الكثافة	Kg/m^3	1 lbm/ft^3 = 16.018 Kg/m^3	1 Kg/m^3=0.062428 lbm/ft^3
درجة الحرارة	T	T ^oF=[(9/5)T^oC+32]	
التسارع	m/s^2	1 in/s^2 = 0.0254 m/s^2	
الصلابة	N/m	1 lb/in = 175.1 N/m	
الإجهاد	$Pa = N/m^2$	1 psi = 6,894.8 Pa	1 MPa = 145.04 psi
الشغل	J=N-m=	1 ft-lbf= 1.3558 J	1 J = 0.73756 ft-lbf

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

A.4 ملخص القوة والطول والشغل والإجهاد في الوحدات المترية المختلفة

القوة	الطول	الشغل	الإجهاد
F	L	FL	FL-2
N	m	J	Pa
	mm	mJ	MPa
kN	m	kJ	kPa
	mm	J	GPa
MN	m	MJ	MPa
	mm	kJ	TPa
Pa	m	N	
MPa	mm	N	
	m	MN	

A.5 تحويل الكميات الفيزيائية من الوحدات المترية إلى الوحدات الإمبراطورية

f'_c			f'_t		E	
psi	kg/cm^2	Mpa	psi	Mpa	ksi	Gpa
2,000	141	13.8	200	1.38	2,500	17.2
2,500	176	17.2	250	1.72	3,000	20.7
3,000	211	20.7	300	2.07	3,500	24.1
3,500	246	24.1	350	2.41	4,000	27.6
4,000	281	27.6	400	2.76	4,500	31.0
4,500	316	31.0	450	3.10	5,000	34.5
5,000	352	34.5	500	3.45	5,500	37.9
5,500	387	37.9	550	3.79	6,000	41.4
6,000	422	41.4	600	4.14	6,500	44.8
6,500	457	44.8	650	4.48	7,000	48.3

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

B الأحمال والتصميم القائم على المعطيات التجريبية

ينبغي قراءة الفصل 18 قبل هذا الملحق. **ملخص**

يقدم هذا الملحق بيانات تجريبية وإرشادات تصميمية للأحمال الإنشائية، استكمالا لفصول التحليل والتصميم. وينظم المادة بحسب الأحمال الميتة والحية والبيئية والخاصة، ويعرض أوزان المواد الحجمية وأحمال الأرضيات والأسقف ومعاملات الأحمال لمبان وإشغالات مختلفة. وتقدم الجداول قيما عملية للألمنيوم والطوب والخرسانة والفولاذ والخشب، ومواصفات لأنظمة الأرضيات والأسقف الشائعة، وإرشادات لتركيبات الأحمال في حالتي الحد الأقصى وحد الخدمة.

B.1 الأحمال الميتة 2149
B.2 أحمال الرياح 2150
B.2.1 مثال B.1: حمل الرياح 2151
B.3 الزلازل 2152
B.3.1 مثال B.2: حمل زلزالي على إطار 2160
B.3.2 مثال B.3: حمل زلزالي على مبنى شاهق 2161
B.4 أحمال الجسور 2162
B.5 تركيبات الأحمال 2162
B.6 تخفيض الحمل الحي 2163
B.6.1 مثال B.4: تخفيض الحمل الحي I 2163
B.6.2 مثال B.5: تخفيض الحمل الحي II 2164
B.7 موضع الحمل 2164

B.1 الأحمال الميتة

المادة	lb/ft^3	kN/m^3
ألمنيوم	173	27.2
طوب	120	18.9
خرسانة	145	33.8
فولاذ	490	77.0
خشب (صنوبر)	40	6.3

جدول B.1: الوزن الحجمي للمواد

المادة	lb/ft^2
خشب إنشائي	50-40
فولاذ	80-50
خرسانة مسلحة	150-100

جدول B.2: متوسط الحمل الميت الإجمالي في المباني

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

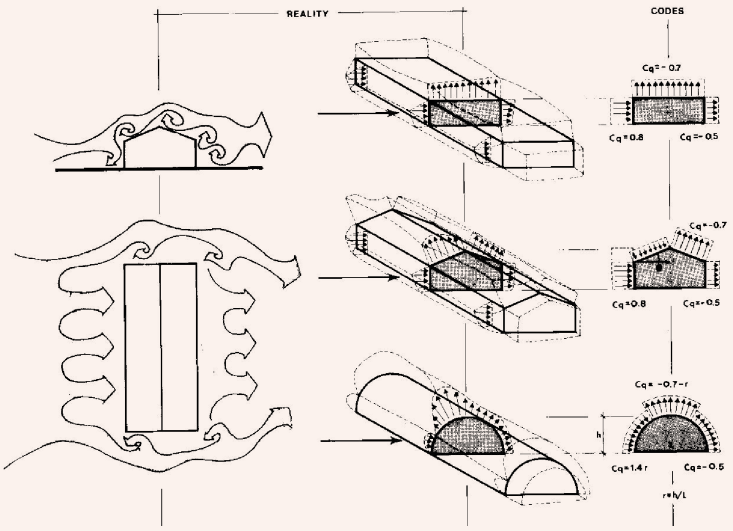
B.2 أحمال الرياح

1 راجع أولا §18.2.2.1.

2 قد تبلغ سرعة الرياح أثناء العواصف 150 ميلا في الساعة أو أكثر، وهو ما يقابل ضغطا ديناميكيا q_s يقارب 60 psf، أي ما يعادل متوسط الحمل الرأسي الناتج من الإشغال في المباني.

3 يزداد ضغط الرياح مع الارتفاع، الجدول B.5.

4 يسبب حمل الرياح شفطا على الجوانب المعاكسة للريح، الشكل B.1.



شكل B.1: أثر حمل الرياح في المنشآت (Schueller, 1996)

5 يجب تعديل هذا المقدار لمراعاة شكل المبنى ومحيطه. ويعطى ضغط التصميم p بوحدة psf بالعلاقة

$$p = C_e C_q I q_s$$

ويفترض أن يكون الضغط عموديا على الجدران والأسقف:

C_e **معامل ضغط السرعة:** يراعي الارتفاع والتعرض وهبات الرياح، أي ازدياد سرعة الرياح مع الارتفاع وطبيعة الجريان الديناميكية، الجدول B.6.

C_q **معامل الضغط:** معامل شكل يعطى للإطارات الجملونية في الجدول B.7.

I **معامل الأهمية:** يعطى في الجدول B.8. حيث:

I المنشآت الأساسية: المستشفيات، ومراكز الإطفاء والشرطة، والخزانات، وملاجئ مركبات الطوارئ، وتجهيزات القدرة الاحتياطية، ومنشآت مراكز الاتصالات الحكومية.

II المنشآت الخطرة: منشآت تؤوي أو تحمل كميات من مواد سامة أو متفجرة تكفي لتعريض الجمهور للخطر إذا انطلقت.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

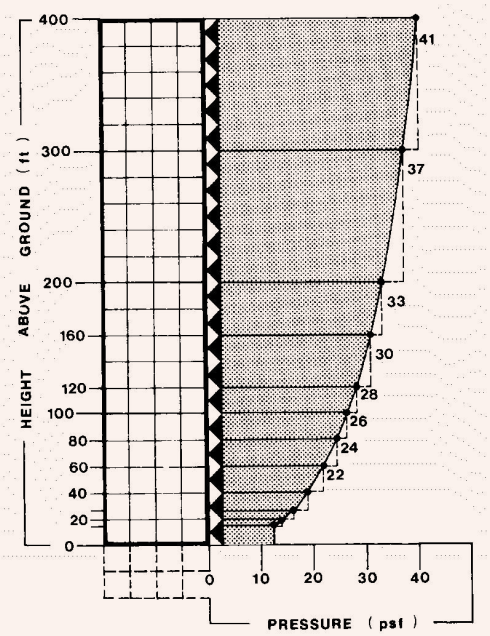
III منشآت الإشغال الخاص: منشآت تجمع عامة بسعة تزيد على 300 شخص؛ مدارس ومراكز رعاية بسعة تزيد على 250؛ كليات ومدارس تعليم بالغين بسعة تزيد على 500؛ مرافق طبية تضم 50 مريضا مقيما عاجزا فأكثر؛ السجون؛ منشآت يزيد إشغالها على 5,000 شخص؛ ومنشآت محطات القدرة والمرافق العامة اللازمة لاستمرار التشغيل.

IV منشآت الإشغال العادي: جميع المنشآت التي لا تندرج وظائفها أو إشغالاتها ضمن الفئات السابقة.

6 في التصميم الأولي للمباني العادية يمكن افتراض $C_e = 1.0$ و$C_q = 1.3$، فينتج

$$p = (1.3).020256V^2 = .00333V^2 \tag{B.1}$$

وهو ما يقابل ضغطا قدره 21 psf عند سرعة رياح 80 mph، الشكل B.2 والجدول B.9.



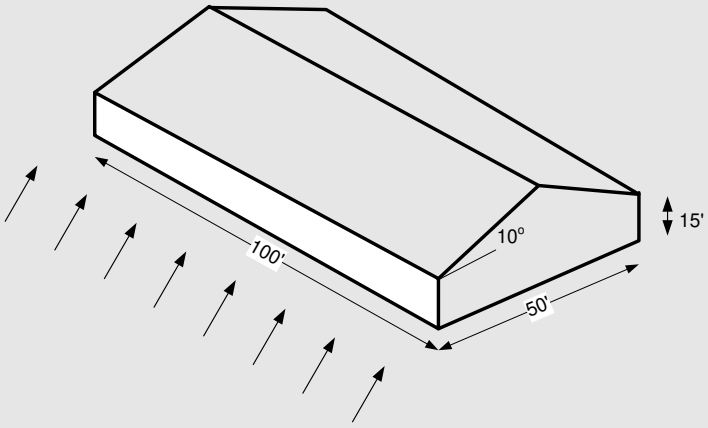
شكل B.2: ضغط الرياح التصميمي التقريبي للمنشآت العادية

B.2.1 مثال B.1: حمل الرياح

حدد قوى الرياح على المبنى المبين أدناه، والمقام في سانت لويس ومحاط بالأشجار.

1. من الشكل 18.3 تكون سرعة الرياح القصوى 70 mph. ولأن المبنى محمي نأخذ $C_e = 0.7$ و$I = 1$. ويكون ضغط الرياح الأساسي $q_s = 0.00256 \times (70)^2 = 12.54$ psf.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



2. ميل السقف $12 : 6.4 = 15 : 8$، فيكون $C_q = -0.7$ للجانبين. وللجدار المواجه للريح $C_q = 0.8$، وللجدار الخلفي $C_q = -0.5$.
3. الضغط على السقف $p = 0.7 \times (-0.7) \times 12.54 = -6.14$ psf، أي إن السقف يتعرض للرفع.
4. ضغط الجدار المواجه $0.7 \times 0.8 \times 12.54 = 7.02$ psf، وضغط الجدار الخلفي $0.7 \times (-0.5) \times 12.54 = -4.39$ psf (شفط).
5. يمكن أن يتغير اتجاه الرياح، ولذلك يجب تصميم كل مكون لمقاومة جميع تركيبات الأحمال المحتملة.
6. في المنشآت الكبيرة قد تجرى اختبارات نفق الرياح للمنشأ ومحيطه.

B.3 الزلازل

7 ينبغي أن تقاوم المباني:

الزلازل الصغيرة من دون ضرر.

الزلازل المتوسطة من دون ضرر إنشائي، مع احتمال حدوث أضرار غير إنشائية.

الزلازل الكبيرة من دون انهيار، مع احتمال حدوث أضرار إنشائية وغير إنشائية.

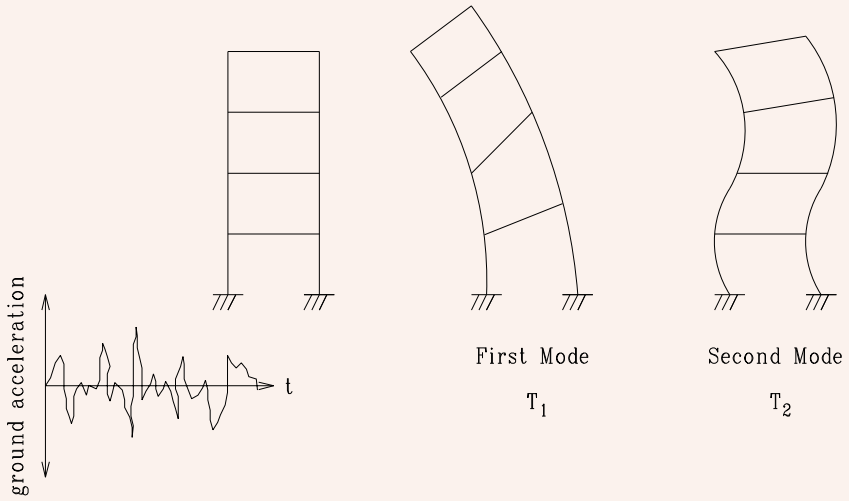
ويتحقق ذلك بتحليل ديناميكي ملائم.

8 في التصميم الأولي أو المنشآت الصغيرة يمكن تحديد حمل أفقي ساكن مكافئ. وتعتمد الأحمال الفعلية على:

1. شدة تسارع الأرض، بما فيها خصائص التربة والصخر.
2. الخصائص الديناميكية للمبنى، كأشكال الاهتزاز ودوراته والتخميد.
3. كتلة المبنى.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

9 يمثل الدور الأساسي لاهتزاز المنشأ عاملا حرجا في الاستجابة الديناميكية، وهو الزمن اللازم لدورة كاملة، الشكل B.3. وإذا اقترب تردد الإثارة الزلزالية من تردد المبنى فقد يحدث الرنين، وهو ما ينبغي تجنبه.



شكل B.3: اهتزازات مبنى

10 يظهر الحمل الزلزالي قوة أفقية ناتجة أساسا من العطالة ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$). وتحسب القوة الأفقية عند كل طابق جزءا من قص القاعدة V:

$$V = \frac{ZIC}{R_W} W$$

حيث:

Z **معامل المنطقة:** يحدد من الشكل B.4 والجدول B.10.

I **معامل الأهمية:** سبق إعطاؤه في الجدول B.8.

C **طيف الاستجابة التصميمي:** يعطى بـ

$$C = \frac{1.25 S}{T^{2/3}} \le 2.75.$$

يمثل T الدور الأساسي للمبنى بالثواني، ويمكن استخراجه من تحليل الاهتزاز الحر أو تقديره تجريبيا:

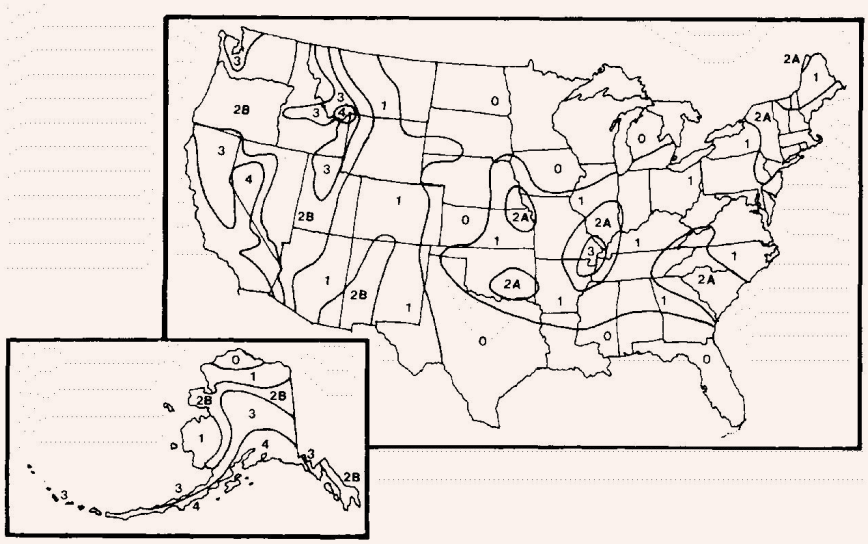
$$T = C_t (h_n)^{3/4}.$$

حيث h_n ارتفاع المبنى فوق القاعدة بالقدم، و

إطارات فولاذية مقاومة للعزوم	C_t	0.035
إطارات خرسانية مقاومة للعزوم وإطارات مدعمة لامركزيا	C_t	0.030
سائر المباني	C_t	0.020

ويمثل S معامل الموقع المبين في الجدول B.11. وقعت أضرار كثيرة في زلزال سان فرانسيسكو سنة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل B.4: المناطق الزلزالية في الولايات المتحدة (ICBO, 1994)

1990 في منطقة المرسى، حيث بنيت منازل عديدة على تربة لينة. ويجب كذلك أن يتحقق

$$\frac{C}{R_W} \geq 0.075.$$

R_W: يعطى في الجدول B.12.

W **الحمل:** الحمل الكلي للمنشأ.

11 توزع القوة الأفقية V على ارتفاع المبنى في جزأين. الأول قوة مركزة F_t تطبق عند القمة بسبب أثر السوط، ولا تؤخذ إلا إذا كان $T \geq 0.7$ s:

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V. \tag{B.2}$$

أما الباقي $V - F_t$ فيوزع مثلثيا ويتناقص إلى الصفر عند القاعدة. وإذا كان وزن كل طابق ثابتا، تكون القوة عند الطابق x

$$F_x = \frac{(V - F_t)h_x}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n} = \frac{(V - F_t)h_x}{\Sigma_{i=1}^{n} h_i}. \tag{B.3}$$

حيث h_i وh_n ارتفاعا المستويين i وn فوق القاعدة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المادة	lb/ft^2
الأسقف الداخلية	
نظام معلق بقنوات	1
بلاطات ألياف صوتية	1
الأرضيات	
سطح فولاذي	2-10
خرسانة عادية بسماكة 1 in.	12
مشمع بسماكة 1/4 in.	1
خشب صلب	4
الأسقف	
نحاس أو قصدير	1-5
خمس طبقات لباد وحصى	6
ألواح أسفلتية	3
قرميد طيني	9-14
تغليف خشبي	3
عزل مصبوب في الموقع بسماكة 1 in.	2
القواطع	
بلاط طيني بسماكة 10 in.	40
بلوك جبس بسماكة 5 in.	14
قوائم خشبية 2x4 (بتباعد 12-16 in.)	2
ملاط إسمنتي بسماكة 1 in.	10
ملاط جبسي بسماكة 1 in.	5
الجدران	
طوب بسماكة 12 in.	120
بلوك خرساني مفرغ بركام ثقيل	
4 in.	30
8 in.	55
12 in.	80
بلوك خرساني مفرغ بركام خفيف	
4 in.	21
8 in.	38
12 in.	55

جدول B.3: أوزان مواد البناء

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الاستعمال أو الإشغال	lb/ft^2
مناطق التجمع	50
الكرانيش والمظلات والشرفات السكنية	60
الممرات والسلالم	100
المرائب	50
مباني المكاتب	50
المباني السكنية	40
التخزين	250-125

جدول B.4: الحد الأدنى للأحمال الحية الموزعة بانتظام (ICBO, 1994)

نطاق الارتفاع	منطقة خريطة سرعة الرياح						
(ft)	20	25	30	35	40	45	50
30<	15	20	25	25	30	35	40
30 to 49	20	25	30	35	40	45	50
50 to 99	25	30	40	45	50	55	60
100 to 499	30	40	45	55	60	70	75
500 to 1199	35	45	55	60	70	80	90
1,200>	40	50	60	70	80	90	100

جدول B.5: تغير سرعة الرياح فوق سطح الأرض

	التعرض	C_e
أرض مستوية مفتوحة تواجه مسطحات مائية كبيرة	D	2.34-1.39
أرض مستوية مفتوحة تمتد نصف ميل أو أكثر في أي ربع كامل	C	2.19-1.06
أرض ذات مبان أو غابات أو تضاريس بارتفاع 20 ft فأكثر	B	1.80-0.62

جدول B.6: معاملات C_e لأحمال الرياح (ICBO, 1994)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

		جهة مواجهة الريح	جهة خلف الريح
إطارات جملونية (V:H)			
ميل السقف	9:12<	−0.7	−0.7
	9:12 to 12:12	0.4	−0.7
	12:12>	0.7	−0.7
الجدران		0.8	−0.5
مبان بارتفاع أقل من 200 ft			
بروزات رأسية	ارتفاع أقل من 40 ft	1.3	−1.3
	ارتفاع أكبر من 40 ft	1.4	−1.4
بروزات أفقية		−0.7	−0.7

جدول B.7: معاملات ضغط الرياح C_q (ICBO, 1994)

		معامل الأهمية I	
	فئة الإشغال	زلزال	رياح
I	منشآت أساسية	1.25	1.15
II	منشآت خطرة	1.25	1.15
III	منشآت إشغال خاص	1.00	1.00
IV	منشآت إشغال عادي	1.00	1.00

جدول B.8: معاملات الأهمية لأحمال الرياح والزلازل (ICBO, 1994)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الارتفاع فوق المنسوب (ft)	التعرض B		التعرض C	
	سرعة الرياح الأساسية (mph)			
	70	80	70	80
15-0	10	13	17	23
20	11	14	18	24
25	12	15	19	25
30	12	16	20	26
40	14	18	21	28
60	17	22	25	33
80	18	24	27	35
100	20	26	28	37
120	21	28	29	38
160	23	30	31	41
200	25	33	33	43
300	29	37	36	47
400	32	41	38	50

جدول B.9: ضغط الرياح التصميمي التقريبي p للمنشآت العادية المقاومة للرياح

المنطقة الزلزالية	0	1	2A	2B	3	4
Z	0	0.075	0.15	0.2	0.3	0.4

جدول B.10: معاملات Z للمناطق الزلزالية المختلفة UBC1994

معامل S	الوصف	النوع
1.0	صخر أو تربة صلبة/كثيفة بعمق أقل من 200 ft	S_1
1.2	تربة كثيفة أو صلبة بعمق يتجاوز 200 ft	S_2
1.5	تربة بعمق 70 ft فأكثر، تحوي أكثر من 20 ft من طين لين إلى متوسط الصلابة ولا تزيد طبقة الطين اللين على 40 ft	S_3
2.0	تربة تحوي أكثر من 40 ft من الطين اللين	S_4

جدول B.11: معاملات الموقع S للأحمال الزلزالية (ICBO, 1994)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

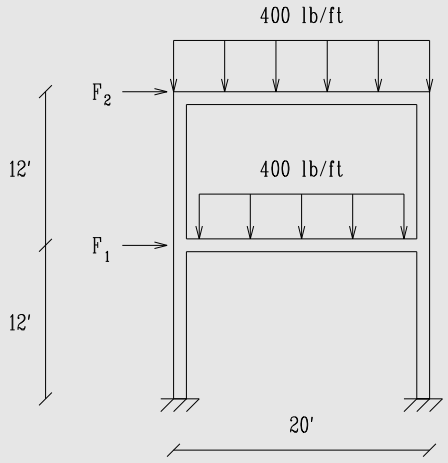
النظام الإنشائي	R_W	H (ft)
نظام الجدران الحاملة		
جدران خفيفة بألواح قص		
خشب رقائقي لمنشآت لا تتجاوز ثلاثة طوابق	8	65
سائر الجدران الخفيفة	6	65
جدران قص		
خرسانة	8	240
مباني	8	160
نظام إطار المبنى باستخدام الجمالونات أو جدران القص		
إطار فولاذي مطيل مدعم لامركزيا	10	240
جدران خفيفة بألواح قص		
خشب رقائقي حتى ثلاثة طوابق	9	65
سائر الجدران الخفيفة	7	65
جدران قص		
خرسانة	8	240
مباني	8	160
إطارات مدعمة مركزيا		
فولاذ	8	160
خرسانة (للمنطقتين 1 و2)	8	-
خشب ثقيل	8	65
نظام إطارات مقاومة للعزوم		
إطارات خاصة مقاومة للعزوم (SMRF)		
فولاذ	12	.N.L
خرسانة	12	.N.L
إطارات خرسانية متوسطة المقاومة للعزوم (IMRF)، للمنطقتين 1 و2	8	-
إطارات عادية مقاومة للعزوم (OMRF)		
فولاذ	6	160
خرسانة (للمنطقة 1)	5	-
أنظمة مزدوجة		
جدران قص		
خرسانة مع SMRF	12	.N.L
مباني مع SMRF	8	160
إطار فولاذي مطيل مدعم لامركزيا	12-6	.N.L-160
إطار مدعم مركزيا	12	.N.L
فولاذ مع SMRF فولاذي	10	.N.L
فولاذ مع OMRF فولاذي	6	160
خرسانة مع SMRF خرساني (للمنطقتين 1 و2)	9	-

جدول B.12: قائمة جزئية لقيم R_W للأنظمة الإنشائية (ICBO, 1994)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

B.3.1 مثال B.2: حمل زلزالي على إطار

حدد القوى الزلزالية التقريبية لإطار مستشفى مطيل كما في الشكل. الحمل الميت لكل طابق 200 lb/ft والحمل الحي 400 lb/ft، والمنشأ على تربة لينة وفي المنطقة 3. استخدم الحمل الميت مضافا إليه 50% من الحمل الحي وزنا لكل طابق.



1. $T = C_t(h_n)^{3/4} = (0.030)(24)^{3/4} = 0.32$ sec.
2. $C = \frac{(1.25)(2.0)}{(0.32)^{2/3}} = 5.344 > 2.75$، لذا نستخدم $C = 2.75$.
3. المعاملات الأخرى: $Z = 0.3$، $I = 1.25$، $R_W = 12$.
4. $\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075$✓.
5. $W = 2\left((200 + 0.5(400)\right)(20) = 16000$ lbs.
6.

$$V = \frac{ZIC}{R_W}W = \frac{(0.3)(1.25)(2.75)}{12}W = 0.086W \quad \text{(B.4)}$$

$$= (0.086)(16000) = 1375\ lbs. \quad \text{(B.5)}$$

7. لأن $T < 0.7$ s فلا يوجد أثر سوط.
8.

$$F_2 = \frac{(1375)(24)}{12+24} = 916.7\ lbs \quad \text{(B.6)}$$

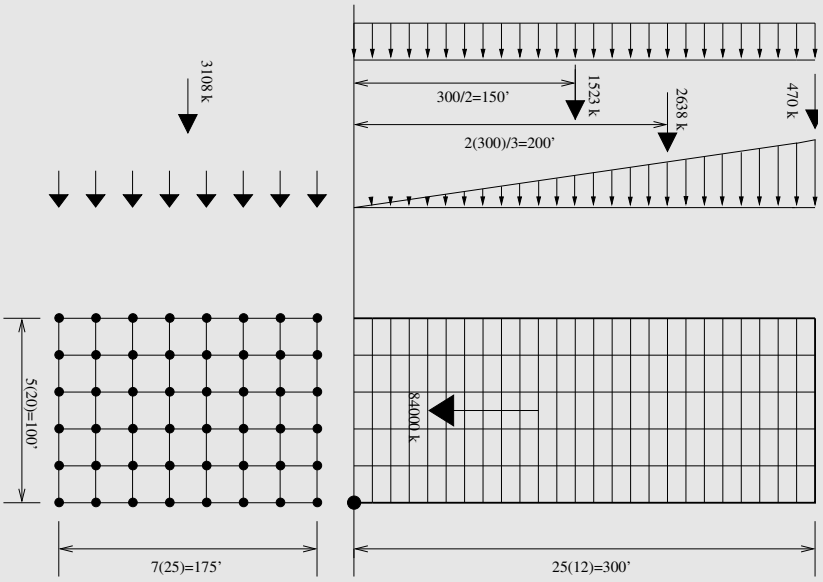
$$F_1 = \frac{(1375)(12)}{12+24} = 458.3\ lbs. \quad \text{(B.7)}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

B.3.2 مثال B.3: حمل زلزالي على مبنى شاهق

نم لوقنم يتآلا مسقلا Schueller, 1996 The design of Building Structures.

حدد الحمل الجانبي الحرج التقريبي في الاتجاه القصير لمبنى من 25 طابقا، ذي إطار فراغي خرساني صلب مطيل. تتباعد الإطارات 25 ft عرضيا و20 ft طوليا، وأبعاد المسقط 175x100 ft، والارتفاع 300 ft. يقع المبنى في بيئة حضرية بسرعة رياح 70 mph وفي المنطقة الزلزالية 4، ويؤخذ حمل ميت كلي متوسط 192 psf. ظروف التربة مجهولة.



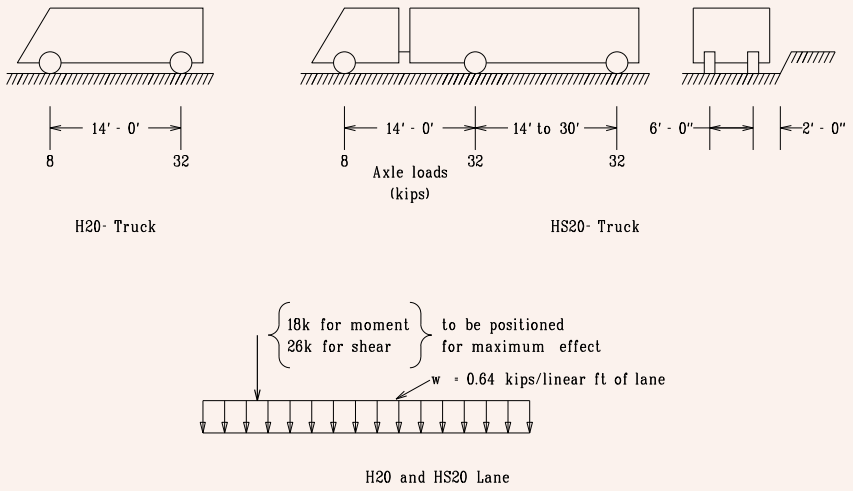
1. $W = (0.1926)\ \text{psf}(100 \times 175)\ \text{ft}^2 \times 25 = 84,000\ \text{k}$.
2. $T = 0.030(300)^{3/4} = 2.16\ \text{sec.} > 0.7\ \text{sec.}$✓.
3. $C = \frac{(1.25)(1.5)}{(2.16)^{2/3}} = 1.12 \le 2.75$✓.
4. $Z = 0.4$، $I = 1$، $R_W = 12$، و $\frac{C}{R_W} = 0.093 \ge 0.075$✓.
5. $$V = \frac{(0.4)(1)(1.12)}{12} W = 0.037W \quad \text{(B.8)}$$ $$= (0.037)(84000) = 3108\ \text{k}. \quad \text{(B.9)}$$
6. لأن $T > 0.7\ \text{sec.}$، يؤخذ أثر السوط: $$F_t = (0.07)(2.16)(3108) = 470\ \text{k} \quad \text{(B.10)}$$ $$\le 0.25V = 777\ \text{k}. \quad \text{(B.11)}$$ إذن الحمل المثلثي الكلي $V - F_t = 3108 - 470 = 2638$ k.
7. نتحقق من الرياح بافتراض ضغط منتظم محافظ 29 psf: $$P_W = (0.029)\ \text{psf}(175 \times 300)\ \text{ft}^2 = 1523\ \text{k} < 3108\ \text{k}. \quad \text{(B.12)}$$

ومن الواضح أن الحمل الزلزالي الكلي أكبر من قوة الرياح.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

B.4 أحمال الجسور

تحدد AASHTO أحمال تصميم جسور الطرق. وتستخدم شاحنة HS-20 لتصميم جسور الطرق الرئيسية، الشكل B.5. ويجب استعمال شاحنة التصميم بأحمال محاورها وتباعداتها المحددة، أو الحمل المنتظم والحمل المركز المكافئين، ووضع الحمل بحيث تنتج أكبر الإجهادات.



شكل B.5: حمل الشاحنة

B.5 تركيبات الأحمال

12 تمثل الأحمال الحية التي تحددها الأكواد أكبر الأحمال الممكنة، واحتمال حدوثها كلها في الوقت نفسه ضعيف، ولذلك تسمح الأكواد ببعض التخفيض عند جمعها. كما يجب تصميم المنشآت لمقاومة تركيبات الأحمال.

13 إذا رمزنا إلى الميت بـD، والحي بـL، وحي السقف بـLr، والرياح بـW، والزلزال بـE، والثلج بـS، والحرارة بـT، والتربة بـH، فإن كود (ACI 318, 2019) ACI 318 يتطلب في تصميم الخرسانة بطريقة معاملات الحمل والمقاومة:

1. 1.4D+1.7L
2. (1.4D+1.7L+1.7W)0.75
3. 0.9D+1.3W
4. 1.4D+1.7L+1.7H
5. (1.4D+1.4T+1.7L)0.75
6. (D+T)1.4

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما كود AISC (American Institute of Steel Construction, 2016) للمنشآت الفولاذية فيتطلب:

1. 1.4D
2. (1.2D+1.6L+0.5(Lr or S
3. (1.2D+0.5L (or 0.8W)+1.6(Lr or S
4. 1.2D+0.5L+0.5(Lr or S)+1.3W
5. 1.2D+0.5L(or 0.2S)+1.5E
6. (0.9D+1.3W(or 1.5E

14 يمكن إجراء التحليل لكل حمل أساسي على حدة، ثم جمع الاستجابات خطيا بمبدأ التراكب ما لم يتجاوز السلوك حد المرونة. وكثيرا ما توصف الأحمال بأنها عادية أو غير عادية أو قصوى.

B.6 تخفيض الحمل الحي

15 تخفيض الحمل الحي مفهوم مهم في التصميم الإنشائي، إذ يراعي تناقص احتمال تطبيق الحمل الحي الكامل في وقت واحد على مساحات كبيرة. وتسمح به أكواد عدة، منها (ACI 318, 2019) وASCE/SEI (7-16, 2017). ويمكن لذلك تصميم الكمرات والجسور والأعمدة التي تحمل مساحات أكبر لأحمال حية مخفضة.

16 يعطي ASCE 7-16، القسم 4.8، الصيغة العامة

$$L_r = L\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right), \tag{B.13}$$

حيث:

- L_r الحمل الحي المخفض (psf).
- L الحمل الحي غير المخفض (psf).
- A_T المساحة التابعة للعنصر (ft^2).

17 يجب ألا يقل الحمل المخفض عن 50% من الأصلي للعناصر التي تحمل طابقا واحدا، ولا عن 40% للعناصر التي تحمل طوابق متعددة. ولا يسمح بالتخفيض في مناطق التجمع الكثيف أو التخزين أو الأحمال المركزة.

B.6.1 مثال B.4: تخفيض الحمل الحي I

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لعمود مساحته التابعة $A_T = 400\,ft^2$ وحمله الحي الأصلي $L = 100\,psf$:

$$L_r = L\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right)$$
$$= 100\left(0.25 + \frac{15}{20}\right) = 100\,\text{psf}.$$

لا يحدث تخفيض لأن الصيغة تعطي الحمل الأصلي نفسه.

B.6.2 مثال B.5: تخفيض الحمل الحي II

في مبنى مكاتب من 10 طوابق، تباعد الأعمدة 16 ft في الاتجاهين، والحمل الميت 60 psf، وحمل الثلج 20 psf، والحمل الحي 80 psf. أوجد الحمل الحي الكلي والحمل الكلي لتصميم عمود في الطابق الأرضي.

1. المساحة التابعة $16 \times 16 = 256\,ft^2 > 150$✓.
2. التخفيض $R = .08(256 - 150) = 8.48\%$.
3. أقصى تخفيض مسموح $R^{max} = 23.1(1 + \frac{60}{80}) = 40.4\% < 60\%$✓.
4. الحمل التراكمي المخفض:

الطابق	السقف	10	9	8	7	6	5	4	3	2	المجموع
التخفيض التراكمي (%)	8.48	16.96	25.44	33.92	42.4	51.32	59.8	60	60	60	
الحمل الحي التراكمي	20	80	80	80	80	80	80	80	80	80	740
الحمل المخفض	18.3	66.4	59.6	52.9	46.08	38.9	32.2	32	32	32	410

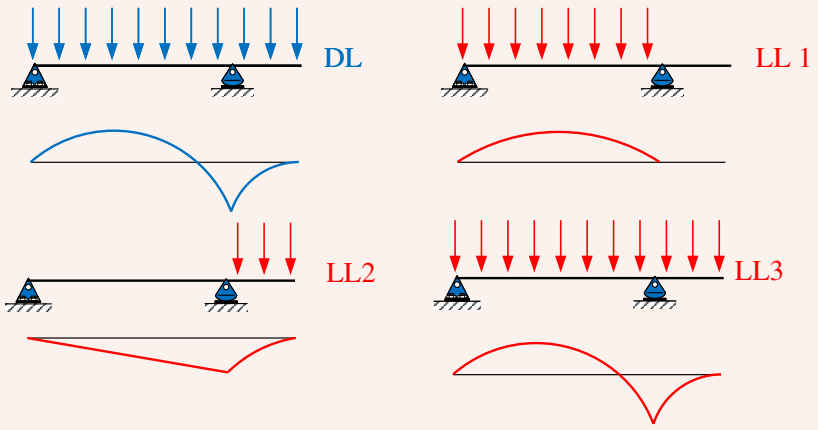
ينخفض حمل التصميم الحي للعمود السفلي من 740 Kips إلى 410 Kips.

5. الحمل الميت الكلي $DL = (10)(60) = 600$ Kips، ومن ثم يكون التخفيض الكلي $\times \frac{740-410}{740+600}$ $.100 = 25\%$

B.7 موضع الحمل

18 الحمل الميت وحده ساكن. أما الحمل الحي فقد يوجد أو لا يوجد على مكون معين، ولذلك يجب فحص ترتيب الأحمال الذي يعطي أكبر قوى داخلية، عزوما موجبة أو سالبة وقصا، في المواضع المختلفة، الشكل B.6.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل B.6: وضع الأحمال لتعظيم العزوم

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

C المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة

ملخص

أدت صيغ عديدة في هذا الكتاب إلى معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية، أو من الرتبة الرابعة في أغلب الأحيان. يلخص هذا الفصل طرائق حلها.

C.1 ملخص المعادلات التفاضلية الحاكمة . . 2166
C.2 الحلول 2167
C.3 الاستقرار I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2167
C.4 الاستقرار II: $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2169
C.5 كمرة على أساس مرن: $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ 2169

المعادلة التفاضلية هي معادلة يكون مجهولها دالة، وقد تظهر فيها الدالة ومشتقاتها.

C.1 ملخص المعادلات التفاضلية الحاكمة

الكمرة

(المعادلة 22.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \quad \text{or} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

الكبل

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H}$$

لاحظ التشابه مع الانحناء:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

الانحراف الكبير للكمرة

(المعادلة 29.2)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2 \cos\phi$$

تستخدم التكاملات الإهليلجية للحل.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

البلاطة

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.1}$$

أو

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.2}$$

كمرة على أساس مرن

المعادلة 22.3

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4k^4 y = 0$$

C.2 الحلول

تحتوي *المعادلة التفاضلية العادية* (ODE) على متغير مستقل واحد فقط، مثل x أو t. أما *المعادلة التفاضلية الجزئية* (PDE) فتحتوي على أكثر من متغير مستقل، مثل x, y أو x, t.

تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان كل حد فيها لا يحتوي على المتغير التابع أو مشتقاته، أو يحتوي على واحد منها فقط. فلا توجد جداءات للمتغير التابع مع نفسه أو مع مشتقاته، ولا تزيد قوة ما يقابل x أو $\dot{x}$ أو $\ddot{x}$، أو $f(x)$ ومشتقاتها، على الواحد في أي حد.

وتكون معاملات المعادلة التفاضلية ثابتة إذا لم يضرب المتغير التابع ومشتقاته إلا في ثوابت.

أما *المعادلة الخطية المتجانسة* فهي التي يساوي طرفها الأيمن صفرا، وتحتوي حدودها على القوة الأولى فقط للمتغير التابع أو مشتقاته.

C.3 الاستقرار I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$

لتكن المعادلة التفاضلية الآتية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = 0 \tag{C.3}$$

أو

$$y'' + ky = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

من الواضح أن حل هذه المعادلة يأخذ الصورة

$$y = e^{\lambda x}$$

ومن ثم

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

بالتعويض في المعادلة C.3:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + k e^{\lambda x} = 0$$
$$\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + k) = 0$$

ولأن $e^{\lambda x}$ لا يمكن أن يساوي صفرا، ينتج

$$\lambda^2 + k = 0 \qquad \text{المعادلة المميزة} \tag{C.4}$$

وحل المعادلة المميزة هو

$$\lambda^2 = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k}$$

أو

$$\lambda^2 = \pm i\sqrt{k} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{k} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{k} \end{cases}$$

وبالتعويض بهذه العبارات في المعادلة C.3:

$$y = C_1 e^{i\sqrt{k}x} + C_2 e^{-i\sqrt{k}x} \tag{C.5}$$

وباستخدام صيغة أويلر:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \tag{C.6}$$

نحصل على

$$e^{i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)$$
$$e^{-i\sqrt{k}x} = \cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)$$

وبتعويض هاتين العبارتين في المعادلة C.5:

$$y = C_1\left[\cos(\sqrt{k}x) + i\sin(\sqrt{k}x)\right] + C_2\left[\cos(\sqrt{k}x) - i\sin(\sqrt{k}x)\right]$$
$$= (C_1 + C_2)\cos(\sqrt{k}x) + i(C_1 - C_2)\sin(\sqrt{k}x)$$

يمكن إدخال ثابتي تكامل جديدين D_1 وD_2:

$$y = D_1\cos(\sqrt{k}x) + D_2\sin(\sqrt{k}x) \tag{C.7}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI، وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

C.4 الاستقرار II: $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

راجع الاستقرار، المعادلة 29.21.

نبحث مرة أخرى عن حل المعادلة

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

بالصورة $y = e^{\lambda x}$. وعندئذ

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$
$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}.$$

يعطي التعويض في المعادلة التفاضلية

$$\left(\lambda^4 + k^2\lambda^2\right) e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 + k^2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0.$$

وبمزيد من التحليل:

$$\lambda^2(\lambda - ik)(\lambda + ik) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = ik, \\ \lambda_4 = -ik. \end{cases} \tag{C.8}$$

ولأن $\lambda = 0$ جذر مكرر، تكون مساهمته $(C_1 + C_2x)e^{0x} = C_1 + C_2x$. أما الجذران العقديان المترافقان فينتجان الحدين الأسيين $e^{\pm ikx}$. ومن ثم يكون الحل العام

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx}.$$

وباستخدام متطابقات أويلر:

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \qquad e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx),$$

يمكن كتابة الجزء التذبذبي بصورة مكافئة كتوليفة خطية من $\cos(kx)$ و$\sin(kx)$ بعد إعادة تعريف الثوابت. لذلك

$$y = C_1 + C_2x + C_3\cos(kx) + C_4\sin(kx).$$

C.5 كمرة على أساس مرن: $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$

راجع الكمرة على أساس مرن في المعادلة 22.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لتكن المعادلة التفاضلية الآتية من الرتبة الرابعة:

$$y^{(4)} + ky = 0 \tag{C.9}$$

نضع

$$m^2 = \sqrt{\frac{k}{4}} \text{ or } k = 4m^4$$

فتصبح المعادلة التفاضلية

$$y^{(4)} + 4m^4 = 0 \tag{C.10}$$

ومن الواضح مرة أخرى أن حلها يكون بالصورة

$$y = e^{\lambda x}$$

و

$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}.$$

بالتعويض في المعادلة C.10 نحصل على

$$e^{\lambda x}(\lambda^4 + 4m^4) = 0.$$

ولأن $e^{\lambda x}$ لا يساوي صفرا، تكون المعادلة المميزة المناظرة

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \tag{C.11}$$

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2m^2 i)(\lambda^2 + 2m^2 i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = m(1+i) \\ \lambda_2 = m(1-i) \\ \lambda_3 = m(-1+i) \\ \lambda_4 = m(-1-i) \end{cases}$$

وبتعويض الحلول في المعادلة C.9:

$$y = C_1 e^{m(1+i)x} + C_2 e^{m(1-i)x} + C_3 e^{m(-1+i)x} + C_4 e^{m(-1-i)x}$$

لكن $e^{a+b} = e^a e^b$، وباستخدام صيغة أويلر مرة أخرى، المعادلة C.6، نحصل على

$$y = e^{(mx)}\left(C_1 \sin(mx) + C_2 \cos(mx)\right) + e^{(-mx)}\left(C_3 \sin(mx) + C_4 \cos(mx)\right) \tag{C.12}$$

ويبدأ حل أكثر أناقة باستعمال

$$e^x = \cosh x + \sinh x; \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

والتعويض:

$$y = C_1 \sin(mx)\sinh(mx) - C_3 \sin(mx)\sinh(mx) + C_2 \cos(mx)\sinh(mx) - C_4 \cos(mx)\sinh(mx) + C_2 \cos(mx)$$

وبإعادة الترتيب:

$$y = D_1 \cos(mx)\cosh(mx) + D_2 \sin(mx)\sinh(mx)) \tag{C.13}$$

$$+ D_3 \cos(mx)\sinh(mx) + D_4 \sin(mx)\cosh(mx) \tag{C.14}$$

وهي مماثلة لدوال كريلوف الأربع (Kolosova **and** Kuroyedov, 2013).

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D الأقواس المرنة؛ تحليلات متقدمة

ملخص

يطور هذا الملحق معادلات تحليلية للتحليل المرن للأقواس الدائرية المتناظرة تحت حالات تحميل مختلفة. وباستخدام مبادئ الاستاتيكا والعمل الأصغر والعمل الافتراضي، تشتق حلول مغلقة الصيغة للأقواس ثلاثية المفاصل وثنائية المفاصل وعديمة المفاصل، مع متغيرات مثلثية تعرف هندسة القوس. ويجري التحقق من المناهج التحليلية بمقارنتها بحلول عددية من SAP 2000، وتوضح بأمثلة محلولة مفصلة تشمل الأحمال المركزة والوزن الذاتي والأحمال الموزعة بانتظام. وتحسب القوى الداخلية، وهي القص والقوة المحورية والعزم، على امتداد بحر القوس بصورة منهجية، ثم يحلل السلوك الإنشائي لكل نوع من الأقواس لإظهار الفروق في أنماط ردود الأفعال ومسارات الأحمال وتوزيع الإجهادات.

D.1 مقدمة 2171
D.2 القوس الدائري ثلاثي المفاصل 2172
D.2.1 إجراءات التحليل 2173
D.2.2 الحمل المركز 2173
D.2.3 الوزن الذاتي 2180
D.2.4 الحمل الموزع بانتظام 2184
D.2.5 التحقق من القوس الدائري ثلاثي المفاصل 2186
D.2.6 الخلاصة 2188
D.3 القوس الدائري ثنائي المفاصل 2188
D.3.1 إجراءات التحليل 2189
D.3.2 الحمل المركز 2189
D.3.3 الوزن الذاتي 2200
D.3.4 الحمل الموزع بانتظام 2207
D.3.5 التحقق من القوس الدائري ثنائي المفاصل 2211
D.3.6 الخلاصة 2213
D.4 القوس الدائري عديم المفاصل 2213
D.4.1 إجراءات التحليل 2213
D.4.2 الحمل المركز 2214
D.4.3 الوزن الذاتي 2228
D.4.4 الحمل الموزع بانتظام 2236
D.4.5 التحقق من القوس الدائري عديم المفاصل 2241
D.4.6 الخلاصة 2242
D.5 الخلاصة 2243

الجزء الثاني: جداول التحليل والتصميم الإنشائي

من رسالة الماجستير "Analysis of Arches" للباحث Sonavane, 2014

D.1 مقدمة

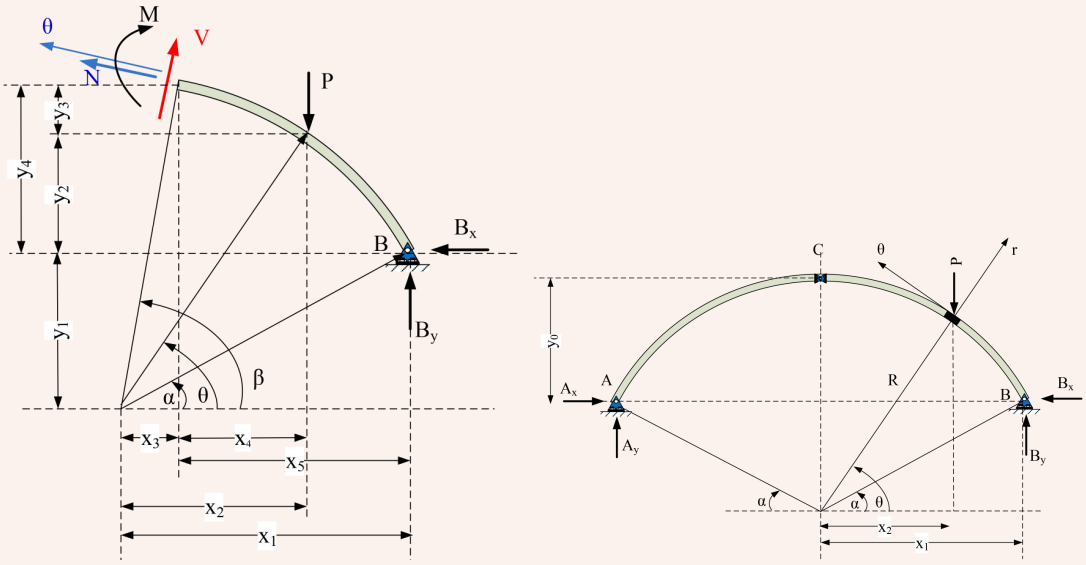
يركز هذا الفصل بوجه خاص على تطبيق الاستاتيكا ومبدأ العمل الأصغر وطريقة العمل الافتراضي لتطوير معادلات تحليلية للأقواس الدائرية المتناظرة ثلاثية المفاصل وثنائية المفاصل وعديمة المفاصل تحت حالات تحميل مختلفة. وتعمم المعادلات التحليلية بإدخال متغيرات مثلثية معينة تعرف هندسة كل نوع من الأقواس.

ويجري التحقق من المعادلات باستخدام أمثلة منشورة في المراجع. وإضافة إلى ذلك، يستخدم برنامج التحليل الإنشائي SAP 2000 لبناء نماذج لأنواع الأقواس الثلاثة المذكورة، وتقارن نتائج تحليلها بالحلول المستخرجة من المعادلات التحليلية. ثم تستخدم هذه الحلول لمناقشة السلوك الإنشائي لكل نوع من الأقواس.

يبين القوس ثلاثي المفاصل في الشكل D.1 المتغيرات المثلثية التي تعرف هندسة قوس دائري متناظر والمستخدمة في اشتقاق المعادلات التحليلية. وتستخدم متغيرات مماثلة للقوس ثنائي المفاصل والقوس عديم المفاصل. يمثل الشكل ACB القوس، حيث A وB المسندان، والنقطة C تاج القوس. وتمثل المسافة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

y0 ارتفاع القوس، بينما تمثل المسافة x1 نصف بحر القوس. ويشير الرمز α إلى الزاوية التي يصنعها مع الأفقي الخط الواصل بين مركز الدائرة والمسند؛ ومن ثم يكون القوس نصف دائري عندما تساوي α صفراً. وتقاس جميع الأبعاد والزوايا من المسند B. ويشير الرمز θ إلى الزاوية التي يؤثر عندها الحمل P في ضلع القوس. وتمثل القوتان Ax وBx ردّي الفعل الأفقيين، وتمثل Ay وBy ردّي الفعل الرأسيين عند المسندين. وتمثل قوة القص (V) والقوة المحورية (N) والعزم (M) القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. ويبين الشكل D.1b اصطلاح الإشارات المستخدم للقوى الداخلية، حيث تفترض الإشارة الموجبة للعزم باتجاه عقارب الساعة، وقوة القص المتجهة إلى الخارج، وقوة الشد المحورية. وبوجه عام، تستخدم الأحرف الكبيرة للدلالة على جميع القوى، والأحرف الصغيرة للدلالة على جميع الأبعاد في رموز هندسة القوس.



(b) القوى الداخلية (a) ردود الأفعال

شكل D.1: هندسة القوس الدائري

Trignometric Variables

x1=*R* Cos[α]; x2=*R* Cos[θ]; x3= *R* Cos[β]; x4=x2 − x3; x5=x1 − x3;
y0=*R*(1−Sin[α]); y1=*R* Sin[α]; y2=*R* (Sin[θ]−Sin[α]); y3=*R* Sin[β]−y1−y2; y4=*R* Sin[β]−y1;

D.2 القوس الدائري ثلاثي المفاصل

للقوس الدائري المتناظر ثلاثي المفاصل أربعة ردود أفعال، اثنان عند كل مسند. والفرق الرئيس بين القوس ثلاثي المفاصل والقوس ثنائي المفاصل أو عديم المفاصل هو انقطاع ضلع القوس بسبب المفصل عند التاج، مما يقسم القوس ثلاثي المفاصل إلى عنصرين منحنيين مستقلين في الارتكاز. وفي كل عنصر مستقل ردا فعل

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

متساويان ومتعاكسان. وبوجود ردّي فعل مجهولين وثلاث معادلات اتزان لكل عنصر، يكون القوس الدائري المتناظر ثلاثي المفاصل منشأً محدد استاتيكياً.

D.2.1 إجراءات التحليل

تدرس ثلاث حالات تحميل: حمل مركز، والوزن الذاتي للقوس، وحمل موزع بانتظام على القوس. يكون الوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام متناظرين حول مركز القوس، بينما يكون الحمل المركز غير متناظر حول المركز إذا أثر في موضع غير التاج. ولذلك تستخدم الأشكال نفسها لتوضيح تحليلي الوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام، وتستخدم مجموعة مختلفة من الأشكال لحالة الحمل المركز. وينفذ تحليل حالات التحميل الثلاث بثلاث خطوات باستخدام Mathematica؛ إذ تحسب ردود الأفعال عند المساند في الخطوة الأولى، والقوى الداخلية على امتداد القوس في الخطوة الثانية، ثم تستخدم معادلات القوى الداخلية الناتجة من الخطوة الثانية. وتدرج ملفات Mathematica لجميع الخطوات في الأقسام ذات الصلة، وللتبسيط لا توسع إلا المعادلات النهائية لردود الأفعال والقوى الداخلية. تعبر المعادلات التحليلية لردود أفعال المساند والقوى الداخلية بدلالة المتغيرات المثلثية المعرفة أعلاه.

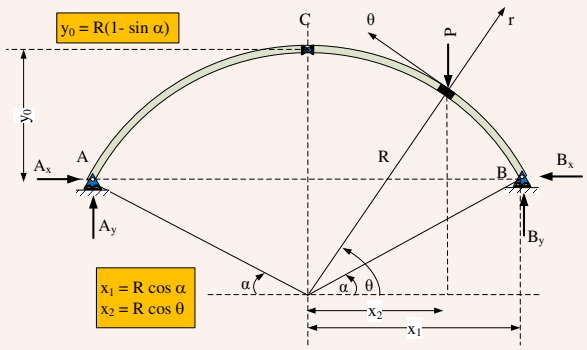
D.2.2 الحمل المركز

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dp = P \tag{D.1}$$

ردود الأفعال

باستخدام الشكل D.2 تحدد ردود الأفعال الأفقية والرأسية عند المساند. وعندما يؤثر حمل مركز في أي موضع غير تاج القوس، تنشأ حالة تحميل غير متناظرة حول مركز القوس. ولأن تعبير رد الفعل الرأسي By يعتمد على موضع الحمل المركز P بالنسبة إلى التاج C، تطور مجموعتان مختلفتان من المعادلات: إحداهما للحالة $\theta < \frac{\Pi}{2}$، والأخرى للحالة $\theta \geq \frac{\Pi}{2}$. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود



شكل D.2: قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز

أفعال المساند.

Reactions

Define the load

```
P=P;
```

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMA=BY2x1 - P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

$\frac{\pi}{2} < \theta$

(Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve

```
SigMC= - BXy0 + BYx1 - Px2;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$$\frac{-P\text{Cos}[\alpha]+P\text{Cos}[\theta]}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[-AXy1 - AYx1 - Px2 + BXy1 + BYx1]
```

$$0$$

```
Clear[AX]; Clear[BX];
```

$\frac{\pi}{2} > \theta$

(Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve

```
SigMC= - BXy0 + BYx1;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

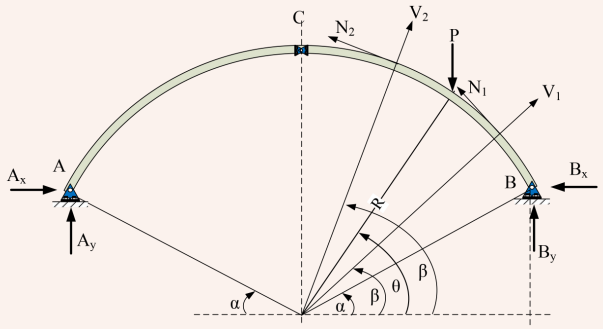
```
0
```

القوى الداخلية

لا يؤدي تأثير الحمل المركز في موضع غير تاج القوس إلى حالة تحميل غير متناظرة فحسب، بل يسبب أيضاً انقطاعاً في القوى الداخلية، كما يبين الشكل D.3. ولذلك يعتمد تعبير القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس على علاقتها بالزاوية θ التي يؤثر عندها الحمل المركز. وبأخذ الشروط الآتية في الحسبان، تطور مجموعات مختلفة من معادلات القوى الداخلية.

$$\theta < \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta, \quad \theta \geq \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta \tag{D.2}$$

يستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.4 لتحديد القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم،



شكل D.3: علاقة β بـθ

عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم، عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس.

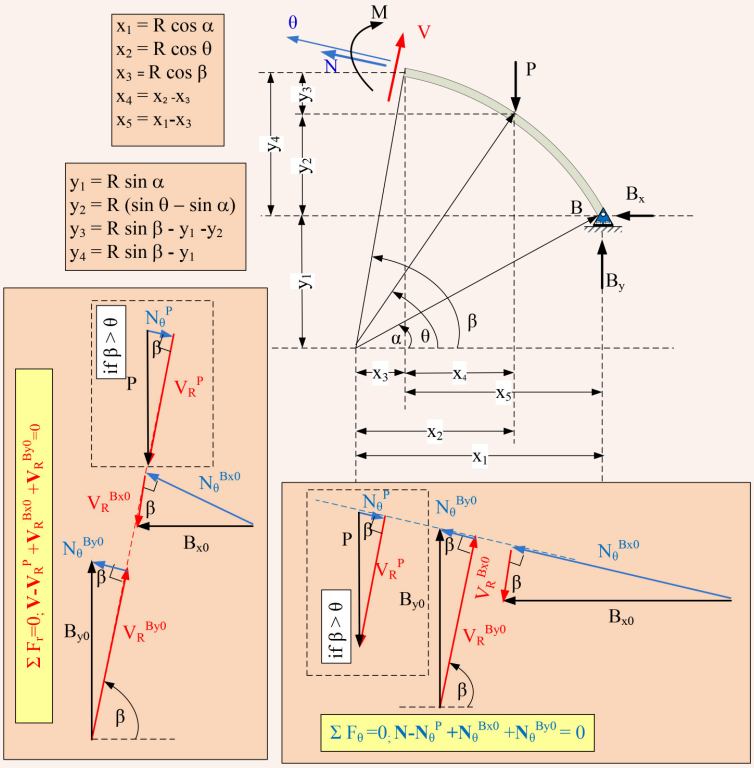
Internal Forces

$\theta < \beta \;\&\; \frac{\pi}{2} < \theta$

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV1= − BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.4: مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]];V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$\_\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]];N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1];M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta > \beta \;\&\; \frac{\pi}{2} < \theta$

(Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]];V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$\frac{P(-\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]];N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Internal Forces

$\theta < \beta \;\&\; \frac{\pi}{2} > \theta$

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV1= - BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM1=BXy4 - BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta > \beta \;\&\; \frac{\pi}{2} > \theta$

(Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV2= - BXCos[β] + BYSin[β] - PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]-\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] - PCos[β] + N2;
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM2=BXy4 – BYx5 + Px4 + M2;
```

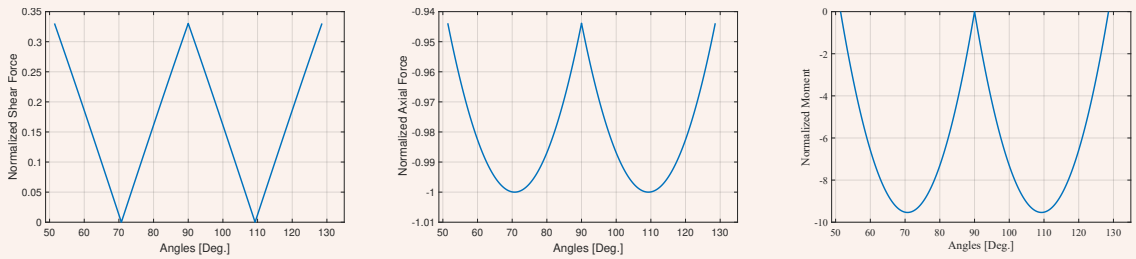
```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] - 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

الانحراف

ظهرت صعوبات غير متوقعة عند تطبيق المعادلات التحليلية للقوس ثلاثي المفاصل لحساب الانحراف، إذ نتج حل مركب. ولذلك تحتاج المسألة إلى مزيد من الدراسة مستقبلاً.

ملخص النتائج



شكل D.5: مخططات القوى الداخلية لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز

يبين الشكل D.5 مخططات مثال القوس ثلاثي المفاصل المناقش في القسم السابق، حيث يؤثر حمل مركز عند تاج القوس. وتطبع القوة المحورية الداخلية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين، بينما يطبع العزم الداخلي بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية الداخلية في ارتفاع القوس. وكما يبين المخطط، تتناظر جميع القوى الداخلية حول تاج القوس، ويتصرف القوس ثلاثي المفاصل كعنصرين منحنيين مستقلين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند منتصف كل عنصر، ثم تنقص باتجاه المساند المفصلية، بفارق يقارب 5% بين أكبر قوة محورية وأصغرها. ويساوي العزم الداخلي صفراً عند المفاصل، ويبلغ أقصاه عند منتصف كل عنصر. أما قوة القص فهي أصغر نسبياً من القوة المحورية الداخلية والعزم، وتساوي صفراً عند مواضع العزم الداخلي الأعظمي.

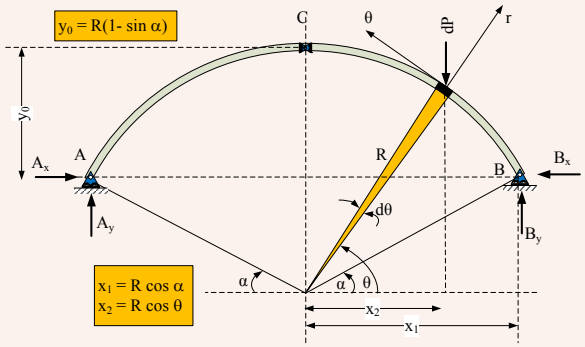
D.2.3 الوزن الذاتي

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.3}$$

ردود الأفعال

باستخدام الشكل D.6 تحدد ردود الأفعال الأفقية والرأسية عند المساند. فيما يأتي خرج Mathematica



شكل D.6: قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي

الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

Reactions

(θDefine the load (omitting the d

```
dP′=wR;
```

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

```
BY= ∫_α^(π/2) dP′ dθ
```

$$Rw\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

(Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − ∫_α^(π/2) x2dP′ dθ;
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{R(-2w+\pi w\text{Cos}[\alpha]-2w\alpha\text{Cos}[\alpha]+2w\text{Sin}[\alpha])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

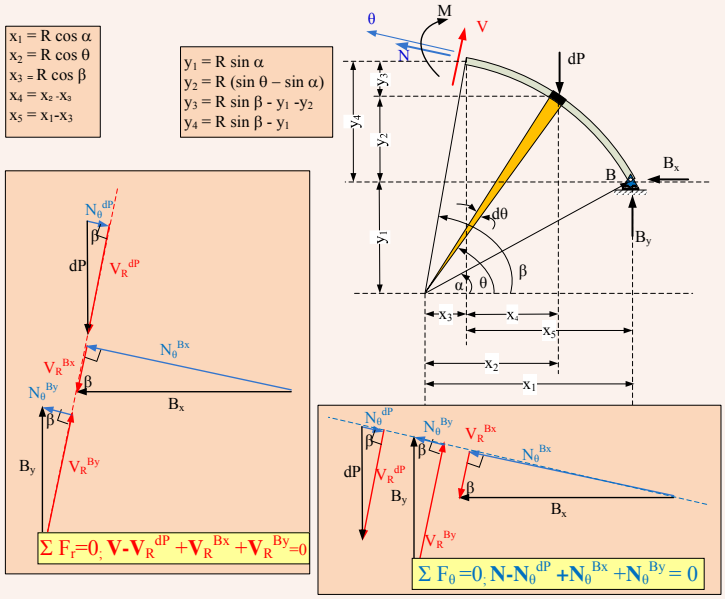
(Check statics by taking moment about O (CCW +ve

$$\text{MO=FullSimplify}\left[\text{BXy1}+\text{BYx1}-\text{CX(y1}+\text{y0)}-\int_{\alpha}^{\pi/2}\text{x2dP}'\,d\theta\right]$$

$$0$$

القوى الداخلية

يستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.7 لتحديد القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم، عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق القوى الداخلية:



شكل D.7: مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي

القوة المحورية والقص والعزم.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Internal Forces

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

SigFV= − BXCos[β] + BYSin[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Sin[β]dθ + V;

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol2[[1]]

$$-\frac{Rw(\text{Cos}[\beta](-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\beta)(-1+\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension

SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] − $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′Cos[β]dθ + N;

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N/.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2}Rw\left(-)\pi-2\beta(\text{Cos}]\beta[+\frac{(-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

SigM=BXy4 − BYx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4dθ + M;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]]; M[β_]=M/.Sol4[[1]]

$$\frac{R^2w(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha](-1+\text{Sin}[\beta]))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

الانحراف

تستخدم المعادلات التحليلية المطورة أعلاه لحساب الانحراف في قوس دائري متناظر (Kinney, 1957, pg 547-558). والقيم العددية المستخدمة للمتغيرات المثلثية هي:
عرض ضلع القوس (b) = 2 ft، عمق ضلع القوس (d) = 3 ft، المساحة (a) = 6 ft^2، عزم العطالة (i) = 4.5 ft^4، معامل المرونة (e) = 3645 Ksi، α = 0.8975 rad.، نصف القطر (R) = 160.35 ft، البحر = 200 ft، الارتفاع = 35 ft، W=2.275 kip/ft.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وتستخدم معادلة العمل الافتراضي الآتية لحساب الانحراف في مثال القوس المدروس.

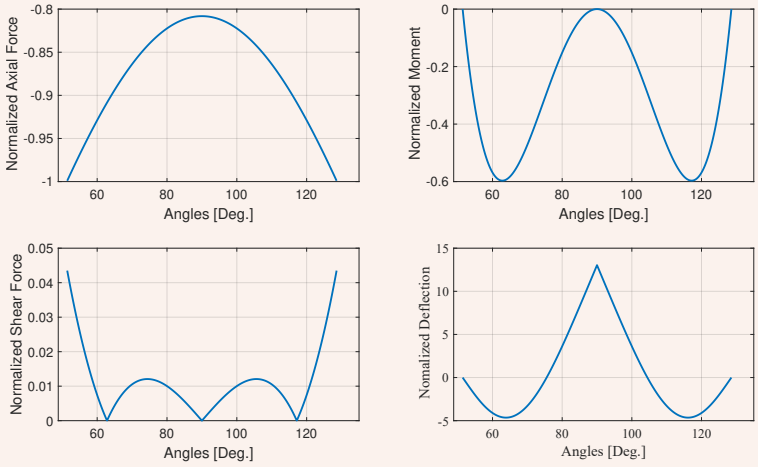
$$\delta P.\ \Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta \mathrm{M1}}{EI} Rd\beta + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M\ \delta \mathrm{M2}}{EI} Rd\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{M\ \delta \mathrm{M3}}{EI} Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta \mathrm{M4}}{EI} Rd\beta\right]$$

(D.4)

حيث:

δP	حمل افتراضي خارجي وحدي مؤثر في اتجاه Δ
Δ	إزاحة خارجية ناتجة من الحمل الحقيقي المؤثر
M	عزم داخلي في الكمرة ناتج من الحمل الحقيقي
$\delta \mathrm{M1}(\beta < \theta)$،	عزم داخلي ناتج من حمل افتراضي خارجي
$\delta \mathrm{M2}(\beta \geq \theta)$	وحدي عندما $\theta < \frac{\pi}{2}$
$\delta \mathrm{M3}(\beta < \theta)$،	عزم داخلي ناتج من حمل افتراضي خارجي
$\delta \mathrm{M4}(\beta \geq \theta)$	وحدي عندما $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

ملخص النتائج



شكل D.8: مخططات قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي

يبين الشكل D.8 مخططات مثال القوس ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي المناقش أعلاه. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند المسندين، ثم تنقص باتجاه التاج إلى نحو 81% من القيمة العظمى. أما قوة القص فهي صغيرة نسبياً، وتتغير من نحو 4% إلى 1% من المسند إلى التاج، على الترتيب. ويطبع العزم الداخلي بالنسبة إلى

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حاصل ضرب القوة المحورية الداخلية في ارتفاع القوس. ويساوي العزم صفراً عند المفاصل، ويبلغ أقصاه بينهما. ونظراً إلى عدم وجود نقطة انقلاب في مخطط العزم بين المفاصل، يمكن القول إن القوس ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي يتصرف كعنصرين منحنيين مستقلين في الارتكاز. ويبلغ الانحراف أقصاه عند التاج، وينخفض إلى نحو 40% من قيمته العظمى عند مسافة $\frac{1}{6}$ البحر من المسندين. ولأن المساند غير قابلة للحركة، يدفع الانحراف الهابط في كل عنصر منحني التاج إلى أعلى.

D.2.4 الحمل الموزع بانتظام

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.5}$$

ردود الأفعال

باستخدام الشكل D.6 تحدد ردود الأفعال الأفقية والرأسية عند المساند. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

Reactions

(θDefine the load (omitting the d

```
dP′=wRSin[θ];
```

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

```
BY= ∫_α^(π/2) dP′ dθ
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

(Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − ∫_α^(π/2) x2dP′ dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]^2}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

(Check statics by taking moment about O (CCW +ve

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{CX}(\text{y1} + \text{y0}) - \int_{\alpha}^{\pi/2} \text{x2dP}' d\theta\right]$

0

القوى الداخلية

يستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.7 لتحديد القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم، عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق هذه القوى الداخلية عند أي زاوية β.

Internal Forces

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

SigFV= $-\text{BXCos}[\beta] + \text{BYSin}[\beta] - \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{Sin}[\beta] d\theta + V$;

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol2[[1]]

$$\frac{1}{2} Rw\text{Cos}[\beta](1 + \text{Sin}[\alpha] - 2\text{Sin}[\beta])$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension

SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] $- \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{Cos}[\beta] d\theta + N$;

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N/.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2} Rw\left(-2\text{Cos}]\beta[^2 + \frac{\text{Cos}[\alpha]^2 \text{Sin}[\beta]}{-1 + \text{Sin}[\alpha]}\right)$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

SigM=BXy4 − BYx5 + $\int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}' \text{x4} d\theta + M$;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]]; M[β_]=M/.Sol4[[1]]

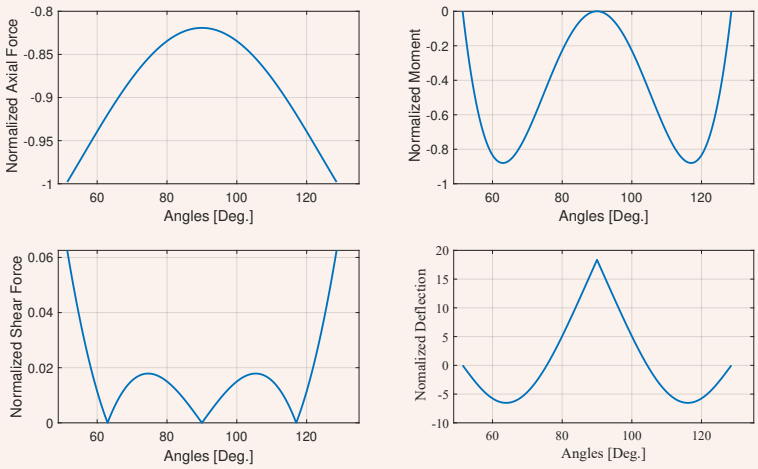
$$\frac{1}{2} R^2 w(-1 + \text{Sin}[\beta])(-\text{Sin}[\alpha] + \text{Sin}[\beta])$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.2.4.1 الانحراف

تماثل عملية حساب الانحراف في القوس الدائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام، وكذلك القيم العددية للمتغيرات المثلثية، نظيرتها تحت الوزن الذاتي المناقشة في القسم D.2.3؛ ولذلك لا تعرض هنا.

ملخص النتائج



شكل D.9: مخططات قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام

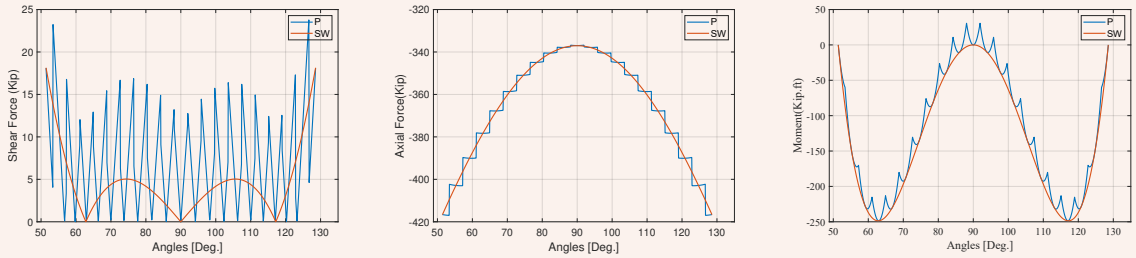
يبين الشكل D.9 مخططات القوس ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند المسندين، ثم تنقص باتجاه التاج إلى نحو 82.5% من القيمة العظمى. أما قوة القص فهي صغيرة نسبياً، وتتغير من نحو 6% إلى 2% من المسند إلى التاج، على الترتيب. ويطبع العزم الداخلي بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية الداخلية في ارتفاع القوس؛ ويساوي صفراً عند المفاصل ويبلغ أقصاه بينهما. ويبلغ الانحراف أقصاه عند التاج، ثم ينخفض إلى نحو 33 % من القيمة العظمى عند مسافة $\frac{1}{6}$ البحر من المسندين. ولأن المساند غير قابلة للحركة، يدفع الانحراف الهابط في كل عنصر منحني التاج إلى أعلى.

D.2.5 التحقق من القوس الدائري ثلاثي المفاصل

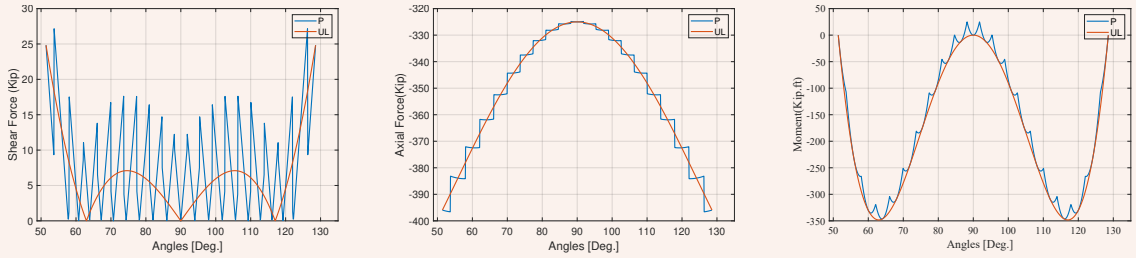
يجري التحقق من المعادلات التحليلية المطورة أعلاه للقوس الدائري ثلاثي المفاصل تحت الحمل المركز والوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام بخطوتين. أولاً، يقسم الوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام على بحر القوس إلى سلسلة من 20 حملاً مركزاً. وترسم مخططات القوى الداخلية باستخدام المعادلات التحليلية للوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام مع الأحمال المركزة المكافئة لكل منهما، ثم تتراكب المخططات للتحقق من صحة الحلول التحليلية. ولأن الوزن الذاتي أو الحمل الموزع بانتظام يكافئ سلسلة الأحمال المركزة المناظرة له، تتطابق المخططات تطابقاً وثيقاً.

يوضح الشكلان D.10 وD.11 عملية التحقق من المعادلات التحليلية المبينة أعلاه. وثانياً، يبنى نموذج SAP 2000 للقوس الدائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي، وتقارن مخططات العزم وقوة القص والقوة المحورية الناتجة من تحليله بالمخططات المرسومة بالمعادلات التحليلية.

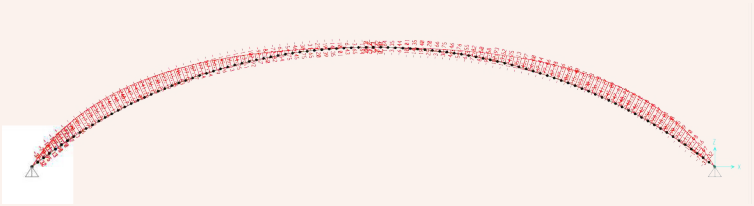
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.10: قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة



شكل D.11: قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة



شكل D.12: SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي



شكل D.13: SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي

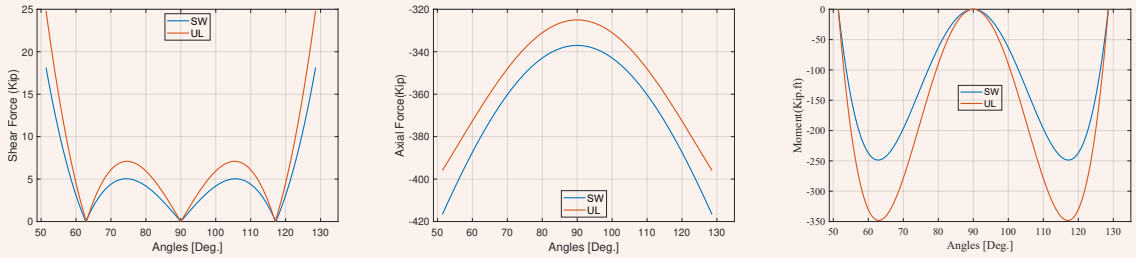


شكل D.14: SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري ثلاثي المفاصل تحت الوزن الذاتي

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

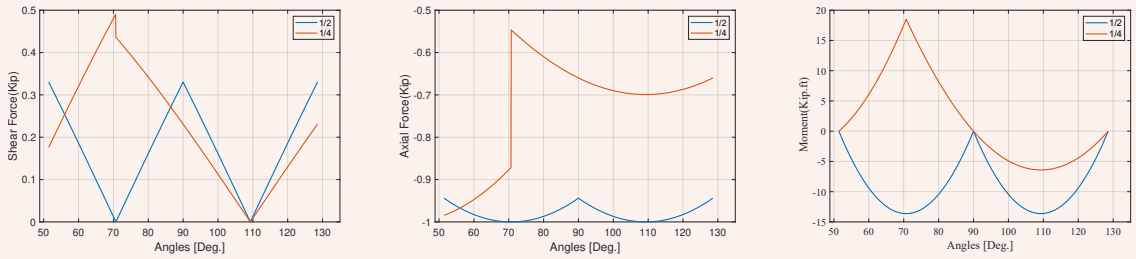
تتطابق القيم العددية على مخطط العزم في الشكل D.12، ومخطط القوة المحورية في الشكل D.13، ومخطط قوة القص في الشكل D.14 مع القيم المناظرة في مخططات الشكل D.10.

D.2.6 الخلاصة



شكل D.15: قوس دائري ثلاثي المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام

يناقش هذا القسم السلوك الإنشائي للقوس ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز ووزن ذاتي وحمل موزع بانتظام بدلالة القوى الداخلية والانحراف. ويقارن الشكل D.15 حالة الوزن الذاتي بحالة الحمل الموزع بانتظام عند حمل متساوٍ w=2.275 kip/ft. وبالمقارنة مع الوزن الذاتي، يولد الحمل الموزع بانتظام قوة قص وعزماً داخليين أكبر، وقوة ضغط محورية داخلية أصغر. يبين الشكل D.16 مخططات حالة تحميل



شكل D.16: قوس دائري ثلاثي المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر

غير متناظرة؛ إذ يطبق حمل وحدي عند التاج وعند ربع البحر. وفي هذه الحالة، يكون العزم الأعظمي الناتج من الحمل المركز عند ربع البحر أكبر بنحو 1.5 مرة من نظيره للحمل عند التاج. أما القوة المحورية العظمى الناتجة من الحمل عند ربع البحر فتكون قريبة من نظيرتها للحمل عند التاج.

D.3 القوس الدائري ثنائي المفاصل

للقوس الدائري المتناظر ثنائي المفاصل أربعة ردود أفعال، اثنان عند كل مسند. ولأن ضلع القوس مستمر بين المسندين ونقطتي الارتكاز غير قابلتين للحركة، فإن الحمل المؤثر لا يولد ردود أفعال رأسية فقط، بل أفقية أيضاً تعرف عادة بالدفع. وبوجود ثلاث معادلات اتزان فقط لإيجاد أربع قوى رد فعل مجهولة، يكون القوس ثنائي المفاصل غير محدد استاتيكياً من الدرجة الأولى.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.3.1 إجراءات التحليل

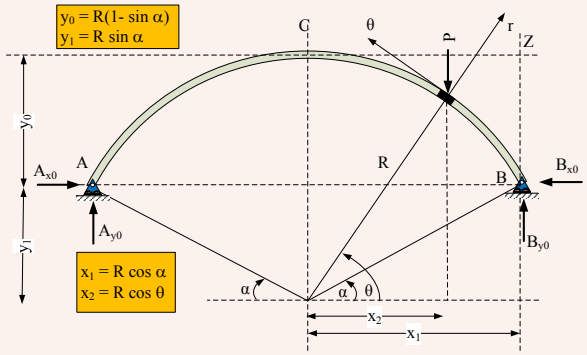
يبدأ التحليل بإزالة رد فعل زائد من القوس ثنائي المفاصل غير المحدد استاتيكياً، ويسمى فيما يأتي المنشأ الأصلي، فيتحول إلى قوس محدد استاتيكياً يسمى المنشأ الأولي. وباستخدام طرائق الاستاتيكا المعتادة، تحسب ردود أفعال المساند والقوى الداخلية في المنشأ الأولي الناتجة من الحمل المؤثر. وبعد ذلك، ومع افتراض عدم وجود قوة خارجية على المنشأ الأولي، تطبق قوة افتراضية وحدية في موضع القوة الزائدة المزالة، وتحسب القوى الداخلية الناتجة منها. ثم تستخدم معادلة توافق تشوه القوس تحت الحمل المؤثر لحساب رد الفعل الزائد في القوس الأصلي غير المحدد استاتيكياً. وبعد إيجاد جميع ردود أفعال المساند، تحسب القوى الداخلية في القوس بطرائق الاستاتيكا المعتادة. وتنفذ هذه العملية في سبع خطوات باستخدام Mathematica، وتدرج ملفات جميع الخطوات في الأقسام ذات الصلة، ولا توسع للتبسيط إلا المعادلات النهائية لردود الأفعال والقوى الداخلية.

تدرس ثلاث حالات تحميل: حمل مركز، ووزن القوس الذاتي، وحمل موزع بانتظام على القوس. ويتناظر الوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام حول مركز القوس، بينما يكون الحمل المركز غير متناظر إذا أثر في موضع غير التاج. ولذلك تستخدم الأشكال نفسها لحالتي الوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام، وتستخدم مجموعة مختلفة من الأشكال لحالة الحمل المركز. وتعبر المعادلات التحليلية لردود الأفعال والقوى الداخلية بدلالة المتغيرات المثلثية المعرفة أعلاه.

D.3.2 الحمل المركز

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dp = P \tag{D.6}$$



شكل D.17: قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز

المنشأ الأولي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

تزال القوة الزائدة Bxo عند المسند B في القوس الأصلي ثنائي المفاصل المبين في الشكل D.17، فيتحول إلى منشأ أولي. ويسبب الحمل المركز في أي موضع على القوس انقطاعاً في القوى الداخلية، كما في الشكل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.3. ولذلك يعتمد تعبير القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس على علاقتها بالزاوية θ التي يؤثر عندها الحمل المركز. وبأخذ الشروط الآتية في الحسبان، تطور مجموعات مختلفة من معادلات القوى الداخلية.

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.7}$$

يستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.18 لتحديد ردود الأفعال الأفقية والرأسية عند المساند، وكذلك القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم، عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMA=BY2x1 - P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

(Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + P(x1 - x2) - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

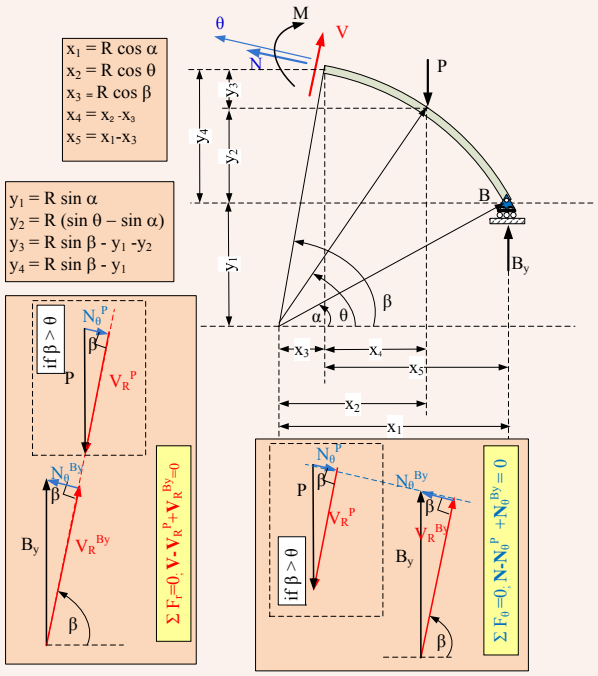
Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - x2P]
```

0

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم، عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.18: قوس دائري ثنائي المفاصل بعد إزالة الدفع الزائد عند المسند B

Primary Structure: Internal Forces

For $\theta < \beta$
(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV1=BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN1=BYCos[β] + NN1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,NN1]]; NN1[β_]=NN1/.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM1= – BYx5 + M1;
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1];M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(R\text{Cos}[\alpha]-R\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

For $\theta > \beta$
(Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV2=BYSin[β]-PSin[β]+V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]];V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])\text{Sin}[\beta]$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN2=BYCos[β]-PCos[β]+NN2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,NN2]];NN2[β_]=NN2/.Sol8[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM2=-BYx5+Px4+M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2];M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(PR\text{Cos}[\alpha]+PR\text{Cos}[\beta]-PR\text{Cos}[\theta]-PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

المنشأ الأولي: القوة الافتراضية الوحدية

تطبق قوة افتراضية وحدية عند الموضع Bxo وفي اتجاه إزاحة المسند B تحت الحمل الحقيقي. ويستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.19 لتحديد القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس الناتجة من الحمل الافتراضي الوحدي. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية الناتجة من القوة الافتراضية.

Primary Structure: Virtual Force

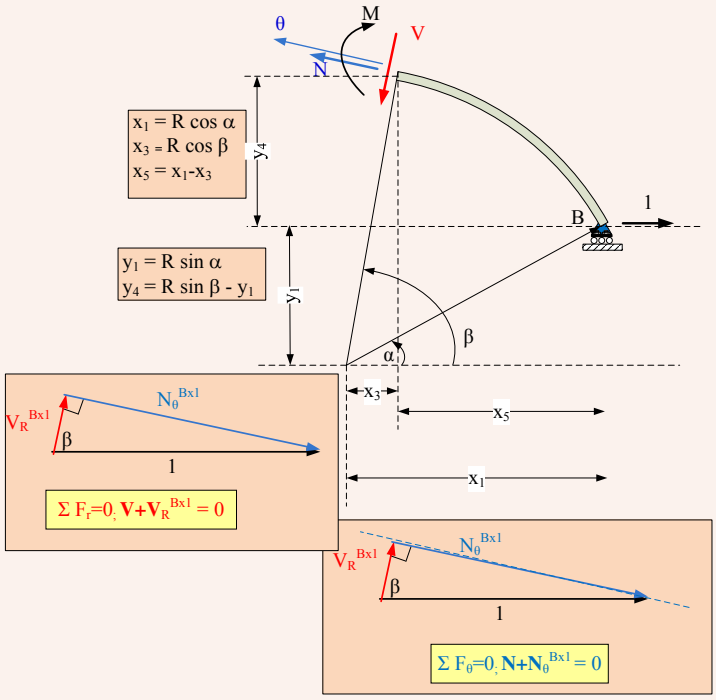
Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β]-δV];
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.19: قوس دائري ثنائي المفاصل مع قوة افتراضية مؤثرة

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

```
Cos[β]
```

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المنشأ الأصلي: القوة الزائدة

تستخدم معادلة التوافق الآتية لتشوه القوس تحت الحمل المؤثر مع طريقة العمل الافتراضي لتحديد القوة الزائدة Bxo عند المسند B. ويؤخذ في هذه العملية كل من المركبتين الانحنائية والمحورية لمعادلة التوافق، وكذلك انقطاع القوى الداخلية.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta M1}{EI}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{\theta} \frac{N1\ \delta N1}{a\ e}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta N2}{a\ e}\, d\beta\right]$$

(D.8)

حيث:

$(M2(\beta \geq \theta\ ،M1(\beta < \theta$	العزم الداخلي في الكمرة الناتج من الحمل الحقيقي
$(\beta \geq \theta M2(\delta،(\beta < \theta M1(\delta$	العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي
$(N2(\beta \geq \theta،(N1(\beta < \theta$	القوة المحورية الداخلية في الكمرة الناتجة من الحمل الحقيقي
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	القوة المحورية الداخلية الناتجة من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوة الزائدة.

Original Structure: Redundant Force

(Deformation due to real load (Flexural + Axial
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\text{M1}[\beta]\delta\text{M}[\beta]}{ei}\, d\beta + \int_{\theta}^{\pi-\alpha} \frac{\text{M2}[\beta]\delta\text{M}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\text{NN1}[\beta]\delta\text{N}[\beta]}{ae}\, d\beta + \int_{\theta}^{\pi-\alpha} \frac{\text{NN2}[\beta]\delta\text{N}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;}$$

(Deformation due to virtual load (Flexural + Axial

$$\text{F11F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta\text{M}[\beta]\delta\text{M}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
F11A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

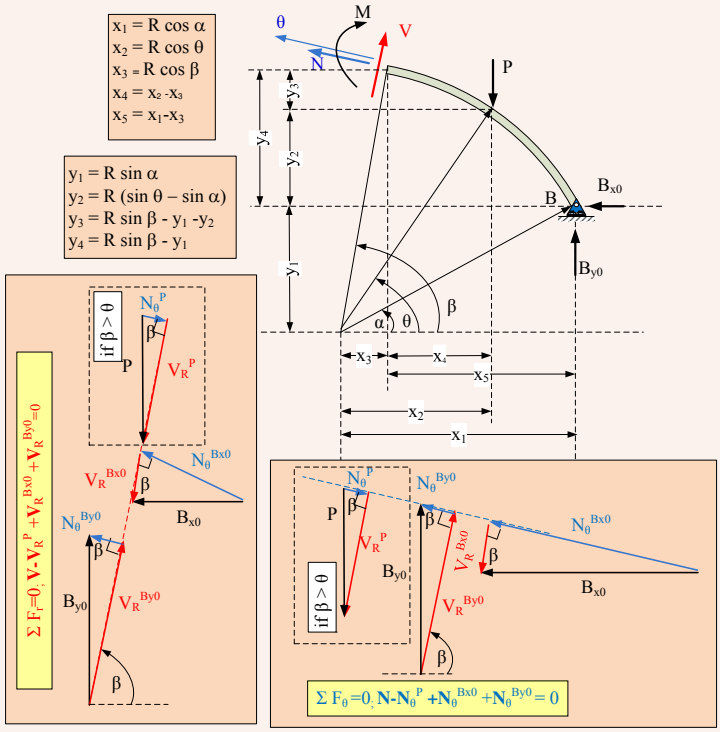
```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-(i-3aR^2)\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta]))\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

المنشأ الأصلي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

بعد حساب القوة الزائدة Bxo في المنشأ الأصلي، تحدد بقية ردود أفعال المساند والقوى الداخلية باستخدام مخطط الجسم الحر في الشكل D.20. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود



شكل D.20: مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي ثنائي المفاصل تحت حمل مركز

أفعال المساند.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Original Structure: Reactions

(Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMAO=BYO2x1 - P(x1 + x2);
```

```
Sol13=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol13[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol14=Solve[BYO - P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol14[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 - AYOx1 - AXOy1 - Px2]
```

0

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية.

Original Structure: Internal Forces

$\theta < \beta$ For

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO1= - BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol15=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol15[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\,(-)\text{Cos}]\alpha[+\text{Cos}]\theta[(\text{Sec}]\alpha[\text{Sin}]\beta[$$
$$+(\text{Cos}]\beta[\,(-\,(i-3aR^2)\,\text{Cos}]2\alpha[+(i-aR^2)\,\text{Cos}]2\theta[+aR^2)-2+2\text{Sin}]\alpha[)-)\pi-2\alpha(\text{Cos}]\alpha[+)\pi-2\theta(\text{Cos}]\theta]+$$
$$2\text{Sin}]\theta[(())\,/\,()\pi-2\alpha(\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)+(i-3aR^2)\,\text{Sin}]2\alpha[))$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol16=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol16[[1]];
```

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-\text{Cos}\right]\beta[)\text{Cos}]\alpha[+\text{Cos}]\theta[(\text{Sec}]\alpha[$$
$$+\left(\text{Sin}\right]\beta[\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}\right]2\alpha[+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}]2\theta[+aR^2(2+)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[-2\text{Sin}]\alpha[))\pi-2\theta(\text{Cos}]\theta]+$$
$$2\text{Sin}]\theta[((\,)\,)/(\,)\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[))$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + MO1;
```

```
sol17=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol17[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(R\right)\text{Cos}]\alpha[-\text{Cos}]\beta[(\,)\text{Cos}]\alpha[+\text{Cos}]\theta[(\text{Sec}]\alpha[$$
$$-(R)\text{Sin}]\alpha[-\text{Sin}]\beta[(\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}\right]2\alpha[+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}]2\theta[+aR^2(2+)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[-2\text{Sin}]\alpha[))\pi-2\theta(\text{Cos}]\theta]+$$
$$2\text{Sin}]\theta[((\,)\,)/(\,)\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[))$$

$\theta > \beta$ For

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol18=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol18[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(2\text{Sin}\right]\beta[-)\text{Cos}]\alpha[+\text{Cos}]\theta[(\text{Sec}]\alpha[\text{Sin}]\beta[$$
$$+(\text{Cos}]\beta[\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}\right]2\alpha[+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}]2\theta[+aR^2)-2+2\text{Sin}]\alpha[)-)\pi-2\alpha(\text{Cos}]\alpha[+)\pi-2\theta(\text{Cos}]\theta]+$$
$$2\text{Sin}]\theta[((\,)\,)/(\,)\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[))$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol19=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol19[[1]];
```

```
FullSimplify[NO2[β]]
```

```
1/2 P (2Cos]β[ − Cos]β[)Cos]α[ + Cos]θ[(Sec]α[
+ (Sin]β[ ((i − 3aR^2) Cos]2α[ + (−i + aR^2) Cos]2θ[ + aR^2(2 + )π − 2α)Sin[2α[ − 2Sin]α[))π − 2θ(Cos]θ[ +
2Sin]θ[(())/()π − 2α( (i + 2aR^2 − aR^2Cos[2α[) + (i − 3aR^2) Sin]2α[))
```

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + MO2;
```

```
sol20=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[MO2[β]]
```

```
1/2 PR (2)Cos]β[ − Cos]θ[( + )Cos]α[ − Cos]β[()Cos]α[ + Cos]θ[(Sec]α[
+ ()Sin]α[ − Sin]β[( (− (i − 3aR^2) Cos]2α[ + (i − aR^2) Cos]2θ[ + aR^2) − 2 + 2Sin]α[) − )π − 2α(Cos]α[ + )π − 2θ(Cos]θ[
+ 2Sin]θ[(())/()π − 2α( (i + 2aR^2 − aR^2Cos[2α[) + (i − 3aR^2) Sin]2α[))
```

الانحراف

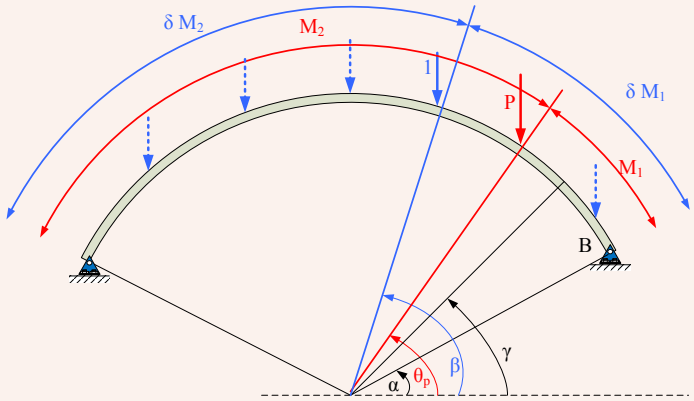
يستخدم الشكل D.21 والمعادلات التحليلية المطورة أعلاه لحساب الانحراف في القوس الدائري المتناظر ثنائي المفاصل. وتستخدم معادلة العمل الافتراضي الآتية لحساب الانحراف.

$$\delta P.\ \Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta M1}{EI}\ Rd\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta M2}{EI}\ Rd\beta\right] \tag{D.9}$$

حيث:

δP	حمل افتراضي خارجي وحدي مؤثر في اتجاه Δ
Δ	إزاحة خارجية ناتجة من الحمل الحقيقي المؤثر
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	العزم الداخلي في الكمرة الناتج من الحمل المركز الحقيقي
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	العزم الداخلي الناتج

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

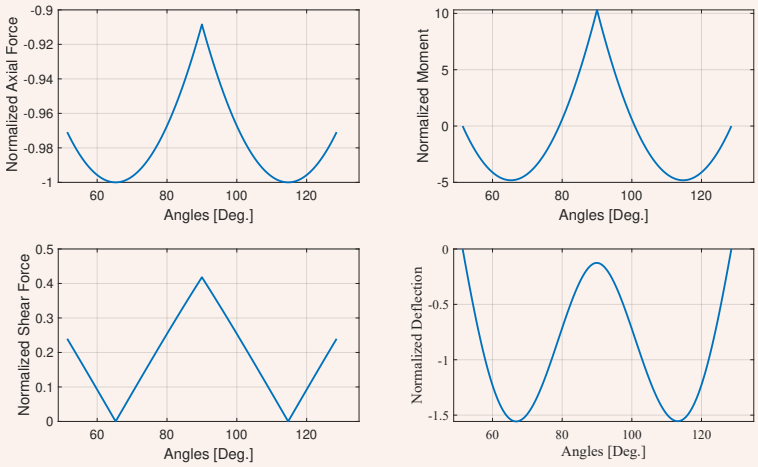


شكل D.21: مخطط الجسم الحر لحساب الانحراف في قوس دائري ثنائي المفاصل

من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

ملخص النتائج

يبين الشكل D.22 مخططات مثال القوس ثنائي المفاصل المناقش أعلاه، حيث يؤثر حمل مركز عند التاج. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين، بينما يطبع العزم الداخلي بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية الداخلية في ارتفاع القوس. وتتناظر جميع القوى الداخلية حول التاج. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها على بعد يقارب $\frac{1}{6}$ البحر من كلا المسندين، ثم تنخفض عند التاج إلى نحو 91% من القيمة العظمى. ويساوي العزم الداخلي صفراً عند المفصلين ويبلغ أقصاه عند التاج. أما قوة القص فهي أصغر نسبياً من القوة المحورية والعزم. ويساوي الانحراف صفراً عند المفصلين، ويبلغ أقصاه على بعد يقارب $\frac{1}{6}$ البحر من كلا المسندين.



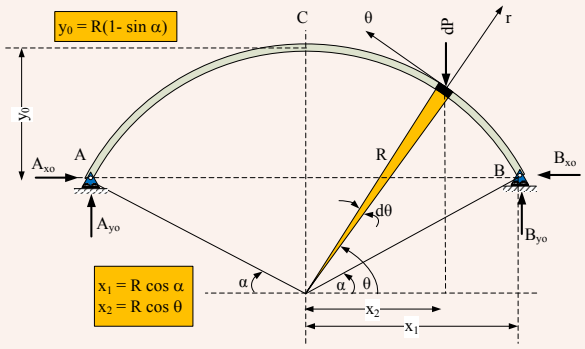
شكل D.22: مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.3.3 الوزن الذاتي

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.10}$$



شكل D.23: قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي

المنشأ الأولي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

تزال القوة الزائدة Bxo عند المسند B في القوس الأصلي ثنائي المفاصل المبين في الشكل D.23، فيتحول إلى منشأ أولي. ويستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.24 لتحديد ردود الأفعال الأفقية والرأسية عند المساند، وكذلك القوى الداخلية، وهي القوة المحورية والقص والعزم، عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

Primary Strucure; Reactions

(θDefine the load (omitting the d

```
dP′=wR;
```

(Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMA=BY2x1 − ∫_α^(π−α) (x1 + x2)dP′dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol2=Solve[BY - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AY==0, AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

(Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve

```
BX=0;
```

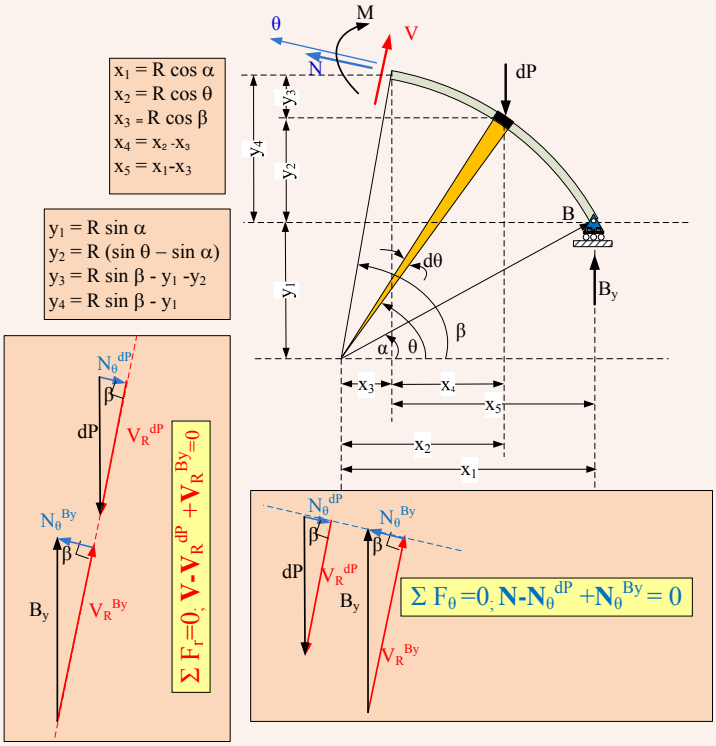
```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + ∫_α^(π-α) dP'(x1 - x2) dθ - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0, AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - ∫_α^(π-α) x2dP' dθ]
```

0



شكل D.24: مخطط الجسم الحر لقوس دائري ثنائي المفاصل بعد إزالة الدفع الزائد عند المسند B

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Primary Structure: Internal Forces

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

SigFV=BYSin[β] $-\int_{\alpha}^{\beta} dP' \text{Sin}[\beta] d\theta + V$;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol4[[1]]

$-\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

SigFN=BYCos[β] $-\int_{\alpha}^{\beta} dP' \text{Cos}[\beta] d\theta + N$;

Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N/.Sol5[[1]]

$-\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\beta)\text{Cos}[\beta]$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

SigM= $-$ BYx5 $+\int_{\alpha}^{\beta} dP' x4 d\theta + M$;

Sol6=Solve[SigM==0,M]; M[β_]=M/.Sol6[[1]]

$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$

المنشأ الأولي: القوة الافتراضية الوحدية

يتبع، باستخدام الشكل D.19، إجراء مماثل لذلك المستخدم للقوس الدائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز، لتحديد القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد البحر الناتجة من الحمل الافتراضي الوحدي. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق هذه القوى.

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

BX1=1;

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] $-\delta$V];

Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]

Cos[β]

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

```
Sin[β]
```

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
Sigδ M=FullSimplify[−BX1y4 + δM];
```

```
Sol12=Solve[Sigδ M==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

```
−RSin[α] + RSin[β]
```

المنشأ الأصلي: القوة الزائدة

تستخدم معادلة التوافق الآتية لتشوه القوس تحت الحمل المؤثر مع طريقة العمل الافتراضي لتحديد القوة الزائدة Bxo عند المسند B. ويؤخذ في هذه العملية كل من المركبتين الانحنائية والمحورية لمعادلة التوافق.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\mathrm{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\mathrm{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.11}$$

حيث:

M العزم الداخلي في الكمرة الناتج من الحمل الحقيقي
$\mathrm{M}\delta$ العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي
N القوة المحورية الداخلية في الكمرة الناتجة من الحمل الحقيقي
δN القوة المحورية الداخلية الناتجة من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوة الزائدة.

Original Structure: Redundant Force

(Deformation due to the real load (Flexural + Axial
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify[∫_α^(π−α) M[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify[∫_α^(π−α) NN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

(Deformation due to virtual force (Flexural + Axial

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δM[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
F11A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

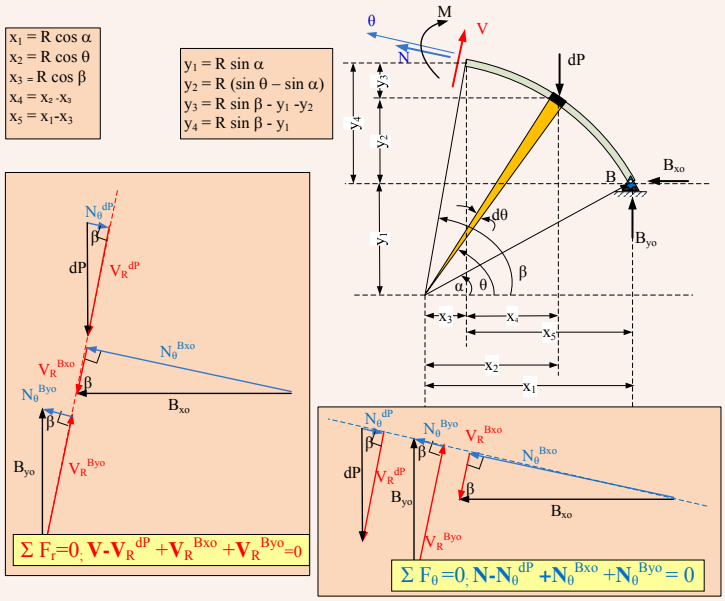
```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left((\pi-2\alpha)\left(-4aR^2-(i-5aR^2)\text{Cos}[2\alpha]\right)-(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha))\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

المنشأ الأصلي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

بعد حساب القوة الزائدة Bxo في المنشأ الأصلي، تحدد بقية ردود أفعال المساند والقوى الداخلية باستخدام مخطط الجسم الحر في الشكل D.25. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود



شكل D.25: مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي

أفعال المساند.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Original Structure: Reactions

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

$\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve [BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO] ; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify [BYOx1 + BXOy1 - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية.

Original Structure: Internal Forces

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}\right]\beta[\left(4aR^2\right)\pi-2\alpha(+\left(i-5aR^2\right))\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha[)+)\pi-2\beta(\,()\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[)\,\text{Sin}]\beta[)\right)/\left(2\,()\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[)\right)$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] − ∫_α^β dP′Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];
```

```
FullSimplify[NNO[β]]
```

$$\begin{aligned}&(Rw\,()\pi-2\beta(\text{Cos}]\beta[\,(-)\pi-2\alpha(\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)-(i-3aR^2)\,\text{Sin}]2\alpha[)\\&+(4aR^2)\pi-2\alpha(+(i-5aR^2)\,)\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha))\\&\text{Sin}[2\alpha[)\,\text{Sin}]\beta[])\,/\\&(2\,()\pi-2\alpha(\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)+(i-3aR^2)\,\text{Sin}]2\alpha[))\end{aligned}$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + ∫_α^β dP′x4dθ + MO;
```

```
sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β]]
```

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}R^2w\,()\pi-2\alpha()\text{Cos}]\alpha[-\text{Cos}]\beta[(\\&-((4aR^2)\pi-2\alpha(+(i-5aR^2)\,)\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha))\\&\text{Sin}[2\alpha[)\,)\text{Sin}]\alpha[-\text{Sin}]\beta[()\,/\\&()\pi-2\alpha(\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)+(i-3aR^2)\,\text{Sin}]2\alpha[)-2))\alpha-\beta(\text{Cos}]\beta[-\text{Sin}]\alpha[+\text{Sin}]\beta[()\end{aligned}$$

الانحراف

تستخدم المعادلات التحليلية المطورة أعلاه لحساب الانحراف في مثال القوس الدائري المتناظر المناقش في القسم D.2.3. وتستخدم معادلة العمل الافتراضي الآتية لحساب الانحراف.

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.12}$$

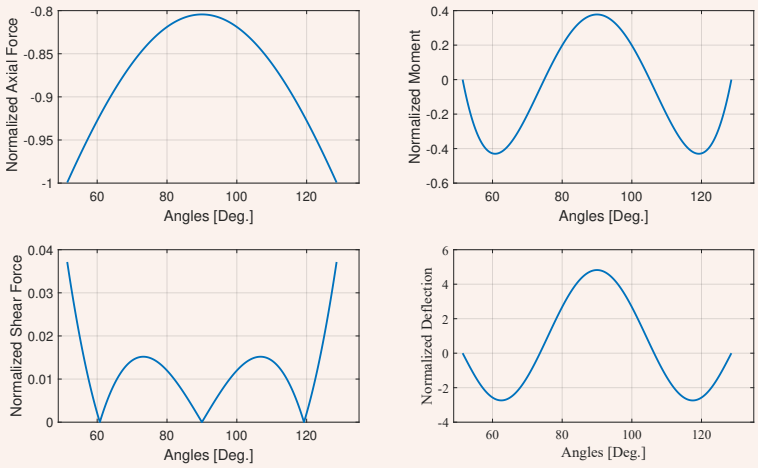
حيث:

δP	حمل افتراضي خارجي وحدي مؤثر في اتجاه Δ
Δ	إزاحة خارجية ناتجة من الحمل الحقيقي المؤثر
M	العزم الداخلي في الكمرة الناتج من الحمل الحقيقي
$\delta M1(\beta<\theta),\ \delta M2(\beta\geq\theta)$	العزم الداخلي الناتج من

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

ملخص النتائج



شكل D.26: مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي

يبين الشكل D.26 مخططات القوس ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند المسندين، ثم تنخفض باتجاه التاج إلى نحو 80.5% من القيمة العظمى. أما قوة القص فهي صغيرة نسبياً، وتتغير من نحو 3.75% إلى 1.5% من المسند إلى التاج، على الترتيب. ويطبع العزم الداخلي بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية الداخلية في ارتفاع القوس؛ ويساوي صفراً عند المفصلين، ويبلغ أقصاه على بعد يقارب $\frac{1}{6}$ البحر من المسندين. ويوجد في مخطط العزم نقطتا انقلاب تقابلان نقطتي الانحراف الصفري في القوس. ويبلغ الانحراف أقصاه عند التاج، ويتبع مخططه شكلاً مماثلاً لمخطط العزم. ويقابل الانحرافان الموجب والسالب الأعظميان موضعي العزمين الموجب والسالب الأعظميين، على الترتيب.

D.3.4 الحمل الموزع بانتظام

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.13}$$

تزال القوة الزائدة Bxo عند المسند B في القوس الأصلي ثنائي المفاصل المبين في الشكل D.23، فيتحول إلى منشأ أولي. وتماثل الخطوات الثلاث الأولى، التي تشمل ردود أفعال المساند والقوى الداخلية الناتجة من الحمل الحقيقي والقوى الداخلية الناتجة من الحمل الافتراضي، نظيرتها للقوس ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي. وللتبسيط، لا تعرض هنا إلا خطوات حساب القوة الزائدة وردود الأفعال والقوى الداخلية في المنشأ الأصلي.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المنشأ الأصلي: القوة الزائدة

تكرر هنا العملية المستخدمة للقوس ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي. وتستخدم معادلة توافق تشوه القوس تحت الحمل المؤثر مع طريقة العمل الافتراضي لتحديد القوة الزائدة Bxo عند المسند B، مع أخذ المركبتين الانحنائية والمحورية لمعادلة التوافق في الحسبان. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوة الزائدة.

Original Structure: Redundant Force

(Deformation due to the real load (Flexural + Axial
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify[∫_α^(π-α) M[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify[∫_α^(π-α) NN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

(Deformation due to virtual force (Flexural + Axial

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δM[β]δM[β]/(ei) dβ];
```

```
F11A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δN[β]δN[β]/(ae) dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{w\left(9aR^3\text{Cos}[\alpha]-16iR\text{Cos}[\alpha]^3+aR^3(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha]))\right)}{12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

المنشأ الأصلي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

بعد حساب القوة الزائدة Bxo في المنشأ الأصلي، تحدد بقية ردود أفعال المساند والقوى الداخلية باستخدام مخطط الجسم الحر في الشكل D.25. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Original Structure: Reactions

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

$RwCos[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve [BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO] ; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$RwCos[\alpha]$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify [BYOx1 + BXOy1 - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية.

Original Structure: Internal Forces

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β]]
```

$$\begin{aligned}&(Rw\,(3\,(-4i+3aR^2)\,\text{Cos}]\alpha[\text{Cos}]\beta[+(-4i+7aR^2)\,\text{Cos}]3\alpha[\text{Cos}]\beta[\\&+3aR^2)\pi-2\alpha(\text{Cos}]\beta[)\text{Sin}]\alpha[-\text{Sin}[3\alpha[(\\&-6\,((\pi-2\alpha)\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha])+(i-3aR^2)\,\text{Sin}[2\alpha])\\&\text{Sin}[2\beta[))\,/\\&(12\,()\pi-2\alpha(\,(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[)+(i-3aR^2)\,\text{Sin}]2\alpha[))\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] − ∫_α^β dP′Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];
```

```
FullSimplify[NNO[β]]
```

$$\left(Rw\left(12\text{Cos}\right]\beta[^2\left(-\right)\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[\right)$$
$$+\left(3\left(4i-3aR^2\right)\text{Cos}]\alpha[+\left(4i-7aR^2\right)\text{Cos}]3\alpha[+3aR^2)\pi-2\alpha()-\text{Sin}]\alpha]+\text{Sin}[3\alpha[(\,)\,\text{Sin}]\beta[]\right)/$$
$$\left(12\,(\,)\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[\right)\right)$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + ∫_α^β dP′x4dθ + MO;
```

```
sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β]]
```

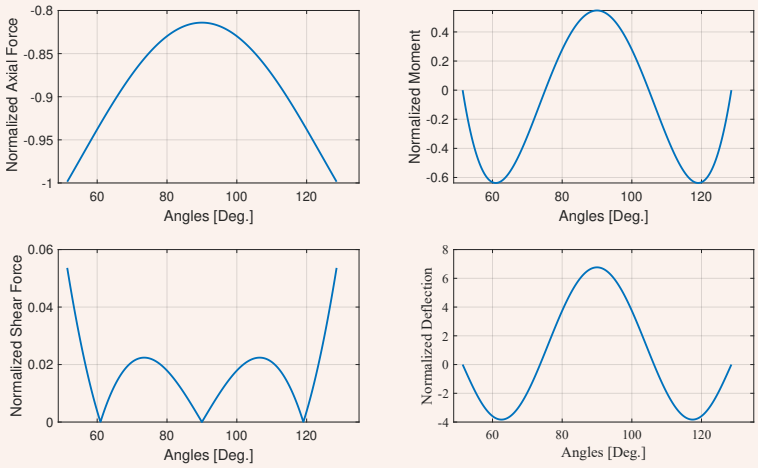
$$\frac{1}{12}R^2w\left(12\text{Cos}]\alpha[)\text{Cos}]\alpha[-\text{Cos}]\beta[(-6)\text{Cos}]\alpha[-\text{Cos}]\beta[(^2\right.$$
$$+\left(\left(9aR^2\text{Cos}]\alpha[-16i\text{Cos}]\alpha]^3+aR^2(7\text{Cos}[3\alpha]+3)\pi-2\alpha()\text{Sin}]\alpha[-\text{Sin}[3\alpha[(()\,)\text{Sin}]\alpha[-\text{Sin}]\beta[()\right)/$$
$$()\pi-2\alpha(\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha[\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}]2\alpha[\right))$$

الانحراف

تماثل عملية حساب الانحراف في القوس الدائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام، وكذلك القيم العددية للمتغيرات المثلثية، نظيرتها تحت الوزن الذاتي؛ ولذلك لا تعرض هنا.

ملخص النتائج

يبين الشكل D.27 مخططات القوس ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند المسندين، ثم تنخفض باتجاه التاج إلى نحو 81.5% من القيمة العظمى. أما قوة القص فهي صغيرة نسبياً، وتتغير من نحو 5.25% إلى 2% من المسند إلى التاج، على الترتيب. ويطبع العزم الداخلي بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية الداخلية في ارتفاع القوس؛ ويساوي صفراً عند المفصلين، ويبلغ أقصاه على بعد يقارب $\frac{1}{6}$ البحر من المسندين. ويوجد في مخطط العزم نقطتا انقلاب تقابلان نقطتي الانحراف الصفري

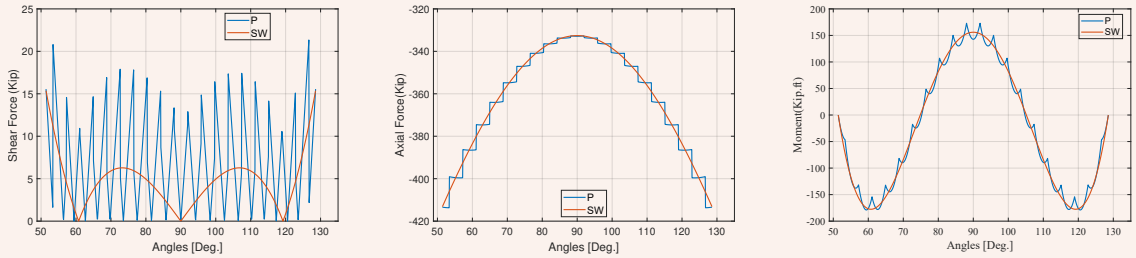


شكل D.27: مخططات قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام

في القوس. ويبلغ الانحراف أقصاه عند التاج، ويتبع مخططه شكلاً مماثلاً لمخطط العزم. ويقابل الانحرافان الموجب والسالب الأعظميان موضعي العزمين الموجب والسالب الأعظميين، على الترتيب.

D.3.5 التحقق من القوس الدائري ثنائي المفاصل

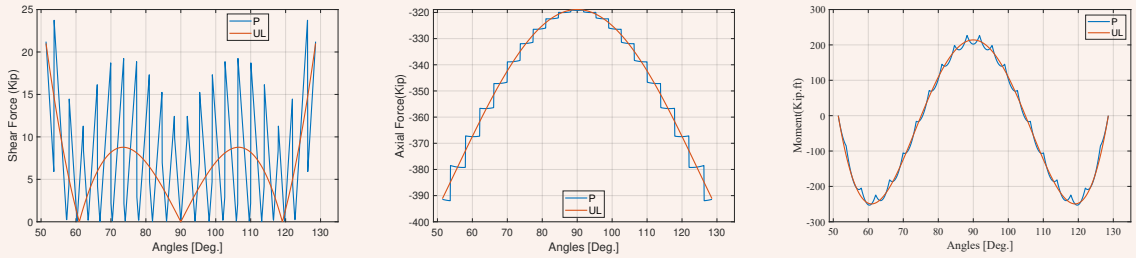
يجري التحقق من المعادلات التحليلية المطورة للقوس الدائري ثنائي المفاصل تحت الحمل المركز والوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام بخطوتين. أولاً، يقسم الوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام على بحر القوس إلى سلسلة من 20 حملاً مركزاً. وترسم مخططات القوى الداخلية والانحرافات باستخدام المعادلات التحليلية لكل من الحملين مع الأحمال المركزة المكافئة له، ثم تتراكب للتحقق من صحة الحلول. ولأن كل حمل يكافئ سلسلة الأحمال المركزة المناظرة له، تتطابق المخططات تطابقاً وثيقاً.



شكل D.28: قوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة

يوضح الشكلان D.28 وD.29 عملية التحقق السابقة. وثانياً، يبنى نموذج SAP 2000 للقوس الدائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي، وتقارن مخططات العزم وقوة القص والقوة المحورية الناتجة من تحليله بالمخططات المرسومة بالمعادلات التحليلية. تتطابق القيم العددية في مخطط العزم بالشكل D.30، ومخطط القوة المحورية بالشكل D.31، ومخطط قوة القص بالشكل D.32 تطابقاً وثيقاً مع القيم المناظرة في مخططات الشكل D.28.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.29: قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة



شكل D.30: SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي



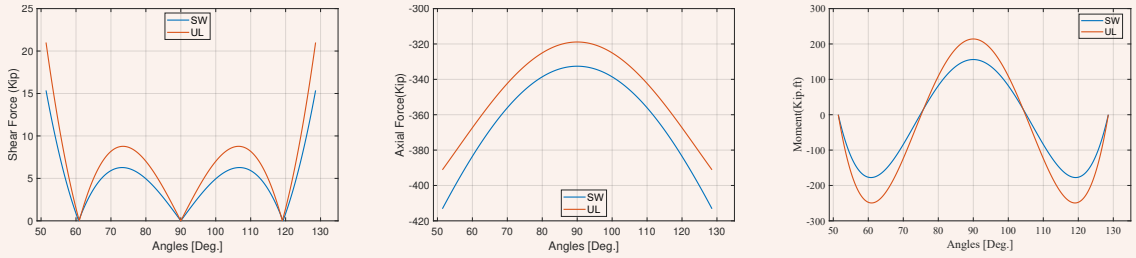
شكل D.31: SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي



شكل D.32: SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري ثنائي المفاصل تحت الوزن الذاتي

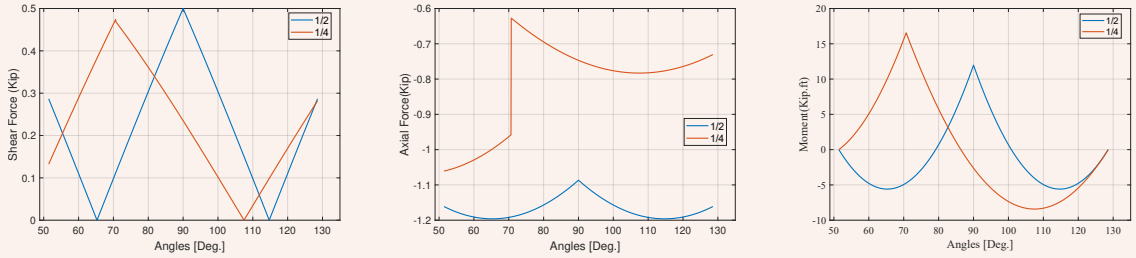
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

D.3.6 الخلاصة



شكل D.33: قوس دائري ثنائي المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام

يناقش هذا القسم السلوك الإنشائي للقوس ثنائي المفاصل تحت الحمل المركز والوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام بدلالة القوى الداخلية والانحراف. ويقارن الشكل D.33 الوزن الذاتي بالحمل الموزع بانتظام عند حمل متساوٍ w=2.275 kip/ft. وبالمقارنة مع الوزن الذاتي، يولد الحمل الموزع بانتظام قوة قص وعزماً داخليين أكبر، وقوة ضغط محورية داخلية أصغر.



شكل D.34: قوس دائري ثنائي المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر

يبين الشكل D.34 مخططات حالة تحميل غير متناظرة، حيث يطبق حمل وحدي عند التاج وعند ربع البحر. ويكون العزم الأعظمي الناتج من الحمل عند ربع البحر أكبر بنحو 1.4 مرة من نظيره عند التاج، بينما تكون القوة المحورية العظمى الناتجة من الحمل عند التاج أكبر بنحو 1.2 مرة من نظيرتها عند ربع البحر.

D.4 القوس الدائري عديم المفاصل

للقوس الدائري المتناظر عديم المفاصل ستة ردود أفعال، ثلاثة عند كل مسند. ولأن ضلع القوس مستمر بين المسندين ونقطتي الارتكاز غير قابلتين للحركة، يولد الحمل المؤثر ردود أفعال رأسية وأفقية، تعرف الأخيرة عادة بالدفع. وبوجود ثلاث معادلات اتزان فقط لإيجاد ست قوى رد فعل مجهولة، يكون القوس عديم المفاصل غير محدد استاتيكياً من الدرجة الثالثة.

D.4.1 إجراءات التحليل

يبدأ التحليل بإزالة ردود الأفعال الزائدة الثلاثة من القوس عديم المفاصل غير المحدد استاتيكياً، فيتحول إلى منشأ أولي محدد استاتيكياً. وتحسب بطرائق الاستاتيكا المعتادة ردود الأفعال والقوى الداخلية في

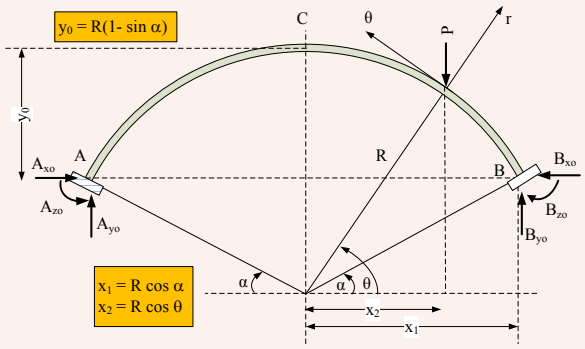
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المنشأ الأولي الناتجة من الحمل الحقيقي. ثم، مع افتراض عدم وجود قوة خارجية، تطبق قوة افتراضية وحدية أو عزم افتراضي وحدي في موضع القوة أو العزم الزائد المزال، وتحسب القوى الداخلية الناتجة. وتستخدم معادلة توافق تشوه القوس لحساب ردود الأفعال الزائدة في المنشأ الأصلي. وبعد إيجادها تحسب القوى الداخلية بطرائق الاستاتيكا، ثم تستخدم لحساب الانحراف. وتنفذ العملية في سبع خطوات باستخدام Mathematica، وتدرج الملفات في الأقسام ذات الصلة، ولا توسع للتبسيط إلا المعادلات النهائية. تدرس ثلاث حالات تحميل: حمل مركز، ووزن ذاتي، وحمل موزع بانتظام. ويتناظر الوزن الذاتي والحمل الموزع حول مركز القوس، بينما يكون الحمل المركز غير متناظر إذا أثر في موضع غير التاج؛ ولذلك تستخدم الأشكال نفسها للحالتين المتناظرتين ومجموعة مختلفة للحمل المركز.

D.4.2 الحمل المركز

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dp = P \tag{D.14}$$



شكل D.35: قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز

المنشأ الأولي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

تزال القوة الزائدة Bxo والعزمان الزائدان Azo وBzo من القوس الأصلي عديم المفاصل المبين في الشكل D.35، فيتحول إلى منشأ أولي. ويسبب الحمل المركز انقطاعاً في القوى الداخلية، كما في الشكل D.3. ولذلك يعتمد تعبير القوى الداخلية عند أي زاوية β على علاقته بالزاوية θ لموضع الحمل، وتطور مجموعات معادلات مختلفة وفق الشرطين الآتيين.

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.15}$$

يماثل المنشأ الأولي للقوس عديم المفاصل نظيره للقوس ثنائي المفاصل. ويستخدم مخطط الجسم الحر في الشكل D.18 لتحديد ردود الأفعال والقوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود الأفعال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

(Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

$$0$$

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس.

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

(Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

المنشأ الأولي: القوة الافتراضية الوحدية

تطبق قوة افتراضية وحدية عند Bxo في اتجاه إزاحة المسند B تحت الحمل الحقيقي، ويستخدم الشكل D.19 لتحديد القوى الداخلية الناتجة عند أي زاوية β. وبالمثل، يطبق عزم وحدي عند كل من Bzo وAzo في اتجاه دوران المسندين B وA، على الترتيب. ويستخدم الشكلان D.36 وD.37 لتحديد القوى الداخلية الناتجة من العزم الافتراضي عند أي زاوية β عند المسندين. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح الاشتقاق.

Primary Structure: Virtual Forces

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFδVBX1=FullSimplify[BX1Cos[β] + δVBX1];
```

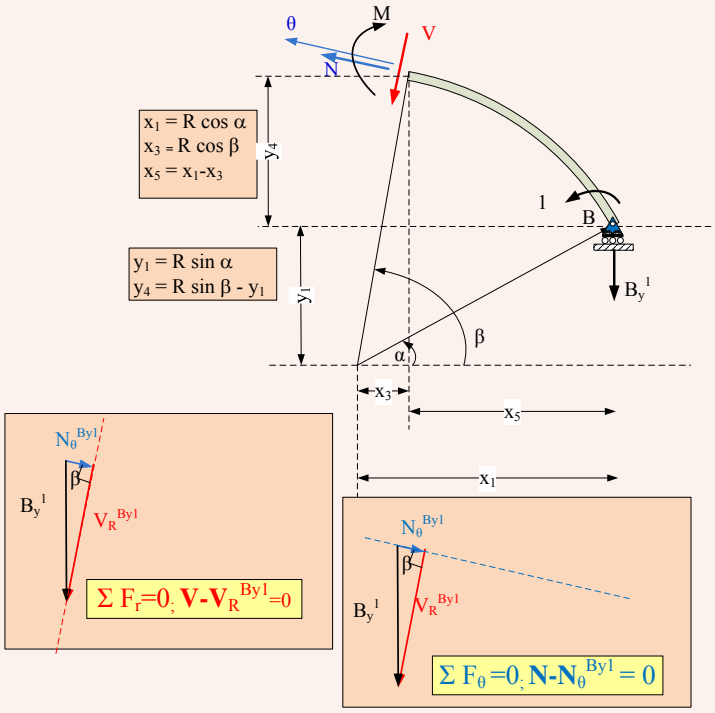
```
Sol7=Solve[SigFδVBX1==0,δVBX1]; δVBX1[β_]=δVBX1/.Sol7[[1]]
```

$-\text{Cos}[\beta]$

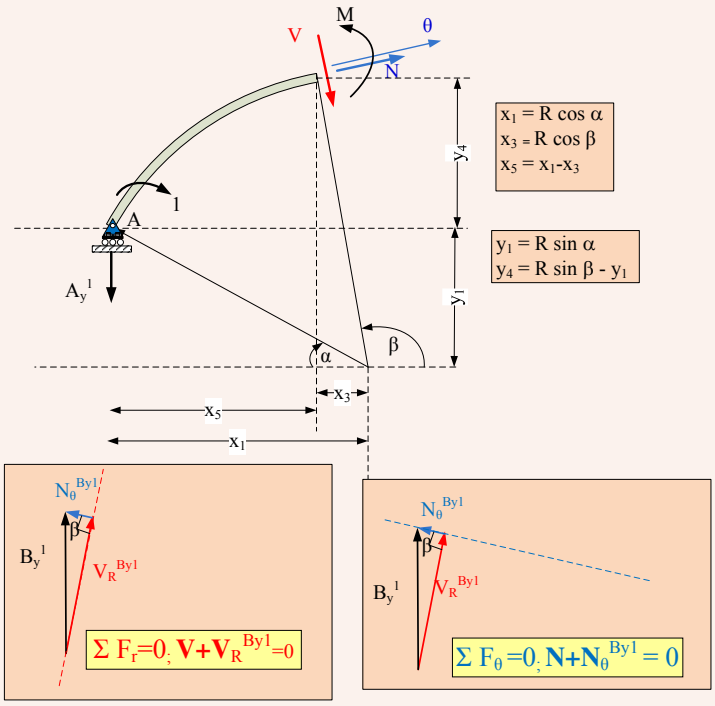
(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFδNBX1=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δNBX1];
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.36: قوس دائري عديم المفاصل مع عزم افتراضي عند B



شكل D.37: قوس دائري عديم المفاصل مع عزم افتراضي عند A

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol8=Solve[SigFδNBX1==0,δNBX1]; δNBX1[β_]=δNBX1/.Sol8[[1]]
```

$\text{Sin}[\beta]$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigδMBX1=FullSimplify[−BX1y4 + δMBX1];
```

```
Sol9=Solve[SigδMBX1==0,δMBX1]; δMBX1[β_]=δMBX1/.Sol9[[1]]
```

$-R\text{Sin}[\alpha] + R\text{Sin}[\beta]$

Apply virtual moment at B

```
BZ1=1;
```

(Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve

```
SigMABZ1=FullSimplify[2x1BY1 − BZ1];
```

```
Sol10=Solve[SigMABZ1==0,BY1]; BY1=BY1/.Sol10[[1]]
```

$\frac{\text{Sec}[\alpha]}{2R}$

(Summation of forces in the radial direction; Shear(+ve outward

```
SigFδVBZ1=FullSimplify[−BY1Sin[β] + δVBZ1];
```

```
Sol11=Solve[SigFδVBZ1==0,δVBZ1]; δVBZ1[β_]=δVBZ1/.Sol11[[1]]
```

$\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFδNBZ1=FullSimplify[−BY1Cos[β] + δNBZ1];
```

```
Sol12=Solve[SigFδNBZ1==0,δNBZ1]; δNBZ1[β_]=δNBZ1/.Sol12[[1]]
```

$\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigδMBZ1=FullSimplify[BY1x5 − BZ1 + δMBZ1];
```

```
Sol13=Solve[SigδMBZ1==0,δMBZ1]; δMBZ1[β_]=δMBZ1/.Sol13[[1]]
```

$\frac{1}{2}(1 + \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Apply virtual moment at A

```
AZ1=1;
```

(Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve

```
SigMAAZ1=FullSimplify[AZ1 − 2x1BY2];
```

```
Sol14=Solve[SigMAAZ1==0,BY2]; BY2=BY2/.Sol14[[1]];
```

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFδVAZ1=FullSimplify[BY2Sin[β] + δVAZ1];
```

```
Sol15=Solve[SigFδVAZ1==0,δVAZ1]; δVAZ1[β_]=δVAZ1/.Sol15[[1]]
```

$$-\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFδNAZ1=FullSimplify[BY2Cos[β] + δNAZ1];
```

```
Sol16=Solve[SigFδNAZ1==0,δNAZ1]; δNAZ1[β_]=δNAZ1/.Sol16[[1]]
```

$$-\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigδMAZ1=FullSimplify[−BY2x5 + δMAZ1];
```

```
Sol17=Solve[SigδMAZ1==0,δMAZ1]; δMAZ1[β_]=δMAZ1/.Sol17[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 - \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المنشأ الأصلي: القوى الزائدة

تستخدم معادلة التوافق الآتية لتشوه القوس تحت الحمل المؤثر مع طريقة العمل الافتراضي لتحديد القوى الزائدة Bxo وBzo وAzo. ويؤخذ في الحسبان كل من المركبتين الانحنائية والمحورية لمعادلة التوافق وانقطاع القوى الداخلية.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta\mathrm{M1}}{EI}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\mathrm{M2}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{\theta} \frac{N1\ \delta\mathrm{N1}}{a\ e}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta\mathrm{N2}}{a\ e}\, d\beta\right]$$

(D.16)

حيث:

$M1(\beta < \theta), M2(\beta \geq \theta)$	العزم الداخلي الناتج من الحمل الحقيقي
$\delta M1(\beta < \theta), \delta M2(\beta \geq \theta)$	العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي
$N1(\beta < \theta), N2(\beta \geq \theta)$	القوة المحورية الداخلية الناتجة من الحمل الحقيقي
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	القوة المحورية الداخلية الناتجة من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الزائدة.

Original Structure; Redundant Forces

(Deformation due to real load (Flexural + Axial
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\mathrm{M1}_{[\beta]}\delta\mathrm{MBX1}_{[\beta]}}{ei}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{M2}_{[\beta]}\delta\mathrm{MBX1}_{[\beta]}}{ei}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\mathrm{NN1}_{[\beta]}\delta\mathrm{NBX1}_{[\beta]}}{ae}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN2}_{[\beta]}\delta\mathrm{NBX1}_{[\beta]}}{ae}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;}$$

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\mathrm{M1}_{[\beta]}\delta\mathrm{MBZ1}_{[\beta]}}{ei}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{M2}_{[\beta]}\delta\mathrm{MBZ1}_{[\beta]}}{ei}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{\mathrm{NN1}_{[\beta]}\delta\mathrm{NBZ1}_{[\beta]}}{ae}\, d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN2}_{[\beta]}\delta\mathrm{NBZ1}_{[\beta]}}{ae}\, d\beta\right];$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;
```

Rotation at A

$$\text{DeltaAZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{\text{M1}_{[\beta]}\delta\text{MAZ1}_{[\beta]}}{ei}d\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{\text{M2}_{[\beta]}\delta\text{MAZ1}_{[\beta]}}{ei}d\beta\right];$$

$$\text{DeltaAZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{\text{NN1}_{[\beta]}\delta\text{NAZ1}_{[\beta]}}{ae}d\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{\text{NN2}_{[\beta]}\delta\text{NAZ1}_{[\beta]}}{ae}d\beta\right];$$

```
DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;
```

(Deformation due to virtual load (Flexural + Axial

$$\text{F11F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{MBX1}_{[\beta]}\delta\text{MBX1}_{[\beta]}}{ei}d\beta\right];$$
$$\text{F11A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{NBX1}_{[\beta]}\delta\text{NBX1}_{[\beta]}}{ae}d\beta\right];$$

```
F11=F11F + F11A;
```

$$\text{F12F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{MBX1}_{[\beta]}\delta\text{MBZ1}_{[\beta]}}{ei}d\beta\right];$$
$$\text{F12A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{NBX1}_{[\beta]}\delta\text{NBZ1}_{[\beta]}}{ae}d\beta\right];$$

```
F12=F12F + F12A;
```

$$\text{F13F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{MBX1}_{[\beta]}\delta\text{MAZ1}_{[\beta]}}{ei}d\beta\right];$$
$$\text{F13A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{NBX1}_{[\beta]}\delta\text{NAZ1}_{[\beta]}}{ae}d\beta\right];$$

```
F13=F13F + F13A;
```

$$\text{F22F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{MBZ1}_{[\beta]}\delta\text{MBZ1}_{[\beta]}}{ei}d\beta\right];$$
$$\text{F22A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)}\frac{\delta\text{NBZ1}_{[\beta]}\delta\text{NBZ1}_{[\beta]}}{ae}d\beta\right];$$

```
F22=F22F + F22A;
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
F23F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(e i), {β, α, (π-α)}]];
F23A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(a e), {β, α, (π-α)}]];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[Integrate[δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(e i), {β, α, (π-α)}]];
F33A=FullSimplify[Integrate[δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(a e), {β, α, (π-α)}]];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 + BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\theta]-2aR^2(\pi-2\alpha+2\text{Sin}[2\alpha])+4aR^2\text{Cos}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

المنشأ الأصلي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

بعد حساب القوى الزائدة Bxo وBzo وAzo في المنشأ الأصلي، تحدد بقية ردود الأفعال والقوى الداخلية باستخدام مخطط الجسم الحر في الشكل D.38. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

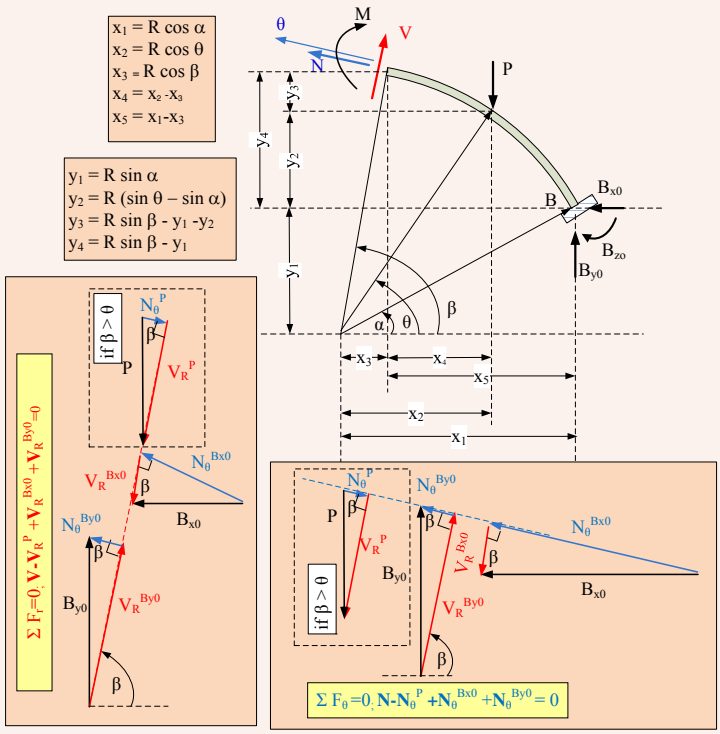
Original Structure: Reactions

(Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMAO=BYO2x1 - P(x1 + x2) + AZO - BZO;
```

```
Sol21=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol21[[1]];
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.38: مخطط الجسم الحر للقوس الدائري الأصلي عديم المفاصل تحت حمل مركز

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
FullSimplify[BYO]
```

$$\frac{P\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-(i+aR^2)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+(-i+aR^2)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol22=Solve[BYO - P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[AYO]
```

$$\frac{P\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-2(i+aR^2)(\alpha-\theta+\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha])+(i-aR^2)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[-BZO + BYOx1 + BXOy1 + AZO - AYOx1 - AXOy1 - Px2]
```

```
0
```

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية.

Original Structure: Internal Forces

For $\theta < \beta$
(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO1= - BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol23=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol23[[1]];
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$(P\ (-2\ (i+aR^2)\ \text{Cos}]\beta[)-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\ ((i+aR^2)\ )\pi-2\alpha(\text{Cos}]2\alpha[+)\pi-2\alpha(\ (2aR^2+(-i+aR^2)\ \text{Cos}[2\theta[)+$$
$$4aR^2\text{Cos}]\alpha[)-\pi\text{Cos}]\theta]+2\theta\text{Cos}]\theta]+2\text{Sin}]\alpha[-2\text{Sin}]\theta[()$$
$$-2\ (-4aR^2+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\ \text{Sin}]\beta[\ (4aR^2\text{Cos}]\theta[\text{Sin}]\alpha]+$$
$$(i+aR^2)$$
$$(2)-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+(i-aR^2)$$
$$\text{Sin}[2\theta[]))\ /(4\ (i+aR^2)\ )-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[($$
$$(-4aR^2+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[))$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol24=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol24[[1]];
```

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$(P\ (2\ (i+aR^2)\ )-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\text{Sin}]\beta[\ ((i+aR^2)\ )\pi-2\alpha(\text{Cos}]2\alpha[+)\pi-2\alpha(\ (2aR^2+(-i+aR^2)\ \text{Cos}[2\theta[)+$$
$$4aR^2\text{Cos}]\alpha[)-\pi\text{Cos}]\theta]+2\theta\text{Cos}]\theta]+2\text{Sin}]\alpha[-2\text{Sin}]\theta[()$$
$$-2\text{Cos}]\beta[\ (-4aR^2+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\ (4aR^2\text{Cos}]\theta[\text{Sin}]\alpha]+$$
$$(i+aR^2)$$
$$(2)-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+(i-aR^2)$$
$$\text{Sin}[2\theta[]))\ /(4\ (i+aR^2)\ )-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\ (-4aR^2+(i+aR^2)$$
$$)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+(i+aR^2)\ )\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[))$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigMO1=BXOy4 – BYOx5 + BZO + MO1;
```

```
sol25=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol25[[1]];
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

FullSimplify[MO1[β]]

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha-\text{Sin}]2\alpha[\left(\right)\right)\pi-2\alpha\left(\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\right.$$
$$\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)$$
$$\text{Cos}[2\theta[\left)\right)+$$
$$4aR^2\text{Sin}[2\alpha[\left)\right)\text{Sin}]\beta[-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}]\alpha[\left)\right)\pi-2\alpha-\text{Sin}]2\alpha[\left(\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\right)\right.$$
$$\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}]\beta[\left)\right)\pi-2\theta(\text{Cos}]\theta]+2\text{Sin}]\theta[\left(\right)$$
$$+\left(i+aR^2\right)\left)-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[\left(\left(-2\text{Cos}]\theta[\left(-2aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\right)\pi-2\alpha\left(\right)\right)\pi-\alpha-\theta(-2aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right.$$
$$\left.\left.\left.

```
FullSimplify[NO2[β]]
```

$$-\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)\right)-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\text{Sin}]\beta[\left(\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(\text{Cos}]2\alpha[+)\pi-2\alpha(\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\right)\text{Cos}[2\theta[)+4aR^2\text{Cos}]\alpha[)-\pi\text{Cos}]\theta]+2\theta\text{Cos}]\theta]+2\text{Sin}]\alpha[-2\text{Sin}]\theta[()-4\text{Cos}]\beta[\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\left(\left(i+aR^2\right)\right)\alpha-\theta(+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}]\alpha[\text{Sin}]\alpha[+\text{Cos}]\theta[\left(-i\text{Sin}]\theta]+aR^2\right)-2\text{Sin}]\alpha[+\text{Sin}]\theta[()))/\left(4\left(i+aR^2\right)\right)-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[))$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + BZO + MO2;
```

```
sol28=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol28[[1]];
```

```
FullSimplify[MO2[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha-\text{Sin}]2\alpha[(\,)\pi-2\alpha(\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta[)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha[)\,\text{Sin}]\beta[-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}]\alpha[)\pi-2\alpha-\text{Sin}]2\alpha[(\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}]\beta[))\pi-2\theta(\text{Cos}]\theta]+2\text{Sin}]\theta[()+\left(i+aR^2\right)\left(2\text{Cos}]\theta[\,()\pi-2\alpha(\left(aR^2(2+)\pi-2\alpha()\alpha-\theta))+i)\pi-2\alpha()\alpha-\theta)+2aR^2\text{Cos}[2\alpha[)-8aR^2\text{Cos}]\alpha[^3\text{Sin}]\alpha[-\left(i+aR^2\right)\right)\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha[^2)+\left(i+aR^2\right)\right)-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[()2)\pi-2\alpha(\text{Sin}]\alpha[-2)\pi-2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\text{Sin}]\theta[()-\text{Cos}]\beta[\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\left(-4aR^2\text{Cos}]\theta[\text{Sin}]\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2\alpha-2\theta+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta[)))/\left(2\left(i+aR^2\right)\right)-\pi+2\alpha+\text{Sin}]2\alpha[(\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[))$$

الانحراف

يستخدم الشكل D.21 والمعادلات التحليلية المطورة أعلاه لحساب الانحراف في مثال القوس الدائري المتناظر عديم المفاصل المناقش في القسم D.2.2. وتستخدم معادلة العمل الافتراضي الآتية.

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M1\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M2\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.17}$$

حيث:

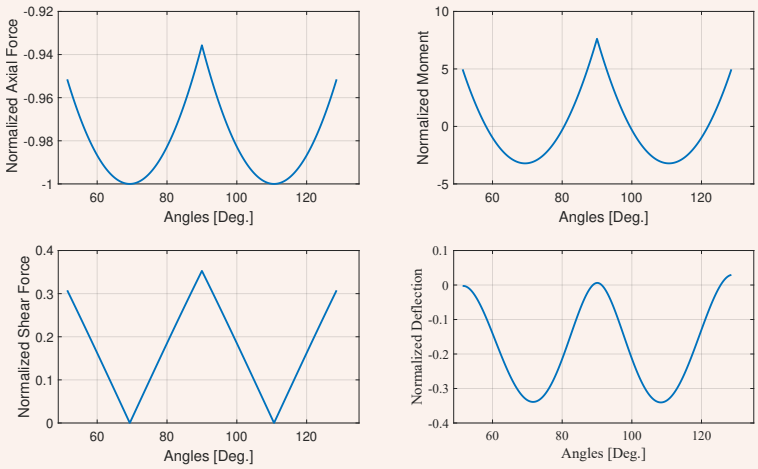
δP حمل افتراضي خارجي وحدي مؤثر في اتجاه Δ

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Δ إزاحة خارجية ناتجة من الحمل الحقيقي المؤثر
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$ العزم الداخلي الناتج من الحمل المركز الحقيقي
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$ العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

ملخص النتائج

يبين الشكل D.39 مخططات مثال القوس عديم المفاصل، حيث يؤثر حمل مركز عند التاج. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين، بينما يطبع العزم بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية في ارتفاع القوس. وتتناظر القوى الداخلية حول التاج. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها على بعد يقارب $\frac{1}{4}$ البحر من كلا المسندين، ثم تنخفض عند التاج إلى نحو 93.5% من القيمة العظمى. ويبلغ العزم الداخلي أقصاه عند التاج، أما قوة القص فهي أصغر نسبياً. ويساوي الانحراف صفراً عند المسندين ويبلغ أقصاه على بعد نحو 1/4 البحر من كليهما.



شكل D.39: مخططات قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز

D.4.3 الوزن الذاتي

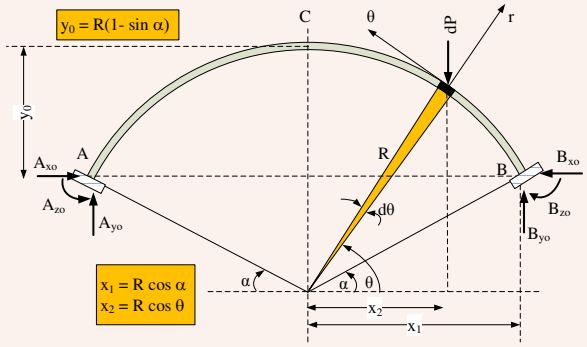
في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.18}$$

المنشأ الأولي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

تزال القوة الزائدة Bxo والعزمان الزائدان Bzo وAzo من القوس الأصلي عديم المفاصل المبين في الشكل D.40، فيتحول إلى منشأ أولي يماثل نظيره للقوس ثنائي المفاصل. ويستخدم الشكل D.24 لتحديد ردود الأفعال والقوى الداخلية عند أي زاوية β. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح الاشتقاق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.40: قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي

Primary Structure: Reactions

Define the load (omitting the d (θ

$$dP' = wR;$$

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

$$SigMA = BY\,2\,x1 - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (x1 + x2)\,dP'\,d\theta;$$

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

$$Sol2 = Solve\left[BY - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} dP'\,d\theta + AY == 0, AY\right]; AY = AY/.Sol2[[1]];$$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

$$BX = 0;$$

$$SigMZ = AXy0 - AY\,2\,x1 + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} dP'(x1 - x2)\,d\theta - BXy0;$$

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

$$MO = FullSimplify\left[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} x2\,dP'\,d\theta\right]$$

$$0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق القوى الداخلية عند أي زاوية β على امتداد بحر القوس.

Primary Structure: Internal Forces

(Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward

```
SigFV=BYSin[β] − ∫_α^β dP′Sin[β]dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension

```
SigFN=BYCos[β] − ∫_α^β dP′Cos[β]dθ + NN;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,NN]]; NN[β_]=NN/.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
SigM= − BYx5 + ∫_α^β dP′x4dθ + M;
```

```
Sol6=Solve[SigM==0,M]; M[β_]=M/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha]-2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha]-\pi R^2 w\text{Cos}[\beta]+2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta]+2R^2 w\text{Sin}[\alpha]-2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

المنشأ الأولي: القوة الافتراضية الوحدية

الشكل D.19، والشكل D.36 والشكل D.37، وتتبع عملية مماثلة لتلك المستخدمة للقوس عديم المفاصل تحت حمل مركز لتحديد القوى الداخلية الناتجة من الحمل الافتراضي الوحدي عند أي زاوية β. وينطبق هنا أيضاً خرج Mathematica المستخدم في حالة الحمل المركز.

المنشأ الأصلي: القوى الزائدة

تستخدم معادلة التوافق الآتية مع طريقة العمل الافتراضي لتحديد القوى الزائدة Bxo وBzo وAzo، مع أخذ المركبتين الانحنائية والمحورية في الحسبان.

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M}}{EI}\,d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\text{N}}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.19}$$

حيث:

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

M العزم الداخلي الناتج من الحمل الحقيقي
δM العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي
N القوة المحورية الداخلية الناتجة من الحمل الحقيقي
δN القوة المحورية الداخلية الناتجة من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الزائدة.

Original Structure: Redundant Force

(Deformation due to the real load (Flexural + Axial
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBX1A}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1}=\text{DeltaBX1F}+\text{DeltaBX1A};$$

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBZ1A}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBZ1}=\text{DeltaBZ1F}+\text{DeltaBZ1A};$$

Rotation at A

$$\text{DeltaAZ1F}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MAZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaAZ1A}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NAZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaAZ1}=\text{DeltaAZ1F}+\text{DeltaAZ1A};$$

(Deformation due to virtual force (Flexural + Axial

$$\text{F11F}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F11A}=\text{FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{F11}=\text{F11F}+\text{F11A};$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
F12F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMBZ1[β]/ei, {β,α,(π-α)}]];
F12A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNBZ1[β]/ae, {β,α,(π-α)}]];
```

```
F12=F12F + F12A;
```

```
F13F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMAZ1[β]/ei, {β,α,(π-α)}]];
F13A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNAZ1[β]/ae, {β,α,(π-α)}]];
```

```
F13=F13F + F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMBZ1[β]/ei, {β,α,(π-α)}]];
F22A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNBZ1[β]/ae, {β,α,(π-α)}]];
```

```
F22=F22F + F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMAZ1[β]/ei, {β,α,(π-α)}]];
F23A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNAZ1[β]/ae, {β,α,(π-α)}]];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[Integrate[δMAZ1[β]δMAZ1[β]/ei, {β,α,(π-α)}]];
F33A=FullSimplify[Integrate[δNAZ1[β]δNAZ1[β]/ae, {β,α,(π-α)}]];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

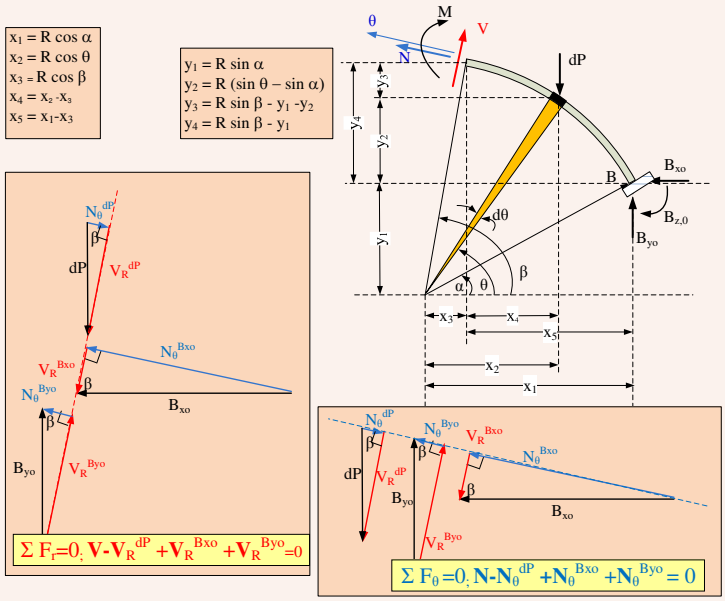
```
Solve[{BXOF11 + BZOF12 + AZOF13==DeltaBX1,BXOF21 + BZOF22 + AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31 + BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

FullSimplify[BXO]

$$\frac{Rw\left(-2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)-\left(-16aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-(i+7aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

المنشأ الأصلي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

بعد حساب القوى الزائدة Bxo وBzo وAzo في المنشأ الأصلي، تحدد بقية ردود أفعال المساند والقوى الداخلية باستخدام مخطط الجسم الحر في الشكل D.41. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب



شكل D.41: القوى الداخلية في قوس دائري عديم المفاصل

ردود أفعال المساند.

Original Structure: Reactions

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

SigMAO=BYO2x1 – $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}$(x1 + x2)dP′ $d\theta$ + AZO – BZO;

Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]

$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Sol19=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية.

Original Structure: Internal Forces

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}\right]\beta[\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)\right.\right.$$
$$+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)$$
$$\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+7aR^2\right))\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)$$
$$+)\pi-2\beta(\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right))\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right))\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\,\text{Sin}]\beta[])\,/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right))\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right))\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\right)$$

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

FullSimplify[NO[β_]]

$$-\left(Rw\,()\pi-2\beta(\text{Cos}]\beta[\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\right.$$
$$-\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)\right.$$
$$+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)$$
$$\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+7aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\,\text{Sin}]\beta[])\,/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\right)$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + MO;

sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];

FullSimplify[MO[β_]]

$$\left(R^2w\left(2\left(3i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(\text{Cos}]\alpha[+2\left(aR^2-i\left(-3+(\pi-2\alpha)^2\right)\right.\right.$$
$$\left.-aR^2)\pi-2\alpha)^2+\left(3i+aR^2\right)\right.$$
$$\text{Cos}[2\alpha[)\,\text{Sin}]\alpha[+)\pi-2\beta(\text{Cos}]\beta[\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha[-\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)$$
$$+\left(-2\left(4aR^2+i\right)\pi-2\alpha(^2)+\left(-8aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2)\,\text{Cos}]2\alpha[-\left(i-5aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(\text{Sin}]2\alpha[)\,\text{Sin}]\beta[])\,/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[)\right)$$

الانحراف

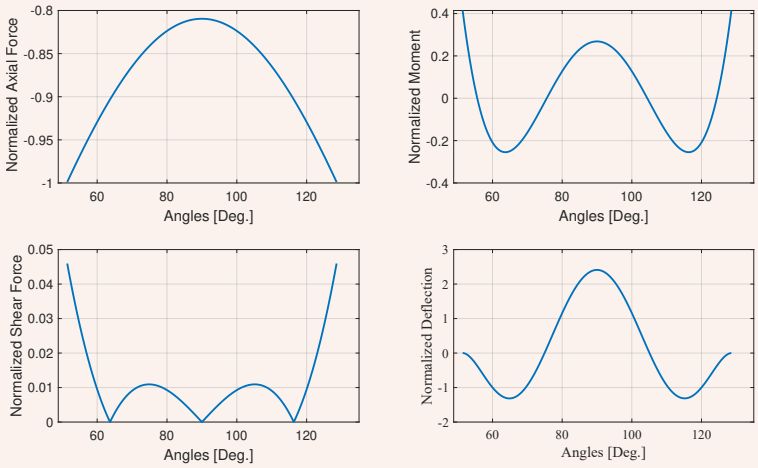
تستخدم المعادلات التحليلية المطورة أعلاه لحساب الانحراف في مثال القوس الدائري المتناظر عديم المفاصل المناقش في القسم D.2.3. وتستخدم معادلة العمل الافتراضي الآتية لحساب الانحراف.

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.20}$$

حيث:

δP	حمل افتراضي خارجي وحدي مؤثر في اتجاه Δ
Δ	إزاحة خارجية ناتجة من الحمل الحقيقي المؤثر
M	العزم الداخلي في الكمرة الناتج من الحمل الحقيقي
$\delta M1(\beta<\theta)$	العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي
$\delta M2(\beta\geq\theta)$	العزم الداخلي الناتج من الحمل الافتراضي الخارجي الوحدي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل D.42: مخططات قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي

ملخص النتائج

يبين الشكل D.42 مخططات القوس عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند المسندين، ثم تنخفض باتجاه التاج إلى نحو 81% من القيمة العظمى. أما قوة القص فهي صغيرة نسبياً، وتتغير من نحو 4.75% إلى 1.0% من المسند إلى التاج، على الترتيب. ويطبع العزم بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية في ارتفاع القوس؛ ويبلغ أقصاه عند المسندين، ويكون عند التاج وعند مسافة تقارب $\frac{1}{6}$ البحر من المسندين نحو 60 % من قيمته العظمى. ويوجد في مخطط العزم أربع نقاط انقلاب تقابل نقاط الانحراف الصفري. ويبلغ الانحراف أقصاه عند التاج، ويتبع مخططه شكلاً مماثلاً لمخطط العزم. ويقابل الانحرافان الموجب والسالب العزمين الموجب والسالب، على الترتيب.

D.4.4 الحمل الموزع بانتظام

في هذه الحالة تعطى القوة المؤثرة الأولية بالعلاقة:

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.21}$$

تزال القوة الزائدة Bxo والعزمان الزائدان Bzo وAzo من القوس الأصلي عديم المفاصل المبين في الشكل D.40، فيتحول إلى منشأ أولي. وتماثل الخطوات الثلاث الأولى، التي تشمل ردود أفعال المساند والقوى الداخلية الناتجة من الحملين الحقيقي والافتراضي، نظيرتها للقوس عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي. وللتبسيط، لا تعرض هنا إلا خطوات حساب القوى الزائدة وردود الأفعال والقوى الداخلية في المنشأ الأصلي.

المنشأ الأصلي: القوى الزائدة

تكرر هنا العملية المستخدمة للقوس عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي. وتستخدم معادلة توافق التشوه مع طريقة العمل الافتراضي لتحديد القوى الزائدة Bxo وBzo وAzo، مع أخذ المركبتين الانحنائية والمحورية في الحسبان. وفيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح الاشتقاق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Original Structure; Redundant Forces

(Deformation due to real load (Flexural + Axial
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;}$$

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;}$$

Rotation at A

$$\text{DeltaAZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\text{MAZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{DeltaAZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\text{NN}[\beta]\delta\text{NAZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;}$$

(Deformation due to virtual force (Flexural + Axial

$$\text{F11F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MBX1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F11A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NBX1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{F11=F11F + F11A;}$$

$$\text{F12F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{MBX1}[\beta]\delta\text{MBZ1}[\beta]}{ei}\,d\beta\right];$$
$$\text{F12A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta\text{NBX1}[\beta]\delta\text{NBZ1}[\beta]}{ae}\,d\beta\right];$$

$$\text{F12=F12F + F12A;}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
F13F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F13A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F13=F13F+F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMBZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F22A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNBZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F22=F22F+F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F23A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F23=F23F+F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[Integrate[δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(ei),{β,α,(π-α)}]];
F33A=FullSimplify[Integrate[δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(ae),{β,α,(π-α)}]];
```

```
F33=F33F+F33A;
```

```
F21=F12;F32=F23;F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+BZOF32+AZOF33==DeltaAZ1},{BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2(i-aR^2)+(2i+aR^2)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)}{3\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

المنشأ الأصلي: ردود الأفعال والقوى الداخلية

بعد حساب القوى الزائدة Bxo وBzo وAzo، تحدد بقية ردود الأفعال والقوى الداخلية باستخدام الشكل D.41. فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب ردود أفعال المساند.

Original Strcture: Reactions

(Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ + AZO - BZO;
```

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve [BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO] ; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify [BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

$$0$$

فيما يأتي خرج Mathematica الذي يوضح اشتقاق حساب القوى الداخلية.

Original Structure: Internal Forces

(Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$\begin{aligned}&\left(Rw\left(2\text{Cos}\right]\alpha[\text{Cos}]\beta[\left(-\right)\pi-2\alpha(\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}]2\alpha[\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha[\right)\\&-3\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[\right)\text{Sin}]2\beta[\right))/\\&\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[\right)\right)\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] − ∫_α^β dP′Cos[β]dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$\left(Rw\left(6\text{Cos}\right]\beta[^2\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha[-\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[\right)$$
$$+2\text{Cos}]\alpha[\left(\right)\pi-2\alpha(\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}]2\alpha[\right)+3aR^2\text{Sin}[2\alpha[\right)\text{Sin}]\beta[\right))/$$
$$\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[\right)\right)$$

(Summation of moments; Internal moment (CW +ve

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP′x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2w\left(9\left(-3i+aR^2\right)\text{Cos}\right]\alpha[^2\right.$$
$$+3\text{Cos}]2\beta[\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha[-\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[\right)$$
$$+\text{Cos}]\alpha[\left(-\left(5i+aR^2\right)\text{Cos}\right]3\alpha[-6\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(\text{Sin}]\alpha[+4\left(\right)\pi-2\alpha(\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}\right]2\alpha[\right)$$
$$\left.+3aR^2\text{Sin}[2\alpha[\right)\text{Sin}]\beta[\right)\right)/\left(12\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha(^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha[+\left(i+aR^2\right)\right)\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha[\right)\right)$$

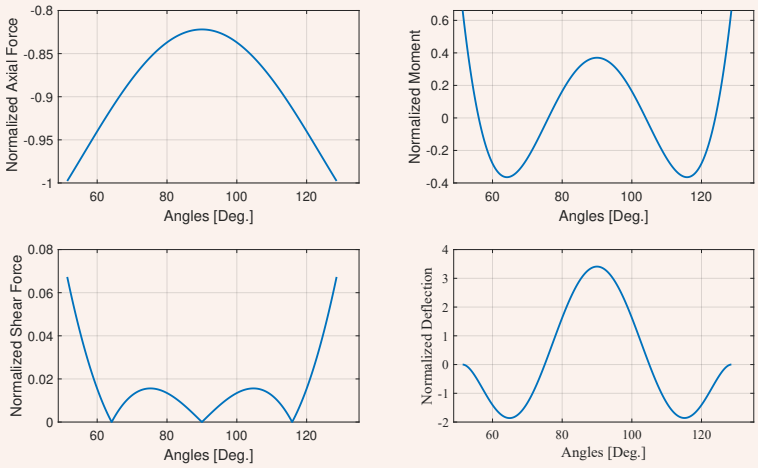
الانحراف

تماثل عملية حساب الانحراف في القوس الدائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام، وكذلك القيم العددية للمتغيرات المثلثية، نظيرتها تحت الوزن الذاتي؛ ولذلك لا تعرض هنا.

ملخص النتائج

يبين الشكل D.43 مخططات القوس عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام. وتطبع القوة المحورية وقوة القص بالنسبة إلى محصلة رد الفعل الرأسي والدفع عند المسندين. وتبلغ قوة الضغط المحورية أقصاها عند المسندين، ثم تنخفض باتجاه التاج إلى نحو 82.5% من القيمة العظمى. أما قوة القص فهي صغيرة نسبياً، وتتغير من نحو 6.75% إلى 1.75% من المسند إلى التاج، على الترتيب. ويطبع العزم بالنسبة إلى حاصل ضرب القوة المحورية في ارتفاع القوس؛ ويبلغ أقصاه عند المسندين، ويكون عند التاج وعند مسافة تقارب $\frac{1}{6}$ البحر نحو 67 % من القيمة العظمى. ويوجد في مخطط العزم أربع نقاط انقلاب تقابل نقاط الانحراف الصفري. ويبلغ الانحراف أقصاه عند التاج، ويتبع مخططه شكلاً مماثلاً لمخطط العزم. ويقابل الانحرافان الموجب والسالب العزمين الموجب والسالب، على الترتيب.

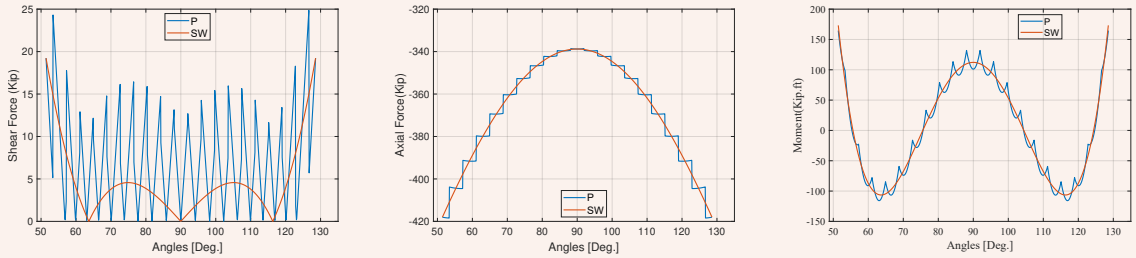
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



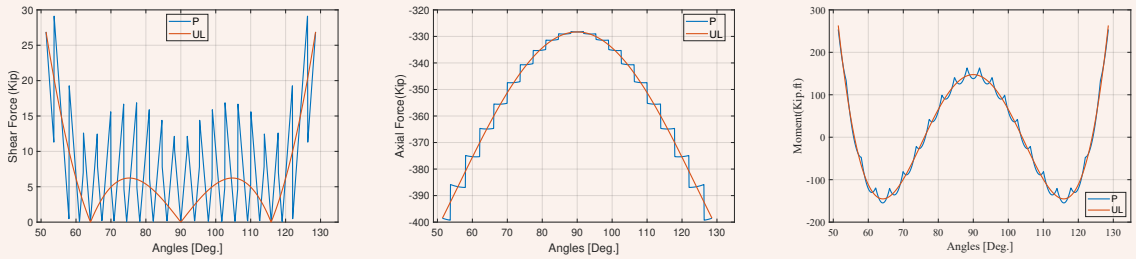
شكل D.43: مخططات القوس الدائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام

D.4.5 التحقق من القوس الدائري عديم المفاصل

يجري التحقق من المعادلات التحليلية للقوس عديم المفاصل تحت الحمل المركز والوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام بخطوتين. أولاً، يقسم الوزن الذاتي والحمل الموزع إلى سلسلة من 20 حملاً مركزاً. وترسم مخططات القوى الداخلية والانحرافات باستخدام المعادلات التحليلية لكل حمل مع سلسلة الأحمال المركزة المكافئة له، ثم تتراكب للتحقق من صحة الحلول. ولأن كل حمل يكافئ سلسلته المناظرة، تتطابق المخططات تطابقاً وثيقاً.



شكل D.44: قوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي مقابل سلسلة أحمال مركزة



شكل D.45: قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل موزع بانتظام مقابل سلسلة أحمال مركزة

يوضح الشكلان D.44 وD.45 عملية التحقق السابقة. وثانياً، يبنى نموذج SAP 2000 للقوس الدائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي، وتقارن مخططات العزم وقوة القص والقوة المحورية الناتجة من

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تحليله بالمخططات المرسومة بالمعادلات التحليلية. تتطابق القيم العددية في مخطط العزم بالشكل D.46،



شكل D.46: SAP 2000: مخطط العزم لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي



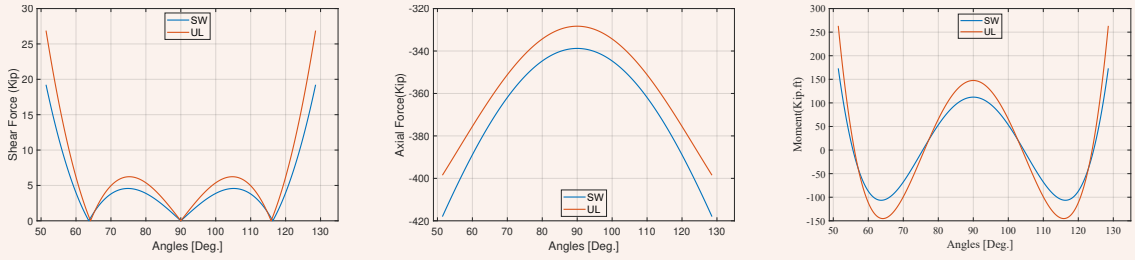
شكل D.47: SAP 2000: مخطط القوة المحورية لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي



شكل D.48: SAP 2000: مخطط قوة القص لقوس دائري عديم المفاصل تحت الوزن الذاتي

ومخطط القوة المحورية بالشكل D.47، ومخطط قوة القص بالشكل D.48 تطابقاً وثيقاً مع القيم المناظرة في مخططات الشكل D.44.

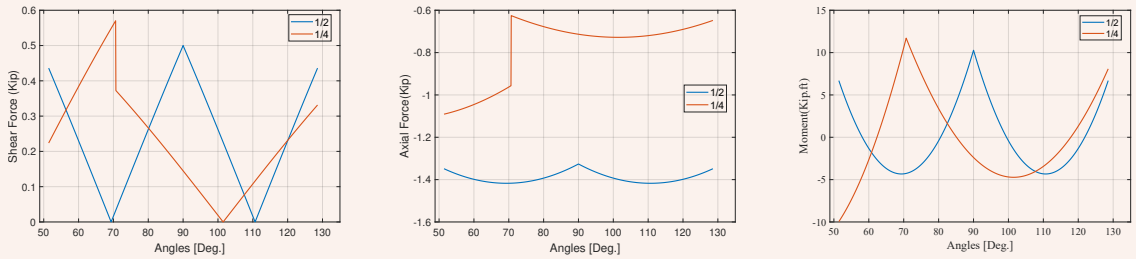
D.4.6 الخلاصة



شكل D.49: قوس دائري عديم المفاصل: الوزن الذاتي مقابل الحمل الموزع بانتظام

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يناقش هذا القسم السلوك الإنشائي للقوس عديم المفاصل تحت الحمل المركز والوزن الذاتي والحمل الموزع بانتظام بدلالة القوى الداخلية والانحراف. ويقارن الشكل D.49 الوزن الذاتي بالحمل الموزع بانتظام عند حمل متساوٍ w=2.275 kip/ft. وبالمقارنة مع الوزن الذاتي، يولد الحمل الموزع بانتظام قوة قص وعزماً وانحرافاً أكبر، وقوة ضغط محورية أصغر. يبين الشكل D.50 مخططات حالة تحميل غير متناظرة، حيث يطبق حمل



شكل D.50: قوس دائري عديم المفاصل تحت حمل مركز عند 1/2 و1/4 البحر

وحدي عند التاج وعند ربع البحر. ويكون العزم الأعظمي الناتج من الحمل عند ربع البحر أكبر بنحو 1.2 مرة من نظيره عند التاج، بينما تكون القوة المحورية العظمى الناتجة من الحمل عند التاج أكبر بنحو 1.3 مرة من نظيرتها عند ربع البحر.

D.5 الخلاصة

ركز هذا الفصل على تطوير معادلات تحليلية لردود أفعال المساند والقوى الداخلية في الأقواس ثلاثية المفاصل وثنائية المفاصل وعديمة المفاصل، واستخدامها لفهم السلوك الإنشائي لكل نوع. ولأن القوس ثلاثي المفاصل محدد استاتيكياً، كفت طرائق الاستاتيكا المعتادة لاشتقاق معادلاته. أما القوسان ثنائي المفاصل وعديم المفاصل، وهما غير محددين استاتيكياً، فقد استخدمت لهما طريقة العمل الافتراضي مع معادلة توافق التشوه.

حلل كل نوع تحت ثلاث حالات تحميل: حمل مركز، ووزن ذاتي، وحمل موزع بانتظام. وتحت التحميل المتناظر يتمثل الفرق الرئيس في عدد نقاط الانقلاب في مخطط العزم وأثرها في توزيع العزم على البحر. فالقوس ثلاثي المفاصل في الشكل D.15 لا يحتوي نقطة انقلاب، وله عزم سالب كبير بين المفاصل المتجاورة. والقوس ثنائي المفاصل في الشكل D.33 له نقطتا انقلاب وعزم موجب كبير عند التاج. أما القوس عديم المفاصل في الشكل D.49 فله أربع نقاط انقلاب وعزم موجب كبير عند المسندين. وتبين مقارنة الوزن الذاتي بالحمل الموزع بانتظام أن الوزن الذاتي يسهم أكثر في القوة المحورية الداخلية، بينما يسهم الحمل الموزع أكثر في العزم، وهو ما يوضح آلية الضغط المميزة التي يقاوم بها القوس وزنه الذاتي.

وتبين مخططات القوى الداخلية أن الحمل المركز عند التاج يولد نمطاً مختلفاً عن الوزن الذاتي أو الحمل الموزع على البحر كله. ففي القوسين ثنائي المفاصل وعديم المفاصل، يولد الحمل عند التاج قوة محورية عظمى على مسافة بين $\frac{1}{4}$ و$\frac{1}{6}$ البحر من المسندين، وعزماً أعظمياً عند التاج. وفي القوس ثلاثي المفاصل يولد أكبر قوة محورية وعزم على مسافة تقارب $\frac{1}{4}$ البحر. أما الوزن الذاتي أو الحمل الموزع فيولدان في القوسين ثلاثي وثنائي المفاصل قوة محورية عظمى عند المسندين وعزماً أعظمياً على مسافة $\frac{1}{6}$ البحر، بينما يحدث كلاهما عند المسندين في القوس عديم المفاصل. ويحدث الانحراف الأعظمي للأنواع الثلاثة عند التاج. ويمكن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإفادة من فهم هذه التغيرات في تحسين المقطع ومقاومتي الضغط والانحناء. كما قورن أثر حمل مركز عند التاج وعند $\frac{1}{4}$ البحر لجميع الأنواع. وتبين أن العزم الأعظمي يحدث عندما يؤثر الحمل عند $\frac{1}{4}$ البحر، بينما تحدث القوة المحورية العظمى عندما يؤثر عند التاج. وبوجه عام يولد التحميل غير المتناظر عزماً داخلياً أعلى بكثير من التحميل المتناظر. ويمكن استخدام علاقة موضع الحمل بالقوى الداخلية لاختيار مواضع الدعامات في الجسور القوسية مفتوحة الكتف؛ وتشير النتائج إلى أن التوزيع المتناظر للدعامات حول مركز القوس يوفر حلاً تصميمياً كفؤاً. أخذت معادلات التوافق في قسم "المنشأ الأصلي: القوة الزائدة" للقوسين ثنائي المفاصل وعديم المفاصل المركبتين المحورية والانحنائية معاً. ولوحظ أن مراجع عديدة تستخدم المركبة الانحنائية فقط. ومع أن لذلك أثراً مهملاً في القوى الداخلية للقوس ثنائي المفاصل، فإن إهمال المركبة المحورية يسبب خطأ يقارب 20% في العزم الداخلي للقوس عديم المفاصل. استخدم برنامج SAP 2000 للتحقق من الحلول التحليلية. ولا يتوافر حالياً عنصر "قوس" جاهز في SAP 2000، ولذلك يبنى القوس من عدة قطع. وقد بين التحقق أن عدم اختيار عدد أمثل من القطع قد يسبب خطأ كبيراً في حساب القوى الداخلية. ويمكن استخدام المعادلات التحليلية المطورة هنا أداة أولية لإيجاد القوى الداخلية في القوس.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

E جداول تحليل القشريات الأسطوانية

الجداول الآتية مأخوذة من (Whitney **andothers,** 1952). وهي واردة أيضا في (Portland Cement Association, 1954) و(Gibson, 1968)، وبالطبع في (Billington, 1965).

قدم الاشتقاق الأصلي Finsterwalder, 1933.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

an ordinary indeterminate structure. As a matter of fact, since in most cases the thickness of the shell is determined by practical considerations (such as sufficient depth for reinforcement), a single investigation is generally sufficient. However, to achieve this economy in time and labor, a systematization of the analytical procedure is necessary. Such a systematization is here attempted, and to expedite the analysis and bring the various load-stress relationships into a coherent group, formulas and tables for the various stresses in a shell are given in this section. Those interested in the development of the formulas from which the tables are computed can find the development of the theory in Appendix II.

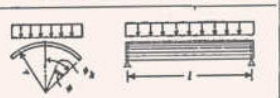
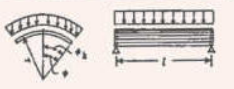
In its broader aspects the analysis of cylindrical shells is strikingly similar to the analysis of ordinary indeterminate structures. In the analysis of an indeterminate structure, it is customary to make it determinate by releasing end restraints, thereby allowing rotation and displacement of the end to occur. Afterward, reactions are applied to bring the boundary back to its original or desired position. The final stresses are the algebraic sum of those found in the determinate state and those induced by the end restraints.

The analysis of a thin shell follows the same procedure. It is first assumed that the surface load is transmitted to the supports solely by direct stresses, generally called "membrane stresses," which is equivalent to assuming the structure to be determinate. In the indeterminate two-dimensional analysis the preliminary step of making the structure determinate leads to displacements that are inconsistent with the prescribed end conditions, but in shell design the preliminary step called "membrane analysis" yields displacements and reactions along the longitudinal edges of the shell that do not comply with the boundary requirements. To satisfy these requirements, line loads must be applied along the longitudinal edges of the shell. In contrast with general surface loading, these line loads create bending as well as direct stresses in the shell. The stresses produced by the line loads must be added to the direct stresses previously evaluated to obtain the final stress pattern. Thus it is evident that the design of thin shells can be divided into two stages: (1) Determine the internal stresses and the edge forces created by the surface loading on the basis of membrane analysis; and (2), determine the stresses due to the edge line loading. It is in this order that the analysis of cylindrical shells will be presented.

Notation.—The letter symbols in this manual are defined where they first appear, in the text or by diagram, and are assembled alphabetically for reference, in Appendix III.

Step 1. Surface Loads.—The membrane analysis of a cylindrical shell subjected to surface loads involves only successive differentiations and integrations of the radial and tangential components of the surface loads. Since this is always possible for continuous loads, the stresses created by any type of continuous load distribution expressible as a function of the longitudinal and radial coordinates, x and ϕ, can be determined. For most conditions, the surface loads on the shell will be uniform in the longitudinal direction of the shell. The force and displacement components produced by two such loads

TABLE 1A.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE LENGTH OF THE BARREL

	(a) Uniform Transverse Load[a]	(b) Dead Weight Load[a]
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (1) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (2) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (3) Vertical Displacement[b] Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E} \times \left\{2\left(\frac{r}{l}\right)^4 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right\} \times$ Col. (4) Horizontal Displacement[c] Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (5) $+ \left[2\left(\frac{r}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{r}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left(\frac{x}{l} - (x/l)^2\right)\right] \times$ Col. (6)$\right\}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (7) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (8) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (9) Vertical Displacement Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E}\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (10)$\right\}$ Horizontal Displacement Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{\rho t E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (11)

$\phi_0 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−1.500	0	−1.0000	0.5000	0	0	−1.0000	0	−1.0000	1.0000	0
5	−1.477	−0.1302	−0.9924	0.4944	0.0872	−0.0003	−0.9960	−0.0871	−0.9902	0.9924	0.0868
10	−1.409	−0.2565	−0.9698	0.4775	0.1736	−0.0026	−0.9853	−0.1736	−0.9648	0.9698	0.1710
15	−1.295	−0.3749	−0.9330	0.4506	0.2588	−0.0072	−0.9749	−0.2589	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−1.150	−0.4820	−0.8830	0.4148	0.3420	−0.0200	−0.9399	−0.3421	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.965	−0.5748	−0.8214	0.3722	0.4226	−0.0377	−0.9098	−0.4225	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.750	−0.6503	−0.7500	0.3447	0.5000	−0.0625	−0.8658	−0.5000	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.513	−0.7048	−0.6710	0.2748	0.5736	−0.0944	−0.8194	−0.5737	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.261	−0.7385	−0.5868	0.2247	0.6428	−0.1328	−0.7661	−0.6428	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.7500	−0.5000	0.1767	0.7071	−0.1768	−0.7071	−0.7071	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.261	−0.7385	−0.4132	0.1328	0.7680	−0.2247	−0.6427	−0.7661	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.513	−0.7048	−0.3200	0.0944	0.8191	−0.2749	−0.5736	−0.8192	−0.5738	0.3200	0.4698
60	0.750	−0.6503	−0.2500	0.0625	0.8660	−0.3248	−0.5000	−0.8660	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.965	−0.5748	−0.1788	0.0377	0.9063	−0.3722	−0.4225	−0.9062	−0.4226	0.1788	0.3830
70	1.150	−0.4820	−0.1170	0.0199	0.9397	−0.4149	−0.3420	−0.9397	−0.3420	0.1170	0.3214
75	1.295	−0.3749	−0.0689	0.0086	0.9659	−0.4506	−0.2588	−0.9659	−0.2588	0.0689	0.2500
80	1.409	−0.2565	−0.0301	0.0028	0.9848	−0.4776	−0.1732	−0.9847	−0.1736	0.0301	0.1710
85	1.477	−0.1302	−0.0076	0.0004	0.9962	−0.4943	−0.0873	−0.9962	−0.0872	0.0076	0.0868
90	1.500	0	0	0	1.0000	−0.5000	0	−1.0000	0	0	0

[a] The use of column numbers in the formulas refers to the appropriate coefficient in the column cited
[b] Downward direction is positive. [c] Inward direction is positive.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD



Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right] \cos \frac{\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin \frac{\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(1 + \frac{1}{2}(\pi r/l)^2 + \frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$+ p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left(\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right) \times \sin \frac{\pi x}{l}$$

(b) DEAD WEIGHT LOAD



Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right] \cos \frac{\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin \frac{\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{2}{\pi l}\right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (10)}\right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

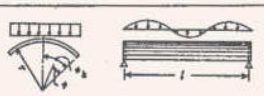
Horizontal Displacement Δ_H—

$$+ p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin \frac{\pi x}{l}$$

$\phi_1 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0	
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9902	0.9924	0.0868	
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710	
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500	
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214	
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830	
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330	
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698	
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924	
45	0	−0.4775	−0.5000	0.04355	0.7071	−0.04355	−0.1433	−0.4502	−0.7071	0.5000	0.5000	
50	0.0528	−0.4702	−0.4132	0.03272	0.7660	−0.05537	−0.1302	−0.4877	−0.6428	0.4132	0.4924	
55	0.1040	−0.4487	−0.3290	0.02325	0.8191	−0.06771	−0.1162	−0.5215	−0.5736	0.3290	0.4698	
60	0.1520	−0.4140	−0.2500	0.01539	0.8660	−0.08001	−0.1013	−0.5513	−0.5000	0.2500	0.4330	
65	0.1954	−0.3658	−0.1786	0.00930	0.9063	−0.09170	−0.0856	−0.5769	−0.4226	0.1786	0.3830	
70	0.2329	−0.3069	−0.1170	0.00490	0.9397	−0.10222	−0.0693	−0.5982	−0.3420	0.1170	0.3214	
75	0.2623	−0.2387	−0.0659	0.00213	0.9659	−0.11102	−0.0524	−0.6149	−0.2588	0.0659	0.2500	
80	0.2856	−0.1633	−0.0301	0.00064	0.9848	−0.11766	−0.0351	−0.6269	−0.1736	0.0301	0.1710	
85	0.2993	−0.0829	−0.0076	0.00009	0.9962	−0.12180	−0.0177	−0.6342	−0.0872	0.0076	0.0868	
90	0.3040	0	0	0	1.0000	−0.12319	0	−0.6368	0	0	0	

TABLE 1C.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING SINUSOIDALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM AT THE MIDDLE

(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD



Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left(\frac{l}{\pi r}\right)^2 \times \text{Col. (1)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \frac{1}{\pi} \times \text{Col. (2)} \times \cos \frac{3\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$$

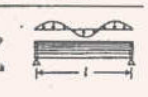
Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[1 + \frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + \frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (4)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left(\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1 + \frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + \frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \text{Col. (6)}\right) \sin \frac{3\pi x}{l}$$

(b) DEAD WEIGHT LOAD



Longitudinal Force T_x—

$$p_0 r \left(\frac{l}{\pi r}\right)^2 \times \text{Col. (7)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Shearing Force S—

$$p_0 r \left(\frac{l}{\pi r}\right) \times \text{Col. (8)} \times \cos \frac{3\pi x}{l}$$

Transverse Force T_ϕ—

$$p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Vertical Displacement Δ_V—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\frac{2}{81(\pi r)^2} + \frac{4}{9}\left(\frac{r}{\pi l}\right)^2 + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right] \sin \frac{3\pi x}{l}$$

Horizontal Displacement Δ_H—

$$p_0 r \frac{l^4}{\pi^4 l E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)} \times \sin \frac{3\pi x}{l}$$

$\phi_1 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
0	−0.0338	0	−1.0000	0.00152	0	0	−0.0225	0	−1.0000	1.0000	0	
5	−0.0332	−0.0276	−0.9924	0.00150	0.0872	−0.00000	−0.0224	−0.0185	−0.9902	0.9924	0.0868	
10	−0.0317	−0.0544	−0.9698	0.00145	0.1736	−0.00000	−0.0222	−0.0368	−0.9848	0.9698	0.1710	
15	−0.0291	−0.0796	−0.9330	0.00137	0.2588	−0.00002	−0.0219	−0.0549	−0.9659	0.9330	0.2500	
20	−0.0259	−0.1023	−0.8830	0.00126	0.3420	−0.00006	−0.0212	−0.0726	−0.9397	0.8830	0.3214	
25	−0.0217	−0.1219	−0.8214	0.00113	0.4226	−0.00011	−0.0204	−0.0867	−0.9063	0.8214	0.3830	
30	−0.0169	−0.1383	−0.7500	0.00099	0.5000	−0.00019	−0.0195	−0.1061	−0.8060	0.7500	0.4330	
35	−0.0116	−0.1498	−0.6710	0.00081	0.5736	−0.00029	−0.0181	−0.1217	−0.8191	0.6710	0.4698	
40	−0.0059	−0.1567	−0.5868	0.00068	0.6428	−0.00040	−0.0172	−0.1364	−0.7660	0.5868	0.4924	
45	0	−0.1592	−0.5000	0.00054	0.7071	−0.00054	−0.0159	−0.1501	−0.7071	0.5000	0.5000	
50	0.0059	−0.1567	−0.4132	0.00040	0.7660	−0.00068	−0.0145	−0.1625	−0.6428	0.4132	0.4924	
55	0.0116	−0.1498	−0.3290	0.00029	0.8191	−0.00081	−0.0129	−0.1738	−0.5736	0.3290	0.4698	
60	0.0169	−0.1380	−0.2500	0.00019	0.8660	−0.00099	−0.0113	−0.1818	−0.5000	0.2500	0.4330	
65	0.0217	−0.1219	−0.1786	0.00011	0.9063	−0.00113	−0.0095	−0.1923	−0.4226	0.1786	0.3830	
70	0.0259	−0.1023	−0.1170	0.00006	0.9397	−0.00126	−0.0077	−0.1994	−0.3420	0.1170	0.3214	
75	0.0291	−0.0796	−0.0689	0.00002	0.9659	−0.00137	−0.0058	−0.2050	−0.2588	0.0689	0.2500	
80	0.0317	−0.0544	−0.0301	0.00000	0.9848	−0.00145	−0.0040	−0.2090	−0.1736	0.0301	0.1710	
85	0.0332	−0.0276	−0.0076	0.00000	0.9962	−0.00150	−0.0019	−0.2114	−0.0872	0.0076	0.0868	
90	0.0338	0	0	0	1.0000	−0.00152	0	−0.2122	0	0	0	

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

(the first varies uniformly in the transverse direction and the second varies as the weight of the shell) are presented in Table 1A, in which the internal forces and displacements in the system of cylindrical coordinates, shown in Fig. 13, are:

T_ϕ = the direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile;
T_x = the direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile;
S = the tangential shearing force, considered positive when it creates tension in the direction of increasing values of x and ϕ;
Δ_V = the vertical displacement, considered positive when it is in the downward direction;
Δ_H = the horizontal displacement, considered positive when it is directed inward;

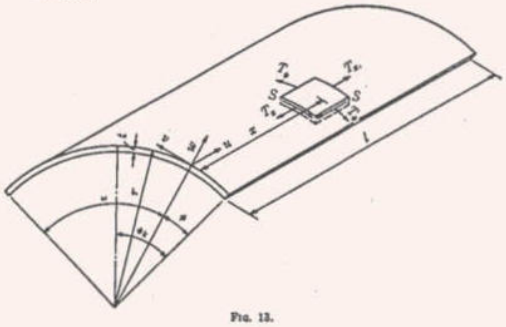


FIG. 13.

l = length of shell between supports;
r = centerline radius of shell;
t = thickness of shell;
x = longitudinal distance measured from the left support;
ϕ = angle measured from the right edge of shell;
ϕ_k = angle subtended by the edge of shell measured from the centerline axis;
E = modulus of elasticity of concrete;
p_x = intensity of uniform load on unit area; and,
p_d = intensity of dead load on unit area.

Although it is possible to obtain the internal forces produced by any surface loads, because of mathematical difficulties, the corrective line loads applied along the longitudinal edges are expressible only as functions of $\sin \frac{n\pi x}{l}$ or $\cos \frac{n\pi x}{l}$ in which n is any integer. To avoid confusion in the application of

the line loads under Step 2, it is expedient to regard the surface load on the shell as the sum of partial loads, the intensity of which is defined as $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

By a suitable selection of the values of A_n which will vary with each n, it is possible to approximate with any degree of accuracy any variation of loading. This representation of a known function by a series of sines or cosines is called "Fourier Analysis" and the series is called "Fourier Series." The Fourier series for a uniform load equals:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} \cdots\right] \quad \text{.....(1a)}$$

or:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{.....(1b)}$$

The partial loads represented by the first three terms are shown in Figs. 14(a), 14(b) and 14(c). The sum of the first and second term is shown in Fig. 14(d), and the sum of the first three terms is represented in Fig. 14(e). The sum of all the terms of the series gives the straight line $p = 1$. In general, only the first few terms of this series are needed to achieve sufficient accuracy. Hence, the internal forces and displacements produced by the sinusoidal loading represented by the first two terms are given in Tables 1B and 1C.

For the purpose of indicating the accuracy obtained by using only the first two partial loads, a comparison between values obtained by Table 1A and the sum of the values of Tables 1B and 1C is made. The internal forces at $\phi_k - \phi = 30°$ and at $x = \frac{l}{2}$ for T_x and T_ϕ and at $x = 0$ for S, in a shell subject to a uniform load, computed by Table 1A, are

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2(-0.750 \times \tfrac{1}{4}) = -0.1875\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \text{.....(2a)}$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)(-0.650 \times 1) = -0.650\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad \text{.....(2b)}$$

and,

$$T_\phi = p_x r\,(-0.750 \times 1) = -0.750\, p_x r \quad \text{.....(2c)}$$

Using the coefficients from Tables 1B and 1C and applying the load constants indicated by the Fourier series:

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2\frac{4}{\pi}\left[-0.1520 \times 1 - \frac{1 \times (-)\,0.0169}{3}\right]$$
$$= -0.186\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \text{.....(3a)}$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)\frac{4}{\pi}\left[-0.414 + \frac{1 \times (-)\,0.1380}{3}\right] = -0.586\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad \text{..(3b)}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

and,

$$T_\phi = p_u r \frac{4}{\pi}\left[-0.750 - \frac{1 \times (-) 0.750}{3}\right] = -0.635\, p_u r \ldots\ldots (3c)$$

Comparing the values obtained by the partial loads with those obtained by the uniform load, it is seen that good agreement is obtained for the longitudinal force T_ϕ. The shear and transverse force components obtained by the sum of the first two sinusoidal loads are approximately 10% and 15% too small. In designing shells by partial loads, this discrepancy should be borne in mind and adjustments should be made to the final values.

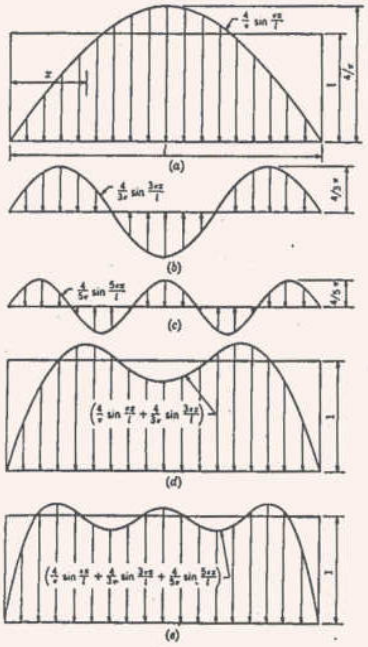


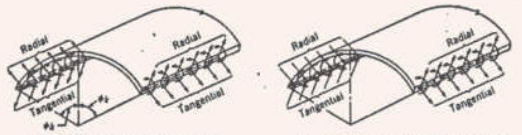
FIG. 14.

It is evident from Tables 1A, 1B and 1C that, for shells whose subtended angle is less than 180°, the membrane analysis gives transverse and shearing forces acting on and along the longitudinal edge. If the necessary marginal forces can be provided by the edge reactions and at the same time, the displacement of the supporting members correspond to the calculated displacements of the shell, the membrane analysis suffices; but to fulfill these requirements, deep edge members are often needed. In most cases these are neither possible nor desirable. On the contrary, in current practice the longitudinal edge beams are frequently omitted or reduced to a minimum size to exploit the full strength of the concrete shell. This reduction in the size of the edge beams means that the boundary conditions required by the membrane analysis are unfulfilled—in other words that the statical requirements of the

shell are unsatisfied. To satisfy the requirements of statics, line loads must be applied.

Step 2—Line Loads Along the Longitudinal Edges.—Along the longitudinal edges four separate line loads, a radial shearing force, a longitudinal shearing force, a tangential transverse force and a moment, can be applied along each edge as shown in Fig. 15. The line loads along one edge can be different from those acting along the other edge. With these eight line loads, four on each edge, any edge requirement can be satisfied.

For a single barrel with no edge member, subject to a symmetrical load, the corrective line loads will consist simply of a tangential transverse force and a longitudinal shearing force equal to but opposite in direction to T_ϕ and S given by the membrane analysis. When the edge conditions are complicated by the presence of longitudinal edge beams or adjoining shells, in addition to the two afore-mentioned loads, a radial shearing force and a moment normal to the edge must be applied. The relative magnitude of each force will depend on the strains and rotation produced by each load. The determination of the correct proportions of each is illustrated in design examples. However, briefly,



(a) SYMMETRICAL LINE LOADS (b) ANTISYMMETRICAL LINE LOADS

FIG. 15.

the procedure consists of establishing a number of simultaneous equations fulfilling known edge requirements.

The effect of edge line loads on the shell is basically different from the effect of surface loads. As previously mentioned, line loads produce bending as well as direct forces. The various forces produced by line loads are illustrated in Fig. 16 with the additional force components defined as:

N_ϕ = the radial shearing force on the radial face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative ϕ-direction;
N_x = the radial shearing force on the longitudinal face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative x-axis;
M_ϕ = bending moment on the radial face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
M_x = bending moment on the transverse face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
M_t = torsional moment, considered positive when it produces tension in the inner fibers in the direction of increasing values of x and ϕ;
u = the displacement of the shell in the longitudinal direction, considered positive in the direction of increasing values of x;

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

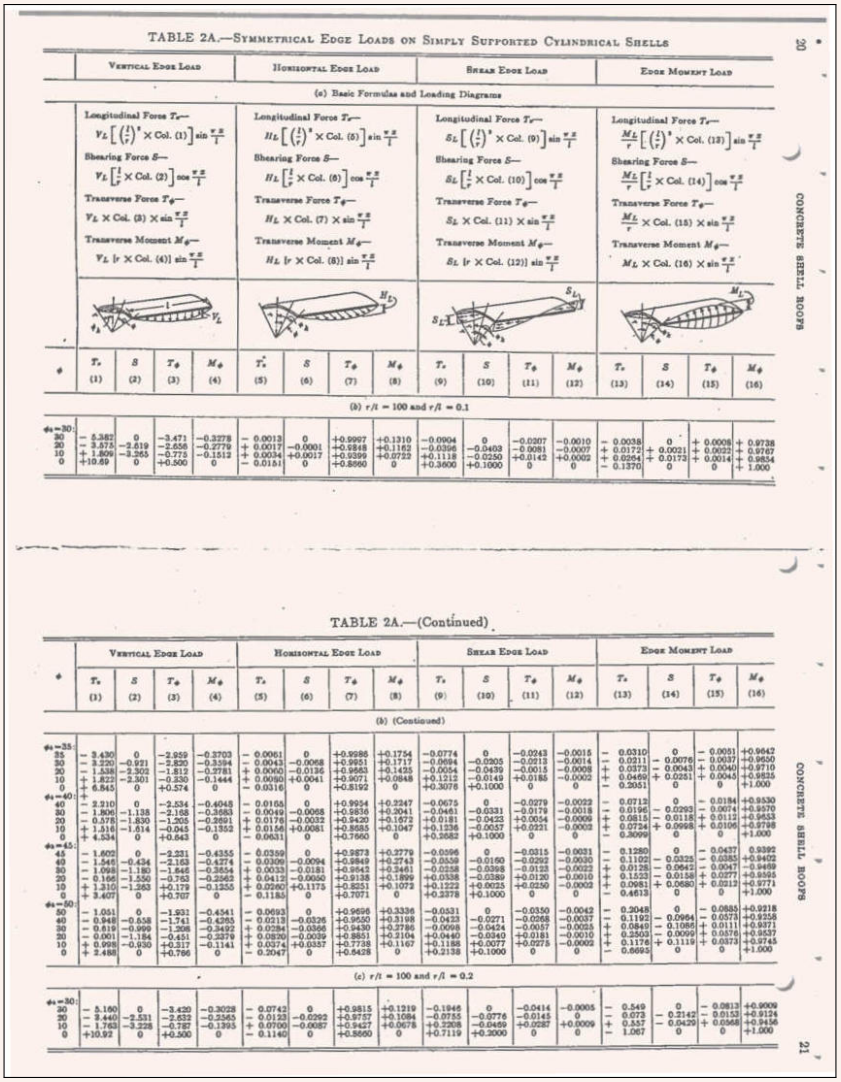


TABLE 2A.—Symmetrical Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

(a) Basic Formulas and Loading Diagrams

Vertical Edge Load	Horizontal Edge Load	Shear Edge Load	Edge Moment Load
Longitudinal Force T_x— $V_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $H_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (5)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (9)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $\frac{M_L}{r}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (13)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$
Shearing Force S— $V_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $H_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (6)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $S_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (10)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $\frac{M_L}{r}\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (14)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$
Transverse Force T_ϕ— $V_L \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $H_L \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $S_L \times \text{Col. (11)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $\frac{M_L}{r} \times \text{Col. (15)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$
Transverse Moment M_ϕ— $V_L\,[r \times \text{Col. (4)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $H_L\,[r \times \text{Col. (8)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $S_L\,[r \times \text{Col. (12)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times \text{Col. (16)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$

ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(b) $r/l = 100$ and $r/l = 0.1$																
$\phi_0 = 30°$	− 5.382	0	−3.471	−0.3278	− 0.0013	0	+0.9997	+0.1310	−0.0904	0	−0.0207	−0.0010	− 0.0038	0	+ 0.0008	+ 0.9738
30	− 3.572	−2.619	−2.656	−0.2779	+ 0.0017	−0.0001	+0.9848	+0.1162	−0.0396	−0.2403	−0.0081	−0.0007	+ 0.0172	+ 0.0021	+ 0.0022	+ 0.9787
20	+ 1.809	−3.265	−0.773	−0.1512	+ 0.0034	+0.0017	+0.9399	+0.0722	+0.1118	−0.0250	+0.0142	+0.0002	+ 0.0264	+ 0.0173	+ 0.0014	+ 0.9854
10	+10.59	0	+0.500	0	− 0.0181	0	+0.8860	0	+0.3600	+0.1000	0	0	− 0.1370	0	0	+ 1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(b) (Continued)																
$\phi_0 = 35°$	− 3.430	0	−2.959	−0.3703	− 0.0061	0	+0.9986	+0.1754	−0.0774	0	−0.0243	−0.0015	− 0.0310	0	− 0.0051	+0.9642
35	− 3.220	−0.921	−2.820	−0.3394	− 0.0043	−0.0068	+0.9951	+0.1717	−0.0694	−0.0205	−0.0213	−0.0014	+ 0.0211	− 0.0076	− 0.0037	+0.9650
30	− 1.538	−2.302	−1.812	−0.2781	+ 0.0060	−0.0136	+0.9853	+0.1425	−0.0554	−0.0439	−0.0115	−0.0008	+ 0.0373	− 0.0043	+ 0.0040	+0.9710
20	+ 1.822	−2.301	−0.330	−0.1444	+ 0.0090	+0.0041	+0.9071	+0.0948	+0.1212	−0.0149	+0.0185	−0.0002	+ 0.0489	+ 0.0251	+ 0.0045	+0.9825
10	+ 6.845	0	+0.574	0	− 0.0316	0	+0.8192	0	+0.3076	+0.1000	0	0	− 0.2051	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$																
40	− 2.310	0	−2.534	−0.4048	− 0.0155	0	+0.9934	+0.2247	−0.0675	0	−0.0279	−0.0022	− 0.0712	0	− 0.0184	+0.9530
30	− 1.806	−1.138	−2.168	−0.3583	− 0.0049	−0.0068	+0.9836	+0.2041	−0.0461	−0.0331	−0.0179	−0.0018	+ 0.0196	− 0.0293	− 0.0074	+0.9570
20	− 0.578	−1.830	−1.205	−0.2891	+ 0.0176	−0.0032	+0.9420	+0.1672	+0.0181	−0.0423	+0.0054	−0.0009	+ 0.0815	− 0.0118	+ 0.0112	+0.9653
10	+ 1.516	−1.814	+0.045	−0.1552	+ 0.0156	+0.0081	+0.8585	+0.1047	+0.1236	−0.0057	+0.0231	−0.0003	+ 0.0724	+ 0.0098	+ 0.0106	+0.9798
0	+ 4.534	0	+0.643	0	− 0.0631	0	+0.7660	0	+0.3682	+0.1000	0	0	− 0.3099	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$																
45	− 1.602	0	−2.231	−0.4355	− 0.0359	0	+0.9873	+0.2779	−0.0596	0	−0.0315	−0.0031	− 0.1280	0	− 0.0437	0.9392
40	− 1.545	−0.434	−2.163	−0.4274	− 0.0309	−0.0094	+0.9849	+0.2743	−0.0559	−0.0160	−0.0292	−0.0030	+ 0.1102	− 0.0325	− 0.0385	+0.9402
30	− 1.068	−1.185	−1.846	−0.3854	+ 0.0033	−0.0181	+0.9643	+0.2461	−0.0258	−0.0398	−0.0123	−0.0022	+ 0.0128	− 0.0642	− 0.0047	−0.9489
20	+ 0.166	−1.550	−0.763	−0.3262	+ 0.0412	−0.0050	+0.9138	+0.1899	+0.0338	−0.0389	+0.0120	−0.0010	+ 0.1533	− 0.0158	+ 0.0277	+0.9595
10	+ 1.310	−1.263	+0.179	−0.1355	+ 0.0260	+0.1175	+0.8251	+0.1072	+0.1222	+0.0025	+0.0250	−0.0002	+ 0.0081	+ 0.0580	+ 0.0213	+0.9771
0	+ 3.607	0	+0.707	0	− 0.1185	0	+0.7071	0	+0.3278	+0.1000	0	0	− 0.4613	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$																
50	− 1.051	0	−1.931	−0.4541	− 0.0693	0	+0.9696	+0.3336	−0.0531	0	−0.0350	−0.0042	− 0.2048	0	− 0.0885	+0.9218
40	− 0.948	−0.658	−1.741	−0.4265	− 0.0213	−0.0326	+0.9550	+0.3198	−0.0423	−0.0271	−0.0268	−0.0037	+ 0.1192	− 0.0964	− 0.0573	+0.9258
30	− 0.619	−0.999	−1.208	−0.3492	+ 0.0284	−0.0366	+0.9430	+0.2786	−0.0096	−0.0424	−0.0057	−0.0025	+ 0.0849	− 0.1086	+ 0.0111	+0.9271
20	− 0.001	−1.184	−0.451	−0.2378	+ 0.0830	−0.0039	+0.9051	+0.2104	+0.0460	−0.0340	+0.0181	−0.0010	+ 0.2303	− 0.0099	+ 0.0576	+0.9537
10	+ 0.998	−0.930	+0.217	−0.1141	+ 0.0374	+0.0357	+0.7738	+0.1167	+0.1188	+0.0077	+0.0275	−0.0002	+ 0.1176	+ 0.1119	+ 0.0373	+0.9745
0	+ 2.488	0	+0.786	0	− 0.2047	0	+0.6428	0	+0.2138	+0.1000	0	0	− 0.6695	0	0	+1.000
(c) $r/l = 100$ and $r/l = 0.2$																
$\phi_0 = 30°$	− 5.160	0	−3.420	−0.3028	− 0.0743	0	+0.9815	+0.1219	−0.1946	0	−0.0414	−0.0005	− 0.549	0	− 0.0813	+0.9009
30	− 3.440	−2.531	−2.623	−0.2565	− 0.0123	−0.0292	+0.9757	+0.1084	−0.0755	−0.0776	−0.0145	0	+ 0.073	− 0.2142	− 0.0153	+0.9124
20	− 1.763	−3.228	−0.787	−0.1393	+ 0.0700	−0.0687	+0.9427	+0.0678	+0.2208	−0.0489	+0.0287	+0.0009	− 0.357	− 0.0429	+ 0.0368	+0.9456
10	+10.92	0	+0.300	0	− 0.1465	0	+0.8660	0	+0.7119	+0.3000	0	0	+ 1.067	0	0	+1.000

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

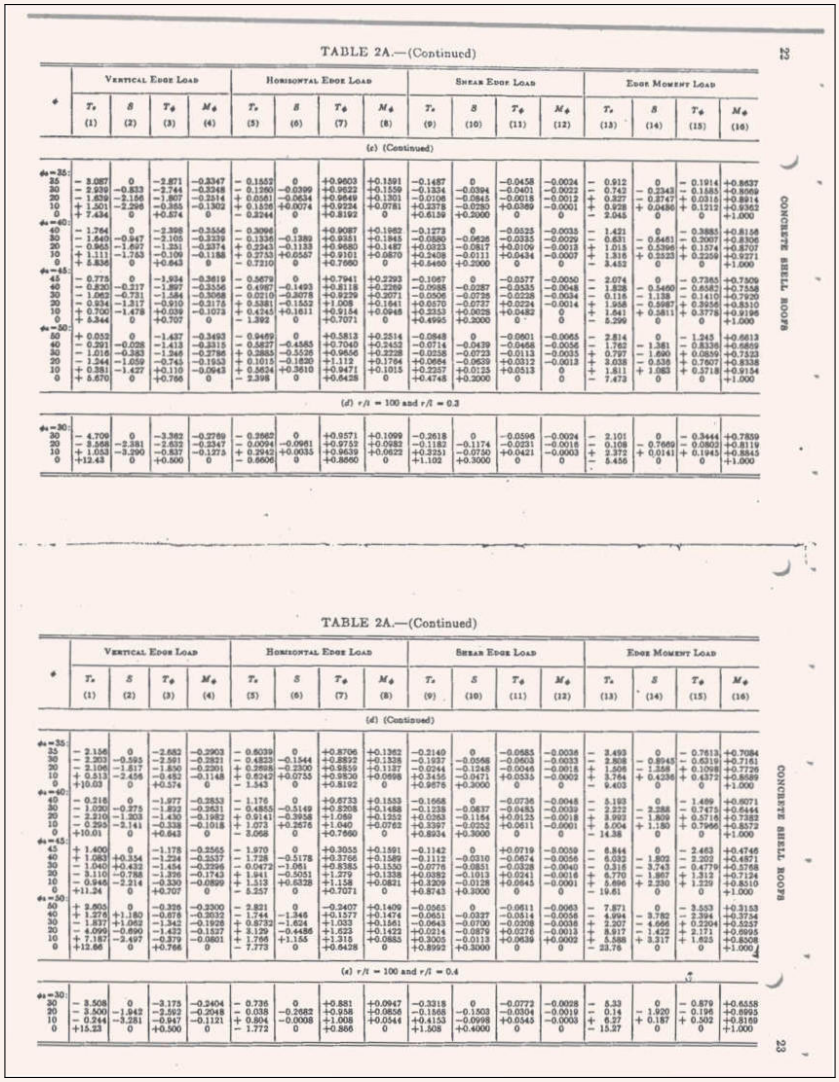


TABLE 2A.—(Continued)

22

CONCRETE SHELL ROOFS

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
							(c) (Continued)									
$\phi_1=25°$																
25	− 3.087	0	−2.871	−0.3347	− 0.1552	0	+0.9603	+0.1591	−0.1487	0	−0.0458	−0.0024	− 0.912	0	− 0.1914	+0.8637
20	− 2.939	−0.833	−2.744	−0.3248	− 0.1560	−0.0399	+0.9622	+0.1559	−0.1334	−0.0394	−0.0401	−0.0022	+ 0.742	− 0.2343	− 0.1685	+0.8069
10	− 1.859	−2.156	−1.807	−0.2314	+ 0.0581	−0.0634	+0.9849	+0.1301	−0.0108	−0.0845	−0.0018	−0.0012	+ 0.327	− 0.3747	+ 0.0318	+0.8914
0	+ 1.501	−2.296	−0.365	−0.1302	+ 0.1556	+0.0074	+0.9224	+0.0781	+0.2378	−0.0293	+0.0369	−0.0001	+ 0.928	+ 0.0486	+ 0.1212	+0.9562
	+ 7.434	0	+0.574	0	− 0.2244	0	+0.8192	0	+0.6139	+0.3000	0	0	− 2.045	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$																
40	− 1.764	0	−2.398	−0.3556	− 0.3096	0	+0.9087	+0.1962	−0.1273	0	−0.0325	−0.0035	− 1.421	0	− 0.3885	+0.8156
30	− 1.645	−0.847	−2.105	−0.3339	− 0.1336	−0.1389	+0.9351	+0.1845	−0.0880	−0.0626	−0.0335	−0.0029	− 0.631	− 0.6481	− 0.3007	+0.8306
20	− 0.963	−1.697	−1.351	−0.2374	+ 0.2243	−0.1133	+0.9680	+0.1487	+0.0323	−0.0817	+0.0109	−0.0013	+ 1.015	− 0.5396	+ 0.1574	+0.8707
10	+ 1.111	−1.763	−0.109	−0.1188	+ 0.2753	+0.0557	+0.9161	+0.0870	+0.2408	−0.0111	+0.0434	−0.0007	+ 1.316	+ 0.2523	+ 0.2259	+0.9271
0	+ 6.836	0	+0.643	0	− 0.7310	0	+0.7660	0	+0.6460	+0.2000	0	0	− 3.453	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$																
45	− 0.775	0	−1.934	−0.3619	− 0.5679	0	+0.7941	+0.2293	−0.1067	0	−0.0377	−0.0050	− 2.074	0	− 0.7385	+0.7309
40	− 0.820	−0.217	−1.897	−0.3556	− 0.4967	−0.1493	+0.8118	+0.2269	−0.0988	−0.0287	−0.0535	−0.0048	− 1.828	− 0.5460	− 0.6582	+0.7358
30	− 1.062	−0.731	−1.584	−0.3098	− 0.2210	−0.2078	+0.9229	+0.2071	−0.0506	−0.0795	−0.0228	−0.0034	− 0.116	− 1.138	− 0.1410	+0.7920
20	− 0.934	−1.217	−0.910	−0.2176	+ 0.5381	−0.1552	+1.008	+0.1641	+0.0570	−0.0737	+0.0224	−0.0014	+ 1.958	− 0.5987	+ 0.3936	+0.8510
10	+ 0.700	−1.478	+0.039	−0.1073	+ 0.4245	+0.1611	+0.9154	+0.0948	+0.2353	+0.3028	+0.0482	0	+ 1.641	+ 0.2811	+ 0.3778	+0.9196
0	+ 5.344	0	+0.707	0	− 1.392	0	+0.7071	0	+0.4995	+0.3000	0	0	− 5.299	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$																
50	+ 0.052	0	−1.437	−0.3493	− 0.9469	0	+0.5813	+0.2514	−0.0848	0	−0.0601	−0.0065	− 2.814	0	− 1.245	+0.6613
40	− 0.291	−0.028	−1.413	−0.3315	− 0.8427	−0.4585	+0.7040	+0.2452	−0.0714	−0.0439	−0.0468	−0.0056	− 1.762	− 1.381	− 0.8336	+0.6869
30	− 1.016	−0.383	−1.245	−0.2788	+ 0.2885	−0.5526	+0.9456	+0.2238	−0.0258	−0.0723	−0.0113	−0.0035	+ 0.797	− 1.690	+ 0.0839	+0.7533
20	− 1.244	−1.059	−0.745	−0.1953	+ 0.1015	−0.1820	+1.112	+0.1794	+0.0656	−0.0959	+0.0312	−0.0013	+ 3.038	− 0.538	+ 0.7607	+0.8338
10	+ 0.381	−1.427	+0.110	−0.0943	+ 0.5824	+0.3610	+0.9471	+0.1015	+0.2257	+0.0125	+0.0513	0	+ 1.811	+ 1.083	+ 0.3718	+0.9154
0	+ 5.670	0	+0.766	0	− 2.398	0	+0.6428	0	+0.4748	+0.3000	0	0	− 7.473	0	0	+1.000
							(d) $r/t = 100$ and $r/t = 0.3$									
$\phi_1=30°$																
30	− 4.709	0	−3.362	−0.2789	− 0.2662	0	+0.9571	+0.1099	−0.2618	0	−0.0596	−0.0024	− 2.101	0	− 0.3444	+0.7859
20	− 3.668	−2.381	−2.632	−0.2347	− 0.0094	−0.0961	+0.9753	+0.0982	−0.1182	−0.1174	−0.0231	−0.0016	+ 0.108	− 0.7689	− 0.0803	+0.8119
10	+ 1.053	−3.290	−0.837	−0.1275	+ 0.2942	+0.0035	+0.9639	+0.0622	+0.3251	−0.0750	+0.0421	−0.0003	+ 2.372	+ 0.0141	+ 0.1945	+0.8845
0	+12.43	0	+0.500	0	− 0.6606	0	+0.8660	0	+1.102	+0.3000	0	0	− 5.456	0	0	+1.000

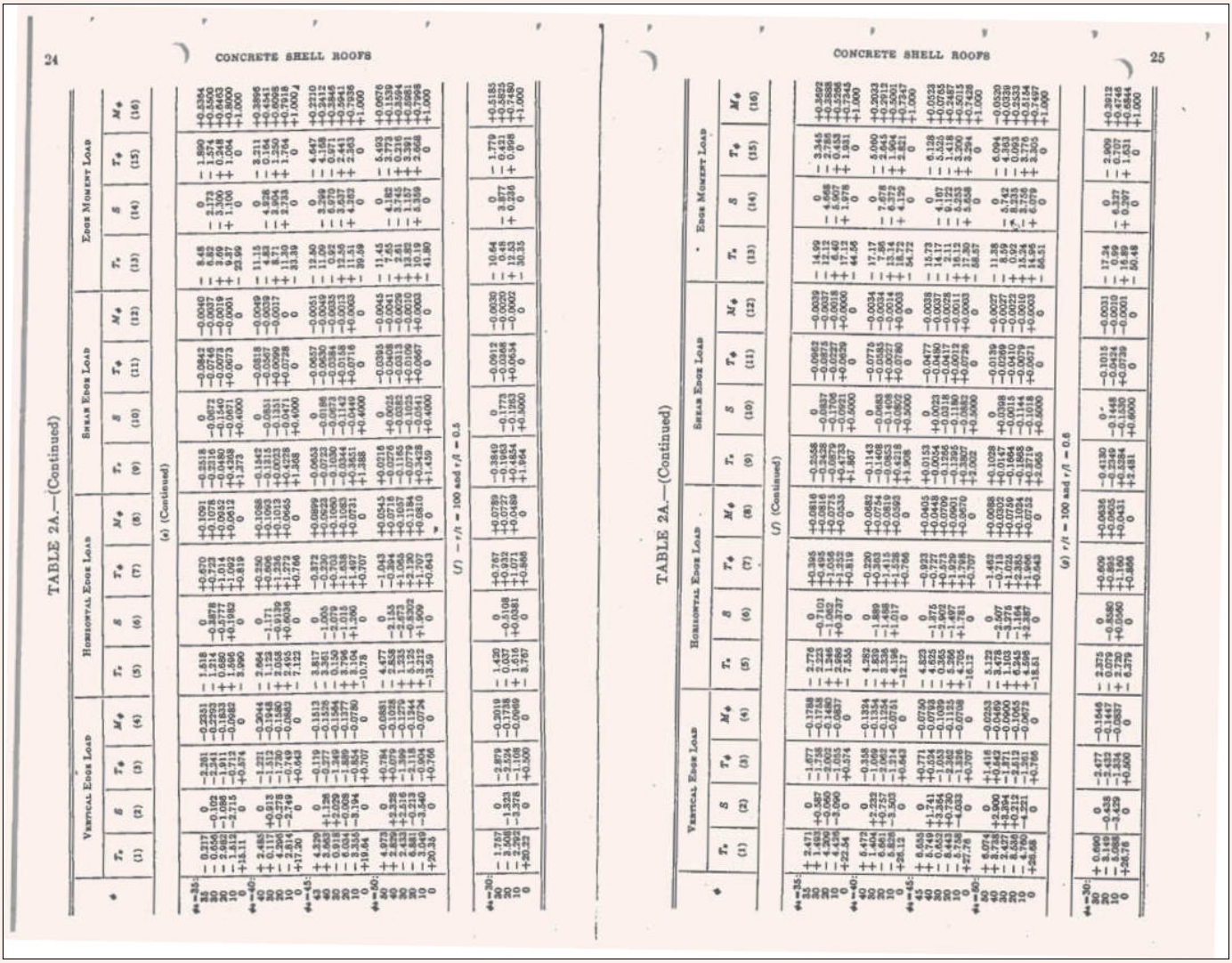
TABLE 2A.—(Continued)

23

CONCRETE SHELL ROOFS

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
							(d) (Continued)									
$\phi_1=35°$																
35	− 2.156	0	−2.682	−0.2903	− 0.6039	0	+0.8706	+0.1362	−0.2140	0	−0.0585	−0.0036	− 3.493	0	− 0.7613	+0.7084
30	− 2.203	−0.595	−2.591	−0.2821	− 0.4823	−0.1544	+0.8932	+0.1328	−0.1937	−0.0568	−0.0603	−0.0033	+ 2.808	− 0.8945	− 0.5319	+0.7161
20	− 2.151	−1.817	−1.950	−0.2301	− 0.2958	−0.2300	+0.9359	+0.1137	−0.0244	−0.1248	−0.0346	−0.0018	+ 1.508	− 1.358	+ 0.1098	+0.7729
10	+ 0.513	−2.456	−0.452	−0.1148	+ 0.8242	+0.0755	+0.9830	+0.0698	+0.3455	−0.0471	+0.0535	−0.0002	+ 3.764	+ 0.4236	+ 0.4372	+0.8589
0	+10.03	0	+0.574	0	− 1.343	0	+0.8192	0	+0.9575	+0.3000	0	0	− 9.403	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$																
40	− 0.218	0	−1.977	−0.2853	− 1.176	0	+0.8733	+0.1553	−0.1668	0	−0.0736	−0.0048	− 5.193	0	− 1.489	+0.6071
30	− 1.030	−0.275	−1.822	−0.2631	− 0.4855	−0.5149	+0.8708	+0.1488	−0.1238	−0.0637	−0.0483	−0.0039	+ 2.222	− 2.288	− 0.7475	+0.6444
20	− 2.210	−1.303	−1.430	−0.1982	+ 0.9141	−0.3958	+1.059	+0.1252	+0.0263	−0.1164	+0.0125	−0.0018	+ 3.993	− 1.809	+ 0.5718	+0.7382
10	− 0.295	−3.141	−0.338	−0.1018	+ 1.073	+0.2676	+1.040	+0.0762	+0.3397	−0.0252	+0.0611	−0.0001	+ 5.004	+ 1.180	+ 0.7966	+0.8572
0	+10.01	0	+0.643	0	− 3.068	0	+0.7660	0	+0.8934	+0.3000	0	0	− 14.38	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$																
45	+ 1.400	0	−1.178	−0.2565	− 1.970	0	+0.3055	+0.1591	−0.1142	0	+0.0719	−0.0059	− 6.844	0	− 2.463	+0.4746
40	+ 1.083	+0.334	−1.224	−0.2537	− 1.728	−0.5178	+0.3766	+0.1589	−0.1112	−0.0310	−0.0674	−0.0056	− 6.032	− 1.802	− 2.202	+0.4871
30	− 1.040	+0.432	−1.454	−0.2296	− 0.0472	−1.061	+0.8585	+0.1550	−0.0776	−0.0851	−0.0328	−0.0040	− 0.316	− 3.743	− 0.4779	+0.5768
20	− 3.110	−0.788	−1.396	−0.1743	+ 1.941	−0.5051	+1.279	+0.1338	+0.0382	−0.1013	+0.0241	−0.0016	+ 6.770	− 1.967	+ 1.313	+0.7124
10	− 0.946	−2.214	−0.330	−0.0899	+ 1.313	+0.6328	+1.158	+0.0821	+0.3209	−0.0128	+0.0645	−0.0001	+ 5.696	+ 1.239	+ 1.529	+0.8510
0	+11.24	0	+0.707	0	− 5.257	0	+0.7071	0	+0.8743	+0.3000	0	0	− 19.61	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$																
50	+ 2.805	0	−0.326	−0.2300	− 2.821	0	−0.2407	+0.1409	−0.0565	0	−0.0511	−0.0063	− 7.871	0	− 3.553	+0.3153
40	+ 1.276	+1.180	−0.678	−0.2032	− 1.744	−1.346	+0.1577	+0.1474	−0.0651	−0.0337	−0.0514	−0.0056	− 4.994	− 3.782	− 2.394	+0.3734
30	− 1.837	+1.062	−1.342	−0.1928	+ 0.8732	−1.624	+1.033	+0.1561	−0.0643	−0.0700	−0.0308	−0.0036	+ 2.207	− 4.666	+ 0.2204	+0.5237
20	− 4.099	−0.890	−1.422	−0.1527	+ 3.129	−0.6486	+1.523	+0.1422	+0.0214	−0.0879	+0.0276	−0.0013	+ 8.917	− 1.422	+ 2.171	+0.5995
10	− 7.187	−3.497	−0.379	−0.0801	+ 1.705	+1.155	+1.315	+0.0853	+0.3209	−0.0113	+0.0639	−0.0002	+ 5.588	+ 3.217	+ 1.525	+0.8508
0	+12.66	0	+0.766	0	− 7.773	0	+0.6428	0	+0.8992	+0.3000	0	0	− 23.76	0	0	+1.000
							(e) $r/t = 100$ and $r/t = 0.4$									
$\phi_1=30°$																
30	− 3.508	0	−3.175	−0.2404	− 0.736	0	+0.881	+0.0947	−0.3318	0	−0.0772	−0.0028	+ 5.33	0	− 0.879	+0.6558
20	− 3.500	−1.942	−2.562	−0.2048	+ 0.038	−0.2682	+0.958	+0.0856	−0.1568	−0.1503	−0.0304	−0.0019	+ 0.14	+ 1.920	− 0.196	+0.8995
10	− 0.244	−3.281	−0.947	−0.1121	+ 0.804	−0.0008	+1.008	+0.0344	+0.4153	−0.0998	+0.0545	−0.0003	+ 6.27	+ 0.187	+ 0.502	+0.8169
0	+15.23	0	+0.500	0	− 1.772	0	+0.866	0	+1.508	+0.4000	0	0	− 15.27	0	0	+1.000

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

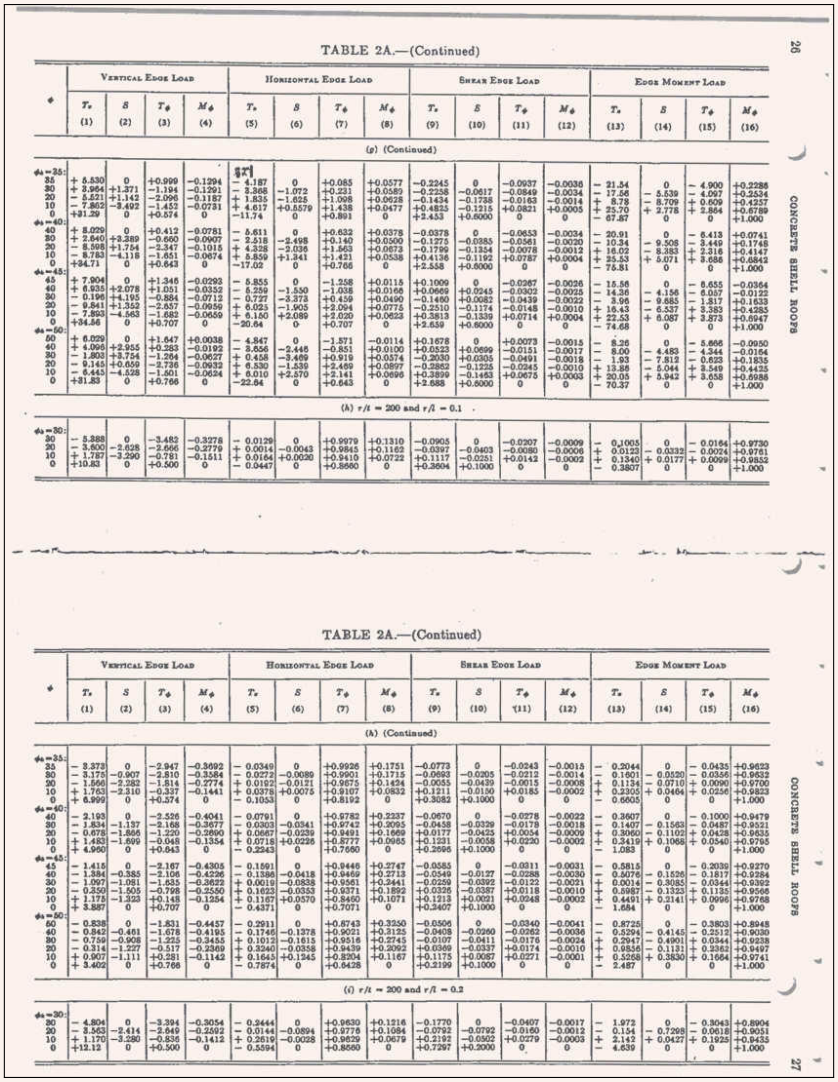


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(p) (Continued)																
$\phi_0 = 25°$:																
35	+ 5.530	0	+0.999	−0.1294	− 4.187	0	+0.085	+0.0577	−0.2245	0	−0.0937	−0.0036	− 21.54	0	− 4.900	+0.2288
30	+ 3.964	+1.371	−1.194	−0.1291	− 3.368	−1.072	+0.231	+0.0589	−0.2238	−0.0617	−0.0849	−0.0034	− 17.56	− 5.539	− 4.097	+0.2534
20	− 5.521	+1.142	−2.096	−0.1167	+ 1.835	−1.625	+1.098	+0.0628	−0.1434	−0.1738	−0.0163	−0.0014	+ 8.78	− 8.709	+ 0.509	+0.4257
10	− 7.862	−3.492	−1.452	−0.0731	+ 4.617	+0.5579	+1.438	+0.0477	+0.4835	−0.1215	+0.0821	+0.0005	+ 25.70	+ 2.778	+ 2.864	+0.6789
0	+81.29	0	+0.574	0	−11.74	0	+0.891		+2.453	+0.6000	0	0	− 67.87	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	+ 8.029	0	+0.412	−0.0781	− 5.611	0	+0.632	+0.0378	−0.0378	0	−0.0653	−0.0034	− 20.91	0	− 6.413	+0.0741
30	+ 2.940	+2.289	−0.660	−0.0907	− 2.518	−2.498	+0.140	+0.0500	−0.1275	−0.0385	−0.0561	−0.0020	− 10.34	− 9.508	− 3.449	+0.1748
20	− 8.598	+1.754	−2.347	−0.1015	+ 4.328	−2.036	+1.563	+0.0573	−0.1799	−0.1354	−0.0078	−0.0012	+ 16.02	− 8.383	+ 2.316	+0.4147
10	− 8.783	−4.118	−1.851	−0.0674	+ 5.859	+1.341	+1.421	+0.0538	+0.4136	−0.1192	+0.0787	+0.0004	+ 25.53	+ 5.071	+ 3.686	+0.6842
0	+84.71	0	+0.643	0	−17.02	0	+0.766	0	+2.538	+0.6000	0	0	− 76.81	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	+ 7.904	0	+1.346	−0.0293	− 5.855	0	−1.358	+0.0115	+0.1009	0	−0.0267	−0.0026	− 15.56	0	− 5.655	−0.0364
40	+ 6.935	+2.078	+1.051	−0.0352	− 5.259	−1.550	−1.038	+0.0166	+0.0669	+0.0245	−0.0302	−0.0025	− 14.36	− 4.156	− 6.037	−0.0122
30	− 0.196	+4.195	−0.884	−0.0712	− 0.727	−3.373	+0.459	+0.0490	−0.1460	+0.0082	−0.0439	−0.0022	− 3.96	− 9.885	− 1.817	+0.1633
20	− 9.841	+1.352	−2.857	−0.0959	+ 5.023	−1.905	+2.094	+0.0775	−0.2510	−0.1174	−0.0148	−0.0010	+ 16.43	− 6.537	+ 3.383	+0.4285
10	− 7.893	−4.563	−1.682	−0.0659	+ 6.100	+2.089	+2.020	+0.0622	+0.3813	−0.1339	+0.0714	+0.0004	+ 22.53	+ 6.087	+ 3.873	+0.6947
0	+94.56	0	+0.707	0	−20.64	0	+0.707		+2.659	+0.6000	0	0	− 74.68	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	+ 6.029	0	+1.647	+0.0038	− 4.847	0	−1.371	−0.0114	+0.1678	0	+0.0073	−0.0015	− 8.26	0	− 5.866	−0.0950
40	+ 4.095	+2.955	+1.283	−0.0192	− 3.256	−2.445	−0.851	+0.0100	+0.0523	+0.0699	−0.0151	−0.0017	− 8.00	− 4.483	− 4.344	−0.0154
30	− 1.803	+3.754	−1.264	−0.0527	+ 0.458	−3.409	+0.919	+0.0574	−0.2030	+0.0305	−0.0491	−0.0018	− 1.93	− 7.812	− 0.523	+0.1835
20	− 9.143	+0.659	−2.738	−0.0933	+ 4.530	−1.539	+2.469	+0.0897	−0.2862	−0.1255	−0.0245	−0.0010	+ 13.86	− 5.044	+ 3.549	+0.4425
10	− 6.445	−4.528	−1.501	−0.0624	+ 8.010	+2.570	+2.141	+0.0696	+0.3899	−0.1453	+0.0675	+0.0003	+ 20.05	+ 5.942	+ 3.658	+0.6686
0	+81.83	0	+0.766	0	−22.84	0	+0.643	0	+2.688	+0.6000	0	0	− 70.37	0	0	+1.000
(h) $r/t = 200$ and $r/l = 0.1$																
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 5.388	0	−3.483	−0.3278	− 0.0129	0	+0.9979	+0.1310	−0.0905	0	−0.0207	−0.0009	− 0.1005	0	− 0.0164	+0.9730
20	− 3.600	−2.628	−2.666	−0.2779	+ 0.0014	−0.0043	+0.9845	+0.1163	−0.0397	−0.0403	−0.0080	−0.0006	+ 0.0123	− 0.0339	+ 0.0024	+0.9781
10	+ 1.787	−3.290	−0.781	−0.1511	+ 0.0164	+0.0030	+0.9810	+0.0722	+0.1117	−0.0251	+0.0142	+0.0002	+ 0.1340	+ 0.0177	+ 0.0099	+0.9852
0	+10.83	0	+0.500	0	− 0.0447	0	+0.8580	0	+0.3604	+0.1000	0	0	− 0.3807	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(h) (Continued)																
$\phi_0 = 35°$:																
35	− 3.373	0	−2.947	−0.3692	− 0.0349	0	+0.9926	+0.1751	−0.0773	0	−0.0243	−0.0015	− 0.2044	0	− 0.0435	+0.9623
30	− 3.178	−0.907	−2.810	−0.3584	− 0.0272	−0.0089	+0.9901	+0.1715	−0.0693	−0.0205	−0.0212	−0.0014	− 0.1601	− 0.0520	− 0.0356	+0.9632
20	− 1.566	−2.382	−1.814	−0.2774	+ 0.0122	−0.0121	+0.9875	+0.1454	−0.0265	−0.0439	−0.0075	−0.0008	+ 0.1134	− 0.0710	− 0.0090	+0.9700
10	+ 1.763	−3.310	−0.337	−0.1441	+ 0.0378	+0.0075	+0.9107	+0.0832	+0.1211	−0.0130	+0.0185	+0.0002	+ 0.2305	+ 0.0464	+ 0.0256	+0.9823
0	+ 6.999	0	+0.574	0	− 0.1053	0	+0.8192	0	+0.3082	+0.1000	0	0	− 0.6605	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	− 3.193	0	−2.526	−0.4041	− 0.0791	0	+0.9782	+0.2337	−0.0670	0	−0.0278	−0.0022	− 0.3607	0	− 0.1000	+0.9479
30	− 1.834	−1.137	−2.168	−0.3677	− 0.0303	−0.0341	+0.9742	+0.2093	−0.0458	−0.0329	−0.0178	−0.0018	− 0.1407	− 0.1563	− 0.0487	+0.9531
20	− 0.678	−1.866	−1.220	−0.2890	+ 0.0667	−0.0239	+0.9491	+0.1669	+0.0177	−0.0425	+0.0054	−0.0009	+ 0.3060	− 0.1102	+ 0.0428	+0.9635
10	+ 1.483	−1.899	−0.048	−0.1354	+ 0.0718	+0.0226	+0.8777	+0.0965	+0.1231	−0.0058	+0.0230	+0.0002	+ 0.3419	+ 0.1068	+ 0.0540	+0.9795
0	+ 4.960	0	+0.643	0	− 0.2343	0	+0.7660	0	+0.2695	+0.1000	0	0	− 1.083	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	− 1.415	0	−2.167	−0.4305	− 0.1591	0	+0.9446	+0.2747	−0.0585	0	−0.0311	−0.0031	− 0.5815	0	− 0.2039	+0.9270
40	− 1.384	−0.385	−2.106	−0.4226	− 0.1586	−0.0418	+0.9469	+0.2713	−0.0549	−0.0127	−0.0288	−0.0030	− 0.5076	− 0.1525	− 0.1817	+0.9284
30	− 1.097	−1.081	−1.635	−0.3622	− 0.1019	−0.0838	+0.9561	+0.2441	−0.0259	−0.0392	−0.0122	−0.0021	− 0.3014	− 0.3085	− 0.0344	+0.9362
20	− 0.250	−1.505	−0.798	−0.2550	+ 0.1023	−0.0353	+0.9371	+0.1892	+0.0326	−0.0387	+0.0118	−0.0010	+ 0.3987	− 0.1323	+ 0.1135	+0.9566
10	+ 1.178	−1.323	+0.148	−0.1254	+ 0.1167	+0.0570	+0.8460	+0.1071	+0.1213	+0.0021	+0.0348	+0.0002	+ 0.4491	+ 0.2141	+ 0.0996	+0.9768
0	+ 3.887	0	+0.707	0	− 0.4371	0	+0.7071	0	+0.2407	+0.1000	0	0	− 1.684	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	− 0.838	0	−1.831	−0.4457	− 0.2911	0	+0.8743	+0.3250	−0.0506	0	−0.0340	−0.0041	− 0.8725	0	− 0.3803	+0.8948
40	− 0.842	−0.461	−1.678	−0.4195	− 0.1746	−0.1378	+0.9021	+0.3125	−0.0408	−0.0260	−0.0262	−0.0036	− 0.5294	− 0.4145	− 0.2512	+0.9030
30	− 0.759	−0.908	−1.225	−0.3455	+ 0.1012	−0.1615	+0.9518	+0.2745	−0.0107	−0.0411	−0.0176	−0.0024	+ 0.2947	− 0.4901	+ 0.0344	+0.9238
20	− 0.314	−1.227	−0.517	−0.2369	+ 0.3240	−0.0358	+0.9439	+0.2092	+0.0369	−0.0337	+0.0174	−0.0010	+ 0.9856	− 0.1131	+ 0.2362	+0.9497
10	+ 0.907	−1.111	+0.281	−0.1142	+ 0.1643	+0.1345	+0.8204	+0.1167	+0.1175	+0.0087	+0.0271	−0.0001	+ 0.5268	+ 0.3830	+ 0.1664	+0.9741
0	+ 3.402	0	+0.766	0	− 0.7874	0	+0.6428	0	+0.2199	+0.1000	0	0	− 2.487	0	0	+1.000
(i) $r/t = 200$ and $r/l = 0.2$																
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 4.804	0	−3.394	−0.3054	− 0.3444	0	+0.9630	+0.1216	−0.1770	0	−0.0407	−0.0017	− 1.972	0	− 0.3043	+0.8904
20	− 3.563	−2.414	−2.649	−0.2592	− 0.0144	−0.0894	+0.9776	+0.1084	−0.0792	−0.0792	−0.0160	−0.0012	− 0.154	− 0.7295	− 0.0618	+0.9051
10	+ 1.170	−3.280	−0.536	−0.1412	+ 0.2619	−0.0028	+0.9579	+0.0679	+0.2197	−0.0522	+0.0279	−0.0003	+ 2.143	+ 0.0422	+ 0.1925	+0.9435
0	+12.13	0	+0.500	0	− 0.5594	0	+0.8569	0	+0.7297	+0.3000	0	0	− 4.639	0	0	+1.000

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

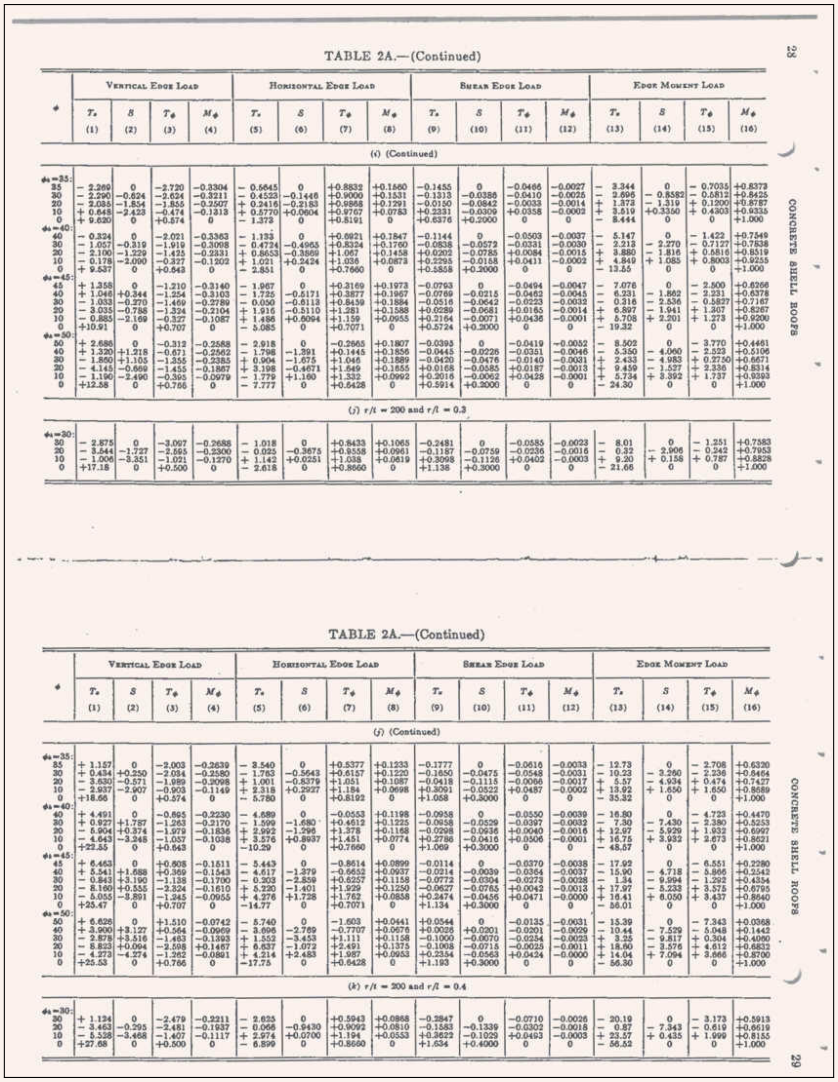


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(i) (Continued)																
$\phi_1=35°$	− 2.269	0	−2.720	−0.3304	− 0.5645	0	+0.8832	+0.1580	−0.1455	0	−0.0466	−0.0027	− 3.344	0	− 0.7035	+0.8373
30	− 2.290	−0.624	−2.634	−0.3211	− 0.4523	−0.1448	+0.9000	+0.1531	−0.1313	−0.0386	−0.0410	−0.0025	− 2.695	− 0.8582	− 0.5812	+0.8425
20	− 2.035	−1.854	−1.855	−0.2507	+ 0.2416	−0.2183	+0.9868	+0.1291	−0.0150	−0.0842	−0.0033	−0.0014	+ 1.373	− 1.319	+ 0.1200	+0.8787
10	+ 0.648	−2.423	−0.474	−0.1313	+ 0.2770	+0.0604	+0.9767	+0.0783	+0.2331	−0.0309	+0.0358	−0.0003	+ 3.619	+0.3350	+ 0.4303	+0.9335
0	+ 9.620	0	+0.574	0	− 1.372	0	+0.8191	0	+0.6376	+0.2000	0	0	− 8.444	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	− 0.324	0	−2.021	−0.3363	− 1.133	0	+0.6921	+0.1847	−0.1144	0	−0.0503	−0.0037	− 5.147	0	− 1.422	+0.7549
30	− 1.057	−0.319	−1.919	−0.3098	− 0.4724	−0.4955	+0.8324	+0.1760	−0.0838	−0.0572	−0.0331	−0.0030	− 2.213	− 2.270	− 0.7127	+0.7538
20	− 2.100	−1.229	−1.425	−0.2331	+ 0.8653	−0.3898	+1.067	+0.1458	+0.0202	−0.0785	+0.0084	−0.0015	+ 3.880	− 1.816	+ 0.5816	+0.8519
10	− 0.178	−2.090	−0.327	−0.1202	+ 1.021	+0.2424	+1.038	+0.0873	+0.2295	−0.0158	+0.0411	−0.0002	+ 4.849	+ 1.085	+ 0.8003	+0.9255
0	+ 9.537	0	+0.543	0	− 2.851	0	+0.7660	0	+0.5858	+0.3000	0	0	− 13.55	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 1.358	0	−1.210	−0.3140	− 1.967	0	+0.3169	+0.1973	−0.0763	0	−0.0494	−0.0047	− 7.078	0	− 2.500	+0.6266
40	+ 1.046	+0.344	−1.254	−0.3103	− 1.725	−0.6171	+0.3877	+0.1967	−0.0799	−0.0215	−0.0463	−0.0045	− 6.231	− 1.662	− 2.231	+0.6378
30	− 1.033	−0.370	−1.469	−0.2789	− 0.050	−0.5113	+0.8439	+0.1884	−0.0516	−0.0642	−0.0223	−0.0032	− 0.316	− 2.536	− 0.5827	+0.7167
20	− 3.035	−0.758	−1.324	−0.2104	+ 1.916	−0.3110	+1.281	+0.1588	+0.0289	−0.0681	+0.0185	−0.0014	+ 6.897	− 1.941	+ 1.307	+0.8267
10	− 0.885	−2.169	−0.327	−0.1087	+ 1.496	+0.3094	+1.159	+0.0955	+0.2164	−0.0071	+0.0436	−0.0001	+ 5.708	+ 2.201	+ 1.273	+0.9200
0	+10.91	0	+0.707	0	− 5.085	0	+0.7071	0	+0.5724	+0.3000	0	0	− 19.32	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 2.686	0	−0.312	−0.2688	− 2.918	0	−0.2965	+0.1807	−0.0393	0	−0.0419	−0.0052	− 8.502	0	− 3.770	+0.4461
40	+ 1.320	+1.218	−0.671	−0.2562	− 1.798	−1.291	+0.1445	+0.1856	−0.0446	−0.0228	−0.0351	−0.0046	− 5.350	− 4.000	− 2.523	+0.5106
30	− 1.850	+1.105	−1.355	−0.2385	+ 0.904	−1.675	+1.046	+0.1589	−0.0420	−0.0476	−0.0140	−0.0031	+ 2.433	− 4.983	+ 0.2750	+0.6671
20	− 4.145	−0.669	−1.455	−0.1857	+ 3.198	−0.4671	+1.549	+0.1555	+0.0168	−0.0585	+0.0187	−0.0013	+ 9.459	− 1.537	+ 2.336	+0.8314
10	− 1.196	−2.490	−0.395	−0.0979	− 1.779	+1.160	+1.332	+0.0992	+0.2016	−0.0062	+0.0428	−0.0001	+ 5.734	+ 3.392	+ 1.737	+0.9393
0	+12.58	0	+0.766	0	− 7.777	0	+0.6428	0	+0.5914	+0.3000	0	0	− 24.30	0	0	+1.000
(j) $r/t = 200$ and $r/l = 0.3$																
$\phi_1=30°$	− 2.575	0	−3.097	−0.2688	− 1.018	0	+0.8433	+0.1065	−0.2481	0	−0.0585	−0.0023	− 8.01	0	− 1.251	+0.7383
20	− 3.544	−1.727	−2.595	−0.2300	+ 0.025	−0.3675	+0.9558	+0.0981	−0.1187	−0.0759	−0.0236	−0.0016	− 0.32	− 2.908	− 0.342	+0.7953
10	− 1.006	−0.351	−1.071	−0.1270	+ 1.142	+0.0251	+1.038	+0.0619	+0.3098	−0.1126	+0.0402	−0.0003	+ 9.20	+ 0.158	+ 0.787	+0.8828
0	+17.18	0	+0.500	0	− 2.618	0	+0.8660	0	+1.138	+0.3000	0	0	− 21.66	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(j) (Continued)																
$\phi_1=35°$	+ 1.157	0	−2.003	−0.2639	− 3.540	0	+0.5377	+0.1233	−0.1777	0	−0.0616	−0.0033	− 12.73	0	− 2.708	+0.6330
30	+ 0.434	+0.350	−2.034	−0.2580	− 1.763	−0.3543	+0.6157	+0.1220	−0.1650	−0.0475	−0.0543	−0.0031	− 10.23	− 3.290	− 2.236	+0.5464
20	− 3.630	−0.571	−1.999	−0.2098	+ 1.001	−0.5379	+1.051	+0.1087	−0.0418	−0.1118	−0.0096	−0.0017	+ 5.57	− 4.934	+ 0.474	+0.7427
10	− 2.937	−2.907	−0.903	−0.1149	+ 2.318	+0.2927	+1.184	+0.0698	+0.3091	−0.0522	+0.0487	−0.0002	+ 13.92	+ 1.650	+ 1.650	+0.8689
0	+18.56	0	+0.574	0	− 5.780	0	+0.8122	0	+1.058	+0.3000	0	0	− 35.32	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	+ 4.491	0	−0.895	−0.2230	− 4.589	0	−0.0553	+0.1198	−0.0958	0	−0.0550	−0.0039	− 16.80	0	− 4.723	+0.4470
30	+ 0.927	+1.787	−1.263	−0.2170	− 1.599	−1.680	+0.4612	+0.1225	−0.0958	−0.0529	−0.0397	−0.0032	− 7.30	− 7.430	− 2.380	+0.5253
20	− 5.904	+0.374	−1.979	−0.1836	+ 2.992	−1.296	+1.378	+0.1158	−0.0298	−0.0936	+0.0040	−0.0016	+ 12.97	+ 5.929	+ 1.932	+0.6997
10	− 4.643	−3.248	−1.057	−0.1038	+ 3.576	+0.8937	+1.451	+0.0774	+0.2786	−0.0416	+0.0506	−0.0001	+ 16.75	+ 3.932	+ 2.673	+0.8621
0	+22.55	0	+0.643	0	−10.29	0	+0.7660	0	+1.069	+0.3000	0	0	− 48.57	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 5.463	0	+0.808	−0.1511	− 5.443	0	−0.8614	+0.0899	−0.0114	0	−0.0370	−0.0038	− 17.92	0	− 6.551	+0.2280
40	+ 5.541	+1.888	+0.369	−0.1543	− 4.617	−1.379	−0.6652	+0.0937	−0.0214	−0.0039	−0.0364	−0.0037	− 15.90	− 4.718	− 5.866	+0.2542
30	− 0.843	+3.190	−1.138	−0.1700	− 0.303	−2.859	+0.6257	+0.1158	−0.0772	−0.0304	−0.0273	−0.0038	− 1.34	− 9.994	− 1.292	+0.4304
20	− 8.160	+0.555	−2.324	−0.1610	+ 5.220	−1.401	+1.929	+0.1250	−0.0627	−0.0765	+0.0042	−0.0013	+ 17.97	+ 5.233	+ 3.575	+0.6795
10	− 6.055	−3.891	−1.945	−0.0955	+ 4.276	+1.728	+1.763	+0.0858	+0.2474	−0.0456	+0.0471	−0.0000	+ 16.41	+ 8.050	+ 3.437	+0.8640
0	+25.47	0	+0.707	0	−14.77	0	+0.7071	0	+1.134	+0.3000	0	0	− 56.01	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 5.628	0	+1.510	−0.0742	− 5.740	0	−1.503	+0.0441	+0.0544	0	−0.0135	−0.0031	− 15.39	0	− 7.343	+0.0368
40	+ 3.900	+3.127	+0.564	−0.0969	− 3.696	−2.789	−0.7707	+0.0676	+0.0026	+0.0201	−0.0201	−0.0029	− 10.44	− 7.529	− 5.048	+0.1442
30	− 2.878	+3.516	−1.463	−0.1393	+ 1.553	−3.453	+0.111	+0.1168	−0.1000	−0.0670	−0.0234	−0.0023	+ 3.25	− 9.817	+ 0.304	+0.4090
20	− 8.823	+0.094	−2.598	+0.1467	+ 6.537	−1.072	+2.491	+0.1375	−0.1008	−0.0716	−0.0023	−0.0011	+ 18.80	− 3.576	+ 4.612	+0.6832
10	− 7.273	−4.274	−1.262	−0.0891	+ 4.214	+2.483	+1.987	+0.0953	+0.2254	−0.0563	+0.0424	−0.0000	+ 14.04	+ 7.094	+ 3.666	+0.8700
0	+25.53	0	+0.766	0	−17.75	0	+0.6428	0	+1.193	+0.3000	0	0	− 56.36	0	0	+1.000
(k) $r/t = 200$ and $r/l = 0.4$																
$\phi_1=30°$	+ 1.134	0	−2.479	−0.2211	− 2.625	0	+0.5943	+0.0868	−0.2847	0	−0.0710	−0.0026	− 20.19	0	− 3.173	+0.5913
20	− 3.463	−0.295	−2.481	−0.1937	− 0.066	−0.9430	+0.9092	+0.0810	−0.1583	−0.1339	−0.0302	−0.0018	+ 0.87	− 7.343	− 0.619	+0.6619
10	− 5.538	−3.468	−1.407	−0.1117	+ 2.974	+0.0700	+1.194	+0.0553	+0.3622	−0.1029	+0.0493	−0.0003	+ 22.57	+ 0.435	+ 1.999	+0.8155
0	+27.68	0	+0.500	0	− 6.899	0	+0.8660	0	+1.534	+0.4000	0	0	− 56.52	0	0	+1.000

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

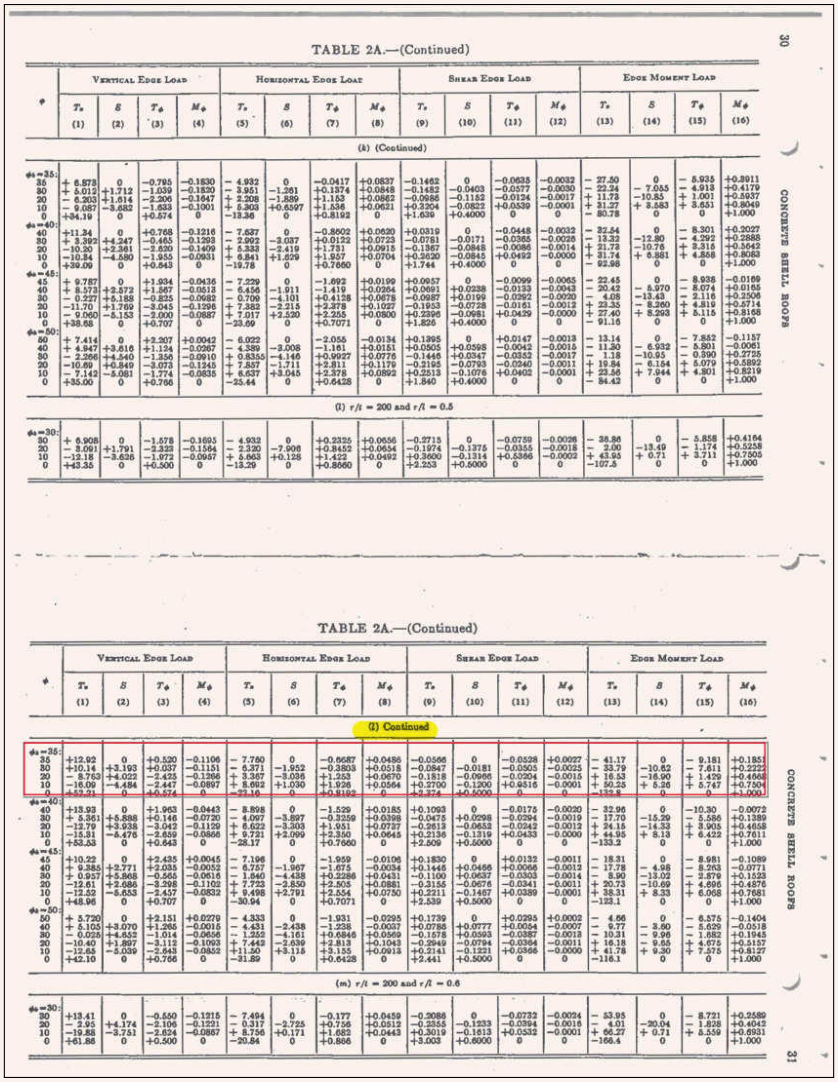


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(k) (Continued)																
$\phi_k = 35°$																
35	+ 6.873	0	−0.795	−0.1830	− 4.932	0	−0.0417	+0.0837	−0.1462	0	−0.0635	−0.0032	− 27.50	0	− 5.935	+0.3911
30	+ 5.012	+1.712	−1.039	−0.1820	+ 3.951	−1.261	+0.1374	+0.0848	−0.1482	−0.0403	−0.0577	−0.0030	+ 22.24	− 7.055	+ 4.913	+0.4179
20	− 6.203	+1.614	−2.206	−0.1647	+ 2.208	−1.839	+1.153	+0.0862	−0.0985	−0.1152	−0.0124	−0.0017	+ 11.72	−10.55	+ 1.001	+0.5937
10	− 9.087	−3.682	−1.633	−0.1001	+ 5.303	+0.6597	+1.536	+0.0621	+0.3204	−0.0822	+0.0539	−0.0001	+ 31.27	+ 3.583	+ 3.551	+0.8049
0	+34.19	0	+0.574	0	−13.36	0	+0.8192	0	+1.639	+0.4000	0	0	− 80.78	0	0	+1.000
$\phi_k = 40°$																
40	+11.34	0	+0.768	−0.3216	+ 7.637	0	−0.8502	+0.0620	+0.0319	0	−0.0448	−0.0032	+ 32.54	0	− 8.301	+0.2027
30	+ 3.393	+4.247	−0.485	−0.1293	− 2.992	−2.037	+0.0152	+0.0723	−0.0781	−0.0171	−0.0365	−0.0028	− 13.32	−12.80	+ 4.292	+0.2888
20	−10.30	+2.361	−2.620	−0.1409	+ 5.333	−2.419	+1.751	+0.0915	−0.1367	−0.0848	−0.0086	−0.0014	+ 21.72	−10.76	+ 3.315	+0.3542
10	−10.84	−4.580	−1.955	−0.0931	+ 6.841	+1.629	+1.937	+0.0704	+0.3620	−0.0845	+0.0492	−0.0000	+ 31.74	+ 6.881	+ 4.868	+0.8063
0	+39.09	0	+0.843	0	−19.78	0	+0.7660	0	+1.744	+0.4000	0	0	− 82.86	0	0	+1.000
$\phi_k = 45°$																
45	+ 9.787	0	+1.934	−0.0436	− 7.229	0	−1.692	+0.0199	+0.0957	0	−0.0099	−0.0065	− 22.45	0	− 8.936	−0.0199
40	+ 8.573	+2.572	+1.567	−0.0513	− 6.456	−1.911	−1.419	+0.0264	+0.0691	+0.0238	−0.0133	−0.0043	− 20.42	− 5.970	− 8.074	+0.0165
30	− 0.227	+5.188	−0.825	−0.0982	+ 0.709	−4.101	+0.4128	+0.0678	−0.0987	+0.0199	−0.0292	−0.0030	+ 4.08	−13.43	− 2.116	+0.2506
20	−11.70	+1.769	−3.045	−0.1296	+ 7.383	−2.215	+2.378	+0.1027	−0.1933	−0.0728	−0.0161	−0.0012	+ 23.35	− 8.260	+ 4.819	+0.5714
10	− 9.060	−5.153	−2.000	−0.0887	+ 7.017	+2.520	+2.255	+0.0800	+0.2396	−0.0981	+0.0429	−0.0000	+ 27.40	+ 8.293	+ 5.115	+0.8168
0	+38.88	0	+0.707	0	−23.09	0	+0.7071	0	+1.826	+0.4000	0	0	− 91.16	0	0	+1.000
$\phi_k = 50°$																
50	+ 7.414	0	+2.307	+0.0042	− 6.022	0	−2.055	−0.0134	+0.1395	0	+0.0147	−0.0013	− 13.14	0	− 7.852	−0.1157
40	+ 4.947	+3.616	+1.124	−0.0267	− 4.389	−3.008	−1.161	+0.0151	+0.0505	+0.0598	−0.0042	−0.0015	− 11.30	0	− 5.801	−0.0061
30	− 2.266	+4.540	−1.356	−0.0910	+ 0.8355	−4.146	+0.9927	+0.0776	−0.1445	+0.0347	−0.0352	−0.0017	+ 1.18	− 6.932	+ 0.390	+0.2725
20	−10.89	+0.849	−3.073	−0.1245	+ 7.857	−1.711	+2.811	+0.1179	−0.2195	−0.0793	−0.0240	−0.0011	+ 19.84	− 6.154	+ 5.079	+0.5892
10	− 7.142	−5.081	−1.774	−0.0835	+ 6.537	+3.045	+2.378	+0.0892	+0.2513	−0.1076	+0.0402	−0.0001	+ 23.56	+ 7.944	+ 4.801	+0.8219
0	+35.00	0	+0.766	0	−25.44	0	+0.6428	0	+1.840	+0.4000	0	0	− 84.42	0	0	+1.000
(l) $r/t = 200$ and $r/t = 0.5$																
$\phi_k = 30°$																
30	+ 5.908	0	−1.578	−0.1695	− 4.932	0	+0.2355	+0.0656	−0.2715	0	−0.0759	−0.0026	− 38.86	0	− 5.858	+0.4164
20	− 3.061	+1.791	−2.323	−0.1564	+ 2.330	−7.908	+0.8452	+0.0634	−0.1974	−0.1375	−0.0355	−0.0018	+ 2.00	−13.49	− 1.174	+0.5258
10	−12.18	−3.826	−1.972	−0.0957	+ 5.863	+0.128	+1.422	+0.0492	+0.3600	−0.1314	+0.5386	−0.0002	+ 43.95	+ 0.71	+ 3.711	+0.7505
0	+43.35	0	+0.500	0	−13.29	0	+0.8660	0	+2.253	+0.5000	0	0	−107.5	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(l) Continued																
$\phi_k = 35°$																
35	+12.92	0	+0.520	−0.1106	− 7.760	0	−0.6687	+0.0486	−0.0566	0	−0.0526	+0.0027	− 41.17	0	− 9.181	+0.1851
30	+10.14	+3.193	+0.037	−0.1151	+ 5.371	−1.952	−0.3803	+0.0518	−0.0847	−0.0181	−0.0505	−0.0025	+ 33.79	−10.62	+ 7.811	+0.2222
20	− 8.763	+4.022	−2.425	−0.1266	+ 3.367	−3.036	+1.253	+0.0670	−0.1818	−0.0966	−0.0204	−0.0015	+ 16.53	−16.90	+ 1.429	+0.4668
10	−16.09	−4.484	−2.447	−0.0897	+ 8.602	+1.030	+1.926	+0.0564	+0.2700	−0.1200	+0.9816	−0.0001	+ 50.25	+ 5.26	+ 5.747	+0.7504
0	+53.91	0	+0.574	0	−23.16	0	+0.8192	0	+2.374	+0.5000	0	0	−133.8	0	0	+1.000
$\phi_k = 40°$																
40	+13.93	0	+1.963	−0.0443	− 8.898	0	−1.529	+0.0185	+0.1093	0	−0.0175	−0.0020	− 32.96	0	−10.30	−0.0072
30	+ 5.361	+5.888	+0.146	−0.0720	+ 4.097	−3.897	−0.3359	+0.0398	−0.0475	+0.0298	−0.0294	−0.0019	+ 17.70	−15.29	− 5.586	+0.1389
20	−12.79	+3.938	−3.042	−0.1129	+ 6.622	−3.303	+1.931	+0.0727	−0.2613	−0.0652	−0.0242	−0.0012	+ 24.16	−14.53	+ 3.903	+0.4658
10	−15.31	−8.476	−2.859	−0.0866	+ 9.721	+2.099	+2.350	+0.0645	+0.2136	−0.1319	+0.0433	−0.0000	+ 44.95	+ 8.13	+ 6.422	+0.7611
0	+53.53	0	+0.643	0	−28.17	0	+0.7660	0	+2.509	+0.5000	0	0	−133.2	0	0	+1.000
$\phi_k = 45°$																
45	+10.22	0	+2.435	+0.0045	− 7.196	0	−1.959	−0.0106	+0.1830	0	+0.0132	−0.0011	− 18.31	0	− 8.981	−0.1089
40	+ 9.385	+2.771	+2.035	−0.0052	− 6.757	−1.967	−1.675	−0.0034	+0.1446	+0.0466	+0.0066	−0.0013	− 17.78	− 4.98	− 8.263	−0.0771
30	+ 0.957	+5.868	−0.565	−0.0616	− 1.640	−4.438	+0.2286	+0.0431	−0.1100	+0.0637	−0.0303	−0.0014	+ 8.90	−13.02	− 2.879	+0.1533
20	−12.61	+2.686	−3.298	−0.1102	+ 7.723	−2.850	+2.505	+0.0881	−0.2155	−0.0676	−0.0341	−0.0011	+ 20.73	−10.69	− 4.696	+0.4376
10	−12.52	−6.653	−2.457	−0.0832	+ 9.498	+2.791	+2.554	+0.0750	+0.2211	−0.1467	+0.0389	−0.0001	+ 38.31	+ 8.33	+ 6.068	+0.7681
0	+48.96	0	+0.707	0	−30.94	0	+0.7071	0	+2.539	+0.5000	0	0	−123.1	0	0	+1.000
$\phi_k = 50°$																
50	+ 5.720	0	+2.151	+0.0279	− 4.333	0	−1.931	−0.0295	+0.1739	0	+0.0295	+0.0002	− 4.66	0	− 6.575	−0.1404
40	+ 5.155	+3.070	+1.285	−0.0016	− 4.431	−2.438	−1.228	−0.0037	+0.0785	+0.0777	+0.0054	−0.0007	− 9.77	− 3.80	− 5.629	−0.0518
30	− 0.025	+4.452	−1.014	−0.0656	− 1.252	−4.161	+0.6846	+0.0569	−0.1578	+0.0593	−0.0387	−0.0013	+ 10.31	− 9.96	− 1.682	+0.1945
20	−10.40	+1.897	−3.112	−0.1093	+ 7.442	−2.639	+2.813	+0.1043	−0.2949	−0.0794	−0.0364	−0.0011	+ 16.18	− 9.55	+ 4.675	+0.5157
10	−12.53	−5.039	−2.643	−0.0833	+11.50	+3.115	+3.155	+0.0913	+0.2141	−0.1221	+0.0366	−0.0000	+ 41.78	+ 9.30	+ 7.373	+0.8127
0	+42.10	0	+0.766	0	−31.89	0	+0.6428	0	+2.441	+0.5000	0	0	−116.1	0	0	+1.000
(m) $r/t = 200$ and $r/t = 0.6$																
$\phi_k = 30°$																
30	+13.41	0	−0.550	−0.1215	− 7.494	0	−0.177	+0.0459	−0.3086	0	−0.0732	−0.0024	− 53.95	0	− 8.721	+0.2589
20	− 2.95	+4.174	−2.106	−0.1231	+ 0.317	−2.725	+0.756	−0.0513	−0.2355	−0.1333	−0.0394	−0.0016	+ 4.01	−20.04	− 1.828	+0.4043
10	−19.88	−3.751	−2.624	−0.0857	+ 8.756	+0.171	+1.682	+0.0443	+0.3019	−0.1613	+0.0532	−0.0001	+ 66.27	+ 0.71	+ 8.559	+0.6931
0	+61.88	0	+0.500	0	−20.84	0	+0.866	0	+3.003	+0.6000	0	0	−166.4	0	0	+1.000

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

32 CONCRETE SHELL ROOFS

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load			Horizontal Edge Load			Shear Edge Load			Edge Moment Load		
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(m) (Continued)																
4=35°	+117.48	0	+1.241	−0.0576	− 9.794	0	−1.155	+0.0231	+0.0614	0	−0.0363	−0.0020	48.68	0	−11.31	+0.0453
35	+113.76	+6.442	+1.063	−0.0543	− 8.760	−2.200	−1.113	+0.0279	+0.0719	+0.113	−0.0381	−0.0022	47.77	−12.65	−10.67	+0.0427
30	+110.27	+13.000	+2.270	−0.0989	− 4.010	−3.973	−1.311	+0.0331	+0.0819	+0.0463	−0.0294	−0.0012	17.11	−21.22	− 9.823	+0.3710
20	−22.33	−5.090	−2.136	−0.0827	+11.70	+1.270	+2.252	+0.0533	+0.1859	−0.1613	−0.0454	−0.0000	−52.22	+ 5.83	+ 7.238	+0.7029
10	+68.85	0	+0.874	0	−30.32	0	+0.819	0	+3.204	+0.6000	0	0	−160.9	0	0	+1.000
4=40°	+14.46	0	+2.530	−0.0552	+ 8.900	0	−1.788	−0.0029	+0.2066	0	+0.0030	−0.0012	29.22	0	−10.53	−0.0830
40	+ 6.70	+0.504	+0.519	−0.0397	+ 4.840	−4.143	−0.357	+0.0213	+0.0157	+0.0719	−0.0224	−0.0013	20.21	− 6.191	+ 2.394	+0.0578
30	−13.24	+4.922	−3.187	−0.0946	− 6.008	−3.889	+2.003	+0.0630	−0.3733	−0.0438	−0.0384	−0.0010	18.87	−18.27	+ 7.26	+0.3969
20	−19.33	−5.810	−1.114	−0.0812	+12.19	+ 0.231	+2.921	+0.0616	−0.1169	−0.1797	+0.0373	−0.0001	18.09	− 3.03	+ 0	+0.7139
10	+68.23	0	+0.643	0	−35.19	0	+0.766	0	+3.267	+0.6000	0	0	−160.2	0	0	+1.000
4=45°	+ 8.60	0	+2.397	+0.0217	+ 5.729	0	−1.538	−0.0205	+0.2347	0	+0.0256	−0.0004	8.38	0	− 7.554	−0.1241
45	+ 6.15	+2.319	+2.268	+0.0133	+ 5.622	−1.565	−1.516	−0.0140	+0.1924	+0.0905	+0.0199	−0.0005	10.38	− 2.49	− 7.198	−0.0988
40	+ 3.68	+3.168	+1.964	+0.0044	+ 5.515	−2.438	−1.494	+0.0039	+0.1501	+0.1411	+0.0144	−0.0006	12.39	− 1.11	− 6.839	−0.0819
30	−11.48	+3.500	−3.231	−0.0948	+ 6.794	−3.438	+2.416	+0.0759	−0.4030	−0.0964	−0.0478	−0.0011	12.48	−10.03	− 3.665	+0.4113
20	−16.02	−5.641	−2.752	−0.0772	+12.13	+2.709	+2.753	+0.0995	+0.1908	−0.1895	−0.0361	−0.0001	50.54	+ 6.80	+ 6.668	+0.7190
10	+58.53	0	+0.707	0	−38.04	0	+0.707	0	+3.268	+0.6000	0	0	−158.3	0	0	+1.000
4=50°	+ 3.09	0	+1.709	+0.0284	+ 1.816	0	−1.457	−0.0273	+0.1854	0	+0.0382	+0.0002	+ 7.18	0	+ 3.972	−0.1088
50	+ 4.42	+1.981	+1.179	+0.0063	+ 3.693	−1.374	−1.120	+0.0084	+0.1051	+0.0118	−0.0003	+ 5.77	+ 1.40	+ 4.634	−0.0572	
40	+ 2.57	+4.287	−0.638	−0.0476	+ 3.650	−3.722	+0.325	+0.0406	−0.1481	+0.0826	−0.0419	−0.0012	20.51	− 6.83	+ 3.347	+0.1206
30	− 1.43	+2.920	−3.775	−0.0948	+ 4.372	−3.425	+2.461	+0.0662	−0.3819	−0.0757	−0.0497	−0.0012	− 7.78	−12.83	+ 3.041	+0.4149
20	− 9.34	−3.742	−1.141	−0.0706	+11.11	+ 0.07	+2.747	+0.0907	−0.1112	−0.1819	−0.0284	−0.0001	51.00	+ 6.80	+ 6.671	+0.7134
10	+53.46	0	+0.765	0	−41.80	0	+0.643	0	+3.218	+0.6000	0	0	−156.9	0	0	+1.000

33 CONCRETE SHELL ROOFS

v = the tangential displacement of the shell, considered positive in the direction of increasing values of ϕ;

w = the radial displacement of the shell, considered positive in the outward direction; and,

θ = the rotation of the shell, considered positive when the section rotates clockwise.

The effect of line loads is most pronounced in the vicinity of the edge at which the line load is applied, with the intensity of the internal forces generally diminishing as the distance from the applied forces is increased. When the chord width of the shell is small compared to the longitudinal span, the internal resisting forces produced by line loads applied at one edge do not diminish

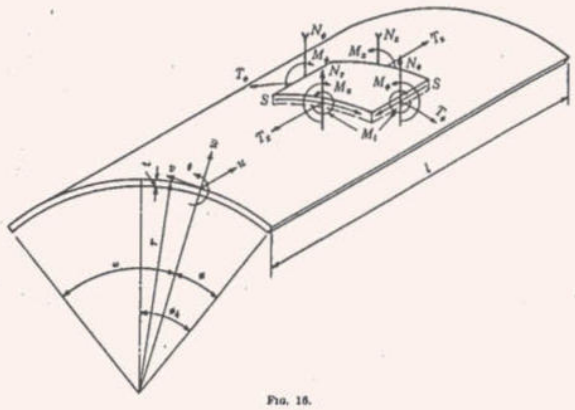
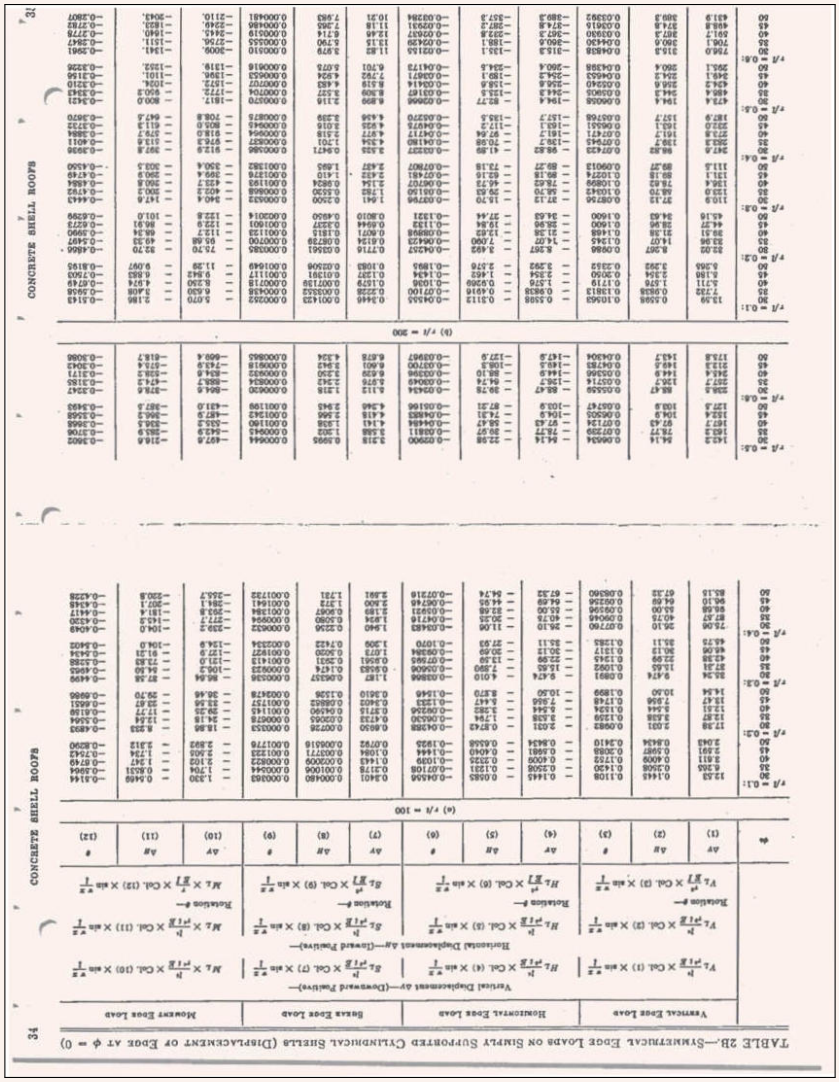


FIG. 16.

sufficiently fast so that the effect of a line load applied at one edge is felt at the farther edge. For this condition, the magnitude of angle subtended by the shell plays an important role in the distribution of the forces and must be considered; but, when the chord width is large compared with the longitudinal span, the effect of line loads on one edge is negligible on the other edge, and therefore line loads on each edge can be treated separately. There is no definite line of demarcation as to when the effect of line loads applied to one edge can be neglected at the other edge. However, computed values seem to indicate that, when r/l exceeds 0.6 with ϕ_1 more than 30°, each longitudinal edge can be treated individually.

Because of this indication, data showing the effect of line loads are presented in two groups of tables. The first group (Tables 2A and 2B) gives the force distribution and displacements at the edge in long barrels for symmetrical

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

F تصميم أسقف القشريات البرميلية

يكتسب هذا المثال، المأخوذ من (Portland Cement Association, 1954)، أهمية خاصة. فهو لا يوضح تحليل منشأ قشري وتصميمه فحسب، بل يبين أيضا معالجة حالة غير محددة استاتيكيا تستخدم فيها فكرة المرونة التي نوقشت سابقا في الفصل 25. يقسم المنشأ أولا إلى جزأين يحلل كل منهما مستقلا، ثم يستخرج الحل النهائي بفرض توافق الإزاحات عند إعادة جمع الجزأين.

يمكن النظر إلى هذا الإجراء على أنه مماثل لكمرة ترتكز على مساند نابضية مرنة، كما هو موضح في الصفحة 919.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

CONCRETE INFORMATION
PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

Design of Barrel Shell Roofs

Introduction

The roofing of large unobstructed areas with a minimum amount of material is a goal that has claimed the attention of engineers and architects for years. Of the various types of roof construction, the concrete shell offers the best possibility of attaining this desirable end. For example, shells only 2¼ in. thick spanning distances up to 150 ft. have been built. In Mexico a shell only 1½ in. thick cantilevers 36 ft. without the aid of any supporting members. In countries throughout the world, including the United States, Great Britain, Germany, Spain and India, there are examples of concrete shells having a smaller ratio of thickness to span than that provided by nature in its protective covering of an egg.

Although concrete shells are of relatively recent origin (the first experimental shell was built in 1920 at the Zeiss works in Germany while the first shell roof in the U.S. was constructed in 1933), the list of shell structures throughout the world is impressive. At least 500 such roofs of various shapes and sizes have been built. In the United States alone over 12 million sq.ft. of shell roofs have been constructed for structures varying from small industrial buildings to monumental buildings displaying new architectural forms.

Aware of the potentialities of this form of construction, the American Society of Civil Engineers in 1952 published Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. By a series of comprehensive tables this manual greatly simplifies the design of shell roofs. The following article is intended to supplement the manual by presenting in detail the design of a concrete shell roof for a typical industrial building.

Structural Behavior

Although the analysis of a shell in a strict sense is a three-dimensional problem, structural behavior of a shell can best be understood by comparing its action to that of an ordinary beam. Consider the curved longitudinal shell in Fig. 1 to be a beam supported by two transverse supports. This beam differs from the ordinary concept of a beam only in that its cross-section is a thin curved slab.

The application of load on the shell induces longitudinal fiber stresses similar to those induced in any homogeneous beam under load, and if the longitudinal span l (Fig. 1) is large compared to the transverse chord width, the variation of fiber stresses across any section is the same as that created in a beam; that is, it is linear from top to bottom. These fiber stresses designated in shell terminology as T_x, the force per unit width, are comparable to the f_c-stresses of conventional reinforced concrete design.

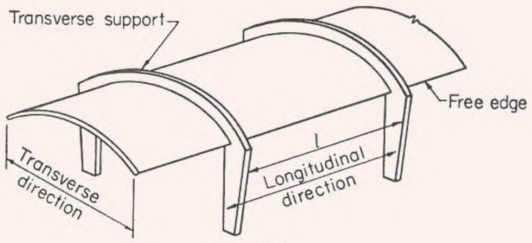


FIG. 1

As the ratio of chord width to span length increases, the variation of T_x-forces changes from straight-line to curvilinear. The extent of this change is shown in Fig. 2, where T_x-forces are plotted in the conventional manner. The ordinate represents vertical distance measured from the bottom of the shell in terms of $\frac{y}{h}$ and the abscissa indicates magnitude of T_x-forces. For convenience, curves are drawn for various values of $\frac{r}{l}$, the ratio of shell radius to span length, rather than for the previously discussed ratio of chord width to span length. Although the two ratios are interdependent, $\frac{r}{l}$ is a more suitable parameter since it includes the effect of shell rise as well as chord

The activities of the Portland Cement Association are limited to scientific research, the development of new or improved products and methods, technical service, promotion and educational effort (including safety work), and are primarily designed to improve and extend the uses of portland cement and concrete. The manifold program of the Association and its varied services to cement users are made possible by the financial support of its member companies in the United States and Canada, engaged in the manufacture and sale of a very large proportion of all portland cement used in these two countries. A current list of member companies will be furnished on request.

Printed in U.S.A.

COPYRIGHT 1954 BY PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

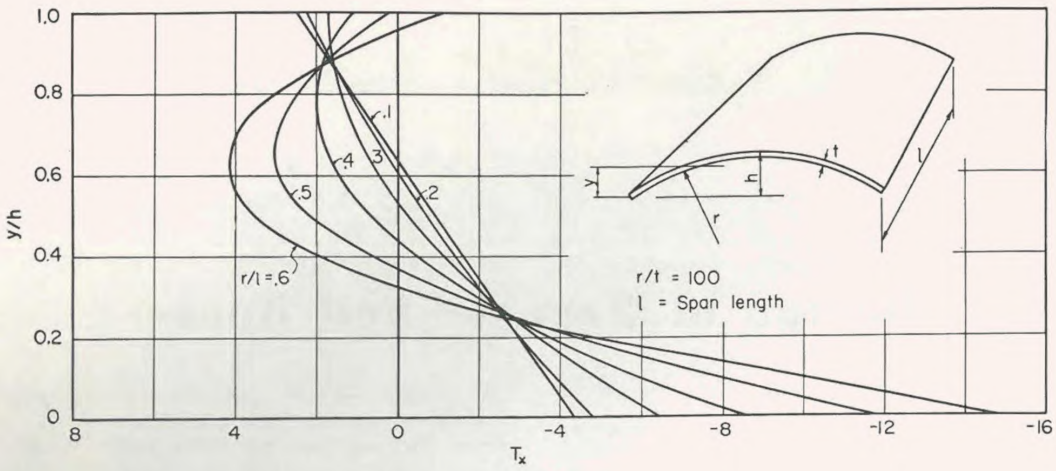


FIG. 2

width. Curves of Fig. 2 apply to a given load, the specific ratio of $\frac{r}{t} = 100$ in which t equals thickness, and a subtended angle of 80°. However, the trend shown is applicable to all shells. When $\frac{r}{l}$ is less than 0.2, the variation is almost linear, while for larger values of $\frac{r}{l}$, the force at the lower edge is greater than that given by ordinary beam theory.

The departure from ordinary flexural action is due basically to the presence of transverse bending in the shell. In the typical shell strip of unit width illustrated in Fig. 3a, moments of the external load and internal forces about any face such as AC must be in equilibrium. With face BD taken at the lower edge of the shell, moment M_ϕ must equal the difference between moment due to external load acting on the unit strip and that due to tangential shears S. These tangential shears are similar to the shearing stresses v in a beam.

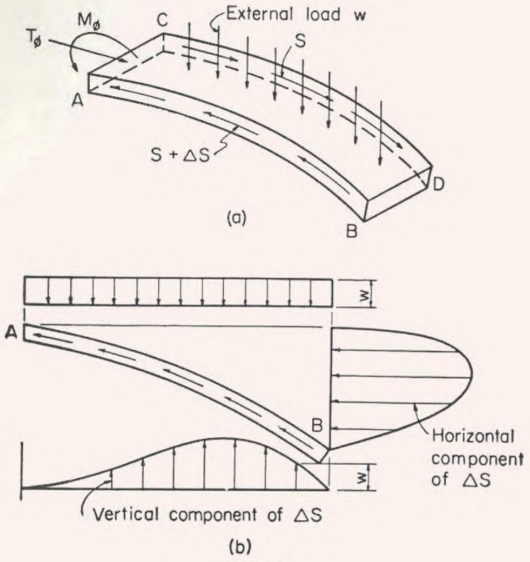


FIG. 3

For most distributed loads, moment produced by an external load and that produced by tangential shears are seldom equal. In fact, for usual distributed loads the moment M_ϕ is counterclockwise while the net moment of external load and tangential shears is clockwise. This can be inferred by inspecting Fig. 3b in which vertical and horizontal components of the difference in tangential shears acting on faces AB and CD have been plotted to the same scale as uniform external load. Statical moment of external load to the right of any point is clockwise. In contrast to this the vertical component of the tangential shears always produces a counterclockwise moment about that point. Throughout most of the shell this counterclockwise moment is larger than the statical moment of the external load, although the difference between the two is small since total upward and downward forces are of equal magnitude. As a result, addition of the clockwise moment due to the horizontal component always produces a clockwise final moment, and the resisting moment M_ϕ is counterclockwise. From this line of reasoning, it follows that uniformly distributed loads always produce tension in the upper fibers and compression in the lower fibers of a shell that is unrestrained along its edges.

Since transverse moment M_ϕ at any point is always counterclockwise or negative, point B (Fig. 3a) deflects down and inward relative to A. This differential deflection of point B induces longitudinal fiber stresses in the lower portion of the shell which are in excess of those given by ordinary beam theory. This condition forces a departure from straight-line stress variation.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

The increase in the tensile fiber stresses in the lower region of the shell cross-section, as shown in Fig. 2, must be accompanied by an increase in compressive stresses above the neutral axis so that the summation of forces in the longitudinal direction will be zero. Since moment produced by the longitudinal internal forces must still equal the external moment, this increase in magnitude of the internal forces is accompanied by a shortening of the moment arm between centroids of compressive and tensile forces. The effect of this action is to lower the position of the neutral axis.

If the curves in Fig. 2 are examined critically, it becomes apparent that as values of $\frac{r}{l}$ increase, the concentration of stresses in the vicinity of the lower edge indicates a decrease in the height of shell participating in beam action. In other words, for large values of $\frac{r}{l}$ the top or crown portion of the shell participates to only a minor extent in beam action. This action can be compared to the decreasing effectiveness of remote portions of a T-beam flange as the ratio of flange width to beam span increases.

Although the magnitude of tensile stress at the lower edge of the shell as indicated in Fig. 2 is sometimes quite sensitive to variations of $\frac{r}{l}$, total tensile area under these curves does not vary to the same degree. For example, the ratio of bottom fiber stresses for values of $\frac{r}{l}$ of 0.6 and 0.1 is 3.2 while the ratio of tensile areas below the neutral axis for these cases is only 1.4. Since reinforcement required depends essentially on total tensile area rather than maximum fiber stress, the design of a shell is not so sensitive a problem as the curves indicate. Moreover, curves of Fig. 2 are prepared for a single shell unrestrained at the lower edges. When these edges are restrained from deflecting down and inward by adjoining shells or edge beams, longitudinal stresses conform more closely to the straight-line variation.

Factors Affecting Shell Dimensions

An example is presented to illustrate the procedure involved in the analysis and design of a typical cylindrical concrete shell roof. A column spacing of 40x50 ft. is selected as being representative of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. A typical unit of the shell roof shown in Fig. 4 consists of three barrels, two exterior and one interior, spanning 50 ft. in the longitudinal direction. The barrels are supported by transverse frames spanning 40 ft. These dimensions result in a unit 100 ft. long and 120 ft. wide with shells continuous over alternate frames. Split frames are provided every 100 ft. This layout permits six re-uses of forms in a building 600 ft. long and limits the amount of concrete placed in one operation to about 200 cu.yd.

Shell thickness is taken as 4 in., which for most conditions is more than adequate to resist compressive forces and flexural moments induced in a shell. As a matter of fact, except in the vicinity of transverse frames, depth of

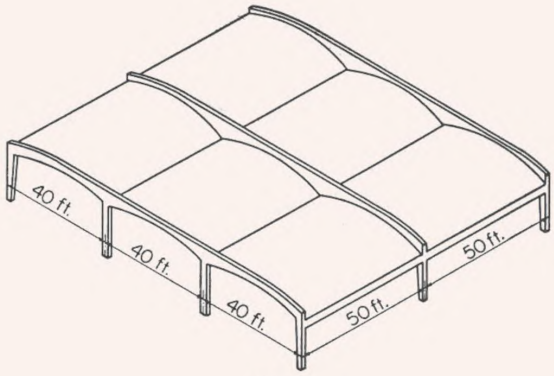


FIG. 4

the shell is controlled by requirements of adequate coverage for reinforcement. Usually, three to four layers of reinforcement are required, depending upon loading and type of shell; and with a minimum clear distance between reinforcement and shell surface of ¾ in., minimum depth is about 3 in. Many shells have been built abroad with a thickness of less than 3 in., such shells requiring close tolerance in the placement of reinforcement. While it might be argued that the increased labor involved in such circumstances is not justified by the reduction in concrete volume, a decrease in dead weight may be important since it is reflected almost directly in the amount of longitudinal and diagonal reinforcement required.

The relationship between dead weight and reinforcement follows from the fact that a shell acts essentially as a beam in the longitudinal direction with effective depth dependent upon the rise of the shell. For a given rise, the distance between centroids of tensile and compressive forces is almost unaffected by minor changes in shell thickness, and total longitudinal tension varies directly with the load. As a result, a reduction in dead load due to a decrease in shell thickness leads to a smaller total tension.

Transverse moment is also reduced in proportion to the load. However, this moment is resisted by the shell thickness itself so that a decrease in thickness allows little reduction in the amount of transverse reinforcement. In selecting shell thickness, its effect on reinforcement should be considered.

With shell thickness established, the next step involves the selection of rise (see Fig. 5), the distance from the lowest point of the structure (the bottom of the edge beams, if required) to mid-depth of the shell at the crown. For long-barrel, simply supported shells, a rise of one-tenth the longitudinal span generally gives sufficient curvature to produce a satisfactory stress condition and to avoid a large concentration of reinforcement in the valley. This ratio of one-tenth is simply a guide in preliminary layout work. For shells continuous in the longitudinal direction, rise can be less than one-tenth of the span.

In this example a rise of approximately 0.1 l is pro-

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

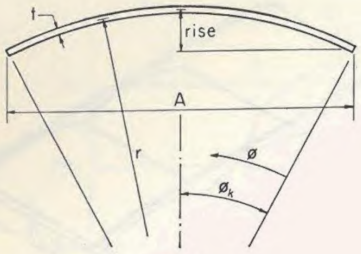


FIG. 5

duced by a shell radius of 45 ft. The rise of the interior barrel is determined by trigonometry from Fig. 5.

$$\text{rise} = r - \sqrt{r^2 - (0.5A)^2} = 45 - \sqrt{45^2 - 20^2} = 4.69 \text{ ft.}$$

The sine and cosine of one-half the angle subtended by the shell are:

$$\sin \phi_k = \frac{20}{45} = 0.4444$$

$$\cos \phi_k = \frac{(45 - 4.69)}{45} = 0.8958$$

Therefore ϕ_k, the angle from the crown to the edge of the shell, is equal to 26° 23′. Physical constants required in shell analysis are:

$$\frac{r}{l} = \frac{45}{50} = 0.9$$

$$\frac{rt}{l^2} = \frac{45 \times 4}{50^2 \times 12} = 0.006$$

Two separate analyses are required for the roof unit shown in Fig. 4 since support conditions at longitudinal edges of interior and exterior barrels are different. Edges of the interior barrel are restrained horizontally by adjoining exterior barrels, while outside edges of exterior barrels are restrained only by edge beams. The first analysis deals with the interior barrel and the second with exterior barrels.

Discussion of Tables in ASCE Manual No. 31

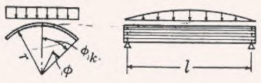
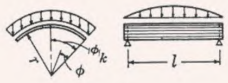
As discussed in ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*,* shell analysis resembles the analysis of indeterminate structures. The shell is first considered supported along both the transverse and longitudinal edges, a condition equivalent to assuming the shell determinate. Under this condition load is carried only by direct forces acting entirely in the plane of the shell, and reactions and displacements along the edges are inconsistent with actual end conditions. Therefore, corrective forces called edge or line loads are applied subsequently along the edges inducing bending moments as well as direct forces in the shell. Consequently, the analysis of a shell consists of two principal steps:

1. Determination of internal forces and edge reactions, assuming the shell to be statically determinate. This is called the "membrane analysis."

2. Determination of internal forces due to corrective loads applied along the edges of the shell, and the superposition of these forces on those resulting from the membrane analysis.

Table 1B and portions of Tables 3A and 3B reproduced from ASCE Manual No. 31 will be utilized. Table 1B deals with internal membrane forces and the displacements induced in a simply supported shell by sinusoidal surface loads. As shown in sketches at the top of the table, the load on the shell is assumed symmetrical about the crown. Coefficients in the left half are for a load uniform in the transverse direction, while coefficients in the right half are for a load varying as the weight of the shell. In both cases, load distribution in the longitudinal direction varies as $\sin \frac{\pi x}{l}$.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) Uniform Transverse Load	(b) Dead Weight Load
		
Longitudinal Force T_x—	$p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	$p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$
Shearing Force S—	$p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	$p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$
Transverse Force T_ϕ—	$p_{ur} \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	$p_{dr} \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$
Vertical Displacement Δ_V—	$\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	$\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$
Horizontal Displacement Δ_H—	$+p_{ur}\frac{l^4}{r^3tE}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	$+p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin\frac{\pi x}{l}$

$\phi_k - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924

*Published by the American Society of Civil Engineers.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

TABLE 3A.—Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

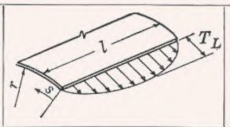
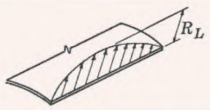
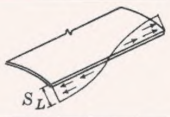
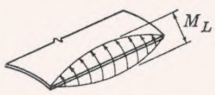
	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas for $n = 1$; for $n = 3$ Substitute $\frac{3\pi x}{l}$ Instead of $\frac{\pi x}{l}$			
	Longitudinal Force T_x— $T_L \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $T_L \times$ Col. (2) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $T_L \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $T_L \times t \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (6) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $R_L \times l \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L \times$ Col. (10) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L \times t \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (13) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (14) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (15) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times$ Col. (16) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$
	(b) $n = 1$			
				
$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
0.2	+ 8.039	−2.488	+0.769	+0.1217	−0.1224	+0.05501	+0.00539	+0.02779	+3.624	+0.169	+0.0851	+0.0378	−0.1135	+0.1348	+0.01418	+0.837
0.1	+15.393	−1.575	+0.933	+0.1301	−0.3353	+0.03740	+0.00163	+0.01407	+5.200	+0.515	+0.0589	+0.0227	−0.7959	+0.1008	+0.00452	+0.913
0.0	+24.846	0	+1.000	0	−0.6254	0	0	0	+7.129	+1.000	0	0	−1.8212	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.006:																
3.2	− 0.153	−0.209	+0.047	+0.1550	+0.0179	+0.00877	−0.00034	−0.00493	+0.017	−0.029	+0.0122	+0.0265	+0.0692	+0.0134	+0.00536	−0.002
1.6	− 0.103	+0.827	−0.230	−0.9042	−0.0591	−0.03918	+0.00239	+0.03457	−0.202	+0.094	−0.0522	−0.1554	−0.2359	−0.0467	−0.03216	+0.050
0.8	− 5.182	−1.161	−0.344	−0.8634	+0.1807	−0.00480	+0.02822	+0.07956	−0.481	−0.263	−0.0089	−0.0585	+0.3234	−0.0780	+0.03503	+0.417
0.4	− 1.030	−2.556	+0.347	−0.0900	+0.1227	+0.05977	+0.01810	+0.05372	+1.253	−0.197	+0.0890	+0.0380	+0.4651	+0.0860	+0.03538	+0.664
0.2	+ 6.371	−2.158	+0.778	+0.1355	−0.1270	+0.06253	+0.00677	+0.02870	+3.240	+0.182	+0.0955	+0.0382	−0.0872	+0.1294	+0.01514	+0.814
0.1	+12.071	−1.363	+0.936	+0.1232	−0.3444	+0.04246	+0.00205	+0.01463	+4.628	+0.523	+0.0655	+0.0224	−0.6882	+0.0975	+0.00484	+0.901
0.0	+19.407	0	+1.000	0	−0.6412	0	0	0	+6.328	+1.000	0	0	−1.6010	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.008:																
3.2	− 0.086	−0.178	+0.050	+0.1271	+0.0163	+0.00949	−0.00072	−0.00511	+0.022	−0.025	+0.0132	+0.0227	+0.0605	+0.0132	+0.00522	−0.002
1.6	− 0.131	+0.719	−0.240	−0.7409	−0.0562	−0.04265	+0.00383	+0.03459	−0.199	+0.084	−0.0567	−0.1360	−0.2087	−0.0432	−0.03372	+0.043
0.8	− 4.278	−1.094	−0.313	−0.6617	+0.1813	−0.00397	+0.03329	+0.07719	−0.414	−0.263	−0.0042	−0.0422	+0.2814	−0.0763	+0.03497	+0.385
0.4	− 0.770	−2.316	+0.367	−0.0315	+0.1217	+0.06531	+0.02116	+0.05188	+1.177	−0.187	+0.0988	+0.0410	+0.4211	+0.0803	+0.03618	+0.637

TABLE 3B.—Edge Displacements of Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas			
	Tangential Displacement v (Inward Positive)— $T_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{Et^2} \times$ Col. (10) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Radial Displacement w (Outward Positive)— $T_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (2) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^3}{Et^3} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l^2}{Et^3} \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Rotation θ (Counter Clockwise Positive)— $T_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{EI} \times$ Col. (6) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{EI} \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
$\frac{rt}{l^2}$	v (1)	w (2)	θ (3)	v (4)	w (5)	θ (6)	v (7)	w (8)	θ (9)	v (10)	w (11)	θ (12)
	(b) $n = 1$											
0.002	−77.30	−1.495	0.5712	1.495	0.03568	−0.01782	−11.91	−0.1861	0.05752	6.854	0.2138	−0.1710
0.003	−54.76	−1.409	0.4742	1.409	0.04535	−0.02027	− 9.393	−0.1943	0.05227	5.691	0.2433	−0.1795
0.004	−42.58	−1.342	0.4118	1.342	0.05332	−0.02206	− 7.909	−0.1990	0.04830	4.942	0.2648	−0.1851
0.006	−29.98	−1.243	0.3329	1.243	0.06635	−0.02459	− 6.176	−0.2041	0.04246	3.995	0.2951	−0.1920
0.008	−23.24	−1.169	0.2830	1.169	0.07690	−0.02634	− 5.164	−0.2062	0.03819	3.396	0.3161	−0.1962
0.010	−19.03	−1.110	0.2477	1.110	0.08582	−0.02764	− 4.485	−0.2069	0.03484	2.973	0.3317	−0.1990
0.015	−13.18	−1.000	0.1911	1.000	0.1036	−0.02983	− 3.452	−0.2058	0.02878	2.293	0.3580	−0.2032
0.020	−10.13	−0.9204	0.1565	0.9204	0.1174	−0.03120	− 2.853	−0.2029	0.02457	1.878	0.3744	−0.2055
0.025	− 8.241	−0.8582	0.1327	0.8582	0.1286	−0.03213	− 2.455	−0.1994	0.02142	1.593	0.3855	−0.2069
0.030	− 6.958	−0.8074	0.1152	0.8074	0.1381	−0.03279	− 2.168	−0.1956	0.01894	1.383	0.3935	−0.2078

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

An explanation of the reason for using a sinusoidal load instead of the actual uniform load on the shell is necessary. Although the membrane analysis could be made for a uniform load, the second principal step in shell analysis involving the application of corrective edge loads cannot be accomplished unless these edge loads are sinusoidal in shape. Therefore, to achieve compatibility of stresses produced by both edge and surface loads, the surface load is also assumed sinusoidal. While this sinusoidal load is different from the actual load, it can be made to approximate the effect of the uniform load.

To illustrate the similarity of flexural effects of both types of loads, a comparison is made of a simple beam supporting first a sinusoidal load (see Fig. 6) and then a uniform load.

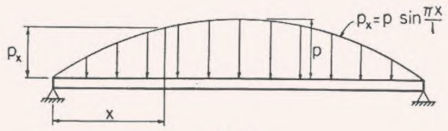


FIG. 6

Expressions for shear, moment, slope and deflection based on the sinusoidal loading of $p = 1$ are:

$$p_x = p \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

$$V = \int p_x dx = p \int \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{2}$$

$$M = \int V dx = p \int -\frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

$$\theta = \int \frac{M dx}{EI} = \frac{p}{EI} \int -\frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = +\frac{pl^3}{EI\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

$$\Delta = \int \theta dx = \frac{p}{EI} \int \frac{l^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{p}{EI} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

Using these expressions, the following comparison is made with the uniform load condition:

℄ Moment (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^2} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.128$
℄ Moment (uniform)	$\sim \frac{1}{8}$	$= 0.125$
℄ Deflection (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^4} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.0130$
℄ Deflection (uniform)	$\sim \frac{5}{384}$	$= 0.0130$
Support Shear (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.405$
Support Shear (uniform)	$\sim \frac{1}{2}$	$= 0.500$

In this comparison, the centerline or maximum ordinate of the sinusoidal load equals $1.0 \times \frac{4}{\pi}$ while the uniform load has an intensity of 1.0. The maximum ordinate of the sinusoidal load must be of greater intensity than the uniform load if the stresses produced by the two loads are to be similar, and the factor $\frac{4}{\pi}$ used for this purpose is derived from a Fourier Analysis. Results of this comparison indicate that good agreement is obtained for moment and deflection of beams with only the first term of the Fourier Series. This same trend holds for the shell.

Several terms of the Fourier Series may be added to approximate the uniform longitudinal load. Each of these terms represents a partial load having an intensity varying as $\frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}$ where $n = 1, 3, 5$, etc. Figs. 7a, 7b and 7c illustrate graphically the first three terms. Fig. 7d shows

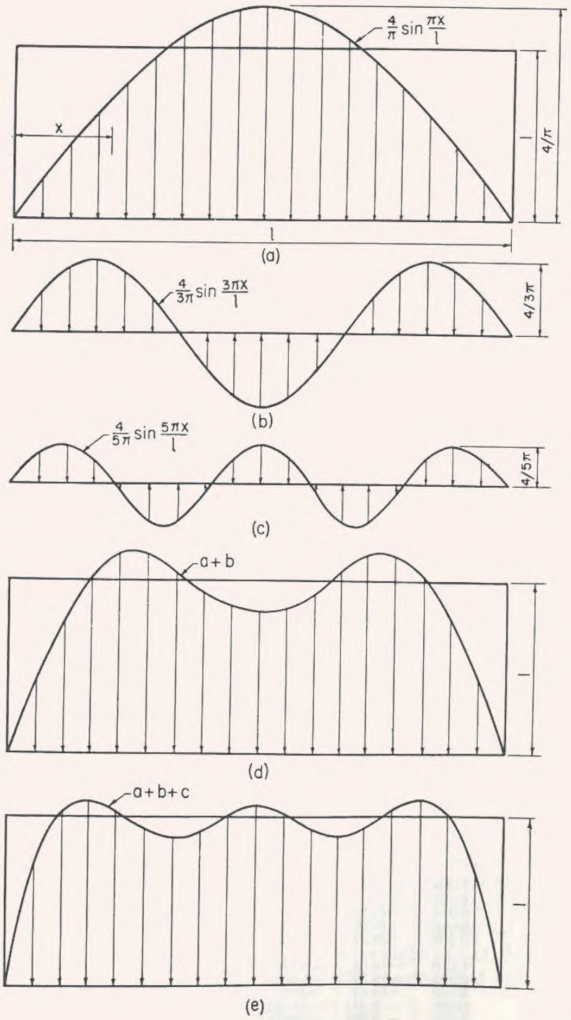


FIG. 7

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

the load resulting from the addition of the first two terms while Fig. 7e is the combination of the first three terms. The sum of all terms of the series would closely approximate the straight line $p = 1$. However, the preceding comparison indicates that the use of many terms is unnecessary and for clarity the computations for this example will be made in detail for only the first term where $n = 1$, as given in Table 1B.

Internal forces and displacements are defined as follows:

T_ϕ = Direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile.
T_x = Direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile.
S = Longitudinal shearing force, considered positive when creating tension in the direction of increasing values of x and ϕ.
$\triangle_V$ = Vertical displacement, considered positive when downward.
$\triangle_H$ = Horizontal displacement, considered positive when inward.

Transverse and longitudinal distribution of membrane forces created by a unit uniform transverse load or a unit dead load may be determined from Table 1B. Internal forces T_x, T_ϕ and S are obtained by means of formulas listed in the table heading in conjunction with tabulated coefficients. The transverse distribution of internal forces is given according to the column headed $\phi_k - \phi$, the central angle measured from the crown of the shell. ϕ_k is equal to one-half the angle subtended by the barrel while the angle ϕ is measured from the bottom edge as shown in Fig. 5. The angle $\phi_k - \phi$ is, therefore, the angle from the crown to any point designated by ϕ. For example, coefficients for values at the crown are taken at $\phi_k - \phi = 0°$.

The distribution of internal forces in the longitudinal direction varies according to trigonometric functions in formulas in the heading of Table 1B. For the sinusoidal surface load, forces T_ϕ and T_x vary as $\sin \frac{\pi x}{l}$ in which $\frac{\pi x}{l}$ is measured in radians. When $x = \frac{l}{2}$, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$. When $x = 0$ or l, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin 0°$ or $180°$ and is equal to zero. Values at intermediate points can be obtained from any trigonometric table, but values at $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$ are easily determined since they correspond to sin 30°, 45° and 60°, respectively, which have values of 0.50, 0.707 and 0.866.

As in a beam, shear is maximum at the support and zero at midspan, the shearing force varying as $\cos \frac{\pi x}{l}$. This function equals $+1$ and -1 at the supports and zero at midspan.

Two sets of coefficients and formulas are given in Table 1B, one for use with uniform live load p_u and one for dead load p_d. To obtain the magnitude of various membrane forces due to either load, coefficients must be multiplied by factors given in the formulas. For example, the coefficient of T_x selected for a specific value of $\phi_k - \phi$ must be multiplied by the load p_u or p_d, the constant $\left(\frac{l}{r}\right)^2$, the shell radius r, and the factor $\frac{4}{\pi}$. Coefficients in Table 1B are applicable to any shell irrespective of its proportions.

Coefficients for determining internal forces and moments due to line loads applied along one edge of a shell are given in Tables 3A and 3B, which are reproduced in part here. These tables are applicable to shells having a ratio $\frac{r}{l}$ exceeding 0.6 and are therefore appropriate for this example where $\frac{r}{l}$ equals 0.9. Another set of tables, 2A and 2B, presented in ASCE Manual No. 31 but not reproduced here, gives effects of symmetrical edge loads on barrel shells having $\frac{r}{l}$ less than 0.6.

This arbitrary division is one of convenience but does have a reasonable basis. It is only when $\frac{r}{l}$ is approximately 0.6 or less that line loads applied along one edge create significant stresses and displacements at the opposite edge. In this case, the arc length of the shell has an important influence on stress distribution but when $\frac{r}{l}$ is 0.6 or more, stresses are independent of arc length. For this reason coefficients of Tables 2A and 2B are given in terms of the subtended angle while those of Tables 3A and 3B are not.

When $\frac{r}{l}$ is less than 0.6, forces and displacements at the far edge of the shell produced by line loads at the near edge must be made to agree with actual boundary conditions. This could be done by applying another set of loads at the far edge, these loads in turn creating inconsistent forces at the near edge. However, the operation involving successive correction of these diminishing forces can be replaced by a single step if symmetrical loads are applied simultaneously at both longitudinal edges. Tables 2A and 2B are developed for this type of loading.

As $\frac{r}{l}$ increases beyond 0.6, the negligible far edge effects do not require correction and analysis requires only one application of line loads at each edge with final superposition of forces resulting from both loadings. For a symmetrically loaded shell computations are required for only one edge since results are applicable in reverse order for loads at the opposite edge. While Tables 3A and 3B covering the case of $\frac{r}{l} \geq 0.6$ could have been prepared for simultaneous application of symmetrical edge loads as in Tables 2A and 2B, their range or usefulness would have been limited by such an arrangement. These tables are therefore developed for loads applied at only one edge of the shell.

Coefficients in Table 3A are tabulated for the four different types of unit edge loads indicated by sketches in the table heading and give four effects of each load. These effects, which may be evaluated at the transverse locations indicated by the term $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, include the bending moment M_ϕ and the three forces T_x, T_ϕ and S. A large range of shell proportions is included by means of the

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

term $\frac{rt}{l^2}$ varying from 0.002 to 0.1. Small values are applicable to shells with proportions in the vicinity of $\frac{r}{t} = 200$ and $\frac{r}{l} = 0.6$, i.e., $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \frac{t}{r} = \frac{rt}{l^2} = 0.0018$, while large values correspond to short shells having a radius several times the longitudinal span. It should be noted that Tables 3A and 3B include two sinusoidal loadings, one with $n=1$ and one with $n=3$, since the second loading term becomes more important with increasing values of $\frac{r}{l}$.

Table 3B provides data for evaluating radial, tangential and rotational displacements due to four different edge loads. This and previously mentioned tables will be used in the design example that follows.

TABLE I—Internal Forces in an Interior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$ / $\frac{s}{\phi}$ / $\phi_k - \phi$	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′	Multipliers	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′
Load	Coefficients								Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.9970	−0.9551	−0.8930	−0.8460	− 0.8214	− 0.8017	1,720		− 1,720	− 1,640	− 1,540	− 1,460	− 1,410	− 1,380
② p_d		−0.9985	−0.9772	−0.9449	−0.9196	− 0.9063	− 0.8952	2,860		− 2,860	− 2,790	− 2,700	− 2,630	− 2,590	− 2,560
③ Σ										− 4,580	− 4,430	− 4,240	− 4,090	− 4,000	− 3,940
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	5,760	+ 270	− 1,330	− 1,980	+ 2,000	+ 4,480	+ 5,390	+ 5,760
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	135,400	− 50	+ 320	+ 3,820	+ 2,450	+ 920	+ 280	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	1,620	+ 20	− 80	− 10	+ 140	+ 150	+ 110	0
⑦ M_L	+0.00536	−0.03216	+0.03503	+0.03538	+0.01514	+ 0.00484	0	−7,000	− 40	+ 220	− 250	− 250	− 110	− 30	0
⑧ Σ									+ 200	− 870	+ 1,580	+ 4,340	+ 5,440	+ 5,750	+ 5,760
⑨ Forces due to line loads at far edge									+ 5,760	− 760	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨										− 6,210	− 3,210	+ 150	+ 1,500	+ 1,940	+ 2,020
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.0332	−0.1935	−0.2933	−0.3422	− 0.3658	− 0.3791	1,910		− 60	− 370	− 560	− 650	− 700	− 720
② p_d		−0.0222	−0.1322	−0.2072	−0.2485	− 0.2690	− 0.2826	3,170		− 70	− 420	− 660	− 790	− 850	− 900
③ Σ										− 130	− 790	− 1,220	− 1,440	− 1,550	− 1,620
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	5,760	− 1,200	+ 4,760	− 6,690	−14,700	−12,400	− 7,850	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	135,400	+ 1,190	− 5,310	− 650	+ 8,100	+ 8,470	+ 5,750	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	1,620	− 50	+ 150	− 430	− 320	+ 290	+ 850	+ 1,620
⑦ M_L	+0.0134	−0.0467	−0.0780	+0.0860	+0.1294	+ 0.0975	0	−7,000	− 90	+ 330	+ 550	− 600	− 910	− 680	0
⑧ Σ									− 150	− 70	− 7,210	− 7,520	− 4,550	− 1,930	+ 1,620
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 1,620	+ 1,800	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨										+ 1,600	− 9,400	− 9,540	− 6,410	− 3,730	0
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.3021	−0.2763	−0.2387	−0.2104	− 0.1954	− 0.1867	2,120		− 640	− 590	− 510	− 450	− 430	− 400
② p_d		−0.2023	−0.1987	−0.1918	−0.1863	− 0.1837	− 0.1771	3,520		− 710	− 700	− 680	− 660	− 650	− 620
③ Σ										− 1,350	− 1,290	− 1,190	− 1,110	− 1,080	− 1,020
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	5,760	− 880	− 590	−29,800	− 5,930	+36,700	+69,500	+112,000
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	135,400	+ 2,420	− 8,000	+24,500	+16,600	−17,200	−46,600	− 86,800
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	1,620	+ 30	− 330	− 780	+ 2,030	+ 5,250	+ 7,500	+ 10,300
⑦ M_L	+0.0692	−0.2359	+0.3234	+0.4651	−0.0872	− 0.6882	− 1.6010	−7,000	− 480	+ 1,650	− 2,260	− 3,260	− 610	+ 4,820	+ 11,200
⑧ Σ									+ 1,080	− 7,270	− 8,340	+ 9,440	+25,360	+35,220	+ 46,700
⑨ Forces due to line loads at far edge									+46,700	−10,400	+ 200	+ 1,900	+ 2,000	+ 2,000	+ 1,500
⑩=③+⑧+⑨										−19,020	− 9,430	+10,150	+26,250	+36,140	+ 47,180
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,920	+ 300	− 1,740	− 1,660	− 170	+ 260	+ 240	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	45,200	− 220	+ 1,560	+ 3,600	+ 2,430	+ 1,300	+ 660	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	540	+ 10	− 80	− 30	+ 20	+ 20	+ 10	0
⑦ M_L	−0.002	+0.050	+0.417	+0.664	+0.814	+ 0.901	+ 1.000	−2,330	+ 50	− 120	− 970	− 1,550	− 1,900	− 2,100	− 2,330
⑧ Σ									+ 90	− 380	+ 940	+ 730	− 320	− 1,190	− 2,330
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 2,330	− 50	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨										− 430	+ 550	+ 590	− 355	− 1,175	− 2,280

①②③ Surface loads
④⑤⑥⑦⑧ Line loads applied at near edge

PAGE 8

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Analysis of Simply Supported Interior Barrel Shell

A—Membrane Analysis

Data necessary for this analysis are:

Live load p_u = 30 psf
Dead load p_d = 50 psf
Radius r = 45 ft.
$\frac{l}{r} = \frac{50}{45}$ = 1.11
$\left(\frac{l}{r}\right)^2$ = 1.238

In the membrane analysis external surface loads, dead and live, induce three forces throughout the shell: T_x, the force in the longitudinal direction; T_ϕ, the force in the transverse direction; and S, the tangential shearing force. For maximum values, T_x and T_ϕ are found at mid-span or at $x = \frac{l}{2}$, while S is found at the supports where $x = 0$ or $x = l$.

The magnitude of these internal forces is given in Table I (Roman numerals are used for the computed tables to differentiate them from Manual tables) at various transverse points, each location being expressed in four different terms. The first, $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, is one of the parameters of Table 3A and values are selected to agree with those listed in Table 3A. Values of the other three terms s, ϕ and $\phi_k - \phi$ agree accordingly. For example, if $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.1$,

$$s = 0.1\sqrt[4]{rtl^2} = 0.1\sqrt[4]{(45)(0.333)(50^2)}$$

or s = 1.391 ft.

Also $\phi = \frac{s}{r}$ (in radians)

$$\phi = \frac{1.391}{45} \times \frac{180}{\pi} = 1.77°$$

The point indicated in Table I by s = 44.5 ft. and $\phi = 56°40'$ lies slightly beyond the far edge of the shell. Although forces determined at this point are meaningless for the shell under consideration, they are used for interpolation of forces at the far edge.

Membrane forces are determined by means of equations in the heading of Table 1B. The combination of all terms in any one equation with the exception of the coefficient is called the multiplier. Multipliers for this example are:

For live load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.238 = 2120$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.11 = 1910$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 = 1720$

For dead load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.238 = 3520$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.11 = 3170$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 = 2860$

Coefficients for these multipliers are taken from columns (1), (2), (3) and (7), (8), (9) for live and dead loads, respectively. For example, to find the live load coefficient for the force T_x at $\phi = 7°\,5'$ or $\phi_k - \phi = 19°\,18'$, enter column (1) of Table 1B. Sufficient accuracy is achieved by interpolating for an angle $\phi_k - \phi = 19°$ giving the coefficient -0.2387. Multiplying this coefficient by the multiplier 2120 gives a force T_x of 510 lb. per ft.

The same procedure is repeated at various locations across the shell to determine the forces T_ϕ, T_x and S induced by both dead and live loads. Results are tabulated in rows ① and ② of Table I, while rows ③ give a summation of ① and ②. Slide rule accuracy is sufficient in these computations.

B—Correction for Edge Loads

Complete shell analysis requires that final forces and displacements along all edges be consistent with actual boundary conditions. Since the membrane analysis assumes the existence of imaginary edge supports, membrane forces must be corrected. This correction constitutes the second principal step of shell analysis.

The sequence of operations involved in the second step requires determination of magnitude and direction of corrective line loads applied at the edges and then evaluation of the internal forces which they produce. For a single barrel shell without edge beams—that is, one in which longitudinal edges are free—the only condition to be satisfied is that the algebraic sum of corrective line loads and membrane forces at the edges equal zero. In other words, final corrective line loads T_L and S_L are equal and opposite to membrane forces T_ϕ and S and therefore are known upon completion of the membrane analysis.

In contrast to this simple analysis for a single barrel, determination of line loads for a multiple barrel roof is more complicated. Not only must membrane forces be satisfied but, in addition, displacements of common edges of adjacent barrels must coincide. For this reason final corrective line loads seldom equal membrane forces and a special notation T_{LM} and S_{LM} is introduced for line loads which satisfy only the edge forces of the membrane analysis. Final line loads T_L and S_L include T_{LM} and S_{LM} as well as loads effecting coincident edge displacements.

There are various ways of evaluating line loads for the multiple barrel roof and although the method presented here is not the most direct, it is considered the least complicated. Initially, each barrel is assumed separated from the rest of the structure and is treated as a single barrel. Following a membrane analysis, corrective line loads T_{LM} and S_{LM} producing zero reactions are applied along the longitudinal edges of each barrel. As previously mentioned, determination of these line loads does not require a separate computation and in this example values of 3940 lb. per ft. for T_{LM} and 1620 lb. per ft. for S_{LM} are taken directly from rows ③ of Table I at $\phi = 0°$. The interior barrel is in static equilibrium when these loads are applied. However, individual barrels still must be brought together in the multiple barrel system by additional line loads applied to each barrel. Internal forces produced by these additional loads then are super-

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

imposed on the effects of T_{LM} and S_{LM}.

Consistency in displacements of adjacent edges is achieved by making longitudinal, vertical, horizontal and angular displacements of one edge equal to those of the other. Generally, longitudinal stresses T_x/t at common edges are made equal to each other instead of longitudinal displacements since edge displacements agree if corresponding stresses are identical. The remaining three displacement equations are established for each edge in terms of the unknown line loads T_L, R_L, S_L and M_L, coefficients taken from Table 2B or 3B and specified physical properties of the shell.

Equating like displacements of adjoining barrel edges yields four equations containing eight unknowns, these unknowns including four line loads applied to each adjacent edge. The eight unknowns can be reduced to four by statics. Because these line loads are internal, the algebraic sum of their components in any direction must equal zero. Moment and tangential shear acting on one edge must be equal and opposite to similar forces acting on the adjoining edge, and the sum of the vertical and horizontal components of radial and tangential line loads R_L and T_L applied to adjacent edges must equal zero. By inserting these conditions, the four equations can be expressed in terms of four unknowns and a simultaneous solution gives numerical values for the line loads.

The general procedure of establishing four displacement equations to determine the unknowns R_L, T_L, S_L and M_L is not always necessary. When adjacent barrels are symmetrical in shape and loading as in this design example, analysis can be simplified to a consideration of only one barrel. It should be understood that line loads applied to one barrel are applied in an opposite sense to the adjacent barrel. Agreement in displacement of common edges is obtained from four known conditions: that no horizontal or angular displacement of the edges takes place and that tangential and vertical shears along common edges are equal to zero.

The first two conditions are evident from symmetry in shape and loading. The latter two conditions also can be deduced from physical aspects of the problem. With adjacent barrels identical and equally loaded, variation of longitudinal stress is symmetrical about the common edge and tangential shear at the edge must equal zero. Vertical shear equal to the sum of the vertical components of line loads R_L and T_L, must also equal zero since its presence would indicate that load on one shell was being carried in part by the adjoining barrel, an impossible condition because of symmetry.

The four known conditions can be summarized as:

$$\begin{aligned} \triangle_H &= 0 \\ \theta &= 0 \\ S &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \end{aligned}$$

Numerical expressions are derived for the design example from these conditions.

Expressing $\triangle_H = 0$ in terms of displacements given in Table 3B gives:

$$\triangle_H = 0 = v \cos \phi_k - w \sin \phi_k \tag{6}$$

where v is the tangential displacement of the shell considered positive in the direction of increasing values of ϕ, and w the radial displacement considered positive when outward. Sign convention for this equation arbitrarily defines displacement to the left as positive. The trigonometric relationship is shown in Fig. 8.

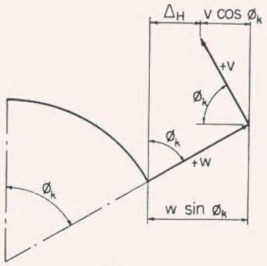


FIG. 8

Evaluation of v and w is made by combining displacement contributions of T_{LM} and S_{LM} with those of the four line loads which unite displaced edges of adjoining barrels. T_{LM} and S_{LM} are part of the final edge loads T_L and S_L, respectively, and are combined with them in equation (7). Tangential and radial displacements due to the four line loads T_L, R_L, S_L and M_L are given in the heading of Table 3B. Equation (7) is given at $x = \frac{l}{2}$ and for convenience is divided by the factor $\frac{l}{Et}$.

$$\begin{aligned} \triangle_H = 0 = \Big[&(T_L + 3940) \times \text{Col. (1)} + R_L \times \tfrac{l}{t} \times \\ &\text{Col. (4)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (7)} + M_L \times \tfrac{1}{t} \times \\ &\text{Col. (10)} \Big] \cos \phi_k - \Big[(T_L + 3940) \times \text{Col. (2)} + \\ &R_L \times \tfrac{l}{t} \times \text{Col. (5)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (8)} + \\ &M_L \times \tfrac{1}{t} \times \text{Col. (11)} \Big] \tfrac{l}{t} \sin \phi_k \end{aligned} \tag{7}$$

Substituting coefficients of Table 3B given for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ and for the first sine loading ($n = 1$) together with dimensional and trigonometric values gives:

$$\begin{aligned} 0 = \Big[&(T_L + 3940)(-29.98) + (R_L)(150)(1.243) + \\ &(S_L + 1620)(-6.176) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(3.995) \Big] 0.8958 - \\ \Big[&(T_L + 3940)(-1.243) + (R_L)(150)(0.06635) + \\ &(S_L + 1620)(-0.2041) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(0.2951) \Big] (150)(0.4444) \end{aligned} \tag{7a}$$

which reduces to:

$$0 = 233{,}700 + 56.00\, T_L - 496.4\, R_L + 8.073\, S_L - 16.09 \frac{M_L}{t} \tag{7b}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

The term $\frac{M_L}{t}$ is kept separate for convenience in the use of Table 3A.

The condition of zero edge rotation for the interior barrel ($\theta = 0$) is expressed by combining rotational effects of edge loads T_L, R_L, S_L and M_L taken from the heading of Table 3B. Rotation is determined at midspan where $x = \frac{l}{2}$ and the entire equation is divided by $\frac{lt}{EI}$.

$$\theta = 0 = (T_L + 3940) \times \text{Col. (3)} + R_L \times \frac{l}{t} \times \text{Col. (6)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (9)} + M_L \times \frac{1}{t} \times \text{Col. (12)} \quad (8)$$

Substituting dimensions and coefficients from Table 3B gives:

$$0 = (T_L + 3940)(0.3329) + (R_L \times 150)(-0.02459) + (S_L + 1620) \times 0.04246 + \left(\frac{M_L}{t}\right)(-0.1920) \quad (8a)$$

which simplifies to:

$$1380 + 0.3329\,T_L - 3.689\,R_L + 0.04246\,S_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0 \quad (8b)$$

Static equilibrium of the interior barrel was satisfied by application of loads T_{LM} and S_{LM}. To maintain this stability the summation of vertical components of line loads R_L and T_L must equal zero. The expression for $\Sigma V = 0$ at one edge is developed from the sketch of Fig. 9.

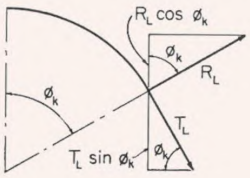


FIG. 9

Assuming the downward direction positive gives:

$$-R_L \cos \phi_k + T_L \sin \phi_k = 0 \quad (9)$$

$$-R_L \times 0.8958 + T_L \times 0.4444 = 0 \quad (9a)$$

$$T_L = 2.016\,R_L \quad (9b)$$

As previously discussed, shear is zero at the edges of the interior barrel in this example. Since shear equilibrium is produced by the load S_{LM} of 1620 lb. per ft. which resists shear resulting from the membrane analysis, the only other shearing force involved, line load S_L, along these edges must equal zero.

Substituting the value of T_L from equation (9b) and setting $S_L = 0$, equations (7b) and (8b) become:

$$233{,}700 - 383.5\,R_L - 16.09\,\frac{M_L}{t} = 0$$

$$1380 - 3.017\,R_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0$$

Solving these simultaneously gives:

$$R_L = +903 \text{ lb. per ft.}$$

$$\frac{M_L}{t} = -7000 \text{ ft. lb. per ft.}^2$$

and from equation (9b):

$$T_L = 1820 \text{ lb. per ft.}$$

These line loads satisfy requirements of transverse continuity along longitudinal edges of the interior barrel. Since T_{LM} acts in the same direction as the force T_L these two forces are combined to form a final T_L of $+1820 + 3940 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the value of S_L is added to S_{LM} to give a final S_L of $0 + 1620 = +1620$ lb. per ft. The sign convention for T_L and S_L is the same as that for T_ϕ and S, respectively. Positive R_L is in the outward direction while positive M_L produces compression at the upper surface of the shell.

Internal forces resulting from edge loads are determined by equations in the heading of Table 3A. In these equations the terms $\sin \frac{\pi x}{l}$ and $\cos \frac{\pi x}{l}$ equal 1.0 at $x = \frac{l}{2}$ and $x = 0$, respectively. As previously discussed, the multiplier is the combination of all terms in one equation with the exception of the coefficient. For example, the multiplier for computing internal forces T_ϕ, S and T_x resulting from line load T_L equals $T_L \times 1.0 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the multiplier for these same forces due to R_L equals $R_L \times \frac{l}{t} \times 1.0 = +903 \times \frac{50}{0.333} \times 1.0 = +135{,}400$ lb. per ft., while the multiplier for moment M_ϕ due to the edge moment M_L is $M_L \times 1.0 = \frac{M_L}{t} \times t \times 1.0 = -7000 \times 0.333 \times 1.0 = -2330$ lb. per ft. All multipliers are tabulated in the center column of Table I.

Coefficients taken from Table 3A for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ are listed in rows ④ through ⑦ at the left side of Table I. These coefficients times appropriate multipliers give the forces T_ϕ, T_x, S and M_ϕ at the points indicated by $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$. These forces are listed at the right side of the table.

For illustration, the internal force T_ϕ produced by line load T_L at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is obtained by multiplying the coefficient $+0.347$ by the multiplier $+5760$ to give $+2000$ lb. per ft. Other values of T_ϕ at this location due to line loads R_L, S_L and M_L are determined in a similar manner and all are added algebraically in row ⑧ and plotted in Fig. 10 to show the variation of T_ϕ across the shell. Similar curves for T_x, S and M_ϕ are also included. Although values are not available for plotting between $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.6$ and 3.2, curves can be estimated with a satisfactory degree of accuracy since the magnitude of forces between these values becomes smaller and curvatures diminish.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

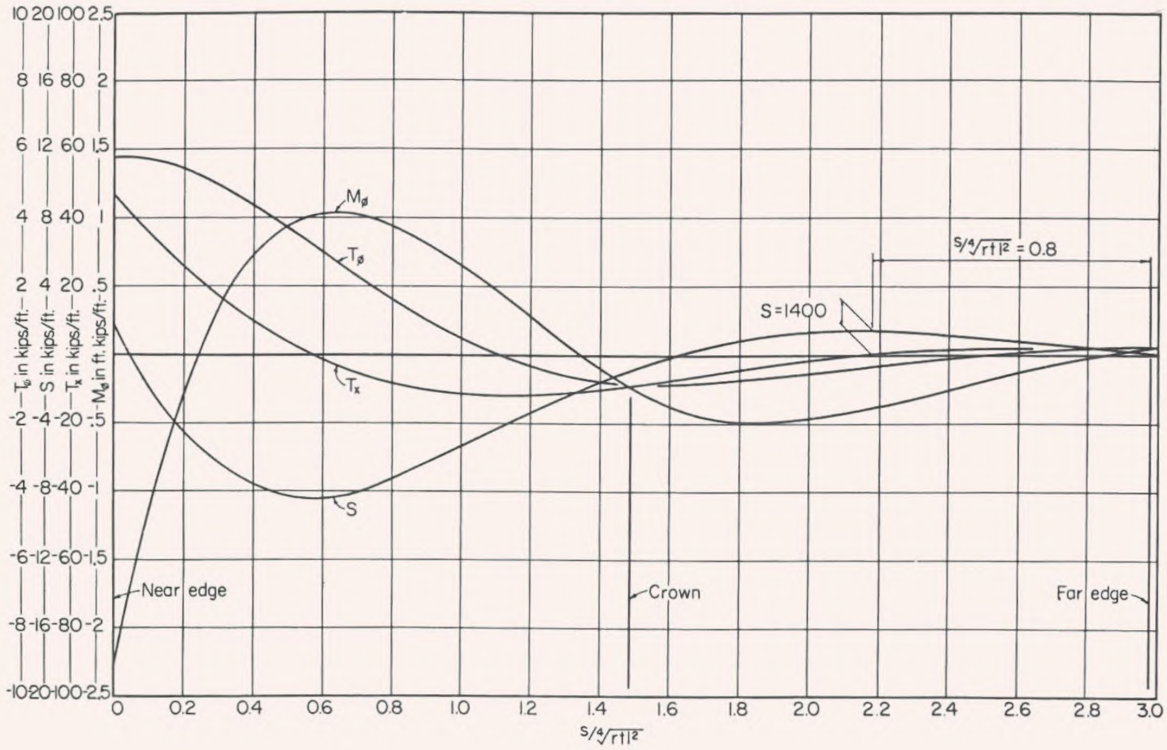


FIG. 10

The curves of Fig. 10 involve line loads applied only at the near edge. Symmetry of structure and loading allows the use of these same curves for determining forces resulting from line loads acting at the far edge. This is done by reversing the abscissa scale of Fig. 10 so that the right edge represents the near edge of the shell and then scaling directly from the curves. For example, the magnitude of force S at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.8$ (measured on the reversed scale) due to line loads at the far edge is scaled as 1400 lb. per ft. Forces determined in this manner are tabulated in rows ⑨ of Table I.

Although algebraic signs tabulated for shear in row ⑧ of Table I agree with those of the S curve in Fig. 10, signs in row ⑨ are opposite to those indicated by this curve. This is due to the fact that the shear sign convention defined on page 9 is related to the origin of the coordinate axes. The signs of coefficients for line loads are based on a coordinate system originating at the loaded edge. Therefore, line loads applied at near and far edges have different referent axes, and positive shears due to these two loads will be opposite in direction.

The difference between positive shear directions can be seen by reference to Fig. 11 in which face BB' is assumed to be parallel to and facing the near edge of the shell. Shear resulting from line loads acting at the near edge is referenced to the coordinate origin at the right and is positive as shown in conformance with the definition that it produce tension in the direction of increasing values of ϕ and x, or along diagonal AB. For this condition positive shear on face BB' acts toward the origin of x.

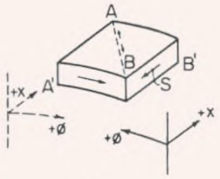


FIG. 11

Similarly, shear produced by line loads acting at the far edge is referenced to the origin at the left and when positive is directed toward the origin of x on face AA' which is nearest to the loaded edge. In this case shear on face BB' is opposite to that shown. Consequently, on a face such as BB', positive shear due to line loads at the far edge is opposite in direction to positive shear caused by line loads at the near edge. Direction is made consistent by changing signs.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Rows ⑩ of Table I give final internal forces in the simply supported interior barrel. These are obtained by summation of membrane forces and effects of line loads applied at both longitudinal edges. Variation of these forces is shown graphically in Fig. 12.

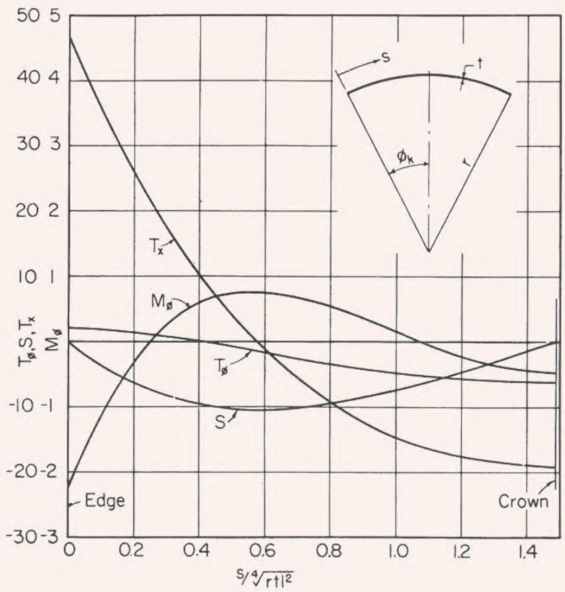


FIG. 12

Statical Check of Forces in Interior Barrel

A statical check of internal forces should be made as a precautionary measure against numerical errors. The sum of horizontal T_x-forces across a transverse section of the barrel must equal zero, the sum of vertical components of the shearing force S at each support must equal one-half the total load on the shell, and the total internal longitudinal moment at midspan due to the T_x-forces must equal the external moment.

The summation of horizontal forces at midspan is made by means of Simpson's rule. This method, useful in integrating non-linear functions, expresses area as:

$$\frac{\triangle L}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + y_n)$$

in which y_o to y_n are equally spaced ordinates of the curve enclosing the area, n is an even number, and $\triangle L$ the distance between ordinates. In this example, the arc distance from shell edge to crown is divided into four equal parts. The angle ϕ_k was shown to be 26°23′ (26.38°) and its value in radians is obtained by multiplying by $\frac{\pi}{180}$.

Hence:

$$\triangle L = \frac{s}{4} = \frac{r\phi_k}{4} = \frac{45 \times 26.38 \times \pi}{4 \times 180} = 5.18 \text{ ft.}$$

The value of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ corresponding to this interval equals:

$$\frac{5.18}{\sqrt[4]{45 \times 0.333 \times 50^2}} = 0.372$$

Because values of internal forces tabulated in rows ⑩ of Table I occur at locations different from those required for ordinates in Simpson's rule, scaled values from Fig. 12 are used. With scaled values, the summation of longitudinal forces is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[47{,}180 + 4 \times 13{,}800 + 2 \times (-7{,}200) + 4 \times (-16{,}300) + (-19{,}400)]$$

$$\Sigma H = +177{,}000 - 171{,}000 = +6000 \text{ lb.}$$

The difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetic sum.

The internal moment produced by T_x-forces at any section is always the same regardless of where the axis is chosen. Here moment is computed about the bottom edge of the shell and Simpson's rule takes the form:

$$\text{Moment} = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o h_o + 4\,y_1 h_1 + 2\,y_2 h_2 + 4\,y_3 h_3 \ldots + y_n h_n]$$

where the ordinate y with its subscript is again the magnitude of the force T_x at the same locations specified for the summation of horizontal forces and h is the companion moment arm measured from the lower edge of the shell. The moment arm equals $r\,[\cos(\phi_k - \phi) - \cos\phi_k]$. The summation is multiplied by 2 to include the moment at either side of the crown.

To illustrate computations used in the moment summation, the ordinate y_1 at the point $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.372$ was scaled previously from Fig. 12 as 13,800 lb. per ft. The angle ϕ subtended by this point equals 6°36′ and $\phi_k - \phi$ is approximately 19°50′. The moment arm therefore equals $45(0.9407 - 0.8958) = 2.02$ ft. The complete expression for moment is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times 13{,}800 \times 2.02 + 2 \times (-7200) \times 3.51 + 4 \times (-16{,}300) \times 4.38 + (-19{,}400) \times 4.69]$$

from which:

$$M \text{ (internal)} = -1{,}077{,}000 \text{ ft. lb.}$$

Midspan moment due to external load is determined from equation (3), $M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}$, as developed on page 8. With shell arc length equal to $8\triangle L = 8 \times 5.18 = 41.4$ ft. and $p_u = 30$ psf and $p_d = 50$ psf, external moment is:

$$M = -\frac{50^2}{\pi^2}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right]$$
$$= -1{,}055{,}000 \text{ ft. lb.}$$

As previously discussed, dead and live loads are multiplied by $\frac{4}{\pi}$ in accordance with the Fourier Analysis. According to sign conventions adopted, both external and internal moments produce compression at the top of the shell and internal moment is only 2 per cent greater than the external.

Summation of vertical components of the shearing force S at one end of the barrel is:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\Sigma V = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o \sin(\phi_k-\phi_o) + 4\,y_1 \sin(\phi_k-\phi_1) + 2\,y_2 \sin(\phi_k-\phi_2) + \ldots y_n \sin(\phi_k-\phi_n)]$$

where y now represents ordinates of the shear curve of Fig. 12. For example, y_1 scales -9000 lb. per ft. For $\phi_k-\phi_1=19°50'$, $\sin(\phi_k-\phi_1)$ equals 0.3393 and the vertical component at this point is -9000×0.3393. Values at other points are obtained in a similar manner. Total upward force acting at the support is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times (-9000) \times 0.3393 + 2 \times (-9750) \times 0.2278 + 4 \times (-5850) \times 0.1161 + 0]$$

$$\Sigma V = -66{,}800 \text{ lb.}$$

Equation (2) shows that total vertical shear due to a sinusoidal load is equal to $-p\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}$. At the support where $x = 0$, $\cos\frac{\pi x}{l} = 1$ and the reaction becomes $-p\frac{l}{\pi}$. Substituting for p the numerical values used in the moment expression, total shear is:

$$V = -\frac{50}{\pi}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right] = -66{,}300 \text{ lb.}$$

In this example, good agreement is obtained between the summation of internal and external forces with a maximum difference of less than 2 per cent. Such a favorable comparison cannot always be expected. Scaled ordinates, approximate integration given by Simpson's rule and, to a minor extent, the incomplete satisfaction of edge conditions may result in differences amounting to as much as 10 per cent in exceptional cases.

Analysis of Simply Supported Exterior Barrel Shell

Geometrical properties of exterior and interior barrels of the roof in this example are similar except that a beam 24 in. deep and 9 in. wide is added at the outside edge of exterior shells. This vertical extension, defined as an edge beam, acts integrally with the shell and should not be considered a separate member.

Analysis of the exterior barrel follows almost the same procedure outlined for the interior barrel. The first step involves determination of membrane forces created by surface loads. Since identical loading is applied to all barrels, membrane forces for exterior and interior barrels are the same and their summation is taken directly from Table I or computed from Table 1B and tabulated in rows ③ of Table III on page 20. Effects of line loads at the inside edge of the exterior barrel also are similar to those previously determined for the interior barrel and these values are tabulated in rows ⑨ of Table III.

Restraint at the outside edge of the exterior barrel is quite different from that at the interior edge since displacement is resisted only by the edge beam. As a result, investigation of the exterior barrel chiefly concerns conditions at the outside edge.

It is first assumed that the exterior shell is detached temporarily from the adjoining barrel and edge beam as illustrated in Fig. 13. Line loads which re-establish unity of beam and shell can be determined in the manner shown for the interior barrel. However, to emphasize the pronounced effect of the edge beam on deflection, longitudinal stress and vertical displacement of the shell are computed without taking the edge beam into account. The force T_x created in the single barrel is:

$$T_x = (-1020 + 3940 \times 19.407 + 1620 \times 6.328) \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\text{or } T_x = 85{,}700 \sin\frac{\pi x}{l} \text{ lb. per ft.}$$

In the equation above, -1020 is the longitudinal force due to membrane forces and is taken directly from row ③ of Table I, while the two products constitute effects of line loads which counteract tangential and shear reactions at the edge resulting from the membrane analysis.

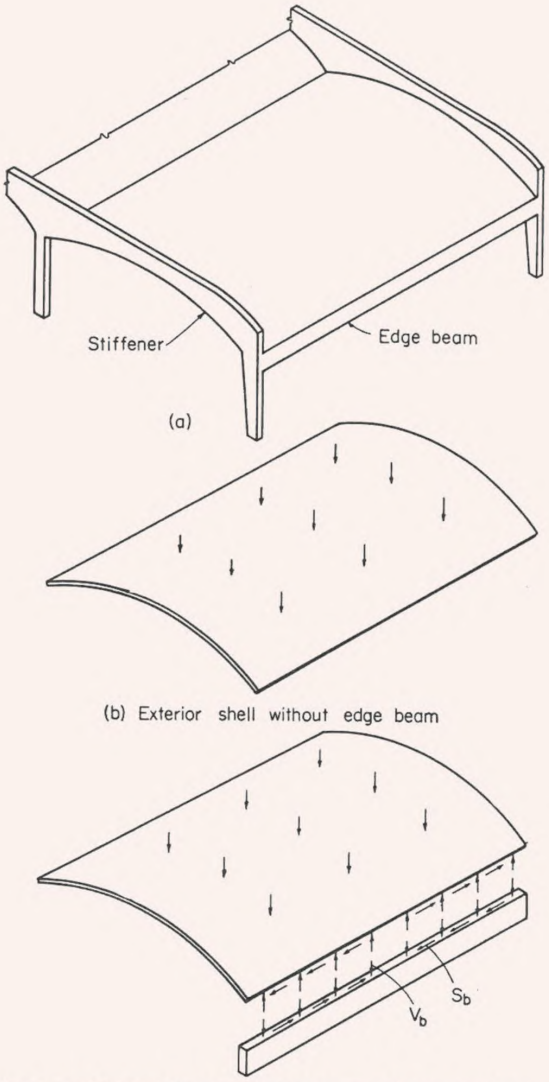


FIG. 13

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Coefficients are taken from Table 3A. The final value of 85,700 $\sin \frac{\pi x}{l}$ lb. per ft. is the longitudinal edge force existing when the shell is independent of the edge beam.

Vertical displacement of the outside edge for this condition is computed by means of Table 3B by adding vertical components of tangential and radial displacements.

$$\Delta_V = \frac{l}{Et}\,[(-3940 \times 29.98 - 1620 \times 6.176)\ 0.4444 + 150 \times (-3940 \times 1.243 - 1620 \times 0.2041)\ 0.8958]\ \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta_V = -759{,}000\ \frac{l}{Et} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{114 \times 10^6}{E} \sin \frac{\pi x}{l}$$

If E is assumed equal to 3,000,000 psi, dead load taken as 5/8 of the total load and long-time deflection assumed 3.8* times the instantaneous deflection, then:

$$\Delta_V = \frac{5 \times 114 \times 10^6 \times 3\ 8}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} + \frac{3 \times 114 \times 10^6}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} = 0.73 \text{ ft. or } 8\tfrac{3}{4} \text{ in.}$$

Although actual deflection would be approximately 1/4 to 1/5 of 0.73 ft. because of longitudinal continuity, edge deflection still would be excessive without an edge beam. Because of the nonlinear variation of the T_x-forces in all shell roofs except those having very large $\frac{l}{r}$ ratios, it is probable that the creep will be considerably less than that prevailing in ordinary beams. The factor 3.8 is used here only to indicate the maximum value.

The next step is to reunite common edges of barrel and beam by making vertical displacement and longitudinal strain coincident throughout their length. The other two requirements of continuity, that horizontal displacement and angular rotation of common edges agree, can be neglected since horizontal and rotational stiffnesses of the beam are slight as compared with those of the shell.

*See *Deflection of Reinforced Concrete Members*, p. 16, available free in U.S. and Canada on request to Portland Cement Association.

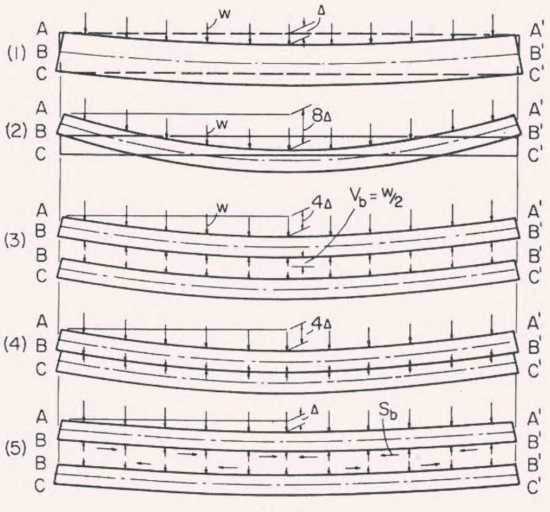


FIG. 14

Because two conditions of compatibility are to be satisfied, two types of forces must be applied at the junction of edge beam and shell. The necessity for considering two force conditions rather than one can be demonstrated easily for a simply supported rectangular beam carrying uniform load. As shown in Fig. 14 (1), deflection of the beam due to a uniform load w is designated as Δ. While impractical, analysis of this beam can be made by dividing it horizontally into two parts and then reuniting these parts by internal forces. In Fig. 14 (2), the beam is split and the entire load is assumed carried by the upper half, the deflection of this half becoming 8 Δ. The lower portion assumed unloaded remains in its undeflected position:

If equal and opposite loads of magnitude $\frac{w}{2}$ are added to both the upper and lower sections of the beam as shown in Fig. 14 (3), both parts are subjected to a net downward force of $\frac{w}{2}$ and the deflection of each becomes 4 Δ. However, strains of the common face BB' differ and can only be brought into agreement by equal and opposite shearing forces acting along this common surface. The shearing forces shorten bottom fibers of the upper beam and lengthen top fibers of the lower beam while maintaining the same relative deflection of both. Hence both displacement and strain requirements are satisfied. Final stresses and deflections obtained by this indirect procedure are identical to those obtained from a consideration of the beam as a unit.

As in this simple beam illustration, line loads acting on the edge of the exterior barrel must be equal and opposite to those carried by the edge beam. Since the edge beam is assumed to resist only vertical loads and horizontal shearing loads, forces acting on the shell must correspond to these two loads. Therefore, if forces acting on the beam are designated as V_b and S_b, shell line loads

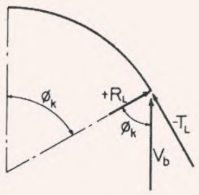


FIG. 15

are, from Fig. 15:

$$T_L = -V_b \sin \phi_k = -0.4444\ V_b \qquad (10a)$$

$$R_L = V_b \cos \phi_k = 0.8958\ V_b \qquad (10b)$$

$$S_L = S_b \qquad (10c)$$

The positive direction of V_b shown represents the reaction of the beam on the shell. The relationship expressed by equations (10a) and (10b) satisfies the condition that the horizontal edge force equals zero.

Longitudinal stress and vertical displacement at the edge are determined by superimposing effects of these line loads on those previously determined for the single barrel. With the influence of line loads applied at the far

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

edge neglected, $\frac{T_x}{t}$ and $\triangle_V$ are:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 + 19.407\,T_L - 150\times 0.6412\,R_L + 6.328\,S_L)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\Big[-759{,}000 + (-29.98\,T_L + 150\times 1.243\,R_L - 6.176\,S_L)\,0.4444 + 150\,(-1.243\,T_L + 150\times 0.06635\,R_L - 0.2041\,S_L)\,0.8958\Big]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11b}$$

Substituting in equations (11a) and (11b) the values of T_L, R_L, and S_L as expressed by equations (10) gives:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\,(-759{,}000 + 1352\,V_b - 30.17\,S_b)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12b}$$

Equations (12a) and (12b) express longitudinal stress and vertical displacement of the shell's edge in terms of internal forces acting on the beam. Numerical values of these unknown forces are determined by developing similar expressions for the beam based on its elastic behavior.

To maintain a constant relationship between T_L and V_b and between S_L and S_b over the entire length of shell, vertical loading V_b and shearing force S_b must vary respectively as $\sin\frac{\pi x}{l}$ and $\cos\frac{\pi x}{l}$. Effects of vertical and shear loads having these variations are obtained by the ordinary flexural theory for homogeneous beams. This theory is considered adequate because of the large length-to-depth ratio.

Expressions for moment and vertical displacement produced by a vertical sine load are given by equations (3) and (5). A rectangular homogeneous beam carrying this type of load is subjected to flexural action only and its fiber stresses are symmetrical about the centroidal axis. In contrast, a similar beam carrying only a shear load applied along one surface is subjected to both direct and bending stresses and extreme fiber stresses are not of equal magnitude. Axial thrust at any section is equal to the summation of shear from that section to the end of the beam, moment is equal to this thrust times its eccentricity about the centroidal axis, and vertical displacement is determined by conventional means from this induced moment.

In spite of the fact that vertical and shear loads are dissimilar in direction and distribution, fiber stresses and displacements resulting from each have the same longitudinal variation expressed in terms of $\sin\frac{\pi x}{l}$. Coefficients for fiber stress and displacement in a beam due to these loads are taken from ASCE Manual No. 31, page 59, equations (9f) and (10c).

Extreme fiber stress at the top of the beam is:

$$f = -\frac{l}{bh}\Big[0.60793\times\frac{l}{h}(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

in which the sign convention for fiber stress conforms to that used in shell analysis; i.e., positive indicates tension. Positive directions of loads are as shown in Fig. 16. In equation (13), the value 286 accounts for the dead weight of the beam and is obtained by multiplying the actual weight of the beam, 225 lb. per ft., by $\frac{4}{\pi}$.

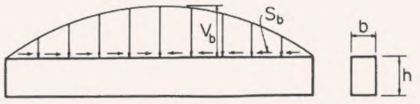


FIG. 16

From equations (9d) and (10e) of ASCE Manual No. 31, vertical displacement of the beam is:

$$\triangle_V = \frac{l^3}{bh^2E}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{14}$$

Equating stresses and deflections given by equations (12) to those of equations (13) and (14) and multiplying by t and $\frac{Et}{l}$ respectively gives:

$$+85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b = -\frac{lt}{hb}\Big[0.60793\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big] \tag{15a}$$

$$+759{,}000 - 1352\,V_b + 30.17\,S_b = \frac{l^2t}{h^2b}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big] \tag{15b}$$

Substituting values of:

$$\frac{l}{h}\times\frac{t}{b} = \frac{50}{2}\times\frac{4}{9} = 11.11$$

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^2\times\frac{t}{b} = 11.11\times\frac{50}{2} = 277.7$$

and

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^3\times\frac{t}{b} = 277.7\times 25 = 6944$$

in equations (15) and simplifying gives:

$$74.04\,V_b + 20.47\,S_b = -134{,}000$$
$$-2207\,V_b - 23.57\,S_b = -514{,}000$$

from which a simultaneous solution results in:

$$V_b = +315 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_b = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Substitution of these values in equations (10) gives line loads which reunite common edges of barrel and beam:

$$T_L = -0.4444\times 315 = -140 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +0.8958\times 315 = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Total line loads must include T_{LM} and S_{LM}, the reactions to membrane forces created by surface loads. Final line loads then are:

$$T_L = -140 + 3940 = +3800 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 + 1620 = -6060 \text{ lb. per ft.}$$

Effects of these three line loads on internal forces T_x, S, T_ϕ and M_ϕ are determined from formulas given at the

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

TABLE II—INTERNAL FORCES IN AN EXTERIOR BARREL OF A SIMPLY SUPPORTED MULTIPLE BARREL ROOF DUE TO LINE LOADS AT OUTSIDE EDGE

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0		3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0
s	44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0		44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0
ϕ	56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°		56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°
$\phi_k - \phi$		−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′			−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′
Load	Coefficients							Multipliers	Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	3,800	+ 180	− 870	− 1,310	+ 1,320	+ 2,960	+ 3,560	+ 3,800
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	42,000	− 10	+ 100	+ 1,190	+ 760	+ 280	+ 90	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	−6,060	− 70	+ 320	+ 50	− 540	− 580	− 400	0
⑧ Σ									+ 100	− 450	− 70	+ 1,540	+ 2,660	+ 3,250	+ 3,800
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	3,800	− 790	+ 3,140	− 4,410	− 9,710	− 8,200	− 5,180	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	42,000	+ 370	− 1,650	− 200	+ 2,510	+ 2,630	+ 1,780	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	−6,060	+ 180	− 570	+ 1,590	+ 1,190	− 1,100	− 3,170	− 6,060
⑧ Σ									− 240	+ 920	− 3,020	− 6,010	− 6,670	− 6,570	− 6,060
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	3,800	− 580	− 390	−19,700	− 3,910	+24,200	+45,900	+ 73,700
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	42,000	+ 750	− 2,480	+ 7,590	+ 5,150	− 5,330	−14,500	− 26,900
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	−6,060	− 110	+ 1,220	+ 2,910	− 7,590	−19,600	−28,000	− 38,300
⑧ Σ									+ 60	− 1,650	− 9,200	− 6,350	− 730	+ 3,400	+ 8,500
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,260	+ 200	− 1,140	− 1,090	− 110	+ 170	+ 160	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	14,000	− 70	+ 480	+ 1,110	+ 750	+ 400	+ 200	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	−2,020	− 50	+ 310	+ 120	− 80	− 80	− 50	0
⑧ Σ									+ 80	− 350	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0

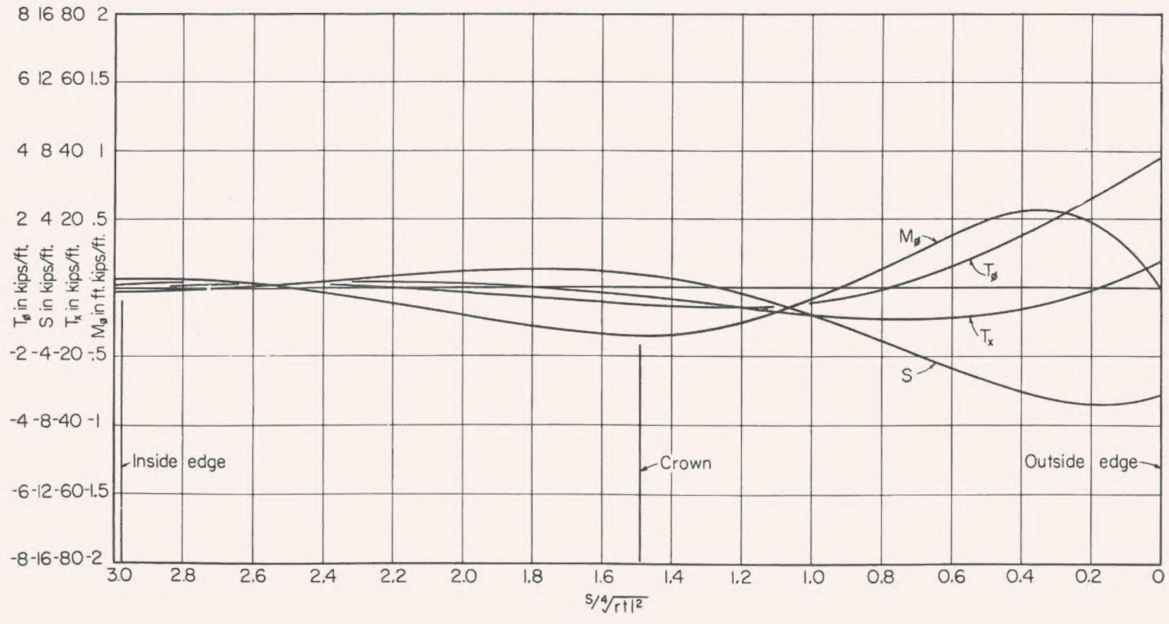
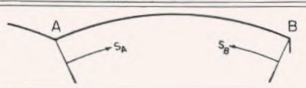


FIG. 17

PAGE 17

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

TABLE III—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof



$\frac{s_B}{\sqrt[4]{r\,l^2}}$	2.98	2.88	2.78	2.58	2.18	1.78	1.49 Crown	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1	0
$\frac{s_A}{\sqrt[4]{r\,l^2}}$	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.49	1.78	2.18	2.58	2.78	2.88	2.98
T_ϕ at $x=\frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 3,940	− 4,000	− 4,090	−4,240	−4,430	− 4,500	− 4,580	− 4,500	− 4,430	−4,240	−4,090	−4,000	−3,940
⑧ Line loads at B	+ 140	+ 150	+ 160	+ 150	0	− 300	− 520	− 610	− 70	+1,540	+2,660	+3,250	+3,800
⑨ Line loads at A	+ 5,760	+ 5,750	+ 5,440	+4,340	+1,580	− 310	− 880	− 750	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨	+ 1,960	+ 1,900	+ 1,510	+ 250	−2,850	− 5,110	− 5,980	− 5,860	− 4,860	−2,650	−1,280	− 560	+ 60
S at $x=0$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	+ 1,620	+ 1,550	+ 1,440	+1,220	+ 790	+ 460	0	− 460	− 790	−1,220	−1,440	−1,550	−1,620
⑧ Line loads at B	− 200	− 150	− 50	+ 100	+ 700	+ 1,050	+ 750	− 310	− 3,020	−6,010	−6,670	−6,570	−6,060
⑨ Line loads at A	− 1,620	+ 1,930	+ 4,550	+7,520	+7,210	+ 3,400	+ 900	− 750	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨	− 200	+ 3,330	+ 5,940	+8,840	+8,700	+ 4,910	+ 1,650	− 1,520	− 5,210	−8,030	−8,530	−8,370	−7,680
T_x at $x=\frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 1,020	− 1,080	− 1,110	−1,190	−1,290	− 1,320	− 1,350	− 1,320	− 1,290	−1,190	−1,110	−1,080	−1,020
⑧ Line loads at B	+ 300	+ 800	+ 900	+1,200	+1,500	− 300	− 2,500	− 5,770	− 9,200	−6,350	− 730	+3,400	+8,500
⑨ Line loads at A	+46,700	+35,220	+25,360	+9,440	−8,340	−11,400	− 9,000	− 4,800	+ 200	+1,900	+2,000	+2,000	+1,500
⑩=③+⑧+⑨	+45,980	+34,940	+25,150	+9,450	−8,130	−13,020	−12,850	−11,890	−10,290	−5,640	+ 160	+4,320	+8,980
M_ϕ at $x=\frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)													
⑧ Line loads at B	+ 70	+ 70	+ 60	+ 30	− 120	− 290	− 360	− 270	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0
⑨ Line loads at A	− 2,330	− 1,190	− 320	+ 730	+ 940	+ 290	− 240	− 480	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨	− 2,260	− 1,120	− 260	+ 760	+ 820	0	− 600	− 750	− 250	+ 420	+ 455	+ 325	+ 50

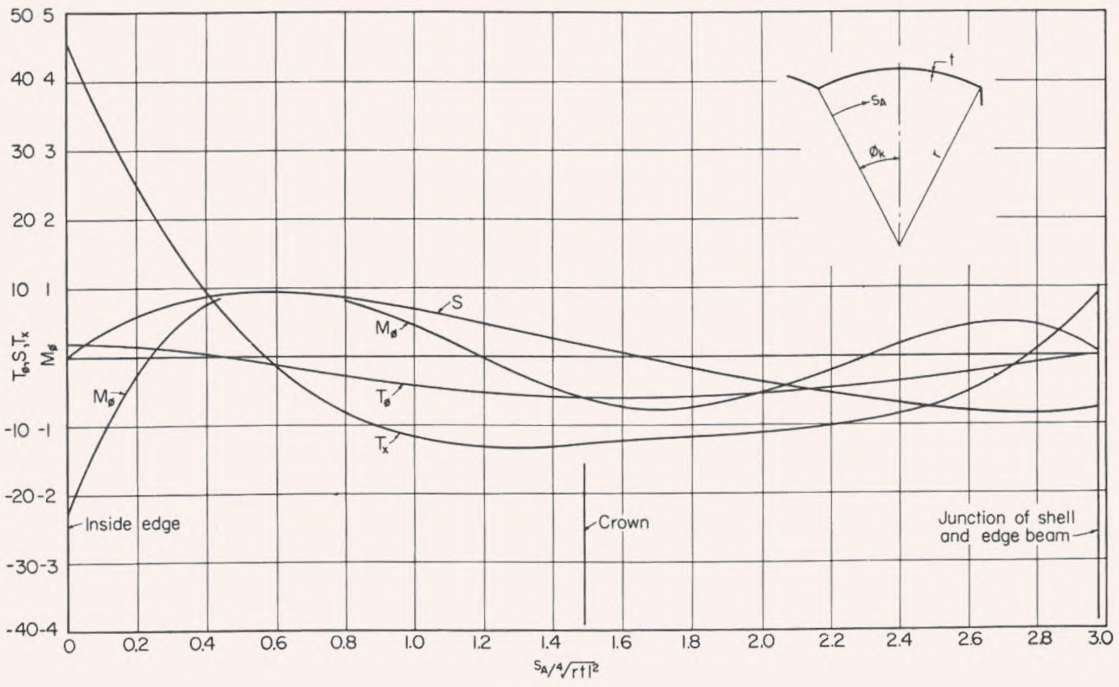


FIG. 18

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

top of Table 3A. The combination of all terms in one formula with the exception of the coefficient indicated by column number constitutes the multiplier. For example, the multipliers of the tangential and shear edge loads for forces T_x, S and T_ϕ are merely T_L and S_L while the multiplier of the radial edge load for these forces is $R_L \times \frac{l}{t}$ $= +280 \times 150 = 42{,}000$ lb. per ft. Multipliers for tangential, radial and shear edge loads for the transverse moment M_ϕ are respectively:

$$T_L \times t = +3800 \times \tfrac{1}{3} = +1260 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$R_L \times l = +280 \times 50 = +14{,}000 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$S_L \times t = -6060 \times \tfrac{1}{3} = -2020 \text{ ft. lb. per ft.}$$

Internal forces produced by line loads acting at the exterior edge are obtained as the products of coefficients and multipliers. These operations are given in rows ④, ⑤ and ⑥ of Table II. Since the curved shell portions of interior and exterior barrels are identical, coefficients in Table II are the same as those listed in Table I. Effects of the various line loads are combined in rows ⑧ of Table II and are plotted in Fig. 17.

Because restraint differs at the two longitudinal edges of the exterior barrel, internal forces are not symmetrical about the crown. Consequently, values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ in Table III are extended from one edge to the other with subscripts A and B designating the edge from which s is measured. The exterior edge is considered the near edge.

As in Table I, rows ③ in Table III represent membrane forces, and values given are taken directly from rows ③ of Table I or computed from Table 1B. Values in rows ⑧, Table III, from $\frac{s_B}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0$ to 0.8 are copied from rows ⑧ of Table II while values from 1.2 to 2.98 are scaled from curves in Fig. 17. Values in rows ⑨ represent effects of line loads at the interior edge and are obtained from rows ⑧ and ⑨ of Table I with the exception of values at $\frac{s_A}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.2$, 1.49 and 1.78 which are scaled from Fig. 10.

Algebraic sums of these individual effects are tabulated in rows ⑩ of Table III and are shown graphically in Fig. 18. Inspection of the curves indicates that the neutral axis is not horizontal but sloped and that shear is not zero at the crown.

Statical Check of Forces in Exterior Barrel

The accuracy of numerical calculations for the exterior barrel is checked in a manner similar to that used for the interior barrel with the provision that internal forces acting in the edge beam must be added to those in the shell. Internal stress at the top, midspan fibers of the edge beam is by equation (13):

$$f \text{ (top)} = -\frac{50}{0.75 \times 2}\left[0.60793 \times \frac{50}{2} \times (315+286) + 1.2732 \times (-7680)\right] = -304{,}500 + 325{,}900 = +21{,}400 \text{ psf.} \quad (16)$$

Equation (16) includes effects of vertical and shear loads. Top and bottom fiber stresses due to the vertical load are equal and opposite. Inspection of formulas (10c) and (10d) of ASCE Manual No. 31 indicates that bottom fiber stress resulting from a shear load acting at the top of the beam is one-half that at the top. Therefore, midspan bottom fiber stress in the edge beam is expressed simply as:

$$f \text{ (bottom)} = +304{,}500 - \frac{325{,}900}{2} = 141{,}500 \text{ psf} \quad (17)$$

The force per foot at top and bottom of beam is:

T_x (top) $= 21{,}400 \times 0.75 = 16{,}000$ lb. per ft.
T_x (bottom) $= 141{,}500 \times 0.75 = 106{,}000$ lb. per ft.

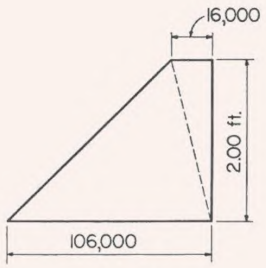


FIG. 19

The assumed straight line variation results in the T_x-force diagram of Fig. 19. Total horizontal force in the beam is $(106{,}000 + 16{,}000)\ 0.5 \times 2 = 122{,}000$ lb. and the moment of this force about the top of the beam is:

$$0.5 \times 2\left[16{,}000 \times \frac{2}{3} + 106{,}000 \times \frac{4}{3}\right] = 152{,}000 \text{ ft. lb.}$$

The complete summation of horizontal forces including those in the edge beam is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[+45{,}980 + (4)(+11{,}200) + (2)(-6{,}500) + (4)(-12{,}600) + (2)(-12{,}850) + (4)(-11{,}550) + (2)(-10{,}000) + (4)(-5000) + 8980] + 122{,}000$$

from which $\Sigma H = -302{,}000 + 294{,}300 = -7{,}700$ lb.

In theory this summation should equal zero. Here the difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetical sum.

In computing internal moment due to T_x, forces taken at points symmetrical about the crown have equal moment arms and therefore are grouped in parentheses. The resulting expression is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3}[0 + 4\ (11{,}200-5{,}000)\ 2.02 + 2(-6{,}500-10{,}000) \times 3.51 + 4\ (-12{,}600-11{,}550)\ 4.38 + 2(-12{,}850)\ 4.69 + 0]\ -152{,}000$$

from which $\Sigma M = -1{,}204{,}000$ ft. lb.

External moment equals the sum of that already computed for the interior barrel (page 15) and the moment resulting from the weight of the edge beam. Though the

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

edge beam is of uniform cross-section throughout its length, its weight is expressed as a sinusoidal load for reasons discussed on page 8. This is done by multiplying the weight per foot by $\frac{4}{\pi}$ giving 286 lb. per ft. Midspan moment developed by this load is given by equation (3) as:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2} = -286 \times \frac{50^2}{\pi^2} = -72{,}500 \text{ ft. lb.}$$

Total external moment then equals:

$$\Sigma M = -1{,}055{,}000 - 72{,}500 = -1{,}127{,}500 \text{ ft. lb.}$$

The difference between computed internal and external moments is 1,204,000 − 1,127,500 = 76,500. Internal moment is approximately 7 per cent greater than the external.

As previously explained, a percentage difference of this magnitude is not excessive but this discrepancy could be reduced by correcting for the residual T_ϕ edge forces of +140 and +200 lb. per ft. indicated in Table III. Line loads T_L of −140 and −200 lb. per ft. applied at the respective edges would decrease the internal moment. The effect of this correction can be estimated by computing the external moment which the residual forces produce. Edge forces of +140 and +200 lb. per ft. represent an additional downward load of (140+200) 0.4444 = 150 lb. per ft. assumed acting on the shell. The moment created by this load is equal to $\frac{150}{286} \times 72{,}500 = 38{,}000$ ft. lb. If this correction is applied to the internal moment, the corrected value would be −1,204,000 + 38,000 = −1,166,000 ft. lb., which exceeds the external moment by only 3.5 per cent.

A comparison of internal and external shear at the support must include forces within the edge beam which is subjected to its own dead weight and to forces V_b and S_b shown in Fig. 16. It should be noted that although the horizontal shearing force S_b produces vertical shearing stresses at any cross-section, a summation of these stresses equals zero. This is evident from the fact that S_b alone does not create external reactions. Hence, shear in the edge beam at the support is determined from equation (2) as:

$$V = -p\frac{l}{\pi}$$

where p is the sum of V_b and the dead weight of the beam or 315 + 286 = 601 lb. per ft. From this

$$V = -601 \times \frac{50}{\pi} = -9570 \text{ lb.}$$

The complete expression for internal shear is similar to that given on page 16 for the interior barrel. For values of ϕ greater than ϕ_k, sin $(\phi_k - \phi)$ is negative. Shear ordinates which are multiplied by common values of sin $(\phi_k - \phi)$ are combined in parentheses. The expression is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3}[(-7680 + 200)\,0.4444 + 4(-8150 - 8550)\,0.3393 + 2(-5600 - 9000)\,0.2278 + 4(-2500 - 5700)\,0.1161] - 9570 = 72{,}600 \text{ lb.}$$

Reaction at the support is equal to the sum of that previously determined for the interior barrel and that due to the weight of the beam.

$$\Sigma V \text{ (external)} = -66{,}300 - 286 \times \frac{50}{\pi} = -70{,}850 \text{ lb.}$$

The percentage difference of 2.5 per cent can be reduced if the 150 lb. per ft. vertical load due to uncompensated T_ϕ forces is taken into account.

Modification of Internal Forces for Continuity

In preceding discussions force distribution has been obtained in terms of a simply supported barrel although the roof structure in Fig. 4 consists of two equal spans continuous over a center support. This force distribution now must be modified for continuity. As discussed in ASCE Manual No. 31, the effect of continuity on shells and conventional beams is similar since it affects only longitudinal variation of stress. Manual No. 31 points out that while forces in the continuous structure can be obtained by a rigorous satisfaction of boundary conditions, force distribution also may be determined by proportioning on the basis of the ratio of moments in a continuous beam to moment in a simply supported span. The second procedure is used in this design example. In order to evaluate the change in force distribution, the fixed end moment in a beam subject to sinusoidal loading is determined first.

Slopes of tangents at the ends of a simply supported beam carrying a sinusoidal load are given by equation (4) as:

$$\theta = \frac{pl^3}{EI\pi^3}$$

To produce a fixed end condition, end moments must be applied which rotate both ends of the beam through this angle. It is known that an end moment of $\frac{4EI}{l}$ will rotate the near end of a beam through a unit angle when the far end is fixed. Therefore, applying a moment of $\frac{4EI}{l} \times \frac{pl^3}{EI\pi^3}$ at each end and including the carryover moment, final fixed end moment is equal to:

$$M = \frac{pl^3}{EI\pi^3} \times \frac{4EI}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2pl^2}{\pi^3} \qquad (18)$$

If one end of the beam is hinged, moment at the fixed end by moment distribution is:

$$M = \frac{2pl^2}{\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3pl^2}{\pi^3} \qquad (19)$$

Final moment at any point in a beam having one end fixed and the other hinged is found by adding algebraically the simple span moment given by equation (3) and the effect of the end moment indicated by equation (19). These two moments are shown in Fig. 20. After superposition the resulting moment is:

$$M = \frac{3pl^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{pl^2}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{l}$$

Expressed in terms of the midspan moment $-\frac{pl^2}{\pi^2}$ of the

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

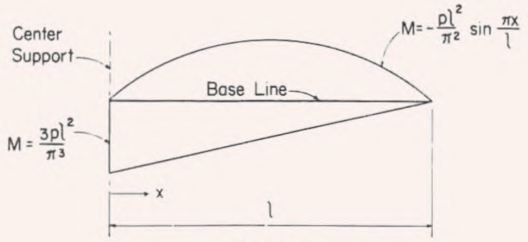


FIG. 20

simply supported span this becomes:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right]$$

Conditions of support for this beam are similar to those in the design example where, due to symmetry of structure and loading, a fixed end exists at the center cross frame with hinged supports at the far ends. A beam bearing such similarity to a shell structure may be used to proportion internal forces for continuity. For example, in a continuous shell of two equal spans l, longitudinal T_x-forces at any section are approximately equal to the midspan T_x-forces in a simply supported shell of span l times the ratio of moment at the same section in a continuous beam of two equal spans to the midspan moment of one simply supported span of the beam. From this, longitudinal force at any section in the continuous shell roof of this example is:

$$T_x \text{ (continuous)} = T_x^*\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right] \quad (20)$$

Shear determined for the simply supported single span shell also is modified by the condition of continuity. Shear due to end restraint is equal to the fixed-end moment divided by span length while that due to the simply supported sinusoidal load is given by equation (2). The complete expression for shear is the sum of these effects or:

$$S = -\frac{3pl}{\pi^3} - \frac{pl}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} \quad (21)$$

Expressed in terms of $-\frac{pl}{\pi}$, the shear at the support of the simple span, shear in the continuous structure is found from:

$$S = -\frac{pl}{\pi}\left[\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}\right] \quad (21a)$$

Modification of transverse moment M_ϕ for continuity is given by formula (236b) of ASCE Manual No. 31 as follows:

$$M_\phi \text{ (continuous)} = M_\phi^*\left\{\sin\frac{\pi x}{l} - 3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]\right\} \quad (22)$$

The effect of end restraint on T_ϕ-forces calculated previously for the simply supported shell is negligible.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

TABLE IV—INTERNAL FORCES IN THE INTERIOR BARREL OF THE CONTINUOUS SHELL ROOF

T_ϕ in lb. per ft.

$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}$				
			0	0.707	0.953	0.707	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−6,300	0	−4,450	−6,000	−4,450	0
16.8	1.2	−5,600	0	−3,960	−5,340	−3,960	0
11.1	0.8	−3,210	0	−2,270	−3,060	−2,270	0
5.6	0.4	+ 150	0	+ 110	+ 140	+ 110	0
2.8	0.2	+1,500	0	+1,060	+1,430	+1,060	0
1.4	0.1	+1,940	0	+1,370	+1,850	+1,370	0
0	0	+2,020	0	+1,430	+1,930	+1,430	0

S in lb. per ft.

$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Forces at supports in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}$				
			+1.304	+1.011	0	−0.403	−0.696
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	0	0	0	0	0	0
16.8	1.2	−4,600	− 6,000	−4,700	0	+1,900	+3,200
11.1	0.8	−9,400	−12,300	−9,500	0	+3,800	+6,600
5.6	0.4	−9,540	−12,500	−9,700	0	+3,900	+6,700
2.8	0.2	−6,410	− 8,400	−6,500	0	+2,600	+4,500
1.4	0.1	−3,730	− 4,900	−3,800	0	+1,500	+2,600
0	0	0	0	0	0	0	0

T_x in lb. per ft.

$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}$				
			−0.955	−0.009	+0.571	+0.468	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−19,400	+18,500	+170	−11,100	− 9,100	0
16.8	1.2	−17,500	+16,700	+160	−10,000	− 8,200	0
11.1	0.8	− 9,430	+ 9,000	+ 80	− 5,400	− 4,400	0
5.6	0.4	+10,150	− 9,700	− 90	+ 5,800	+ 4,800	0
2.8	0.2	+26,250	−25,100	−240	+15,000	+12,300	0
1.4	0.1	+36,140	−34,500	−330	+20,600	+16,900	0
0	0	+47,180	−45,000	−420	+26,900	+22,100	0

M_ϕ in ft. lb. per ft.

$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$ (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}-3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]$				
			0	0.192	0.425	0.339	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	− 480	0	− 90	−200	−160	0
16.8	1.2	− 190	0	− 40	− 80	− 60	0
11.1	0.8	+ 550	0	+110	+230	+190	0
5.6	0.4	+ 590	0	+110	+250	+200	0
2.8	0.2	− 355	0	− 70	−150	−120	0
1.4	0.1	−1,175	0	−230	−500	−400	0
0	0	−2,280	0	−440	−970	−770	0

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Table IV deals with evaluation of internal forces in the continuous interior barrel, these forces being symmetrical about the crown. Forces in the exterior barrel would be computed in a similar manner but are not symmetrical about the crown.

Since the longitudinal T_x-force is of considerable importance in determining reinforcement, it is desirable to compute maximum values. For this purpose equation (20) expressing the variation of T_x is differentiated with respect to x and set equal to zero to determine the location of maximum force. The first derivative of equation (20) is:

$$\frac{dT_x}{d_x} = T_x^* \left[\frac{3}{\pi} + \pi \cos \frac{\pi x}{l}\right] = 0$$

from which:

$$\cos \frac{\pi x}{l} = -\frac{3}{\pi^2} = -0.3039$$

and:

$$\frac{\pi x}{l} = 107° 42' \text{ or } 1.88 \text{ radians}$$

The negative sign indicates a second quadrant angle. Solving for $\frac{x}{l}$, the location of maximum T_x-force, gives:

$$\frac{x}{l} = \frac{1.88}{\pi} = 0.60$$

The four internal forces are computed at five sections: at supports where $\frac{x}{l} = 0$ and 1.0, and at $\frac{x}{l}$ equal to 0.25, 0.60 and 0.75. At each section forces are determined for the seven points indicated in columns ① and ② of Table IV.

Forces occurring in the simply supported interior barrel are tabulated in columns ③ of Table IV. Values given for T_ϕ, T_x and M_ϕ occur at midspan while those for shear S are at the support. For values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ from 0 through 0.8, these forces are taken directly from rows ⑩ of Table I while at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 1.2 and at the crown forces are scaled from Fig. 12.

Multipliers are listed at the top of each table for various values of $\frac{x}{l}$. For forces M_ϕ, T_x and S these multipliers include corrections for continuity and are equal to the bracketed terms of equations (22), (20) and (21a), respectively. The multiplier for T_ϕ is equal merely to sin $\frac{\pi x}{l}$.

Values in columns ④ through ⑧ are final forces obtained by multiplying forces in columns ③ by appropriate multipliers. For example, force T_x at $\frac{x}{l}$ equal to 0.60 and $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is found by multiplying +10,150 found in column ③ by multiplier +0.571 to give +5,800 lb. per ft. It should be noted that since T_x-forces are maximum at $\frac{x}{l} = 0.6$, the moment they produce at this section is also maximum and, as with an ordinary beam, shear is zero.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

The horizontal neutral axis falls between values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 0.4 and 0.8 and is approximately 3 ft. above the lower edge of the shell.

Shell Reinforcement

Design of reinforcement for the interior barrel is based on final forces summarized in Table IV. In general, shell reinforcement is provided for three force conditions: tensile T_x-forces are resisted by horizontal steel; moment M_ϕ combined with the direct force T_ϕ is resisted by transverse reinforcement while shearing forces S are resisted primarily by diagonal reinforcement.

A major question arising in the design of shells is whether the stress assigned to the steel shall vary according to n times the computed concrete stress or whether an arbitrarily designated value of f_s such as 20,000 psi can be assumed disregarding concrete stress. Shell analysis has been based on the assumption of homogeneity of material. In other words, strains in the structure are proportional to induced concrete stresses. To be consistent, steel stresses should be based on steel strains that are equal to concrete strains. This condition requires the use of a constant percentage of steel throughout the tensile zone.

The same problem exists in detailing indeterminate structures such as rigid frames and arches. In this case it is customary to analyze the structure on the basis of the constant elastic property of the members and then determine required steel area on the assumption that reinforcement is stressed to an allowable design value. This same practice will be followed in shell design.

There are several methods of proportioning horizontal or longitudinal reinforcing steel. One method is to divide the external moment by the product of the allowable steel stress and the distance between centroids of reinforcement and compressive T_x-forces. A minimum amount of reinforcement is provided by this method since the bars generally are concentrated as far from the neutral axis as possible.

According to the method proposed in ASCE Manual No. 31, longitudinal steel stresses vary linearly from a maximum at the edge of the shell to zero at the neutral axis. Tensile reinforcement is distributed over the entire tension zone.

A third procedure is suggested in which the required steel area at any point is given by T_x at that point divided by a constant allowable stress. For example, from Table IV at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$ with $T_x = +26{,}900$ lb. per ft.,



FIG. 21

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

required reinforcement is:

$$A_s = \frac{26{,}900}{20{,}000} = 1.4 \text{ sq. in. per ft.}$$

Five #5 bars providing an area of 1.55 sq. in. are placed as shown in Fig. 21 within the first foot at either side of the valley formed by the junction of adjacent barrels. At $s = 1.4$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, a required steel area of $\frac{20{,}600}{20{,}000} =$ 1.03 sq. in. per ft. is supplied by #5 bars spaced at 3½ in., this spacing being continued to $s = 2.8$ ft. The procedure is repeated up to the neutral axis. In the compression zone reinforcement is theoretically unnecessary but minimum reinforcement equal to approximately 0.4 per cent is provided either by welded wire fabric or small diameter bars spaced at about 1-ft. intervals.

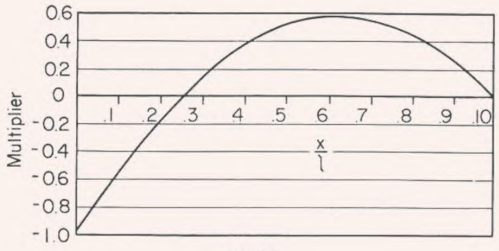


FIG. 22

Cut-off points for longitudinal bars are determined by means of Fig. 22, which shows a curve representing the multiplier in Table IV: $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sin\frac{\pi x}{l}$. For illustration note in Fig. 22 that multipliers are -0.955 at $\frac{x}{l} = 0$ and $+0.571$ at $\frac{x}{l} = 0.6$. The use of this curve is illustrated by determining cut-off points for one of the five longitudinal #5 bars provided at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$. Four #5 bars resist a tensile force of $4 \times 0.31 \times 20{,}000 = 24{,}800$ lb. per ft. To obtain a force of 24,800 lb. per ft., the midspan T_x-force of 47,180 lb. per ft. in the simply supported shell must be multiplied by the factor:

$$\frac{24{,}800}{47{,}180} = 0.526$$

In Fig. 22 the multiplier 0.526 occurs at $\frac{x}{l}$ equal to 0.52 and 0.67, these being the points at which four #5 bars are sufficient. This illustration applies to all horizontal reinforcement.

Transverse reinforcement is computed for moment M_ϕ and direct force T_ϕ. The procedure is similar to that used for ordinary reinforced concrete beams subjected to combined stresses. In this example design is based on a rectangular section 12 in. wide and 4 in. deep except at the junction of adjacent barrels where depth is increased to provide a smooth transition from one barrel to the other.

Consider selecting transverse reinforcement at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, where $M_\phi = -0.97$ ft. kips per ft. producing tension at the top surface and $T_\phi = 1.93$ kips per ft. in tension. A total depth of 8 in. is scaled from Fig. 21 and effective depth is taken as 7 in. Steel area is 0.15 sq. in. per ft. as determined according to Example 8 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*.* For an allowable concrete stress of 1350 psi., compression reinforcement is not required. As shown in Fig. 21, transverse reinforcement at this location is placed near the top of the shell and is continuous from one barrel to the next. Transverse reinforcement required throughout the interior barrel is nominal in amount and may be evenly spaced as shown in Fig. 23.

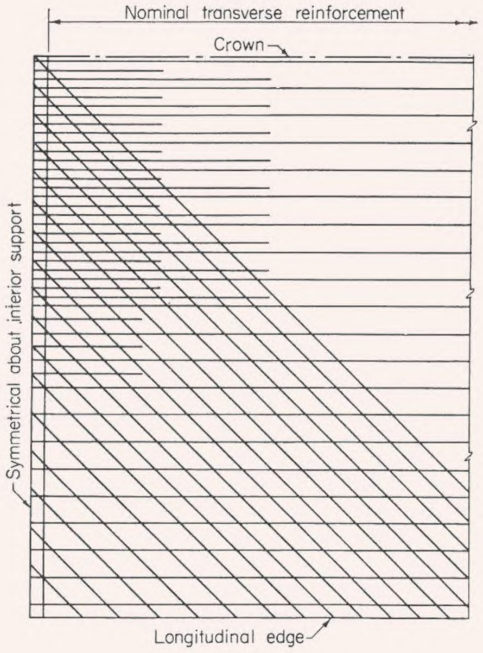


FIG. 23

Diagonal reinforcement shown in Fig. 23 may be designed by several methods. Reinforcement may be provided on the basis of principal stresses computed at various points. Such an approach implies the placement of bars parallel to stress trajectories.

In this example diagonal reinforcement is designed as for conventional reinforced concrete beams and is provided to resist shear in excess of $0.3 f'_c$. For example, from Table IV at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.25$, $S = -9700$ lb. per ft.

*Published by the American Concrete Institute, Detroit, Mich.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

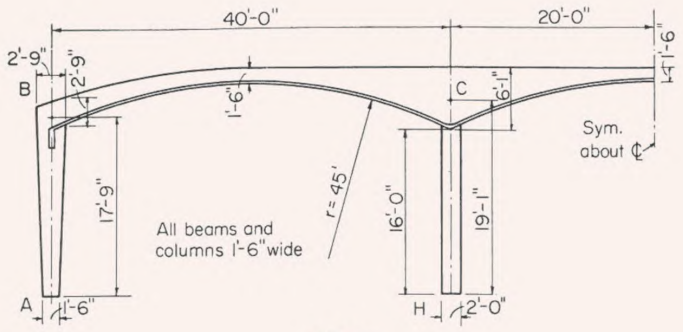


FIG. 24

Assuming 3000-lb. concrete, required diagonal steel is:

$$A_s = (9700 - 90 \times 4 \times 12) \div 20{,}000$$
$$= (9700 - 4300) \div 20{,}000 = 0.27 \text{ sq. in. per ft.}$$

Critical shear stress which determines spacing of diagonal bars does not necessarily occur at the supports and it may be desirable to compute shear at intermediate points.

Longitudinal and transverse reinforcement also may be used to resist diagonal tension if these bars are only lightly stressed by their primary loads. However, horizontal and vertical bars make an angle of 45° with the axis of diagonal tension and, as pointed out by formula (6d) of ASCE Manual No. 31, their effectiveness in the 45° direction is only one-half its normal value.

Shear is investigated at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.125$ to illustrate the distribution of diagonal tension over reinforcement extending in more than one direction. Since Table IV gives no values at $\frac{x}{l} = 0.125$, shear at this point must be computed. Substituting in the expression for the shear multiplier $\frac{3}{\pi^2} + \cos\frac{\pi x}{l}$ gives $+1.228$ which, when multiplied by -9540, the support shear in the simply supported barrel at $s = 5.6$, gives a total shear of $-11{,}700$ lb. per ft. This value then is reduced by 4300 lb. per ft., the previously determined allowable shear strength of the concrete, leaving 7400 lb. per ft. to be resisted by reinforcement. Required steel area is $\frac{7400}{20{,}000}$ or 0.37 sq. in. per ft.

Inspection of Table IV indicates that T_x-forces at $s = 5.6$ are compressive from the support to $\frac{x}{l} = 0.25$. Therefore, longitudinal steel at $\frac{x}{l} = 0.125$ carries no tensile stress and may be used to resist some diagonal tension. Effective area of these #5 bars spaced at 12 in. is reduced from 0.31 to 0.15 sq. in. per ft. because of the 45° displacement. Diagonal reinforcement is then supplied for 0.37 less 0.15 or 0.22 sq. in. per ft. Similar advantage can be taken of transverse steel when the stress produced by T_ϕ and M_ϕ is small.

Although not discussed here, design of reinforcement for the exterior barrel follows a procedure similar to that outlined for the interior barrel. The total tensile longitudinal force at midspan in the edge beam is found on page 21 to be 122,000 lb. To determine the companion force in the continuous structure at $\frac{x}{l} = 0.6$, this value is multiplied by the multiplier 0.571 in Table IV giving a final tensile force of 69,600 lb. The required steel area of 3.48 sq. in. should be located with its center of gravity at or below the center of gravity of the 122,000 lb. longitudinal force.

Frame Design

The analysis of any frame supporting a shell is similar to the analysis of a continuous bent supporting a conventional slab except that the shell induces a direct force in the frame. As explained in ASCE Manual No. 31, frames are designed for their own dead weight plus live and dead loads on the shell.

The 18-in. wide frame shown in Fig. 24 is selected to illustrate steps involved in the analysis of a frame. The choice of this shape with the shell at the bottom edge does not imply that this is the best or only solution. Under certain circumstances it may be desirable to have the shell at the top of the frame with the soffit straight. Also, economic considerations may favor the use of an arch following the curve of the shell.

The frame in Fig. 24 is the center frame of the roof unit shown in Fig. 4. It is symmetrical about the centerline of the interior bay and has a depth varying from 33 in. at the inner face of the exterior column to 18 in. at midspan. Depth at interior columns is 73 in. with the top surface of the frame horizontal between centerlines of exterior bays. Although depth at midspan may seem excessively shallow, it is shown subsequently that in this area the frame carries a large axial tensile force.

ASCE Manual No. 31 points out that the shell acts as a flange of the frame, the effective flange overhang at either side of a supporting rib in a shell roof continuous over its supports being $0.76\sqrt{rt}$. The overhang in this example is $0.76\sqrt{45 \times 0.33} = 2.94$ ft. Total overall flange width is $2 \times 2.94 + 1.50 = 7.38$ ft. In the analysis, cross sections are assumed T-shaped.

Frame analysis for loads is made by moment distribution with carry-over factors, distribution factors and fixed-end moments for horizontal members determined on the basis of parabolic haunches. (The use of parabolic haunches to approximate the circular curve of the soffit is considered sufficiently accurate.) These factors are extrapolated from values given in the *Handbook of Frame Constants.** It should be recognized that the use of these constants involves a slight inaccuracy since a horizontal centroidal axis is assumed while in reality this axis is curved. However, the effect of curvatures as large as

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

those encountered in this example may be neglected since the small error introduced is conservative.

To avoid lengthy computations in determining the moment of inertia I of the T-section, use is made of Fig. 5 in *Continuity in Concrete Building Frames** which gives I of a T-section as the I of its web times a coefficient C. This coefficient is a function of A, the ratio of flange to web widths and B, the ratio of flange to web depths. At interior columns these are:

$$A = \frac{7.38}{1.50} = 4.9$$

$$B = \frac{0.33}{6.10} = 0.054$$

From Fig. 5, $C = 1.50$. At midspan of each bay A has the same value but $B = \frac{0.33}{1.50} = 0.220$ and hence $C = 1.85$. At exterior columns $C = 1.70$ since $B = \frac{0.33}{2.75} = 0.120$.

Constants in the *Handbook* are for rectangular sections and are given in terms of the ratio of centerline to haunch depths. Therefore, the I of the T-section must be expressed in terms of the depth of a rectangular section possessing the same moment of inertia as the T. Since $I = CI_{web}$, this equivalent depth is $d\sqrt[3]{C}$. Hence equivalent depths are:

at B $\quad h_B = 2.75\sqrt[3]{1.70} = 3.27$ ft.
at midspan $\quad h_{\text{℄}} = 1.50\sqrt[3]{1.85} = 1.85$ ft.
at C $\quad h_C = 6.10\sqrt[3]{1.50} = 7.06$ ft.

The various coefficients are tabulated in Table V for the exterior bay with:

$$r_B = \frac{3.27 - 1.85}{1.85} = 0.77$$

$$r_C = \frac{7.06 - 1.85}{1.85} = 2.81$$

and for the interior bay having:

$$r_C = r_D = 2.81$$

Carry-over and stiffness factors for the exterior column, assumed to have a straight haunch, are taken from Table 52 of the *Handbook* for $r_B = \frac{2.75 - 1.50}{1.50} = 0.833$:

$$C_{AB} = -0.78$$
$$C_{BA} = -0.32$$
$$k_{BA} = 16.20$$

Assuming columns to be hinged at the base, stiffnesses of members at various points are:

$$K_{BA} = \frac{16.20 \times 1.5^3\,(1 - 0.78 \times 0.32)}{17.75} = 2.31$$

$$K_{BC} = \frac{13.20 \times 1.85^3}{40} = 2.09$$

$$K_{CB} = \frac{21.7 \times 1.85^3}{40} = 3.43$$

$$K_{CH} = \frac{4 \times 2^3\,(1 - 0.5^2)}{19.1} = 1.26$$

$$K_{CD} = \frac{32.3 \times 1.85^3}{40} = 5.11$$

Distribution factors are therefore:

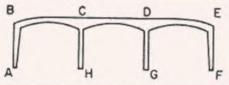
$$d_{BC} = \frac{2.09}{2.31 + 2.09} = 0.48$$

$$d_{CB} = \frac{3.43}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.35$$

$$d_{CD} = \frac{5.11}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.52$$

These values are tabulated in Table V to simplify the computations.

TABLE V—Moment Distribution For Dead and Live Loads



	B		C	D
Carry-over factor	− 0.95	− 0.58	− 0.82	− 0.82
Stiffness factor	13.2	21.7	32.3	32.3
M^F Uniform	− 0.0730	− 0.1470	− 0.1130	− 0.1130
M^F Right haunch	− 0.0012	− 0.0190	− 0.0018	− 0.0184
M^F Left haunch	− 0.0147	− 0.0050	− 0.0184	− 0.0018
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−629	−1280	−993	−993
1st Distribution	+302	+ 100	−149	−149
Carry over	− 58	− 287	+122	+122
2nd Distribution	+ 28	+ 143	−213	−213
Carry over	− 83	− 27	+175	+175
3rd Distribution	+ 40	+ 71	−105	−105
Carry over	− 41	− 38	+ 86	+ 86
4th Distribution	+ 20	+ 43	− 65	− 65
End moment	−421	−1275	−1142	−1142

The load on the frame consists of its own weight and the shell reactions. As discussed in Manual No. 31, the effect of these reactions can be simulated by applying the shell load on the frame. Since the rise is small, dead weight of the shell can be assumed to be uniform in the transverse as well as the longitudinal direction. Uniform load carried by the center frame is:

Dead wt. of shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.050 = 3.1$ kips per ft.
Live load on shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.030 = 1.9$ kips per ft.
Partial wt. of frame: $1.5 \times 1.17 \times 0.150 = 0.3$ kips per ft.
Total uniform load $= \overline{5.3}$ kips per ft.

The value 0.625×50 gives the position of zero shear on either side of the center support in a uniformly loaded continuous beam of two 50-ft. spans. The load on this portion of each shell span is carried by the center frame. Haunch loads are:

at B: $\quad 1.5\,(2.75 - 1.5) \times 0.150 = 0.28$ kips per ft.
at C: $\quad 1.5\,(6.10 - 1.5) \times 0.150 = 1.04$ kips per ft.

Utilizing coefficients in Table V, the fixed-end moments are:

$$M^F_{BC} = -(5.3 \times 0.073 + 0.28 \times 0.0147 + 1.04 \times 0.0012)\,40^2 = -629 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CB} = -(5.3 \times 0.147 + 0.28 \times 0.0050 + 1.04 \times 0.0190)\,40^2 = -1280 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CD} = -[5.3 \times 0.1130 + 1.04\,(0.0184 + 0.0018)]\,40^2 = -993 \text{ ft. kips}$$

Final moments as determined by moment distribution are tabulated in the last row of Table V.

In addition to these moments, there is induced in the frame a horizontal tensile force T which equals the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero shear as shown in Fig. 26. This force results from the satisfaction of internal equilibrium re-

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

quirements and should not be confused with thrust created by foundation restraint

To prove the existence of the force T, reference is made to Figs. 25 and 26. Internal forces in the typical rigid frame of Fig. 25(a) are equal to the sum of those present when the frame is made statically determinate by rollers at A' and those due to the final horizontal reaction $H_{A'}$. In the statically determinate condition there are no external horizontal reactions and as a result no thrust exists in member $B'C'$. However, in the indeterminate condition a thrust is induced in $B'C'$ equal to $H_{A'}$.

In a similar manner the frame of Fig. 25(b), assumed to support a thin shell roof, has no horizontal reaction at A when in the statically determinate state. However, an examination of part of the frame as the free body shown in Fig. 26 indicates that resistance must be given to the horizontal components of the T_ϕ-forces. Since there is no horizontal reaction, this resistance is supplied by the frame itself in the form of the internal force T acting in the same plane as the T_ϕ-forces. Since any indeterminate structure can be analyzed by first considering it to be statically determinate, it follows that all cross frames are subject to an internal force equal and opposite to the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces. This force, of course, is superimposed on the thrust produced by the external reactions in the final indeterminate condition.

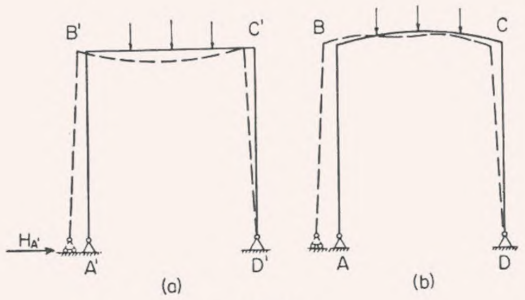


FIG. 25

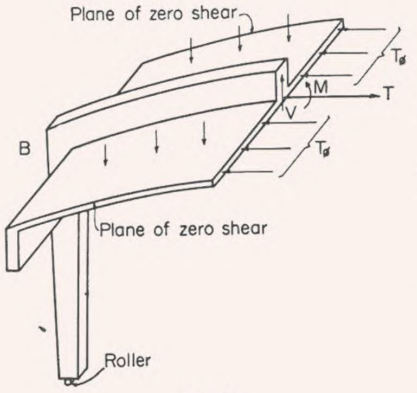


FIG. 26

When the force T acts with an eccentricity e from the centroidal axis of a member, a moment Te is produced in addition to the moment calculated for external loads. If the member is statically indeterminate the angular rotation caused by moment Te produces external reactions.

Computations for fixed-end moments in member BC resulting from the moment Te are tabulated in Table VI. The procedure is based on the method of elastic weights explained in *Analysis of Arches, Rigid Frames and Sewer Sections.** In Table VI, slide rule accuracy is sufficient since end moments produced by the T-force are small when compared with total moments. For practical purposes, fixed-end moments can be taken as being equal to the value of Te at midspan since at this point Te is relatively large and the member BC most flexible. Generally, fixed-end moments due to Te can be approximated in this manner. Table VI is included here only for completeness and as evidence of the validity of this suggested approximation. In the case of an arch rib having constant moment of inertia, fixed-end moments would be equal to the average value of the moment Te. The advisability of estimating fixed-end moments in this manner will depend upon the ratio of Te to the moment due to loads.

In Table VI depths h, Col. (1), of the frame at distances x, Col. (3), from point B are scaled from a drawing having a scale of approximately 1 in. = 3 ft. Col. (2) contains values of coefficient C interpolated linearly in proportion to the x distance from the centerline between 1.70 at B and 1.85 at centerline of span BC and between 1.85 and 1.50 at C. This coefficient when multiplied by I of the rectangular web gives the moment of inertia of the T-section. Instead of the absolute value of a, which is taken as $\frac{ds}{EI}$, Col. (4) gives relative values of $\frac{1}{Ch^3}$. Since ds is equal to zero at B, ℄ and C, no values are listed at these points.

Eccentricity e of the force T with respect to the centroidal axis is listed in Col. (7). With a frame width of 1.50 ft., overhanging flange width of 2.94 ft. and shell thickness of 0.33 ft., the distance y from bottom surface

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

TABLE VI—Determination of Fixed-End Moments Due to Moment Te in Exterior Bay

	h	C	x	$a=\frac{1}{Ch^3}$	ax	ax^2	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$	ma	max
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
B	2.75	1.70	0	—	—	—	0.82	—	0.90	—	—	—	—
1	2.5	1.71	2.0	0.037	0.07	0.2	0.71	−0.9	0.92	− 35	+ 25	+ 0.9	+ 2
2	2.1	1.74	6.0	0.062	0.37	2.2	0.55	−3.0	0.95	−120	+ 66	+ 4.1	+ 24
3	1.8	1.77	10.0	0.097	0.97	9.7	0.43	−4.6	0.98	−189	+ 81	+ 7.9	+ 79
4	1.6	1.80	14.0	0.136	1.90	26.7	0.35	−5.6	0.99	−233	+ 82	+11.1	+156
5	1.5	1.83	18.0	0.162	2.92	52.5	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	+12.6	+228
℄	1.50	1.85	20.0	—	—	—	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	—	—
6	1.5	1.81	22.0	0.164	3.61	79.4	0.31	−5.7	1.0	−239	+ 74	+12.1	+267
7	1.9	1.74	26.0	0.084	2.18	56.8	0.47	−4.4	0.99	−183	+ 86	+ 7.2	+187
8	2.6	1.67	30.0	0.034	1.02	30.6	0.76	−2.4	0.98	− 99	+ 75	+ 2.5	+ 77
9	3.8	1.60	34.0	0.011	0.37	12.7	1.29	−0.1	0.95	+ 4	− 5	− 0.1	− 2
10	5.3	1.53	38.0	0.004	0.15	5.7	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132	− 0.5	− 20
C	6.1	1.50	40.0	—	—	—	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181	—	—
			Σ	0.791	13.56	276.5						57.8	998

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

to centroidal axis is:

$$y = \frac{0.75h^2 + 2(2.94\times0.33\times0.167)}{1.5h + 2\times2.94\times0.33} = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h+1.94}$$

Since T is assumed to act at mid-depth of the flange:

$$e = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h+1.94} - 0.17$$

Values of T_ϕ in Col. (8) are scaled from Fig. 18. Total tension T is equal to the summation of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero tangential shear previously found to be at $\frac{x}{l} = 0.6$. Integrating T_ϕ on both sides of the frame gives:

$$T = 2T_\phi \cos(\phi_k-\phi)\int_0^{30} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{131}{\pi} T_\phi \cos(\phi_k-\phi) = 42\,T_\phi\cos(\phi_k-\phi)$$

Moment produced by this tensile force is equal to the product of T and $-e$ and is tabulated in Col. (11). Values in Cols. (12) and (13) are the products of those in Col. (11) and Cols. (4) and (5) respectively. The summation of these columns times $\frac{12\,ds}{E}$ represents the angular rotation and vertical displacement of joint B with respect to joint C, assuming that the member is free at B and fixed at C. Applying a moment M^F_{BC} and a vertical reaction V_B and setting angular rotation and vertical displacement at B equal to zero gives respectively:

$$0.791\,M^F_{BC} + 13.56\,V_B + 57.8 = 0$$
$$13.56\,M^F_{BC} + 276.5\,V_B + 998 = 0$$

The solution of these simultaneous equations gives:

$$M^F_{BC} = -70 \text{ ft. kips}$$
$$V_B = -0.17 \text{ kips}$$

and by statics:

$$M^F_{CB} = -70-(40\times0.17) = -77 \text{ ft. kips}$$

As stated earlier, an approximate value of -74 ft. kips, the midspan moment, could have been used. Therefore, for the interior bay fixed-end moments are taken as -82 ft. kips, the value of midspan moment given in Table VII. Thrust, eccentricity and moment of the force T at various points between joint C and the centerline of span CD are tabulated in Table VII. Eccentricity is taken directly from Table VI while values of T_ϕ are scaled from Fig. 12.

End moments resulting from the T-forces are computed by moment distribution as shown in Table VIII. Total moments equal to the sum of end moments due to vertical loads and T-forces are likewise included in Table VIII.

TABLE VII—T-FORCE IN INTERIOR BAY

x	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181
2	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132
6	1.29	−0.3	0.95	− 12	+ 16
10	0.76	−2.8	0.98	−115	+ 87
14	0.47	−4.9	0.99	−204	+ 96
18	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78
20	0.31	−6.3	1.0	−265	+ 82

TABLE VIII—MOMENT DISTRIBUTION DUE TO ECCENTRICITY OF T_ϕ-FORCES

	B	C		D
Carry-over factor Distribution factor	−0.95 0.48	−0.58 0.35	−0.82 0.52	−0.82 0.52
Fixed-end moments 1st Distribution Carry over 2nd Distribution	−70 +34 —	−77 — −32 +11	−82 — — −17	−82 — — −17
End moment End moment—Table V Total moment	− 36 −421 −457	− 98 −1275 −1373	− 99 −1142 −1241	− 99 −1142 −1241

With end moments determined, moment at any other point in the frame is found by statics. For example, moment at midspan of the interior bay is:

$$M = -1241 + (5.3\times0.125 + 1.04\times0.0208)40^2 + 82$$
$$= -64 \text{ ft. kips}$$

in which 0.0208 is the simple beam centerline moment coefficient for parabolic haunch loads. In the above expression the moment +82 ft. kips due to the eccentric T-force is included. Because the distance center to center of columns is used, midspan moment should be modified to take into account the width of columns. Vertical reactions at columns CH and DG are equal to $\left(5.3 + \frac{1.04}{3}\right)\times 20 = 113$ kips. In accordance with recommendations in Section 13 of *Continuity in Concrete Building Frames* the modified moment is:

$$M = -64 - \frac{113\times2}{6} = -102 \text{ ft. kips}$$

Tensile thrust at the section is:

$$N = -265 + \frac{457}{17.8} + \frac{1373-1241}{19.1} = -232 \text{ kips}$$

Because of this large thrust, tension can be assumed to exist over the entire cross section and total required steel area is:

$$\frac{232{,}000}{20{,}000} = 11.6 \text{ sq.in.}$$

This total area is apportioned between top and bottom bars by making the centroid of reinforcement coincide with the line of action of thrust. Distance from bottom of the beam to lower reinforcement is assumed to be 1¼ in. or 0.10 ft. and to top reinforcement 1.22 ft. As shown in Fig. 27, eccentricity of thrust N measured from the centroid of bottom reinforcement is:

$$0.31 + 0.17 - 0.10 + \frac{102}{232} = 0.82 \text{ ft.}$$

Top reinforcement A'_s is determined by taking moments of internal forces about the bottom layer:

$$0.82\,N = A'_s \times 1.12 \times 20{,}000$$

from which:

$$A'_s = \frac{11.6\times0.82}{1.12} = 8.5 \text{ sq.in.}$$
$$A^b_s = 11.6 - 8.5 = 3.1 \text{ sq.in.}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

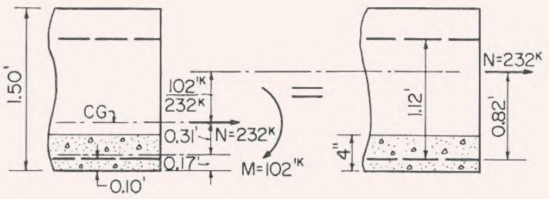


FIG. 27

In the exterior bay, vertical reaction at the face of column *CH* is:

$$V_C = \left(5.3+1.04\times\frac{7}{24}+0.28\times\frac{1}{24}\right)20+\frac{1373-457}{40}$$
$$= 112+23 = 135 \text{ kips}$$

In the above expression, reactions of the haunch loads of member *BC* are equal to $\frac{7}{24}$ and $\frac{1}{24}$ of $W\times\frac{l}{2}$. Taking into account the *T*-force and the reduction because of the use of the clear span, moment at the column face is:

$$M = -1373-157+\frac{135\times 2}{3} = -1440 \text{ ft. kips}$$

Interpolating for the value of T at $x = 39$ ft., thrust at the section is:

$$N = 71+26 = 97 \text{ kips}$$

Reinforcement is determined for this moment and thrust as illustrated in Example 7 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*. At midspan of exterior bay:

$$M = -(1373+457)0.5+[5.3\times 0.125$$
$$+0.0104(1.04+0.28)]40^2+78-\frac{135\times 2}{6}$$
$$= +200 \text{ ft. kips}$$
$$N = -252+26 = -226 \text{ kips}$$

Example 8 of the *Handbook* may be followed for design of reinforcement. The small amount of compression reinforcement required at midspan can be supplied by extending a few bars from the top negative reinforcement. It is desirable to have some of these bars continuous in any case since a large tensile force exists throughout most of the frame.

Moment and thrust at joint *B* are obtained in a conventional manner since *T* is zero at this point.

As pointed out in ASCE Manual No. 31, strains in a frame over which a shell is continuous induce a longitudinal moment M_x at the junction of shell and frame equal to:

$$M_x = -\frac{t^2}{3.56}f_c \qquad (23)$$

in which f_c is the stress in the frame considered to be a homogeneous section. For example, at midspan of the interior bay:

$h = 18$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.85$
$b-b' = 2.94\times 2\times 12 = 70.6$ in.
$M = -102$ ft. kips
$N = -232$ kips

The distance y_b from centroid of section to middle of shell equals 0.31 ft. or 3.7 in. Therefore:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{18^4\times 1.85}{12\times(-3.7)} = -4380 \text{ in.}^3$$
$$A = 18^2+4\times 70.6 = 606 \text{ in.}^2$$

and at mid-depth of the shell:

$$f_c = -\left(\frac{-102\times 12000}{-4380}-\frac{232\times 1000}{606}\right)$$
$$= +103 \text{ psi (tension)}$$

From equation (23):

$$M_x = -\frac{4^2\times 103}{3.56} = -460 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At the face of column *CH* with:

$h = 68$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.50$
$b-b' = 70.6$ in.
$y_b = 2.17$ ft. or 26.0 in.
$M = -1440$ ft. kips
$N = +97$ kips

then:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{68^3\times 18\times 1.50}{12\times(-26.0)} = -27{,}200 \text{ in.}^3$$
$$A = 68\times 18+70.6\times 4 = 1506 \text{ in.}^2$$
$$f_c = -\left(\frac{-1440\times 12000}{-27{,}200}+\frac{97\times 1000}{1506}\right)$$
$$= -700 \text{ psi}$$

and:

$$M_x = -\frac{4^2\times(-700)}{3.56} = +3{,}100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At crown of exterior bay:

$$\frac{I}{y_b} = -4{,}380 \text{ in.}^3$$
$A = 606$ in.^{2}
$M = +200$ ft. kips
$N = -226$ kips

Therefore:

$$f_c = -\left(\frac{200\times 12000}{-4380}-\frac{226\times 1000}{606}\right)$$
$$= +921 \text{ psi}$$

from which:

$$M_x = -\frac{4^2\times 921}{3.56} = -4100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

M_x is computed in a similar manner at other points.

M_x is a local moment and decreases rapidly. At a distance of $\frac{2.94}{2}$ ft. or about 1.5 ft. from the junction of shell and frame its value is reduced by 76 per cent and practically diminishes to zero at 4 ft. As a result, only short bars are needed to handle the induced stresses. In providing the required steel area it may be advantageous in some cases to utilize previously provided longitudinal reinforcement if it is not already stressed to its maximum value. Relatively large values of M_x at the crown of the exterior bay and at the face of interior columns indicate that the shell should be thickened to about 6 in. at the frame, tapering to 4 in. within a distance of 3 ft.

Portland Cement Association · 33 West Grand Avenue, Chicago, Illinois 60610

Printed in U.S.A.

R/C 30

ST 77

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

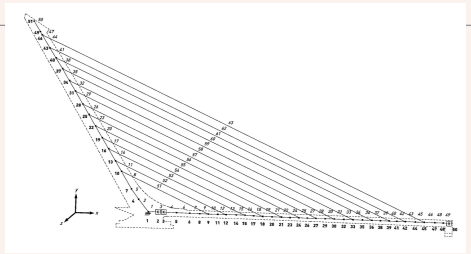
G مجموعة بيانات جسر ألاميو

ملخص

نشر Pollalis, 1999 كتابا ممتازا يفصل إنشاء جسر ألاميو الذي صممه كالاترافا (§15.6.1.3). وقد نشر فيه مجموعة البيانات اللازمة لتحليل الجسر بالعناصر المحددة، وبوجه خاص: إحداثيات العقد، واتصال العناصر وخصائصها، والشروط الحدية، والأحمال.

نعيد عرض هذه البيانات هنا للقارئ الراغب في نمذجة الجسر بشيفرة بسيطة، مثل الشيفرة الواردة في §I.2.7.

وتحظى قائمة حالات التحميل، الجدول G.4، بأهمية خاصة لأنها تبين أنواع الأحمال المختلفة التي ينبغي للمنشأ مقاومتها.





الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول G.1: إحداثيات عقد جسر ألاميو (Pollalis, 1999)

#	X	y	z	Node	x	y	z
1	1.00	13.50	0.00	27	113.60	12.12	0.00
2	7.61	13.30	0.00	28	44.95-	84.33	0.00
3	11.65	13.18	0.00	29	119.57	12.06	0.00
4	5.58-	21.57	0.00	30	125.54	12.00	0.00
5	19.72	12.94	0.00	31	49.47-	91.73	0.00
6	28.43	12.68	0.00	32	131.53	11.93	0.00
7	10.28-	28.29	0.00	33	137.52	11.87	0.00
8	35.64	12.50	0.00	34	54.00-	99.12	0.00
9	42.85	12.32	0.00	35	143.49	11.80	0.00
10	17.55-	39.82	0.00	36	149.45	11.74	0.00
11	48.99	12.20	0.00	37	58.52-	106.52	0.00
12	55.15	12.09	0.00	38	155.41	11.68	0.00
13	22.10-	47.23	0.00	39	161.37	11.62	0.00
14	60.86	12.15	0.00	40	63.04-	113.92	0.00
15	66.58	12.22	0.00	41	167.33	11.56	0.00
16	26.65-	54.65	0.00	42	173.30	11.49	0.00
17	72.21	12.33	0.00	43	67.56-	121.32	0.00
18	77.83	12.43	0.00	44	179.30	11.43	0.00
19	31.19-	62.04	0.00	45	185.31	11.36	0.00
20	83.79	12.38	0.00	46	72.10-	128.76	0.00
21	89.75	12.33	0.00	47	191.70	11.29	0.00
22	35.75-	69.46	0.00	48	197.70	11.23	0.00
23	95.71	12.28	0.00	49	73.43-	130.94	0.00
24	101.67	12.22	0.00	50	201.00	11.20	0.00
25	40.34-	76.89	0.00	51	78.21-	138.75	0.00
26	107.64	12.17	0.00				

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول G.2: خصائص عناصر جسر ألاميو (Pollalis, 1999)

#	i	j	^{2}A mm	^{4}m I_Z	^{4}m I_Y	^{4}m J	#	i	j	^{2}A mm	^{4}m I_Z	^{4}m I_Y	^{4}m J
الصاري							سطح الجسر						
2	1	4	86.06	1048.40	524.44	721.30	1	1	2	82.24	672.00	946.30	92.90
5	4	7	68.33	625.90	423.43	424.70	3	2	3	60.99	327.80	724.50	92.90
8	7	10	62.90	512.70	374.38	321.83	4	3	5	40.30	95.92	572.90	92.90
11	10	13	56.80	428.90	354.31	293.87	6	5	6	33.29	61.03	449.80	89.93
14	13	16	54.15	393.20	334.82	267.32	7	6	8	33.37	68.44	371.83	69.83
17	16	19	51.71	361.73	315.92	242.20	9	8	9	26.22	61.60	304.29	49.74
20	19	22	48.95	327.90	297.58	218.45	10	9	11	17.02	41.47	248.56	39.64
23	22	25	46.57	300.05	279.78	196.11	12	11	12	14.22	33.91	233.18	34.90
26	25	28	53.29	278.64	268.43	175.12	13	12	14	12.84	31.61	232.17	32.50
29	28	31	50.96	253.40	257.61	155.49	15	14	15	11.70	29.69	220.82	31.60
32	31	34	48.65	229.90	241.41	137.19	16	15	17	10.70	26.91	219.00	31.60
35	34	37	46.04	205.01	225.72	120.20	18	17	18	9.46	21.67	217.51	31.60
38	37	40	43.78	184.90	210.54	104.51	19	18	20	9.46	21.67	217.51	31.60
41	40	43	41.23	163.75	195.85	90.07	21	20	21	9.13	21.12	216.04	28.80
44	43	46	39.02	146.72	181.63	76.89	22	21	23	8.79	20.57	214.57	26.10
47	46	49	37.46	135.37	167.89	64.91	24	23	24	8.79	20.57	214.57	26.10
50	49	51	37.46	135.37	167.89	64.91	25	24	26	8.93	21.04	214.70	26.50
الكبلات							27	26	27	8.93	21.04	214.70	26.50
51	9	10	0.00	0.00	0.00	0.00	28	27	29	8.93	21.04	214.70	26.50
52	12	13	0.00	0.00	0.00	0.00	30	29	30	8.93	21.04	214.70	26.50
53	15	16	0.00	0.00	0.00	0.00	31	30	32	8.93	21.04	214.70	26.50
54	18	19	0.00	0.00	0.00	0.00	33	32	33	9.26	21.63	216.17	29.30
55	21	22	0.00	0.00	0.00	0.00	34	33	35	9.60	22.15	217.64	32.20
56	24	25	0.00	0.00	0.00	0.00	36	35	36	9.60	22.15	217.64	32.20
57	27	28	0.00	0.00	0.00	0.00	37	36	38	9.60	22.15	217.64	32.20
58	30	31	0.00	0.00	0.00	0.00	39	38	39	9.60	22.15	217.64	32.20
59	33	34	0.00	0.00	0.00	0.00	40	39	41	9.60	22.15	217.64	32.20
60	36	37	0.00	0.00	0.00	0.00	42	41	42	9.60	22.15	217.64	32.20
61	39	40	0.00	0.00	0.00	0.00	43	42	44	9.46	21.67	217.51	31.60
62	42	43	0.00	0.00	0.00	0.00	45	44	45	9.46	21.67	217.51	31.60
63	45	46	0.00	0.00	0.00	0.00	46	45	47	9.46	21.67	217.51	31.60
							48	47	48	9.46	21.67	217.51	31.60
							49	48	50	9.46	21.67	217.51	31.60

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول G.3: الشروط الحدية لجسر ألاميو (Pollalis, 1999)

	الإزاحة			الدوران		
#	X	Y	Z	X	Y	Z
1	مقيد	مقيد	مقيد	مقيد	مقيد	مقيد
2	حر	مقيد	مقيد	مقيد	حر	حر
3	حر	مقيد	مقيد	مقيد	حر	حر
50	حر	مقيد	مقيد	مقيد	حر	حر

جدول G.4: تركيبات أحمال جسر ألاميو (Pollalis, 1999)

1. الأحمال الميتة والدائمة	
الأحمال الميتة والدائمة للصاري، W_{pylon}	1.1
الأحمال الميتة والدائمة لسطح الجسر، W_{deck}	1.2
الشد اللاحق لكبلات التعليق، T_{cable}	1.3
2. الأحمال الحية	
حمل منتظم مقداره 4 KPa على سطح الجسر وممر المشاة كله	2.1
حمل منتظم مقداره 4 KPa على نصف السطح ونصف ممر المشاة لإحداث أكبر لي	2.2
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 6، على بعد 172 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.3
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 9، على بعد 160 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.4
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 15، على بعد 136 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.5
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 21، على بعد 104 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.6
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 27، على بعد 88 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.7
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 33، على بعد 64 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.8
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 39، على بعد 40 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.9
حمل شاحنة 600 kN عند العقدة 45، على بعد 16 m من المسند الشرقي، بلامركزية 13.30 m	2.10
3. الأحمال الحرارية	
تغير منتظم في درجة حرارة الكبلات بمقدار 26°C	3.1
تغير منتظم في درجة حرارة الصاري بمقدار 13.5°C	3.2
تغير منتظم في درجة حرارة سطح الجسر بمقدار 23.3°C	3.3
تغير خطي في درجة الحرارة عبر سطح الجسر بمقدار 21°C	3.4
تغير طولي خطي في درجة الحرارة داخل الصاري بمقدار 4.5°C	3.5
تغير عرضي خطي في درجة الحرارة داخل الصاري بمقدار 5.1°C	3.6
4. أحمال الرياح الساكنة	
حمل رياح طولي	4.1
حمل رياح عرضي	4.2
5. دوران أساس الصاري	
دوران طولي 0.25% (0.225°)، والدوران الأقصى المتوقع 0.06°	5.1
دوران عرضي 0.10% (0.090°)، والدوران الأقصى المتوقع 0.026°	5.2
6. الأحمال الزلزالية الساكنة	
حمل زلزالي طولي على الصاري (3% من الحمل الميت)	6.1
حمل زلزالي عرضي على الصاري (3% من الحمل الميت)	6.2

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

H الأيقونات المعرِّفة: التجزئة البصرية

أُنشئ هذا الملحق، وكذلك شيفرة MATLAB®المناظرة له (§I.8.1)، بالكامل باستعمال أداة ذكاء اصطناعي (Anthropic, 2025).

ملخص

تقدم هذه الوثيقة شرحاً شاملاً للأيقونات المعرِّفة، وهي تمثيلات بصرية لقيم التجزئة تنشئ أنماطاً فريدة يسهل تمييزها. وتتناول الأسس النظرية لخوارزميات توليد هذه الأيقونات وتفاصيل تنفيذها في برنامج MATLAB المستخدم هنا. كما توضح كيف يمكن توظيف الأيقونات المعرِّفة في التمثيل البصري لفصول الكتاب، بحيث تنشئ "بصمات" بصرية مميزة تعمل علامات أو معرِّفات للفصول. ويناقش الملحق المبادئ الرياضية وجوانب التنفيذ العملية معاً، بما يوفر فهماً متكاملاً لعملية توليد الأيقونة المعرِّفة.

H.1 مقدمة إلى الأيقونات المعرِّفة 2291
H.2 خوارزميات توليد الأيقونات المعرِّفة . . . 2292
H.3 مقارنة تطبيقَي GitHub وStack Exchange 2294
H.4 التنفيذ في MATLAB 2294
H.5 مقاطع الشيفرة الأساسية 2297
H.6 استعمال البرنامج 2298
H.7 المزايا والتطبيقات 2298
H.8 الخلاصة 2299

الجزء الثالث: تطبيقات الشيفرات

H.1 مقدمة إلى الأيقونات المعرِّفة

الأيقونات المعرِّفة تمثيلات بصرية لقيم التجزئة، تستعمل عادة لإنشاء صور فريدة يسهل تمييزها من غير الحاجة إلى تصميم الصور أو تخزينها يدوياً. وقد طُورت في الأصل صوراً رمزية للمستخدمين في المجتمعات الإلكترونية، ثم وجدت تطبيقات في سياقات مختلفة تفيد فيها "البصمة" البصرية للبيانات النصية.

ومن خصائصها الرئيسة:

- **التوليد الحتمي**: ينتج نص الإدخال نفسه النمط نفسه دائماً.
- **التميّز البصري**: تنتج المدخلات المختلفة أنماطاً مختلفة بصرياً.
- **الإنشاء الآلي**: لا يلزم تدخل بشري في التصميم.
- **الحد الأدنى من التخزين**: لا يلزم تخزين سوى النص المصدر، لا الصورة نفسها.

ومن التطبيقات الشائعة الصور الرمزية لمستخدمي GitHub ومعرِّفات مستخدمي Stack Exchange، إذ تولد أنماطاً مميزة استناداً إلى أسماء المستخدمين أو عناوين بريدهم الإلكتروني.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

تطبيقات في نشر الكتب

يمكن أن تؤدي الأيقونات المعرِّفة في نشر الكتب الوظائف الآتية:

- علامات بصرية للفصول.
- بصمات للمحتوى تميز بصرياً بين الموضوعات المتشابهة.
- عناصر زخرفية تشير إلى المحتوى على نحو غير مباشر.
- وسائل مساعدة على التنقل تعين القارئ على تمييز الفصول بصرياً.

يؤدي توليد أيقونة معرِّفة من عنوان كل فصل إلى إنشاء توقيع بصري فريد يقابل محتوى ذلك الفصل، فيحسن التعرف عليه والتنقل إليه ويضيف في الوقت نفسه عنصراً بصرياً جذاباً إلى الكتاب.

H.2 خوارزميات توليد الأيقونات المعرِّفة

نظرة عامة على الخوارزمية الأساسية

تقوم العملية الأساسية لتوليد الأيقونات المعرِّفة على تحويل نص الإدخال إلى نمط بصري عبر سلسلة من الخطوات الحتمية:

Algorithm 1 خوارزمية توليد الأيقونة المعرِّفة

Require: سلسلة نصية (عنوان الفصل أو المعرِّف)
Ensure: نمط بصري (أيقونة معرِّفة)
تولد قيمة تجزئة تشفيرية لنص الإدخال
تعريف شبكة (عادة 5×5)
استعمال أجزاء من قيمة التجزئة لتحديد أنماط الخلايا:
    أ. الخلايا التي تحتوي أشكالاً (حالة تشغيل/إيقاف)
    ب. الأشكال المستعملة في الخلايا النشطة
    ج. الألوان المطبقة على الأشكال
تطبيق التناظر (عادة بعكس نصف الشبكة مرآتياً)
تصيير النمط الناتج في صورة

دالة التجزئة

دالة التجزئة هي أساس توليد الأيقونة المعرِّفة؛ إذ تحول نصاً متغير الطول إلى متتالية ثابتة الطول من القيم. وينبغي أن تحقق دالة التجزئة الفعالة لهذا الغرض ما يأتي:

- **الحتمية**: ينتج الإدخال نفسه الخرج نفسه دائماً.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **تأثير الانهيار الجليدي**: تؤدي التغييرات الصغيرة في الإدخال إلى تغييرات كبيرة في الخرج.
- **التوزيع المنتظم**: تتوزع قيم الخرج بانتظام على المجال الممكن.

مع أن التطبيقات المهنية تستعمل عادة دوال التجزئة التشفيرية مثل MD5 أو SHA-1 أو SHA-256، يستعمل برنامج MATLAB هنا دالة تجزئة مخصصة أبسط لأغراض تعليمية:

```
function hash_values = simpleHash(str)
    % Sum ASCII values with position weighting
    hash_values = zeros(1, 32);
    for i = 1:length(str)
        char_code = double(str(i));
        for j = 1:min(32, length(str))
            position_factor = mod(i*j, 32) + 1;
            hash_values(position_factor) = mod(hash_values(position_factor) + char_code * i, 256);
        end
    end
end
```

Listing H.1: دالة تجزئة بسيطة

تنشئ هذه الدالة مصفوفة من 32 عنصراً تتراوح قيمها بين 0 و255، وتدمج رموز المحارف ومعلومات مواضعها في سلسلة الإدخال.

إسناد النمط

تحول عملية إسناد النمط قيم التجزئة إلى شبكة بصرية، يكون مقاسها عادة 5×5. وتشمل هذه العملية:

1. **تهيئة الشبكة**: إنشاء شبكة فارغة بالمقاس المطلوب.
2. **إسناد قيم الخلايا**: إسناد قيم التجزئة إلى خلايا الشبكة.
3. **تطبيق التناظر**: عكس جزء من الشبكة مرآتياً لتحقيق التوازن البصري.

تكون كل خلية في تطبيقات مثل GitHub إما "مملوءة" أو "فارغة"، أي إن النمط ثنائي. أما في النسخ الأكثر تطوراً، مثل النسخة المستخدمة هنا، فيمكن أن تحتوي كل خلية أشكالاً مختلفة تحددها قيمة التجزئة المناظرة.

التصيير البصري

تحول الخطوة الأخيرة النمط المجرد إلى تمثيل بصري:

- **اختيار الشكل**: تحويل قيم الخلايا إلى أشكال محددة.
- **تطبيق اللون**: تطبيق ألوان مشتقة من قيمة التجزئة.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **المقياس والحشو**: ضبط الخصائص البصرية لتحقيق الوضوح.

H.3 مقارنة تطبيقَي GitHub وStack Exchange

تنفذ المنصات المختلفة الأيقونات المعرِّفة باختلافات طفيفة:

تطبيق GitHub

يستعمل GitHub نهجاً بسيطاً وفعالاً:

- شبكة 5×5 (25 خلية).
- نمط ثنائي (كل خلية إما مملوءة أو فارغة).
- تناظر أفقي (يعكس النصف الأيسر إلى اليمين).
- لون واحد مشتق من قيمة التجزئة مع خلفية بيضاء.

لا يتطلب ذلك سوى 15 بتاً من المعلومات (نصف الشبكة مضافاً إليه العمود الأوسط)، إلى جانب بيانات اللون.

تطبيق Stack Exchange

يستعمل Stack Exchange، ومنه Stack Overflow، نهجاً أكثر تنوعاً:

- عدة أشكال ممكنة في كل خلية (مربعات ومثلثات).
- مخطط لوني واحد.
- خلفية فاتحة عليها أشكال ملونة.
- تناظر أفقي.

يستلهم التطبيق المستخدم هنا كلا النهجين ويضيف إليهما خصائص أخرى.

H.4 التنفيذ في MATLAB

يولد برنامج MATLAB الأيقونات المعرِّفة بالخصائص الآتية:

نظرة عامة على البرنامج

يأخذ البرنامج مدخلين:

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- اسم ملف PDF الناتج.
- عنوان فصل يستعمل لتوليد الأيقونة المعرِّفة.

وينتج صورة ذات لوحتين تعرضان:

- الأيقونة المعرِّفة المصيرة بأشكال ملونة (الجانب الأيسر).
- مصفوفة النمط العددية التي تبين القيم الأساسية (الجانب الأيمن).

يعرض العنوان كلاً من عنوان الفصل وجزءاً من قيمة تجزئته، بما يتيح تتبع عملية التوليد.

خصائص البرنامج الرئيسة

1. **أنواع متعددة من الأشكال**: بخلاف التطبيقات الأبسط، يستعمل البرنامج خمس حالات مختلفة لكل خلية:
   - 0: خلية فارغة (بلا شكل).
   - 1: مربع مستدير الزوايا.
   - 2: مثلث (من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين).
   - 3: مثلث (من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار).
   - 4: دائرة.
2. **مخطط ألوان متكاملة**: بدلاً من استعمال لون واحد، يولد البرنامج عدة ألوان متكاملة استناداً إلى قيمة التجزئة، فتنتج أنماط أكثر جاذبية وتميزاً بصرياً.
3. **خلفية شفافة**: يستعمل الخرج خلفية شفافة، مما يجعله ملائماً للدمج في أنماط وثائق مختلفة.
4. **تمثيل مزدوج**: يوفر العرض المتجاور للأيقونة البصرية وتمثيلها العددي قيمة تعليمية، لأنه يوضح عملية الإسناد.
5. **خرج PDF**: يحفظ البرنامج الأيقونة المعرِّفة مباشرة في ملف PDF يسمى وفق معامل الإدخال الأول.

عملية التنفيذ التفصيلية

توليد قيمة التجزئة وإسناد النمط

تتبع العلاقة بين قيمة التجزئة وقيم الشبكة العملية الآتية:

1. **إنشاء قيمة التجزئة**:
   - تحول الدالة `simpleHash` عنوان الفصل إلى مصفوفة من 32 عنصراً.
   - تتراوح القيم من 0 إلى 255 استناداً إلى رموز المحارف ومواضعها.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

2. **إنشاء مصفوفة النمط:**

- تهيأ مصفوفة 5×5 بقيم صفرية.
- تنفذ العمليات الآتية لكل خلية في النصف الأيسر، مضافاً إليه العمود الأوسط إذا كان المقاس فردياً:

```
hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1
(pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5)
```

- تحول كل قيمة إلى المجال 0–4 باستعمال باقي القسمة.
- يعكس النصف الأيسر مرآتياً إلى النصف الأيمن.

مثال على إسناد خلية

لخلية معينة في الموضع (i,j):

1. احسب دليل قيمة التجزئة:
$$hash\_idx = mod((i-1) \times size\_matrix + j, 32) + 1$$
2. مثلاً، للخلية (2,3) في شبكة 5×5:
$$hash\_idx = mod((2-1) \times 5 + 3, 32) + 1 = 8$$
3. استخرج قيمة التجزئة عند ذلك الدليل:
$$hash\_value = hash\_values(hash\_idx)$$
4. إذا كانت $hash\_values(8) = 173$، تستعمل القيمة 173.
5. حوّل القيمة إلى نوع شكل باستعمال باقي القسمة:
$$pattern(i,j) = mod(hash\_value, 5) = mod(173, 5) = 3$$
6. تأخذ الخلية (2,3) الشكل رقم 3 (مثلثاً يمتد من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار).

توليد الألوان

تشتق الألوان أيضاً من قيمة التجزئة:

1. احسب درجة اللون الأساسية من قيم التجزئة الأولى:
$$base\_hue = mod(sum(hash\_values(1:3)), 360)/360$$
2. ولد ألواناً متكاملة بإزاحة درجة اللون:

```
colors = [
    hsv2rgb([mod(base_hue, 1), 0.8, 0.9]);      % Primary
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]); % Complement 1
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.5, 1), 0.8, 0.8]); % Complement 2
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85]) % Complement 3
```


الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

;[

3. أسند الألوان إلى الخلايا استناداً إلى الموضع والقيمة:
$$color\_idx = mod(i \times j + value, 4) + 1$$

H.5 مقاطع الشيفرة الأساسية

توضح مقاطع الشيفرة الآتية الأجزاء الرئيسة من التنفيذ:

توليد النمط

```
% Fill half the pattern with values from the hash
for i = 1:size_matrix
    for j = 1:floor(size_matrix/2)
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);

        % Mirror for symmetry
        pattern(i, size_matrix-j+1) = pattern(i,j);
    end

    % Middle column for odd-sized grid
    if mod(size_matrix, 2) == 1
        j = ceil(size_matrix/2);
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end
```

Listing H.2: توليد النمط من قيمة التجزئة

تصيير الأشكال

```
case 4 % Circle
    center_r = (row_start + row_end) / 2;
    center_c = (col_start + col_end) / 2;
    radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9; % 90% of half cell size

    for r = row_start:row_end
        for c = col_start:col_end
            distance = sqrt((r - center_r)^2 + (c - center_c)^2);
            if distance <= radius
                identicon(r, c, :) = color;
            end
        end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
end
```

Listing H.3: مثال على تصيير شكل (دائرة)

H.6 استعمال البرنامج

تشغيل البرنامج النصي

لاستعمال البرنامج:

1. احفظ برنامج MATLAB النصي باسم `generateIdenticon.m`.
2. افتح MATLAB وانتقل إلى المجلد الذي يحتوي البرنامج النصي.
3. شغل البرنامج بكتابة `generateIdenticon` في نافذة أوامر MATLAB.
4. عند ظهور المطالبة، أدخل اسم الملف المطلوب (مثل "C-14").
5. عند ظهور المطالبة، أدخل عنوان الفصل (مثل "Performance Based Earthquake Engineering").
6. يولد البرنامج الأيقونة المعرِّفة ويحفظها ملف PDF (مثل "C-14.pdf").

فهم الخرج

يحتوي ملف PDF الناتج على:

- عنوان يبين اسم الفصل وجزءاً من قيمة تجزئته.
- اللوحة اليسرى: الأيقونة المعرِّفة البصرية بأشكالها الملونة.
- اللوحة اليمنى: المصفوفة العددية (0–4) التي تبين القيم التي ولدت كل شكل.

يساعد هذا التمثيل المزدوج على فهم كيفية تحويل عنوان الفصل إلى نمط بصري فريد.

H.7 المزايا والتطبيقات

مزايا الأيقونات المعرِّفة

- **التفرد**: تنتج عناوين الفصول المختلفة أنماطاً مختلفة بصرياً.
- **قابلية إعادة الإنتاج**: ينتج العنوان نفسه النمط نفسه دائماً.
- **الكفاءة**: لا حاجة إلى إنشاء الصور أو تخزينها يدوياً.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- **قابلية التوسع**: يمكن توليد أيقونات فريدة لأي عدد من الفصول.

تطبيقات في نشر الكتب

يمكن أن تحسن الأيقونات المعرِّفة الكتب بطرائق عدة:

- **تمييز الفصول**: علامات بصرية تساعد القراء على التعرف على الفصول وتذكرها.
- **وسائل مساعدة على التنقل**: إشارات بصرية تدعم التنقل السريع في الكتاب.
- **اتساق التصميم**: لغة بصرية موحدة في أنحاء الكتاب.
- **بصمة المحتوى**: تمثيل بصري لـ"جوهر" المحتوى.

H.8 الخلاصة

توفر الأيقونات المعرِّفة حلاً أنيقاً لإنشاء تمثيلات بصرية فريدة للمحتوى النصي. فمن خلال توليد أنماط مميزة من عناوين الفصول، تؤدي دور وسائل عملية للمساعدة على التنقل وعناصر جمالية في تصميم الكتاب معاً.

يجمع تنفيذ MATLAB المستخدم هنا خصائص من عدة مناهج لتوليد الأيقونات المعرِّفة، فينتج أنماطاً جذابة بصرياً متعددة الأشكال والألوان، مع الحفاظ على الخصيصتين الأساسيتين: الحتمية والتفرد. كما يوفر العرض المزدوج للنمط البصري وقيمه العددية الأساسية فهماً تعليمياً لعملية التوليد.

يوضح هذا النهج في تمييز الفصول كيف يمكن للتقنيات الخوارزمية أن تعزز التصميم التقليدي للكتب، فتنشئ جسراً بين المحتوى النصي والتعرف البصري يفيد القراء بتحسين التنقل وسهولة التذكر.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I شيفرات MATLAB®وMathematica

The MATLAB® codes presented in this appendix were originally written by the author. They were subsequently refactored by Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) for clarity, documentation, and pedagogical accessibility — with improved variable naming, inline explanations of the underlying theory, and correction of minor bugs where identified. The algorithms and numerical logic are entirely those of the original author; Claude's contribution was strictly editorial. For this reason, and to avoid any risk of corrupting the code during automated translation, this appendix is presented in English only.

Les codes MATLAB® présentés dans cette annexe ont été écrits à l'origine par l'auteur. Ils ont ensuite été remaniés par Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) dans un souci de clarté, de documentation et d'accessibilité pédagogique — avec une amélioration des noms de variables, des explications intégrées de la théorie sous-jacente, et la correction de bogues mineurs identifiés au fil du travail. Les algorithmes et la logique numérique sont entièrement ceux de l'auteur original ; la contribution de Claude a été strictement éditoriale. Pour cette raison, et afin d'éviter tout risque d'altération du code lors d'une traduction automatique, cette annexe est présentée en anglais uniquement.

Los códigos de MATLAB® presentados en este apéndice fueron escritos originalmente por el autor. Posteriormente fueron refactorizados por Claude (Anthropic, Sonnet 4.6, 2026) con el fin de mejorar la claridad, la documentación y la accesibilidad pedagógica — con una nomenclatura de variables más descriptiva, explicaciones integradas de la teoría subyacente, y la corrección de errores menores identificados durante el proceso. Los algoritmos y la lógica numérica son íntegramente los del autor original; la contribución de Claude fue estrictamente editorial. Por esta razón, y para evitar cualquier riesgo de alteración del código durante una traducción automática, este apéndice se presenta únicamente en inglés.

صخلم

This appendix presents a comprehensive collection of MATLAB and Mathematica codes implementing the fundamental and advanced computational methods described throughout the book. The codes cover foundational structural mechanics (statics, matrix methods for trusses and beams), classical and advanced analysis techniques (variational methods, isoparametric finite elements), and numerical simulation algorithms (Monte Carlo sampling, uncertainty propagation). Each code is documented with variable naming conventions, inline theoretical explanations, and worked examples to support both learning and practical application. The software implementations translate the mathematical frameworks and algorithms presented in the main chapters into executable computational tools suitable for structural analysis, parameter identification, and reliability assessment. This appendix is presented in English only to preserve code integrity across editions.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods I.1
2301
Statics matrix of a truss B I.1.1
2302
St louis arch shape I.1.2
2305
Arbitrary three hinged circular arch; mathematica I.1.3
2306
Collapse of masonry arches I.1.4
2317
Main I.1.5
2317
Large deflection of a beam I.1.6
2329
Part II: Structural Design and Analysis I.2
2335
Design of cylindrical shells I.2.1
2335
Approximate frame analysis; cantilever method I.2.2
2349
Non uniform torsion I.2.3
2363
Orthogonal frame I.2.4
2366
Hybrid orthogonal frame I.2.5
2370
Frame; hard-wired I.2.6
2375
Direct stiffness method; frame I.2.7
2380
Main code I.2.8
2380
Stiffness matrix of non-prismatic members I.2.9
2393
Isostatic lines I.2.10
2401
Evolutionary design I.2.11
2407
Main I.2.12
2407
Column interaction diagram I.2.13
2414
Variational methods; mathematica I.2.14
2418
Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to lateral load I.2.15
2429
Isoparametric elements I.2.16
2432
Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior I.3
2444
Incremental plasticity I.3.1
2444
Constitutive models I.3.2
2449
Bilinear model I.3.3
2449
Hardening I.3.4
2453
Hysteresis I.3.5
2457
Modified giuffre monegotto pinto I.3.6
2476
Modified kent park I.3.7
2481
Ibarra I.3.8
2486
Limit state shear I.3.9
2528
Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification I.4
2550
Parameter Identification I.4.1
2550
Program Main Program and Core Orchestration I.4.2
2550
Data I/O and Spreadsheet Integration I.4.3
2560
Optimization Workflow and Auxiliary Functions I.4.4
2573
Part V: Numerical and Statistical Foundations I.5
2587
Levenberg-Marquardt I.5.1
2587
Numerical techniques I.5.2
2588
FFT and butterworth filters I.5.3
2588
Singular value decomposition I.5.4
2591
Preconditioning I.5.5
2593
Random Sampling Consensus (RANSAC I.5.6
2596
Latin Hypercube I.5.7
2601
Bayesian regression with a quadratic basis I.5.8
2606
Markov chain Monte Carlo I.5.9
2613
Simulation
Part VI: Optimization and Parameter Fitting I.6
2615
Levenberg-Marquardt I.6.1
2615
Custom Implementation I.6.2
2615
Using Built-in Function I.6.3
2619
Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty I.7
2622
Seismic hazard analysis I.7.1
2622
Performance Based Earthquake Engineering I.7.2
2625
Part VIII: Utility I.8
2630
Identicon I.8.1
2630

الجزء الرابع: طرائق عددية وإحصائية

I.1 Part I: Fundamental and Computational Analysis Methods

This section covers both foundational structural mechanics and advanced computational techniques for analysis, including statics, arches, beams, variational methods, Monte Carlo simulation, and isoparametric elements.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I.1.1 Statics matrix of a truss B

As discussed in

```
%  Initialize the statics matrix
%
% ========================================================================

% STATICS MATRIX OF A TRUSS
%
% ========================================================================

% Builds the statics matrix B, which relates internal bar forces (and
% support reactions) to external nodal loads via:
%
%                       B * q = f
%
% where:
%   B  : statics matrix          [2*npoin x (nelem + nbc)]
%   q  : generalized forces      [bar forces | reaction forces]
%   f  : external nodal loads    [Fx1, Fy1, Fx2, Fy2, ...]
%
% Each bar contributes two columns (its direction cosines) to B.
% Each restrained DOF contributes one additional column (a unit reaction).
%
% Inputs assumed to exist in the workspace:
%   npoin        : number of nodes
%   nelem        : number of bar elements
%   coord(i,1:2) : x,y coordinates of node i
%   lnods(e,1:2) : global node numbers of element e  [node_i, node_j]
%   id(i,1:2)    : boundary condition flag for node i, DOF 1(x) and 2(y)
%                  id = 1 means the DOF is restrained (support reaction)
%
% ========================================================================


%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 1 -- Allocate the statics matrix
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The matrix has one row per DOF (2 per node: x and y)
% and one column per unknown force (bar forces + support reactions).
% We don't know nbc yet, so we allocate a square upper-bound and trim later.

nDOF = 2 * npoin;                   % total degrees of freedom
B    = zeros(nDOF, nDOF);           % over-allocated; will trim after BCs
```

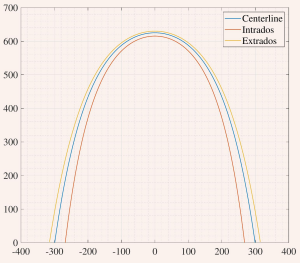
```
36
37 %
   ------------------------------------------------------------------------
38 % Step 2 -- Fill columns corresponding to bar forces (direction cosines)
39 %
   ------------------------------------------------------------------------
40 % For each bar element, project the unit bar force onto the global x and
    y
41 % axes at both end nodes.  For bar e connecting nodes i and j:
42 %
43 %   At node i:  contribution is [ cos(theta);  sin(theta) ]   (tension +
   ve)
44 %   At node j:  contribution is [-cos(theta); -sin(theta) ]   (equal &
   opposite)
45 %
46 % where theta is the angle the bar makes with the global x-axis, and
47 %   cos(theta) = lx / L,   sin(theta) = ly / L
48 %
49 % These are stored in rows (2*node-1) and (2*node) of column e.
50
51 l_elem = zeros(nelem, 1);          % pre-allocate element length vector
52
53 for e = 1:nelem
54
55     % --- Retrieve the two end nodes of this element ---
56     node_i = lnods(e, 1);
57     node_j = lnods(e, 2);
58
59     % --- Compute the projection of the bar onto x and y ---
60     lx = coord(node_j, 1) - coord(node_i, 1);   % x-component of bar
   vector
61     ly = coord(node_j, 2) - coord(node_i, 2);   % y-component of bar
   vector
62
63     % --- Bar length (Pythagorean theorem) ---
64     l_elem(e) = sqrt(lx^2 + ly^2);
65
66     % --- Direction cosines (unit vector along the bar) ---
67     cos_theta =  lx / l_elem(e);   % = cos(theta)
68     sin_theta =  ly / l_elem(e);   % = sin(theta)
69
70     % --- Insert at node i (rows 2*node_i-1 and 2*node_i, column e) ---
71     % A tensile force in the bar pulls node i toward node j
72     B(2*node_i - 1, e) =  cos_theta;   % x-equilibrium at node i
73     B(2*node_i,     e) =  sin_theta;   % y-equilibrium at node i
74
75     % --- Insert at node j (equal and opposite by Newton's third law)
   ---
76     B(2*node_j - 1, e) = -cos_theta;   % x-equilibrium at node j
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    B(2*node_j,     e) = -sin_theta;   % y-equilibrium at node j

end

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 3 -- Append columns corresponding to support reactions
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Each restrained DOF introduces one unknown reaction force.
% Its contribution to equilibrium is simply +1 in the corresponding row
% (a unit force in the restrained direction).
% These reactions occupy columns (nelem+1) through (nelem+nbc) of B.

nbc = 0;   % reaction counter (incremented each time a restrained DOF is
 found)

for inode = 1:npoin
    for iDOF = 1:2           % iDOF = 1 -> x-direction,  iDOF = 2 -> y-
direction

        if id(inode, iDOF) == 1    % this DOF is restrained -> there is
a reaction

            nbc = nbc + 1;         % one more reaction unknown

            % Global row index for this DOF
            row = 2*(inode - 1) + iDOF;

            % Place a unit entry in the next available reaction column
            B(row, nelem + nbc) = 1.0;

        end
    end
end

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 4 -- Trim B to its actual size
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Now that we know nbc, discard the unused trailing columns.

B = B(:, 1 : nelem + nbc);

% B is now [2*npoin  x  (nelem + nbc)] -- ready for use.
```

I.1.2 St louis arch shape

This code, based on the actual geometry of the arch, generates Fig. 15.30b




```
clear;close;clc;opengl software
% From http://www.jug.net/wt/archcgs.htm
%=================
% Graphics stuff
%=================
scrsz = get(0,'ScreenSize');GS = 'gswin64.exe';opengl software
fs=18;
font='Times New Roman';
%===============
% Initialize
%===============
L=299.2239;% half widdth
Ab=1262.6651;% max x section bottom ft^2
At=125.1406;% max x section top ft^2
x=(299.2239:-0.001:0);
%=================
% Some Constants
%=================
C=acosh(Ab/At);
h=625.0925;% maximum height
A=h/((Ab/At)-1);
%============
% centroid
%============
y=693.8597-A*(cosh(C*x/L));% CHECKED
yp=interp1(x,y,118.4123);
%======================
% slope of the normal
%======================
m=1.44935529./sinh(0.0100333*x);% CHECKED
mp=interp1(x,m,118.4123);
%======================
% Cross sectional area
%======================
Q=((At-Ab)/h).*y+Ab;%cross section linearly varying
%======================
% height of section
%======================
h=sqrt(cotd(30)*Q);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
hi=2*h/3;ho=h/3;
%==============================
% Intrados and extrados curves
%==============================
xi=x-hi./sqrt(1+m.^2);yi=y-m.*hi./sqrt(1+m.^2);
ypi=interp1(xi,yi,108.9984);
xo=x+ho./sqrt(1+m.^2);yo=y+m.*ho./sqrt(1+m.^2);
ypo=interp1(xo,yo,123.1192);
%======================================
% take mirrors for the -ve side & merge
%======================================
rx=-flip(x);xx=cat(2,x,rx);
rxi=-flip(xi);xxi=cat(2,xi,rxi);
rxo=-flip(xo);xxo=cat(2,xo,rxo);
ry=flip(y);yy=cat(2,y,ry);
ryi=flip(yi);yyi=cat(2,yi,ryi);
ryo=flip(yo);yyo=cat(2,yo,ryo);
%===============
% plot curves
%===============
hf1 = figure('Position',[1 scrsz(4)/4.5 scrsz(3)/3 scrsz(4)/2]);
plot(xx,yy,xxi,yyi,xxo,yyo,'linewidth',1);
lgd=legend('Centerline','Intrados','Extrados','location','NorthEast');
lgd.FontSize=fs;
grid minor; grid;
ylim([0 700]);daspect([1 1 1]);
```

I.1.3 Arbitrary three hinged circular arch; mathematica

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Circular Three Hinged Arch self weight

Determine Reactions

In[1]:=
```
Sol1 = Solve[-2 R Cy +
      Integrate[w R^2 (1 + Cos[theta]), {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2 + alpha}] == 0, Cy][[1]];
```

In[2]:=
```
Cy = Cy /. Sol1
```

Out[2]=
```
alpha R w
```

In[3]:=
```
Sol2 =
  Simplify[Solve[-R Cx + R Cy - Integrate[w R^2 Cos[theta], {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2}] ==
      0, Cx]][[1]] /. Sol1;
```

In[4]:=
```
Cx = Cx /. Sol2
```

Out[4]=
```
R w (-1 + alpha + Cos[alpha])
```

In[5]:=
```
alpha = 2 ArcTan[2 h / s]
```

Out[5]=
$$2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]$$

In[6]:=
```
w = 1;
```

In[7]:=
```
Cxs = FullSimplify[Cx / s]
```

Out[7]=
$$\frac{R\left(-1+2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)}{s}$$

In[8]:=
```
TeXForm[Cxs]
```

Out[8]//TeXForm=
```
\frac{R \left(2 \tan ^{-1}\left(\frac{2 h}{s}\right)+\cos \left(2 \tan ^{-1}\left(\fr
   h}{s}\right)\right)-1\right)}{s}
```

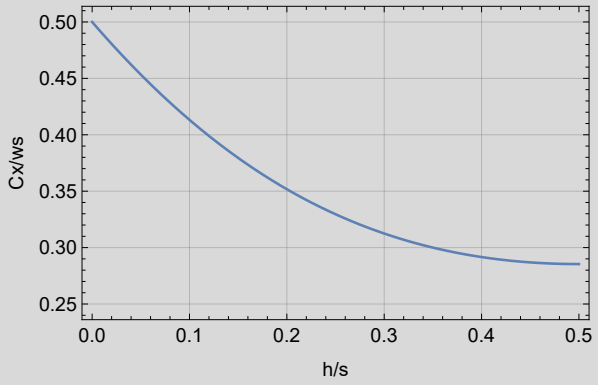
In[9]:=
```
Cxs = Cx / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[9]=
$$\frac{1}{2}\times(-1+2\,\text{ArcTan}[2\,hs]+\text{Cos}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]])\,\text{Csc}[2\,\text{ArcTan}[2\,hs]]$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

In[10]:=
```
CxsPlot =
 Plot[Cxs, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.25}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cx/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[10]=



In[11]:=
```
Export["CxsPlot.pdf", CxsPlot]
```

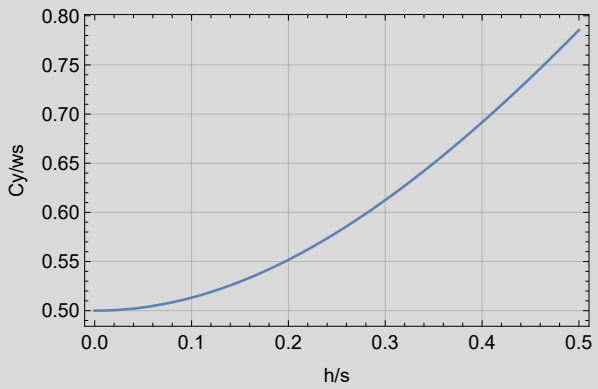
Out[11]=
```
CxsPlot.pdf
```

In[12]:=
```
Cys = Cy / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[12]=
```
ArcTan[2 hs] Csc[2 ArcTan[2 hs]]
```

In[13]:=
```
CysPlot =
 Plot[Cys, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.5}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cy/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[13]=



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

In[14]:=
```
Export["CysPlot.pdf", CysPlot]
```
Out[14]=
```
CysPlot.pdf
```

Determine Internal Forces Arbitrary Case

Shear

In[15]:=
```
Sol6 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {beta, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```
Out[15]=
$$\left\{V \to R \left(\cos[\text{theta}] \left(-1+\cos\left[2\arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\right)+ 2\arctan\left[\frac{2h}{s}\right](\cos[\text{theta}]-\sin[\text{theta}])+\text{theta}\sin[\text{theta}]\right)\right\}$$

In[16]:=
```
V[theta_] := R (Cos[theta] (-1 + Cos[2 ArcTan[2 h/s]]) +
     2 ArcTan[2 h/s] (Cos[theta] - Sin[theta]) + theta Sin[theta])
```

Axial

In[17]:=
```
Sol7 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {beta, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```
Out[17]=
$$\left\{NN \to R \left(\text{theta}\cos[\text{theta}]+\sin[\text{theta}]- \cos\left[2\arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\sin[\text{theta}]-2\arctan\left[\frac{2h}{s}\right](\cos[\text{theta}]+\sin[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[18]:=
```
NN[theta_] := R (theta Cos[theta] + Sin[theta] - Cos[2 ArcTan[2 h/s]] Sin[theta] -
     2 ArcTan[2 h/s] (Cos[theta] + Sin[theta])) /. h / s → 1 / 2;
```

In[19]:=
```
NN[x]
```
Out[19]=
$$R\left(x\cos[x]+\sin[x]-\frac{1}{2}\pi(\cos[x]+\sin[x])\right)$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Moment

In[20]:=
```
Sol8 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
      Integrate[w R R (Cos[beta] - Cos[theta]), {beta, 0, theta}] + M == 0, M][[1]]]
```

Out[20]=
$$\left\{M \to R^2 \left(\text{theta} \cos[\text{theta}] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[\text{theta}] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[\text{theta}] + \sin[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[21]:=
```
M[theta_] := R^2 (theta Cos[theta] -
    Cos[2 ArcTan[2 h/s]] Sin[theta] - 2 ArcTan[2 h/s] (-1 + Cos[theta] + Sin[theta]))
```

In[22]:=
```
NN[x]
```

Out[22]=
$$R\left(x \cos[x] + \sin[x] - \frac{1}{2}\pi (\cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[23]:=
```
V[x]
```

Out[23]=
$$R\left(\cos[x]\left(-1 + \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\right) + 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (\cos[x] - \sin[x]) + x \sin[x]\right)$$

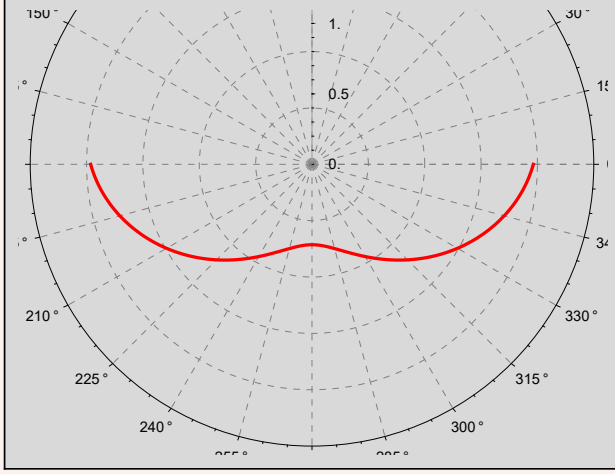
In[24]:=
```
M[x]
```

Out[24]=
$$R^2\left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

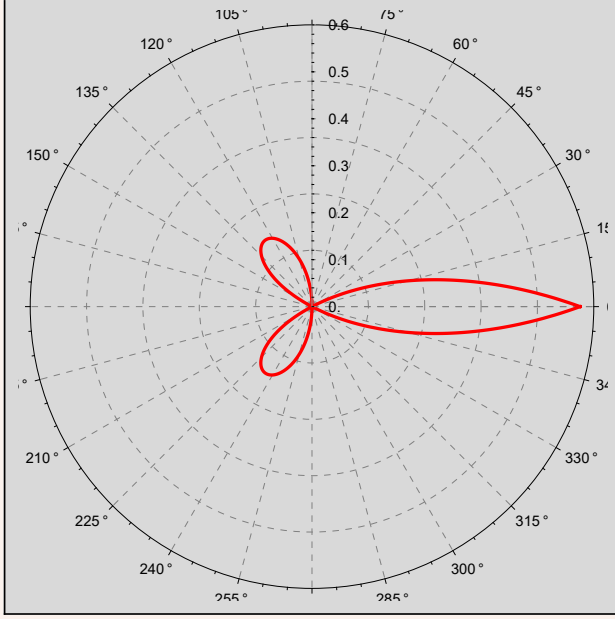
In[25]:=
```
P1 = PolarPlot[NN[x] / R, {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[25]=



In[26]:=
```
P2 = PolarPlot[V[x] / R /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[26]=

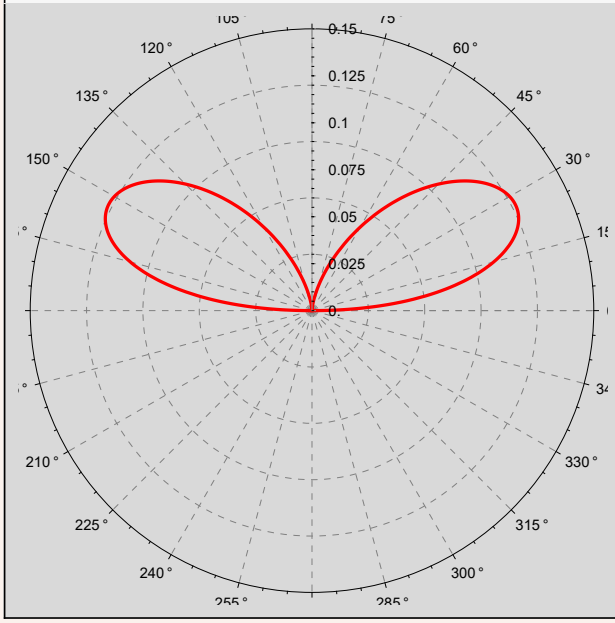


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

In[27]:=
```
M[x]
```

Out[27]=
$$R^2 \left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[28]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x] / R^2 /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[28]=


Determine Internal Forces Semi-Circular Case

In[29]:=
```
Clear[alpha];
```

Shear

In[30]:=
```
Sol3 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {alpha, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[30]=
$$\{V \to R\,((-1 + \text{alpha} + \cos[\text{alpha}])\cos[\text{theta}] + (-\text{alpha} + \text{theta})\sin[\text{theta}])\}$$

In[31]:=
```
V[theta_] := 1/2 R w ((-2 + π) Cos[theta] - (π - 2 theta) Sin[theta])
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Axial

In[32]:=
```
Sol4 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {alpha, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[32]=
```
{NN → R ((-alpha + theta) Cos[theta] - (-1 + alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[33]:=
```
NN[theta_] := -1/2 R w ((π - 2 theta) Cos[theta] + (-2 + π) Sin[theta]);
```

Moment

In[34]:=
```
Sol5 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
       Integrate[w R R (Cos[alpha] - Cos[theta]), {alpha, 0, theta}] + M == 0, M]][[1]]
```

Out[34]=
```
{M → R^2 (alpha + (-alpha + theta) Cos[theta] - (alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[35]:=
```
M[theta_] := -1/2 R^2 w ((π - 2 theta) Cos[theta] + π (-1 + Sin[theta]))
```

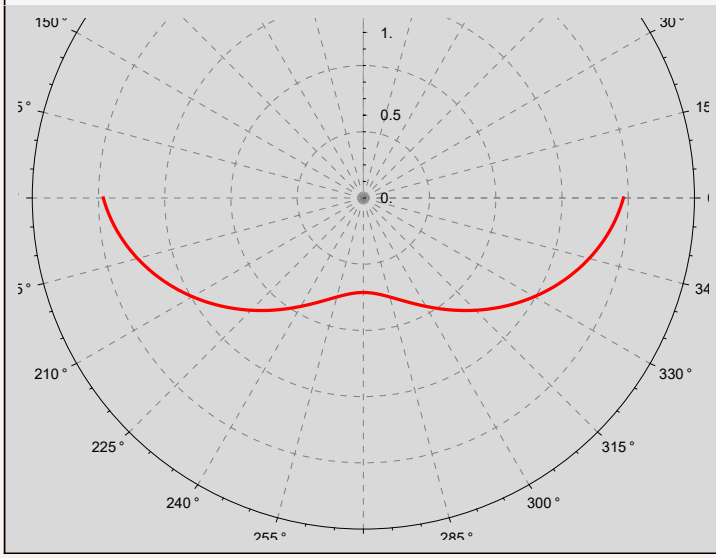
Plot Internal Forces

In[36]:=
```
w = 1; R = 1;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

In[37]:=
```
P4 = PolarPlot[NN[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[37]=



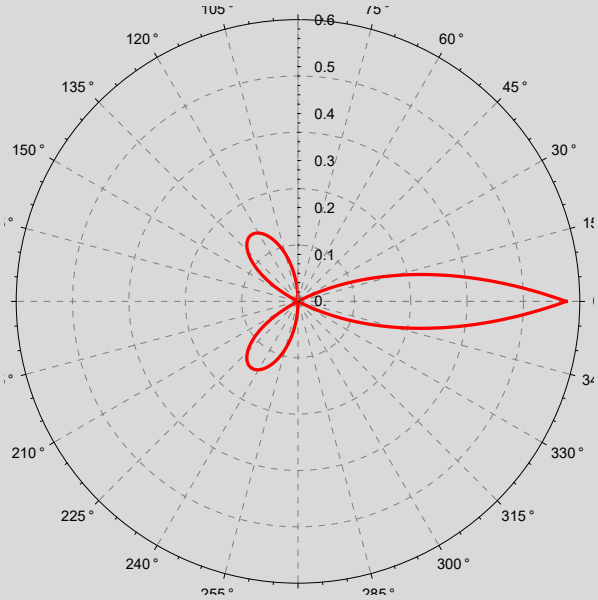
In[38]:=
```
Export["NxPlot.pdf", P1]
```

Out[38]=
```
NxPlot.pdf
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

In[39]:=
```
P5 = PolarPlot[V[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[39]=



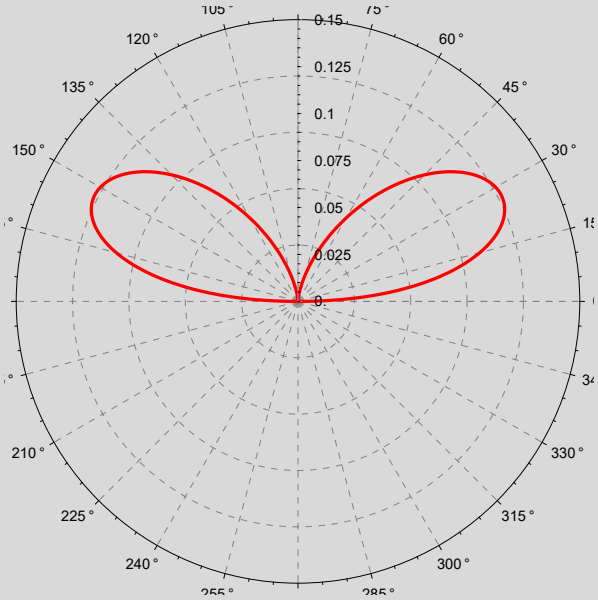
In[40]:=
```
Export["VxPlot.pdf", P2]
```

Out[40]=
```
VxPlot.pdf
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

In[41]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[41]=



In[42]:=
```
Export["MxPlot.pdf", P6]
```

Out[42]=
```
MxPlot.pdf
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I.1.4 Collapse of masonry arches

Code written by Pierre Mars in Octave, reprogrammed in MATLAB®by the author.

I.1.5 Main

```
%
% ========================================================================

% COLLAPSE ANALYSIS OF A MASONRY ARCH -- THRUST LINE METHOD
%
% ========================================================================

% This code determines the minimum and maximum thrust states of a circular
% masonry arch using the ”line of resistance” (thrust line) approach.
%
% THEORY:
%   A masonry arch can carry load as long as the thrust line -- the locus
%   of the resultant compressive force -- remains within the arch thickness
%   at every cross-section.  Collapse occurs when the thrust line touches
%   the boundary (intrados or extrados) at enough sections to form a
%   mechanism (typically 4 hinges for a symmetric arch).
%
%   The thrust line position is controlled by three ”points of passage”:
%   sections n1, n2, n3 where the normalised eccentricities e1, e2, e3
%   are prescribed.  The algorithm iteratively relocates these points
%   until the thrust line just touches the arch boundary -- the limit state.
%
% SIGN CONVENTION FOR ECCENTRICITY:
%   e = +1  ->  point on extrados  (outer face)
%   e = -1  ->  point on intrados  (inner face)
%   e =  0  ->  centroid of section (centerline)
%
% TWO LIMIT STATES COMPUTED:
%   Minimum thrust : thrust line hugs intrados at supports, extrados at crown
%   Maximum thrust : opposite -- extrados at supports, intrados at crown
%
% FILE STRUCTURE (all functions at bottom, MATLAB convention):
%   Part 1  --  Main script: parameters, calls min_thrust then max_thrust
%   Part 2  --  min_thrust  : iterative minimum thrust algorithm
%   Part 3  --  max_thrust  : iterative maximum thrust algorithm
%   Part 4  --  resistance_line : plots thrust line, voussoirs, N and V diagrams
```

```
%   Part 5  --  face_points : (x,y) of a point at given eccentricity on each face
%   Part 6  --  faces_wrenches : self-weight wrench at each section face  *** STUB ***
%   Part 7  --  faces_efforts : internal N, V, eccentricity at every face
%   Part 8  --  three_points : force on first face to pass thrust line through 3 points
%
% Original code: Pierre Smars (smars@yuntech.edu.tw), ver. 2022-12-02
% License: GNU GPL v2 or later -- https://www.gnu.org/licenses/
% Reprogrammed in MATLAB from Octave by V.E. Saouma
%
================================================================================


%
================================================================================

% PART 1 -- MAIN SCRIPT
%
================================================================================

% Sets all parameters, runs both limit-state analyses, then cleans up.
%
% NOTE ON GLOBAL VARIABLES:
%   All geometry and state are stored in globals so that helper functions
%   can access them without long argument lists.  For a production code
%   one would pass a parameter struct instead, but globals are clearer
%   for a teaching context of this size.

clear; close all; clc;

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       maximum_eccentricity small x y xe ye xi yi density angles radius ...
       thickness iter fn LimitState

% --- Execution control ---
% iWait = 1 : pause at every iteration with a dialog box  (useful for demos)
% iWait = 0 : run silently to completion                  (normal use)
iWait = 0;

% --- Output file base name (used in figure titles and saved EPS/PDF) ---
fn = 'arch-1';

% --- Arch geometry ---
n             = 40;    % number of voussoir blocks
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
radius_cst    = 5;     % centerline radius of the arch          [m]
thickness_cst = 1;     % uniform voussoir thickness             [m]
aperture      = 90;    % half-opening angle                     [deg]
                       % 90 deg -> semicircular arch

% --- Material and physical constants ---
density_cst = 2500;    % masonry density                        [kg/m^3]
g           = 9.81;    % gravitational acceleration             [m/s^2]

% --- Algorithm parameters ---
maximum_eccentricity = 1;      % |e| <= 1 defines the admissible zone
small                = 1e-6;   % convergence tolerance on eccentricity

% --- Run both limit-state analyses ---
if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Starting with Minimum thrust'));
    close;
end
min_thrust;

if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Next: Maximum thrust'));
    close;
end
max_thrust;

% Clean up EPS files generated during iterations
delete('*.eps');


%
% ========================================================================

% PART 2 -- FUNCTION: min_thrust
%
% ========================================================================

% Finds the minimum thrust state by iteratively adjusting the three points
% of passage until the thrust line just fits inside the arch.
%
% MINIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the intrados at both supports (e = -1)
%   and the extrados at the crown (e = +1).
%
% ALGORITHM (iterative heuristic):
%   1. Start with passage points at supports (n1, n3) and crown (n2).
%   2. Compute internal forces and eccentricity profile.
%   3. Find the section r0 with the largest eccentricity violation.
%   4. Move the nearest passage point to r0.
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   5. Repeat until max|ex| <= maximum_eccentricity + small.
%
% WARNING: the while condition  (ok==0)||(iter>10)  is logically
%   questionable -- the ||iter>10 clause keeps looping even after
%   convergence when iter>10.  Preserved faithfully from the original.

function min_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess for the three passage points ---
e1 = -maximum_eccentricity;   % intrados at left support
e2 =  maximum_eccentricity;   % extrados at crown
e3 = -maximum_eccentricity;   % intrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;          % section closest to the crown
n3 = n + 1;

iter            = 0;
LimitState      = 'min';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING above

    iter = iter + 1;

    % Compute internal forces N, V and eccentricity profile ex
    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>

    % Plot the current thrust line at this iteration
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    % --- Find the most violated section ---
    % r0 is the index of the section where |eccentricity| is maximum
    [~, r0] = max(abs(ex));

    % --- Relocate the nearest passage point to the offending section ---
    % Intrados violation (ex < 0): move whichever support point is closer
    % Extrados violation (ex > 0): move the crown point
    if ex(r0) < 0
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        end
    else
        n2 = r0;
    end

    % --- Check convergence ---
    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end

end

% Plot the final (converged or last-iteration) thrust line
Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

end   % min_thrust


%
% ========================================================================

% PART 3 -- FUNCTION: max_thrust
%
% ========================================================================

% Finds the maximum thrust state.  Mirror image of min_thrust:
%
% MAXIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the extrados at both supports (e = +1)
%   and the intrados at the crown (e = -1).
%
% The relocation logic is the reverse of min_thrust:
%   Extrados violation -> move a support point
%   Intrados violation -> move the crown point

function max_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess (reversed signs relative to min_thrust) ---
e1 =  maximum_eccentricity;   % extrados at left support
e2 = -maximum_eccentricity;   % intrados at crown
e3 =  maximum_eccentricity;   % extrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;
n3 = n + 1;

iter            = 0;
LimitState      = 'max';
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING in min_thrust

    iter = iter + 1;

    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration : ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    [~, r0] = max(abs(ex));

    % Reversed logic relative to min_thrust
    if ex(r0) < 0
        % Intrados violation : move the crown point
        n2 = r0;
    else
        % Extrados violation : move the nearer support point
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
        end
    end

    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end

end

Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

end   % max_thrust


%
% PART 4 -- FUNCTION : resistance_line
%
% Produces the final result figure for a converged limit state showing :
%
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   (a) Arch geometry: voussoir blocks drawn as alternating grey/white
%       patches ("Alhambra style"), with centroids marked
%   (b) Thrust line: dashed red curve
%   (c) Three passage points: filled red circles
%   (d) Internal force diagrams: axial N (red sticks) and shear V (blue sticks)
%       drawn as scaled arrows at each section face
%
% Output: EPS file, converted to PDF via Ghostscript (eps2pdf).

function resistance_line(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global n x y xe ye xi yi angles radius thickness iter fn LimitState

fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
GS   = 'gswin64.exe';    % path to Ghostscript executable

% --- Compute converged internal forces ---
[N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

% --- Thrust line coordinates ---
% The thrust line at section i is offset from the centerline by
%   ex(i) * thickness(i)/2  in the radial direction
xz = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
yz = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);

% --- Draw voussoir blocks ---
for i = 1:n

    % Four corners of voussoir i (two intrados + two extrados nodes)
    xp = [xi(i), xi(i+1), xe(i+1), xe(i)];
    yp = [yi(i), yi(i+1), ye(i+1), ye(i)];

    % Alternating grey / white shading
    if rem(i, 2) == 1
        C = [0.5, 0.5, 0.5];   % grey
    else
        C = 'White';
    end

    patch(xp, yp, C);
    hold on;

    % Centroid of each voussoir (for verification)
    poly_i        = polyshape(xp, yp);
    [x0(i), y0(i)] = centroid(poly_i);

end

plot(x0, y0, 'k.');   % centroid markers
```

```
308
309 % --- Thrust line and passage points ---
310 plot(xz, yz, '--r', 'LineWidth', 2);
311 xzz = [xz(n1), xz(n2), xz(n3)];
312 yzz = [yz(n1), yz(n2), yz(n3)];
313 scatter(xzz, yzz, 80, 'red', 'filled');
314
315 axis('equal', 'tight');
316 grid minor; grid on;
317 title([fn ' - ' LimitState ' - iter ' num2str(iter)]);
318
319 % --- Axial (N) and shear (V) force diagrams ---
320 % Each stick starts at the thrust line point and extends in the
    direction
321 % normal (N) or tangential (V) to the section face.
322 % Scale: alpha chosen so the largest N fills 80% of the arch thickness.
323 alpha = 0.8 * thickness(1) / max(N);
324
325 for i = 1:n
326
327     % Base point at the thrust line location for section i
328     xBase = x(i) + ex(i) * thickness(i) * cosd(90 - angles(i)) / 2;
329     yBase = y(i) + ex(i) * thickness(i) * sind(90 + angles(i)) / 2;
330
331     % Axial force stick (red) -- along the arch axis
332     xN = [xBase,  xBase + alpha * N(i) * sind(90 - angles(i))];
333     yN = [yBase,  yBase - alpha * N(i) * cosd(90 - angles(i))];
334     plot(xN, yN, '-r', 'LineWidth', 1);
335
336     % Shear force stick (blue) -- perpendicular to arch axis
337     xV = [xBase,  xBase + alpha * V(i) * cosd(90 - angles(i))];
338     yV = [yBase,  yBase + alpha * V(i) * sind(90 - angles(i))];
339     plot(xV, yV, '-b', 'LineWidth', 1);
340
341 end
342
343 % --- Export ---
344 FileName = [fn '-' LimitState '-Iter-' num2str(iter) '.eps'];
345 set(gca, 'FontSize', 0.8*fs, 'FontName', font);
346 set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
347 print(FileName, '-depsc');
348 eps2pdf(FileName, GS, 0);
349 close all;
350
351 end   % resistance_line
352
353
354 %
    ==========================================================================

355 % PART 5 -- FUNCTION: face_points
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% ========================================================================

% Returns the (x,y) coordinates of the point on each section face at a
% prescribed normalised eccentricity.
%
%   eccentricity = +1  ->  extrados
%   eccentricity = -1  ->  intrados
%   eccentricity =  0  ->  centroid (centerline)
%
% NOTE: this function calls angles() and radius(), thickness() as
% functions -- in the original Octave code these were functions returning
% the global arrays.  In MATLAB with globals they resolve to the global
% variables directly; the call syntax is preserved from the original.

function [x, y] = face_points(eccentricity)

global n aperture

a = angles();

x = sin(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);
y = cos(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);

end   % face_points


%
% ========================================================================

% PART 6 -- FUNCTION: faces_wrenches  *** STUB -- BODY NOT PROVIDED ***
%
% ========================================================================

% PURPOSE:
%   Computes the resultant force wrench (Fx, Fy, M) acting on each section
%   face due to the cumulative self-weight of all voussoirs above that face.
%
% EXPECTED OUTPUTS  (each an (n+1) x 1 vector):
%   Fx(i) : horizontal force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   Fy(i) : vertical   force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   M(i)  : moment resultant at face i about the centerline point      [N.m]
%
% EXPECTED ALGORITHM (not provided in original source):
%   For each block j above face i:
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%     weight_j = density(j) * g * volume_j
%     volume_j = area of trapezoidal block j * thickness_cst  (unit
depth)
%     Add weight_j to Fy(i) and compute its moment arm about x(i),y(i)
%
% *** This function must be completed before the code will run. ***

function [Fx, Fy, M] = faces_wrenches

global n x y density g angles radius thickness  %#ok<NUSED>

% TODO: implement self-weight accumulation loop here
error('faces_wrenches: function body not provided in original source --
must be implemented.');

end   % faces_wrenches


%
================================================================================

% PART 7 -- FUNCTION: faces_efforts
%
================================================================================

% Computes the internal stress resultants at every section face:
%
%   N(i)  : normal (axial compressive) force at face i        [N]
%   V(i)  : shear force at face i                             [N]
%   ex(i) : normalised eccentricity of thrust line at face i  [-1 .. +1]
%
% ALGORITHM:
%   1. Find the boundary force (Fx1,Fy1,M1) on the first face that makes
%      the thrust line pass through the three prescribed points
%      -> calls three_points()
%   2. Get the self-weight wrench at every face
%      -> calls faces_wrenches()
%   3. Superpose: total wrench = self-weight + boundary force
%      (the boundary force contributes a linearly growing moment)
%   4. Rotate from global (x,y) axes to local (normal, tangential) frame
%      using the section face angle
%   5. Compute eccentricity from bending moment and axial force

function [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global x y angles thickness

% Step 1 -- Boundary force on the first face
[Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

% Step 2 -- Self-weight wrench at every face
```

```
[Fx, Fy, M] = faces_wrenches();

% Step 3 -- Superpose contributions
% The moment arm of (Fx1,Fy1) grows linearly from the first face
Fx = Fx + Fx1;
Fy = Fy + Fy1;
M  = M  + M1 + (x - x(1)) .* Fy1 - (y - y(1)) .* Fx1;

% Step 4 -- Rotate to local section frame
% angles(i) is measured from the vertical [deg]
% Convention: N positive in compression (masonry standard)
N  = -cosd(angles) .* Fx + sind(angles) .* Fy;
V  =  sind(angles) .* Fx + cosd(angles) .* Fy;

% Step 5 -- Eccentricity: e = M / (N * t/2)
% Normalised by half-thickness so |e| = 1 at the face boundary
ex = -2 .* M ./ (N .* thickness);

end   % faces_efforts


%
% ============================================================================

% PART 8 -- FUNCTION: three_points
%
% ============================================================================

% Determines the force (Fx1, Fy1, M1) that must act on the FIRST section
% face in order to make the thrust line pass through three prescribed
points.
%
% METHOD -- moment equilibrium at each passage point:
%   For the thrust line to pass through point (xa,ya) on face n1, the
%   total moment about that point must be zero.  This gives one linear
%   equation in (Fx1, Fy1, M1).  Writing it for all three points:
%
%       A * [Fx1; Fy1; M1] = Mp
%
%   where A is 3x3 and Mp contains the self-weight moments at the
%   passage points.  Solved by Gaussian elimination (A\Mp).
%
% SIDE EFFECT: this function also initialises all arch geometry globals
%   (angles, thickness, radius, x, y, xe, ye, xi, yi, density)
%   because it is the deepest call in the chain.

function [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       x y xe ye xi yi density angles radius thickness

```

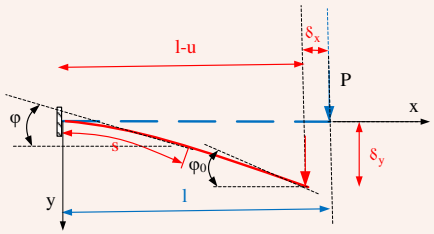
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% --- Build arch geometry ---
% Section face angles uniformly distributed over the full arch opening
a      = aperture;
da     = 2*a / n;
angles = (-a : da : a)';          % (n+1) x 1  [deg]

% Constant thickness and radius for all faces (could be made variable)
thickness = ones(n+1, 1) * thickness_cst;
radius    = ones(n+1, 1) * radius_cst;

% --- Extrados coordinates  (e = +1) ---
xe = sind(angles) .* (radius + thickness/2);
ye = cosd(angles) .* (radius + thickness/2);

% --- Intrados coordinates  (e = -1) ---
xi = sind(angles) .* (radius - thickness/2);
yi = cosd(angles) .* (radius - thickness/2);

% --- Voussoir density (one value per block, not per face) ---
density = ones(n, 1) * density_cst;

% --- Centerline coordinates  (e = 0) ---
x = sind(angles) .* radius;
y = cosd(angles) .* radius;

% Reference point: centre of the first section face
xr = x(1);
yr = y(1);

% --- Coordinates of the three passage points ---
% Each lies at its prescribed eccentricity on its respective face
x1 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
y1 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);

x2 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
y2 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);

x3 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
y3 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);

xa = x1(n1);  ya = y1(n1);
xb = x2(n2);  yb = y2(n2);
xc = x3(n3);  yc = y3(n3);

% --- Moment-equilibrium matrix A ---
% Row i: moment of (Fx1,Fy1,M1) about passage point i = 0
%   (y_pt - yr)*Fx1 - (x_pt - xr)*Fy1 - M1 = -M_selfweight(ni)
A = [ ya-yr,  -(xa-xr),  -1 ;
      yb-yr,  -(xb-xr),  -1 ;
      yc-yr,  -(xc-xr),  -1 ];

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% --- Self-weight wrench ---
[Fx, Fy, M] = faces_wrenches();

% --- Shift moment to the passage points ---
% Subtract lever arm from section centroid to passage point
xa = xa - x(n1);  ya = ya - y(n1);
xb = xb - x(n2);  yb = yb - y(n2);
xc = xc - x(n3);  yc = yc - y(n3);

% Moment at each passage point = face moment + transport term
Ma = M(n1) - Fx(n1)*ya + Fy(n1)*xa;
Mb = M(n2) - Fx(n2)*yb + Fy(n2)*xb;
Mc = M(n3) - Fx(n3)*yc + Fy(n3)*xc;

Mp = [Ma; Mb; Mc];

% --- Solve for the unknown boundary force ---
W   = A \ Mp;
Fx1 = W(1);
Fy1 = W(2);
M1  = W(3);

end   % three_points
```

I.1.6 Large deflection of a beam



Solution of problem in §29.2.3

Note: only `Sol=1` works, the other two fail to give right answer. Up to the reader to debug.

```
%
% ========================================================================

% LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF A CANTILEVER BEAM UNDER END LOAD
%
% ========================================================================

% A cantilever beam of length L carries a tip load P (vertical).
% For large deflections, the classical Euler-Bernoulli linear theory
% (delta = PL^3/3EI) is no longer accurate. The exact solution requires
% solving a nonlinear boundary value problem based on the elastica
equation:
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
%         d^2 phi / ds^2 = -P*cos(phi) / EI
%
% where phi(s) is the rotation at arc-length s from the fixed end.
%
% This script compares three solution methods for the tip displacement:
%   Sol = 1 : Direct numerical integration (RECOMMENDED -- others are buggy)
%   Sol = 2 : Elliptic integral form (incomplete -- currently incorrect)
%   Sol = 3 : Complete elliptic integral of the 2nd kind
%
% Outputs: plot of phi_0 and normalised displacements vs load parameter PL^2/EI
%
% ========================================================================


clear; clc; close all;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Beam properties
%
% ------------------------------------------------------------------------

L  = 4;                  % Length [m]
A  = 50e-6;              % Cross-sectional area [m^2]  (not used here)
I  = 1e7 * 1e-12;        % Second moment of area [m^4]
E  = 800e9;              % Young's modulus [Pa]
EI = E * I;              % Bending stiffness [N.m^2]

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Load stepping
%
% ------------------------------------------------------------------------

% We sweep P from dP to P_max in equal increments.
% The load parameter x = P*L^2/EI is dimensionless -- it is the natural
% variable for the elastica problem.

dP     = 1000;                   % Load increment [N]
P_max  = 5000000;                % Maximum load   [N]
nSteps = P_max / dP;             % Number of load steps

% Pre-allocate result arrays (faster than growing inside the loop)
PP      = zeros(1, nSteps);      % Applied load at each step
x       = zeros(1, nSteps);      % Dimensionless load PL^2/EI
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
y0      = zeros(1, nSteps);      % Linear (small-deflection) tip displacement / L
phi     = zeros(1, nSteps);      % Tip rotation phi_0 [rad]
yv      = zeros(1, nSteps);      % Vertical tip displacement / L  (nonlinear)
yh      = zeros(1, nSteps);      % Horizontal tip displacement / L (nonlinear)

% Choose solution method (only Sol=1 is currently verified)
sol = 1;

% fsolve options -- suppress iteration output; tight tolerance
fsolve_opts = optimset('TolFun', 1e-6, 'Display', 'off');

% Initial guess for phi_0 (tip rotation).
% pi/4 works well for moderate loads; may need adjustment at very large P.
phi0_guess = pi / 4;

%% ---------------------------------------------------------------------

% Section 3 -- Main loop over load steps
%% ---------------------------------------------------------------------

for i = 1 : nSteps

    % Current load and dimensionless load parameter
    P     = i * dP;
    PP(i) = P;
    x(i)  = P * L^2 / EI;          % PL^2/EI  (horizontal axis of final plot)

    % Linear (Euler-Bernoulli) tip deflection, normalised by L
    % Valid only for small deflections; included for comparison
    y0(i) = (P * L^3 / (3*EI)) / L;

    % alpha appears repeatedly: alpha = sqrt(P/EI)  [1/m]
    alpha = sqrt(P / EI);

    % ------------------------------------------------------------------
    % Step 3a -- Solve for phi_0 (rotation at the free tip)
    % ------------------------------------------------------------------
    % The exact arc-length condition gives an implicit equation for phi_0:
    %
    %   (1/sqrt(2)*alpha) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
    %
    % We solve this numerically with fsolve.
```

```
    % FuncPhi0 (defined at the bottom) returns the residual of this equation.

    [phi0, ~, exitflag] = fsolve( ...
        @(phi0) FuncPhi0(phi0, alpha, L), ...
        phi0_guess, fsolve_opts);

    if exitflag <= 0
        warning('Step %d: fsolve did not converge. phi0 may be unreliable.', i);
    end

    phi(i) = phi0;    % Store converged tip rotation

    % ------------------------------------------------------------------
    % Step 3b -- Compute tip displacements using the chosen method
    % ------------------------------------------------------------------

    beta = alpha * L;    % dimensionless load parameter (= sqrt(PL^2/EI))

    if sol == 1
        % --- Method 1: Direct numerical integration ---
        % Vertical displacement (normalised by L):
        %   delta_y/L = (sqrt(2)/(2*beta)) * integral_0^phi0 [ sin(phi)/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi
        %
        % Horizontal shortening (normalised by L):
        %   delta_x/L = (sqrt(2)/(alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1

        integrand_v = @(phi) sin(phi) ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, phi0);

        yv(i) = (sqrt(2) / (2*beta)) * integral_v;
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    elseif sol == 2
        % --- Method 2: Elliptic integral formulation (CURRENTLY INCORRECT) ---
        % The substitution k = sqrt((1+sin(phi0))/2) transforms the integral
        % into a standard elliptic form.  This branch has a known bug -- left
        % as an exercise for the reader.

        k = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );

        integrand_v = @(theta) (2*k^2*sin(theta).^2 - 1) ...
                               ./ sqrt(1 - k^2*sin(theta).^2);
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, pi/2);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        yv(i) = (1 / beta) * integral_v;
        % yh not computed in this branch

    elseif sol == 3
        % --- Method 3: Complete and incomplete elliptic integrals of 2nd kind ---
        % Uses MATLAB's built-in ellipticE.
        % delta_y/L = 1 - (2/beta) * [ E(k) - E(phi0, k) ]
        % where E(k) is the complete and E(phi0,k) the incomplete elliptic integral.

        k        = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );
        E_k      = ellipticE(k);                    % complete
        E_k_phi0 = ellipticE(asin(sin(phi0)), k);   % incomplete

        yv(i) = 1 - (2/beta) * (E_k - E_k_phi0);
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    end

end   % end load-step loop

%% ---------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Plot results
%% ---------------------------------------------------------------------

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;   % font size

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

% --- Upper panel: tip rotation vs load parameter ---
subplot(2, 1, 1)
plot(x, phi, 'k', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [0 1.6], 'YTick', 0:0.2:1.6)
grid on
xlabel('PL^2 / EI',  'FontSize', fs)
ylabel('\phi_0  [rad]', 'FontSize', fs)
title('Tip rotation', 'FontSize', fs)
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

% --- Lower panel: normalised tip displacements vs load parameter ---
subplot(2, 1, 2)
plot(x, yv, 'r', x, yh, 'b', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [-0.6 1.0], 'YTick', -0.6:0.2:1.0)
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
grid on
xlabel('PL^2 / EI', 'FontSize', fs)
ylabel('Normalised displacement', 'FontSize', fs)
title('Tip displacements (normalised by L)', 'FontSize', fs)
lgnd = legend('\delta_y / L', '\delta_x / L', 'Location', 'best');
set(lgnd, 'Color', 'none')
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

exportgraphics(hf1, 'Displ-Load-Anal.pdf', 'BackgroundColor', 'none')

%% ========================================================================

% LOCAL FUNCTION: FuncPhi0
%% ========================================================================

function residual = FuncPhi0(phi0, alpha, L)
% FuncPhi0  Residual of the arc-length constraint for the elastica problem.
%
%   The exact arc-length condition for a cantilever under tip load P is:
%
%     (1 / (sqrt(2)*alpha)) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
%
%   Rearranging, the residual (which fsolve drives to zero) is:
%
%     residual = (1/(sqrt(2)*alpha)) * integral(...) - L
%
%   Inputs:
%     phi0     : current guess for tip rotation [rad]
%     alpha    : sqrt(P/EI)  [1/m]
%     L        : beam length [m]
%
%   Output:
%     residual : how far the arc-length condition is from being satisfied

    % The integrand has a square-root singularity at phi = phi0.
    % max(eps, ...) prevents division by exactly zero at the upper limit.
    integrand = @(phi) 1 ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );

    % Numerical integration from 0 to phi0
    integralValue = integral(integrand, 0, phi0, 'RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-9);

    % Residual: left-hand side minus right-hand side of the arc-length equation
    residual = (1 / (sqrt(2) * alpha)) * integralValue - L;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
215
216 end
```

I.2 Part II: Structural Design and Analysis

This section addresses detailed structural design and frame analysis including shell design, frame analysis methods, torsion, and optimization.

I.2.1 Design of cylindrical shells

Code written by Georg, R., 2014; Needs verification.

The following code is developed for the design of the shell portion of the simply supported cylindrical shell. The code follows the design procedure outlined by the theory of shallow shells and is discussed in §33.2.3.2.2. The purpose of the design tool is to determine the internal forces and displacements within the shell.The shell design code consists of the basic inputs and formulations the the shell dimensioning. The shell coefficient function produces the simultaneous equations required to solve for the arbitrary constants. With known constant values, the shell forces function determines the internal forces and displacement of the shell. The code is presented as follows:

```
1 %
  ========================================================================
2 % DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
3 %
  ========================================================================
4 % Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (
  Schorer)
5 % method, which decomposes the shell response into:
6 %
7 %   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
8 %       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
9 %       Valid in the interior, away from edges.
10 %
11 %   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
12 %       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
13 %       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
14 %       mixed trig/hyperbolic functions.
15 %
16 %   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
17 %       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together
  .
```

```
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x   : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
%   r   : radius of curvature
%   h   : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement
evaluation)
%
=========================================================================



%
=========================================================================

% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
%
=========================================================================


close all; fclose all; clear all; clc;

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 1.1 -- Geometry and loading
%
-------------------------------------------------------------------------

L     = 66.5;          % shell span (longitudinal)              [ft]
r     = 26.6;          % radius of curvature                    [ft]
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
h     = 0.25;           % shell thickness                          [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)         [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge       [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                     [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)         [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
dimload.Pd      = q;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete              [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                        [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the
solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;       Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;       Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;   Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;    Roots.Beta2  = beta1p;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
144
145 TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
146 SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);
147
148 M_phi_edge   = 0;          % free edge: no moment applied
149 Np_phi_edge  = -TL;        % normal membrane force at edge
150 Qp_phi_edge  = 0;          % free edge: no transverse shear
151 Np_xphi_edge = -SL;        % in-plane shear at edge
152
153 EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
154 EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
155 EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
156 EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;
157
158 % Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
159 f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];
160
161 %
    ------------------------------------------------------------------------
162 % Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
163 %
    ------------------------------------------------------------------------
164 % The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
165 % We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
166 % shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
167 % stress resultant type SC evaluated at the edge.
168 %
169 % SC index map:
170 %   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
171 %   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip
172
173 F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  %
    M_phi
174 F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  %
    N_phi
175 F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  %
    Q_phip
176 F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  %
    N_xphi
177
178 F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix
179
180 ShellCoef.M_phi  = F1;
181 ShellCoef.N_phi  = F2;
182 ShellCoef.Qp_phi = F3;
183 ShellCoef.N_xphi = F4;
184
185 % Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
186 constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]
```

```
187
188 %
    ------------------------------------------------------------------------
189 % Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
190 %
    ------------------------------------------------------------------------
191 % Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
192 phi  = 0;
193 phit = phi - phi_k;
194 x    = L/2;
195
196 % --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
197 Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
198 Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
199 Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
200 up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
201 vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k
    *x);
202 wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-
    phi) * sin(k*x);
203
204 % --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
205 % shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here
206
207 M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
    ;
208 M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
    ;
209 M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
    ;
210 Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
    ;
211 Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
    ;
212 N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
     + Np_phi;
213 N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
     + Np_x;
214 N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
     + Np_xphi;
215 u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
     + up;
216 v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
     + vp;
217 w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
     + wp;
218
219 % --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
220 DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;     Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;       Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;         Displacement.v = v;     Displacement.w = w;
Displacement.up = up;       Displacement.vp = vp;   Displacement.wp = wp;


%% ========================================================================

% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
%% ========================================================================

% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2.1 -- Inputs
%% ------------------------------------------------------------------------

b     = 1;              % edge beam width                          [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                          [ft]
L     = 66.5;           % span                                     [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                             [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                          [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                         [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge               [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                       [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                     [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length   [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                          [ksf]

%%
```

```
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
%
% ------------------------------------------------------------------------

N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip/ft]

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
%
% ------------------------------------------------------------------------

% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
%
% ------------------------------------------------------------------------

Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
296
297 NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
298 NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation
299
300 % Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
301 % Row 1: vertical displacement compatibility
302 % Row 2: N_x compatibility
303 FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-
    phi)^2) ...
304                 + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
305 FS(2,1) = N_x_shell / h;
306
307 S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
308 S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
309 S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
310 S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);
311
312 % Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
313 FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
314 FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
315
316 B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
317 B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
318 B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
319 B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);
320
321 % Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
322 BS = S + B;
323 F  = FS + FB;
324 X  = BS \ (-F);
325
326 Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
327 SB = X(2);   % in-plane shear edge force      [kip/ft]
328
329 %
    ------------------------------------------------------------------------
330 % Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
331 %
    ------------------------------------------------------------------------
332 % The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
333 % forces back into increments of each stress resultant.
334
335 % N_x: longitudinal force
336 N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;
337
338 % N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
339 N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;
340
341 % N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
%
% ------------------------------------------------------------------------

fs = 20;    % allowable steel stress                              [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement              [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max
principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min
principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension
steel in shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam
longitudinal steel

% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed
bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


```

```
%
% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
%
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h,
  x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
```

```
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q
^2;

R(2)  =  2*D*k^2           * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma     * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                 * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r           * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
480
481 R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
482 B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;     B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
483 B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;    B4(12) = m2-n2*(1+gamma);
484
485 % --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
486 % SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
487 % SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
488 if SC < 8
489     A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
490     B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
491     C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
492     D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
493 else
494     A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
495     B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
496     C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
497     D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
498 end
499
500 Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);
501
502 end   % shell_coefficients
503
504
505 %
    ================================================================================
506 % PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
507 %
    ================================================================================
508 % Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
509 % using the four known integration constants (a, b, c, d).
510 %
511 % This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
512 % are known and we compute the scalar force value rather than a matrix
    row.
513 %
514 % INPUT:
515 %   SC        : stress resultant selector (same index as
    shell_coefficients)
516 %   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
517 %   (remaining arguments same as shell_coefficients)
518 %
519 % OUTPUT:
520 %   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement
521
522 function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants
    , x)
523
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
a = constants(1);  b = constants(2);
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q
^2;

R(2)  =  2*D*k^2           * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma     * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                  * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
574
575 R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
576 B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;
577
578 R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
579 B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
580 B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);
581
582 R(11) =  2*D*k/r              * cos(k*x);
583 B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;
584
585 % --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
586 if SC < 8
587     A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
588     B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
589     C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
590     D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
591 else
592     A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
593     B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
594     C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
595     D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
596 end
597
598 F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);
599
600 end   % shell_forces
```

I.2.2 Approximate frame analysis; cantilever method

```
1 %
  ========================================================================
2 % DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
3 %
  ========================================================================
4 % Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (
  Schorer)
5 % method, which decomposes the shell response into:
6 %
7 %   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
8 %       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
9 %       Valid in the interior, away from edges.
10 %
11 %   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
12 %       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
13 %       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
14 %       mixed trig/hyperbolic functions.
15 %
```

```
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x   : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
%   r   : radius of curvature
%   h   : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
%
% ========================================================================



%
% ========================================================================

% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
%
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.1 -- Geometry and loading
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% ------------------------------------------------------------------------

L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)              [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                    [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                        [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)       [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge     [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                   [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)       [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
dimload.Pd      = q;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave
)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number        [1/
ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;              % Young's modulus of concrete           [ksf]
D = E * h^3 / 12;        % flexural rigidity                     [kip.
ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the
solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;       Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;       Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;   Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;    Roots.Beta2  = beta1p;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
%
% ------------------------------------------------------------------------
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;

% Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
% We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
% shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
% stress resultant type SC evaluated at the edge.
%
% SC index map:
%   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
%   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip

F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi

F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix

ShellCoef.M_phi  = F1;
ShellCoef.N_phi  = F2;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
ShellCoef.Qp_phi = F3;
ShellCoef.N_xphi = F4;

% Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
phi  = 0;
phit = phi - phi_k;
x    = L/2;

% --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)
  + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal
displacement

% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;     Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;       Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;         Displacement.v = v;     Displacement.w = w;
Displacement.up = up;       Displacement.vp = vp;   Displacement.wp = wp;


%
=========================================================================

% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
%
=========================================================================

% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 2.1 -- Inputs
%
-------------------------------------------------------------------------

b     = 1;              % edge beam width                          [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                          [ft]
L     = 66.5;           % span                                     [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                             [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                          [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                         [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge               [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                       [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                     [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
```

```
x = L/2;
E = 4.32e5;              % Young's modulus                    [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;       % longitudinal membrane force from shell analysis [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% -------------------------------------------------------------------------

% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-
phi)^2) ...
                + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force       [kip/ft]

%
% -------------------------------------------------------------------------

% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
%
% -------------------------------------------------------------------------

% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;
```

```
337
338 % N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
339 N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;
340
341 % N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
342 N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;
343
344 % M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
345 M_phi = 0;
346
347 Forces.N_x     = N_x;
348 Forces.N_xphi  = N_xphi;
349 Forces.N_phi   = N_phi;
350 Forces.M_phi   = M_phi;
351
352 %
    ---------------------------------------------------------------------
353 % Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
354 %
    ---------------------------------------------------------------------
355 fs = 20;    % allowable steel stress                              [ksi]
356 ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement              [in]
357
358 % Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
359 N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max
    principal
360 N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min
    principal
361
362 % Shell reinforcement: tension governed by N1
363 As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension
    steel in shell
364
365 % Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
366 As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel
367
368 % Edge beam reinforcement: tension from arch action
369 T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
370 As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam
    longitudinal steel
371
372 % Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
373 Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed
    bars)
374 Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric
375
376 fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
377 fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
378 fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
```

```
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',     As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


%
% ========================================================================

% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
%
% ========================================================================

% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h,
  x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q
^2;

R(2)  =  2*D*k^2           * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma     * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                 * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);    B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) =  -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r            * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;     B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) =  -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);

end   % shell_coefficients


%
% ============================================================================

% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
%
% ============================================================================

% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix
row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as
shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
```

```
%   F   : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2           * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma     * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

```

```
R(7)  =  2                    * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r              * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.3 Non uniform torsion

```
%
% ========================================================================

% NON-UNIFORM (WARPING) TORSION -- DISTRIBUTION OF TORQUE COMPONENTS
%
% ========================================================================

% When a thin-walled open section (e.g. I-beam, channel) is twisted, the
% total applied torque T is resisted by TWO mechanisms:
%
%   1. ST. VENANT TORSION (T_SV):
%      Pure shear flow around the cross-section.  Dominates in short
%      members and near free ends where warping is unrestrained.
%
%   2. WARPING TORSION (T_V):
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

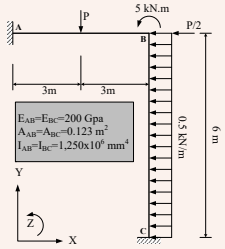
```
%      Bending of the flanges in opposite directions (bimoment).
%      Dominates near fixed ends where warping is fully restrained.
%
% The governing ODE for a member fixed at the base (x=0) and free at
% the top (x=L), carrying a concentrated torque T at the free end, gives
:
%
%   T_V(x)  = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
%   T_SV(x) = T * [ 1 - cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda) ]
%
% where:
%   lambda = sqrt(E*C_w / G*J)   [length]  -- torsional characteristic
length
%
% For this W-section example lambda = 65.9 in (= 5.49 ft).
%
% AT THE FIXED END (x=0):
%   T_V   = T / cosh(L/lambda)   -> small for long members (SV dominates
)
%   T_SV  = T * [1 - 1/cosh(L/lambda)]
%
% AT THE FREE END (x=L):
%   T_V   = T   (all torque is warping torsion at the point of
application)
%   T_SV  = 0
%
% This script plots the distribution of both torque components over the
% member height for four different member lengths, illustrating how the
% relative importance of warping vs. St. Venant torsion varies with L/
lambda.
%
% REFERENCE SECTION: W-shape with lambda = 65.9 in
% Units: inches for internal calculation, feet for plotting
%
=========================================================================


clear; clc; close all;

%
-------------------------------------------------------------------------


% Section 1 -- Display settings
%
-------------------------------------------------------------------------


fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/1.5, scrsz(4)/2]);
```

```
52
53 %
   ------------------------------------------------------------------------
54 % Section 2 -- Problem parameters
55 %
   ------------------------------------------------------------------------
56 T      = 1;               % applied torque (normalised)          [kip.in]
57 lambda = 65.9;            % torsional characteristic length      [in]
58                           % lambda = sqrt(E*Cw / G*J) for the section
59
60 L_ft   = [10, 20, 25, 30]; % member lengths to compare           [ft]
61
62 %
   ------------------------------------------------------------------------
63 % Section 3 -- Plot torque distributions for each member length
64 %
   ------------------------------------------------------------------------
65 % Four subplots, one per length.
66 % x runs from 0 (fixed base) to L (free top where torque is applied).
67 % Torques are normalised by T so the plots show fractions [0..1].
68 % Height axis is plotted in feet (x/12) for readability.
69
70 for i = 1 : 4
71
72     L_in = L_ft(i) * 12;          % member length in inches
73     x    = (0 : L_in);            % position vector, inch increments
74
75     % --- Warping torsion component ---
76     % T_V = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
77     % Maximum at the free end (x=L), minimum at the fixed end (x=0)
78     T_V  = T * cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda);
79
80     % --- St. Venant torsion component ---
81     % T_SV = T - T_V  (the two must sum to T at every section)
82     % Maximum at the fixed end, zero at the free end
83     T_SV = T * (1 - cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda));
84
85     % --- Plot: torque on horizontal axis, height on vertical axis ---
86     % (vertical axis matches the physical orientation of the member)
87     subplot(2, 2, i);
88     plot(T_V,  x/12, 'b', ...
89          T_SV, x/12, 'r', ...
90          'LineWidth', 1.5);
91
92     % Axes: normalised torque 0->1, height 0->30 ft
93     xlim([0  1]);
94     ylim([0  30]);
```

```
    set(gca, 'XTick', 0 : 0.2 : 1.0);
    set(gca, 'YTick', 0 : 5   : 30  );

    grid on;
    xlabel('T / T_{total}  (normalised)',        'FontSize', fs);
    ylabel('Height  [ft]',                       'FontSize', fs);
    title( ['Member length  L = ' num2str(L_ft(i)) ' ft  '  ...
            '(L/\lambda = ' num2str(L_in/lambda,'%.1f') ')'], ...
           'FontSize', fs);

    lgd = legend('T_V  (warping)', 'T_{SV}  (St. Venant)', ...
                 'Location', 'North');
    lgd.FontSize = fs - 2;

    set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

end

sgtitle(['Non-Uniform Torsion:  \lambda = ' num2str(lambda) ' in'], ...
        'FontSize', fs + 2);
```

I.2.4 Orthogonal frame

Analysis of the following orthogonal frame, §41.3.2




```
%
% ========================================================================

% DIRECT STIFFNESS METHOD -- ORTHOGONAL FRAME (L-SHAPED)
%
% ========================================================================

% Analyzes a two-element frame with members oriented perpendicular to each
% other (one horizontal, one vertical), meeting at a common node B.
%
% GEOMETRY:
```

```
%
%        C (pin -- vertical reaction only)
%        |
%        | Element BC (vertical, length L2)
%        |
%   A ---B   (B = free node: DOFs u_B, v_B, theta_B)
%   Element AB (horizontal, length L1)
%   A is fully fixed.
%
% Both elements are aligned with global axes -> no coordinate transform needed.
%
% FREE DOFs AT NODE B:
%   DOF 1: horizontal displacement u_B
%   DOF 2: vertical displacement   v_B
%   DOF 3: rotation                theta_B
%
% Original code courtesy of Xiao Fu.
%
% ========================================================================


clear; clc;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Element properties  (SI: kN, m)
%
% ------------------------------------------------------------------------

L = [6.0;  6.0];          % element lengths            [m]      index: (AB, BC)
A = [0.123; 0.123];       % cross-sectional areas      [m^2]
E = [200e6; 200e6];       % Young's moduli             [kN/m^2]
I = [1250e-6; 1250e-6];   % second moments of area     [m^4]

EA = E .* A;              % axial stiffnesses          [kN]
EI = E .* I;              % bending stiffnesses        [kN.m^2]

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Applied loads
%
% ------------------------------------------------------------------------

P = 1;    % concentrated horizontal force at B    [kN]
M = 5;    % concentrated moment at B              [kN.m]
w = 0.5;  % uniform distributed load on BC        [kN/m]  (transverse on BC)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
46
47 %
   ------------------------------------------------------------------------
48 % Section 3 -- Reduced global stiffness matrix K (free DOFs at B)
49 %
   ------------------------------------------------------------------------
50 % Assembled by superposing contributions from AB and BC:
51 %
52 %   K(1,1): axial  AB  +  bending BC  (u_B direction)
53 %   K(2,2): bending AB +  axial  BC   (v_B direction)
54 %   K(3,3): bending AB +  bending BC  (theta_B)
55 %   K(1,3): coupling from BC (6EI2/L2^2)
56 %   K(2,3): coupling from AB (-6EI1/L1^2)
57
58 K = [ EA(1)/L(1) + 12*EI(2)/L(2)^3,                              0,    6*EI
   (2)/L(2)^2              ;
59                                  0,   EA(2)/L(2) + 12*EI(1)/L(1)^3,  -6*EI
   (1)/L(1)^2              ;
60                 6*EI(2)/L(2)^2,              -6*EI(1)/L(1)^2,    4*EI(1)
   /L(1) + 4*EI(2)/L(2)  ]
61
62 %
   ------------------------------------------------------------------------
63 % Section 4 -- Equivalent nodal load vector
64 %
   ------------------------------------------------------------------------
65 % Distributed and element loads -> fixed-end reactions (sign-reversed at
    B)
66 % plus directly applied nodal loads.
67 %
68 %   AB carries midpoint load P (vertical):
69 %     fixed-end shear = P/2, fixed-end moment = +/-P*L1/8
70 %
71 %   BC carries uniform load w (transverse = horizontal on vertical
   member):
72 %     fixed-end shear = w*L2/2, fixed-end moment = +/-w*L2^2/12
73
74 NEL = [ -w*L(2)/2                  ;   % DOF 1: fixed-end shear from BC
75           -P/2                     ;   % DOF 2: fixed-end shear from AB
76            P*L(1)/8 - w*L(2)^2/12   ];  % DOF 3: fixed-end moments from AB
    and BC
77
78 F   = [ -P/2 ;   % DOF 1: applied horizontal force (half at B)
79           0   ;   % DOF 2: no direct vertical force
80           M   ];  % DOF 3: applied moment
81
82 F_ext = NEL + F;
```

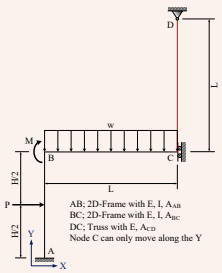
```
%
%% Section 5 -- Solve for displacements at B
%
Disp = K \ F_ext

% Disp = [u_B [m];  v_B [m];  theta_B [rad]]

%
%% Section 6 -- Internal forces in element AB
%
% End A fixed (zero displacements); end B has solved Disp values.
% F_int = k * d - NEL_elem

k_AB   = stiff(E(1), I(1), L(1), A(1));
NEL_AB = [0; -P/2; -P*L(1)/8; 0; -P/2; P*L(1)/8];
d_AB   = [0; 0; 0; Disp(1); Disp(2); Disp(3)];

F_AB = k_AB * d_AB - NEL_AB   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B] in LCS

%
%% Section 7 -- Internal forces in element BC
%
% BC is vertical: local axial = global y, local transverse = global x.
% LCS displacements at B:  u_local = -v_B,  v_local = +u_B

k_BC   = stiff(E(2), I(2), L(2), A(2));
NEL_BC = [0; -w*L(2)/2; -w*L(2)^2/12; 0; -w*L(2)/2; w*L(2)^2/12];
d_BC   = [-Disp(2); Disp(1); Disp(3); 0; 0; 0];

F_BC = k_BC * d_BC - NEL_BC   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C] in LCS


%
%% LOCAL FUNCTION: stiff
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% ========================================================================

% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
%
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]
%   u     : axial displacement
%   v     : transverse displacement
%   theta : rotation
%   1, 2  : near and far end nodes

function k = stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

end
```

I.2.5 Hybrid orthogonal frame

Orthogonal frame solved in §41.3.4




```
%
% ========================================================================

% DIRECT STIFFNESS METHOD -- HYBRID ORTHOGONAL FRAME
%
% ========================================================================

% Three-element frame: vertical beam-column AB, horizontal beam BC,
% and a vertical axial bar DC connecting node C to a fixed support D.
%
% GEOMETRY:
%   A (fixed wall)
```

```
%    |
%    | AB (vertical beam-column, length Lab)
%    |
%    B ------------------------- C (roller: horizontal DOF only)
%          BC (horizontal beam, length Lbc)
%                    |
%                    | DC (axial bar only, length Ldc)
%                    |
%                   D (fixed)
%
% FREE DOFs (4 total at nodes B and C):
%   DOF 1: horizontal displacement of B  (Delta_1)
%   DOF 2: vertical   displacement of B  (Delta_2)
%   DOF 3: rotation at B                 (theta_3)
%   DOF 4: horizontal displacement of C  (Delta_4)
%
% LOADING:
%   P : concentrated transverse load at midspan of AB
%   w : uniform distributed load along BC (transverse = vertical)
%   Applied moment -P*Lbc at node B (in NF vector)
%
% UNITS: GPa, kN, mm (consistent throughout)
%
```

```
clear; clc;

%
```

```
% Section 1 -- Structural properties
%
```

```
E   = 200;          % Young's modulus                    [kN/mm^2 = GPa]
I   = 200e6;        % second moment of area (beams)      [mm^4]

Lab = 8000;         % length of AB                       [mm]
Lbc = 10000;        % length of BC                       [mm]
Ldc = 10000;        % length of DC                       [mm]

Aab = 5000;         % area of AB                         [mm^2]
Abc = 5000;         % area of BC                         [mm^2]
Adc = 100;          % area of DC (axial bar only)        [mm^2]

P   = 10;           % midspan load on AB                 [kN]
w   = 1e-3;         % uniform load on BC                 [kN/mm]

EI   = E * I;
EAab = E * Aab;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
EAbc = E * Abc;
EAdc = E * Adc;

% ----------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Nodal force vectors
% ----------------------------------------------------------------------------
% NF : forces/moments applied directly at free DOFs
NF = [  0       ;   % DOF 1
         0       ;   % DOF 2
        -P*Lbc   ;   % DOF 3: applied moment at B
         0       ];  % DOF 4

% NEF : equivalent nodal forces from element loads (fixed-end reactions
%        carried to the free DOFs, sign reversed)
%   AB: midpoint load P -> shear P/2 at B, moment P*Lab/8 at B
%   BC: uniform load w  -> shear w*Lbc/2 at B and C, moment w*Lbc^2/12 at B
NEF = [  P/2                    ;   % DOF 1: from AB
        -w*Lbc/2                 ;   % DOF 2: from BC
         P*Lab/8  - w*Lbc^2/12   ;   % DOF 3: from AB and BC
        -w*Lbc/2                 ];  % DOF 4: from BC at C

% ----------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix (4 x 4)
% ----------------------------------------------------------------------------
% Superposition of AB (vertical beam), BC (horizontal beam), DC (axial bar)
Ktt = [ 12*EI/Lab^3 + EAbc/Lbc,                    0,          6*EI/Lab^2,                0        ;
                              0,  EAab/Lab + 12*EI/Lbc^3,  6*EI/Lbc^2,     -12*EI/Lbc^3        ;
                  6*EI/Lab^2,            6*EI/Lbc^2,  4*EI/Lab + 4*EI/Lbc,   -6*EI/Lbc^2        ;
                              0,          -12*EI/Lbc^3,     -6*EI/Lbc^2,   12*EI/Lbc^3 + EAdc/Ldc ];

% ----------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Solve for displacements
% ----------------------------------------------------------------------------
```


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

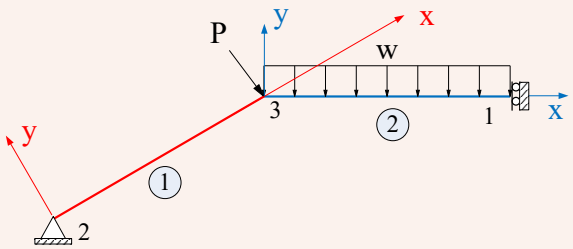
```
Delta = Ktt \ (NF + NEF);

Delta_1 = Delta(1);   % horizontal displacement of B   [mm]
Delta_2 = Delta(2);   % vertical   displacement of B   [mm]
theta_3 = Delta(3);   % rotation at B                  [rad]
Delta_4 = Delta(4);   % horizontal displacement of C   [mm]

fprintf('Node B:  u = %+.6f mm   v = %+.6f mm   theta = %+.4e rad\n', ...
        Delta_1, Delta_2, theta_3);
fprintf('Node C:  u = %+.6f mm\n', Delta_4);

%--------------------------------------------------------------------------

% Section 5 -- Internal forces in element AB (vertical beam-column)
%--------------------------------------------------------------------------

% LCS: local x points up (A->B).
%   Local axial at B  =  global vertical   =  Delta_2
%   Local transverse  = -global horizontal = -Delta_1

k_ab   = beam_stiff(E, I, Lab, Aab);
nef_ab = [0; -P/2; -P*Lab/8; 0; -P/2; P*Lab/8];
d_ab   = [0; 0; 0; Delta_2; -Delta_1; theta_3];

F_int_ab = k_ab * d_ab - nef_ab   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B]

%--------------------------------------------------------------------------

% Section 6 -- Internal forces in element BC (horizontal beam)
%--------------------------------------------------------------------------

% LCS = GCS (BC is horizontal, no transformation needed).
% C: roller -> v_C = 0, pin -> theta_C = 0; only u_C = Delta_4 is free.

k_bc   = beam_stiff(E, I, Lbc, Abc);
nef_bc = [0; -w*Lbc/2; -w*Lbc^2/12; 0; -w*Lbc/2; w*Lbc^2/12];
d_bc   = [Delta_1; Delta_2; theta_3; 0; Delta_4; 0];

F_int_bc = k_bc * d_bc - nef_bc   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C]

%--------------------------------------------------------------------------

% Section 7 -- Internal forces in element DC (axial bar)
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% Pin-ended bar: 2x2 stiffness, axial only.
% D is fixed; C moves horizontally by Delta_4.
% DC is vertical so local axial of C = -Delta_4.

k_dc  = EAdc/Ldc * [1, -1; -1, 1];
d_dc  = [0; -Delta_4];

F_int_dc = k_dc * d_dc   % [N_D, N_C] axial forces


%
% LOCAL FUNCTION: beam_stiff
%
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]

function k = beam_stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I.2.6 Frame; hard-wired




```
clc; clear;

%
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- INCLINED FRAME (HARD-WIRED)
%

% Analyzes a two-element plane frame where both elements are inclined,
% requiring coordinate transformation between LCS and GCS.
%
% GEOMETRY (coordinates in meters):
%   Node 1: (0,     0)     fixed support  (restrained DOFs 4, 5, 6)
%   Node 2: (7.416, 3)     free node      (free DOFs 1, 2, 3)
%   Node 3: (15.416,3)     fixed support  (restrained DOFs 7, 8, 9)
%
%   Element 1: Node 1 to Node 2  (inclined)
%   Element 2: Node 2 to Node 3  (horizontal at y = 3 m)
%
% FREE DOFs AT NODE 2:
%   DOF 1: horizontal displacement u
%   DOF 2: vertical   displacement v
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   DOF 3: rotation theta
%
% LOADING:
%   Element 2: uniform distributed load 4 kN/m (transverse)
%   Node 2:    concentrated 50 kN load (components resolved into DOFs 1,2,3)
%
% KEY STEPS:
%   1. stiff() builds k (LCS), K (GCS), Gamma for each inclined element
%   2. Augmented 9x9 stiffness matrix assembled via LM connectivity
%   3. Ktt (3x3 free-DOF block) solved for Node 2 displacements
%   4. Reactions recovered from Kut partition + fixed-end corrections
%   5. Internal forces recovered in LCS for each element
%
% UNITS: kN, m, kPa  (converted from mm^2, mm^4, GPa at input)
%
=========================================================================


%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 1 - Structural properties (input in mm/GPa, converted to m/kPa)
%
-------------------------------------------------------------------------

A  = 6000  / 1e6;    % cross-sectional area  [mm^2 -> m^2]
II = 200e6 / 1e12;   % second moment         [mm^4 -> m^4]
EE = 200   * 1e6;    % Young's modulus       [GPa  -> kPa]

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 2 - Element stiffness matrices
%
-------------------------------------------------------------------------

k_loc = zeros(6,6,2);   % LCS stiffness
K_glo = zeros(6,6,2);   % GCS stiffness
Gamma = zeros(6,6,2);   % rotation matrices

% Element 1: Node1(0,0) to Node2(7.416,3)
[k_loc(:,:,1), K_glo(:,:,1), Gamma(:,:,1)] = stiff(EE, II, A, [0,0], [7.416,3]);

% Element 2: Node2(7.416,3) to Node3(15.416,3)
[k_loc(:,:,2), K_glo(:,:,2), Gamma(:,:,2)] = stiff(EE, II, A, [7.416,3], [15.416,3]);

%
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 3 - Location matrix (connectivity)
%
% ------------------------------------------------------------------------

% LM(elem, 1:6) maps local DOFs 1-6 to global DOF numbers.
% Rows = elements; columns = [near-end DOFs, far-end DOFs].
%
%   Element 1: near=Node1 (global 4,5,6), far=Node2 (global 1,2,3)
%   Element 2: near=Node2 (global 1,2,3), far=Node3 (global 7,8,9)

LM = [ 4, 5, 6, 1, 2, 3 ;
       1, 2, 3, 7, 8, 9 ];

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 4 - Assemble augmented global stiffness matrix (9x9)
%
% ------------------------------------------------------------------------

Kaug = zeros(9);
for elem = 1:2
    for r = 1:6
        lr = abs(LM(elem,r));
        for c = 1:6
            lc = abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc) = Kaug(lr,lc) + K_glo(r,c,elem);
        end
    end
end

Ktt = Kaug(1:3, 1:3);   % free-DOF partition (Node 2)
Kut = Kaug(4:9, 1:3);   % restrained-free coupling (for reactions)

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 5 - Fixed-end actions (FEA) from distributed load on Element 2
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Element 2 carries w = 4 kN/m uniform transverse load.
% Fixed-end reactions in LCS (Euler-Bernoulli, both ends clamped):
%   Shear at each end:    w*L/2
%   Moment at near end:  +w*L^2/12
%   Moment at far  end:  -w*L^2/12

w   = 4;     % distributed load on element 2   [kN/m]
L2  = sqrt((15.416-7.416)^2 + (3-3)^2);        % = 8 m
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
96
97  fea = zeros(6,2);
98  fea(:,2) = [0; w*L2/2; w*L2^2/12; 0; w*L2/2; -w*L2^2/12];
99
100 % Transform FEA to GCS
101 FEA_glo = zeros(6,2);
102 for elem = 1:2
103     FEA_glo(:,elem) = Gamma(:,:,elem) * fea(:,elem);
104 end
105
106 % Fixed-end actions at restrained DOFs (for reaction correction)
107 FEA_Rest = [0, 0, 0, FEA_glo(4:6,2)'];
108
109 %
    ---------------------------------------------------------------------
110 % Section 6 - Applied load vector at free DOFs
111 %
    ---------------------------------------------------------------------
112 % 50 kN concentrated load on element 2; position gives reaction
    fractions.
113 % Negative of near-end FEA is added to account for element loading.
114
115 P = zeros(3,1);
116 P(1) =  50 * 3/8;
117 P(2) = -50 * 7.416/8 - fea(2,2);
118 P(3) = -fea(3,2);
119
120 %
    ---------------------------------------------------------------------
121 % Section 7 - Solve for displacements at Node 2
122 %
    ---------------------------------------------------------------------
123 Displacements = Ktt \ P
124
125 %
    ---------------------------------------------------------------------
126 % Section 8 - Support reactions
127 %
    ---------------------------------------------------------------------
128 Reactions = Kut * Displacements + FEA_Rest'
129
130 %
    ---------------------------------------------------------------------
131 % Section 9 - Internal forces in LCS for each element
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% ------------------------------------------------------------------------

d_global        = zeros(6,1,2);
d_global(:,:,1) = [0;0;0; Displacements(1:3)];
d_global(:,:,2) = [Displacements(1:3); 0;0;0];

fprintf('\n--- Internal Forces in LCS ---\n');
fprintf('%-12s %8s %8s %8s %8s %8s %8s\n', 'Element','N_i','V_i','M_i','N_j','V_j','M_j');
for elem = 1:2
    d_local = Gamma(:,:,elem) * d_global(:,:,elem);
    f_int   = k_loc(:,:,elem) * d_local + fea(:,elem);
    fprintf('Element %-4d %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f\n', ...
            elem, f_int(1),f_int(2),f_int(3),f_int(4),f_int(5),f_int(6));
end


%
% ========================================================================

% LOCAL FUNCTION: stiff
%
% ========================================================================

% Computes LCS stiffness k, GCS stiffness K, and rotation matrix Gamma
% for an inclined 2D Euler-Bernoulli beam-column.
%
% alpha = atan2(dy,dx) is the element inclination angle.
% Gamma rotates a GCS 6-DOF vector into LCS.
% K = Gamma' * k * Gamma

function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, i, j)

dx    = j(1) - i(1);
dy    = j(2) - i(2);
L     = sqrt(dx^2 + dy^2);
alpha = atan2(dy, dx);
c     = cos(alpha);
s     = sin(alpha);

Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

EI = EE * II;
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
EA = EE * A;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
      -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end
```

I.2.7 Direct stiffness method; frame

I.2.8 Main code

```
%
% ========================================================================

% GENERAL 2D FRAME ANALYSIS -- DIRECT STIFFNESS METHOD
%
% ========================================================================

% A general-purpose program for linear elastic analysis of 2D frames
% (beam-columns with axial, shear, and bending DOFs).
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- Input data (problem definition): prob_1 (inline)
%   Part 3  -- function stiff        : element k, K, Gamma
%   Part 4  -- function plot_frame   : geometry and support visualisation
%   Part 5  -- function print1       : echo input to output file
%   Part 6  -- function print2       : write results to output file
%
% THEORY SUMMARY:
%   Each 2D beam-column element has 6 DOFs: [u_i, v_i, theta_i, u_j, v_j, theta_j]
%   The element stiffness is formed in the Local Coordinate System (LCS)
%   and rotated to the Global Coordinate System (GCS) via:
%       K_global = Gamma^T * k_local * Gamma
%
%   The augmented system (free + restrained DOFs) is assembled and
%   partitioned:
%       [ K_tt  K_tu ] { Delta_t }   { P_t }
%       [ K_ut  K_uu ] { Delta_u } = { R   }
%   where t = free (unknown) DOFs, u = restrained (known = 0) DOFs.
%   Solving the top partition: Delta_t = K_tt^-1 * P_t
```

```
%   Reactions from the bottom: R = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
%
% ID MATRIX CONVENTION:
%   ID(node, dof) = 0 -> DOF is FREE    (will be numbered first)
%   ID(node, dof) = 1 -> DOF is FIXED   (will be numbered after free DOFs)
%   After renumbering, ID holds the global equation number for each DOF.
%
% INPUT DATA ARRAYS (defined in prob_1 section below):
%   coord(n,2)          : nodal x,y coordinates
%   lnods(e,2)          : element connectivity [near_node, far_node]
%   ID(n,3)             : boundary condition flags (0=free, 1=fixed)
%   E(e), A(e), Iz(e)   : element material and section properties
%   NodalLoad(i,4)      : [node, Fx, Fy, Mz] for each applied nodal load
%   ElementLoad(e,2)    : [element, w] for each distributed load
%
% OUTPUT: text file 'my_output.dat' with full analysis results
%
% =========================================================================


clear;
fid = fopen('my_output.dat', 'w');
ndofpn = 3;   % degrees of freedom per node (u, v, theta)

%
% =========================================================================

% PART 1 -- PROBLEM DEFINITION  (inline replacement for prob_1.m)
%
% =========================================================================

% 5-node, 5-element portal frame with two fixed supports.
% Units: mm, kN  (E in kN/mm^2, A in mm^2, Iz in mm^4)
%
% NODE LAYOUT:
%   Node 1: (0,    0)     fixed base left
%   Node 2: (9000, 0)     fixed base right
%   Node 3: (0,    6000)  left knee (free)
%   Node 4: (9000, 6000)  right knee (free)
%   Node 5: (0,   12000)  top left (free)
%
% ELEMENT CONNECTIVITY:
%   Elem 1: Node 1 -> Node 3  (left column, lower)
%   Elem 2: Node 2 -> Node 4  (right column)
%   Elem 3: Node 3 -> Node 5  (left column, upper)
%   Elem 4: Node 3 -> Node 4  (beam at mid-height)
%   Elem 5: Node 4 -> Node 5  (diagonal or upper beam)

Nnodes = 5;
Nelem  = 5;
```

```
71
72 % ID matrix: 0 = free DOF, 1 = restrained DOF
73 % Rows = nodes, columns = [u, v, theta]
74 ID = [ 1, 1, 1 ;    % Node 1: fully fixed
75        1, 1, 1 ;    % Node 2: fully fixed
76        0, 0, 0 ;    % Node 3: free
77        0, 0, 0 ;    % Node 4: free
78        0, 0, 0 ];   % Node 5: free
79
80 coord = [      0,     0 ;
81           9000,     0 ;
82              0,  6000 ;
83           9000,  6000 ;
84              0, 12000 ];
85
86 lnods = [ 1, 3 ;
87           2, 4 ;
88           3, 5 ;
89           3, 4 ;
90           4, 5 ];
91
92 % Section and material properties (uniform for all elements)
93 E  = 30e6  * ones(1, Nelem);   % Young's modulus     [kN/mm^2]
94 A  = 75000 * ones(1, Nelem);   % cross-section area  [mm^2]
95 Iz = 4.8e8 * ones(1, Nelem);   % second moment       [mm^4]
96
97 % Nodal loads: [node, Fx, Fy, Mz]
98 Nnodal_load = 2;
99 NodalLoad = [ 3,  80,  0,  0 ;   % 80 kN horizontal at Node 3
100              5,  40,  0,  0 ];   % 40 kN horizontal at Node 5
101
102 % Element loads: [element, w (transverse distributed load)]
103 Nelement_load = 1;
104 ElementLoad   = [ 4,  1e-3 ];    % w = 0.001 kN/mm on element 4
105
106 %
    ========================================================================

107 % PART 2 -- VISUALISE FRAME GEOMETRY
108 %
    ========================================================================

109 plot_frame(coord, lnods, ID);
110
111 %
    ========================================================================

112 % PART 3 -- ELEMENT STIFFNESS MATRICES
113 %
    ========================================================================
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% For each element, compute:
%   k_loc : stiffness in Local Coordinate System  (6x6)
%   K_glo : stiffness in Global Coordinate System (6x6) = Gamma^T k Gamma
%   Gamma : rotation matrix from GCS to LCS       (6x6)

k_loc = zeros(6, 6, Nelem);
K_glo = zeros(6, 6, Nelem);
Gamma = zeros(6, 6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    n1 = lnods(e,1);
    n2 = lnods(e,2);
    xy1 = coord(n1, :);
    xy2 = coord(n2, :);
    [k_loc(:,:,e), K_glo(:,:,e), Gamma(:,:,e)] = stiff(E(e), Iz(e), A(e), xy1, xy2);
end

%% ========================================================================

% PART 4 -- DOF NUMBERING: update ID matrix
%% ========================================================================

% Free DOFs are numbered first (1 .. size_K_tt),
% then restrained DOFs (size_K_tt+1 .. size_K_aug).
% This ensures the free-DOF partition occupies the top-left of K_aug.

orig_ID = ID;
eq_num  = 0;

% Pass 1: number free DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 0
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_tt = eq_num;   % number of free DOFs (= size of K_tt)

% Pass 2: number restrained DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 1
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    end
end
size_K_aug = eq_num;  % total DOFs (free + restrained)

print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, lnods, E, A
, Iz);

%
==========================================================================

% PART 5 -- LOCATION MATRIX (LM)
%
==========================================================================

% LM(e, 1:6) maps local DOF indices 1..6 of element e
% to global equation numbers using the updated ID matrix.
% Local DOFs 1-3 = near-end node; 4-6 = far-end node.

LM = zeros(Nelem, 6);
for e = 1 : Nelem
    LM(e,:) = [ ID(lnods(e,1), :),  ID(lnods(e,2), :) ];
end

%
==========================================================================

% PART 6 -- ASSEMBLE AUGMENTED GLOBAL STIFFNESS MATRIX
%
==========================================================================

% The augmented matrix K_aug includes all DOFs (free + restrained).
% Each element's GCS stiffness is scattered into K_aug via LM.

K_aug = zeros(size_K_aug);

for e = 1 : Nelem
    for r = 1 : 6
        lr = LM(e, r);      % global row
        for c = 1 : 6
            lc = LM(e, c);  % global column
            K_aug(lr, lc) = K_aug(lr, lc) + K_glo(r, c, e);
        end
    end
end

% Extract the free-DOF partition (top-left block)
K_tt = K_aug(1:size_K_tt, 1:size_K_tt);

% Extract the coupling partition (needed for reaction recovery)
K_ut = K_aug(size_K_tt+1 : size_K_aug,  1:size_K_tt);

```

```
%
% ========================================================================

% PART 7 -- LOAD VECTOR ASSEMBLY
%
% ========================================================================

% The total load vector P_tt combines:
%   (a) Directly applied nodal forces/moments
%   (b) Equivalent nodal forces (fixed-end reactions) from element loads,
%       transformed to GCS and added at the free DOFs with reversed sign

P_tt = zeros(size_K_tt, 1);

% --- (a) Directly applied nodal loads ---
for i = 1 : Nnodal_load
    node = NodalLoad(i, 1);
    for j = 1 : ndofpn
        eq = ID(node, j);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NodalLoad(i, j+1);
        end
    end
end

% --- (b) Equivalent nodal forces from distributed element loads ---
% Fixed-end reactions in LCS for uniform transverse load w over length L:
%   Near end: [ 0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12 ]
%
% These are transformed to GCS and subtracted from the load vector
% at free DOFs (and stored for reaction correction at restrained DOFs).

NEF_local  = zeros(Nelement_load, 6);
NEF_global = zeros(Nelement_load, 6);
R_nef      = zeros(size_K_aug - size_K_tt, 1);  % FEA at restrained DOFs

for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    w    = ElementLoad(e, 2);
    n1   = lnods(elem, 1);
    n2   = lnods(elem, 2);
    xy1  = coord(n1, :);
    xy2  = coord(n2, :);
    L    = sqrt((xy2(2)-xy1(2))^2 + (xy2(1)-xy1(1))^2);

    % Fixed-end reactions in LCS (uniform transverse load, both ends fixed)
    NEF_local(e,:)  = [0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12];

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    % Transform to GCS using Gamma^T (Gamma maps GCS->LCS, so Gamma^T maps LCS->GCS)
    NEF_global(e,:) = (Gamma(:,:,elem)' * NEF_local(e,:)')';
end

% Scatter NEF into load vector (free DOFs) or reaction correction (fixed DOFs)
for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(elem, i);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NEF_global(e, i);
        else
            R_nef(eq - size_K_tt) = R_nef(eq - size_K_tt) + NEF_global(e, i);
        end
    end
end

%% ========================================================================

% PART 8 -- SOLVE FOR DISPLACEMENTS
%% ========================================================================

Displacements = K_tt \ P_tt;

%% ========================================================================

% PART 9 -- RECOVER SUPPORT REACTIONS
%% ========================================================================

% Reactions = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
% The FEA term corrects for the equivalent loads that were applied at
% restrained nodes due to element distributed loads.

Reactions = K_ut * Displacements - R_nef;

%% ========================================================================

% PART 10 -- RECOVER ELEMENT INTERNAL FORCES (in LCS)
%% ========================================================================

% For each element:
%   1. Extract global displacements at both end nodes from Displacements
```

```
%      (restrained DOFs have zero displacement)
%   2. Rotate to LCS:  d_local = Gamma * d_global
%   3. Compute internal forces:  f = k_loc * d_local
%   4. Subtract fixed-end actions for loaded elements (equilibrium
correction)

int_forces = zeros(6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    % Assemble the 6x1 global displacement vector for this element
    d_global = zeros(6, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(e, i);
        if eq <= size_K_tt
            d_global(i) = Displacements(eq);
        else
            d_global(i) = 0;   % restrained DOF
        end
    end

    % Rotate to LCS and compute internal forces
    d_local        = Gamma(:,:,e) * d_global;
    int_forces(:,e) = k_loc(:,:,e) * d_local;

    % Subtract fixed-end actions for distributed loads on this element
    for j = 1 : Nelement_load
        if ElementLoad(j,1) == e
            int_forces(:,e) = int_forces(:,e) - NEF_local(j,:)';
        end
    end
end

% Write all results to output file
print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
       Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
       Nelement_load, ElementLoad);

fclose(fid);
fprintf('Analysis complete. Results written to my_output.dat\n');


%
% ========================================================================

% FUNCTION: stiff
%
% ========================================================================

% Computes element stiffness for an arbitrarily inclined 2D beam-column.
%
% INPUTS:
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   EE, II, A  : Young's modulus, second moment, cross-section area
%   xy_1, xy_2 : [x,y] coordinates of near and far end nodes
%
% OUTPUTS:
%   k     : 6x6 stiffness matrix in LCS
%   K     : 6x6 stiffness matrix in GCS  (= Gamma^T k Gamma)
%   Gamma : 6x6 rotation matrix (GCS vector -> LCS vector)
%
% SPECIAL CASE: vertical elements (dx approx 0) are detected explicitly
% to avoid numerical issues with atan2 near +/-pi/2.

function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, xy_1, xy_2)

dx = xy_2(1) - xy_1(1);
dy = xy_2(2) - xy_1(2);
L  = sqrt(dx^2 + dy^2);

% Inclination angle -- handle near-vertical elements explicitly
if abs(dx) > max(abs(xy_2(1)), abs(xy_1(1))) * 1e-6
    alpha = atan2(dy, dx);
else
    alpha = (dy > 0) * pi/2 + (dy <= 0) * (-pi/2);
end

c = cos(alpha);
s = sin(alpha);

% Rotation matrix: transforms a GCS 6-DOF vector to LCS
Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

% Element stiffness in LCS (Euler-Bernoulli beam-column)
EI = EE * II;
EA = EE * A;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end   % stiff


```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% ========================================================================

% FUNCTION: plot_frame
%
% ========================================================================

% Draws the frame geometry: elements (blue), free nodes (magenta circles),
% support symbols (red), element numbers, and node numbers.
%
% Support type is inferred from the ID row for each node:
%   [1,1,1] -> fixed wall     (hatched bar)
%   [1,1,0] -> pin support    (triangle)
%   [0,1,0] -> horizontal roller
%   [1,0,0] -> vertical roller
%   [0,1,1] -> horizontal roller with rotation fixed
%   [1,0,1] -> vertical roller with rotation fixed

function plot_frame(coord, lnods, ID)

x = coord(:,1);
y = coord(:,2);

figure;
margin      = max(max(x)-min(x), max(y)-min(y)) / 10;
ax          = [min(x)-margin, max(x)+margin, min(y)-margin, max(y)+margin];
axis(ax);  axis('equal');  hold on;

n_nodes    = size(coord,  1);
n_elements = size(lnods,  1);
n_nodes_id = size(ID,     1);   % may differ from n_nodes if ID is larger
axlim      = axis;
cs         = max(axlim(2)-axlim(1), axlim(4)-axlim(3)) / 40;  % circle size

% --- Draw support symbols ---
for i = 1 : n_nodes_id
    bc = ID(i,:);
    xi = x(i);  yi = y(i);
    theta_circle = 0 : 0.1 : 2*pi;

    % Roller symbols (circles)
    if isequal(bc, [0,1,0]) || isequal(bc, [1,1,0]) || isequal(bc, [0,1,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi, ...
             cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
    end
    if isequal(bc, [1,0,0]) || isequal(bc, [1,0,1])
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
             cos(theta_circle)*cs/2, 'r');
    end

    % Triangle for pin
    if isequal(bc, [1,1,0])
        plot([xi, xi-cs, xi+cs, xi], [yi, yi-cs, yi-cs, yi], 'r');
    end

    % Horizontal platform (hatching) -- for horizontal rollers, pins, fixed
    if any([isequal(bc,[0,1,0]), isequal(bc,[1,1,0]), isequal(bc,[0,1,1]), isequal(bc,[1,1,1])])
        ybase = yi - cs + cs * isequal(bc,[1,1,1]);
        plot([xi-2*cs, xi+2*cs], [ybase, ybase], 'r');
        for hx = -2:0.5:2
            plot([xi+hx*cs, xi+(hx-0.5)*cs], [ybase, ybase-cs*0.5], 'r');
        end
    end

    % Vertical platform -- for vertical rollers
    if any([isequal(bc,[1,0,0]), isequal(bc,[1,0,1])])
        xbase = xi - cs;
        plot([xbase, xbase], [yi-2*cs, yi+2*cs], 'r');
        for vy = -1.5:0.5:2
            plot([xbase, xbase-cs], [yi+vy*cs, yi+(vy-0.5)*cs], 'r');
        end
    end

    % Extra rollers for multi-roller supports
    if isequal(bc, [0,1,1])
        for dx = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi + dx*cs, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
        end
    end
    if isequal(bc, [1,0,1])
        for dy = [-1, 0, 1]
            plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
                 cos(theta_circle)*cs/2 + dy*cs, 'r');
        end
    end
end

% --- Draw elements ---
for i = 1 : n_elements
    plot([x(lnods(i,1)), x(lnods(i,2))], ...
         [y(lnods(i,1)), y(lnods(i,2))], 'b', 'LineWidth', 1.5);
end

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% --- Draw free nodes ---
for i = 1 : n_nodes
    if ~max(ID(i,:))
        plot(x(i), y(i), 'mo', 'MarkerSize', 6);
    end
end

% --- Element numbers (blue, at midpoint) ---
set(gca, 'DefaultTextColor', 'blue');
for i = 1 : n_elements
    xm = (x(lnods(i,1)) + x(lnods(i,2)))/2 + cs;
    ym = (y(lnods(i,1)) + y(lnods(i,2)))/2 + cs;
    text(xm, ym, int2str(i), 'Color', 'blue');
end

% --- Node numbers (magenta, offset) ---
for i = 1 : n_nodes
    text(x(i)+cs, y(i)+cs, int2str(i), 'Color', 'magenta');
end

hold off;  grid on;
title('Frame Geometry');

end   % plot_frame


%
% ========================================================================

% FUNCTION: print1  (echo input data to output file)
%
% ========================================================================

function print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID,
...
                lnods, E, A, Iz)

fprintf(fid, '      ******************************************\n');
fprintf(fid, '      *  Computer Program for 2D Frame Analysis  *\n');
fprintf(fid, '      ******************************************\n');
fprintf(fid, '\nNumber of Nodes:              %d\n', Nnodes);
fprintf(fid, 'Number of Elements:          %d\n', Nelem);
fprintf(fid, 'Number of Free DOFs:         %d\n', size_K_tt);
fprintf(fid, 'Number of Restrained DOFs:   %d\n', size_K_aug - size_K_tt
);

fprintf(fid, '\nNodal Information:\n');
for inode = 1 : Nnodes
    fprintf(fid, '  Node %d  (x=%9.3e, y=%9.3e)\n', ...
            inode, coord(inode,1), coord(inode,2));
    dof_str = '';
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    labels  = {'  u (X)', '  v (Y)', '  theta'};
    for j = 1 : 3
        if ID(inode,j) <= size_K_tt && ID(inode,j) > 0
            dof_str = [dof_str, labels{j}];
        end
    end
    if isempty(dof_str)
        dof_str = '  none (fully fixed)';
    end
    fprintf(fid, '    Free DOFs:%s\n', dof_str);
end

fprintf(fid, '\nElement Information:\n');
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '  Element %d  (%d -> %d)', ielem, lnods(ielem,1),
lnods(ielem,2));
    fprintf(fid, '   E=%9.3e  A=%9.3e  Iz=%9.3e\n', E(ielem), A(ielem),
Iz(ielem));
end

end   % print1


%
% ========================================================================


% FUNCTION: print2  (write results to output file)
%
% ========================================================================

function print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions
, ...
                Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
                Nelement_load, ElementLoad)

dof_names = {'delta_X', 'delta_Y', 'rot_Z  '};

% --- Applied loads ---
fprintf(fid, '\n\nApplied Nodal Loads:\n');
for i = 1 : Nnodal_load
    fprintf(fid, '  Node %d:  Fx=%9.3e  Fy=%9.3e  Mz=%9.3e\n', ...
            NodalLoad(i,1), NodalLoad(i,2), NodalLoad(i,3), NodalLoad(i
,4));
end

fprintf(fid, '\nApplied Element Loads:\n');
for i = 1 : Nelement_load
    fprintf(fid, '  Element %d:  distributed w = %9.3e\n', ...
            ElementLoad(i,1), ElementLoad(i,2));
end

```

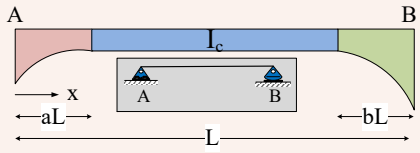

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% --- Displacements ---
fprintf(fid, '\n\nNodal Displacements:\n');
for eq = 1 : size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Displacements(eq));
end

% --- Reactions ---
fprintf(fid, '\n\nSupport Reactions:\n');
for eq = 1 : size_K_aug - size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == size_K_tt + eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Reactions(eq));
end

% --- Internal forces ---
fprintf(fid, '\n\nElement Internal Forces (Local Coordinate System):\n')
;
force_labels = {'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)', ...
                'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)'};
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '\n  Element %d\n', ielem);
    for idof = 1 : 6
        if idof == 1
            fprintf(fid, '    Near-end node %d:\n', lnods(ielem,1));
        end
        if idof == 4
            fprintf(fid, '    Far-end  node %d:\n', lnods(ielem,2));
        end
        fprintf(fid, '      %-12s  %+12.5e\n', ...
                force_labels{idof}, int_forces(idof,ielem));
    end
end

end   % print2
```

I.2.9 Stiffness matrix of non-prismatic members

Listing of the Matlab code that generates plots in Fig. 45.11, and generate the stiffness matrix of non-prismatic members. This is based on (Portland Cement Association, 1947).

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.




```
%
% ========================================================================

% STIFFNESS MATRIX AND FIXED-END MOMENTS FOR NON-PRISMATIC BEAM MEMBERS
%
% ========================================================================

% Computes the exact stiffness matrix and fixed-end moments (FEM) for a
% beam with variable cross-section -- specifically a member with haunches
% (tapered ends) and a prismatic central segment.
%
% MEMBER PROFILE:
%
%   |<-- a*L -->|<------ (1-a-b)*L ------>|<-- b*L -->|
%   A           |                         |           B
%   [left haunch]   [prismatic centre]      [right haunch]
%
%   Moment of inertia profile:
%     Left haunch  (0 <= x <= a*L):        I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
%     Centre segment (a*L <= x <= (1-b)*L): I(x) = Ic  (constant)
%     Right haunch ((1-b)*L <= x <= L):    I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
%
%   where ra, rb are the haunch depth ratios (0 = no haunch, prismatic)
%   and n is the haunch shape exponent (n=1: linear, n=2: parabolic).
%
% METHOD -- FLEXIBILITY APPROACH:
%   The 2x2 flexibility matrix d is built by numerical integration of the
%   virtual work integrals (unit moment diagrams x 1/EI).
%   The stiffness matrix is then obtained by inversion and static
%   condensation, following the force method:
%       k_tt = d^-1
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%       k = B^T * d^-1 * B  (after condensation and permutation)
%
% FIXED-END MOMENTS (FEM) for uniform transverse load w:
%   Computed from the compatibility equations for a fixed-fixed beam,
%   integrating the particular solution against the flexibility kernel.
%   Output FEM = [M_A; M_B] normalised so that w=1 gives actual moments.
%
% DOF ORDER IN OUTPUT STIFFNESS MATRIX k (4x4):
%   [v_A, theta_A, v_B, theta_B]   (transverse displacements and rotations)
%
% PARAMETRIC STUDY (driver script below):
%   Plots surfaces of k(2,2) and FEM(1) as functions of haunch geometry
%   to visualise sensitivity of stiffness and fixed-end moments to
%   haunch length (a,b) and depth ratio (r).
%
% INPUTS TO NonPrismatic():
%   a   : left  haunch length as fraction of L    [0..0.5]
%   b   : right haunch length as fraction of L    [0..0.5]  (a+b <= 1)
%   L   : member length                           [any consistent unit]
%   Ic  : moment of inertia of prismatic centre   [length^4]
%   ra  : left  haunch depth ratio                [>= 0]
%   rb  : right haunch depth ratio                [>= 0]
%   n   : haunch shape exponent (1=linear,2=parabolic)
%
% OUTPUTS:
%   k   : 4x4 stiffness matrix  [force/length units consistent with input]
%   FEM : [M_A; M_B] fixed-end moments for w=1 uniform load
%
=====================================================================



%
=====================================================================
% DRIVER SCRIPT -- parametric surfaces
%
=====================================================================

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;
font  = 'Times New Roman';

% Fixed parameters for the parametric study
Ic = 1;    % normalised (results are per unit Ic)
n  = 2;    % parabolic haunches
L  = 1;    % normalised length

```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.5]);

%
-------------------------------------------------------------------------

% Plot 1 & 3: symmetric haunches (a=b, ra=rb)
% Vary haunch length a in [0.2, 0.4] and depth ratio r in [0, 4]
%
-------------------------------------------------------------------------

[A_grid, R_grid] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0:0.2:4);
K_surf   = zeros(size(A_grid));
FEM_surf = zeros(size(A_grid));

for i = 1 : size(A_grid, 1)
    for j = 1 : size(A_grid, 2)
        a = A_grid(i,j);
        r = R_grid(i,j);
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, a, L, Ic, r, r, n);
        K_surf(i,j)   = k_ij(2,2) / 4;    % normalised bending stiffness
        FEM_surf(i,j) = fem_ij(1) * 12;   % normalised fixed-end moment
    end
end

subplot(2,2,1);
surf(A_grid, R_grid, K_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('k_{22}/4');
title('Stiffness: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([0 2 4 6 8]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,3);
surf(A_grid, R_grid, FEM_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('FEM');
title('Fixed-End Moment: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([1 1.1 1.2 1.3 1.4]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

%
-------------------------------------------------------------------------

% Plot 2 & 4: asymmetric haunches (a ~= b, fixed r=0.2)
% Vary both haunch lengths independently
%
-------------------------------------------------------------------------

r_fixed = 0.2;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
[A_grid2, B_grid2] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0.1:0.01:0.4);
K_ratio   = zeros(size(A_grid2));
FEM_ratio = zeros(size(A_grid2));

for i = 1 : size(A_grid2, 1)
    for j = 1 : size(A_grid2, 2)
        a = A_grid2(i,j);
        b = B_grid2(i,j);
        % WARNING: no check that a+b <= 1; caller must ensure valid geometry
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, r_fixed, r_fixed, n);
        K_ratio(i,j)   = k_ij(2,2) / k_ij(4,4);   % ratio of end stiffnesses
        FEM_ratio(i,j) = fem_ij(1) / fem_ij(2);    % ratio of end moments
    end
end

subplot(2,2,2);
surf(A_grid2, B_grid2, K_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('k_{11}/k_{12}');
title('Stiffness ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,4);
surf(A_grid2, B_grid2, FEM_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('FEM_A / FEM_B');
title('FEM ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% Export figure
if n == 2
    FileName = 'Haunches-Parab.eps';
else
    FileName = 'Haunches-Straight.eps';
end
% print(FileName, '-depsc');   % uncomment to save


%
% ========================================================================

% FUNCTION: NonPrismatic
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% ========================================================================

% Computes the 4x4 stiffness matrix and fixed-end moments for a
% non-prismatic beam with left and right haunches and a prismatic centre.
%
% The flexibility approach is used:
%   Step 1: Build 2x2 flexibility matrix d by numerical integration
%   Step 2: Invert to get the 2x2 rotational stiffness k_tt
%   Step 3: Expand to 4x4 using statics matrix B (static condensation)
%   Step 4: Permute rows/columns to standard DOF order
%   Step 5: Integrate compatibility equations for FEM under uniform load

function [k, FEM] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, ra, rb, n)

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 1 -- Build the 2x2 flexibility matrix d
%
% ------------------------------------------------------------------------

% d(i,j) = integral of (m_i(x) * m_j(x) / (E*I(x))) dx   over [0, L]
%
% where m_1(x) = (x/L - 1) and m_2(x) = (x/L) are the unit moment
% diagrams for unit end moments at A and B respectively.
%
% The integral is split into three segments matching the I(x) profile.
% Each segment uses MATLAB's adaptive quadrature (integral()).

% --- Left haunch  (0 <= x <= a*L) ---
% I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
I_L  = @(x) Ic .* (1 + ra .* (1 - x./(a*L)).^n).^3;

d11_L = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d12_L = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d22_L = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_L(x), 0,   a*L);

% --- Prismatic centre  (a*L <= x <= (1-b)*L) ---
d11_C = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);
d12_C = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ Ic, a*L, (1-b)*L);
d22_C = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);

% --- Right haunch  ((1-b)*L <= x <= L) ---
% I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
I_R  = @(x) Ic .* (1 + rb .* (1 - (L-x)./(b*L)).^n).^3;

d11_R = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d12_R = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d22_R = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L);

```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% Assemble full 2x2 flexibility matrix (sum of three segments)
d = [ d11_L+d11_C+d11_R,  d12_L+d12_C+d12_R ;
      d12_L+d12_C+d12_R,  d22_L+d22_C+d22_R ];

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 2 -- Build stiffness sub-matrices via inversion
%
% ------------------------------------------------------------------------

% The statics matrix B relates the two redundant moments (M_A, M_B)
% to the four end forces via equilibrium:
%   B = [1/L, 1/L; -1/L, -1/L]  (shear equilibrium)

B_stat = [1, 1; -1, -1] / L;

d_inv = inv(d);              % 2x2 rotational stiffness

k_tt  = d_inv;               % rotational DOFs (2x2)
k_ut  = B_stat * d_inv;      % coupling: translational from rotational (2x2)
k_tu  = d_inv * B_stat';     % coupling: rotational from translational (2x2)
k_uu  = B_stat * d_inv * B_stat';  % translational stiffness (2x2)

% Assemble full 4x4 in order [theta_A, theta_B, v_A, v_B]
k_full = [ k_tt,  k_tu ;
           k_ut,  k_uu ];

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 3 -- Permute to standard DOF order [v_A, theta_A, v_B, theta_B]
%
% ------------------------------------------------------------------------

idx = [3, 2, 4, 1];
k   = k_full(idx, idx);

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Step 4 -- Fixed-end moments for uniform transverse load (w = 1)
%
% ------------------------------------------------------------------------

% For a fixed-fixed beam under uniform load w, the FEM are found by
% solving the compatibility equations:
%
%   [d11, d12] [M_A]   [integral of x^2*(L-x)/I dx / 2     ]
```

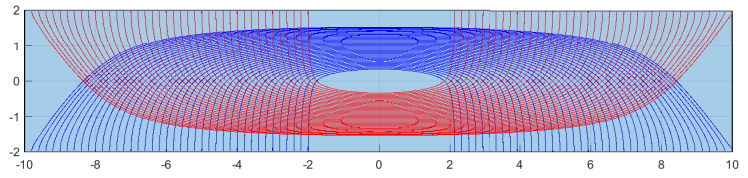

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   [d21, d22] [M_B] = [integral of x*(L-x)^2/I dx / 2     ]
%
% (These are the particular-solution integrals for w=1.)
% The factor /2 comes from the parabolic bending moment diagram m_p(x)
% for a simply-supported beam under uniform load: m_p = w*x*(L-x)/2.

% Numerator integral 1: integral of x^2 * m_unit_1 / I dx  = integral of
  x^2*(L-x) / (2*I) dx
% Split into three segments as before

eq11_L = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq11_C = integral(@(x) (x.^2)        ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq11_R = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq11   = eq11_L + eq11_C + eq11_R;

eq12_L = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq12_C = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq12_R = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq12   = eq12_L + eq12_C + eq12_R;

% Right-hand side: particular moment integral for m_1 = (x/L - 1)
eq13_L = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq13_C = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq13_R = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq13   = eq13_L + eq13_C + eq13_R;

% Numerator integral 2: for m_unit_2 = (x/L)
eq22_L = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq22_C = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq22_R = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq22   = eq22_L + eq22_C + eq22_R;

% Right-hand side: particular moment integral for m_2 = (x/L)
eq23_L = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq23_C = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq23_R = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq23   = eq23_L + eq23_C + eq23_R;

% Solve the 2x2 compatibility system for the unknown FEM
% NOTE: eq21 = eq12 by symmetry of the flexibility matrix (Maxwell's
  theorem)
A_fem = [ eq11,  eq12 ;
          eq12,  eq22 ];    % eq21 == eq12 by reciprocity
B_fem = [ eq13 ;
          eq23 ] / 2;       % divide by 2 for the w*x*(L-x)/2 moment
  diagram

FEM = A_fem \ B_fem;        % [M_A; M_B]

end   % NonPrismatic
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I.2.10 Isostatic lines

Code to plot isostatic lines as shown in §15.4.7




```
%
% ISOSTATIC LINES (STRESS TRAJECTORIES) IN A SIMPLY-SUPPORTED BEAM
%
% Isostatic lines (also called stress trajectories or principal stress
% lines) are curves that are everywhere tangent to a principal stress
% direction.  They reveal the internal "flow" of compression and tension
% through a structural member.
%
% THEORY:
%   At any point (x,y) in the beam, the stress state under bending and
%   shear is:
%       [sigma,  tau ]
%       [tau,    0   ]
%
%   where sigma = -M(x)*y/I  (bending stress, zero at neutral axis)
%   and   tau   = V(x)*(h^2/4 - y^2)*A_eff  (parabolic shear stress)
%
%   The principal stress directions are the eigenvectors of this tensor.
%   Two families of isostatic lines exist:
%     Family 1 (blue):  major principal stress direction (compression or
 tension)
%     Family 2 (red):   minor principal stress direction (orthogonal to
 family 1)
%
% TRACING ALGORITHM:
%   Each isostatic line is traced by a simple Euler integration:
%     x(k+1) = x(k) +/- step * eigenvector_component_x
%     y(k+1) = y(k) +/- step * eigenvector_component_y
%
%   The sign of the step is chosen based on the quadrant of (x,y) to
%   keep the tracing moving in a consistent direction (see inline notes)
 .
%
%   WARNING: the sign logic in both tracing loops is heuristic and was
%   tuned for this specific beam geometry.  It may not generalise to
%   other load cases or starting points without adjustment.
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% LOADS SUPPORTED:
%   Load = 1 : uniformly distributed load w on a simply-supported beam
%   Load = 2 : midspan point load W on a simply-supported beam
%
% BEAM GEOMETRY:
%   Origin at the beam centroid (x=0, y=0 at mid-span, mid-height).
%   x in [-L/2, L/2],  y in [-h/2, h/2]
%
% OUTPUT:
%   Figure with beam outline, blue compression trajectories (Family 1),
%   and red tension trajectories (Family 2).
%   Exported to EPS and converted to PDF via Ghostscript.
%
% ========================================================================


clear; clc; close all;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 16;
font  = 'Times New Roman';
GS    = 'gswin64.exe';   % Ghostscript executable for EPS->PDF

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Problem parameters
%
% ------------------------------------------------------------------------

Load   = 1;      % 1 = uniform load;  2 = midspan point load
nlines = 40;     % number of isostatic lines per family
delta  = 100;    % spacing denominator: starting x = -L/2 + i*L/delta

w    = 1;        % load intensity (normalised)
L    = 20;       % beam span                              [length units]
h    = L/5;      % beam depth                             [length units]
B    = 1;        % beam width                             [length units]
A    = 4;        % cross-sectional area                   [length^2]
Inrt = B*h^3/12; % second moment of area                  [length^4]

% Reference stress values (for context, not used in tracing)
Mmax   = w*L^2/8;
sigmax = Mmax * (h/2) / Inrt;     % maximum bending stress at extreme
fibre
taumax = 1.5 * w*L / (2*A);       % maximum shear stress at neutral axis

step = h/100;    % integration step size for Euler tracing

%
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Draw beam outline
%
% ------------------------------------------------------------------------

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/4]);

pgon = polyshape([-L/2, L/2, L/2, -L/2], [-h/2, -h/2, h/2, h/2]);
plot(pgon);
hold on;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 3 -- Family 1: traces along the FIRST eigenvector (column 1)
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Starting points: bottom fibre (y approx -h/2), evenly spaced along the span.
% Traces upward through the beam following the compression arch.
%
% Sign convention for step direction (heuristic, tuned for this geometry):
%   y > 0 (upper half):  move right in x, downward in y
%   y < 0 & x < 0:       move left  in x, upward   in y
%   y < 0 & x > 0:       move right in x, downward in y
%
% WARNING: this quadrant-based sign logic is geometry-specific.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;   % starting x position
    y0 = -0.99 * h/2;          % start near (but inside) bottom fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        % Compute stress tensor at current point
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        % Eigenvectors give principal stress directions
        [Ve, D]    = eig(T);
        [~, idx]   = sort(diag(D));   % sort by ascending eigenvalue
        Vect       = Ve(:, idx);
        Vect       = -Vect / norm(Vect);   % normalise (sign absorbed below)

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        % Step in the direction of eigenvector 1 (column 1 after sorting)
        if yv(k) > 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,1);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        end

        % Terminate if the line exits through the bottom fibre
        if yv(k+1) < -h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'b-');
    hold on;
end

%% ---------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Family 2: traces along the SECOND eigenvector (column 2)
%% ---------------------------------------------------------------------

% Starting points: top fibre (y approx +h/2), same x spacing.
% Traces downward following the tension arch (orthogonal to Family 1).
%
% Sign convention (heuristic):
%   y > 0 & x < 0:  move right, downward
%   y > 0 & x > 0:  move left,  upward    (note: reversed direction)
%   y < 0:          move right, downward  (both half-planes)
%
% WARNING: the y>0 & x>0 branch has a two-step logic in the original
% that sets (x,y) to the current value then immediately overwrites it.
% The first assignment is dead code -- preserved here as a no-op comment.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;
    y0 =  0.99 * h/2;   % start near (but inside) top fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
163
164     for k = 1 : 999
165         sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
166         tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
167         T   = [sig, tau; tau, 0];
168
169         [Ve, D]  = eig(T);
170         [~, idx] = sort(diag(D));
171         Vect     = Ve(:, idx);
172         Vect     = -Vect / norm(Vect);
173
174         % Step in the direction of eigenvector 2 (column 2 after sorting
    )
175         if yv(k) > 0 && xv(k) < 0
176             xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
177             yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
178         elseif yv(k) > 0 && xv(k) >= 0
179             % BUG FIX: original had a dead assignment (x,y)=(x,y) before
180             % this step -- removed; only the active step is kept.
181             xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,2);
182             yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,2);
183         elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
184             xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
185             yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
186         else   % y < 0 and x >= 0
187             xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
188             yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
189         end
190
191         % Terminate if the line exits through the top fibre
192         if yv(k+1) > h/2
193             xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
194             xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
195             break
196         end
197     end
198
199     plot(xv, yv, 'r-');
200     hold on;
201 end
202
203 %
    ------------------------------------------------------------------------

204 % Section 5 -- Formatting and export
205 %
    ------------------------------------------------------------------------

206 grid on;
207 daspect([1 1 1]);
208 xlim([-L/2, L/2]);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
ylim([-h/2,  h/2]);
xlabel('x', 'FontSize', fs);
ylabel('y', 'FontSize', fs);
title(['Isostatic Lines -- Load type ' num2str(Load) ...
       '  (blue = Family 1,  red = Family 2)'], 'FontSize', fs);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

FileName = ['Stress-Flow-' num2str(Load) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);


%
================================================================================

% FUNCTION: Tau  -- shear stress at point (x,y)
%
================================================================================

% Parabolic shear stress distribution (Jourawski formula):
%   tau(y) = V(x) * (h^2/4 - y^2) * (B/2) / I
%          = V(x) * (1.5/A) * (1 - (2y/h)^2)
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   A     : cross-sectional area
%   h     : section depth
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   tau   : shear stress at (x,y)

function tau = Tau(x, y, w, A, h, Load)

% Shear force at section x
if Load == 1   % uniform load: V(x) = -w*x  (reactions at +/-L/2 = +w*L
/2)
    V = -w * x;
else           % midspan point load W=w: V = +/-w/2
    if x > 0
        V = -w/2;
    else
        V =  w/2;
    end
end

% Parabolic distribution (zero at extreme fibres, max at neutral axis)
tau = -6*V*y^2 / (A*h^2) + 1.5*V/A;

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
end   % Tau


%
==========================================================================

% FUNCTION: Sigma  -- bending stress at point (x,y)
%
==========================================================================

% Linear bending stress (Navier formula):
%   sigma(x,y) = -M(x) * y / I
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   L     : beam span
%   Inrt  : second moment of area
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   sigma : bending stress at (x,y)

function sigma = Sigma(x, y, w, L, Inrt, Load)

% Bending moment at section x
if Load == 1   % uniform load: M(x) = w*L^2/8 - w*x^2/2
    M = -w*x^2/2 + w*L^2/8;
else           % midspan point load W=w
    if x >= 0
        M = w*L/2 - w*x/2;   % right half
    else
        M = w*L/2 + w*x/2;   % left half (x is negative here)
    end
end

sigma = -M * y / Inrt;

end   % Sigma
```

I.2.11 Evolutionary design

I.2.12 Main

```
%
==========================================================================

% EVOLUTIONARY STRUCTURAL DESIGN  -- RANDOM ELEMENT REMOVAL
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% ========================================================================

% Demonstrates the concept of evolutionary structural optimization (ESO):
% a fully-connected 3D truss is progressively simplified by removing one
% element at a time, while checking that no node becomes under-connected.
%
% CONCEPT:
%   In a real ESO implementation, elements are removed based on a stress
%   or strain energy criterion (least-stressed elements removed first).
%   Here, removal is RANDOM -- this is a demonstration scaffold showing
%   the bookkeeping, visualization, and termination logic that a full
%   optimizer would use.
%
% ALGORITHM:
%   1. Generate a node grid (regular or random)
%   2. Connect ALL pairs of nodes -> fully-connected truss (Hankel indexing)
%   3. Loop:
%      a. Select an element to remove (here: random; replace with criterion)
%      b. Highlight it, remove it from the connectivity list
%      c. Check that both end nodes still have >= min_elem connections
%      d. If a node drops below the minimum, stop and report
%      e. Re-plot the updated mesh and write a video frame
%   4. Stop after MaxSteps or if a termination condition is met
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- function Node_Generation   : create node coordinates
%   Part 3  -- function Check_Lonely      : verify node connectivity
%   Part 4  -- function PlotMesh          : draw 3D truss and export frame
%
% NOTE: In a production ESO code, the line:
%   ElemOut = randi([1 nelem], 1, 1);
% would be replaced by a finite element analysis call that returns the
% index of the least-stressed (or lowest strain-energy) element.
%
% ========================================================================



%
% ========================================================================

% PART 1 -- MAIN DRIVER
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% ========================================================================

clear; close all; clc;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.1 -- Control parameters
%
% ------------------------------------------------------------------------

Random   = 1;      % 0 = 8 random nodes;  1 = regular grid of nodes
MaxSteps = 30;     % maximum number of element removals

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.2 -- Generate nodes
%
% ------------------------------------------------------------------------

[x, y, z, N] = Node_Generation(Random);

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1.3 -- Generate fully-connected element list
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Every unique pair of nodes (i,j) with i < j forms one element.
% The Hankel matrix trick generates all such pairs without duplication.
%
% hankel(2:N) produces a matrix whose (r,c) entry is r+c (shifted),
% and find() returns the row/column indices of all non-zero entries.
% The result is a 2 x nelem matrix of [node_i; node_j] pairs.

[r, c, ~]  = find(hankel(2:N));
index      = [c, r]';        % each column is one element: [near_node; far_node]
nelem      = size(index, 2);
lnods      = index';         % nelem x 2: each row = [node_i, node_j]

step = 0;
OK   = 0;

%
% ------------------------------------------------------------------------
```

```
% Section 1.4 -- Set up video writer
%
-------------------------------------------------------------------------

vid           = VideoWriter('Design_Opti.avi');
vid.FrameRate = 1;   % 1 frame per second (slow enough to follow
visually)
open(vid);

% Draw and record the initial fully-connected mesh
PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);
frame = getframe(gcf);
writeVideo(vid, frame);

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 1.5 -- Evolutionary removal loop
%
-------------------------------------------------------------------------

while OK == 0 && step < MaxSteps

    % --- Select element to remove ---
    % NOTE: in a real ESO, replace this random selection with:
    %   ElemOut = index_of_least_stressed_element_from_FEA;
    ElemOut = randi([1, nelem], 1, 1);

    % --- Highlight the element being removed (red, thick) ---
    X  = [x(lnods(ElemOut,1)),  x(lnods(ElemOut,2))];
    Y  = [y(lnods(ElemOut,1)),  y(lnods(ElemOut,2))];
    Z  = [z(lnods(ElemOut,1)),  z(lnods(ElemOut,2))];
    plot3(X, Y, Z, 'LineWidth', 3, 'Color', 'r');
    hold on;
    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(vid, frame);

    % --- Record which nodes this element connected ---
    NodesOut = lnods(ElemOut, 1:2);

    % --- Remove element from connectivity list ---
    % Compact the lnods array by shifting rows up from ElemOut onward.
    % WARNING: for large meshes this in-place shift is O(nelem) per step
.
    %          A more efficient approach would use logical indexing:
    %          lnods = lnods([1:ElemOut-1, ElemOut+1:end], :);
    for i = ElemOut : nelem-1
        lnods(i, 1:2) = lnods(i+1, 1:2);
    end
    lnods = lnods(1:nelem-1, :);   % trim the now-redundant last row
    nelem = nelem - 1;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    step  = step  + 1;

    % --- Re-plot the updated mesh ---
    PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);

    % --- Check that neither end node has become under-connected ---
    min_elem = 2;   % minimum number of elements required at any node
    Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, vid);

    frame = getframe(gcf);
    writeVideo(vid, frame);

end   % evolutionary loop

close(vid);
fprintf('Evolutionary design complete after %d steps.\n', step);


%% ========================================================================

% PART 2 -- FUNCTION: Node_Generation
%% ========================================================================

% Generates the node coordinate arrays x, y, z.
%
% If Random == 0: generates 8 nodes at random positions in [0,1]^3.
%                 (despite the name 'Random==0', these ARE random -- the
%                 flag controls grid vs random, but the naming is inverted
%                 from what one would expect)
%
% If Random == 1: generates a regular rectangular grid of nodes with
%                 specified range and spacing in each direction.
%
% WARNING: the grid generation uses Rx/Deltaz (not Rz/Deltaz) for nz.
%          This is preserved from the original -- verify if Rz was intended.
%
% OUTPUTS:
%   x, y, z : 1 x N coordinate arrays
%   N       : total number of nodes

function [x, y, z, N] = Node_Generation(Random)

if Random == 0
    % 8 random nodes in the unit cube
    N = 8;
    x = rand(1, N);
    y = rand(1, N);
```

```
    z = rand(1, N);

else
    % Regular grid
    Rx = 20;  Ry = 20;  RZ = 60;    % grid extents in x, y, z   [units]
    Dx = 20;  Dy = 20;  Dz = 30;    % grid spacing in x, y, z   [units]

    xmin = 0;  ymin = 0;  zmin = 0;

    nx = round(Rx/Dx) + 1;   % number of nodes in x
    ny = round(Ry/Dy) + 1;   % number of nodes in y
    % WARNING: original uses Rx/Dz (not RZ/Dz) for nz -- may be a typo.
    %          If the z-extent should be RZ=60 with spacing Dz=30, nz=3.
    %          Currently nz = round(Rx/Dz)+1 = round(20/30)+1 = 2.
    nz = round(Rx/Dz) + 1;

    N = 0;
    x = zeros(1, nx*ny*nz);
    y = zeros(1, nx*ny*nz);
    z = zeros(1, nx*ny*nz);

    for ix = 1 : nx
        for iy = 1 : ny
            for iz = 1 : nz
                N      = N + 1;
                x(N)   = xmin + (ix-1) * Dx;
                y(N)   = ymin + (iy-1) * Dy;
                z(N)   = zmin + (iz-1) * Dz;
            end
        end
    end

    % Trim to actual size
    x = x(1:N);
    y = y(1:N);
    z = z(1:N);
end

end   % Node_Generation


%=========================================================================

% PART 3 -- FUNCTION: Check_Lonely
%=========================================================================

% After removing an element, checks that both of its end nodes still have
% at least min_elem elements connected to them.  If either node drops
```

```
% below the minimum, an error dialog is shown and execution stops.
%
% INPUTS:
%   NodesOut : 1x2 vector of the two node indices of the removed element
%   lnods    : current (reduced) connectivity array  [nelem x 2]
%   min_elem : minimum acceptable element count per node
%   v        : VideoWriter object (passed in but not used -- legacy arg)
%
% OUTPUT:
%   Del_Nodes : 0 if both nodes are adequately connected;
%               otherwise the count of the under-connected node

function Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, v) %#ok<INUSD>

Del_Nodes = 0;

for i = 1 : 2
    % Count how many rows in lnods contain this node number
    % (checking both columns: lnods(:,1) and lnods(:,2))
    matches  = (lnods == NodesOut(i));   % logical array, same size as lnods
    n_connected = sum(matches(:));       % total occurrences = number of connected elements

    if n_connected < min_elem
        msg = ['Number of elements connected to node ' num2str(NodesOut(i)) ...
               ' dropped below minimum (' num2str(min_elem) ')'];
        errordlg(msg, 'END EXECUTION');
        Del_Nodes = n_connected;
        error('Evolutionary design terminated: node %d under-connected.', NodesOut(i));
    end
end

end   % Check_Lonely


%% ========================================================================

% PART 4 -- FUNCTION: PlotMesh
%% ========================================================================

% Draws the current 3D truss in a new figure window:
%   - node positions as red asterisks with node number labels
%   - elements as lines with element number labels at midpoints
%   - title showing the current step number
% Exports to EPS and converts to PDF.
```

```
%
% INPUTS:
%   x, y, z   : node coordinate arrays
%   lnods     : connectivity array  [nelem x 2]
%   nelem     : number of active elements
%   step      : current removal step (used in title and filename)

function PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step)

figure;
plot3(x, y, z, '*');
hold on;

N = length(x);

% Node labels (red numbers at node positions)
for i = 1 : N
    text(x(i), y(i), z(i), num2str(i), 'Color', 'red', 'FontSize', 14);
end

% Elements (lines with element number at midpoint)
for ie = 1 : nelem
    X  = [x(lnods(ie,1)),  x(lnods(ie,2))];
    Y  = [y(lnods(ie,1)),  y(lnods(ie,2))];
    Z  = [z(lnods(ie,1)),  z(lnods(ie,2))];
    Xc = mean(X);  Yc = mean(Y);  Zc = mean(Z);

    plot3(X, Y, Z);
    text(Xc, Yc, Zc, num2str(ie), 'FontSize', 10);
end

title(['Step: ' num2str(step)]);
pbaspect([1 1 1]);
grid minor;
view(-36, 24);

% Export frame
GS       = 'c:/Program Files/gs/gs9.10/bin/gswin64.exe';
FileName = ['./Figs/Mesh-No-' num2str(step) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);

end   % PlotMesh
```

I.2.13 Column interaction diagram

```
%
================================================================================
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% RECTANGULAR RC COLUMN -- NOMINAL INTERACTION DIAGRAM (P-M)
%
% ========================================================================

% Constructs the nominal axial force - bending moment (P_n vs M_n)
% interaction diagram for a doubly-reinforced rectangular concrete column
% using ACI 318 rectangular stress block assumptions.
%
% THEORY:
%   The interaction diagram is the locus of (M_n, P_n) pairs at which the
%   column reaches its nominal strength.  Each point corresponds to a
%   specific neutral axis depth c (measured from the compression face).
%
%   ACI rectangular stress block:
%     Compression force in concrete: C_c = 0.85 * f'c * a * b
%     where  a = Beta1 * c  (depth of equivalent stress block)
%     Beta1 = 0.85 for f'c <= 4 ksi, reduced 0.05 per 1 ksi above 4,
%     minimum Beta1 = 0.65
%
%   Steel strains (linear strain compatibility):
%     eps_s  = eps_cu * (d  - c) / c   (tension steel at depth d)
%     eps_s' = eps_cu * (c  - d') / c  (compression steel at depth d')
%
%   Steel stresses capped at f_y (elastic-perfectly-plastic model).
%
% TWO BRANCHES:
%   Tension failure  (c < c_b): steel yields before concrete crushes
%   Compression failure (c > c_b): concrete crushes before steel yields
%   Balanced point  (c = c_b): both occur simultaneously
%
% UNITS: kips, inches (moments converted to k-ft for output)
%
% ========================================================================


close all; clear; clc;

fss    = 24;
scrsz  = get(0, 'ScreenSize');
figpos = [2, 2, scrsz(3)/3, scrsz(4)/2];

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1 - Material properties
%
% ------------------------------------------------------------------------

E_s    = 29000;   % steel Young's modulus          [ksi]
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
eps_cu = 0.003;   % ACI ultimate concrete strain   [in/in]

%
% Section 2 - Section geometry and reinforcement
%
h    = 20;     % section depth (in bending direction)  [in]
b    = 12;     % section width                          [in]
dp   = 2.5;    % cover to compression steel centroid   [in]
d    = h - dp; % effective depth to tension steel      [in]

f_y  = 50;     % steel yield strength                  [ksi]
f_c  = 3.5;    % concrete compressive strength         [ksi]
A_s  = 2;      % tension steel area                    [in^2]
Ap_s = 2;      % compression steel area                [in^2]

%
% Section 3 - ACI Beta1 factor
%
if f_c <= 4
    Beta1 = 0.85;
else
    Beta1 = max(0.85 - 0.05*(f_c - 4), 0.65);
end

%
% Section 4 - Balanced failure point
%
% Strain compatibility at balanced condition:
%   c_b/d = eps_cu / (eps_cu + eps_y)

eps_y  = f_y / E_s;
c_b    = eps_cu * d / (eps_cu + eps_y);
a_b    = Beta1 * c_b;

fp_s_b = min(E_s * eps_cu * (c_b - dp) / c_b, f_y);
C_c_b  = 0.85 * f_c * a_b * b;
Pn_b   = C_c_b + Ap_s * fp_s_b - A_s * f_y;
Mn_b   = C_c_b * (d - a_b/2) + Ap_s * fp_s_b * (d - dp);
e_b    = Mn_b / Pn_b;   % balanced eccentricity [in]
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
82
83 %
   ------------------------------------------------------------------------
84 % Section 5 - Tension failure branch  (c_min to c_b)
85 %
   ------------------------------------------------------------------------
86 % Tension steel has yielded (f_s = f_y).
87 % Compression steel stress varies with c; capped at f_y.
88
89 n     = 400;
90 cmin  = h / n;   % avoid c=0 singularity
91 c_vec = linspace(cmin, c_b, n+1);
92 PT    = zeros(1, n+1);
93 MT    = zeros(1, n+1);
94
95 for i = 1 : n+1
96     c     = c_vec(i);
97     a     = Beta1 * c;
98     fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c - dp) / c, f_y);
99     C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
100    PT(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_y;
101    MT(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
102 end
103
104 figure('Position', figpos);
105 set(gca, 'FontSize', fss);
106 plot(MT, PT, 'b', 'LineWidth', 2);
107 hold on;
108
109 %
   ------------------------------------------------------------------------
110 % Section 6 - Compression failure branch  (c_b to c_max)
111 %
   ------------------------------------------------------------------------
112 % Both steel stresses vary with c; each capped at f_y.
113
114 cmax    = 50;
115 c_vec2  = linspace(c_b, cmax, n);
116 PC      = zeros(1, n);
117 MC      = zeros(1, n);
118
119 for i = 1 : n
120     c     = c_vec2(i);
121     a     = Beta1 * c;
122     f_s   = min(E_s * eps_cu * (d  - c) / c, f_y);
123     fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c  - dp) / c, f_y);
124     C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    PC(i) = C_c + Ap_s * fp_s  - A_s * f_s;
    MC(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

plot(MC, PC, 'r', 'LineWidth', 2);

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 7 - Format and export
%
-------------------------------------------------------------------------

lgd = legend('Tension Failure', 'Compression Failure');
set(lgd, 'Color', 'none');
xlim([0, inf]);  ylim([0, inf]);
grid on;
xlabel('Nominal Moment M_n [k-ft]', 'FontSize', fss);
ylabel('Nominal Load P_n [kips]',  'FontSize', fss);
title('RC Column P-M Interaction Diagram', 'FontSize', fss);
set(gca, 'FontSize', fss, 'Color', 'none');
exportgraphics(gca, 'Interaction-Diagram-Matlab.pdf', 'BackgroundColor',
 'none');
```

I.2.14 Variational methods; mathematica

Though Mathematica can save a file as `.tex`, a script was written to convert that file into a more readable one that quasi-emulate the notebook feel.

This is the solution of the problem solved in §47.6.1.2.

Virtual Displacement

Define function v

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

Solve for a and b in terms of v_2 and v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1}\to -\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to -\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Update expression of v

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

v=v1[x]/.solution

$$\left\{-\frac{(-8v2+v3)x^2}{L^2}-\frac{2(4v2-v3)x^3}{L^3}\right\}$$

delv=v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}

$$\left\{-\frac{(-8delv2+delv3)x^2}{L^2}-\frac{2(4delv2-delv3)x^3}{L^3}\right\}$$

Second derivative of v

d2v=D[v,{x,2}]

$$\left\{-\frac{2(-8v2+v3)}{L^2}-\frac{12(4v2-v3)x}{L^3}\right\}$$

Second derivative of virtual displacement

d2delv=d2v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}

$$\left\{-\frac{2(-8delv2+delv3)}{L^2}-\frac{12(4delv2-delv3)x}{L^3}\right\}$$

Virtual strain energy

delU=Integrate[d2vd2delvEI,{x,0,L},Assumptions → L > 0]

$$\left\{\frac{256delv2EIv2}{L^3}-\frac{80delv3EIv2}{L^3}-\frac{80delv2EIv3}{L^3}+\frac{28delv3EIv3}{L^3}\right\}$$

Virtual external work

delW=Integrate[q0(1 − x/L)delv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]

$$\left\{\frac{4delv2Lq0}{15}+\frac{delv3Lq0}{60}\right\}$$

Set $\delta U-\delta W=0$

UW=delU − delW

$$\left\{-\frac{4}{15}delv2Lq0-\frac{delv3Lq0}{60}+\frac{256delv2EIv2}{L^3}-\frac{80delv3EIv2}{L^3}-\frac{80delv2EIv3}{L^3}+\frac{28delv3EIv3}{L^3}\right\}$$

A=Coefficient[UW,delv2]

$$\left\{-\frac{4Lq0}{15}+\frac{256EIv2}{L^3}-\frac{80EIv3}{L^3}\right\}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
B=Coefficient[UW,delv3]
```

$$\left\{-\frac{Lq0}{60}-\frac{80EIv2}{L^3}+\frac{28EIv3}{L^3}\right\}$$

```
solution2=Solve[{A==0,B==0},{v2,v3}]
```

$$\left\{\left\{v2\to\frac{11L^4q0}{960EI},v3\to\frac{L^4q0}{30EI}\right\}\right\}$$

```
v2=N[v2/.solution2]
```

$$\left\{\frac{0.0114583L^4q0}{EI}\right\}$$

```
v3=N[v3/.solution2]
```

$$\left\{\frac{0.0333333L^4q0}{EI}\right\}$$

Determine the moment from the displacement field

```
M=Simplify[d2vEI]
```

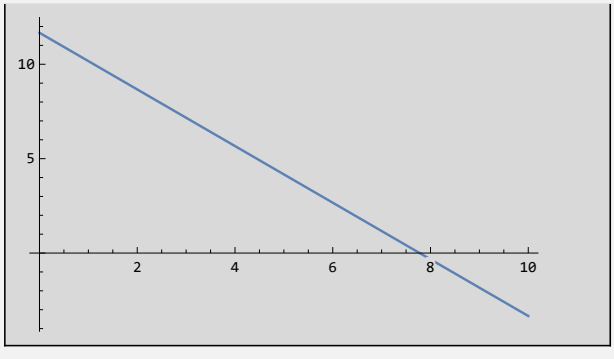
$$\{\{Lq0(0.116667L-0.15x)\}\}$$

Determine the shear as derivaitve of the moment

```
V=D[M,{x,1}]
```

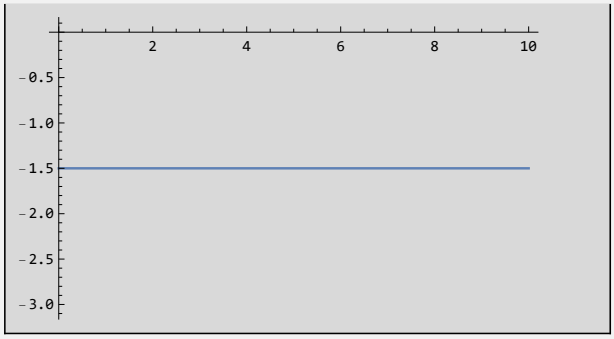
$$\{\{-0.15Lq0\}\}$$

```
q0=1; L=10; Plot[M,{x,0,10}]
```



ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Plot[V,{x,0,10}]
```



Exact shear and moment diagrams

```
Clear[L,q0];
```

```
w[x_]:=q0(1 - x/L)
```

```
Vsup= - Integrate[w[x],{x,0,L}]
```

$$-\frac{Lq0}{2}$$

```
Msup=Integrate[w[x]x,{x,0,L}]
```

$$\frac{L^2q0}{6}$$

```
Vexact=Integrate[w[x],x] + Vsup
```

$$-\frac{Lq0}{2} + q0x - \frac{q0x^2}{2L}$$

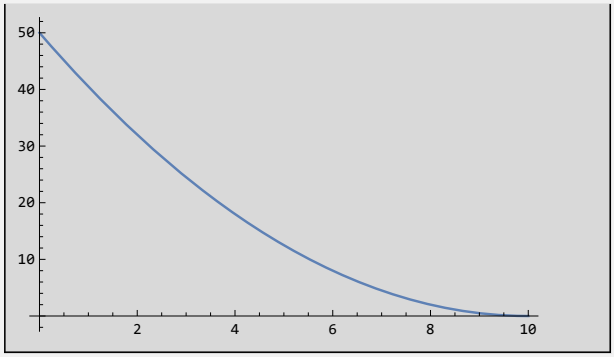
```
Mexact=Integrate[Vexact,x] + Msup
```

$$\frac{L^2q0}{6} - \frac{Lq0x}{2} + \frac{q0x^2}{2} - \frac{q0x^3}{6L}$$

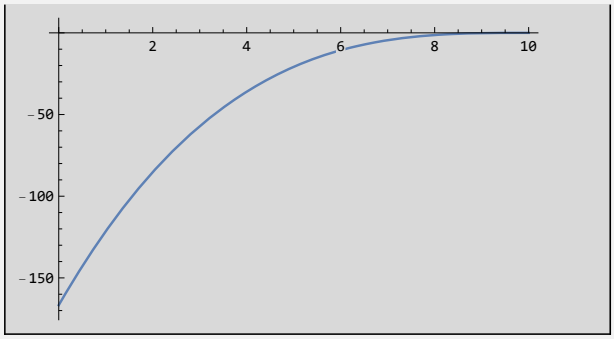
```
q0= - 10; L=10;
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Plot[Vexact,{x,0,L}]



Plot[Mexact,{x,0,L}]



Clear[L,q0,v,V,M,v2,v3,solution,v,delv,del2v,d2v,d2delv,delU,delW,UW,A,B,solution2]

Virtual Force

Define distributed load (note chnage of direction of x axis)

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Moment due to real load

M=Integrate[$q(x-\text{x1})$,{x1,0,x}]

$$\frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Moment due to virtual load

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

delM=x

$$x$$

Virtual internal strain energy and external virtual work

delU=Integrate[MdelM/EI,{x,0,L}]

$$\frac{L^4 \text{q0}}{30\text{EI}}$$

delW=1v

$$v$$

Solve for $\delta U - \delta W = 0$

Solve[delU==delW,v]

$$\left\{\left\{v \to \frac{L^4 \text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

Clear[v,q,M,delV,delU,delM]

Potential Energy

Define function v and load q

v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3

q=qo(1 − x/L)

$$\text{qo}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Solve for a and b in terms of v_2 and v_3

solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1} \to -\frac{-8\text{v2} + \text{v3}}{L^2}, \text{a2} \to -\frac{2(4\text{v2} - \text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

Update expression of v

v=v1[x]/.solution

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2} + \text{v3})x^2}{L^2} - \frac{2(4\text{v2} - \text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Internal strain energy

d2v=Simplify[D[v,{x,2}]]

$$\left\{\frac{2(L(8\text{v2}-\text{v3})+6(-4\text{v2}+\text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

M=EId2v

$$\left\{\frac{2\text{EI}(L(8\text{v2}-\text{v3})+6(-4\text{v2}+\text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L}]

$$\left\{\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

Potential external work

W=Integrate[qv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]

$$\left\{\frac{4L\text{qov2}}{15}+\frac{L\text{qov3}}{60}\right\}$$

Potential energy

PE=Simplify[U − W]

$$\left\{-\frac{1}{60}L\text{qo}(16\text{v2}+\text{v3})+\frac{2\text{EI}\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)}{L^3}\right\}$$

eq1=D[PE,v2]

$$\left\{-\frac{4L\text{qo}}{15}+\frac{2\text{EI}(128\text{v2}-40\text{v3})}{L^3}\right\}$$

eq2=D[PE,v3]

$$\left\{-\frac{L\text{qo}}{60}+\frac{2\text{EI}(-40\text{v2}+14\text{v3})}{L^3}\right\}$$

solution=N[Solve[{eq1==0,eq2==0},{v2,v3}]]

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{0.0114583L^4\text{qo}}{\text{EI}},\text{v3}\to\frac{0.0333333L^4\text{qo}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
Clear[solution,eq2,eq1,PE,W,U,M,d2v,v1,v,solution,q]
```

Rayleigh Ritz Method

Define the displacement

```
v=a1x^2 + a2x^3
```

$$a1x^2 + a2x^3$$

Take second derivative, and determine the moment

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$2a1 + 6a2x$$

```
M=Simplify[d2vEI]
```

$$2EI(a1 + 3a2x)$$

Strain energy, work, and potential energy

```
U=1/(2EI)Integrate[M^2,{x,0,L}]
```

$$\frac{4a1^2EI^2L + 12a1a2EI^2L^2 + 12a2^2EI^2L^3}{2EI}$$

```
W=Integrate[q0(1 - x/L)v,{x,0,L}]
```

$$\frac{1}{12}a1L^3q0 + \frac{1}{20}a2L^4q0$$

```
PE=U - W
```

$$\frac{4a1^2EI^2L + 12a1a2EI^2L^2 + 12a2^2EI^2L^3}{2EI} - \frac{1}{12}a1L^3q0 - \frac{1}{20}a2L^4q0$$

Partial derivative of the potentialenergy wrt a_1 and a_2

```
A=D[PE,a1]
```

$$\frac{8a1EI^2L + 12a2EI^2L^2}{2EI} - \frac{L^3q0}{12}$$

```
B=D[PE,a2]
```

$$\frac{12a1EI^2L^2 + 24a2EI^2L^3}{2EI} - \frac{L^4q0}{20}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

solution=Solve[{A==0,B==0},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to\frac{7L^2\text{q0}}{120\text{EI}},\text{a2}\to-\frac{L\text{q0}}{40\text{EI}}\right\}\right\}$$

N[%]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to\frac{0.0583333L^2\text{q0}}{\text{EI}},\text{a2}\to-\frac{0.025L\text{q0}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

v/.solution

$$\left\{\frac{7L^2\text{q0}x^2}{120\text{EI}}-\frac{L\text{q0}x^3}{40\text{EI}}\right\}$$

Maximum displacement

v/.solution/.$x\to L$

$$\left\{\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}$$

Clear[v,d2v,M,U,W,PE,A,B,solution]

Complementary Potential Energy

Distributed load

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Moment is caused by actual load plus fictitious point load P at end of cantilever

M=Integrate[$q(x-\text{x1})$,{x1,0,x}]+Px

$$Px+\frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

Internal strain energy

U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3\text{EI}}+\frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}}+\frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)$$

Displacement

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

solution=DSolve[{v''[x]==M/EI,v'[L]==0,v[L]==0},v[x],x]

$$\left\{\left\{v[x]\to \frac{40L^4P+4L^5\text{q0}-60L^3Px-5L^4\text{q0}x+20LPx^3+\text{q0}x^5}{120\text{EI}L}\right\}\right\}$$

vmax=v[x]/.solution/.x → 0

$$\left\{\frac{40L^4P+4L^5\text{q0}}{120\text{EI}L}\right\}$$

Potential of external work

q=q0x/L

$$\frac{\text{q0}x}{L}$$

W=Pvmax + Integrate[qv[x],{x,0,L}]/.solution

$$\left\{\left\{\frac{L^4P\text{q0}}{30\text{EI}}+\frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5\text{q0}\right)}{120\text{EI}L}\right\}\right\}$$

CPE=W − U

$$\left\{\left\{\frac{L^4P\text{q0}}{30\text{EI}}+\frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}+\frac{P\left(40L^4P+4L^5\text{q0}\right)}{120\text{EI}L}+\frac{1}{2}\left(-\frac{L^3P^2}{3\text{EI}}-\frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}}-\frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)\right\}\right\}$$

D[CPE,P]/.P->0

$$\left\{\left\{\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

Clear[U,W,M,q,CPE,vmax,solution]

Castigliano Second Theorem

Distributed load

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

Moment is caused by actual load plus a fictitious point load P at end of cantilever

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

M=Integrate[q(x − x1),{x1,0,x}] + Px

$$Px + \frac{q0x^3}{6L}$$

Internal strain energy

U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3EI} + \frac{L^4Pq0}{15EI} + \frac{L^5q0^2}{252EI}\right)$$

Take derivative of stain energy

v=D[U,P]/.P → 0

$$\frac{L^4q0}{30EI}$$

Clear[U,M,q,v]

Castigliano's First Theorem

Define function v and q

v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3

q=qo(1 − x/L)

$$qo\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Solve for a and b in terms of v_2 and v_3

solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{a1 \to -\frac{-8v2 + v3}{L^2}, a2 \to -\frac{2(4v2 - v3)}{L^3}\right\}\right\}$$

Update expression of v

v=v1[x]/.solution

$$\left\{-\frac{(-8v2 + v3)x^2}{L^2} - \frac{2(4v2 - v3)x^3}{L^3}\right\}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

vmax=v1[*L*]

$$\text{a1}L^2+\text{a2}L^3$$

Internal strain energy

d2v=*D*[*v*,{*x*,2}]

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

M=EId2v + *P*vmax

$$\left\{\left(\text{a1}L^2+\text{a2}L^3\right)P+\text{EI}\left(-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right)\right\}$$

U=Integrate[*M*^2/(2EI),{*x*,0,*L*},Assumptions → *L* > 0]

$$\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right.$$

Simplify[*U*]

$$\left\{\frac{\text{a1}^2L^8P^2+\text{a2}^2L^{10}P^2+8\text{a2EI}L^5P(-2\text{v2}+\text{v3})+4\text{EI}^2\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)+2\text{a1}L^4P\left(\text{a2}L^5P+4\text{EI}(-2\text{v2}+\text{v3})\right)}{2\text{EI}L^3}\right\}$$

D[*U*,vmax]

$$\partial_{\text{a1}L^2+\text{a2}L^3}\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}\right.$$

I.2.15 Monte Carlo simulation of a building's linear elastic response to lateral load

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص ميبقت ءارقلا بلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلِّوُ
Listing for Example in §52.2.2.1.

```
%
% ========================================================================
% MONTE CARLO SIMULATION -- LATERAL DRIFT OF A 4-STORY SHEAR BUILDING
%
% ========================================================================
% Estimates the probability of exceeding a drift limit for a linear
% elastic shear-frame building under random lateral loads and random
% member stiffnesses.
```

```
%
% STRUCTURAL MODEL:
%   A 4-story shear building where each story lateral drift is:
%       delta_i = V_i / k_i = V_i * H^3 / (12 * sum(EI_i))
%   where V_i = cumulative shear at story i (sum of loads above),
%   k_i = 12*EI/H^3 = lateral stiffness (fixed-fixed column formula),
%   and two columns contribute per story.
%
%   Total roof drift = u1 + u2 + u3 + u4.
%
% RANDOM VARIABLES (all independent Gaussian):
%   F1..F4   : lateral floor loads       mean=Fbar,  CoV=40%
%   EI1..EI8 : column bending stiffness  mean=EIbar, CoV=20%
%
% NOTE: Normal distributions can produce negative F and EI values
%   (~0.6% probability at CoV=0.4). For a rigorous study use lognormal.
%
% UNITS: any consistent set (e.g. kN,m or kip,in).
%
================================================================================


clear; clc;

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 - Parameters
%
--------------------------------------------------------------------------------

Fbar    = 20;           % mean lateral floor load      [force]
sigmaF  = Fbar * 0.4;   % std dev of load  (CoV=40%)

EIbar   = 10000;        % mean column bending stiffness [force.length
^2]
sigmaEI = EIbar * 0.2;  % std dev of EI    (CoV=20%)

H    = 4;      % story height                  [length]
ULIM = 0.1;    % drift limit (failure threshold) [length]

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 2 - Monte Carlo sampling
%
--------------------------------------------------------------------------------

NSIM = 1000000;   % 1e6 simulations: reliable for PF down to ~1e-4

F1 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
F2 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F3 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
F4 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);

EI1 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 1 columns
EI2 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI3 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 2 columns
EI4 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI5 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 3 columns
EI6 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
EI7 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 4 columns
EI8 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);

%
% Section 3 - Story drifts (vectorised over all simulations)
%
u4 =  F4                  ./ (EI7 + EI8) / 12 * H^3;
u3 = (F3 + F4)            ./ (EI5 + EI6) / 12 * H^3;
u2 = (F2 + F3 + F4)       ./ (EI3 + EI4) / 12 * H^3;
u1 = (F1 + F2 + F3 + F4) ./ (EI1 + EI2) / 12 * H^3;

u = u1 + u2 + u3 + u4;   % total roof drift

%
% Section 4 - Statistics and failure probability
%
UM  = mean(u);
US  = std(u);
COV = US / UM;

indic = (u > ULIM);   % 1 = failure (drift exceeds limit), 0 = safe
PF    = mean(indic);  % fraction of simulations in failure = P(u > ULIM)

%
% Section 5 - Report
%
fprintf('=== Monte Carlo Results (%d simulations) ===\n', NSIM);
fprintf('  Mean drift          UM  = %.5f\n', UM);
fprintf('  Std deviation       US  = %.5f\n', US);
```

```
fprintf('  Coeff of variation  COV = %.4f  (%.1f%%)\n', COV, COV*100);
fprintf('  Drift limit        ULIM = %.4f\n', ULIM);
fprintf('  Failure probability  PF = %.2e\n', PF);
fprintf('  Std error on PF       = %.2e\n', sqrt(PF*(1-PF)/NSIM));
```

I.2.16 Isoparametric elements

The following section is reproduced from Hinton **and** Owen, 1977 Finite Element Programming.

The computer implementation of a numerically integrated isoparametric element is summarized as follows.

But first, it is assumed that this operation is to be performed in a function called `stiff` and it takes as input arguments `elcod`, `young`, `poiss`, `type`, `ndime`, `ndofn`, `ngaus`. In turn it will compute the stiffness matrix `KELEM` of element `ielem`.

1. Retrieve element geometry and material properties for the current element
2. Zero the stiffness matrix
3. Call function `dmat` to set the constitutive matrix $\mathbf{D}^e$ of the element
4. Enter (nested) loop covering all integration points

(a) Look up the sampling position of the current point (ξ_p, η_q) (`s`, `t`) and their weights (`weigp`)

(b) Call shape function routine `sfr` given ξ_p, η_q which will return the shape function N_i^e (`sfr`) and the derivatives $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ (`deriv`) at the point ξ_p, η_q

(c) Call another subroutine (`jacob`), given N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ at point ξ_p, η_q will return cartesian shape function derivatives $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ and $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ (`cartd`), the Jacobian matrix $\mathbf{J}^e$ (`jacm`), its inverse $\mathbf{J}^{e-1}$ (`jaci`), its determinant $\det \mathbf{J}^e$ (`djac`) and the x and y coordinates all at the point ξ_p, η_q

(d) Call strain matrix (`bmatps`) routine, given N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$, at ξ_p, η_q will return the strain matrix $\mathbf{B}_i^e$ (`bmat`)

(e) Call a routine (`dbmat`) to evaluate $\mathbf{D}^e\mathbf{B}_i^e$ (`dbmat`)

(f) Evaluate $\mathbf{B}_i^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}_j^e \det \mathbf{J}^e \times$ integration weights and assemble them into the element stiffness matrix $\mathbf{K}_{ij}^e$

(g) Assemble $\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e$ (`smat` into a stress array for later evaluation of stresses from the nodal displacements.

5. Write Stiffness matrix

Suggested list of variables:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

idime, ndime	(Index, Number of dimensions (2 for 2D
idofn,ndofn	Index, Number of degree of freedom per node
ielem,nelem	Index, number of elements
igaus,jgaus,ngaus	Index, Index, Number of Gauss rule adopted
inode, nnode	Index, number of nodes per element
kgasp,ngasp	Kounter, number of Gauss points used
type	for plane stress; 2 for plane strain 1
poiss	Poisson's ratio
young	Young's modulus
(elcod(ndime,nnode	Local array of nodal cartesian coordinates of the element currently under $\begin{bmatrix} x(\xi_1,\eta_1) & \cdots & x(\xi_8,\eta_8) \\ y(\xi_1,\eta_1) & \cdots & y(\xi_8,\eta_8) \end{bmatrix}$ consideration
s	coordinate of sampling point ξ
t	coordinate of sampling point η
(gpcod(ndime,ngasp	Local array of cartesian coordinates of the Gauss points for element currently $\begin{bmatrix} x(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & x(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \\ y(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & y(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \end{bmatrix}$ under consideration
(posgp(mgaus	coordinates of Gauss point ξ
(weigp(mgaus	Weight factor for Gauss point
(shape(nnode	(ξ_p,η_p) Shape function associated with each node of current element at $\begin{bmatrix} N_1(\xi_p,\eta_p) \\ \vdots N_8(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
(deriv(ndime,nnode	within the element (ξ_p,η_p) Shape function derivative at sampling point $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
(cartd(ndime,nnode	Cartesian shape function derivatives associated with the nodes of the within the element (ξ_p,η_p) current element sampled at any point $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
djacb	within the ξ_p,η_p)Determinant of the Jacobian matrix sampled at any point (element
(jacm(ndime,ndime	Jacobian matrix at sampling point
(jaci(ndime,ndime	Inverse of Jacobian matrix at sampling point
(bmat(nstre,nevab	**B** = Element strain matrix at any point within the element $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$ where $[\ \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_8\ ]$
(dbmat(istre,ievab	**DB** stores

```
%
% ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS -- Q4, Q8, Q9 PLANE ELEMENTS
%
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% A library of functions implementing Gaussian quadrature-based stiffness
% matrix assembly for 2D isoparametric elements under plane stress or
% plane strain conditions.
%
% SUPPORTED ELEMENT TYPES:
%   Q4  : 4-node bilinear quadrilateral        (nnode = 4)
%   Q8  : 8-node serendipity quadrilateral      (nnode = 8)
%   Q9  : 9-node Lagrangian quadrilateral       (nnode = 9)
%
% ISOPARAMETRIC CONCEPT:
%   The same shape functions N_i(s,t) are used to interpolate both the
%   geometry and the displacement field:
%
%     x(s,t) = sum_i N_i(s,t) * x_i    (geometry mapping)
%     u(s,t) = sum_i N_i(s,t) * u_i    (displacement interpolation)
%
%   where (s,t) are natural coordinates in [-1,1]^2.
%
% STIFFNESS MATRIX:
%   K_e = integral_(-1)^(1) integral_(-1)^(1) B^T * D * B * |J| ds dt
%
%   approximated by Gauss quadrature:
%   K_e approx sum_i sum_j w_i * w_j * B^T(s_i,t_j) * D * B(s_i,t_j) * |J(s_i,t_j)|
%
% NATURAL COORDINATE NODE ORDERING (counter-clockwise):
%
%   Q4:           Q8/Q9:
%   4---3         4--7--3
%   |   |         8  9  6
%   1---2         1--5--2
%
%   (s increases right, t increases upward)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Script: plot Q8/Q9 shape functions over the reference element
%   Part 2  -- function stiff    : assemble element stiffness matrices
%   Part 3  -- function dmat     : constitutive matrix D (plane stress/strain)
%   Part 4  -- function sfr      : shape functions and derivatives N, dN/ds, dN/dt
%   Part 5  -- function jacob    : Jacobian J, J^-1, |J|, Cartesian derivatives
%   Part 6  -- function bmatps   : strain-displacement matrix B and D*B
%
% LNODS ARRAY FORMAT (input to stiff):
%   lnods(e, 1)       : element number
%   lnods(e, 2)       : Young's modulus E for element e
%   lnods(e, 3)       : Poisson's ratio nu for element e
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   lnods(e, 4:3+nnode): global node numbers of element e
%
% COORD ARRAY FORMAT:
%   coord(n, 1)       : global node number
%   coord(n, 2:3)     : x, y coordinates of node n
%
% ========================================================================



%
% ========================================================================

% PART 1 -- SCRIPT: Plot Q8 and Q9 shape functions
%
% ========================================================================

% Plots surface and contour views of selected shape functions over the
% reference element [-1,1]^2 for visual verification.
%
% Node 1 (corner) and Node 8 (midside) are shown for both Q8 and Q9
% to illustrate how the bubble function N9 modifies the corner shapes.

xi  = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate xi  (horizontal)
eta = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate eta (vertical)

% Column vectors for outer products
XI  = xi';
ETA = eta';

% --- Q8/Q9 intermediate (midside/bubble) shape functions ---
% These are computed first because the corner functions depend on them.
N9 = (1 - ETA.^2) * (1 - xi.^2);            % bubble (centre node, Q9 only)
N8 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 - xi);           % midside: left edge
N7 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 + eta);          % midside: top edge
N6 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 + xi);           % midside: right edge
N5 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 - eta);          % midside: bottom edge

% --- Q8 corner shape functions (no bubble term) ---
N4_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 + eta) - 0.5*(N7 + N8);
N3_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 + eta) - 0.5*(N6 + N7);
N2_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 - eta) - 0.5*(N5 + N6);
N1_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 - eta) - 0.5*(N8 + N5);

% Plot Q8 corner node 1
figure('Name', 'Q8 Shape Functions');
subplot(2,2,1);
meshc(xi, eta, N1_Q8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q8 -- Node 1 (corner): surface');
```

```
93
94  subplot(2,2,2);
95  [C, h] = contour(xi, eta, N1_Q8);
96  clabel(C, h);
97  xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
98  title('Q8 -- Node 1 (corner): contour');
99
100 % Plot Q8 midside node 8
101 subplot(2,2,3);
102 meshc(xi, eta, N8);
103 xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
104 title('Q8 -- Node 8 (midside): surface');
105
106 subplot(2,2,4);
107 [C, h] = contour(xi, eta, N8);
108 clabel(C, h);
109 xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
110 title('Q8 -- Node 8 (midside): contour');
111
112 % --- Q9 shape functions: subtract bubble contribution from Q8 shapes
    ---
113 N1_Q9 = N1_Q8 - 0.25*N9;
114 N8_Q9 = N8    - 0.50*N9;
115
116 figure('Name', 'Q9 Shape Functions');
117 subplot(2,3,1);
118 meshc(xi, eta, N1_Q9);
119 xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
120 title('Q9 -- Node 1 (corner): surface');
121
122 subplot(2,3,2);
123 [C, h] = contour(xi, eta, N1_Q9);
124 clabel(C, h);
125 title('Q9 -- Node 1 (corner): contour');
126
127 subplot(2,3,3);
128 meshc(xi, eta, N8_Q9);
129 xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
130 title('Q9 -- Node 8 (midside): surface');
131
132 subplot(2,3,4);
133 [C, h] = contour(xi, eta, N8_Q9);
134 clabel(C, h);
135 title('Q9 -- Node 8 (midside): contour');
136
137 subplot(2,3,5);
138 meshc(xi, eta, N9);
139 xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_9');
140 title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): surface');
141
142 subplot(2,3,6);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
[C, h] = contour(xi, eta, N9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): contour');


%
% ========================================================================

% PART 2 -- FUNCTION: stiff
%
% ========================================================================

% Assembles element stiffness matrices for all elements using Gauss
% quadrature.  Returns all element matrices stacked in a single array.
%
% INPUTS:
%   ngaus  : number of Gauss points per direction
%   posgp  : Gauss point positions  (1 x ngaus)
%   weigp  : Gauss point weights    (1 x ngaus)
%   type   : problem type  (1 = plane stress,  2 = plane strain)
%   nelem  : number of elements
%   lnods  : connectivity + material array  [nelem x (3+nnode)]
%   coord  : node coordinates  [nnodes x 3]  (col1=node#, col2=x, col3=y)
%   nnode  : nodes per element  (4, 8, or 9)
%
% OUTPUT:
%   KELEM  : stacked element stiffness matrices  [nelem*2*nnode x 2*nnode]
%            Row block ielem: KELEM(2*nnode*(ielem-1)+1 : 2*nnode*ielem, :)

function KELEM = stiff(ngaus, posgp, weigp, type, nelem, lnods, coord, nnode)

fprintf('Assembling element stiffness matrices...\n');
tic;

stifsize  = 2 * nnode;        % DOFs per element (2 per node: u and v)
KELEM     = zeros(stifsize * nelem, stifsize);

for ielem = 1 : nelem

    % --- Extract material properties from lnods ---
    young = lnods(ielem, 2);
    poiss = lnods(ielem, 3);

    % --- Extract element node coordinates ---
    % elcod: 2 x nnode matrix  [x; y] for each node in order
    elcod = zeros(2, nnode);
    for inode = 1 : nnode
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        global_node = lnods(ielem, inode+3);
        row         = find(coord(:,1) == global_node);
        elcod(:, inode) = coord(row, 2:3)';
    end

    % --- Constitutive matrix ---
    D = dmat(young, poiss, type);

    % --- Gauss quadrature over the reference element ---
    kelem = zeros(stifsize);
    for igaus = 1 : ngaus
        for jgaus = 1 : ngaus
            s = posgp(igaus);
            t = posgp(jgaus);
            W = weigp(igaus) * weigp(jgaus);

            [shape, deriv]            = sfr(s, t, nnode);
            [cartd, ~, ~, djac, ~]    = jacob(shape, deriv, elcod);
            [bmat, dbmat]             = bmatps(shape, cartd, D);

            % Accumulate:  K += w * B^T * D * B * |J|
            kelem = kelem + W * bmat' * dbmat * djac;
        end
    end

    % --- Store in stacked output array ---
    startrow = stifsize * (ielem-1) + 1;
    endrow   = stifsize * ielem;
    KELEM(startrow:endrow, :) = kelem;

end

fprintf('Done. Elapsed: %.4f sec\n\n', toc);

end   % stiff


%
%==========================================================================

% PART 3 -- FUNCTION: dmat
%
%==========================================================================

% Returns the 3x3 constitutive matrix D for isotropic linear elasticity
% under either plane stress or plane strain assumptions.
%
% PLANE STRESS (type=1): thin plate, sigma_zz = 0
%   D = E/(1-v^2) * [1, v,      0     ]
%                   [v, 1,      0     ]
%                   [0, 0, (1-v)/2    ]
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
% PLANE STRAIN (type=2): thick body constrained in z, eps_zz = 0
%   D = E/((1+v)(1-2v)) * [1-v,  v,       0    ]
%                         [ v,  1-v,      0    ]
%                         [ 0,   0,  (1-2v)/2  ]
%
% Strain vector convention: [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]

function D = dmat(young, poiss, type)

E = young;
v = poiss;

if type == 1
    % Plane stress
    D = E/(1-v^2) * [ 1,    v,        0    ;
                      v,    1,        0    ;
                      0,    0,  (1-v)/2    ];
else
    % Plane strain
    D = E/((1+v)*(1-2*v)) * [ 1-v,   v,        0      ;
                              v,   1-v,        0      ;
                              0,    0,   (1-2*v)/2    ];
end

end   % dmat


%
% ========================================================================

% PART 4 -- FUNCTION: sfr  (Shape Function Routine)
%
% ========================================================================

% Computes shape functions N_i(s,t) and their natural-coordinate
% derivatives dN_i/ds, dN_i/dt at a single Gauss point (s,t).
%
% The Q8 and Q9 shape functions are built hierarchically:
%   - Midside nodes are constructed from bilinear products
%   - Corner nodes are the bilinear shapes minus contributions of
%     adjacent midside nodes (to enforce partition of unity)
%   - Q9 adds the bubble function N9 and subtracts its contribution
%     from all other nodes
%
% INPUTS:
%   s, t    : natural coordinates of the evaluation point  [-1,1]
%   nnode   : 4 (Q4), 8 (Q8), or 9 (Q9)
%
% OUTPUTS:
%   shape   : nnode x 1 vector of shape function values
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   deriv  : 2 x nnode matrix of derivatives  [dN/ds; dN/dt]

function [shape, deriv] = sfr(s, t, nnode)

if nnode == 9
    % --- Q9: 9-node Lagrangian element ---
    % Node 9 is the interior bubble: N9 = (1-s^2)*(1-t^2)
    N9 = (1-s^2)*(1-t^2);

    % Midside nodes (edges)
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % left midside
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t) - 0.5*N9;    % top midside
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % right midside
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t) - 0.5*N9;    % bottom midside

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8 - 0.25*N9;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7 - 0.25*N9;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6 - 0.25*N9;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8 - 0.25*N9;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8; N9];

    % Derivatives of N9
    dN9ds = -2*s*(1-t^2);
    dN9dt = -2*t*(1-s^2);

    % Derivatives of midside nodes
    dN8ds = -0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN8dt = -t*(1-s)     - 0.5*dN9dt;
    dN7ds = -s*(1+t)     - 0.5*dN9ds;
    dN7dt =  0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;
    dN6ds =  0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN6dt = -t*(1+s)     - 0.5*dN9dt;
    dN5ds = -s*(1-t)     - 0.5*dN9ds;
    dN5dt = -0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;

    % Derivatives of corner nodes
    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds - 0.25*dN9ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt - 0.25*dN9dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds - 0.25*dN9ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt - 0.25*dN9dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds,
dN9ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt,
dN9dt ];
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
329
330 elseif nnode == 8
331     % --- Q8: 8-node serendipity element (no interior node) ---
332
333     % Midside nodes
334     N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2);
335     N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t);
336     N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2);
337     N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t);
338
339     % Corner nodes
340     N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8;
341     N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7;
342     N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6;
343     N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8;
344
345     shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8];
346
347     dN8ds = -0.5*(1-t^2);   dN8dt = -t*(1-s);
348     dN7ds = -s*(1+t);        dN7dt =  0.5*(1-s^2);
349     dN6ds =  0.5*(1-t^2);   dN6dt = -t*(1+s);
350     dN5ds = -s*(1-t);        dN5dt = -0.5*(1-s^2);
351
352     dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds;
353     dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt;
354     dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds;
355     dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt;
356     dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds;
357     dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt;
358     dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds;
359     dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt;
360
361     deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds ;
362              dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt ];
363
364 else
365     % --- Q4: 4-node bilinear element ---
366     N4 = 0.25*(1-s)*(1+t);
367     N3 = 0.25*(1+s)*(1+t);
368     N2 = 0.25*(1+s)*(1-t);
369     N1 = 0.25*(1-s)*(1-t);
370
371     shape = [N1; N2; N3; N4];
372
373     dN4ds = -0.25*(1+t);  dN4dt =  0.25*(1-s);
374     dN3ds =  0.25*(1+t);  dN3dt =  0.25*(1+s);
375     dN2ds =  0.25*(1-t);  dN2dt = -0.25*(1+s);
376     dN1ds = -0.25*(1-t);  dN1dt = -0.25*(1-s);
377
378     deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds ;
379              dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt ];
```

```
end

end   % sfr


%
% ========================================================================

% PART 5 -- FUNCTION: jacob
%
% ========================================================================

% Computes the Jacobian matrix and related quantities needed to transform
% shape function derivatives from natural to Cartesian coordinates.
%
% JACOBIAN MATRIX:
%   J = deriv * elcod^T    (2x2 matrix)
%
%   [dX/ds  dY/ds]   [dN/ds] * [x_1 y_1]
%   [dX/dt  dY/dt] = [dN/dt]   [x_2 y_2]
%                              [  ...   ]
%
% CARTESIAN DERIVATIVES:
%   [dN/dx]         [dN/ds]
%   [dN/dy] = J^-1 [dN/dt]
%
% WARNING: if |J| <= 0 the element is distorted (inverted or collapsed).
%   This function does not check for this condition -- the caller should
%   verify djac > 0 for all Gauss points.
%
% INPUTS:
%   shape  : nnode x 1 shape function values (used for xy interpolation)
%   deriv  : 2 x nnode natural-coordinate derivatives
%   elcod  : 2 x nnode element node coordinates  [x; y]
%
% OUTPUTS:
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   jacm   : 2x2 Jacobian matrix J
%   jaci   : 2x2 Jacobian inverse J^-1
%   djac   : scalar determinant |J|
%   xy     : 2x1 physical coordinates at the Gauss point

function [cartd, jacm, jaci, djac, xy] = jacob(shape, deriv, elcod)

jacm  = deriv * elcod';   % J = dN/ds * [x; y]^T
jaci  = inv(jacm);        % J^-1
djac  = det(jacm);        % |J| (must be > 0 for valid element)
cartd = jaci * deriv;     % Cartesian derivatives: J^-1 * dN/d(s,t)
xy    = elcod * shape;    % Physical coordinates at Gauss point

```

```
end   % jacob


%
% PART 6 -- FUNCTION: bmatps  (B matrix for plane stress/strain)
%
% Assembles the strain-displacement matrix B and the product D*B.
%
% For 2D plane problems the strain vector is:
%   eps = [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
%
% The B matrix maps nodal displacements to strains:
%   eps = B * u_e
%
% For node i the 3x2 sub-block of B is:
%   [dN_i/dx,      0    ]
%   [    0,    dN_i/dy  ]
%   [dN_i/dy,  dN_i/dx  ]
%
% These sub-blocks are assembled column-pair by column-pair.
%
% INPUTS:
%   shape  : shape function values (not used directly here but available)
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   D      : 3x3 constitutive matrix
%
% OUTPUTS:
%   bmat   : 3 x 2*nnode strain-displacement matrix B
%   dbmat  : 3 x 2*nnode product D*B

function [bmat, dbmat] = bmatps(shape, cartd, D) %#ok<INUSL>

nnode  = size(cartd, 2);
numcols = 2 * nnode;          % total DOF columns (u and v for each node)
bmat   = zeros(3, numcols);

for inode = 1 : nnode
    col = 2*inode - 1;        % column pair: [col, col+1] for node inode
    bmat(:, col:col+1) = [ cartd(1,inode),       0          ;
                                0,          cartd(2,inode)  ;
                           cartd(2,inode),  cartd(1,inode)  ];
end

dbmat = D * bmat;

```

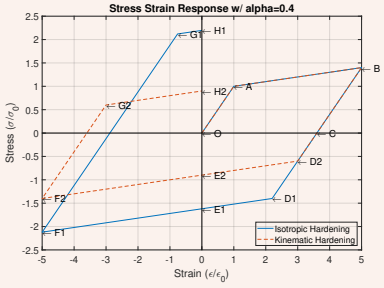

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
end    % bmatps
```

I.3 Part III: Material Modeling and Constitutive Behavior

This section addresses material behavior including plasticity, damping, and nonlinear constitutive models for different material types.

I.3.1 Incremental plasticity



Written by Ben Gallagher

```
%
    ========================================================================

% INCREMENTAL PLASTICITY -- STRESS-STRAIN RESPONSE COMPARISON
%
    ========================================================================

% Plots the normalised stress-strain response of an elastic-plastic
% material under cyclic loading for two hardening rules:
%
%   1. ISOTROPIC HARDENING:
%      The yield surface expands uniformly in all directions as plastic
%      strain accumulates.  Both tensile and compressive yield stresses
%      increase equally.  This captures strain hardening but not the
%      Bauschinger effect.
%
%   2. KINEMATIC HARDENING (Prager):
%      The yield surface translates in stress space without changing
    size.
%      After tensile yielding, the compressive yield stress decreases by
%      the same amount as the tensile yield stress increased.  This
%      captures the Bauschinger effect observed in metals.
%
% NORMALISATION:
%   All stresses normalised by the initial yield stress sigma_0 (s_not).
```

```
%   All strains normalised by the initial yield strain epsilon_0 (e_not)
.
%
% LOADING PATH (points A through H):
%   O -> A : elastic loading to initial yield
%   A -> B : plastic loading (hardening)
%   B -> C : elastic unloading, zero stress
%   C -> D : continued unloading to reverse yield
%   D -> E : reverse plastic flow, zero strain
%   E -> F : continued reverse plastic loading
%   F -> G : elastic reloading
%   G -> H : plastic reloading, zero strain
%
% HARDENING PARAMETER:
%   alpha (a) controls the plastic modulus relative to elastic modulus.
%   For a = 0: perfectly plastic (no hardening).
%   For a = 0.4: moderate hardening (used here).
%
% The two hardening rules give identical paths O->A->B->C but diverge
% from point D onward, reflecting their different treatment of the
% back-stress and yield surface evolution.
%
================================================================================


close all; clear; clc;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 18;
GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Material parameters
%
--------------------------------------------------------------------------------

s_not = 1;    % initial yield stress    (normalised: sigma_0 = 1)
e_not = 1;    % initial yield strain    (normalised: epsilon_0 = 1)
a     = 0.4;  % hardening parameter     (plastic modulus ratio)

%
================================================================================

% Section 2 -- Isotropic hardening: key points
%
================================================================================

% Under isotropic hardening the current yield stress after loading to
% point B is (1+a)*s_not.  On reverse loading, yielding occurs when
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% the stress has decreased by 2*(1+a)*s_not from the peak.
%
% The slope of each loading segment is E (elastic) or E*a/(1+a) (plastic).
% All coordinates are derived analytically from these assumptions.

% Point A: initial yield (start of plastic flow)
sa = s_not;
ea = e_not;

% Point B: end of forward plastic loading
sb = (1 + a) * s_not;
eb = (1 + 10*a) * e_not;

% Point C: elastic unload to zero stress
sc = 0;
ec = 9*a * e_not;

% Point D: reverse yield (isotropic -- yield surface has expanded)
sd = -(1 + a) * s_not;
ed = (8*a - 1) * e_not;

% Point E: reverse plastic flow to zero strain
se = -9/10 * (1 + 2*a) * s_not;
ee = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sf = -(1 + 14/5*a) * s_not;
ef = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sg = (1 + 14/5*a) * s_not;
eg = (1 - 22/5*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
sh = (9/10 + 81/25*a) * s_not;
eh = 0;

%
% ================================================================================

% Section 3 -- Kinematic hardening: key points
%
% ================================================================================

% Under kinematic hardening the yield surface translates but does not
% grow.  The yield surface half-width remains s_not throughout.
% Reverse yielding occurs at a lower stress than under isotropic hardening,
% capturing the Bauschinger effect.

```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% Points A and B: same as isotropic (first loading)
sak = s_not;          eak = e_not;
sbk = (1 + a) * s_not; ebk = (1 + 10*a) * e_not;

% Point C: elastic unload to zero stress
sck = 0;
eck = 9*a * e_not;

% Point D: reverse yield (kinematic -- yield surface has only translated)
sdk = (a - 1) * s_not;
edk = (10*a - 1) * e_not;

% Point E: reverse plastic flow to zero strain
sek = -9/10 * s_not;
eek = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sfk = -(a + 1) * s_not;
efk = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sgk = (1 - a) * s_not;
egk = (1 - 10*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
shk = 9/10 * s_not;
ehk = 0;

%% ========================================================================

% Section 4 -- Assemble path vectors (origin + A through H)
%% ========================================================================

x_iso  = [0; ea;  eb;  ec;  ed;  ee;  ef;  eg;  eh ];
y_iso  = [0; sa;  sb;  sc;  sd;  se;  sf;  sg;  sh ];

x_kin  = [0; eak; ebk; eck; edk; eek; efk; egk; ehk];
y_kin  = [0; sak; sbk; sck; sdk; sek; sfk; sgk; shk];

% Axes lines
x_axis = [-5, 5];   y_zero = [0,  0];
y_axis = [0,  0];   x_zero = [-2.5, 2.5];

%% ========================================================================

% Section 5 -- Plot
%%
```

```
% ========================================================================

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);
set(gca, 'FontSize', fs);

plot(x_iso, y_iso,  'b-',  'LineWidth', 1.5);   hold on;
plot(x_kin, y_kin,  'r--', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_axis, y_zero, 'k');
plot(y_axis, x_zero, 'k');

% --- Point labels ---
% Subscript 1 = isotropic,  subscript 2 = kinematic
lbl = @(x,y,s) text(x, y, ['\leftarrow ' s], ...
                    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', fs);

lbl(0,   0,    'O');
lbl(ea,  sa,   'A');
lbl(eb,  sb,   'B');
lbl(ec,  sc,   'C');

% Isotropic points (suffix 1)
lbl(ed,  sd,   'D_1');
lbl(ee,  se,   'E_1');
lbl(ef,  sf,   'F_1');
lbl(eg,  sg,   'G_1');
lbl(eh,  sh,   'H_1');

% Kinematic points (suffix 2)
lbl(edk, sdk,  'D_2');
lbl(eek, sek,  'E_2');
lbl(efk, sfk,  'F_2');
lbl(egk, sgk,  'G_2');
lbl(ehk, shk,  'H_2');

% --- Formatting ---
title(['Stress-Strain Response  (\alpha = ' num2str(a) ')'], 'FontSize', fs);
xlabel('Strain  (\epsilon / \epsilon_0)',  'FontSize', fs);
ylabel('Stress  (\sigma / \sigma_0)',      'FontSize', fs);
legend('Isotropic Hardening', 'Kinematic Hardening', 'Location', 'southeast');
grid on;
axis on;
set(gca, 'FontSize', fs);

%
% ========================================================================

% Section 6 -- Export
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%=========================================================================
```

```
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
FileName = 'Prob-1.eps';
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
```

I.3.2 Constitutive models

For five years, the University of Colorado Boulder was part of the NEES consortium and focused on real time hybrid simulation (Saouma **and** Sivaselvan, 2014).

As the site was being closed (prematurely) due to a lack of research interest by the community at large (RTHS are notoriously challenging, far more than "mundane" shake table tests), the author decided to develop his own software as OpenSees was not particularly suited for such an endeavor.

The developed software (aptly called) Mercury (Saouma, Kang **and** Haussmann, 2012) was first written in Object Oriented MATLAB®by Kang, 2010 and then rewritten in c++ by Dr Gary Haussman.

To this day, and to the best of the author's knowledge (and bias) the real time hybrid simulation of the the 400+ degrees of freedom in a highly nonlinear reinforced concrete frame (previously tested on a shake table) has not only not been surpassed, but is possibly one of the most complex structural tests ever performed (Saouma **andothers**, 2013).

A constitutive driver was later written by Segura, 2011 who added the Ibarra model for lumped plasticity as well as the limit state shear model. This came to be called Mercury++.

Note that the code is written in Object Oriented Matlab.

From the PhD theses "An C
Hybrid Simulation" by Kang
Plasticity Models And Devel
Code" by Segura, 2011.

This section will thus list the constitutive drivers available in Mercury++.

I.3.3 Bilinear model

```
%% ------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ------------------------------------------------------------
classdef Bilinear < handle
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
9
10      properties (SetAccess=private)
11          % Input variables
12          Tag;                    % material tag
13          Type;                   % material type
14          InitialE;               % initial modulus
15          sy0;                    % initial yielding stress
16          b;                      % strain-hardening coefficient
17          a1;                     % isotropic hardening parameter which
    reflect an increase of the compression yield envelope through a
    fraction of the yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
18          a2;                     % isotropic hardening parameter with
    respcect to a1
19          a3;                     % isotropic hardening parameter which
    reflect an increase of the tension yield envelope through a fraction
    of the yield strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
20          a4;                     % isotropic hardening parameter with
    respcect to a3
21          rho;                    % density
22          % commit variables
23          comStress;              % committed Stress from previous step
24          comTangentE;            % committed TangentE from previous step
25          comStrain;              % committed Strain from previous step
26          comStrain_min;          % committed Strain_min from previous
    step
27          comStrain_max;          % committed Strain_max from previous
    step
28          comShift_Pos;           % committed Shift_Pos from previous step
29          comShift_Neg;           % committed Shift_Neg from previous step
30          comflag;                % committed flag from previous step
31          % update variables
32          Stress;                 % uniaxial stress
33          TangentE;               % tangent modulus
34          Strain;                 % uniaxial strain
35          Strain_min;             % minimum strain in analysis of
    constitutive model
36          Strain_max;             % maximum strain in analysis of
    constitutive model
37          Shift_Pos;              % positive shift for isotropic hardening
38          Shift_Neg;              % negative shift for isotropic hardening
39          flag;                   % flag for load status
40      end
41
42      properties (SetAccess=public)
43          uni_e_s
44          uni_tangentE
45      end
46
47      methods
48          function mat = Bilinear(material)
49              mat.Tag      = material.Tag;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Strain_min = 0;
            mat.Strain_max = 0;
            mat.Shift_Pos  = 1;
            mat.Shift_Neg  = 1;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
            mat.comShift_Pos  = mat.Shift_Pos;
            mat.comShift_Neg  = mat.Shift_Neg;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                Esh  = mat.b * mat.InitialE;
                epsy = mat.sy0/mat.InitialE;
                c1   = Esh * mat.Strain;
                c2   = mat.Shift_Neg * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c3   = mat.Shift_Pos * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c    = mat.comStress + mat.InitialE * del_eps;
                mat.Stress = max( (c1-c2), min( (c1+c3), c ) );
                if ( abs(mat.Stress - c) < 2.2204460492503131e-016 )
                    mat.TangentE = mat.InitialE;
                else
                    mat.TangentE = Esh;
                end

                if (mat.flag == 0)
                    if (del_eps > 0.0)
                        mat.flag = 1;
                    else
                        mat.flag = -1;
                    end
                end

                if ( (mat.flag == 1) && (del_eps < 0.0) )
                    % loading reverstal( + -> - )
                    mat.flag = -1;
                    mat.Strain_max = max(mat.comStrain, mat.Strain_max);
                    mat.Shift_Neg  = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max -
mat.Strain_min) / (2.0 * mat.a2 * epsy) )^0.8;
                end

                if ( (mat.flag == -1) && (del_eps > 0.0) )
                    % loading reverstal( - -> + )
                    mat.flag = 1;
                    mat.Strain_min = min(mat.comStrain, mat.Strain_min);
                    mat.Shift_Pos  = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max -
mat.Strain_min) / (2.0 * mat.a4 * epsy) )^0.8;
                end
            end
        end

        function getStress(mat)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.4 Hardening

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hardening < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        Hiso;                   % isotropic hardening modulus
        Hkin;                   % kinematic hardening modulus
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comPlasticStrain;       % committed PlasticStrain from previous
step
        comBackStress;          % committed BackStress from previous
step
        comsy;                  % committed sy from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        PlasticStrain;          % uniaxial plastic strain
        BackStress;             % uniaxial back stress
        sy;                     % yield stress
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hardening(material)
            mat.Tag       = material.Tag;
            mat.Type      = material.Type;
            mat.InitialE  = material.InitialE;
            mat.sy0       = material.sy0;
            mat.Hiso      = material.Hiso;
            mat.Hkin      = material.Hkin;
            mat.rho       = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress           = 0;
            mat.TangentE         = mat.InitialE;
            mat.Strain           = 0;
            mat.PlasticStrain    = 0;
            mat.BackStress       = 0;
            mat.sy               = mat.sy0;
            mat.comPlasticStrain = 0;
            mat.comBackStress    = 0;
            mat.comsy            = mat.sy0;
        end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
62
63          function commit(mat)    % Store values at previous steps for the
     use in constitutive model
64              mat.comStress         = mat.Stress;
65              mat.comTangentE       = mat.TangentE;
66              mat.comStrain         = mat.Strain;
67              mat.comPlasticStrain  = mat.PlasticStrain;
68              mat.comBackStress     = mat.BackStress;
69              mat.comsy             = mat.sy;
70          end
71
72          function revert(mat)     % Store values at previous steps to
    revert all values when failing at current step
73              mat.Stress         = mat.comStress;
74              mat.TangentE       = mat.comTangentE;
75              mat.Strain         = mat.comStrain;
76              mat.PlasticStrain  = mat.comPlasticStrain;
77              mat.BackStress     = mat.comBackStress;
78              mat.sy             = mat.comsy;
79          end
80
81          function getStrain(mat, TrialStrain)
82              mat.Strain = TrialStrain;
83          end
84
85          function getTangentE(mat)
86              % Material constitutive law
87              eps_p_tr     = mat.comPlasticStrain;   % trial plastic
    strain
88              back_sig_tr  = mat.comBackStress;      % trial back stress
89              sy_tr        = mat.comsy;              % trial evoluted
    yielding stress
90              sig_tr       = mat.InitialE * ( mat.Strain - eps_p_tr);  %
    trial stress
91              %
    ---------------------------------------------------------------------
92              Mark = sig_tr - back_sig_tr;        % Sign operator
93              %
    ---------------------------------------------------------------------
94              func = abs(Mark) - sy_tr;           % Yielding function
95              %
    ---------------------------------------------------------------------
96              if (func <= 0)                      % Elastic
97                  mat.PlasticStrain = eps_p_tr;       % updated plastic
    strain
98                  mat.BackStress    = back_sig_tr;    % updated back
    stress
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                mat.sy             = sy_tr;           % evoluted yielding
 stress
                mat.Stress         = sig_tr;          % updated uniaxial
stress
                mat.TangentE       = mat.InitialE;    % updated tangent
modulus
            elseif (func > 0)                     % Plastic
                del_gamma  = func / ( mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin
 );
                mat.PlasticStrain = eps_p_tr + del_gamma * sign(Mark);
                mat.BackStress    = back_sig_tr + del_gamma * mat.Hkin *
 sign(Mark);
                mat.sy             = sy_tr + mat.Hiso * del_gamma;
                mat.Stress         = sig_tr - del_gamma * mat.InitialE *
sign(Mark);
                mat.TangentE       = mat.InitialE * ( mat.Hiso + mat.Hkin
 ) / ( mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.5 Hysteresis

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.11
% Email       : christopherlsegura@gmail.com
% Revision    : May 10, 2011
% Written by  : Christopher Segura
% Filename    : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;        % material Tag
        Type;       % material Type
        sy_pos0;    % positive yield Stress
        epsy_pos0;  % positive yield Strain
        sy_neg0;    % negative yield Stress
        epsy_neg0;  % negative yield Strain
        cap_pos0;   % positive capping Stress
        ecap_pos0;  % positive capping Strain
        cap_neg0;   % negative capping Stress
        ecap_neg0;  % negative capping Strain
        res_pos;    % positive residual Stress
        eres_pos0;  % positive residual Strain
        res_neg;    % negative residual Stress
        eres_neg0;  % negative residual Strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density
        %% commit variables
        comStress;     % committed Stress from previous step
        comInitialE;       % committed InitialE from previous step
        comStrain;     % committed Strain from previous step
        comsy_pos;     % committed yeild Stress
        comsy_neg;     % committed yeild Stress
        comcap_pos;
        comcap_neg;
        comepsy_pos;   % positive yield Strain
        comepsy_neg;   % negative yield Strain
        comecap_pos;   % positive cap Strain
        comecap_neg;   % negative cap Strain
        comeres_pos;   % positive residual Strain
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        comeres_neg;   % negative residual Strain
        comhys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        coms_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        coms_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        coms_tar_pos;   % positive target Stress
        comeps_tar_pos; % positive target Strain
        coms_tar_neg;   % negative target Stress
        comeps_tar_neg; % negative target Strain
        comstate_flag;  % loading branch
        comupdate_flag; % update loading branch
        comreversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        comenrgy_step;  % step i energy dissipated
        comenrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        comE_unld;      % unloading stiffness
        comE_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        comE_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        comeps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        comeps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        comBeta;
        comBeta_Unld;
        comnorm_hys;
        comn_exc;
        %% update variables
        Stress;     % uniaxial Stress
        InitialE;       % tangent modulus
        Strain;     % uniaxial Strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield Stress
        sy_neg;     % negative yield Stress
        cap_pos;    % positive capping Stress
        cap_neg;    % negative capping Stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield Strain
        epsy_neg;   % negative yield Strain
        ecap_pos;   % positive cap Strain
        ecap_neg;   % negative cap Strain
        eres_pos;   % positive residual Strain
        eres_neg;   % negative residual Strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target Stress
        eps_tar_pos; % positive target Strain
        s_tar_neg;   % negative target Stress
        eps_tar_neg; % negative target Strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        Beta;        % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;    % normalized hysteretic energy
        n_exc;       % number excursions/cycles

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hysteresis(material)
            mat.Tag          = material.Tag;
            mat.Type         = material.Type;
            mat.sy_pos0      = material.sy_pos0;
            mat.epsy_pos0    = material.epsy_pos0;
            mat.sy_neg0      = material.sy_neg0;
            mat.epsy_neg0    = material.epsy_neg0;
            mat.cap_pos0     = material.cap_pos0;
            mat.ecap_pos0    = material.ecap_pos0;
            mat.cap_neg0     = material.cap_neg0;
            mat.ecap_neg0    = material.ecap_neg0;
            mat.res_pos      = material.res_pos;
            mat.eres_pos0    = material.eres_pos0;
            mat.res_neg      = material.res_neg;
            mat.eres_neg0    = material.eres_neg0;
            mat.lamda_hys    = material.lamda_hys;
            mat.det_rate     = material.det_rate;
            mat.rho          = material.rho;
        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.Stress      = 0;
            mat.Strain      = 0;
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.InitialE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0
 - mat.epsy_pos0);
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0
 - mat.ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0
 to (i-1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5    = 0;
            mat.eps_pt10   = 0;
            mat.norm_hys   = 0;
            mat.n_exc      = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the
 use in constitutive model
            mat.comStress      = mat.Stress;
            mat.comInitialE        = mat.InitialE;
            mat.comStrain      = mat.Strain;
            mat.comsy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.comsy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.comcap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.comcap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.comepsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.comepsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.comecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.comecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.comeres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.comeres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.comhys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.coms_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.coms_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.coms_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.comeps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.coms_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.comeps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.comstate_flag  = mat.state_flag;
            mat.comupdate_flag = mat.update_flag;
            mat.comreversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.comenrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.comenrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.comE_unld      = mat.E_unld;
            mat.comE_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.comE_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.comeps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.comeps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.comnorm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.comn_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.Stress      = mat.comStress;
            mat.InitialE        = mat.comInitialE;
            mat.Strain      = mat.comStrain;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.comhys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.comstate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
```

```
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
        end % function revert

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
%             mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.InitialE       = mat.comInitialE;
            mat.state_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
            mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
            %
 ------------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.Strain  - mat.comStrain;
            %
 ------------------------------------------------------------------
      if (del_eps >= 0) && (mat.Stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
```

```
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(
mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.Stress > 0) % positive
unloading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.Stress <= 0) % negative
loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading(
mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.Stress < 0) % negative loading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.Stress = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
ref_Strain);

            if (mat.comStress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.comStress/mat.Stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress -
mat.comStress));
                else % reloading
                    if (mat.Stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt10)*mat.
Stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt5)*mat.Stress
;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.
comStress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end
```

```
332
333         function getStress(mat)
334             mat.Stress = mat.Stress;
335         end
336
337         function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
338             switch mat.state_flag
339                 case -1
340                     if (mat.Strain < 0)
341                         mat.update_flag = -1;
342                     elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
343                         mat.update_flag = 1;
344                     elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
345                         mat.update_flag = 2;
346                     elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
347                         mat.update_flag = 3;
348                     else
349                         mat.update_flag = 4;
350                     end
351                 case 1
352                     if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
353                         mat.update_flag = 1;
354                     elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
355                         mat.update_flag = 2;
356                     elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
357                         mat.update_flag = 3;
358                     else
359                         mat.update_flag = 4;
360                     end
361                 case 2
362                     if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
363                         mat.update_flag = 2;
364                     elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
365                         mat.update_flag = 3;
366                     else
367                         mat.update_flag = 4;
368                     end
369                 case 3
370                     if (mat.Strain < mat.eres_pos)
371                         mat.update_flag = 3;
372                     else
373                         mat.update_flag = 4;
374                     end
375                 case 4
376                     mat.update_flag = 4;
377                 case 9
378                     mat.update_flag = 9;
379
380                 otherwise
381                     if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
382                         mat.update_flag = 11;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_Stress = mat.sy_neg;
                    ref_Strain = mat.epsy_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_Strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.Strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                elseif (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
%             elseif (mat.state_flag == 4)
%                 mat.update_flag = 4;
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.comStress;
                    end
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
```

```
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_Stress = mat.sy_pos;
                    ref_Strain = mat.epsy_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_Stress = mat.cap_neg;
                    ref_Strain = mat.ecap_neg;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_Stress = mat.comStress;
                    ref_Strain = mat.comStrain;
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt5;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_Strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
.update_flag ~= 4) && (mat.update_flag ~= 9)
                % estimate energy in step
                Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
ref_Strain);
                enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.
comStress + 0.5*(Stress_new - mat.comStress)));
                if (mat.comreversal_flag == 1)
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine Strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
```

```
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg -
mat.sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof
));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg +
mat.E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg -
mat.s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = Stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end

                    if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
                        mat.update_flag = 12; %unloading
                    elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_Stress = mat.cap_neg;
                        ref_Strain = mat.ecap_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_Stress = mat.res_neg;
                        ref_Strain = mat.eres_neg;
                        mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_Stress = mat.comStress;
                        ref_Strain = mat.comStrain;
                        mat.InitialE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_Stress = 0;
                        ref_Strain = mat.eps_pt5;
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(
mat.eps_tar_neg - ref_Strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading( mat
)

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 4
                mat.update_flag = 4;
            case 7
                if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 8
                if (mat.Strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            case 9
                mat.update_flag = 9;

            otherwise
                if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13;
                else
                    if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = 0;
                ref_Strain = 0;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_Stress = mat.res_pos;
                ref_Strain = mat.eres_pos;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 7
                ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
```

```
676                     mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
677                 case 8
678                     ref_Stress = mat.cap_neg;
679                     ref_Strain = mat.ecap_neg;
680                     mat.InitialE   = mat.E_sof;
681                 case 9
682                     ref_Stress = mat.res_neg;
683                     ref_Strain = mat.eres_neg;
684                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
685                 case 13
686                     ref_Stress = mat.comStress;
687                     ref_Strain = mat.comStrain;
688                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_Strain);
689             end
690         end % function NegativeLoading
691
692
693         function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading( mat )
694
695             if (mat.state_flag == -1)
696                 if (mat.Strain < 0)
697                     mat.update_flag = -1;
698                 elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
699                     mat.update_flag = 1;
700                 elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
701                     mat.update_flag = 2;
702                 elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
703                     mat.update_flag = 3;
704                 else
705                     mat.update_flag = 4;
706                 end
707             elseif (mat.state_flag == 1)
708                 if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
709                     mat.update_flag = 1;
710                 elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
711                     mat.update_flag = 2;
712                 elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
713                     mat.update_flag = 3;
714                 else
715                     mat.update_flag = 4;
716                 end
717             elseif (mat.state_flag == 4)
718                 mat.update_flag = 4;
719 %             elseif (mat.state_flag == 9)
720 %                 mat.update_flag = 9;
721             else
722                 % update target state
723                 if (mat.reversal_flag == 1)
724                     if (mat.comStrain < mat.eps_tar_neg)
725                         mat.eps_tar_neg = mat.comStrain;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.s_tar_neg   = mat.comStress;
                end
            end
            % determine Strain at pt 10
            mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

            if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                mat.update_flag = 10; % unloading
            else
                if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11;
                else
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_Stress = mat.sy_neg;
                ref_Strain = mat.epsy_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_Stress = 0;
                ref_Strain = 0;
                mat.InitialE   = mat.iniE;
            case 2
                ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
            case 3
                ref_Stress = mat.cap_pos;
                ref_Strain = mat.ecap_pos;
                mat.InitialE   = mat.E_sof;
            case 4
                ref_Stress = mat.res_pos;
                ref_Strain = mat.eres_pos;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 9
                ref_Stress = mat.res_neg;
                ref_Strain = mat.eres_neg;
                mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
            case 10
                ref_Stress = mat.comStress;
                ref_Strain = mat.comStrain;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.InitialE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = mat.eps_pt10;
                    mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_Strain);

            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
.update_flag ~= 4) && (mat.update_flag ~= 9)
                % estimate energy in step
                Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain -
ref_Strain);
                enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.
comStress + 0.5*(Stress_new - mat.comStress)));
                if (mat.comreversal_flag == 1)
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine Strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on positive side
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos -
mat.sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof
));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos +
mat.E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat
.s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = Stress_tar_chk;
                    end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end

                    if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                        mat.update_flag = 10; % unloading
                    elseif (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end

                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_Stress = mat.cap_pos;
                        ref_Strain = mat.ecap_pos;
                        mat.InitialE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_Stress = mat.res_pos;
                        ref_Strain = mat.eres_pos;
                        mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_Stress = mat.comStress;
                        ref_Strain = mat.comStrain;
                        mat.InitialE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        ref_Stress = 0;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                        ref_Strain = mat.eps_pt10;
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(
mat.eps_tar_pos - ref_Strain);
                    end
                end
            end % function NegUnloading


            function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

                % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
                E_t     = mat.hys_dis_cap;
                E_step  = enrgy_step;
                c       = mat.det_rate;
                E_pre   = mat.enrgy_prvs;

                mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
                mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^
c;

                if (mat.Beta > 1)
                    mat.Beta = 0.999;
                    display('****************************')
                    display('Hysteretic Energy Exhausted')
                    display('****************************')
                elseif (mat.Beta < 0)
                    mat.Beta = 0.999;
                    display('****************************')
                    display('Hysteretic Energy Exhausted')
                    display('****************************')
                end
                if (mat.Beta_Unld > 1)
                    mat.Beta_Unld = 0.999;
                    display('****************************')
                    display('Hysteretic Energy Exhausted')
                    display('****************************')
                elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                    mat.Beta_Unld = 0.999;
                    display('****************************')
                    display('Hysteretic Energy Exhausted')
                    display('****************************')
                end

            end % function BetaFunc


            function allocateMemory(mat,totStep)
                mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
            end

            function write2file(mat, fid)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

        function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end % methods

end % classdef
```

I.3.6 Modified giuffre monegotto pinto

```
%% ------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ------------------------------------------------------------
classdef ModifiedGiuffreMonegottoPinto < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial moduous
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        R0;                     % during first loading, R0 is the value
of the parameter R which is dependent on the absolute strain
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        cR1;                    % Experimentally determined parameters
    to be defined together with R0
        cR2;                    % Experimentally determined parameters
    to be defined together with R0
        a1;                     % isotropic hardening parameter which
    reflect an increase of the compression yield envelope through a
    fraction of the yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with
    respcect to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which
    reflect an increase of the tension yield envelope through a fraction
    of the yield strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with
    respcect to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStress_r;            % committed Stress_r from previous step
        comStrain_r;            % committed Strain_r from previous step
        comStress_o;            % committed Stress_o from previous step
        comStrain_o;            % committed Strain_o from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous
    step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous
    step
        comStrain_m;            % committed Strain_p from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Stress_r;               % stress at the point of strain reversal
        Strain_r;               % strain at the point of strain reversal
        Stress_o;               % stress at the point of intersection of
     the two asymptotes
        Strain_o;               % strain at the point of intersection of
     the two asymptotes
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of
    constitutive model
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of
    constitutive model
        Strain_m;               % strain at the previous maximum or
    minimum strain reversal point
        flag;                   %
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    end

    methods
        function mat = ModifiedGiuffreMonegottoPinto(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.R0       = material.R0;
            mat.cR1      = material.cR1;
            mat.cR2      = material.cR2;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Stress_r   = 0;
            mat.Strain_r   = 0;
            mat.Stress_o   = 0;
            mat.Strain_o   = 0;
            mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_min = -mat.sy0/mat.InitialE;
            mat.Strain_m   = 0;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the
    use in constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStress_r   = mat.Stress_r;
            mat.comStrain_r   = mat.Strain_r;
            mat.comStress_o   = mat.Stress_o;
            mat.comStrain_o   = mat.Strain_o;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_m   = mat.Strain_m;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to
    revert all values when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
            mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
            mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
            mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
            mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
            mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
            mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
            mat.flag       = mat.comflag;

            Esh   = mat.b * mat.InitialE;
            eps_y = mat.sy0/mat.InitialE;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if (mat.flag == 0)
                if ( del_eps == 0 ) mat.flag  = 0;
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_max;
                    mat.Stress_o   =  mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_min;
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                end
            elseif (mat.flag == 1)
                if ( del_eps > 0 )
                    mat.flag = 1;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    % reversal ( + -> - )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_max = max(mat.Strain_max, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min)/(2.0*mat.a2*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (-mat.sy0 * shift + Esh * eps_y * shift - mat.Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o + eps_y * shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == -1)
                if ( del_eps < 0 )
                    mat.flag = -1;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_min = min(mat.Strain_min, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max-mat.Strain_min)/(2.0*mat.a4*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (mat.sy0 * shift - Esh * eps_y * shift - mat.Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o - eps_y * shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                 end
            end
        end

        function common(mat,eps_y)
            xi     = abs( (mat.Strain_m - mat.Strain_o)/ eps_y );
            R      = mat.R0 - mat.R0*mat.cR1*xi/(mat.cR2+xi);
            e_rate = (mat.Strain - mat.Strain_r)/(mat.Strain_o - mat.Strain_r);
            dummy1 = 1.0 + abs(e_rate)^R;
            dummy2 = dummy1^(1/R);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.Stress   = mat.b * e_rate + (1.0 - mat.b) * e_rate/
dummy2;
            mat.Stress   = mat.Stress * (mat.Stress_o - mat.Stress_r) +
mat.Stress_r;
            mat.TangentE = mat.b + (1.0 - mat.b)/(dummy1 * dummy2);
            mat.TangentE = mat.TangentE * (mat.Stress_o - mat.Stress_r)
/(mat.Strain_o - mat.Strain_r);
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.7 Modified kent park

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
```

```
% Program     : Mercury v.2.01
% Email       : kkd0724@hanafos.com
% Revision    : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ------------------------------------------------------------
classdef ModifiedKentPark < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        sc;                     % maximum compressive concrete stress
        ec;                     % compressive strain when compressive
stress reaches maximum compressive one
        scu;                    % compressive stress at 20 % of maximum
compressive one
        ecu;                    % compressive strain with respect to
compressive stress at 20 % of maximum compressive stress
        lambda;                 % historical factor
        st;                     % maximum tensile concrete stress
        Ets;                    % tensile concrete modulus
        rho;                    % density
        % Computed variable with input variables
        InitialEc;              % Initial compressive concrete modulus
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous
step
        comdelta_Strain_pt;     % committed delta_Strain_pt from
previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial stress
        Strain_min;             % minimum stress in analysis of
constitutive model
        delta_Strain_pt;        % strain with respect to incremental
strain at previous step
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedKentPark(material)
            mat.Tag    = material.Tag;
            mat.Type   = material.Type;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.sc      = material.sc;
            mat.ec      = material.ec;
            mat.scu     = material.scu;
            mat.ecu     = material.ecu;
            mat.lambda  = material.lambda;
            mat.st      = material.st;
            mat.Ets     = material.Ets;
            mat.rho     = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress          = 0;
            mat.InitialEc       = 2*mat.sc/mat.ec;
            mat.TangentE        = mat.InitialEc;
            mat.Strain          = 0;
            mat.Strain_min      = 0;
            mat.delta_Strain_pt = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in constitutive model
            mat.comStress          = mat.Stress;
            mat.comTangentE        = mat.TangentE;
            mat.comStrain          = mat.Strain;
            mat.comStrain_min      = mat.Strain_min;
            mat.comdelta_Strain_pt = mat.delta_Strain_pt;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.Stress          = mat.comStress;
            mat.TangentE        = mat.comTangentE;
            mat.Strain          = mat.comStrain;
            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
            mat.Stress          = mat.comStress;
            mat.TangentE        = mat.TangentE;
            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;

            del_eps = mat.Strain  - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                if (mat.Strain < mat.Strain_min)
```

```
                    [mat.Stress ,mat.TangentE] = mat.compression(mat.
Strain);
                    mat.Strain_min = mat.Strain;
                else
                    eps_R = (mat.scu-mat.lambda*mat.InitialEc*mat.ecu)/(
mat.InitialEc*(1.0-mat.lambda));
                    sig_R = mat.InitialEc * eps_R;
                    [sig_p_min, dummy] = mat.compression(mat.Strain_min)
;
                    E_R    = (sig_p_min - sig_R)/(mat.Strain_min - eps_R
);
                    eps_pt = mat.Strain_min - sig_p_min/E_R;
                    if (mat.Strain < eps_pt)
                        sig_min      = sig_p_min + E_R * (mat.Strain -
mat.Strain_min);
                        sig_max      = E_R * 0.5 * (mat.Strain - eps_pt)
;
                        mat.Stress   = mat.comStress + mat.InitialEc *
del_eps;
                        mat.TangentE = mat.InitialEc;
                        if (mat.Stress < sig_min)
                            mat.Stress   = sig_min;
                            mat.TangentE = E_R;
                        end
                        if (mat.Stress >= sig_max)
                            mat.Stress = sig_max;
                            mat.TangentE = 0.5*E_R;
                        end
                    else
                        eps_pn = eps_pt + mat.delta_Strain_pt;
                        if (mat.Strain <= eps_pn)
                            [sig_cn, mat.TangentE] = mat.tension(mat.
delta_Strain_pt);
                            if (mat.delta_Strain_pt ~= 0.0)
                                mat.TangentE = sig_cn/mat.
delta_Strain_pt;
                            else
                                mat.TangentE = mat.InitialEc;
                            end
                            mat.Stress = mat.TangentE * (mat.Strain -
eps_pt);
                        else
                            del_eps = mat.Strain - eps_pt;
                            [mat.Stress, mat.TangentE] = mat.tension(
del_eps);
                            mat.delta_Strain_pt = del_eps;
                        end
                    end
                end
            end
        end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
136
137         function [sigma, modulus]=compression(mat, epsilon)
138             ratLocal = epsilon/mat.ec;
139             if (epsilon >= mat.ec)
140                 sigma   = mat.sc * ratLocal * (2.0 - ratLocal);
141                 modulus = mat.InitialEc * (1.0 - ratLocal);
142             else
143                 if (epsilon > mat.ecu)
144                     sigma   = (mat.scu - mat.sc) * (epsilon - mat.ec) /
    (mat.ecu - mat.ec) + mat.sc;
145                     modulus = (mat.scu - mat.sc) / (mat.ecu - mat.ec);
146                 else
147                     sigma   = mat.scu;
148                     modulus = 2.2204460492503131e-016;
149                 end
150             end
151         end
152
153         function [sigma, modulus]=tension(mat, delta_epsilon)
154             eps0 = mat.st/mat.InitialEc;
155             epsu = mat.st * (1.0/mat.Ets + 1.0/mat.InitialEc);
156             if (delta_epsilon <= eps0)
157                 sigma = delta_epsilon * mat.InitialEc;
158                 modulus = mat.InitialEc;
159             else
160                 if (delta_epsilon<=epsu)
161                     sigma   = mat.st - mat.Ets * (delta_epsilon-eps0);
162                     modulus = -mat.Ets;
163                 else
164                     sigma   = 0.0;
165                     modulus = 2.2204460492503131e-016;
166                 end
167             end
168         end
169
170         function getStress(mat)
171             mat.Stress = mat.Stress;
172         end
173
174         function allocateMemory(mat,totStep)
175             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
176         end
177
178         function write2file(mat, fid)
179             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
180         end
181
182          function write2mat(mat, fid)
183              uni_e_s = mat.uni_e_s;
184              save(fid, 'uni_e_s');
185          end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
186
187         function getPlot(mat,num)
188             figure(num);
189             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
190             hold on;grid on;box on;
191             title('Strain-Stress relationship');
192             xlabel('Strain');
193             ylabel('Stress');
194         end
195
196         function finalPlot(mat,num)
197             figure(num);
198             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
199             grid on;box on;
200             title('Strain-Stress relationship');
201             xlabel('Strain');
202             ylabel('Stress');
203         end
204
205     end
206 end
```

I.3.8 Ibarra

I.3.8.1 Hysteresis

```
1  %% ------------------------------------------------------------
2  % Copyright 2010 All rights reserved.
3  % Program     : Mercury v.2.11
4  % Email       : christopherlsegura@gmail.com
5  % Revision    : May 10, 2011
6  % Written by  : Christopher Segura
7  % Filename    : Hysteresis.m
8  %% ------------------------------------------------------------
9  classdef Hysteresis < handle
10
11     properties (SetAccess=protected,Hidden)
12         % Input variables
13         tag;        % material tag
14         type;       % material type
15         sy_pos0;    % positive yield stress
16         epsy_pos0;  % positive yield strain
17         sy_neg0;    % negative yield stress
18         epsy_neg0;  % negative yield strain
19         cap_pos0;   % positive capping stress
20         ecap_pos0;  % positive capping strain
21         cap_neg0;   % negative capping stress
22         ecap_neg0;  % negative capping strain
23         res_pos;    % positive residual stress
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        eres_pos0;  % positive residual strain
        res_neg;    % negative residual stress
        eres_neg0;  % negative residual strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;     % uniaxial stress
        tanE;       % tangent modulus
        strain;     % uniaxial strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield stress
        sy_neg;     % negative yield stress
        cap_pos;    % positive capping stress
        cap_neg;    % negative capping stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield strain
        epsy_neg;   % negative yield strain
        ecap_pos;   % positive cap strain
        ecap_neg;   % negative cap strain
        eres_pos;   % positive residual strain
        eres_neg;   % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target stress
        eps_tar_pos; % positive target strain
        s_tar_neg;   % negative target stress
        eps_tar_neg; % negative target strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        Beta;         % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;    % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;     % normalized hysteretic energy
        n_exc;        % number excursions/cycles

        %% commit variables
        com_stress;      % committed stress from previous step
        com_tanE;        % committed tanE from previous step
        com_strain;      % committed strain from previous step
        com_sy_pos;      % committed yeild stress
        com_sy_neg;      % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;    % positive yield strain
        com_epsy_neg;    % negative yield strain
        com_ecap_pos;    % positive cap strain
        com_ecap_neg;    % negative cap strain
        com_eres_pos;    % positive residual strain
        com_eres_neg;    % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refeneference stress
        com_s_ref_neg;  % negative refeneference stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i
    -1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;

    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = Hysteresis(info)
            mat.tag          = info{1};
            mat.type         = info{2};
            mat.sy_pos0      = info{3};
            mat.epsy_pos0    = info{4};
            mat.sy_neg0      = info{5};
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.rho         = info{17};
            mat.Initialization();

        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.stress     = 0;
            mat.strain     = 0;
            mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE       = mat.iniE;
            mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0
  - mat.epsy_pos0);
            mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0
  - mat.ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
  hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0
  to (i-1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5   = 0;
            mat.eps_pt10  = 0;
            mat.norm_hys  = 0;
            mat.n_exc     = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in constitutive model
            mat.com_stress      = mat.stress;
            mat.com_tanE        = mat.tanE;
            mat.com_strain      = mat.strain;
            mat.com_sy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag  = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld      = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain     = TrialStrain;
            mat.stress     = mat.com_stress;
            mat.tanE       = mat.com_tanE;
            mat.state_flag = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %
 ------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %
 ------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(
mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive
unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative
loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(
mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain)
;

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress -
mat.com_stress));
                else % reloading
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.
stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress
;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
```

```
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 3
                if (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            case 4
                mat.update_flag = 4;
            case 9
                mat.update_flag = 9;

            otherwise
                if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                    mat.update_flag = 11;
                else
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                end
        end


        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_stress = mat.sy_neg;
                ref_strain = mat.epsy_neg;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 1 % elastic
                ref_stress = 0;
                ref_strain = 0;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 2 % hardening
                ref_stress = mat.s_tar_pos;
                ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
            case 3 % softening
                ref_stress = mat.cap_pos;
                ref_strain = mat.ecap_pos;
                mat.tanE   = mat.E_sof;
            case 4 % residual
                ref_stress = mat.res_pos;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
```

```
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
.update_flag ~= 9)

                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld
;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg -
mat.sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof
));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg +
mat.E_sof*mat.ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg -
mat.s_ref_neg)/mat.E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
```

```
                    mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                    mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                end

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end

                if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat
)

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
```

```
                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case -1
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = 0;
                        mat.tanE   = mat.iniE;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 13
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
                end
            end % function NegativeLoading


            function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

                if (mat.state_flag == -1)
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.
E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
```

```
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_strain);

            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
.update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.
E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on positive side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos -
mat.sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof
));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos +
mat.E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat
.s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end

                    if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                        mat.update_flag = 10; % unloading
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end

                    if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^
    c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress
];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2))
;
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.8.2 Hysteresis pinch

```
%% ------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.11
% Email       : christopherlsegura@gmail.com
% Revision    : May 10, 2011
% Written by  : Christopher Segura
% Filename    : HysteresisPinch.m
%% ------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;          % uniaxial stress
        tanE;            % tangent modulus
        strain;          % uniaxial strain
        iniE;            % initial modulus
        E_hrd;           % hardening modulus
        E_sof;           % softening modulus
        sy_pos;          % positive yield stress
        sy_neg;          % negative yield stress
        cap_pos;         % positive capping stress
        cap_neg;         % negative capping stress
        epsy_pos;        % positive yield strain
        epsy_neg;        % negative yield strain
        ecap_pos;        % positive cap strain
        ecap_neg;        % negative cap strain
        eres_pos;        % positive residual strain
        eres_neg;        % negative residual strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;       % positive refenerence stress
        s_ref_neg;       % negative refenerence stress
        s_tar_pos;       % positive target stress
        eps_tar_pos;     % positive target strain
        s_tar_neg;       % negative target stress
        eps_tar_neg;     % negative target strain
        state_flag;      % loading branch
        update_flag;     % update loading branch
        reversal_flag;   % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;      % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;      % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;          % unloading stiffness
        E_hrd_pos;       % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;       % negative hardening stiffness
        eps_pt5;         % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;        % negative unloading inflection strain
        Beta;            % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;       % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;     % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;     % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;      % positive break point strain
        eps_bp_neg;      % negative break point strain
        s_bp_pos;        % positive break point stress
        s_bp_neg;        % negative break point stress
        norm_hys;        % normalized hysteretic energy
        n_exc;           % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;      % committed stress from previous step
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i
-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.kappa_f     = info{17};
            mat.kappa_d     = info{18};
            mat.rho         = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress      = 0;
            mat.strain      = 0;
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.
    ecap_pos0 - mat.epsy_pos0);
            mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.
    eres_pos0 - mat.ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
    hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag      = 1;
            mat.update_flag     = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag   = 1;
            mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous
    steps 0 to (i-1)
            mat.E_unld          = mat.iniE;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5         = 0;
            mat.eps_pt10        = 0;
            mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
            mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
            mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
            mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
            mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
            mat.norm_hys        = 0;
            mat.n_exc           = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in constitutive model
            mat.com_stress          = mat.stress;
            mat.com_tanE            = mat.tanE;
            mat.com_strain          = mat.strain;
            mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
```

```
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
283
284         function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
285             mat.strain          = TrialStrain;
286             mat.stress          = mat.com_stress;
287             mat.tanE            = mat.com_tanE;
288             mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
289             mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
290             mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
291             mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
292             mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
293             mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
294             mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
295             mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
296             mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
297             mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
298             mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
299             mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
300             mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
301             mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
302             mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
303             mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
304             mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
305             mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
306             mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
307             mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
308             mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
309             mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
310             mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
311             mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
312             mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
313             mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
314             mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
315             mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
316             mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
317             mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
318             mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
319             mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
320             mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
321             mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
322             mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
323             %
    ------------------------------------------------------------------
324             del_eps = mat.strain  - mat.com_strain;
325             %
    ------------------------------------------------------------------
326             if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
327                 if (mat.state_flag == 4)
328                     ref_stress = mat.res_pos;
329                     ref_strain = mat.eres_pos;
330                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
331                 else
```

```
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(
mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive
unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative
loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(
mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain)
;

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress -
mat.com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.
stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress
;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)

            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos - ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos - ref_strain);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld
;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 >
mat.eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
```

```
                    mat.update_flag = 7; % neg hardening
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8; % neg softening
                else
                    mat.update_flag = 9; % neg residual
                end
            end
        end

        switch mat.update_flag
            case -1
                ref_stress = 0;
                ref_strain = 0;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 1
                ref_stress = mat.sy_pos;
                ref_strain = mat.epsy_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE;
            case 4
                ref_stress = mat.res_pos;
                ref_strain = mat.eres_pos;
                mat.tanE   = mat.iniE/100000;
            case 7
                ref_stress = mat.s_tar_neg;
                ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
            case 8
                ref_stress = mat.cap_neg;
                ref_strain = mat.ecap_neg;
                mat.tanE   = mat.E_sof;
            case 9
                ref_stress = mat.res_neg;
                ref_strain = mat.eres_neg;
                mat.tanE   = mat.iniE/100000;
            case 12
                ref_stress = mat.com_stress;
                ref_strain = mat.com_strain;
                mat.tanE   = mat.E_unld;
            case 13
                ref_stress = mat.s_bp_neg;
                ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_neg - ref_strain);
            case 23
                ref_stress = 0;
                ref_strain = mat.eps_pt5;
                mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_neg - ref_strain);
        end

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
570             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
    .update_flag ~= 9)
571                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
572                     % estimate energy in step
573                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
574                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
575                     % update unloading modulus
576                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
577                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
578                 end
579                 % determine strain at pt 5
580                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld
    ;
581
582                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
583                     % update flag
584                     mat.reversal_flag = -1;
585                     mat.update_flag = 12; %unloading
586                 else
587                     % update reversal flag
588                     mat.reversal_flag = 1;
589                     % update flag to signal initial directional loadin
590                     if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
591                        targ_flag = 1;
592                     else
593                         targ_flag = 0;
594                     end
595                     % update cyclic parameters on negative side
596                     % Note: values must remain negative although
    exhaustion
597                     % of hysteretic energy may make them positive
598                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
599                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
600                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
601                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
602                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
603                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
604                     mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg -
    mat.sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof
    ));
605                     mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg +
    mat.E_sof*mat.ecap_neg);
606                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
607                     mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat
    .s_ref_neg)/mat.E_sof);
608                     % adjust target values if necessary
609                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    eps_tar_neg;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.
eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional
loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5
)/(mat.eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 >
mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
eps_bp_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat
)

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 >
mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
eps_bp_neg - ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.
E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
```

```
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_strain);
                case 21
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
eps_bp_pos - ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
.update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.
E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for
 bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they
may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
```

```
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
eps_bp_pos - ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^
c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress
];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2))
;
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.9 Limit state shear

```
%% ------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program     : Mercury v.2.11
% Email       : christopherlsegura@gmail.com
% Revision    : May 10, 2011
% Written by  : Christopher Segura
% Filename    : HysteresisPinch.m
%% ------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refenerence stress
        s_ref_neg;      % negative refenerence stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
        update_flag;    % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;     % positive break point strain
        eps_bp_neg;     % negative break point strain
        s_bp_pos;       % positive break point stress
        s_bp_neg;       % negative break point stress
        norm_hys;       % normalized hysteretic energy
        n_exc;          % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i
    -1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.kappa_f     = info{17};
            mat.kappa_d     = info{18};
            mat.rho         = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress      = 0;
            mat.strain      = 0;
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.
ecap_pos0 - mat.epsy_pos0);
            mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.
eres_pos0 - mat.ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; %
hysteretic dissipation capacity
            mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag      = 1;
            mat.update_flag     = mat.state_flag;
            mat.reversal_flag   = 1;
            mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous
steps 0 to (i-1)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.E_unld          = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5         = 0;
            mat.eps_pt10        = 0;
            mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
            mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
            mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
            mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
            mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
            mat.norm_hys        = 0;
            mat.n_exc           = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the
 use in constitutive model
            mat.com_stress          = mat.stress;
            mat.com_tanE            = mat.tanE;
            mat.com_strain          = mat.strain;
            mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
            mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

```

```
282         end % function revert
283 
284         function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
285             mat.strain          = TrialStrain;
286             mat.stress          = mat.com_stress;
287             mat.tanE            = mat.com_tanE;
288             mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
289             mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
290             mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
291             mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
292             mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
293             mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
294             mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
295             mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
296             mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
297             mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
298             mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
299             mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
300             mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
301             mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
302             mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
303             mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
304             mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
305             mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
306             mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
307             mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
308             mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
309             mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
310             mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
311             mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
312             mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
313             mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
314             mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
315             mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
316             mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
317             mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
318             mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
319             mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
320             mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
321             mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
322             mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
323             %
    ------------------------------------------------------------------
324             del_eps = mat.strain  - mat.com_strain;
325             %
    ------------------------------------------------------------------
326             if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
327                 if (mat.state_flag == 4)
328                     ref_stress = mat.res_pos;
329                     ref_strain = mat.eres_pos;
330                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```

```
331                 else
332                     [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(
    mat);
333                 end
334 
335             elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive
    unloading
336                 [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);
337 
338             elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative
    loading
339                 if (mat.state_flag == 9)
340                     ref_stress = mat.res_neg;
341                     ref_strain = mat.eres_neg;
342                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
343                 else
344                     [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(
    mat);
345                 end
346 
347             elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
348                 [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
349 
350             end
351 
352             mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain)
    ;
353 
354             if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
355                 if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
356                     step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress -
    mat.com_stress));
357                 else % reloading
358                     if (mat.stress >= 0)
359                         mat.enrgy_step = 0;
360                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.
    stress;
361                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
362                     else
363                         mat.enrgy_step = 0;
364                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress
    ;
365                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
366                     end
367                 end
368             else
369                 step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.
    com_stress));
370             end
371             % update energy in excursions
372             mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
```

```
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)

            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos - ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
eps_bp_pos - ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
                else
                    mat.update_flag = 9;
                end
            elseif (mat.state_flag == 9)
                mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state if reversal
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
                        mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld
;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.update_flag = 12; % unloading
                elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 >
mat.eps_bp_neg)
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
```

```
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
eps_bp_neg - ref_strain);
            end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
569
570             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
    .update_flag ~= 9)
571                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
572                     % estimate energy in step
573                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
    ref_strain);
574                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
575                     % update unloading modulus
576                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
577                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
578                 end
579                 % determine strain at pt 5
580                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld
    ;
581
582                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
583                     % update flag
584                     mat.reversal_flag = -1;
585                     mat.update_flag = 12; %unloading
586                 else
587                     % update reversal flag
588                     mat.reversal_flag = 1;
589                     % update flag to signal initial directional loadin
590                     if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
591                        targ_flag = 1;
592                     else
593                         targ_flag = 0;
594                     end
595                     % update cyclic parameters on negative side
596                     % Note: values must remain negative although
    exhaustion
597                     % of hysteretic energy may make them positive
598                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.
    com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
599                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
600                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
601                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
602                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
603                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
604                     mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg -
    mat.sy_neg + (mat.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof
    ));
605                     mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg +
    mat.E_sof*mat.ecap_neg);
606                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
607                     mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat
    .s_ref_neg)/mat.E_sof);
608                     % adjust target values if necessary
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.
eps_tar_neg - mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.
eps_tar_neg;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional
loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5
)/(mat.eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 >
mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
```

```
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
eps_bp_neg - ref_strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat
)

            switch mat.state_flag
                case 1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case -1
                    if (mat.strain > mat.epsy_neg)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 7
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 >
mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.
eps_tar_neg - ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.
eps_bp_neg - ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.
E_unld;

```

```
                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
```

```
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
eps_tar_pos - ref_strain);
                case 21
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
eps_bp_pos - ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat
.update_flag ~= 4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain -
ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.
E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for
 bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they
may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.
com_stress + 0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos -
mat.sy_pos + (mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof
));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos +
mat.E_sof*mat.ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat
.s_ref_pos)/mat.E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.
eps_tar_pos - mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.
eps_tar_pos;
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional
loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.
eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 <
mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
933
934                 switch mat.update_flag
935                     case 2
936                         ref_stress = mat.s_tar_pos;
937                         ref_strain = mat.eps_tar_pos;
938                         mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
939                     case 3
940                         ref_stress = mat.cap_pos;
941                         ref_strain = mat.ecap_pos;
942                         mat.tanE   = mat.E_sof;
943                     case 4
944                         ref_stress = mat.res_pos;
945                         ref_strain = mat.eres_pos;
946                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
947                     case 10
948                         ref_stress = mat.com_stress;
949                         ref_strain = mat.com_strain;
950                         mat.tanE   = mat.E_unld;
951                     case 11
952                         if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
953                             ref_stress = mat.s_bp_pos;
954                             ref_strain = mat.eps_bp_pos;
955                         else
956                             ref_stress = 0;
957                             ref_strain = mat.eps_pt10;
958                         end
959                         mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_tar_pos - ref_strain);
960                     case 21
961                         ref_stress = 0;
962                         ref_strain = mat.eps_pt10;
963                         mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.
    eps_bp_pos - ref_strain);
964                 end
965             end
966         end % function NegUnloading
967
968
969         function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )
970
971             % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
972             E_t     = mat.hys_dis_cap;
973             E_step  = enrgy_step;
974             c       = mat.det_rate;
975             E_pre   = mat.enrgy_prvs;
976
977             mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
978             mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^
    c;
979
980             if (mat.Beta > 1)
```

```
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress
];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
1031
1032         function finalPlot(mat, unit, num)
1033             figure(num);
1034             plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2))
     ;
1035             grid on;box on;
1036             title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
1037             xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
1038             ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
1039         end % function finalPlot
1040
1041     end % methods
1042
1043 end % classdef
```

I.4 Part IV: Data-Driven Methods and Parameter Identification

This section covers automated parameter identification and model calibration techniques using MATLAB®optimization and data analysis.

I.4.1 Parameter Identification Program

This appendix lists the complete MATLAB source code described in §64.6for a nonlinear least-squares parameter identification program that couples MATLAB's `lsqnonlin` optimizer with an external finite element solver (ATENA). The program is data-driven: all configuration is read from an Excel spreadsheet (`Log.xlsx`), allowing the optimization problem to be changed without modifying the code. The program executes at each function evaluation by (1) updating model parameters in a temporary input file, (2) launching the external solver, (3) reading and aggregating the solver's predictions, (4) computing residuals, and (5) updating a real-time dashboard. A persistent log records all iterations to the Excel file.

I.4.2 Main Program and Core Orchestration

The orchestration begins at the entry point `Main.m`, which simply adds the functions folder to the path and calls `ParIdentification`(). The main function `ParIdentification.m` reads configuration from the spreadsheet, initializes all data structures, runs a diagnostic dry run at the initial guess x_0, and then launches the `lsqnonlin` optimizer. The nested function `minfunc` is called at every function evaluation and implements the full chain: parameter update, solver launch, output parsing, residual computation, and dashboard update. Local helper functions log evaluation data to a CSV file and manage a small progress window.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
clear;close all;clc
addpath(fullfile(fileparts(mfilename('fullpath')), 'functions'));

ParIdentification();
```

Listing I.1: Main.m – Entry point

```
function ParIdentification()
%PARIDENTIFICATION Main function for parameter identification using lsqnonlin.
%
%   Reads control data from Log.xlsx, initializes the optimization,
%   and runs lsqnonlin with ATENA as the external solver.
%   minfunc is a nested function with direct access to all shared variables.

%--------------------------------
% Read control data from spreadsheet
%--------------------------------
S = readInputSheet('Log.xlsx', 'Input');

%-----------------------------------------------
% Read initial values, lower and upper bounds
%-----------------------------------------------
[x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
S.lb = lb;
S.ub = ub;

%-----------------------------------------------
% Create temp file for optimization
%-----------------------------------------------
inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);

%-----------------------------------------------
% Initialize PI sheet in log file (row-wise)
%-----------------------------------------------
piSheetName = initPISheet('Log.xlsx', S, x0);

%-----------------------------------------------
% Initialize counters and dashboard handles
%-----------------------------------------------
nFnEval      = 0;
nIter        = 0;
X            = x0;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
hDashboard   = [];
hProgress    = [];
isDryRunCall = false;
lastIterTic  = tic;

%-------------------------------------------------
% Keep last successful dry-run results
%-------------------------------------------------
predictedLast = [];
resLast       = [];

%-------------------------------------------------
% Open persistent CSV log for all evaluations
%-------------------------------------------------
logFID = fopen('minfunc_log.csv', 'w');
fprintf(logFID, 'call,%s,residual_norm,status\n',
strjoin(S.modelPar, ','));

%=================================================================
% PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS
%=================================================================
fprintf('\n=== PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS ===\n');
fprintf('x0 : '); fprintf('%10.4f ', x0);   fprintf('\n');
fprintf('lb : '); fprintf('%10.4f ', S.lb); fprintf('\n');
fprintf('ub : '); fprintf('%10.4f ', S.ub); fprintf('\n');

inBounds = all(x0 >= S.lb & x0 <= S.ub);
fprintf('x0 within bounds: %s\n', mat2str(inBounds));
if ~inBounds
    fclose(logFID);
    error('ParIdentification:boundsViolation', ...
          'x0 violates bounds - fix extractEvaluateValues before
continuing.');
end

fprintf('\nCalling minfunc(x0) as dry run...\n');
isDryRunCall = true;
try
    r_test = minfunc(x0);
    fprintf('Residuals : '); fprintf('%12.6f ', r_test);
fprintf('\n');
    fprintf('Any NaN   : %d\n', any(isnan(r_test)));
    fprintf('Any Inf   : %d\n', any(isinf(r_test)));
catch ME
    fprintf('minfunc THREW AN ERROR:\n  %s\n', ME.message);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    fclose(logFID);
    rethrow(ME);
end
isDryRunCall = false;
fprintf('=====================================\n\n');

%-------------------------------------------------------------
% Keep the existing dashboard windows, but clear the dry-run
% history so it does not count as part of the optimization.
% Then replot the dry run as iteration 0 at Fn eval = 0.
%-------------------------------------------------------------
if ~isempty(hDashboard) && isstruct(hDashboard) && ...
   isfield(hDashboard, 'res') && ishghandle(hDashboard.res)

    ud = get(hDashboard.res, 'UserData');
    if isstruct(ud)
        if isfield(ud, 'relErrHist'), ud.relErrHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'absResHist'), ud.absResHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'xHist'),      ud.xHist(:)      = nan; end
        if isfield(ud, 'fEvalVec'),   ud.fEvalVec(:)   = nan; end
        ud.nE = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end
end

% Reset counters so the dry run does not count
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Replot dry run as iteration 0 at function evaluation 0
if ~isempty(predictedLast) && ~isempty(resLast)
    hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x0, predictedLast,
resLast, ...
                             0, false, true);
end

% Reset again so the actual optimization starts clean
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Start timing from the first true iteration of the real run
lastIterTic = tic;

```

```
% Save checkpoint for crash recovery / re-diagnostics
save('debug_checkpoint.mat', 'S', 'x0');
fprintf('Checkpoint saved to debug_checkpoint.mat\n\n');

%=========================================================
% RUN OPTIMIZATION
%=========================================================
[x, resnorm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, @minfunc);

%-----------------------------------------------
% Close log and report results
%-----------------------------------------------
fclose(logFID);

fprintf('\n=== Optimization completed ===\n');
fprintf('Exit flag  : %d\n',   exitflag);
fprintf('Iterations: %d\n',   output.iterations);
fprintf('Func evals: %d\n',   output.funcCount);
fprintf('Norm resid: %.6e\n', resnorm);
fprintf('Identified parameters:\n');
for k = 1:numel(S.modelPar)
    fprintf('  %s = %.6g\n', S.modelPar{k}, x(k));
end

% Timestamped save of final result
resultFile = sprintf('result_%s.mat', datestr(now, 'yyyymmdd_HHMMSS'));
save(resultFile, 'x', 'resnorm', 'res', 'exitflag', 'output', 'S', 'x0');
fprintf('Results saved to %s\n', resultFile);
```

Listing I.2: ParIdentification.m – Main function and nested objective function (part 1 of 2)

```
%=========================================================
% NESTED OBJECTIVE FUNCTION
%=========================================================
    function res = minfunc(x)
    %MINFUNC Objective function called by lsqnonlin at every function evaluation.

        nFnEval = nFnEval + 1;
        nPar    = numel(S.modelPar);

        %----------------------------------------
        % Determine if this is a true optimization iteration.
```

```
        % Important: the diagnostic dry run must NOT be logged
        % as a real iteration.
        %----------------------------------------
        isIteration = ~isDryRunCall && ...
                      ((mod(nFnEval, nPar + 1) == 0) || (nFnEval
== 1));

        %----------------------------------------
        % Update progress window
        %----------------------------------------
        hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval,
nIter, x, S.modelPar);
        fprintf('   Function evaluation #%d\n', nFnEval);

        %----------------------------------------
        % Write current parameters to temp input file
        %----------------------------------------
        updateEvaluateValues(inpFileTemp, S.modelPar, x,
~isDryRunCall);

        %----------------------------------------
        % Run ATENA
        %----------------------------------------
        fprintf('%s  Launching ATENA...\n', datestr(now));
        [status, cmdout] = runAnalysis(S.exeName, inpFileTemp, ...
                                       S.AtenaOut, S.AtenaMsg,
S.AtenaErr);

        if status ~= 0
            warning('ATENA failed at evaluation #%d:\n%s',
nFnEval, cmdout);
            res = ones(size(S.fieldAggValues));
            predictedLast = nan(size(S.fieldAggValues));
            resLast       = res;

            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, NaN, 'ATENA_FAIL');
            end

            return
        end

        %----------------------------------------
        % Preserve a copy of the ATENA output file
        % after each successful true optimization run.
```

```
        % The dry run is deliberately skipped to avoid
        % overwriting out-1.out before the real run starts.
        %----------------------------------------
        if ~isDryRunCall
            [pth, nam, ext] = fileparts(S.outFile);
            outCopy = fullfile(pth, sprintf('%s-%d%s', nam,
nFnEval, ext));

            if isfile(S.outFile)
                [copyOK, copyMsg] = copyfile(S.outFile, outCopy);
                if ~copyOK
                    warning('Could not copy ATENA output file at
evaluation #%d:\n%s', ...
                            nFnEval, copyMsg);
                else
                    fprintf('   Copied ATENA output to %s\n',
outCopy);
                end
            else
                warning('Expected ATENA output file not found at
evaluation #%d:\n%s', ...
                        nFnEval, S.outFile);
            end
        end

        %----------------------------------------
        % Read model predictions
        %----------------------------------------
        ModelPredValues = readModelPredValues(S.outFile,
S.modelPred);

        %----------------------------------------
        % Compute aggregated predictions
        %----------------------------------------
        predicted = cellfun(@(f) f(ModelPredValues),
S.fieldAggFcn);

        %----------------------------------------
        % Compute residuals
        %----------------------------------------
        res      = predicted - S.fieldAggValues;
        norm_res = norm(res);

        predictedLast = predicted;
        resLast       = res;
```

```
244
245         %----------------------------------------
246         % Guard against NaN/Inf from bad ATENA output
247         %----------------------------------------
248         if any(~isfinite(res))
249             warning('NaN/Inf in residuals at eval #%d -
    substituting 1e6', nFnEval);
250             res(~isfinite(res)) = 1e6;
251             norm_res = norm(res);
252             resLast  = res;
253
254             if ~isDryRunCall
255                 logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res,
    'NAN_IN_RES');
256             end
257         else
258             if ~isDryRunCall
259                 logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'OK');
260             end
261         end
262
263         fprintf('   Norm of residual: %.6e\n', norm_res);
264
265         %----------------------------------------
266         % Update progress window with norm
267         %----------------------------------------
268         hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval,
    nIter, x, S.modelPar, norm_res);
269
270         %----------------------------------------
271         % Update dashboard
272         %----------------------------------------
273         hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x,
    predictedLast, resLast, ...
274                                  nFnEval, isIteration,
    isDryRunCall);
275
276         %----------------------------------------
277         % Log true iterations to Excel and save snapshot
278         %----------------------------------------
279         if isIteration
280             nIter = nIter + 1;
281             fprintf('   === Iteration #%d completed, norm = %.6e
    ===\n', nIter, norm_res);
282
```

```
            X = [X; x(:)'];

            iterTime_hr = toc(lastIterTic) / 3600;
            lastIterTic = tic;

            predOverTarget = nan(size(predictedLast));
            mask = isfinite(predictedLast) & ...
                   isfinite(S.fieldAggValues) & ...
                   (S.fieldAggValues ~= 0);

            predOverTarget(mask) = predictedLast(mask) ./
S.fieldAggValues(mask);

            logIterationToSheet('Log.xlsx', piSheetName, nIter,
x, ...
                                predOverTarget, resLast,
iterTime_hr);

            save(sprintf('iter_%03d.mat', nIter), ...
                 'x', 'norm_res', 'res', 'nIter', 'nFnEval', ...
                 'predictedLast', 'predOverTarget',
'iterTime_hr');
        end

    end % minfunc

end % ParIdentification


%==========================================================
% LOCAL HELPER: write one line to the CSV evaluation log
%==========================================================
function logEval(fid, callNum, x, normVal, status)
    if isnan(normVal)
        normStr = 'NaN';
    else
        normStr = sprintf('%.8f', normVal);
    end
    xStr = strjoin(arrayfun(@(v) sprintf('%.6f', v), x(:)',
'UniformOutput', false), ',');
    fprintf(fid, '%d,%s,%s,%s\n', callNum, xStr, normStr, status);
end


%==========================================================
```

```
% LOCAL FUNCTION: progress window
%=========================================================================
function hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x, parNames, normRes)
%UPDATEPROGRESSWINDOW Create or update a small progress window.

    if isempty(hProgress) || ~ishandle(hProgress)
        hProgress = figure('Name',        'Optimization Progress', ...
                           'NumberTitle', 'off', ...
                           'MenuBar',     'none', ...
                           'ToolBar',     'none', ...
                           'Resize',      'off', ...
                           'Position',    [20 20 320 400], ...
                           'Color',       [0.95 0.95 0.95]);

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblFnEval', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 360 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblIter', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 330 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblNorm', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 300 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        nPar = numel(parNames);
        for k = 1:nPar
            yPos = 270 - (k - 1) * 25;
            uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', ...
                'Tag', sprintf('lblPar%d', k), ...
                'Units', 'pixels', ...
                'Position', [10 yPos 300 22], ...
                'FontSize', 9, ...
```

```
                'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
                'HorizontalAlignment', 'left');
        end
    end

    setfield_text(hProgress, 'lblFnEval', sprintf('Function evaluations:  %d', nFnEval));
    setfield_text(hProgress, 'lblIter',   sprintf('Iterations completed:  %d', nIter));

    if nargin >= 6 && ~isempty(normRes)
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', sprintf('Norm of residual:      %.4e', normRes));
    else
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', 'Norm of residual:  ...');
    end

    for k = 1:numel(x)
        setfield_text(hProgress, sprintf('lblPar%d', k), ...
            sprintf('  %s = %.6g', parNames{k}, x(k)));
    end

    drawnow;
end


function setfield_text(hFig, tag, str)
    h = findobj(hFig, 'Tag', tag);
    if ~isempty(h)
        set(h, 'String', str);
    end
end
```

Listing I.3: ParIdentification.m – Nested objective function and local helpers (part 2 of 2)

I.4.3 Data I/O and Spreadsheet Integration

This subsection contains all functions responsible for reading configuration from the Excel control sheet, extracting model parameters and bounds from the ATENA input file, and managing the iteration log. The `readInputSheet` function reads all solver options, parameter names, prediction names, and aggregation expressions from the spreadsheet using a keyword-based search pattern. The `extractEvaluateValues` and `updateEvaluateValues` functions respectively parse and modify EVALUATE lines in

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

the input file. The model prediction output is parsed by `readModelPredValues`, which blocks of data from the ATENA output file and extracts the final monitored value for each requested quantity. Finally, the `initPISheet` and `logIterationToSheet` functions manage the row-wise iteration log in the Excel file, recording iteration number, timestamp, elapsed time, parameter values, prediction-to-target ratios, and residuals.

```
function S = readInputSheet(filename, sheetName)
%READINPUTSHEET Read optimization input data from Excel sheet.
if nargin < 1 || isempty(filename);  filename  = 'Log.xlsx'; end
if nargin < 2 || isempty(sheetName); sheetName = 'Input';    end
    raw = readcell(filename, 'Sheet', sheetName);
    S.exeName        = readScalarByKey(raw, 'exeName');
    S.inpFile        = readScalarByKey(raw, 'inpFile');
    S.outFile        = readScalarByKey(raw, 'outFile');
    S.modelPar       = readTextVectorByKey(raw, 'modelPar');
    S.modelPred      = readTextVectorByKey(raw, 'modelPred');
    S.fieldAggExpr   = readTextVectorByKey(raw, 'fieldAggExp');
    S.fieldAggValues = readNumericVectorByKey(raw,
'fieldAggValues');
    S.fieldAggFcn    = buildFieldAggFunctions(S.fieldAggExpr,
S.modelPred);
    S.maxFunEval     = str2double(readScalarByKey(raw,
'maxFunEval'));
    S.maxIter        = str2double(readScalarByKey(raw,
'maxIter'));
    S.tolFun         = str2double(readScalarByKey(raw, 'tolFun'));
    S.tolX = str2double(readScalarByKey(raw, 'StepTol'));
    S.algorithm      = readScalarByKey(raw, 'algorithm');
    S.display        = readScalarByKey(raw, 'display');
    S.fdStepSize     = str2double(readScalarByKey(raw,
'FiniteDifferenceStepSize'));
    S.fdType         = readScalarByKey(raw,
'FiniteDifferenceType');

    S.AtenaOut=[S.inpFile '.out'];
    S.AtenaErr=[S.inpFile '.err'];
    S.AtenaMsg=[S.inpFile '.msg'];
    S.inpFile=[S.inpFile '.inp'];
end
```

Listing I.4: readInputSheet.m – Read all configuration from Excel

```
function [x, lb, ub] = extractEvaluateValues(filename, names)
%EXTRACTEVALUATEVALUES Extract EVALUATE values and bounds from
input file.
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   Reads each EVALUATE line of the form:
%       EVALUATE "Name = /*# Name */ value"   // Recommended range lb - ub
%   and returns the current values, lower bounds, and upper bounds for the
%   requested parameter names. Bounds are set to NaN if not present on the line.
%
%   Inputs:
%       filename - path to the input file (e.g. S.inpFile)
%       names    - cell array of parameter names (e.g. S.modelPar)
%
%   Outputs:
%       x  - current parameter values  [1 x n]
%       lb - lower bounds              [1 x n]
%       ub - upper bounds              [1 x n]
%
%   Example:
%       [x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
    if ischar(names) || isstring(names); names = cellstr(names); end
    txt   = fileread(filename);
    lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');
    lookupX  = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupLB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupUB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    numPat = '([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][+-]?\d+)?)';
    for i = 1:numel(lines)
        line = strtrim(lines{i});
        if ~strncmpi(line, 'EVALUATE', 8); continue; end
        tok = regexp(line, ...
['EVALUATE\s+"([A-Za-z0-9_]+)\s*=\s*/\*#\s*[A-Za-z0-9_]+\s*\*/\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if isempty(tok); continue; end
        varName = strtrim(tok{1});
        varVal  = str2double(tok{2});
        lookupX(varName) = varVal;
        tokBounds = regexp(line, ...
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            ['Recommended\s+range\s+' numPat '\s*-\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if ~isempty(tokBounds)
            lookupLB(varName) = str2double(tokBounds{1});
            lookupUB(varName) = str2double(tokBounds{2});
        else
            lookupLB(varName) = NaN;
            lookupUB(varName) = NaN;
        end
    end
    x  = NaN(1, numel(names));
    lb = NaN(1, numel(names));
    ub = NaN(1, numel(names));
    for i = 1:numel(names)
        key = char(names{i});
        if isKey(lookupX,  key); x(i)  = lookupX(key);  end
        if isKey(lookupLB, key); lb(i) = lookupLB(key); end
        if isKey(lookupUB, key); ub(i) = lookupUB(key); end
    end
end
```

Listing I.5: extractEvaluateValues.m – Parse EVALUATE lines from input file

```
function inpFileTemp = createTempInputFile(inpFile)
%CREATETEMPINPUTFILE Create a temporary copy of the input file for optimization.
%
%   Creates a working copy of the input file that will be continuously
%   overwritten during the optimization iterations, leaving the original
%   input file untouched.
%
%   Input:
%       inpFile     - path to the original input file (e.g. S.inpFile)
%
%   Output:
%       inpFileTemp - path to the temporary copy (e.g. 'input_temp.dat')
%
%   Example:
%       inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);
    [folder, name, ext] = fileparts(inpFile);
    inpFileTemp = fullfile(folder, [name '_temp' ext]);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    [ok, msg]   = copyfile(inpFile, inpFileTemp);
    if ~ok; error('Could not copy %s to %s: %s', inpFile,
inpFileTemp, msg); end
end
```

Listing I.6: createTempInputFile.m – Create working copy of input file

```
function updateEvaluateValues(filename, names, Xnew, verbose)
    if nargin < 4
        verbose = true;
    end
%UPDATEEVALUATEVALUES Overwrite EVALUATE values in input file
with new values.
%
%   Reopens the input file and replaces the numeric values
associated with
%   each parameter name in 'names' with the corresponding new
values in
%   Xnew. The file format expected is:
%       EVALUATE "ParName = /*# ParName */ oldvalue"

    if numel(names) ~= numel(Xnew)
        error('names and Xnew must have the same number of
elements.');
    end

    txt = fileread(filename);

    for k = 1:numel(names)
        name     = char(names{k});
        valueStr = num2str(Xnew(k), '%.15g');

        pattern = ['(EVALUATE\s+"', regexptranslate('escape',
name), ...
                   '\s*=\s*/\*#\s*', regexptranslate('escape',
name), ...
'\s*\*/\s*)([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][-+]?\d+)?)(\")'];

        % Check whether the parameter line is found
        tok = regexp(txt, pattern, 'tokens', 'once');

        if isempty(tok)
            warning('Parameter %s not found in file %s.', name,
filename);
            continue
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        end

        oldValueStr = tok{2};

        repl   = ['$1' valueStr '$3'];
        txtNew = regexprep(txt, pattern, repl, 'once');

        if strcmp(strtrim(oldValueStr), strtrim(valueStr))
            if verbose
                fprintf('Parameter %s matched; value unchanged
(%s)\n', name, valueStr);
            end
        else
            if verbose
                fprintf('Parameter %s updated: %s -> %s\n', name,
oldValueStr, valueStr);
            end
        end

        txt = txtNew;
    end

    fid = fopen(filename, 'w');
    if fid == -1
        error('Could not open %s for writing.', filename);
    end
    cleaner = onCleanup(@() fclose(fid));
    fwrite(fid, txt, 'char');
end
```

Listing I.7: updateEvaluateValues.m – Overwrite parameters in input file

```
function ModelPredValues = readModelPredValues(outFile, modelPred)
%READMODELPREDVALUES  Read the last monitored value for each
modelPred string
%                     from an ATENA output file (monitors.csv /
output.dat).
%
%  Each block in the file has the structure:
%
%    Output data for request ;
MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000 ;
%    Data for the monitored output: ...
%    ; Step ; 5 ; Iteration ; 60 ; at Time ; 5 ;
%    ----...---- ;
%    Id ;  Time ;  Step ;  X(1) ;            <- header  (skipped)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%    Units ;  day ;  None ;  m ;              <- units   (skipped)
%    1 ;  0. ;  0. ;  0. ;                    <- data rows
%    ...
%    6 ;  5. ;  5. ;  0.0013112 ;            <- LAST data row -> value kept
%
%  The value of interest is the LAST numeric token on the LAST data row
%  (i.e. the last non-empty field before the trailing ";").  This handles
%  blocks with 1 output column (X(1) only) as well as blocks with 3 columns
%  (X(1), X(2), X(3)), where the relevant displacement has been pre-selected
%  by the monitor definition.
%
%  Matching is case-insensitive: modelPred = 'SAB_86m_X' matches
%  'MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000'.
%
%  INPUT
%    outFile   - path to the ATENA output file
%    modelPred - char, string, or cell array of strings to look up
%
%  OUTPUT
%    ModelPredValues - 1 x numel(modelPred) double (NaN if not found)

% --- normalise modelPred to a cell array of char ------------------------
if ischar(modelPred) || isstring(modelPred)
    modelPred = cellstr(modelPred);
end
nPred = numel(modelPred);

% --- read file ----------------------------------------------------------
txt   = fileread(outFile);
lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');

% --- initialise state machine -------------------------------------------
lookup     = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
currentKey = '';   % modelPred entry currently being accumulated
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
lastVal    = NaN;  % last valid numeric value seen in current block

% --- pattern for the block-header line ----------------------------------
headerPat = 'Output\s+data\s+for\s+request\s*;\s*([^;]+)\s*;';

for i = 1:numel(lines)
    line = strtrim(lines{i});

    % ---- detect a new block header ---------------------------------------
    tok = regexp(line, headerPat, 'tokens', 'once');
    if ~isempty(tok)
        % save whatever we accumulated for the previous block
        if ~isempty(currentKey)
            lookup(currentKey) = lastVal;
        end

        requestName = upper(strtrim(tok{1}));
        currentKey  = '';
        lastVal     = NaN;

        % find which modelPred (if any) this block belongs to
        for j = 1:nPred
            candidate = char(modelPred{j});
            if contains(requestName, upper(candidate))
                currentKey = candidate;   % keep original spelling as key
                break
            end
        end
        continue
    end

    % ---- only process data lines when inside a matching block -------
    if isempty(currentKey)
        continue
    end

    % skip separator, header, and units lines
    if isempty(line) ...
            || startsWith(line, '-') ...
            || startsWith(line, 'Id') ...
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
            || startsWith(line, 'Units') ...
            || startsWith(line, 'Data') ...
            || startsWith(line, ';')          % summary line "  ; Step ; 5 ..."
        continue
    end

    % ---- parse a data row ------------------------------------------------
    % Data rows look like:  "    6 ;         5. ;         5. ;  0.0013112 ;"
    % Split on ";", strip whitespace, drop empty tokens.
    cols = strsplit(line, ';');
    cols = strtrim(cols);
    cols = cols(~cellfun(@isempty, cols));   % remove trailing empty field

    % A valid data row must start with an integer Id (first field is a
    % non-negative integer or a number with a trailing dot like "6.").
    if isempty(cols)
        continue
    end
    firstNum = str2double(cols{1});
    if isnan(firstNum) || firstNum < 0 || firstNum ~= floor(firstNum)
        % not a numeric data row (e.g. a stray text line)
        % allow "6." style (floor(6.) == 6)
        if ~(~isnan(firstNum) && firstNum == floor(firstNum))
            continue
        end
    end

    % The value of interest is the LAST numeric token in the row.
    % (For a 3-component block the monitor definition selects one direction,
    %  which happens to be the last populated column.)
    v = NaN;
    for k = numel(cols):-1:1
        candidate_v = str2double(cols{k});
        if ~isnan(candidate_v)
            v = candidate_v;
            break
        end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    end
    if ~isnan(v)
        lastVal = v;   % keep updating; loop ends on the last row
    end
end

% --- save the final block
-----------------------------------------------
if ~isempty(currentKey)
    lookup(currentKey) = lastVal;
end

% --- assemble output vector
-----------------------------------------------
ModelPredValues = NaN(1, nPred);
for i = 1:nPred
    key = char(modelPred{i});
    if isKey(lookup, key)
        ModelPredValues(i) = lookup(key);
    end
end

end
```

Listing I.8: readModelPredValues.m – Extract monitored outputs from ATENA output

```
function piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%INITPISHEET Create a new PI #n sheet in row-wise format.
%
%   piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%
%   Creates the next available sheet named PI #1, PI #2, ...
%   and writes:
%     - row 1: headers
%     - row 2: iteration 0 (initial guess x0)
%
%   Columns are:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
<Pred/Target...> | <Residual...>


%-------------------------------------------------------------
    % Determine next available PI sheet name

%-------------------------------------------------------------
    [~, sheetNames] = xlsfinfo(logFile);
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    if isempty(sheetNames)
        sheetNames = {};
    end

    n = 1;
    while any(strcmp(sheetNames, sprintf('PI #%d', n)))
        n = n + 1;
    end
    piSheetName = sprintf('PI #%d', n);

    nPar = numel(S.modelPar);
    nAgg = numel(S.fieldAggExpr);


    %-------------------------------------------------------------
    % Build header row
    %-------------------------------------------------------------
    headers = cell(1, 3 + nPar + nAgg + nAgg);
    c = 1;

    headers{c} = 'Iter';          c = c + 1;
    headers{c} = 'Timestamp';     c = c + 1;
    headers{c} = 'IterTime_hr';   c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        headers{c} = S.modelPar{k};
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:nAgg
        headers{c} = sprintf('PredTarget_%02d', k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:nAgg
        headers{c} = sprintf('Residual_%02d', k);
        c = c + 1;
    end


    %-------------------------------------------------------------
    % Build iteration-0 row
    %-------------------------------------------------------------
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    row0 = cell(1, numel(headers));
    c = 1;

    row0{c} = 0;                                          c = c + 1;
    row0{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS'); c = c + 1;
    row0{c} = 0;                                          c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        row0{c} = x0(k);
        c = c + 1;
    end

    % Leave blank for Pred/Target and Residual columns
    for k = 1:(2*nAgg)
        row0{c} = [];
        c = c + 1;
    end


%-------------------------------------------------------------
    % Write to Excel

%-------------------------------------------------------------
    warning('off', 'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
    xlswrite(logFile, headers, piSheetName, 'A1');
    xlswrite(logFile, row0,    piSheetName, 'A2');
    warning('on',  'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
end
```

Listing I.9: initPISheet.m – Create new PI log sheet with headers

```
function logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x,
predOverTarget, res, iterTime_hr)
%LOGITERATIONTOSHEET Append one iteration as one row to the PI
sheet.
%
%   logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x,
predOverTarget, res, iterTime_hr)
%
%   Appends a new row with:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
<Pred/Target...> | <Residual...>

    if nargin < 7
        error('logIterationToSheet requires 7 inputs.');
    end
```

```
12
13      x = x(:).';
14      predOverTarget = predOverTarget(:).';
15      res = res(:).';
16
17      [~, ~, raw] = xlsread(logFile, sheetName);
18
19      if isempty(raw)
20          nextRow = 1;
21      else
22          nextRow = size(raw, 1) + 1;
23      end
24
25      row = cell(1, 3 + numel(x) + numel(predOverTarget) +
    numel(res));
26      c = 1;
27
28      row{c} = nIter;                                    c = c + 1;
29      row{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS');     c = c + 1;
30      row{c} = iterTime_hr;                              c = c + 1;
31
32      for k = 1:numel(x)
33          row{c} = x(k);
34          c = c + 1;
35      end
36
37      for k = 1:numel(predOverTarget)
38          if isfinite(predOverTarget(k))
39              row{c} = predOverTarget(k);
40          elseif isnan(predOverTarget(k))
41              row{c} = 'NaN';
42          else
43              row{c} = 'Inf';
44          end
45          c = c + 1;
46      end
47
48      for k = 1:numel(res)
49          if isfinite(res(k))
50              row{c} = res(k);
51          elseif isnan(res(k))
52              row{c} = 'NaN';
53          else
54              row{c} = 'Inf';
55          end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        c = c + 1;
    end

    range = sprintf('A%d', nextRow);
    xlswrite(logFile, row, sheetName, range);
end
```

Listing I.10: logIterationToSheet.m – Append iteration row to PI log

I.4.4 Optimization Workflow and Auxiliary Functions

This subsection contains the remaining public functions that implement the optimization loop and real-time dashboard, along with all private helper functions. The `runAnalysis` function launches the external ATENA solver as a background process and captures its console output. The `runLSQnonlin` function wraps MATLAB's native `lsqnonlin` optimizer, applying the solver options read from the control sheet and computing adaptive tolerances based on the parameter bounds. The `updatePlots` function maintains two live dashboard figures: one showing residuals (predicted vs. target and absolute residual on a log scale) and the other tracking parameter evolution across all function evaluations, with distinction between probe evaluations and true iterations. The private helpers in the `functions/private/` folder provide low-level utilities for reading configuration data from the spreadsheet, building aggregation functions from user-defined expressions, and normalizing text during lookups.

```
function [status, cmdout] = runAnalysis(exeName, inpFile,
outFile, msgFile, errFile)
    % Kill any lingering ATENA processes before starting
    [~, exeOnly, ext] = fileparts(exeName);
    system(sprintf('taskkill /F /IM "%s%s" /T 2>nul', exeOnly,
ext));
    pause(3); % give OS time to release file locks

    cmd = sprintf('"%s" /O "%s" "%s" "%s" "%s"
/num_unused_threads=2', ...
        exeName, inpFile, outFile, msgFile, errFile);
    [status, cmdout] = system(cmd, '-echo');
end
```

Listing I.11: runAnalysis.m – Launch external ATENA solver

```
function [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0,
minfunc)
%RUNLSQNONLIN Set up and run lsqnonlin using solver options from
Log.xlsx.
%
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   Tunable options (read from Excel):  Display, MaxFunEvals,
MaxIter,
%                                       TolFun, TolX
(dimensionless,
%                                       scaled internally by
mean(lb+ub)/2),
%                                       Algorithm,
FiniteDifferenceStepSize,
%                                       FiniteDifferenceType
%   Hardwired options:                  TypicalX=mean(lb,ub)
%
%   Example:
%       [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0,
lb, ub, @minfunc);
    lb       = S.lb;
    ub       = S.ub;
    typicalX = (ub - lb) ./ 2;
    TolX     = S.tolX .* mean(typicalX);

    options = optimoptions('lsqnonlin', ...
        'Algorithm',                S.algorithm, ...
        'Display',                  S.display, ...
        'MaxFunctionEvaluations',   S.maxFunEval, ...
        'MaxIterations',            S.maxIter, ...
        'FunctionTolerance',        S.tolFun, ...
        'StepTolerance',            TolX, ...
        'FiniteDifferenceStepSize', S.fdStepSize, ...
        'FiniteDifferenceType',     S.fdType, ...
        'TypicalX',                 typicalX)

    [x, norm, res, exitflag, output] = lsqnonlin(minfunc, x0, lb,
ub, options);
end
```

Listing I.12: runLSQnonlin.m – Configure and run optimizer

```
function hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, xCur,
predicted, res, nFnEval, isIteration, isIterZero)
%UPDATEPLOTS  Real-time dashboard, two separate figures.
%
%  Figure 1 "Residuals"  -- 2 rows x nAgg cols
%    Row 1 : predicted / target  (reference line at 1)
%    Row 2 : |residual| on log scale
%
%  Figure 2 "Parameters" -- 2 rows x ceil(nPar/2) cols
%    Row 1 : first  half of modelPar
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%    Row 2 : second half of modelPar
%    Both  : grey probe dots (every fnEval), filled blue at true iterations,
%            dashed red lb / green ub lines.
%
%  X-axis everywhere: function-evaluation number.
%  True iterations fall at eval numbers nPar+1, 2*(nPar+1), ...
%
%  hDashboard is a struct with fields .res and .par; pass [] on first call.

    if nargin < 9
        isIterZero = false;
    end

    nAgg   = numel(S.fieldAggExpr);
    nPar   = numel(S.modelPar);
    nHalf  = ceil(nPar / 2);
    nHalf2 = nPar - nHalf;

    %-------------------------------------------------------------------
    % Build compact aggregate labels for titles
    %-------------------------------------------------------------------
    aggLabels = S.fieldAggExpr;
    for k = 1:nAgg
        lbl = aggLabels{k};
        lbl = regexprep(lbl, '^S([A-Z]{2}_)', '$1');
        aggLabels{k} = lbl;
    end

    %-------------------------------------------------------------------
    % Create figures on first call
    %-------------------------------------------------------------------
    needCreate = isempty(hDashboard) || ~isstruct(hDashboard) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'res') || ~ishandle(hDashboard.res) || ...
                 ~isfield(hDashboard,'par') || ~ishandle(hDashboard.par);

    if ~needCreate
```

```
        ud_check = get(hDashboard.res, 'UserData');
        if ~isstruct(ud_check) || ~isfield(ud_check,
'relErrHist') || ...
           ~isfield(ud_check, 'xHist') || ...
           size(ud_check.relErrHist, 2) ~= nAgg || ...
           size(ud_check.xHist, 2) ~= nPar
            try, close(hDashboard.res); end %#ok<TRYNC>
            try, close(hDashboard.par); end %#ok<TRYNC>
            needCreate = true;
        end
    end

    if needCreate
        scr = get(0, 'ScreenSize');

        % Figure 1: residuals -- upper half of screen
        fw1 = min(scr(3) * 0.98, nAgg * 220 + 120);
        fh1 = min(scr(4) * 0.48, 520);
        hDashboard.res = figure( ...
            'Name',        'Optimization -- Residuals', ...
            'NumberTitle', 'off', ...
            'Position',    [4, scr(4)*0.48, fw1, fh1]);

        % Figure 2: parameters -- lower half of screen
        parCols = max(nHalf, nHalf2);
        fw2 = min(scr(3) * 0.60, parCols * 230 + 100);
        fh2 = min(scr(4) * 0.44, 460);
        hDashboard.par = figure( ...
            'Name',        'Optimization -- Parameters', ...
            'NumberTitle', 'off', ...
            'Position',    [4, 30, fw2, fh2]);

        % History stored in Figure 1 UserData
        MAXEVAL = 10000;
        ud.relErrHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
        ud.absResHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
        ud.xHist      = nan(MAXEVAL, nPar);
        ud.fEvalVec   = nan(1, MAXEVAL);
        ud.nE         = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end

    %
------------------------------------------------------------------
    % Append current evaluation to history
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    %
    ud    = get(hDashboard.res, 'UserData');
    nE    = ud.nE + 1;
    ud.nE = nE;

    if nE > size(ud.relErrHist, 1)
        growBy = 10000;
        ud.relErrHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.absResHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.xHist(end+growBy, nPar)      = nan;
        ud.fEvalVec(end+growBy)         = nan;
    end

    ud.fEvalVec(nE) = nFnEval;
    ud.xHist(nE, :) = xCur(:)';

    for k = 1:nAgg
        if S.fieldAggValues(k) == 0
            ud.relErrHist(nE, k) = nan;
        else
            ud.relErrHist(nE, k) = predicted(k) /
S.fieldAggValues(k);
        end
        ud.absResHist(nE, k) = abs(res(k));
    end
    set(hDashboard.res, 'UserData', ud);

    ev = ud.fEvalVec(1:nE);

    % True-iteration eval numbers
    nIterSoFar  = size(X, 1);
    iterEvalNos = (nPar + 1) * (1:nIterSoFar);
    iterEvalNos(iterEvalNos > nFnEval) = [];
    nIterPlot   = numel(iterEvalNos);

    % Keep eval 0 visible when present
    xMin = min([0 ev]);
    xMax = max([5 nFnEval + ceil(0.05 * max(nFnEval,1) + 1)]);
    xlimVec = [xMin, xMax];

    %
    % Global y-limits for residual row on log scale
```

```
    %
    absRaw   = ud.absResHist(1:nE, :);
    absClean = absRaw(~isnan(absRaw) & isfinite(absRaw) & absRaw > 0);

    if isempty(absClean)
        absMin = 1e-12;
        absMax = 1;
    else
        absMin = min(absClean);
        absMax = max(absClean);

        if absMin <= 0 || ~isfinite(absMin)
            absMin = 1e-12;
        end
        if absMax <= absMin || ~isfinite(absMax)
            absMax = 10 * absMin;
        end

        absMin = 10^(floor(log10(absMin)));
        absMax = 10^(ceil(log10(absMax)));
    end
```

Listing I.13: updatePlots.m – Real-time dashboard figures (part 1 of 4)

```
    %
    % FIGURE 1 -- Residuals
    %
    figure(hDashboard.res);

    for k = 1:nAgg

        % ---- Row 1: relative error ----
        ax = subplot(2, nAgg, k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.30 0.30 0.30], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);
```

```
        yline(ax, 1, '--r', 'LineWidth', 1.4);

        if isIterZero && nE > 0
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 36, 'r', 'filled');
        end

        title(ax, makeTwoLineTitle(aggLabels{k}), ...
              'Interpreter', 'none', ...
              'FontSize', 8, 'FontWeight', 'normal');

        if k == 1
            ylabel(ax, 'Pred / Target');
        end

        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);

        ydata = ud.relErrHist(1:nE, k);
        ydata = ydata(~isnan(ydata) & isfinite(ydata));
        if isempty(ydata)
            ylim(ax, [0, 2]);
        elseif all(ydata >= 0) && all(ydata <= 2)
            ylim(ax, [0, 2]);
        else
            yMin = min(ydata);
            yMax = max(ydata);
            if yMin == yMax
                pad = max(0.1 * max(abs(yMax),1), 0.1);
            else
                pad = 0.10 * (yMax - yMin);
            end
            ylim(ax, [yMin - pad, yMax + pad]);
        end

        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');

        % ---- Row 2: absolute residual on log scale ----
        ax = subplot(2, nAgg, nAgg + k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        absPlot = ud.absResHist(1:nE, k);
        absPlot(~isfinite(absPlot)) = nan;
        absPlot(absPlot <= 0) = 1e-12;

        plot(ax, ev, absPlot, '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, absPlot, 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.15 0.15 0.15], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

        if isIterZero && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 36, 'r', 'filled');
        end

        if k == 1
            ylabel(ax, '|Residual|');
        end
        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);
        set(ax, 'YScale', 'log');
        ylim(ax, [absMin, absMax]);
        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');
    end
```

Listing I.14: updatePlots.m – Residuals figure (part 2 of 4)

```
    %% ========================================================
    % FIGURE 2 -- Parameters
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    %
==========================================================================
    figure(hDashboard.par);

    parCols = max(nHalf, nHalf2);

    for row = 1:2
        if row == 1
            idxList = 1:nHalf;
        else
            idxList = nHalf + (1:nHalf2);
        end

        for col = 1:numel(idxList)
            k  = idxList(col);
            ax = subplot(2, parCols, (row - 1) * parCols + col);
            cla(ax); hold(ax, 'on');
            grid(ax, 'on');
            set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

            % All probes -- grey line + open circles
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), '-', ...
                 'Color', [0.78 0.78 0.78], 'LineWidth', 0.7);
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 4, 'Color', [0.50 0.50 0.50], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

            % True iterations -- filled blue
            if nIterPlot > 0
                scatter(ax, iterEvalNos(1:nIterPlot),
X(1:nIterPlot, k)', ...
                        50, [0.12 0.47 0.71], 'filled', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'none');
            end

            % Iteration 0 -- filled black square
            if isIterZero && nE > 0
                scatter(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 48, 's', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'k',
'MarkerFaceColor', 'k');
            end

            % Current probe -- bold open black circle
            plot(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 7, 'Color', [0 0 0], ...
```

```
                'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 1.3);

            % Bounds
            yline(ax, S.lb(k), '--r', 'LineWidth', 1.1, ...
                'Label', 'lb', 'LabelHorizontalAlignment',
'left', ...
                'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');
            yline(ax, S.ub(k), '--', 'Color', [0.13 0.55 0.13],
...
                'LineWidth', 1.1, ...
                'Label', 'ub', 'LabelHorizontalAlignment',
'left', ...
                'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');

            title(ax, S.modelPar{k}, 'Interpreter', 'none', ...
                'FontSize', 9, 'FontWeight', 'bold');
            xlabel(ax, 'Fn eval');
            if col == 1
                ylabel(ax, 'Value');
            end
            xlim(ax, xlimVec);
            applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);

            span = S.ub(k) - S.lb(k);
            if span <= 0
                span = max(abs(S.ub(k)), 1);
            end
            margin = 0.12 * span;
            ylim(ax, [S.lb(k) - margin, S.ub(k) + margin]);

            hold(ax, 'off');
        end
    end

    drawnow limitrate;
end
```

Listing I.15: updatePlots.m – Parameters figure (part 3 of 4)

```
%
==========================================================================
function out = makeTwoLineTitle(in)
% Try to insert one sensible line break for long aggregate
expressions.

    out = strtrim(in);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    if numel(out) <= 16
        return
    end

    % Prefer to break after the last '+' before midpoint
    mid = floor(numel(out) / 2);
    idx = find(out(1:mid) == '+', 1, 'last');

    % If none, break after the first '+' after midpoint
    if isempty(idx)
        idx2 = find(out(mid+1:end) == '+', 1, 'first');
        if ~isempty(idx2)
            idx = mid + idx2;
        end
    end

    % If still none, try '/'
    if isempty(idx)
        idx = find(out(1:mid) == '/', 1, 'last');
        if isempty(idx)
            idx2 = find(out(mid+1:end) == '/', 1, 'first');
            if ~isempty(idx2)
                idx = mid + idx2;
            end
        end
    end

    % If still none, try a blank near midpoint
    if isempty(idx)
        leftBlank  = find(out(1:mid) == ' ', 1, 'last');
        rightBlank = find(out(mid+1:end) == ' ', 1, 'first');
        if ~isempty(leftBlank)
            idx = leftBlank;
        elseif ~isempty(rightBlank)
            idx = mid + rightBlank;
        end
    end

    if isempty(idx)
        return
    end

    if idx < numel(out)
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        out = [strtrim(out(1:idx)) sprintf('\n') strtrim(out(idx+1:end))];
    end
end

%% ========================================================================
function applyIntegerXTicks(ax, xlimVec)
% Use integer ticks when the range is small, otherwise use a reasonable set.

    x0 = floor(xlimVec(1));
    x1 = ceil(xlimVec(2));
    span = x1 - x0;

    if span <= 10
        xticks(ax, x0:x1);
    elseif span <= 20
        xticks(ax, x0:2:x1);
    else
        step = max(5, ceil(span / 6));
        xticks(ax, x0:step:x1);
    end
end
```

Listing I.16: updatePlots.m – Local helper functions (part 4 of 4)

```
function fcns = buildFieldAggFunctions(exprs, predNames)
    fcns = cell(size(exprs));
    for i = 1:numel(exprs)
        expr = exprs{i};
        [~,idx] = sort(cellfun(@length, predNames), 'descend');
        predNamesSorted = predNames(idx);
        for k = 1:numel(predNamesSorted)
            name = predNamesSorted{k};
            j    = find(strcmp(predNames, name), 1, 'first');
            pattern = ['(?<![A-Za-z0-9_])' regexptranslate('escape', name) '(?![A-Za-z0-9_])'];
            expr = regexprep(expr, pattern, sprintf('x(%d)', j));
        end
        fcns{i} = str2func(sprintf('@(x) (%s)', expr));
    end
end
```

Listing I.17: Private helpers – buildFieldAggFunctions.m

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
function [r,c] = findKey(raw, key)
    r   = [];
    c   = [];
    key = normalizeText(key);
    for i = 1:size(raw,1)
        x = raw{i,2};
        if isMissingLike(x); continue; end
        if strcmpi(normalizeText(x), key); r = i; c = 2; return; end
    end
end

function tf = isMissingLike(x)
    tf = false;
    if isempty(x);                                  tf = true; return; end
    if iscell(x);                                   tf = true; return; end
    if isnumeric(x) && isscalar(x) && isnan(x); tf = true; return; end
    if ischar(x) && isempty(strtrim(x));            tf = true; return; end
    try; if any(ismissing(x)); tf = true; return; end; catch; end
end

function s = normalizeText(x)
    s = toText(x);
    s = strrep(s, char(160), ' ');
    s = strtrim(s);
end
```

Listing I.18: Private helpers – findKey.m, isMissingLike.m, normalizeText.m

```
function val = readScalarByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    val = '';
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); val = toText(x); return; end
    end
end

function vals = readTextVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = {};
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); vals{end+1} = toText(x); end
%#ok<AGROW>
    end
end

function vals = readNumericVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = [];
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x)
            if isnumeric(x); vals(end+1) = x; %#ok<AGROW>
            else;            vals(end+1) = str2double(toText(x));
end %#ok<AGROW>
        end
    end
end
```

Listing I.19: Private helpers – read*ByKey functions

```
function s = toText(x)
    if isempty(x); s = ''; return; end
    try; if any(ismissing(x)); s = ''; return; end; catch; end
    if isstring(x);      s = char(x);
    elseif ischar(x);    s = x;
    elseif isnumeric(x); s = num2str(x);
    else;                s = char(x);
    end
    s = strtrim(s);
end

function letter = xlsColLetter(n)
%XLSCOLLETTER Convert column number to Excel column letter (1=A,
2=B, ...).
    letter = '';
    while n > 0
        rem    = mod(n-1, 26);
        letter = [char(65+rem) letter];
        n      = floor((n-1) / 26);
    end
end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Listing I.20: Private helpers – toText.m, xlsColLetter.m

I.5 Part V: Numerical and Statistical Foundations

This section covers foundational numerical techniques and statistical sampling methods for chap:trustregion quantification and robust model estimation.

I.5.1 Levenberg-Marquardt

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت ءارقلا بلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلُوُ

This script supports the numerical example in 64.6. It reproduces the iteration table. It uses the same residual convention, scaling matrix, and damping rule as the derivation above.

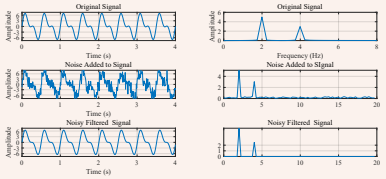
```
x = (0:4)';
y = 6 ./ (2 + x);

theta  = [4; 1];
lambda = 1.0e-2;

phi = @(th) 0.5 * sum((th(1) ./ (th(2) + x) - y).^2);
fprintf('%2d  %11s  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
        0, '--', theta(1), theta(2), phi(theta));

accepted = 0;
while accepted < 5
    a = theta(1);
    b = theta(2);

    g = a ./ (b + x);
    r = g - y;
    J = [1 ./ (b + x), -a ./ (b + x).^2];

    A = J' * J;
    D = diag(diag(A));
    delta = (A + lambda * D) \ (-J' * r);

    trial = theta + delta;
    phiCurrent = 0.5 * (r' * r);
    phiTrial   = phi(trial);

    if phiTrial < phiCurrent
        theta = trial;
        accepted = accepted + 1;
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        fprintf('%2d   %11.1e   %12.6f   %12.6f   %14.6e\n', ...
                accepted, lambda, theta(1), theta(2), phiTrial);
        lambda = lambda / 10;
    else
        lambda = lambda * 10;
    end
end
```

I.5.2 Numerical techniques

I.5.3 FFT and butterworth filters




```
%
% ========================================================================

% NUMERICAL TECHNIQUES -- FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)
%
% ========================================================================

% Demonstrates the DFT/FFT for signal analysis and noise filtering.
%
% THEORY:
%   The Discrete Fourier Transform decomposes a time-domain signal into
%   its constituent frequency components.  For a signal sampled at rate
%   fs = 1/dt over N samples, the DFT output Y = fft(y) gives:
%     Y(k)      : complex amplitude at frequency k/(N*dt)  [Hz]
%     |Y(k)|/N  : one-sided amplitude spectrum (for k = 0..N/2)
%   The second half of Y (k > N/2) are complex conjugates of the first.
%
% FILTERING APPROACH (hard threshold):
%   Fourier coefficients with |Y(k)| < threshold are zeroed out.
%   fix(Y/500)*500 rounds each coefficient down to the nearest multiple
%   of 500, effectively zeroing those with |Y| < 500.
%   This removes broadband noise while preserving dominant frequency
peaks.
%   The threshold (500) is chosen empirically -- examine the amplitude
%   spectrum to select an appropriate value for a given signal.
%
% SIGNAL:  y(t) = 3*sin(4*2pi*t) + 5*sin(2*2pi*t)
%   Two sinusoids: 4 Hz (amplitude 3) and 2 Hz (amplitude 5).
%   Both peaks should be clearly visible in the amplitude spectrum.
%
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
=====================================================================

clear; close all; clc;

GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Verify FFT round-trip on a random signal
% ---------------------------------------------------------------------
x_rand  = rand(1, 10);
Y_rand  = fft(x_rand);
x_recov = real(ifft(Y_rand));   % imaginary part is ~machine epsilon
fprintf('FFT round-trip error (should be ~0): %.2e\n', norm(x_rand - x_recov));

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Construct the test signal
% ---------------------------------------------------------------------
dt = 1/100;          % sampling interval [s]  (sampling rate = 100 Hz)
et = 4;              % signal duration   [s]
t  = 0 : dt : et;   % time vector
N  = length(t);

y = 3*sin(4*2*pi*t) + 5*sin(2*2*pi*t);   % two-frequency signal

% ---------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- FFT of the clean signal
% ---------------------------------------------------------------------
Y        = fft(y);
n_half   = floor(N/2);
amp_spec = abs(Y) / n_half;

freq = (0:79) / (2 * n_half * dt);   % frequency axis for first 80 bins [Hz]

%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Add noise and compute spectrum
%
% ------------------------------------------------------------------------

noise = randn(1, N);
ey    = y + 2*noise;       % corrupted signal (noise amplitude = 2)
eY    = fft(ey);
e_amp = abs(eY) / n_half;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 5 -- Filter: zero Fourier coefficients below threshold
%
% ------------------------------------------------------------------------

threshold = 500;
fY        = fix(eY / threshold) * threshold;   % zero small coefficients
cy        = real(ifft(fY));                     % filtered time-domain
signal
cY        = fft(cy);
c_amp     = abs(cY) / n_half;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 6 -- Plot: 3 rows x 2 columns (time | frequency domain)
%
% ------------------------------------------------------------------------

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

subplot(3,2,1);
plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,2);
plot(freq, amp_spec(1:80), 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Clean signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,3);
plot(t, ey, 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,4);
plot(freq, e_amp(1:80), 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Noisy signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,5);
plot(t, cy, 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,6);
plot(freq, c_amp(1:80), 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print('fft-example.eps', '-depsc');
eps2pdf('fft-example.eps', GS, 0);
```

I.5.4 Singular value decomposition

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص ميقت ءارقلا نلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلُوُ

```
%
% ========================================================================

% NUMERICAL TECHNIQUES -- SVD FOR ILL-CONDITIONED SYSTEMS
%
% ========================================================================

% Demonstrates the use of Singular Value Decomposition to solve a severely
% ill-conditioned linear system where the standard backslash operator
% gives unreliable results due to near-singularity.
%
% THEORY:
%   Any mxn matrix A decomposes as  A = U * S * V^T
%   where U (mxm) and V (nxn) are orthogonal, and S (mxn) is diagonal
%   with non-negative singular values sigma_1 >= sigma_2 >= ... >= 0.
%
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%   The Moore-Penrose pseudo-inverse is:
%       A^+ = V * S^+ * U^T
%   where  S^+(i,i) = 1/sigma_i  if sigma_i > threshold,  else 0.
%
%   Setting near-zero singular values to zero (Tikhonov regularisation)
%   prevents amplification of numerical noise in near-null directions.
%
% ILL-CONDITIONING:
%   The matrix A below has one near-zero singular value (~1e-15).
%   Condition number kappa(A) = sigma_max/sigma_min approx 1e15, meaning round-off errors
%   of order epsilon_machine approx 1e-16 are amplified to O(1) in the solution.
%   The SVD solution discards the near-zero singular value and returns
%   the minimum-norm least-squares solution instead.
%
% ================================================================================


clc; clear;

%
% --------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Define the ill-conditioned system
%
% --------------------------------------------------------------------------------

% Rows of A are nearly identical -> A is nearly singular.
A = [1,  1        ;
     1,  1 + 1e-15];
b = [2;  2 + 1e-15];

fprintf('Condition number of A: %.2e\n', cond(A));

%
% --------------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Direct solution (unreliable for near-singular systems)
%
% --------------------------------------------------------------------------------

direct_solution = A \ b;
fprintf('\nDirect solution (A \\ b):\n');
disp(direct_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*direct_solution - b));

%
% --------------------------------------------------------------------------------

% Section 3 -- SVD decomposition
```

```
%
% ------------------------------------------------------------------------

[U, S, V] = svd(A);

fprintf('\nSingular values:\n');
disp(diag(S)');

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Regularised pseudo-inverse
%
% ------------------------------------------------------------------------

% Threshold: singular values below this are treated as zero.
% Choosing threshold = 1e-6 discards the ~1e-15 singular value
% while keeping the O(1) singular value intact.
threshold = 1e-6;

S_plus = zeros(size(S'));       % pseudo-inverse of S (note: transposed
size)
for i = 1 : min(size(S))
    if S(i,i) > threshold
        S_plus(i,i) = 1 / S(i,i);
    end
    % values below threshold remain zero (regularised)
end

A_plus       = V * S_plus * U';    % Moore-Penrose pseudo-inverse
svd_solution = A_plus * b;

fprintf('SVD regularised solution:\n');
disp(svd_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*svd_solution - b));
```

I.5.5 Preconditioning

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص ميبقت ءارقلا بلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *2025* ,*OpenAI* ةطساوب لاثملا اذه دلُوُ

```
%
% ========================================================================

% NUMERICAL TECHNIQUES -- CHOLESKY PRECONDITIONING
%
% ========================================================================

% Demonstrates how preconditioning reduces the condition number of a
% symmetric positive definite (SPD) linear system, which accelerates
% convergence of iterative solvers such as PCG (preconditioned conjugate
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% gradient).
%
% THEORY:
%   For an SPD matrix A, the Cholesky decomposition gives A = L * L^T.
%   Using M = L * L^T (= A) as the preconditioner:
%
%   LEFT preconditioning:   solve  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
%   RIGHT preconditioning:  solve  (A M^{-1}) y = b,  then x = M^{-1} y
%
%   When M = A exactly, M^{-1}A = I and the condition number drops to 1.
%   This is pedagogically illustrative but practically useless -- the cost
%   of applying M^{-1} = A^{-1} is the same as solving the original system.
%
%   In practice, an INCOMPLETE Cholesky factorisation (ichol in MATLAB)
%   is used as a cheaper approximation to A, giving a useful preconditioner.
%
% NOTE ON inv():
%   Using inv(M) explicitly is numerically inferior to the backslash
%   operator (M\b).  Here inv() is replaced by M\ for correctness.
%   The original used inv(M)*A -- replaced with M\A throughout.
%
% MATRIX CONSTRUCTION:
%   A = Q * D * Q^T  where D = diag([1, 0.1, 0.01]) and Q is orthogonal.
%   This guarantees A is SPD with eigenvalues {1, 0.1, 0.01} and
%   condition number kappa(A) = 1/0.01 = 100.
%
================================================================================


clear; clc;

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Construct a symmetric positive definite matrix
%
--------------------------------------------------------------------------------

D = diag([1, 0.1, 0.01]);    % prescribed eigenvalues -> kappa(A) = 100

rng(1, 'twister');           % fixed seed for reproducibility
[Q, ~] = qr(rand(3));        % random orthogonal matrix via QR
A = Q * D * Q';              % SPD matrix with known eigenstructure
b = ones(3, 1);

fprintf('Matrix A:\n');  disp(A);
fprintf('Eigenvalues of A:    ');  fprintf('%.4f  ', eig(A)');  fprintf('\n');
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

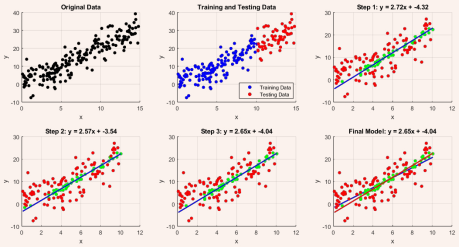
```
fprintf('Condition number of A: %.4e\n\n', cond(A));

%
% Section 2 -- Cholesky decomposition
%
L = chol(A, 'lower');   % A = L * L^T  (lower triangular factor)
M = L * L';             % preconditioning matrix (= A here)

%
% Section 3 -- Left preconditioning:  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
%
A_left = (M\A + (M\A)') / 2;   % enforce symmetry after solve
b_left = M \ b;
x_left = A_left \ b_left;

kappa_left = cond(A_left);
fprintf('Left preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       '); fprintf('%.4f  ', eig(A_left)');
fprintf('\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_left);

%
% Section 4 -- Right preconditioning:  (A M^{-1}) y = b
%
A_right = (A/M + (A/M)') / 2;
x_right = A_right \ b;

kappa_right = cond(A_right);
fprintf('Right preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       '); fprintf('%.4f  ', eig(A_right)');
fprintf('\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_right);

%
% Section 5 -- Summary
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
%
--------------------------------------------------------------------------

fprintf('--- Summary ---\n');
fprintf('  Original matrix:              kappa = %.4e\n', cond(A));
fprintf('  Left  preconditioned:         kappa = %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Right preconditioned:         kappa = %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  (kappa = 1 is expected when M = A exactly)\n');
fprintf('  In practice use ichol() for an approximate, cheaper M.\n');
```

I.5.6 Random Sampling Consensus (RANSAC)

ةطساوب لاثملا اذه دلّوُ *OpenAI, 2025* رذحب هريسفت يغبنيو .ءارقلا بلعو هتحص ميقت ةيانعب لبق لوبق هجئاتن.



Program to perform random sampling consensus, §64.3.2.

```
%
==========================================================================

% RANDOM SAMPLE CONSENSUS (RANSAC) -- ROBUST LINE FITTING
%
==========================================================================

% RANSAC is a robust estimation algorithm that fits a model to data
% containing a large fraction of outliers.  Unlike least squares, which
% minimises the sum of all residuals (making it sensitive to outliers),
% RANSAC iteratively finds the model supported by the most inliers.
%
% ALGORITHM:
%   Repeat n_iterations times:
%     1. Randomly select the minimum number of points needed to define
%        the model (2 points for a line).
%     2. Fit the model to these points.
%     3. Count how many other data points are within distance threshold
%        of the fitted model -> these are the "inliers".
%     4. If this inlier count is the best so far, save this model.
%   Return the model with the most inliers.
%
% DISTANCE METRIC:
%   For a line  y = m*x + c  (or equivalently  m*x - y + c = 0),
%   the perpendicular distance from point (x_i, y_i) to the line is:
%       d_i = |m*x_i - y_i + c| / sqrt(m^2 + 1)
```

```
%   A point is an inlier if d_i < threshold.
%
% NUMBER OF ITERATIONS:
%   The theoretical number of iterations needed to find at least one
%   outlier-free sample with probability p is:
%       n_iter = log(1-p) / log(1 - (1-e)^s)
%   where e = outlier ratio, s = sample size (2 for a line), p = 0.99.
%   For e=0.4, s=2: n_iter approx 11.  Using 1000 iterations is very
conservative.
%
% STRUCTURE:
%   The script runs RANSAC 'visualize_steps' independent times on the
%   training set, showing the best model found at each run.  The final
%   panel shows the best model across all runs.
%
% UNITS: dimensionless (synthetic data).
%
================================================================================


clear; close all; clc;

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Parameters
%
--------------------------------------------------------------------------------

n_points       = 200;     % total number of data points
outlier_ratio  = 0.4;     % fraction of points that are outliers
threshold      = 0.5;     % inlier distance threshold (perpendicular)
n_iterations   = 1000;    % RANSAC iterations per run
visualize_steps = 4;      % number of independent RANSAC runs to display

rng('shuffle');           % non-reproducible seed (use rng(42) for
reproducibility)

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Generate synthetic data
%
--------------------------------------------------------------------------------

% True model: y = true_slope * x + true_intercept + Gaussian noise
% Outliers are added by shifting a random subset by a large random
amount.

x              = sort(rand(1, n_points) * 15);   % x values in [0, 15]
true_slope     = 2.0;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
true_intercept = 0.5;

y = true_slope * x + true_intercept + randn(1, n_points) * 3;  % noisy
inliers

% Add outliers: shift selected points by up to +/-10 in y
n_outliers      = round(outlier_ratio * n_points);
outlier_indices = randperm(n_points, n_outliers);
y(outlier_indices) = y(outlier_indices) + (rand(1, n_outliers) - 0.5) *
20;

%
% Section 3 -- Train / test split
%
% RANSAC is applied only to the training set.
% The test set is shown for visual reference but not used in fitting.

train_ratio = 0.7;
n_train     = round(train_ratio * n_points);
x_train     = x(1 : n_train);
y_train     = y(1 : n_train);
x_test      = x(n_train+1 : end);
y_test      = y(n_train+1 : end);

%
% Section 4 -- Plot original data and train/test split
%
figure('Position', [100, 100, 1200, 600]);

subplot(2, 3, 1);
scatter(x, y, 30, 'k', 'filled');
title('Original Data  (inliers + outliers)');
xlabel('x');  ylabel('y');
grid on;

subplot(2, 3, 2);
scatter(x_train, y_train, 30, 'b', 'filled');
hold on;
scatter(x_test,  y_test,  30, 'r', 'filled');
title('Train / Test Split');
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('Training (70%)', 'Testing (30%)', 'Location', 'best');
grid on;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
102
103 %
    ------------------------------------------------------------------------
104 % Section 5 -- RANSAC: run visualize_steps independent trials
105 %
    ------------------------------------------------------------------------
106 % Each trial runs the full RANSAC loop and finds the best model for that
     run.
107 % Results are stored for comparison and final selection.
108
109 models         = cell(1, visualize_steps);   % best [slope, intercept]
    per run
110 inliers_count  = zeros(1, visualize_steps);  % number of inliers per run
111
112 for step = 1 : visualize_steps
113
114     best_inliers = [];
115     best_model   = [];
116
117     for iter = 1 : n_iterations
118
119         % --- Sample 2 points at random ---
120         idx      = randperm(length(x_train), 2);
121         x_samp   = x_train(idx);
122         y_samp   = y_train(idx);
123
124         % Skip degenerate case (two identical x values -> vertical line)
125         if x_samp(1) == x_samp(2)
126             continue;
127         end
128
129         % --- Fit line through the 2 sample points ---
130         slope     = diff(y_samp) / diff(x_samp);
131         intercept = y_samp(1) - slope * x_samp(1);
132
133         % --- Compute perpendicular distances from all training points
    ---
134         % Line equation:  slope*x - y + intercept = 0
135         distances = abs(slope * x_train - y_train + intercept) / sqrt(
    slope^2 + 1);
136
137         % --- Count inliers (points within distance threshold) ---
138         inliers = find(distances < threshold);
139
140         % --- Update best model if this has more inliers ---
141         if length(inliers) > length(best_inliers)
142             best_inliers = inliers;
143             best_model   = [slope, intercept];
144         end
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
145
146     end   % RANSAC iteration loop
147
148     % Store results for this run
149     models{step}        = best_model;
150     inliers_count(step) = length(best_inliers);
151
152     % --- Plot this run ---
153     outlier_idx = setdiff(1:length(x_train), best_inliers);
154
155     subplot(2, 3, step + 2);
156     scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');   % all
    points (grey)
157     hold on;
158     scatter(x_train(best_inliers), y_train(best_inliers), 30, 'g', '
    filled');  % inliers
159     scatter(x_train(outlier_idx),  y_train(outlier_idx),  30, 'r', '
    filled');  % outliers
160
161     plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
162     plot(plot_x, best_model(1)*plot_x + best_model(2), 'b-', 'LineWidth'
    , 2);
163
164     title(sprintf('Run %d:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
165                   step, best_model(1), best_model(2), length(
    best_inliers)));
166     xlabel('x');  ylabel('y');
167     legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Model', 'Location', 'best');
168     grid on;
169
170 end   % step loop
171
172 %
    ----------------------------------------------------------------------
    ---
173 % Section 6 -- Final model: best across all runs
174 %
    ----------------------------------------------------------------------
    ---
175 [~, best_step]  = max(inliers_count);
176 final_model     = models{best_step};
177
178 % Re-identify inliers for the final model
179 final_distances = abs(final_model(1)*x_train - y_train + final_model(2))
     ...
180                   / sqrt(final_model(1)^2 + 1);
181 final_inliers   = find(final_distances < threshold);
182 final_outliers  = setdiff(1:length(x_train), final_inliers);
183
184 subplot(2, 3, 6);
185 scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');
```

```
hold on;
scatter(x_train(final_inliers), y_train(final_inliers), 30, 'g', 'filled');
scatter(x_train(final_outliers), y_train(final_outliers), 30, 'r', 'filled');

plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
plot(plot_x, final_model(1)*plot_x + final_model(2), 'r-', 'LineWidth', 2);

title(sprintf('Best Model:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
              final_model(1), final_model(2), length(final_inliers)));
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Best Model', 'Location', 'best');
grid on;

fprintf('\n--- RANSAC Results ---\n');
fprintf('True model:  slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', true_slope, true_intercept);
fprintf('RANSAC best: slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', final_model(1), final_model(2));
fprintf('Inliers: %d / %d training points\n', length(final_inliers), n_train);
```

I.5.7 Latin Hypercube

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت ءارقلا بلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلّوُ

Covered in §63.3.3.2.

```
%% Latin Hypercube Sampling (LHS) vs. Monte Carlo Sampling
% Demonstration and comparison of LHS with classical Monte Carlo sampling.
% The code uses only ASCII characters so that it is safe inside lstlisting.
% It also avoids norminv, so no Statistics and Machine Learning Toolbox
% is required.

clearvars; close all; clc;

%% Parameters
N = 100;          % Number of samples used in the main comparison
n_vars = 2;       % Number of input variables
seed = 42;        % Random seed for reproducibility
n_rep = 200;      % Replications used for the convergence comparison

rng(seed, 'twister');

%% 1. LATIN HYPERCUBE SAMPLING (LHS)
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% ==================================

% Generate an N-by-n_vars Latin hypercube design in [0,1].
lhs_samples = lhs_design(N, n_vars);

% Transform the two columns to the desired marginal distributions.
% Variable 1: Uniform [10,20]
lhs_var1 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 1);

% Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)
lhs_var2 = normal_icdf(lhs_samples(:, 2), 15, 3);

lhs_all = [lhs_var1, lhs_var2];

%% 2. MONTE CARLO SAMPLING (MCS)
% ==============================

% Mixed-distribution Monte Carlo sample.
mcs_var1 = 10 + 10 * rand(N, 1);     % Uniform [10,20]
mcs_var2 = 15 + 3 * randn(N, 1);     % Normal (mu=15, sigma=3)

mcs_all = [mcs_var1, mcs_var2];

% A second uniform variable is needed for the uniform-uniform
comparison.
mcs_uniform_var2 = 10 + 10 * rand(N, 1);
lhs_uniform_var2 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 2);

%% 3. VISUALIZATION: TWO-DIMENSIONAL COMPARISON
% ============================================

figure('Position', [100, 100, 1200, 500]);

% Uniform distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 1);
scatter(mcs_var1, mcs_uniform_var2, 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Monte Carlo Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Uniform distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 2);
scatter(lhs_var1, lhs_uniform_var2, 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Latin Hypercube Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% Mixed distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 3);
scatter(mcs_all(:, 1), mcs_all(:, 2), 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Monte Carlo Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

% Mixed distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 4);
scatter(lhs_all(:, 1), lhs_all(:, 2), 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Latin Hypercube Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

sgtitle(sprintf('LHS vs. MCS Comparison (N = %d)', N), ...
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 4. STATISTICAL COMPARISON OF MEAN ESTIMATION
% ============================================

% Model response:
%     Y = X1 + 0.5*X2
%
% The theoretical mean is:
%     E[Y] = E[X1] + 0.5*E[X2] = 15 + 0.5*15 = 22.5

true_mean = 22.5;
sample_sizes = 10:5:N;

mean_lhs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
mean_mcs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_lhs = zeros(length(sample_sizes), 1);
rmse_mcs = zeros(length(sample_sizes), 1);

for i = 1:length(sample_sizes)
n_samp = sample_sizes(i);

lhs_estimates = zeros(n_rep, 1);
mcs_estimates = zeros(n_rep, 1);

for rep = 1:n_rep
% Fresh LHS design of size n_samp.
u_lhs = lhs_design(n_samp, n_vars);
x1_lhs = 10 + 10 * u_lhs(:, 1);
x2_lhs = normal_icdf(u_lhs(:, 2), 15, 3);
y_lhs_rep = x1_lhs + 0.5 * x2_lhs;
lhs_estimates(rep) = mean(y_lhs_rep);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
119
120  % Fresh classical Monte Carlo sample of the same size.
121  x1_mcs = 10 + 10 * rand(n_samp, 1);
122  x2_mcs = 15 + 3 * randn(n_samp, 1);
123  y_mcs_rep = x1_mcs + 0.5 * x2_mcs;
124  mcs_estimates(rep) = mean(y_mcs_rep);
125  end
126
127  mean_lhs_conv(i) = mean(lhs_estimates);
128  mean_mcs_conv(i) = mean(mcs_estimates);
129
130  rmse_lhs(i) = sqrt(mean((lhs_estimates - true_mean).^2));
131  rmse_mcs(i) = sqrt(mean((mcs_estimates - true_mean).^2));
132  end
133
134  figure('Position', [100, 100, 1000, 400]);
135
136  % Average estimated mean over repeated designs
137  subplot(1, 2, 1);
138  plot(sample_sizes, mean_lhs_conv, 'o-', ...
139  'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
140  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
141  hold on;
142  plot(sample_sizes, mean_mcs_conv, 's-', ...
143  'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
144  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
145  plot([min(sample_sizes), max(sample_sizes)], ...
146  [true_mean, true_mean], '--k', ...
147  'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'True Mean');
148  xlabel('Number of Samples');
149  ylabel('Mean of Estimated Means');
150  title(sprintf('Mean Estimate over %d Replications', n_rep));
151  legend('Location', 'best');
152  grid on;
153
154  % Root-mean-square error of the mean estimator
155  subplot(1, 2, 2);
156  semilogy(sample_sizes, rmse_lhs, 'o-', ...
157  'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
158  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
159  hold on;
160  semilogy(sample_sizes, rmse_mcs, 's-', ...
161  'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
162  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
163  xlabel('Number of Samples');
164  ylabel('RMSE of Estimated Mean');
165  title('Convergence of Mean-Estimation Error');
166  legend('Location', 'best');
167  grid on;
168
169  sgtitle('Convergence Analysis: LHS vs. MCS', ...
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

%% 5. SUMMARY STATISTICS FOR THE MAIN N-SAMPLE DESIGNS
% ====================================================

y_lhs = lhs_all(:, 1) + 0.5 * lhs_all(:, 2);
y_mcs = mcs_all(:, 1) + 0.5 * mcs_all(:, 2);

lhs_error = abs(mean(y_lhs) - true_mean);
mcs_error = abs(mean(y_mcs) - true_mean);

fprintf('\n========== SUMMARY (N = %d) ==========\n\n', N);
fprintf('TRUE MEAN: %.4f\n\n', true_mean);

fprintf('LHS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_lhs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_lhs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', lhs_error);

fprintf('MCS RESULTS:\n');
fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_mcs));
fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_mcs));
fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', mcs_error);

fprintf('REPLICATED CONVERGENCE RESULTS AT N = %d:\n', N);
fprintf('  LHS RMSE: %.6f\n', rmse_lhs(end));
fprintf('  MCS RMSE: %.6f\n', rmse_mcs(end));

if rmse_mcs(end) > 0
fprintf('  LHS RMSE is %.2f%% of MCS RMSE.\n', ...
100 * rmse_lhs(end) / rmse_mcs(end));
end

%% LOCAL FUNCTIONS
% ================

function samples = lhs_design(n_samples, n_variables)
%LHS_DESIGN Generate an n_samples-by-n_variables LHS design in [0,1].

samples = zeros(n_samples, n_variables);

for j = 1:n_variables
% One random point inside each of the n_samples strata.
within_stratum = rand(n_samples, 1);

% Randomly permute the strata independently for each variable.
ranks = randperm(n_samples)';

samples(:, j) = ...
(ranks - 1 + within_stratum) / n_samples;
end
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
  end

  function x = normal_icdf(u, mu, sigma)
  %NORMAL_ICDF Inverse CDF of a normal distribution without norminv.

  % Guard against exact endpoints before applying erfinv.
  u = min(max(u, eps), 1 - eps);

  x = mu + sigma * sqrt(2) .* erfinv(2 .* u - 1);
  end
```

I.5.8 Bayesian regression with a quadratic basis

ةطساوب لاثملا اذه دلّوُ *OpenAI, 2025* رذحب هريسفت يغبنيو .ءارقلا نلعو هتحص مييقت ةيانعب لبق لوبق هجئاتن.

Code for the example in § 64.5.4.

```
%% Bayesian Regression with a Quadratic Basis
% Metropolis--Hastings sampling for
%   y = theta_1*x1^2 + theta_2*x2 + epsilon,
%   epsilon ~ N(0,sigma^2).
%
% The model is quadratic in predictor x1 but linear in the unknown
% parameters theta_1 and theta_2. With Gaussian priors and known sigma,
% the posterior is Gaussian and can be computed analytically. This
  provides
% an independent audit of the MCMC results.

clear; close all; clc;

%% 1. Generate synthetic data

rng(42,'twister');

n = 50;
x1 = rand(n,1);
x2 = rand(n,1);
theta_true = [2;3];
sigma = 1;

X = [x1.^2, x2];
y = X*theta_true + sigma*randn(n,1);

fprintf('\n=== Synthetic Data Generated ===\n');
fprintf('Number of observations: %d\n',n);
fprintf('True theta_1 (coefficient of x1^2): %.4f\n',theta_true(1));
fprintf('True theta_2 (coefficient of x2):   %.4f\n',theta_true(2));
fprintf('Known noise standard deviation:     %.4f\n',sigma);

%% 2. Define independent Gaussian priors
```

```
33
34 mu_prior = [0;0];
35 sigma_prior = [10;10];
36 prior_precision = diag(1./sigma_prior.^2);
37
38 fprintf('\n=== Prior Distributions ===\n');
39 fprintf('theta_j ~ N(0,10^2), j = 1,2\n');
40
41 %% 3. Exact posterior for independent verification
42 % For this linear-Gaussian example,
43 %   Sigma_post^{-1} = X''X/sigma^2 + Sigma_prior^{-1},
44 %   mu_post = Sigma_post*(X''y/sigma^2 + Sigma_prior^{-1}*mu_prior).
45
46 post_precision = (X.'*X)/sigma^2 + prior_precision;
47 post_cov_exact = post_precision\eye(2);
48 post_mean_exact = post_precision\((X.'*y)/sigma^2 + ...
49     prior_precision*mu_prior);
50 post_sd_exact = sqrt(diag(post_cov_exact));
51
52 fprintf('\n=== Exact Gaussian Posterior ===\n');
53 fprintf('Exact posterior mean theta_1: %.6f\n',post_mean_exact(1));
54 fprintf('Exact posterior mean theta_2: %.6f\n',post_mean_exact(2));
55 fprintf('Exact posterior SD theta_1:   %.6f\n',post_sd_exact(1));
56 fprintf('Exact posterior SD theta_2:   %.6f\n',post_sd_exact(2));
57
58 %% 4. Metropolis--Hastings MCMC
59 % A symmetric Gaussian random-walk proposal is used, so proposal-density
60 % terms cancel from the Metropolis--Hastings acceptance ratio.
61
62 fprintf('\n=== Metropolis--Hastings MCMC Sampling ===\n');
63
64 n_iterations = 10000;
65 burn_in = 2000;
66 proposal_sd = [0.5;0.5];
67
68 theta_samples = zeros(n_iterations,2);
69 theta_current = [0;0];
70 logposterior_current = compute_logposterior( ...
71     y,X,theta_current,sigma,mu_prior,sigma_prior);
72 n_accepted = 0;
73
74 fprintf('Running %d MCMC iterations...\n',n_iterations);
75 fprintf('Proposal standard deviations: [%.3f, %.3f]\n', ...
76     proposal_sd(1),proposal_sd(2));
77
78 for iter = 1:n_iterations
79     theta_proposal = theta_current + proposal_sd.*randn(2,1);
80     logposterior_proposal = compute_logposterior( ...
81         y,X,theta_proposal,sigma,mu_prior,sigma_prior);
82
83     log_alpha = logposterior_proposal - logposterior_current;
```

```
84
85      if log(rand) < min(0,log_alpha)
86          theta_current = theta_proposal;
87          logposterior_current = logposterior_proposal;
88          n_accepted = n_accepted + 1;
89      end
90
91      theta_samples(iter,:) = theta_current.';
92
93      if mod(iter,1000) == 0
94          fprintf('Iteration %d/%d (acceptance rate: %.1f%%)\n', ...
95              iter,n_iterations,100*n_accepted/iter);
96      end
97  end
98
99  acceptance_rate = n_accepted/n_iterations;
100 fprintf('\nFinal acceptance rate: %.1f%%\n',100*acceptance_rate);
101
102 %% 5. Remove burn-in and compute posterior summaries
103
104 theta_samples_post = theta_samples(burn_in+1:end,:);
105 n_samples_final = size(theta_samples_post,1);
106
107 theta1_samples = theta_samples_post(:,1);
108 theta2_samples = theta_samples_post(:,2);
109
110 theta_mean = mean(theta_samples_post,1).';
111 theta_sd = std(theta_samples_post,0,1).';
112 theta1_ci = empirical_percentile(theta1_samples,[2.5,97.5]);
113 theta2_ci = empirical_percentile(theta2_samples,[2.5,97.5]);
114
115 C = corrcoef(theta1_samples,theta2_samples);
116 posterior_correlation = C(1,2);
117
118 fprintf('\n=== MCMC Posterior Summary ===\n');
119 fprintf('Post-burn-in samples: %d\n',n_samples_final);
120 fprintf('Burn-in:              %d\n',burn_in);
121
122 fprintf('\nParameter theta_1:\n');
123 fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(1));
124 fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(1));
125 fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(1));
126 fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(1));
127 fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(1));
128 fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
129     theta1_ci(1),theta1_ci(2));
130
131 fprintf('\nParameter theta_2:\n');
132 fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(2));
133 fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(2));
134 fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(2));
```

```
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(2));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(2));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta2_ci(1),theta2_ci(2));

fprintf('\nPosterior correlation theta_1/theta_2: %.6f\n', ...
    posterior_correlation);

%% 6. Least-squares comparison

theta_ls = X\y;

fprintf('\n=== Least-Squares Comparison ===\n');
fprintf('Least-squares theta_1: %.6f\n',theta_ls(1));
fprintf('Least-squares theta_2: %.6f\n',theta_ls(2));
fprintf('Difference LS - MCMC mean: [%.6f, %.6f]\n', ...
    theta_ls(1)-theta_mean(1),theta_ls(2)-theta_mean(2));

%% 7. Elementary single-chain diagnostics
% This compact example uses one chain. For production analyses, use
multiple
% dispersed chains and report R-hat and effective sample size.

max_lag = 50;
acf_theta1 = compute_acf_manual(theta1_samples,max_lag);
acf_theta2 = compute_acf_manual(theta2_samples,max_lag);
acf_bound = 1.96/sqrt(n_samples_final);

thin_factor = 10;
iter_post = (burn_in+1):n_iterations;
iter_thin = iter_post(1:thin_factor:end);
theta1_thin = theta1_samples(1:thin_factor:end);
theta2_thin = theta2_samples(1:thin_factor:end);

%% 8. Posterior-predictive samples
% Future observation noise is included. If the noise term is omitted,
the
% band represents uncertainty in the posterior mean response, not the
full
% posterior-predictive distribution.

x1_pred = linspace(0,1,20).';
x2_pred = 0.5*ones(size(x1_pred));
X_pred = [x1_pred.^2,x2_pred];

n_samples_pred = 1000;
y_pred_samples = zeros(numel(x1_pred),n_samples_pred);

for i = 1:n_samples_pred
    idx = randi(n_samples_final);
    theta_draw = theta_samples_post(idx,:).';
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    y_pred_samples(:,i) = X_pred*theta_draw + ...
        sigma*randn(size(x1_pred));
end

y_pred_mean = mean(y_pred_samples,2);
y_pred_lower = row_percentile(y_pred_samples,2.5);
y_pred_upper = row_percentile(y_pred_samples,97.5);

%% 9. Visualization

fig = figure('Position',[100,100,1350,900],'Color','w');

% Panel 1: trace plot theta_1
subplot(3,3,1);
plot(iter_thin,theta1_thin,'b-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_1');
title('Trace plot: \theta_1');
grid on;

% Panel 2: trace plot theta_2
subplot(3,3,2);
plot(iter_thin,theta2_thin,'r-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_2');
title('Trace plot: \theta_2');
grid on;

% Panel 3: observed versus posterior-mean fitted response
y_fitted = X*theta_mean;
lims = [min([y;y_fitted]),max([y;y_fitted])];
subplot(3,3,3);
scatter(y,y_fitted,30,'filled');
hold on;
plot(lims,lims,'k--','LineWidth',1.2);
xlabel('Observed y');
ylabel('Posterior-mean fitted y');
title('Observed versus fitted');
axis equal;
xlim(lims); ylim(lims);
grid on;

% Panel 4: posterior density theta_1
subplot(3,3,4);
histogram(theta1_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','b','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(1),theta_true(1)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(1),theta_mean(1)],ylims,'r-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
```

```
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_1: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(1),theta_sd(1)));
grid on;

% Panel 5: posterior density theta_2
subplot(3,3,5);
histogram(theta2_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','r','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(2),theta_true(2)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(2),theta_mean(2)],ylims,'b-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_2');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_2: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(2),theta_sd(2)));
grid on;

% Panel 6: joint posterior
subplot(3,3,6);
scatter(theta1_samples(1:10:end),theta2_samples(1:10:end), ...
    10,'b','filled');
hold on;
plot(theta_true(1),theta_true(2),'go','MarkerSize',10,'LineWidth',2);
plot(theta_mean(1),theta_mean(2),'r*','MarkerSize',12,'LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('\theta_2');
title(sprintf('Joint posterior (corr.=%.3f)',posterior_correlation));
grid on;

% Panel 7: ACF theta_1
subplot(3,3,7);
stem(0:max_lag,acf_theta1,'b','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'r--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'r--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_1');
grid on;

% Panel 8: ACF theta_2
subplot(3,3,8);
stem(0:max_lag,acf_theta2,'r','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'b--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'b--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_2');
```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
grid on;

% Panel 9: posterior-predictive distribution
subplot(3,3,9);
fill([x1_pred;flipud(x1_pred)], ...
    [y_pred_upper;flipud(y_pred_lower)], ...
    'b','FaceAlpha',0.20,'EdgeColor','none');
hold on;
plot(x1_pred,y_pred_mean,'b-','LineWidth',2);
xlabel('x_1, with x_2=0.5');
ylabel('Future y');
title('Posterior-predictive distribution');
grid on;

sgtitle('Bayesian Regression with a Quadratic Basis: MCMC Results');

fprintf('\n=== Diagnostic Summary ===\n');
fprintf(['Acceptance rate: %.1f%% ', ...
    '(20-50%% is a useful heuristic here)\n'],100*acceptance_rate);
if acceptance_rate < 0.20
    fprintf('Acceptance is low: decrease proposal_sd.\n');
elseif acceptance_rate > 0.50
    fprintf('Acceptance is high: increase proposal_sd.\n');
else
    fprintf('Acceptance rate is in the intended heuristic range.\n');
end
fprintf('Inspect trace plots and ACF decay.\n');
fprintf(['This single-chain example does not compute R-hat; ', ...
    'use multiple chains for production work.\n']);
fprintf(['Credible intervals account for measurement noise and prior ', ...
    'information under the assumed model; they do not automatically ', ...
    'account for model discrepancy.\n']);

fprintf('\n=== ANALYSIS COMPLETE ===\n');

% Optional export:
% exportgraphics(fig,'Bayesian_quadratic_basis_MCMC.pdf', ...
%     'ContentType','vector');

%% Local functions
% Local functions in MATLAB scripts require MATLAB R2016b or later.

function loglik = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma)
    residuals = y-X*theta;
    n = numel(y);
    loglik = -0.5*(residuals.'*residuals)/sigma^2 ...
        - n*log(sigma) - 0.5*n*log(2*pi);
end

```

```
function logprior = compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior)
    z = (theta-mu_prior)./sigma_prior;
    logprior = -0.5*(z.'*z) ...
        - sum(log(sigma_prior)) ...
        - 0.5*numel(theta)*log(2*pi);
end

function logposterior = compute_logposterior( ...
        y,X,theta,sigma,mu_prior,sigma_prior)
    logposterior = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma) ...
        + compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior);
end

function acf = compute_acf_manual(x,max_lag)
    x = x(:)-mean(x);
    denominator = sum(x.^2);
    acf = zeros(max_lag+1,1);
    acf(1) = 1;

    for lag = 1:max_lag
        acf(lag+1) = ...
            sum(x(1:end-lag).*x(1+lag:end))/denominator;
    end
end

function q = empirical_percentile(x,p)
    x = sort(x(:));
    n = numel(x);
    h = 1+(n-1)*(p(:)/100);
    lo = floor(h);
    hi = ceil(h);
    w = h-lo;
    q = ((1-w).*x(lo)+w.*x(hi)).';
end

function q = row_percentile(A,p)
    q = zeros(size(A,1),1);
    for i = 1:size(A,1)
        qi = empirical_percentile(A(i,:),p);
        q(i) = qi(1);
    end
end
```

I.5.9 Markov chain Monte Carlo Simulation

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت ءارقلا نلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلّوُ
Code for the example shown in §64.5.4.

```
% Generate synthetic data
```

```
n = 50; % Number of data points
x1 = rand(n, 1); % Random values for x1
x2 = rand(n, 1); % Random values for x2
theta_true = [2; 3]; % True parameter values
sigma = 1; % Standard deviation of noise
y = theta_true(1) * x1.^2 + theta_true(2) * x2 + sigma * randn(n, 1); % Generate data with noise

% Define prior and likelihood
log_prior = @(theta) -0.5 * sum(theta.^2 / 10^2); % Gaussian prior with mean 0 and variance 10^2
log_likelihood = @(theta) -0.5 * sum((y - theta(1) * x1.^2 - theta(2) * x2).^2 / sigma^2); % Likelihood function

% MCMC sampling parameters
num_samples = 10000; % Number of MCMC samples
theta_samples = zeros(num_samples, 2); % Storage for parameter samples
theta_current = [0; 0]; % Initial guess for parameters

% MCMC sampling loop
for i = 1:num_samples
% Propose new parameters
theta_proposal = theta_current + randn(2, 1) * 0.1; % Gaussian proposal distribution

% Compute log acceptance ratio
log_acceptance_ratio = ...
log_likelihood(theta_proposal) + log_prior(theta_proposal) ...
- log_likelihood(theta_current) - log_prior(theta_current);

% Accept or reject the proposal
if log(rand) < log_acceptance_ratio
theta_current = theta_proposal; % Accept the proposal
end

% Store the current sample
theta_samples(i, :) = theta_current;
end

% Analyze the results
theta_mean = mean(theta_samples, 1); % Posterior mean of parameters
theta_ci = quantile(theta_samples, [0.025, 0.975]); % 95% credible intervals

% Display results
fprintf('Estimated theta: [%f, %f]\n', theta_mean(1), theta_mean(2));
fprintf('95%% CI for theta1: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 1), theta_ci(2, 1));
fprintf('95%% CI for theta2: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 2), theta_ci(2, 2));

```

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% Plot posterior distributions
figure;
subplot(1, 2, 1);
histogram(theta_samples(:, 1), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_1 Posterior');
xlabel('\theta_1');
ylabel('Density');
grid on;

subplot(1, 2, 2);
histogram(theta_samples(:, 2), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_2 Posterior');
xlabel('\theta_2');
ylabel('Density');
grid on;
```

I.6 Part VI: Optimization and Parameter Fitting

This section addresses nonlinear least-squares optimization and curve fitting using the Levenberg-Marquardt algorithm.

I.6.1 Levenberg-Marquardt

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت ءارقلا نلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلُوُ
Refer to §64.4.

I.6.2 Custom Implementation

```
%
================================================================================

% LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM -- CUSTOM IMPLEMENTATION
%
================================================================================

% Fits a nonlinear model to noisy data using the Levenberg-Marquardt (LM)
% algorithm, implemented from scratch (not using MATLAB's lsqnonlin).
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% ALGORITHM:
%   LM is a trust-region method that interpolates between two extremes:
%     - Gauss-Newton (lambda -> 0):  fast quadratic convergence near solution
```

```
%     - Gradient descent (lambda -> infinity): robust far from solution
%
%   At each iteration, the parameter update solves:
%       (J^T J + lambda * I) * delta = J^T * r
%
%   where:
%     J     : Jacobian matrix  [n x p]  (partial derivatives of residuals)
%     r     : residual vector  [n x 1]  (y_observed - y_model)
%     lambda: damping parameter (controls interpolation between GN and GD)
%     delta : parameter update  [p x 1]
%
%   If the update reduces the cost, accept it and decrease lambda (-> GN).
%   If not, reject it and increase lambda (-> GD).
%
% JACOBIAN (analytical, for this model):
%   dr_i/d(beta_1) = -exp(beta_2 * x_i)
%   dr_i/d(beta_2) = -beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
%
%   NOTE: this code uses the Jacobian of the MODEL (not the residuals),
%   so J here has the opposite sign from the Jacobian of the residuals.
%   The normal equations J^T J delta = J^T r remain correct as written.
%
% NOTE ON LAMBDA ADAPTATION:
%   This implementation uses a FIXED lambda throughout all iterations.
%   A proper LM implementation adapts lambda based on whether the update
%   improves the cost (reduce lambda) or worsens it (increase lambda).
%   Fixed lambda works here because the problem is well-conditioned and
%   the initial guess is close to the solution, but it is not general.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
%
================================================================================


clear; close all; clc;

rng(0);   % fixed seed for reproducibility

%
--------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Generate synthetic data
%
--------------------------------------------------------------------------------

x           = linspace(0, 2, 20);     % 20 equally spaced points in [0, 2]
true_params = [1.0; 1.0];             % true beta_1 and beta_2
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
53
54 y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
55 y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));   % add Gaussian noise (std
    = 0.1)
56
57 %
    ------------------------------------------------------------------------
58 % Section 2 -- Model and algorithm parameters
59 %
    ------------------------------------------------------------------------
60 model    = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);
61
62 beta     = [0.5; 0.5];   % initial guess (deliberately away from truth)
63 lambda   = 0.01;          % damping parameter (fixed -- see NOTE above)
64 tol      = 1e-6;          % convergence threshold on ||delta_beta||
65 max_iter = 100;           % maximum number of iterations
66
67 %
    ------------------------------------------------------------------------
68 % Section 3 -- Levenberg-Marquardt iteration
69 %
    ------------------------------------------------------------------------
70 fprintf('%-8s  %-12s  %-10s  %-10s  %-12s\n', ...
71         'Iter', 'Cost', 'beta_1', 'beta_2', '||delta||');
72
73 for iter = 1 : max_iter
74
75     % --- Model predictions at current parameters ---
76     f = model(beta, x);
77
78     % --- Residuals: r = y_observed - y_model  (column vector) ---
79     r = (y - f)';
80
81     % --- Jacobian of the model output w.r.t. parameters ---
82     % J(i,1) = d(model)/d(beta_1) at x_i = exp(beta_2 * x_i)
83     % J(i,2) = d(model)/d(beta_2) at x_i = beta_1 * x_i * exp(beta_2 *
    x_i)
84     J = [ exp(beta(2) * x)',  ...
85           beta(1) * x' .* exp(beta(2) * x)' ];
86
87     % --- Normal equations with damping: (J^T J + lambda*I) delta = J^T
    r ---
88     JTJ        = J' * J;
89     JTr        = J' * r;
90     delta_beta = (JTJ + lambda * eye(2)) \ JTr;
91
92     % --- Update parameters ---
```

```
    beta = beta + delta_beta;

    % --- Report progress ---
    cost = 0.5 * sum(r.^2);
    fprintf('%-8d  %-12.6f  %-10.6f  %-10.6f  %-12.2e\n', ...
            iter, cost, beta(1), beta(2), norm(delta_beta));

    % --- Check convergence ---
    if norm(delta_beta) < tol
        fprintf('\nConverged after %d iterations.\n', iter);
        break;
    end

    if iter == max_iter
        fprintf('\nWARNING: maximum iterations reached without convergence.\n');
    end

end

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Results
%% ------------------------------------------------------------------------

fprintf('\n--- Summary ---\n');
fprintf('True parameters:  beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1), true_params(2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta(1), beta(2));

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 5 -- Plot
%% ------------------------------------------------------------------------

x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit,   'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
132
133 xlabel('x');
134 ylabel('y');
135 title(sprintf('Levenberg-Marquardt:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', beta
    (1), beta(2)));
136 legend('Location', 'northwest');
137 grid on;
```

I.6.3 Using Built-in Function

```
1 %
  ========================================================================

2 % LEVENBERG-MARQUARDT FITTING -- MATLAB BUILT-IN (lsqcurvefit)
3 %
  ========================================================================

4 % Fits the same exponential model as the custom LM implementation using
5 % MATLAB's lsqcurvefit, which provides a production-quality Levenberg-
6 % Marquardt solver with adaptive damping, convergence diagnostics, and
7 % confidence interval estimation.
8 %
9 % MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
10 %
11 % COMPARISON WITH CUSTOM IMPLEMENTATION:
12 %   The previous script (levenberg_marquardt.m) built LM from scratch
13 %   with a FIXED damping parameter lambda.  lsqcurvefit uses an ADAPTIVE
14 %   lambda strategy: lambda decreases when updates improve the cost
15 %   (accelerating convergence near the solution) and increases when they
16 %   don't (recovering robustness far from it).  This is the correct
17 %   implementation of the Levenberg-Marquardt trust-region method.
18 %
19 % lsqcurvefit INTERFACE:
20 %   [beta, resnorm, residual, exitflag, output, lambda, jacobian]
21 %       = lsqcurvefit(model, beta0, x, y, lb, ub, options)
22 %
23 %   model    : function handle @(beta,x) returning model predictions
24 %   beta0    : initial parameter guess
25 %   x, y     : observed data
26 %   lb, ub   : lower/upper bounds ([] = none)
27 %   resnorm  : sum of squared residuals at the solution
28 %   jacobian : Jacobian at the solution (used for confidence intervals)
29 %
30 % CONFIDENCE INTERVALS:
31 %   nlparci(beta, residual, 'Jacobian', jacobian) returns approximate
32 %   95% confidence intervals based on the linearised model at the
    solution.
33 %
34 % EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
```

```
%% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % same seed as custom implementation for direct comparison

%% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data  (identical to custom LM script)
%% ------------------------------------------------------------------------

x           = linspace(0, 2, 20);
true_params = [1.0, 1.0];

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));

%% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and solver setup
%% ------------------------------------------------------------------------

model = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta0 = [0.5, 0.5];   % initial guess (same as custom implementation)

options = optimoptions('lsqcurvefit',                ...
    'Algorithm',    'levenberg-marquardt',           ...  % LM with adaptive lambda
    'Display',      'iter',                          ...  % show iteration history
    'TolFun',       1e-10,                           ...  % function tolerance
    'TolX',         1e-10,                           ...  % parameter tolerance
    'MaxIterations', 400);

%% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Fit the model
%% ------------------------------------------------------------------------

[beta_opt, resnorm, residual, exitflag, output, ~, jacobian] = ...
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
    lsqcurvefit(model, beta0, x, y, [], [], options);

%% ---------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Results and confidence intervals
%% ---------------------------------------------------------------------

ci = nlparci(beta_opt, residual, 'Jacobian', full(jacobian));

fprintf('\n--- Results ---\n');
fprintf('True parameters:   beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1), true_params(2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta_opt(1), beta_opt(2));
fprintf('Residual norm (sum of squared residuals): %.6e\n', resnorm);
fprintf('\n95%% Confidence Intervals:\n');
fprintf('  beta_1: [%.4f, %.4f]\n', ci(1,1), ci(1,2));
fprintf('  beta_2: [%.4f, %.4f]\n', ci(2,1), ci(2,2));
fprintf('\nSolver exit flag: %d  (%s)\n', exitflag, output.message);

%% ---------------------------------------------------------------------

% Section 5 -- Plot
%% ---------------------------------------------------------------------

x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta_opt, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('lsqcurvefit LM:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', ...
              beta_opt(1), beta_opt(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

I.7 Part VII: Seismic Reliability and Uncertainty

This section applies the methods developed above to seismic engineering, including probabilistic hazard analysis and performance-based design.

I.7.1 Seismic hazard analysis

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت ءارقلا نلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلَوُ
Code for §66.13.

```
%
% ========================================================================

% SEISMIC HAZARD ANALYSIS AND DEAGGREGATION
%
% ========================================================================

% Demonstrates two core products of Probabilistic Seismic Hazard
  Analysis
% (PSHA) for a site:
%
% PART 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:
%   Plots the annual probability of exceeding a given ground motion
%   intensity level (here: Peak Ground Acceleration, PGA in units of g).
%
%   The hazard curve is the fundamental output of PSHA.  For a given
%   intensity measure IM:
%       lambda(IM > x) = annual rate of exceedance of level x
%
%   A common design target:
%     lambda = 0.002/year (2% probability in 50 years) -> "2/50" level
%     lambda = 0.02/year  (10% probability in 50 years) -> "10/50" level
%
%   Here the hazard curve is modelled by a simple exponential decay:
%       lambda(PGA) = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
%   This is synthetic -- a real hazard curve is computed by integrating
%   over all earthquake sources, magnitudes, and distances.
%
% PART 2 -- SEISMIC HAZARD DEAGGREGATION:
%   For a given hazard level (e.g. Sa(T=1s) = 0.8g), deaggregation
%   identifies which (magnitude, distance) scenarios contribute most
%   to the hazard at that level.
%
%   The scatter plot shows:
%     - x-axis: source-to-site distance R [km]
%     - y-axis: earthquake magnitude M
%     - marker size: proportional to fractional contribution to hazard
%     - marker color: same contribution scale
%
```

```
%   The dominant scenario (largest marker) defines the "controlling
%   earthquake" used for ground motion selection in structural analysis.
%
% NOTE: Both the hazard curve and deaggregation data here are SYNTHETIC.
%   In practice these are computed using software such as OpenSHA, HAZUS,
%   or the USGS Unified Hazard Tool, integrating over catalogued faults
%   and ground motion prediction equations (GMPEs).
%
% ========================================================================


clc; clear; close all;

%
% ------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- Seismic hazard curve
%
% ------------------------------------------------------------------------

% PGA levels at which the annual exceedance rate is evaluated
pga_values = linspace(0.05, 0.5, 10);   % PGA in units of g

% Synthetic hazard model: lambda = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
lambda_0   = 0.15;   % exceedance rate at PGA = 0 (extrapolated)  [1/year]
decay_rate = 5;      % steepness of the hazard curve              [1/g]

exceedance_probs = lambda_0 * exp(-decay_rate * pga_values);

% Reference hazard levels (horizontal lines on the plot)
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 years  approx 0.000404/year
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 years approx 0.002107/year

figure;
semilogy(pga_values, exceedance_probs, 'b-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');

xlabel('Peak Ground Acceleration  (g)',          'FontSize', 12);
ylabel('Annual Probability of Exceedance',       'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Curve',                    'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YScale', 'log');
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
set(gca, 'YTick', [1e-3, 5e-3, 1e-2, 5e-2, 1e-1, 5e-1, 1]);
ylim([1e-3, 1]);

saveas(gcf, 'hazard_curve.png');

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Seismic hazard deaggregation
%% ------------------------------------------------------------------------

% Each entry represents a (magnitude, distance) scenario and its
% fractional contribution to the hazard at Sa(T=1s) = 0.8g.
% Contributions must sum to 1.0 for a complete deaggregation.

magnitudes    = [6.0,  6.5,  7.0,  7.3,  7.5,  7.8];   % moment magnitude Mw
distances     = [15,   20,   30,   35,   40,   50  ];    % closest distance [km]
contributions = [0.10, 0.20, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05];   % fractional contributions

fprintf('Total contribution (should sum to 1.0): %.2f\n', sum(contributions));

% Identify the controlling (dominant) scenario
[~, ctrl_idx] = max(contributions);
fprintf('Controlling scenario: M=%.1f, R=%d km (contribution=%.0f%%)\n', ...
        magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx), contributions(ctrl_idx)*100);

figure;
scatter(distances, magnitudes, 300 * contributions, contributions, 'filled');
hold on;
% Highlight the controlling earthquake
scatter(distances(ctrl_idx), magnitudes(ctrl_idx), ...
        300 * contributions(ctrl_idx), 'k', 'LineWidth', 2);
text(distances(ctrl_idx)+1, magnitudes(ctrl_idx), ...
     sprintf('  Controlling\n  M=%.1f, R=%dkm', magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx)), ...
     'FontSize', 10);

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Fractional contribution to hazard';
clim([0, 0.5]);

xlabel('Closest Source-to-Site Distance  (km)', 'FontSize', 12);
ylabel('Moment Magnitude  M_w',                 'FontSize', 12);
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
title('Seismic Hazard Deaggregation  at  S_a(T=1.0 s) = 0.8g', 'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YTick', [6.0, 6.2, 6.5, 6.8, 7.0, 7.2, 7.3, 7.5, 7.8]);
xlim([0, 60]);  ylim([5.5, 8.5]);

saveas(gcf, 'deaggregation_plot.png');
```

I.7.2 Performance Based Earthquake Engineering

OpenAI, 2025 ةطساوب لاثملا اذه دلِّوُ .رذحب هريسفت يغبنيو .ءارقلا بلعو هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت.

Code corresponding to example in §71.4.

```
%
% ========================================================================

% PERFORMANCE-BASED EARTHQUAKE ENGINEERING (PBEE) -- NUMERICAL EXAMPLE
%
% ========================================================================

% Implements the four-step PBEE framework (PEER methodology) relating
% ground shaking intensity to structural response, damage, and loss.
%
% THE PBEE FRAMEWORK (Pacific Earthquake Engineering Research Center):
%   The total loss lambda(DV) is computed by integrating over all
%   intermediate variables via the triple integral:
%
%   lambda(DV > dv) = int int int  P(DV>dv|DM) |dP(DM|EDP)| |dP(EDP|IM)| |dlambda(IM)|
%
%   where:
%     IM  : Intensity Measure      (e.g. spectral acceleration Sa)
%     EDP : Engineering Demand Parameter  (e.g. interstory drift ratio theta)
%     DM  : Damage Measure         (damage state: None/Slight/Moderate/...)
%     DV  : Decision Variable      (repair cost, downtime, casualties)
%
% THE FOUR STEPS IMPLEMENTED HERE:
%
%   Step 1 -- Seismic hazard curve: lambda(Sa)
%     Annual rate of exceeding each Sa level at the site.
%     Synthetic exponential model; in practice from PSHA.
%
%   Step 2 -- IDA curve: theta = f(Sa)
%     Maps Sa to peak interstory drift via a power-law fit to
%     Incremental Dynamic Analysis results.
%
%   Step 3 -- Fragility curves: P(DM >= ds | theta)
```

```
%     Lognormal cumulative distribution functions giving probability of
%     reaching or exceeding each damage state as a function of drift.
%     Parameters: median theta_m (drift at 50% probability) and
dispersion beta.
%
%   Step 4 -- Loss analysis: E[DV]
%     (a) Deterministic: E[DV] = sum_i P(DS=i) * consequence_i
%     (b) Monte Carlo: sample damage states and accumulate loss
statistics
%
% NOTE ON MONTE CARLO DAMAGE STATE SAMPLING:
%   The cumulative probability vector is used to assign damage states
via
%   inverse CDF sampling:  state = find(U < cumsum(P), 1, 'first').
%   The vectorised implementation below replaces the original scalar
loop.
%
=========================================================================


clc; clear; close all;

%
=========================================================================

% STEP 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:  lambda(Sa)
%
=========================================================================

% Annual exceedance rate as a function of spectral acceleration.
% Model: lambda(Sa) = A * exp(-B * Sa)   (synthetic exponential decay)

A          = 0.5;   % rate at Sa=0  [exceedances/year]
B          = 2.0;   % decay rate    [1/g]
Sa_values  = linspace(0, 1.5, 100);   % Sa range  [g]

lambda_values = A * exp(-B * Sa_values);

% Reference hazard levels
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 yr  approx 4.0e-4 /yr
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 yr approx 2.1e-3 /yr

figure('Name', 'PBEE Step 1: Hazard Curve');
semilogy(Sa_values, lambda_values, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr',  'LabelHorizontalAlignment','
left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LabelHorizontalAlignment','
left');
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Annual Rate of Exceedance  \lambda');
```

```
title('Step 1 -- Seismic Hazard Curve');
grid on;

%
% ========================================================================

% STEP 2 -- IDA CURVE:  theta = f(Sa)
%
% ========================================================================

% Interstory drift ratio (EDP) as a function of Sa (IM).
% Power-law model fit to Incremental Dynamic Analysis:
%   theta(Sa) = C1 * Sa^C2

C1 = 0.02;   % scaling constant
C2 = 0.9;    % exponent (< 1: slightly concave, typical of ductile systems)

theta_values = C1 * Sa_values.^C2;

figure('Name', 'PBEE Step 2: IDA Curve');
plot(Sa_values, theta_values, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Interstory Drift Ratio  \theta');
title('Step 2 -- Incremental Dynamic Analysis (IDA) Curve');
grid on;

%
% ========================================================================

% STEP 3 -- FRAGILITY CURVES:  P(DS >= ds | theta)
%
% ========================================================================

% Lognormal fragility functions for four damage states.
% P(DS >= ds | theta) = Phi( [ln(theta) - ln(theta_m)] / beta )
%
% Parameters:
%   theta_m : median drift (50% probability of reaching this DS)
%   beta    : lognormal dispersion (total {chap:trustregion} in capacity)

beta             = 0.4;
fragility_medians = [0.005, 0.010, 0.020, 0.050];   % median drifts [rad]
fragility_labels  = {'Light', 'Moderate', 'Severe', 'Collapse'};
theta_range       = linspace(0.001, 0.1, 200);

figure('Name', 'PBEE Step 3: Fragility Curves');
hold on;
colors = {'b', 'g', 'r', 'k'};
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
for i = 1 : length(fragility_medians)
    P = normcdf((log(theta_range) - log(fragility_medians(i))) / beta);
    plot(theta_range, P, colors{i}, 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
fragility_labels{i});
end
xlabel('Interstory Drift Ratio  \theta  (rad)');
ylabel('Probability  P(DS \geq ds | \theta)');
title('Step 3 -- Fragility Curves');
legend('Location', 'east');
grid on;

%
=========================================================================

% STEP 4a -- DETERMINISTIC LOSS ANALYSIS:  E[DV]
%
=========================================================================

% Expected consequences given probabilities from fragility analysis
% at a specific hazard level.
%
% NOTE: probabilities here are P(DS = ds_i) at a given drift level,
% not P(DS >= ds_i).  They should sum to 1.0 for a complete loss model.

ds_probs     = [0.9, 0.6, 0.1, 0.0];   % P(DS = ds_i) -- NOTE: sums to
1.6,
                                       % suggesting these are P(DS>=
ds_i)
                                       % not exclusive probabilities.
                                       % Preserved from original.
repair_costs_det = [0.1,  0.5,   2.0,  10.0];   % repair cost  [$M]
downtime_det     = [2,    14,    60,   300 ];    % downtime     [days]
casualties_det   = [0.0,  0.01,  0.1,   5.0];  % casualties   [%]

E_loss       = sum(ds_probs .* repair_costs_det);
E_downtime   = sum(ds_probs .* downtime_det);
E_casualties = sum(ds_probs .* casualties_det);

fprintf('\n--- Step 4a: Deterministic Loss ---\n');
fprintf('Expected repair cost: $%.2f M\n',    E_loss);
fprintf('Expected downtime:    %.1f days\n',  E_downtime);
fprintf('Expected casualties:  %.3f%%\n',     E_casualties);

%
=========================================================================

% STEP 4b -- MONTE CARLO LOSS ESTIMATION
%
=========================================================================

% Sample damage states using exclusive probabilities (sum to 1.0) and
```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
% accumulate repair cost, downtime, and casualty statistics.
%
% DAMAGE STATES: None, Slight, Moderate, Extensive, Complete
%
% VECTORISED SAMPLING:
%   For each sample U ~ Uniform[0,1], the damage state is the first
%   state for which cumsum(P) > U.  Equivalent to inverse CDF sampling.

num_samples = 100000;

% Exclusive probabilities (sum to 1.0)
ds_probs_mc  = [0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01];
cum_probs    = cumsum(ds_probs_mc);

% Consequences per damage state
rc_mc  = [0,    0.03,  0.15,  0.50,  2.00];   % repair cost [M$]
dt_mc  = [0,    1,     7,     21,    60  ];    % downtime    [days]
cas_mc = [0,    0.005, 0.02,  0.10,  0.50];   % casualties  [%]

% Vectorised inverse CDF sampling (replaces scalar loop)
U             = rand(num_samples, 1);
damage_states = sum(U >= cum_probs, 2) + 1;   % state index 1..5

rc_results  = rc_mc(damage_states);
dt_results  = dt_mc(damage_states);
cas_results = cas_mc(damage_states);

% Statistics
E_rc   = mean(rc_results);   SD_rc  = std(rc_results);
E_dt   = mean(dt_results);   SD_dt  = std(dt_results);
E_cas  = mean(cas_results);  SD_cas = std(cas_results);

fprintf('\n--- Step 4b: Monte Carlo Loss (%d samples) ---\n', num_samples);
fprintf('Repair cost: $%.3f M  (SD: $%.3f M,  CV: %.2f)\n', E_rc,  SD_rc,  SD_rc/E_rc);
fprintf('Downtime:    %.2f days (SD: %.2f days, CV: %.2f)\n', E_dt,  SD_dt,  SD_dt/E_dt);
fprintf('Casualties:  %.4f%% (SD: %.4f%%,  CV: %.2f)\n',   E_cas, SD_cas, SD_cas/E_cas);

%% ========================================================================

% STEP 4b -- PLOTS: Loss distributions
%% ========================================================================

figure('Name', 'PBEE Step 4b: Loss Distributions');

subplot(1,3,1);
```

```
histogram(rc_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'b');
xlabel('Repair Cost ($M)'); ylabel('Probability');
title('Repair Cost Distribution');
xline(E_rc, 'r--', sprintf('E=\\$%.2fM', E_rc), 'LineWidth', 1.5);
grid on;

subplot(1,3,2);
histogram(dt_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'r');
xlabel('Downtime (days)'); ylabel('Probability');
title('Downtime Distribution');
xline(E_dt, 'b--', sprintf('E=%.1f d', E_dt), 'LineWidth', 1.5);
grid on;

subplot(1,3,3);
histogram(cas_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'g');
xlabel('Casualties (%)'); ylabel('Probability');
title('Casualty Distribution');
xline(E_cas, 'k--', sprintf('E=%.3f%%', E_cas), 'LineWidth', 1.5);
grid on;

sgtitle('Step 4b -- Monte Carlo Loss Distributions');

saveas(gcf, 'loss_distributions.png');
```

I.8 Part VIII: Utility

Miscellaneous utility functions and tools.

I.8.1 Identicon

هجئاتن لوبق لبق ةيانعب هتحص مييقت ءارقلا بلعو .رذحب هريسفت يغبنيو *OpenAI, 2025* ةطساوب لاثملا اذه دلُوُ

Code that creates identicons as described in chapter H

```
% Book Chapter Identicon Generator with separate filename and title
% ================================================================
%
================================================================================

% BOOK CHAPTER IDENTICON GENERATOR
%
================================================================================

% Generates a unique visual "identicon" -- a small symmetric icon
derived
```

```
% deterministically from a chapter title -- for use as a chapter header
% or visual identifier in the book.
%
% HOW IT WORKS:
%   1. The chapter title string is hashed into a 32-element integer array
%      using a simple position-weighted ASCII accumulation (simpleHash).
%   2. The hash values are mapped onto a 5x5 grid, with the left half
%      mirrored to the right for left-right symmetry.
%   3. Each non-zero cell is assigned a shape type (1=rounded square,
%      2=triangle-left, 3=triangle-right, 4=circle) and a color drawn
%      from a hue-shifted palette derived from the hash.
%   4. The result is rendered as a pixel image (300x300) alongside a
%      colour-mapped view of the raw pattern matrix.
%
% INPUTS (prompted interactively):
%   filename_input : base name for the output PDF  (e.g. 'C-14')
%   title_input    : chapter title string used to generate the hash
%
% OUTPUT:
%   <filename_input>.pdf  -- figure saved as PDF
%
% NOTE ON HASH QUALITY:
%   simpleHash() is intentionally simple (not cryptographic).  Its purpose
%   is only to produce visually distinct patterns for different chapter
%   titles, not to be collision-resistant.  Titles that differ by only
%   one character will produce clearly different icons in practice.
%
% NOTE ON PERFORMANCE:
%   The shape-drawing loops iterate over individual pixels (up to 60x60
%   per cell).  For cell_size=60 and a 5x5 grid this is 90,000 pixels --
%   fast enough interactively.  Increasing cell_size will slow rendering
%   quadratically.  Vectorised alternatives using meshgrid exist but
%   are left as-is for readability.
%
% ================================================================================


clear; clc;

%
% --------------------------------------------------------------------------------

% Section 1 -- User inputs
%
% --------------------------------------------------------------------------------

filename_input = input('Enter filename for PDF (e.g., C-14): ', 's');
if isempty(filename_input)
    filename_input = 'C-14';
```

```
end

title_input = input('Enter chapter title (e.g., Performance Based Earthquake Engineering): ', 's');
if isempty(title_input)
    title_input = 'Performance Based Earthquake Engineering';
end

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 2 -- Generate hash from chapter title
%% ------------------------------------------------------------------------

hash_values = simpleHash(title_input);
hash_str    = num2str(hash_values);

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 3 -- Build the 5x5 pattern matrix
%% ------------------------------------------------------------------------

% Each cell is assigned an integer 0..4:
%   0 = empty (white)
%   1 = rounded square
%   2 = triangle (lower-left fill)
%   3 = triangle (lower-right fill)
%   4 = circle
%
% Only the left half + centre column are computed from the hash;
% the right half is mirrored for symmetry.

grid_size = 5;
pattern   = zeros(grid_size);

for i = 1 : grid_size
    % Left half (columns 1 .. floor(n/2))
    for j = 1 : floor(grid_size/2)
        hash_idx        = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j)    = mod(hash_values(hash_idx), 5);
        pattern(i, grid_size-j+1) = pattern(i,j);   % mirror
    end
    % Centre column (for odd grid size)
    if mod(grid_size, 2) == 1
        j        = ceil(grid_size/2);
        hash_idx = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
```

```
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 4 -- Build colour palette from hash
%
-------------------------------------------------------------------------

% Base hue derived from first three hash values; four colours at 90-
degree
% hue intervals for variety.

base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360) / 360;
colors   = [ hsv2rgb([mod(base_hue,        1), 0.8, 0.9]) ;   % primary
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]) ;   %
complementary 1
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.50, 1), 0.8, 0.8]) ;   %
complementary 2
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85]) ]; %
complementary 3

%
-------------------------------------------------------------------------

% Section 5 -- Render pixel image
%
-------------------------------------------------------------------------

cell_size = 60;                                  % pixels per grid
cell
img_size  = grid_size * cell_size;
identicon = ones(img_size, img_size, 3);         % white RGB
background

for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size

        value = pattern(i,j);
        if value == 0, continue; end   % empty cell

        % Pixel bounding box for this cell (with padding)
        padding   = ceil(cell_size * 0.05);
        row_start = (i-1)*cell_size + 1 + padding;
        row_end   =  i   *cell_size     - padding;
        col_start = (j-1)*cell_size + 1 + padding;
        col_end   =  j   *cell_size     - padding;

        % Colour selection based on position and value
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
        color_idx = mod(i*j + value, 4) + 1;
        color     = colors(color_idx, :);

        switch value

            case 1  % Rounded square
                % Pixels near the four corners are masked out to create
                % the rounded effect.
                corner_r = ceil(cell_size * 0.15);
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        tl = (r-row_start)^2 + (c-col_start)^2;
                        tr = (r-row_start)^2 + (c-col_end  )^2;
                        bl = (r-row_end  )^2 + (c-col_start)^2;
                        br = (r-row_end  )^2 + (c-col_end  )^2;
                        in_corner = ...
                            (r < row_start+corner_r && c < col_start+corner_r && tl > corner_r^2) || ...
                            (r < row_start+corner_r && c > col_end  -corner_r && tr > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c < col_start+corner_r && bl > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c > col_end  -corner_r && br > corner_r^2);
                        if ~in_corner
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 2  % Triangle: lower-left fill (hypotenuse from top-left to bottom-right)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        if row_start+r <= img_size && col_start+c <= img_size
                            identicon(row_start+r, col_start+c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 3  % Triangle: lower-right fill (hypotenuse from top-right to bottom-left)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
```

```
                    for c = 0 : fill_width
                        cc = col_end - c;
                        if row_start+r <= img_size && cc > 0 && cc <=
img_size
                            identicon(row_start+r, cc, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 4  % Circle: filled disk within the padded cell
                cr     = (row_start + row_end) / 2;
                cc_ctr = (col_start + col_end) / 2;
                radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9;
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        if sqrt((r-cr)^2 + (c-cc_ctr)^2) <= radius
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

        end   % switch
    end
end

%
% Section 6 -- Compose figure
%
fig = figure('Position', [100, 100, 800, 400], 'Color', 'none');

% Left panel: rendered identicon with grid lines
subplot('Position', [0.05, 0.12, 0.45, 0.75]);
imshow(identicon);
hold on;
for k = 1 : grid_size-1
    line([0, img_size], [k*cell_size, k*cell_size], 'Color',
[0.6,0.6,0.6], 'LineWidth', 1);
    line([k*cell_size, k*cell_size], [0, img_size], 'Color',
[0.6,0.6,0.6], 'LineWidth', 1);
end
hold off;

% Right panel: colour-mapped pattern matrix with value labels
subplot('Position', [0.52, 0.12, 0.45, 0.75]);
imagesc(pattern);
colormap(hsv(5));
axis square;  grid on;
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
set(gca, 'Color', 'none');
for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size
        text(j, i, num2str(pattern(i,j)), ...
            'HorizontalAlignment', 'center', ...
            'Color', 'w', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 14, ...
            'EdgeColor', 'k', 'Margin', 1);
    end
end

% Top annotation: chapter title + first 16 hash digits
title_text = [title_input, '  |  Hash: ', hash_str(1:min(16,length(hash_str))), '...'];
annotation('textbox', [0.1, 0.91, 0.8, 0.07], ...
           'String', title_text, 'EdgeColor', 'none', ...
           'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 14, ...
           'FontWeight', 'bold', 'Color', [0.2, 0.2, 0.2]);

%% ------------------------------------------------------------------------

% Section 7 -- Export
%% ------------------------------------------------------------------------

output_filename = [filename_input, '.pdf'];
print(fig, '-dpdf', output_filename);
fprintf('Saved to: %s\n', output_filename);


%% ========================================================================

% LOCAL FUNCTION: simpleHash
%% ========================================================================

% Produces a 32-element integer array from a string by accumulating
% position-weighted ASCII values modulo 256.
%
% This is NOT a cryptographic hash -- it is designed only to produce
% visually distinct patterns for different chapter titles.
%
% For each character str(i) and each output slot j:
%   hash(position_factor) += char_code(i) * i   (mod 256)
%
% where position_factor = mod(i*j, 32) + 1 distributes contributions
% across all 32 output slots.

function hash_values = simpleHash(str)

```


ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

```
hash_values = zeros(1, 32);

for i = 1 : length(str)
    char_code = double(str(i));
    for j = 1 : min(32, length(str))
        slot              = mod(i*j, 32) + 1;
        hash_values(slot) = mod(hash_values(slot) + char_code * i, 256);
    end
end

end   % simpleHash
```


تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

J أمثلة باستخدام Mathcad

تتضمن الصفحات الآتية واجبات محلولة من مقرر مقدمة في التحليل الإنشائي (3525). ويعرض الكتاب كثيرا من هذه المسائل أيضا بوصفها أمثلة محلولة، غير أنه تعذر إنشاء روابط تشعبية بين حلول الكتاب والحلول المناظرة الواردة فيما يأتي.

أعد السيد Christopher Segura هذه الحلول، وهي ليست بالضرورة كاملة أو مثلى.

حلت جميع المسائل باستخدام Mathcad، الذي كنت أطلب من الطلبة استعماله في جميع الواجبات لسهولة تعلمه والبدء في العمل به.

يستخدم Mathcad هنا أداة حسابية لا بديلا من التفكير التحليلي. تدخل المعادلات بالترميز الرياضي الطبيعي وتقوم كما كتبت، وتعالج الوحدات بوضوح واتساق، كما تنتشر التغييرات تلقائيا في ورقة العمل كلها، فتجتمع الفرضيات والحسابات والنتائج في وثيقة واحدة. ومع ذلك، فإن محدودية قدرته على التجريد الرمزي والتحكم الخوارزمي تعني أنه ينبغي أن يكمل الاشتقاقات اليدوية والفهم المفاهيمي لا أن يحل محلهما. فاستخدامه المتبصر يوضح الاستدلال الإنشائي، أما استخدامه غير النقدي فقد يحجبه. ومن المفارقات أن أعمال Mathcad سهلت أيضا اكتشاف المخالفات الأكاديمية، لأن الحلول المنسوخة كانت غالبا تكرر البنية والترميز والأخطاء نفسها.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Structural Analysis Example Problems

Victor E. Saouma

Prepared by Christopher Segura
Summer 2011

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

List of Examples

2.1	Stress Vectors
2.2	Stress Vectors 2
2.3	Principal Stresses
2.4	Stress Tensor Operations
2.5	Stress Transformation
2.6	Stress Transformation 2
2.7	Strain Invariants & Principal Strains
2.8	Equilibrium Equation
2.9	Stress-Strain
2.10	Stress-Strain 2
3.1	Displacement by Double Integration
4.1	Live Load Reduction
4.2	Wind Load
4.3	Earthquake Load on a Frame
4.4	Earthquake Load on a Tall Building
4.5	Hysdrostatic Load
4.6	Thermal Expansion/Stress
5.1	Statically Indeterminate Cable Structure
5.2	Simply Supported Beam
5.3	Parabolic Load
5.4	Three Span Beam
5.5	Three Hinged Gable Frame
5.6	Inclined Supports
7.1	Truss, Method of Joints
7.2	3D Truss
7.3	Truss I, Matrix Method
7.4	Truss II, Matrix Method
7.5	Truss, Method of Sections
8.1	Funicular Cable Structure
8.2	Design of Suspension Bridge
10.1	Simple Shear and Moment Diagram
10.2	Frame Shear and Moment Diagram
10.3	Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load
10.4	Shear and Moment Diagrams for Frame
10.5	Shear and Moment Diagrams for Inclined Frame
10.6	3D Frame
11.1	Three Hinged Arch, Point Loads
11.2	Semi-Circular Arch
11.3	Statically Indeterminate Arch
11.4	Semi-circular Box Girder
11.5	Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load
11.6	Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Uniform Load
12.1	Moment Area, Cantilevered Beam
12.2	Moment Area, Simply Supported Beam
12.3	Maximum Deflection
12.4	Frame Deflection
12.5	Frame Subjected to Temperature Loading
12.6	Conjugate Beam
12.7	Conjugate Beam 2
13.1	Deflection of a Cantilever Beam

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection
13.3 Deflection of a Frame
13.4 Rotation of a Frame

13.5 Truss Deflection
13.6 Torsional and Flexural Deformation
13.7 Flexural and Shear Deformation in a Beam
13.8 Thermal Effects in a Beam
13.9 Deflection of a Truss
13.10 Thermal Deflection of a Truss: I
13.11 Thermal Deflection of a Truss: II
13.12 Truss with Initial Camber
13.13 Prestressed Concrete Beam with Continuously Variable I
14.1 Steel Building Frame Analysis
14.2 Analysis of Irregular Building Frame
14.3 Redundant Truss Analysis
14.4 Truss with Two Redundants
14.5 Analysis of Nonprismatic Members
14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Beams
14.7 Rectangular Frame, External Load
14.8 Frame with Temperature and Support Displacements
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change
15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads
16.1 Propped Cantilever Beam
16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection
16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection
16.4 Frames, Slope Deflection
16.5 Box Culvert, Slope Deflection
16.6 Continuous Beam
16.7 Continuous Beam, Simplified Method
16.8 Continuous Beam, Inintial Settlement
16.9 Frame
16.10 Frame with Side Load
17.1 Beam
17.2 Frame

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.1 Stress Vectors

For the following stress tensor at point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} := \sigma = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the traction (or stress vector) **t** passing through P and parallel to the plane ABC where A(4,0,0), B(0,2,0) and C(0,0,6)

Solution:

The vector normal to the plane can be found by taking the cross products of vectors AB and AC

$$\mathbf{N} = AB \times AC = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12\,e_1 + 24\,e_2 + 8\,e_3$$

The unit normal of N is given by

$$\mathbf{n} = \frac{3}{7}e_1 + \frac{6}{7}e_2 + \frac{2}{7}e_3$$

$$n := \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Hence the stress vector traction will be

$$t := n \cdot \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\mathbf{t} = -\frac{9}{7}e_1 + \frac{5}{7}e_2 + \frac{10}{7}e_3$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.2 Stress Vectors 2

The state of stress through a continuum is given with respect to the cartesian axes by

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5(x_2)^2 & 0 \\ 5(x_2)^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot MPa$$

Determine the stress vector at $P(1,1,\sqrt{3})$ of the plane that is normal to the tangent to the cylindrical surface $(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4$ at P

Solution:

Vector Equation

$$v(x) := (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4$$

Gradient

$$Vect1(x) := \nabla_x v(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot x_2 \\ 2\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

For $x_2 := 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 := \sqrt{4 - (x_2)^2} = 1.732$

Normalized Vector

$$n := \frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x)\cdot n = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 1.732 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.3 Principal Stresses

The stress tensor is given at a point by point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine the principal stress values and the corresponding directions

Solution:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Simplifying the determinant

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ simplify } \rightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0$$

thus the roots are

$$\lambda := -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Note that those are the three eigenvalues of the stress vector. If we let the x_1 axis be the one corresponding to the direction of λ_2 and n_i^2 be the direction cosines of this axis, then we have

$$(3-\lambda_2)n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \rightarrow 5\cdot n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$$

$$n_1^2 + (0-\lambda_2)\cdot n_2^2 + 2n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0 \qquad n_1^2 = 0 \qquad n_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + (0-\lambda_2)n_3^2 = 0 \rightarrow n_1^2 + 2\cdot n_2^2 + 2\cdot n_3^2 = 0$$

Similarly, if we let x_2 be the one corresponding to the direction of λ_1 and n_i^1 be the direction cosines of this axis,

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\left(3-\lambda_1\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow 2\cdot n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,1}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_2^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad n_3^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-n_3^{\,2}=0$$

Finally, if we let x_3 be the one corresponding to the direction of λ_3 and n_i^3 be the direction cosines of this axis,

$$\left(3-\lambda_3\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow -n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-4\cdot n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0 \qquad n_1^{\,3}=-\frac{2}{\sqrt{6}} \quad n_2^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}} \quad n_3^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-4\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_{pd}:=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.4 Stress Tensor Operations

For the following stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Determine directly the three Invariants I_σ, II_σ and III_σ
b) Determine the principal stresses and principal stress directions
c) Show that the transformation tensor of direction cosines transforms the original stress tensor into the diaganol axes stress tensor
d) Recompute the three invariants from the principal stresses
e) Split the stress tensor into its spherical and deviator parts
f) Show that the first invariant of the deviator is zero

Solution:

a) $I_\sigma := \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} = 20$

$II_\sigma := \sigma_{1,1}\cdot\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\cdot\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\cdot\sigma_{1,1} - \sigma_{1,2}\cdot\sigma_{2,1} = 123$

$III_\sigma := |\sigma| = 216$

b) $\sigma_p := \text{eigenvals}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$n_p := \text{eigenvecs}(\sigma) = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $n_p^{\,T}\cdot\sigma\cdot n_p = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

d) $I_{\sigma pd} := \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} + \sigma_{p_3} = 20$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$II_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2} + \sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} + \sigma_{p_3}\cdot\sigma_{p_1} = 123$$

$$III_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} = 216$$

e) $\sigma_{mean} := \frac{I_{\sigma pd}}{3} = 6.667$

$$\sigma_{sperical} := \begin{pmatrix} \sigma_{mean} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{mean} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mean} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 6.667 \end{pmatrix}$$

f) $$\sigma_{deviator} := \sigma - \sigma_{sperical} = \begin{pmatrix} -0.667 & -3 & 0 \\ -3 & -0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

2.5 Stress Transformation

Show that the transformation tensor of direction cosines for the stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

transforms the original stress tensor into the diaganol principal axes stress tensor

Solution:

$$n_{pd} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} := n_{pd}\cdot\sigma\cdot n_{pd}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.6 Stress Transformation 2

The octahedral plane is the plane which makes equal angles with the principal stress directions. Show that the shear stress on this plane, the so-called octahedral shear stress, is given by

$$\sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2}$$

Solution:

$$v := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$n := \left(\frac{v}{|v|}\right)^T = (0.577 \quad 0.577 \quad 0.577)$$

$$\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}$$

$$t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \rightarrow \begin{pmatrix}0.577\cdot\sigma_I & 0.577\cdot\sigma_{II} & 0.577\cdot\sigma_{III}\end{pmatrix}$$

$$tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T \rightarrow 0.333\cdot\sigma_I + 0.333\cdot\sigma_{II} + 0.333\cdot\sigma_{III}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \sqrt{t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T - tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{0.222\cdot\sigma_I^2 - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{II} - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{II}^2 - 0.222\cdot\sigma_{II}\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{III}^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) - \sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) = 0$$

2.7 Strain Invariants & Principal Strains

Determine the planes of principal strains for the following strain tensor

$$E := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

The strain invariants are given by

$$I_E = E_{ii} = 2$$

$$II_E = \frac{1}{2}\cdot\left(E_{ij}\cdot E_{ij} - E_{ii}\cdot E_{jj}\right) = -1 + 3 = 2$$

$$III_E = \left|E_{ij}\right| = -3$$

The principal strains by

$$E_{ij} - \lambda\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$E_1 = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.3$$

$$E_2 = \lambda_2 = 1$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$E_3 = \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1.3$$

The eigenvectors for $E_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ give the principal directions n^1

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1}$$

$$n_{3,1} = 0$$

$$n^1 \cdot n^1 = 1$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{13}+13}{12}+1\right)\cdot\left(n_{2,1}\right)^2 = 1$$

$$n_{2,1} = 0.6$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot 0.6 = 0.8$$

$$n^1 = (0.8 \quad 0.6 \quad 0)$$

For the second eigenvector λ_2=1

$$\begin{pmatrix} 1-1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,2} \\ n_{2,2} \\ n_{3,2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -\left(n_{2,2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -(n_{2,2}) + \sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^2 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Finally, the third eigenvector can be obtained by the same manner, but more easily from

$$n^3 = n^1 \times n^2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.6e_1 - 0.8e_2$$

Therefore

$$a_i^j = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\cdot E\cdot a^T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3 \end{pmatrix}$$

2.8 Equilibrium Equations

In the absence of body forces, does the following stress distribution

$$T(x,\nu) = \begin{bmatrix} (x_2)^2 + \nu\left[(x_1)^2 - (x_2)^2\right] & -2\cdot\nu\cdot x_1\cdot x_2 & 0 \\ -2\nu\cdot x_1\cdot x_2 & (x_1)^2 + \nu\left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \nu\left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

where v is a constant, satisfy equilibrium?

Solution:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{1j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{13} = 2\cdot\nu\cdot x_1 - 2\cdot\nu\cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{2j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{23} = -2\cdot\nu\cdot x_2 + 2\cdot\nu\cdot x_2 = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{3j} = \frac{\partial}{\partial x_1} T_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} T_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{33} = 0$$

Therefore, equilibrium is satisfied.

2.9 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Lagrangian strain tensor is given by

$$E := \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

and the material is steel with $\lambda := 119.2\text{GPa}$ and $\mu := 79.2\text{GPa}$

Solution:

$$C := \begin{pmatrix} \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\gamma := \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,2} \\ E_{3,3} \\ E_{1,2} \\ E_{1,3} \\ E_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} \\ 3 \times 10^{-5} \\ 5 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$\sigma := C \cdot \gamma = \begin{pmatrix} 0.01667 \\ 0.01826 \\ 0.01667 \\ 0.00792 \\ 0.00317 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot GPa$$

2.10 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Cauchy stress tensor is given by

$$\sigma := \begin{pmatrix} 100 & 42 & 6 \\ 42 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

with $E := 207GPa$, $\mu := 79.2GPa$, and $\nu := 0.3$

Solution:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{207\cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207\cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207\cdot GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} \end{pmatrix}$$

$$s := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{2,2} \\ \sigma_{3,3} \\ \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 15 \\ 42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

$$\gamma := S\cdot s = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} \\ -1.763 \times 10^{-4} \\ -6.957 \times 10^{-5} \\ 5.303 \times 10^{-4} \\ 7.576 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \frac{\gamma_4}{2} & \frac{\gamma_5}{2} \\ \frac{\gamma_4}{2} & \gamma_2 & \frac{\gamma_6}{2} \\ \frac{\gamma_5}{2} & \frac{\gamma_6}{2} & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} & 2.652 \times 10^{-4} & 3.788 \times 10^{-5} \\ 2.652 \times 10^{-4} & -1.763 \times 10^{-4} & 0 \times 10^{0} \\ 3.788 \times 10^{-5} & 0 \times 10^{0} & -6.957 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

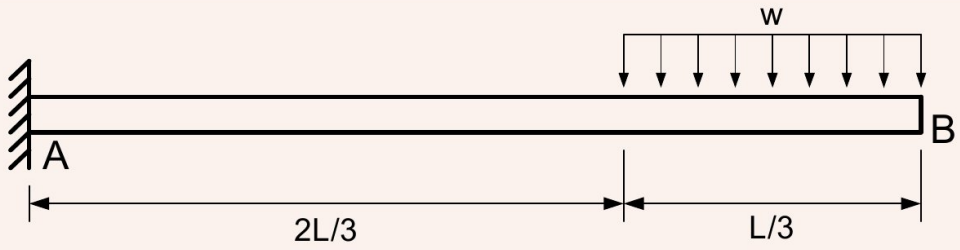
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3.1 Displacement by Double Integration

Determine the deflection at B for the following cantilevered beam.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

At $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x + C_1$$

However we have at x=0, dy/dx=0, C_1=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 + C_2$$

Again we have at x=0, y=0, C_2=0

At $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2 - w\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)\cdot\left(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2}\right)$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x - \frac{w}{6}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_3$$

Applying the boundary condition at $x = \frac{2L}{3}$, we must have $\frac{dy}{dx}$ equal to the value coming frmo the left C_3=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 - \frac{w}{24}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

Again following the same argument as above, C_4=0

Substituting for x=L we obtain

$$y = \frac{163}{1944}\cdot\frac{wL^4}{E\cdot I}$$

4.1 Live Load Reduction

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

A four storey office building has interior columns spaced 30ft apart in the two directions. If the flat roof loading is 50 lb/ft^2, determine the reduced live load supported by a typical interior column located on the ground level

Solution:

$L_0 := 50psf$

$A_T := 30ft \cdot 30ft = 900 \cdot ft^2$

$K_{LL} := 4$

$L_{floor}(L_0, A_T, K_{LL}) := L_0 \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} \cdot A_T}}\right) \cdot psf$

$L_{floor} := L_{floor}\left(\frac{L_0}{psf}, \frac{A_T}{ft^2}, K_{LL}\right) = 25 \cdot psf$

$Reduction := \frac{L_{floor}}{L_0} = 50 \cdot \%$

$L_{roof} := 0.6 \cdot L_0 = 30 \cdot psf$

$F_1 := \left(3 \cdot L_{floor} \cdot A_T + L_{roof} \cdot A_T\right) = 94.5 \cdot kip$

Note that without reduction the total load woul dhave been

$F_2 := 4 \cdot L_0 \cdot A_T = 180 \cdot kip$

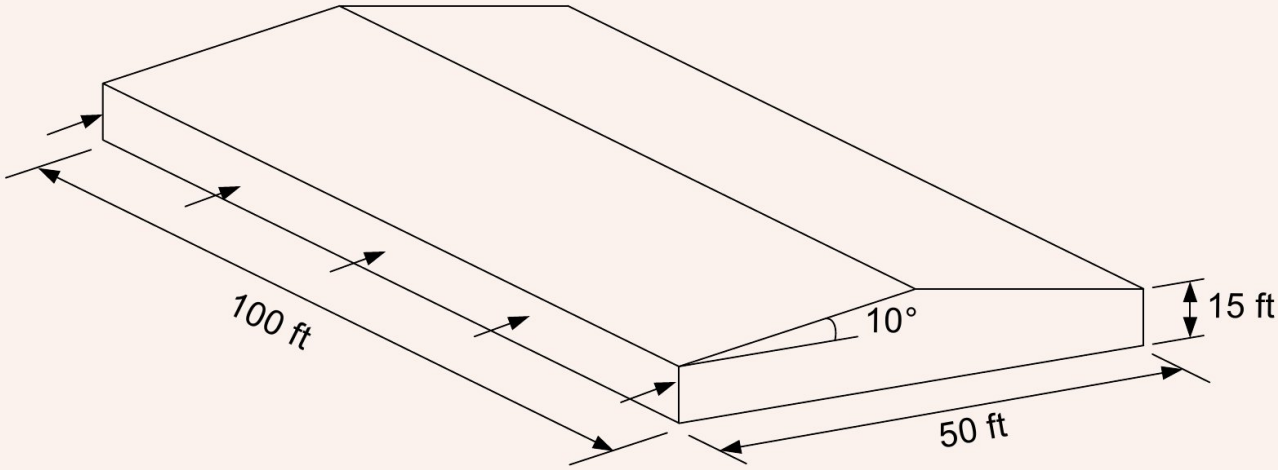
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.2 Wind Load

Wind blows on the side of the fully enclosed agricultural building located on open flat terrain in Oklahoma. Determine the external pressure acting on the roof. Also, what is the internal pressure in the building which acts on the roof? Use linear interpolation to determine q_h and C_p.



Solution:

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, V, I\right) := 0.00256 \cdot K_z \cdot K_{Zt} \cdot K_d \cdot V^2 \cdot I \cdot psf$$

$K_{Zt} := 1$

$K_d := 1$

$V := 90mph$

$I := 0.87$

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) \rightarrow 18.04 \cdot K_z \cdot psf$$

$K_{z15} := 0.85$

$$q_{z15} := q_z\left(K_{z15}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 15.334 \cdot psf$$

$K_{z20} := 0.9$

$$q_{z20} := q_z\left(K_{z20}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 16.236 \cdot psf$$

$$h := 15ft + \frac{1}{2} \cdot 25ft \cdot \tan(10deg) = 17.204 \cdot ft$$

$$\frac{q_h - q_{z15}}{h - 15ft} = \frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$q_h := \left(\frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}\right)\cdot(h - 15ft) + q_{z15}$$

$$q_h = 15.732\cdot psf$$

External pressure on windward side of roof

$$p(q_h, G, C_p) := q_h\cdot G\cdot C_p\cdot psf$$

$$G := 0.85$$

$$L := 50ft$$

$$\frac{h}{L} = 0.344$$

$$\frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.9 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.9 - \frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.775$$

$$p_{Windward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -10.367\cdot psf$$

External pressure on leeward side of roof

$$\frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.5 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.5 - \frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.375$$

$$p_{Leeward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -5.018\cdot psf$$

Internal pressure

$$p_{int}(q_h, G, C_{pi}) := -q_h\cdot G\cdot C_{pi}$$

$$C_{pi1} := 0.18$$

$$C_{pi2} := -0.18$$

$$p_{int1} := p_{int}(q_h, G, C_{pi1}) = -2.407\cdot psf$$

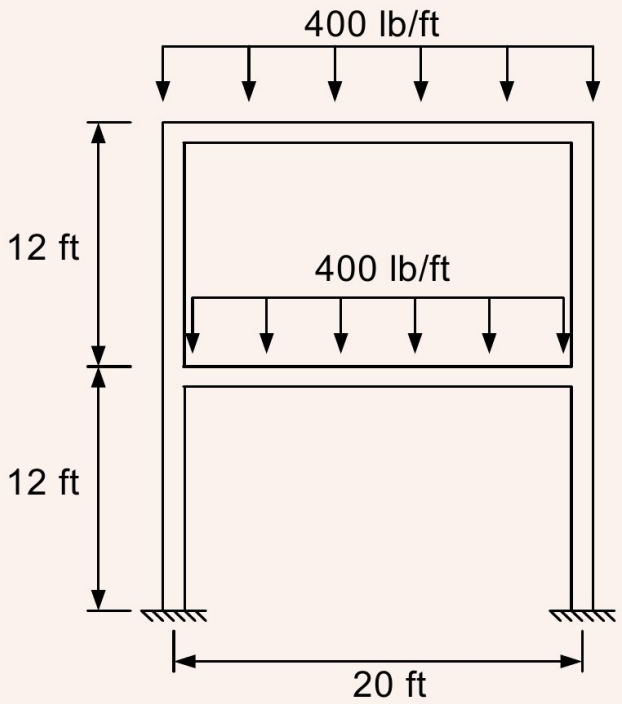
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$p_{int2} := p_{int}(q_h, G, C_{pi2}) = 2.407 \cdot psf$

4.3 Earthquake Load on a Frame

Determine the approximate earthquake forces for the ductile hospital frame structure shown below. The dead load for each floor is $DL := 200 \frac{lbf}{ft}$ and the live load is $LL := 400 \frac{lbf}{ft}$. The structure is built on soft clay. Use DL+0.5LL as the weight of each floor. The building is in seismic zone 3.



Solution:

1. The fundamental period of vibration is

$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot sec$

$C_t := 0.03$

$h := 24ft$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{ft}\right) = 0.325\ s$

2. The C coefficient is

$C(S, T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$S := 2.0$

$C := C\left(S, \frac{T}{sec}\right) = 5.286 > 2.75$

Use $C := 2.75$

3. The other coefficients are $Z := 0.3,\ I := 1.25,\ R_W := 12$

4. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075 \quad \text{OK!}$$

5. The total vertical load is

$L := 20ft$ frame width

$W := 2\cdot(DL + 0.5\cdot LL)\cdot L = 16000\cdot lbf$

6. The total seismic base shear is

$$V := \frac{Z\cdot I\cdot C}{R_W}\cdot W = 1375\cdot lbf$$

7. Since T < 0.7sec, there is no whiplash
8. The toal load on each floor is given by

$h_1 := 12ft$

$h_2 := 24ft$

$$F_2 := \frac{V\cdot h_2}{h_1 + h_2} = 916.7\cdot lbf$$

$$F_1 := \frac{V\cdot h_1}{h_1 + h_2} = 458.3\cdot lbf$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.4 Earthquake Load on a Tall Building

Determine the approximate critical lateral loading for a 25 storey, ductile, rigid space frame concrete structure in the short direction. The rigid frames are spaced 25 ft apart in the cross section and 20 ft in the longitudinal direction. The plan dimension of the building is 175x100 ft, and the structure is 25(12ft)=300 ft high. This office building is located in an urban environment with a wind velocity of $V := 70\text{mph}$ and in seismic zone 4. For this investigation, an average building total dead load of $DL := 192\text{psf}$ is used. Soil conditions are unknown.

Solution:

1. The total building weight is

$$L := 100\text{ft}$$
$$B := 175\text{ft}$$
$$W := DL \cdot L \cdot B \cdot 25 = 84000 \cdot \text{kip}$$

2. The fundamental period of vibration for a rigid frame is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot \text{sec}$$
$$C_t := 0.03$$
$$h := 25 \cdot 12\text{ft} = 300 \cdot \text{ft}$$
$$T := T\left(C_t, \frac{h}{\text{ft}}\right) = 2.16\,\text{s} > 0.7\text{s} \quad \text{OK!}$$

3. The C coefficient is

$$C(S, T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$
$$S := 1.5$$
$$C := C\left(S, \frac{T}{\text{sec}}\right) = 1.12 < 2.75$$

4. The other coefficients are $Z := 0.4$, $I := 1$, $R_W := 12$

5. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 > 0.075 \quad \text{OK!}$$

6. The total seismic base shear along the critical short direction is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 3139 \cdot \text{kip}$$

7. Since T > 0.7sec, the whiplash effect must be considered

$$F_t := 0.07 \cdot \frac{T}{\text{sec}} \cdot V = 475 \cdot \text{kip}$$

Hence the total triangular load is

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$F_{tot} := V - F_t = 2664 \cdot kip$

8. Let us check if wind load governs. From table xx we conservatively assume a uniform wind pressure of 29 psf resulting in a total lateral force of

$p := 29psf$

$P_w := p \cdot h \cdot B = 1522.5 \cdot kip$ < 3108 kip

The magnitude of the total seismic load is clearly larger than the totoal wind force

4.5 Hydrostatic Load

The basement of a building is 12 ft below grade. Ground water is located 9 ft below grade. What thickness concrete slab is required to exactly balance the hydrostatic uplift?

Solution:

The hydrostatic pressure must be countered by the pressure caused by the weight of the concrete. Since p=γh we equate the two pressures and solve for h, the height of the concrete slab.

$h := 12ft$

$h_{water} := 9ft$

$d := h - h_{water} = 3 \cdot ft$

$\gamma_{water} := 62.4 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{concrete} := 150 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{water} \cdot d = \gamma_{concrete} \cdot h$

$h := \frac{\gamma_{water} \cdot d}{\gamma_{concrete}} = 15 \cdot in$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.6 Thermal Expansion/Stress

A low-rise building is enclosed along one side by a 100 ft-long clay masonry ($\alpha := 3.6\cdot10^{-6}\frac{in}{in\cdot\Delta°F}$, $E := 2400000psi$)bearing wall.

The structure was built at a temperature of $T := 60\Delta°F$ and is located in the northern part of the United States where the temperature range is between $T_{low} := -20\cdot\Delta°F$ and $T_{high} := 120\cdot\Delta°F$.

Solution:

1. Assume that the wall can move freely with no restraint from cross-walls and foundations. The wall expansion and contraction (summer and winter) are given by

$$\Delta L = \alpha\cdot\Delta T\cdot L$$

$$\Delta L_{Summer} := \alpha\cdot\left(T_{high} - T\right)\cdot 100ft = 0.26\cdot in$$

$$\Delta L_{Winter} := \alpha\cdot\left(T_{low} - T\right)\cdot 100ft = -0.35\cdot in$$

2. We now assume (conservatively) that the free movement cannot occur (ΔL=0) hence the resulting stress would be equal to

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta L}{L} = E\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T\cdot L}{L} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma_{Summer} := E\cdot\alpha\cdot\left(T_{high} - T\right) = 518\cdot psi$$

$$\sigma_{Winter} := E\cdot\alpha\cdot\left(T_{low} - T\right) = -691\cdot psi$$

Note the tensile stress being beyond the masonry capacity. Cracking will occur.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

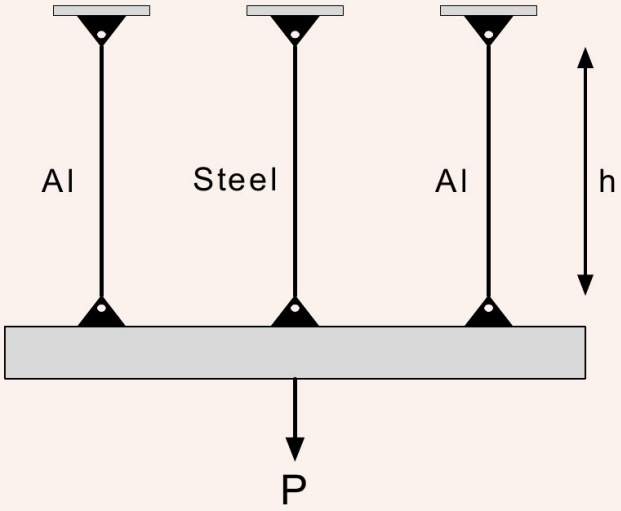
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.1 Statically Indeterminate Cable Structures

A rigid plate is supported by two aluminum cables and a steel one. Determine the force in each cable.



If the rigid plate supports a load P, determine the stress in each of the three cables.

Solution:

1. We have three unknowns and only two independent equations of equilibrium. Hence the problem is statically indeterminate to the first degree.

$$\sum M_z = 0 \quad P_{Al}^{left} = P_{Al}^{right}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2P_{Al} + P_{St} = P$$

Thus we effectively have two unknowns and one equation

2. We need to have a third equation to solve for the three unknowns. This will be derived from the compatability of the displacements in all three cables i.e. all three displacements must be equal:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

displacements in all three cables for all three displacements must be equal.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Combine to obtain

$$\Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\frac{P_{Al}\cdot L}{E_{Al}\cdot A_{Al}} = \frac{P_{St}\cdot L}{E_{St}\cdot A_{St}} \qquad \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

or $-(EA)_{St}\cdot P_{Al} + (EA)_{Al}\cdot P_{St} = 0$

3. Solution of this system of two equations with two unknowns yield:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot(EA)_{Al} + (EA)_{St}} \cdot \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

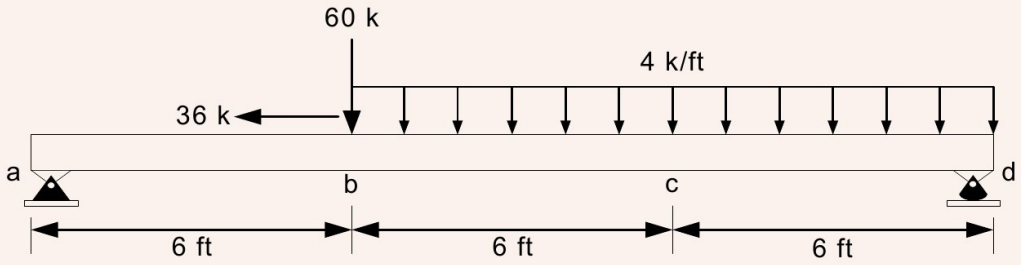
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.2 Simply Supported Beam

Determine the reactions of the simply supported beam shown below.



The beam has 3 reactions. We have 3 equations of static equilibrium. Hence it is statically determinate.

Solution:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\sum F_x = 0 \quad R_{ax} - 36\text{kip} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{ay} + R_{dy} - 60\text{kip} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \quad 12\cdot R_{ay} - 6\cdot R_{dy} - 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} = 0$$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 108\text{kip} \\ 360\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 56\text{kip} \\ 52\text{kip} \end{pmatrix}$$

Alternatively we could have used another set of equations:

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \quad 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} - R_{dy}\cdot 18\text{ft} = 0 \quad R_{dy} = 52\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \quad R_{ay}\cdot 18\text{ft} - 60\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} = 0 \quad R_{ay} = 56\text{kip}$$

Check:

$$\sum F_y = 0 \quad 56\text{kip} + 52\text{kip} - 60\text{kip} - 48\text{kip} = -0\cdot\text{kip}$$

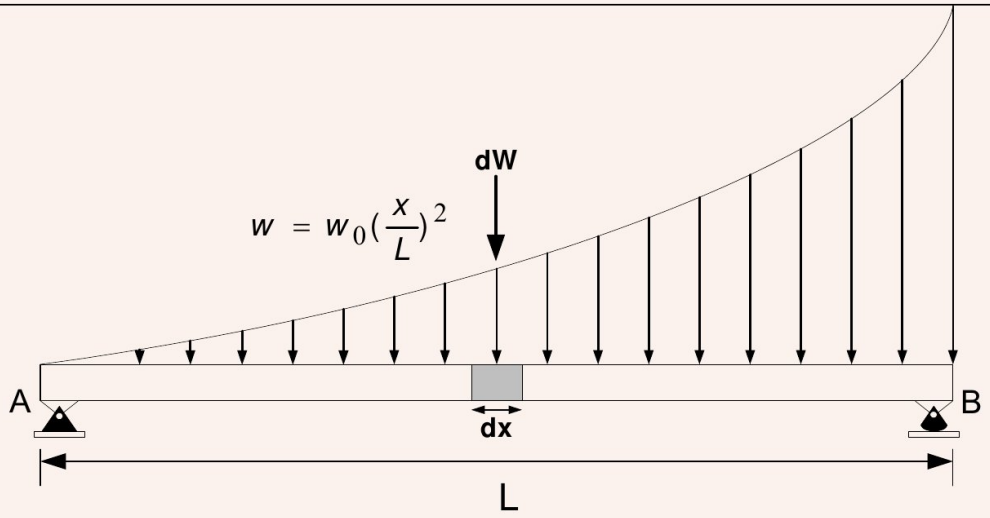
5.3 Parabolic Load

Determine the reactions of the simply supported beam of length L subjected to a parabolic load $w = w_0\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Since there are no axial forces, there are two unknowns and two equations of equilibrium. We have two equations of equilibrium ($\sum F_y$ and $\sum M$), we judiciously start with the second one, as it would directly give us the reaction at B. Considering an infinitesimal element of length dx, weight dW, an moment dM:

$$\sum M_z{}^A = 0 \qquad \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \times x - R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{L} \cdot w_0 \cdot \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L$$

With R_B determined, we solve for R_A from

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$R_A = \frac{w_0}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L = \frac{1}{12} \cdot w_0 \cdot L$$

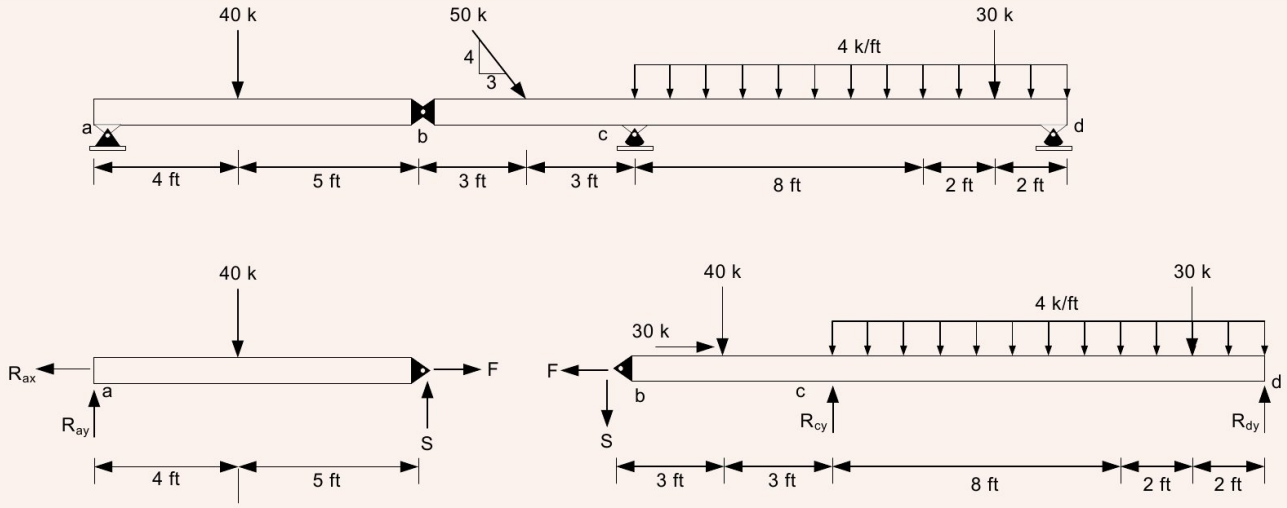
5.4 Three Span Beam

Determine the reactions of the following three span beam

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

We have 4 unknowns (R_{ax},R_{ay},R_{cy}, and R_{dy}), three equations of equilibrium and one equation of condition ($\sum M_b = 0$), thus the structure is statically determinate. Though there are many approaches to solve for those four unknowns (all of them correct), a few are simpler to pursue. In this case, it is easiest to "break" the structure into substructures and examine the free body diagram of each one of them separately.

1. Isolating ab:

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad 9\text{ft}\cdot R_{ay} - 40\text{kip}\cdot 5\text{ft} = 0 \qquad R_{ay} := \frac{40\text{kip}\cdot 5\text{ft}}{9\text{ft}} = 22.2\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 4\text{ft} - S\cdot 9\text{ft} = 0 \qquad S := \frac{40\text{kip}\cdot 4\text{ft}}{9\text{ft}} = 17.8\cdot\text{kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} := 30\text{kip}$$

2. Isolating bd:

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \qquad -S\cdot 18\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 2\text{ft} + R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{cy} := \frac{S\cdot 18\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 2\text{ft}}{12\text{ft}} = 105.7\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \qquad -S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft} - R_{dy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{dy} := \frac{-S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{12\text{ft}} = 30.1\cdot\text{kip}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Check

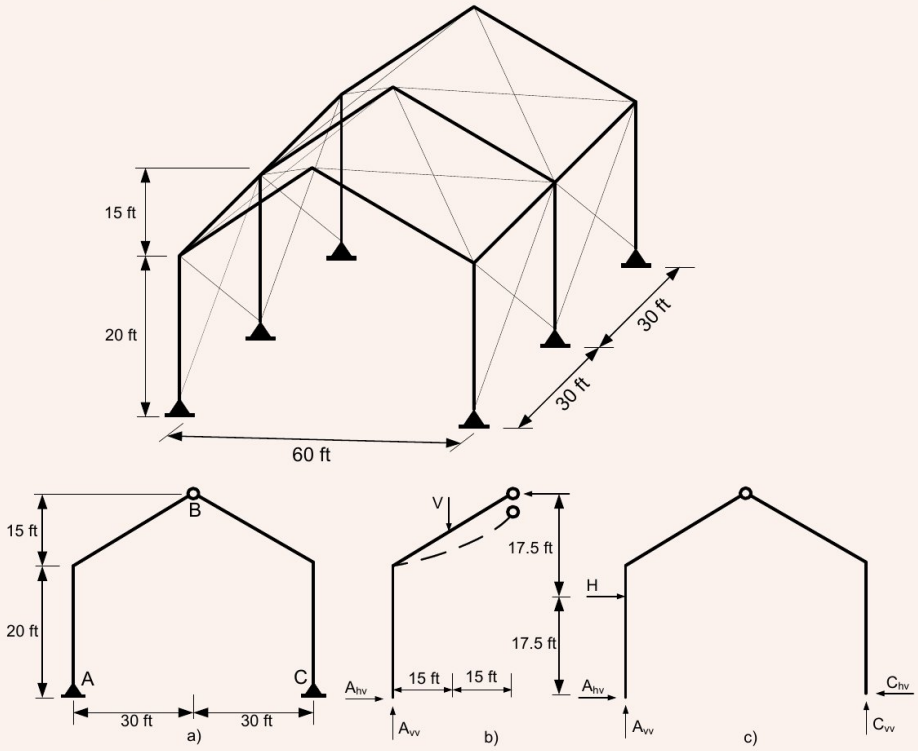
$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 40\text{kip} + R_{cy} - 4\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip} + R_{dy} = -0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.5 Three Hinged Gable Frame

The three-hinged gable frames are spaced at 30 ft on center. Determine the reactions components on the frame due to: 1) Roof dead load of 20 psf of roof area; 2) Snow load of 30 psf of horizontal projection; 3) Wind load of 15 psf of vertical projection. Determine the critical design values for the horizontal and vertical reactions.



Solution:

1. Due to smmetry, there is no vertical force transmitted by the hinge for snow and dead load, and thus we can consider only the left (or right) side of the frame.
2. Point equivalent loads:
   a) Roof dead load per one side of frame is

$$DL := 20psf \cdot 30ft \cdot \sqrt{(30ft)^2 + (15ft)^2} = 20.12 \cdot kip$$

   b) Snow load per one side of frame is

$$SL := 30psf \cdot 30ft \cdot 30ft = 27 \cdot kip$$

   c) Wind load per per frame (ignoring the suction) is

$$WL := 15psf \cdot 30ft \cdot 35ft = 15.75 \cdot kip$$

3. There are 4 reactions, 3 equations of equilibrium and one equation of condition; therefore, statically determinate. Alternatively, by symmetry there is no shear at the hinge, and we would have for the substructure two reactions at the support and one (horizontal) at the hinge.
4. The relationship between the horizontal and vertical reactions at A due to a centered vertical load, A_{hv} and A_{vv} respectively is determined by taking the moment with respect to the hinge (b):

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad 15\cdot V - 30\cdot A_{vv} + 35\cdot A_{hv} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad A_{vv} - V = 0$$

$$A_{hv} = \frac{15A_{vv}}{35}$$

Substituting for roof dead and snow load we obtain:

$$A_{vvDL} := DL = 20.12\cdot kip \qquad B_{vvDL} := A_{vvDL} = 20.12\cdot kip$$

$$A_{hvDL} := \frac{15A_{vvDL}}{35} = 8.62\cdot kip \qquad B_{hvDL} := A_{hvDL} = 8.62\cdot kip$$

$$A_{vvSL} := SL = 27\cdot kip \qquad B_{vvSL} := A_{vvSL} = 27\cdot kip$$

$$A_{hvSL} := \frac{15A_{vvSL}}{35} = 11.57\cdot kip \qquad B_{hvSL} := A_{hvSL} = 11.57\cdot kip$$

5. The reactions due to wind load (blowing from left) are determined as follows:
   a) Vertical reaction at A is determined by considering the entire structure and taking the moment with respect to C (c)

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad 15.75kip\cdot\left(\frac{20ft + 15ft}{2}\right) - 60ft\cdot A_{vh} = 0$$

$$A_{vh} := \frac{WL\cdot\left(\frac{20ft + 15ft}{2}\right)}{60ft} = 4.59\cdot kip$$

   A_{vh} is the vertical reaction at A due to the horizontal load, and from equilibrium of forces in the y-direction, we have

$$C_{vh} := -A_{vh} = -4.59\cdot kip$$

   (note that wind load does not have any vertical component)
   b) The horizontal reaction at B is determined by considering the right substructure and taking the moment with respect to the internal hinge at B

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad 35ft\cdot C_{hh} - C_{vh}\cdot 30ft = 0$$

$$C_{hh} := \frac{C_{vh}\cdot 30ft}{35ft} = -3.94\cdot kip$$

   c) Horizontal reactino at A is taken by considering the entire structure and summing forces in the x-direction

$$\sum F_x = 0 \qquad WL + C_{hh} - A_{hh} = 0$$

$$A_{hh} := WL + C_{hh} = 11.81\cdot kip$$

   and note that A carries most of the horizontal load.
6. Finally, the supports should be designed for the most critical (plausible) combination of reactions

$$H := A_{hvDL} + A_{hvSL} + A_{hh} = 32.01\cdot kip$$

$$V := A_{vvDL} + A_{vvSL} + A_{vh} = 51.72\cdot kip$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

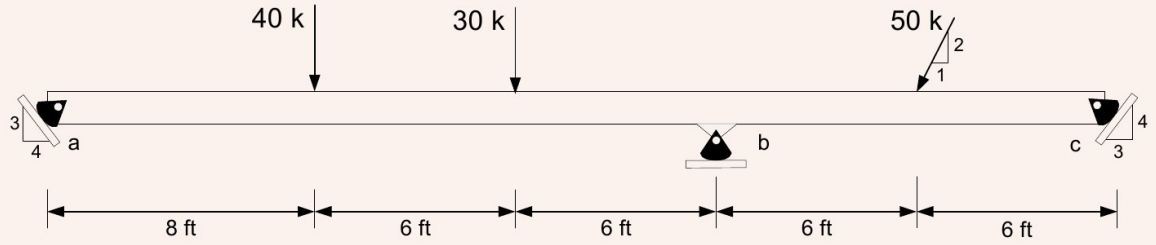
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.6 Inclined Supports

Determine the reactions of the following two span beam resting on inclined supports.



Solution:

A priori we would identify 5 reactions; however, we do have 2 equations of condition (one at each inclined support), thus with three equations of equilibrium, we have a statically determinate system.

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad R_{ay}\cdot 20\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{ay}\cdot 20\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) - \frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\right) = \frac{9}{16}\cdot R_{ay} - 16.77\text{kip}$$

$$\frac{9}{16}\cdot R_{ay} - R_{cy} = 16.77\text{kip}$$

Solving for those two equations:

$$\begin{pmatrix} 20 & -12 \\ \frac{9}{16} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 391.672\ \text{kip} \\ 16.77\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 14.37\text{kip} \\ -8.69\text{kip} \end{pmatrix}$$

The horizontal components of the reactions at a and c are

$$R_{ax} := \frac{3}{4}\cdot R_{ay} = 10.78\cdot\text{kip}$$

$$R_{cx} := -\frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 11.59\cdot\text{kip}$$

Finally, we solve for R...

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Finally, we solve for R_{by}

$$\sum M_z^{a} = 0 \qquad 40kip\cdot 8ft + 30kip\cdot 14ft - R_{by}\cdot 20ft + 50kip\cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26ft - R_{cy}\cdot 32ft = 0$$

$$R_{by} := \frac{40kip\cdot 8ft + 30kip\cdot 14ft + 50kip\cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26ft - R_{cy}\cdot 32ft}{20ft} = 109.04\cdot kip$$

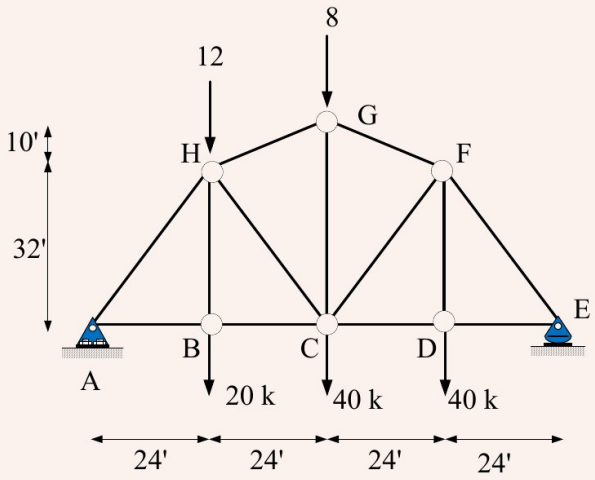
We check our results

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40kip - 30kip - 50kip\cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{by} + R_{cy} = 0\cdot kip \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} - 50kip\cdot \cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{cx} = 0\cdot kip \quad \text{OK!}$$

7.1 Truss Method of Joints

Using the method of joints, analyze the following truss



Solution:

1. R=3, m=13, 2j=16, and m+R=2j
2. We compute the reactions

$$\sum M_z^{E} = 0 \qquad (20kip + 12kip)\cdot 72ft + (40kip + 8kip)\cdot 48ft + 40kip\cdot 24ft - R_{Ay}\cdot 96ft = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{(20kip + 12kip)\cdot 72ft + (40kip + 8kip)\cdot 48ft + 40kip\cdot 24ft}{96ft}$$

$$\boxed{R_{Ay} = 58\cdot kip}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 20kip + 12kip + 40kip + 8kip + 40kip - R_{Ay} - R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} := 20kip + 12kip + 40kip + 8kip + 40kip - R_{Ay}$$

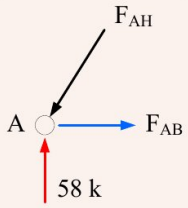
$$\boxed{R_{Ey} = 62\cdot kip}$$

3. Consider each joint separately:
   Node A: Clearly AH is under compression and AB is under tension

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum F_y = 0$ $\quad -F_{AHy} + R_{Ay} = 0$

$F_{AHy} := -R_{Ay} = -58 \cdot kip$

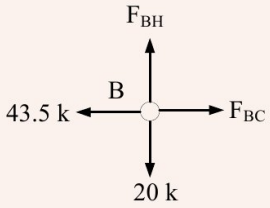
$L_y := 32ft \qquad L_x := 24ft \qquad L := \sqrt{L_y^2 + L_x^2} = 40 \cdot ft$

$F_{AH} := \frac{L}{L_y} \cdot F_{AHy} = -72.5 \cdot kip$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad -F_{AHx} + F_{AB} = 0$

$F_{AB} := \frac{L_x}{L_y} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot kip$ Tension

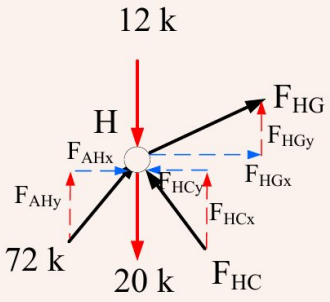
Node B:



$\sum F_x = 0$ $\quad \boxed{F_{BC} := 43.5kip}$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad \boxed{F_{BH} := 20kip}$ Tension

Node H:



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0 \qquad F_{AHx} - F_{HCx} - F_{HGx} = 0$

$$43.5\text{kip} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} = 0$$

$\sum F_y = 0 \qquad F_{AHy} + F_{HCy} - 12\text{kip} - F_{HGy} - 20\text{kip} = 0$:

$$58\text{kip} + \frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} - 12\text{kip} - 20\text{kip} = 0$$

This can be most conveniently written as

$$\begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix}$$

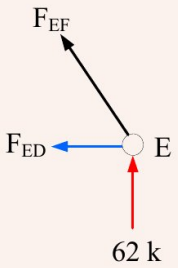
Solving we obtain

$$\begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 52 \end{pmatrix} \cdot \text{kip}$$

$\boxed{F_{HC} = -7.5 \cdot \text{kip}}$ Compression

$\boxed{F_{HG} = 52 \cdot \text{kip}}$ Tension

Node E:



$\sum F_y = 0 \qquad F_{EFy} := 62\text{kip}$

$$\boxed{F_{EF} := \frac{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}}{32\text{ft}} \cdot 62\text{kip} = 77.5 \cdot \text{kip}} \text{ Compression}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

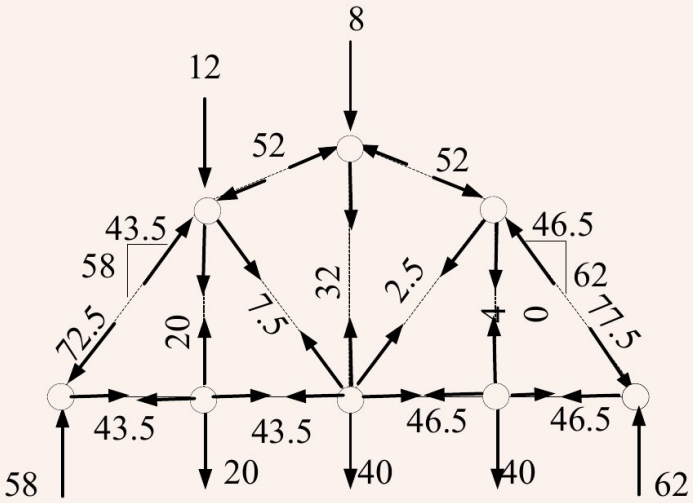
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0 \qquad F_{ED} = F_{EFx}$

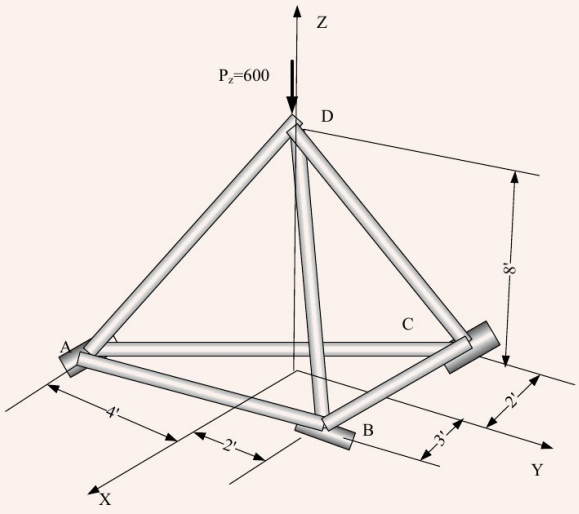
$$F_{ED} := 24\frac{ft}{32ft}\cdot 62kip = 46.5\cdot kip$$ Tension

The results of the analysis are summarized below



4. We would check our calculations by verifying equilibrium of forces at a node not previously used, such as *D*.

7.2 3D Truss



Solution:

1. Consider the free body diagram of the entire truss

$\sum M_{AB} = 0 \qquad C_z\cdot 5ft - 600\cdot 3ft = 0 \qquad C_z := \frac{600\cdot 3ft}{5ft}$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$C_z = 360$

$\sum M_{CB} = 0 \quad 600 \cdot 2\,ft - A_z \cdot 6\,ft = 0 \quad A_z := \frac{600 \cdot 2\,ft}{6\,ft}$

$A_z = 200$

$\sum F_z = 0 \quad B_z + 200 + 360 - 600 = 0 \quad B_z := 600 - 200 - 360$

$B_z = 40$

$\sum F_x = 0 \quad B_x := 0$

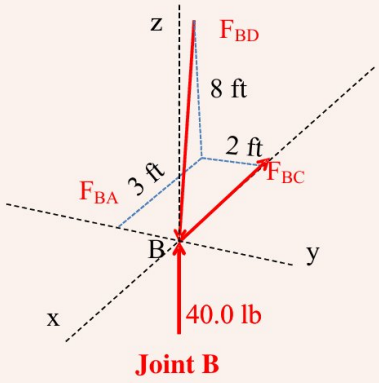
$\sum F_y = 0 \quad A_y - C_y = 0$

$\sum M_z = 0 \quad A_y \cdot 3\,ft + C_y \cdot 2\,ft = 0 \quad A_y = C_y = 0$

$A_y := 0$

$C_y := 0$

2. Consider the free body diagram of joint B



Joint B

$L_{BD} := \sqrt{(2\,ft)^2 + (3\,ft)^2 + (8\,ft)^2} = 8.775 \cdot ft$

$\sum F_z = 0 \quad \frac{-8\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} + 40 = 0$

$F_{BD} := 40 \cdot \frac{-L_{BD}}{8\,ft} = -43.875$ Compression

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

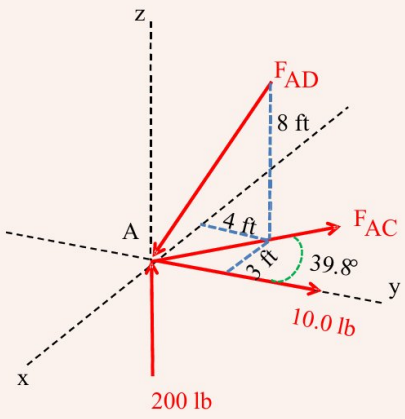
$\sum F_x = 0$ $\quad F_{BDx} - F_{BC} = 0$

$$F_{BDx} := \frac{-3\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 15$$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$$F_{BDy} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$$ Tension

3. FBD of joint A



$$L_{AD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (3\,ft)^2 + (4\,ft)^2} = 9.434\,ft$$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} + 200 = 0$

$$F_{AD} := 200 \cdot \frac{-L_{AD}}{8\,ft} = -235.85$$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{ADx} - F_{ACx} = 0$

$$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8\,deg$$

$$\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} - F_{AC} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot -F_{AD}}{\sin(39.8\,deg)} = 117.2$$ Tension

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

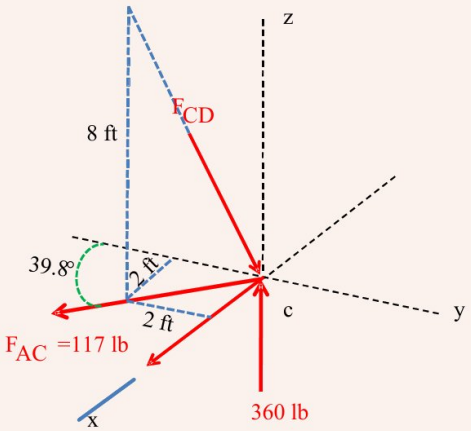
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_y = 0 \qquad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8 \cdot deg$

$F_{BA} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$ Tension

5. Joint C



$L_{CD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (2\,ft)^2 + (2\,ft)^2} = 8.485 \cdot ft$

$\sum F_z = 0 \qquad F_{CDz} + 360 = 0 \qquad \frac{-8\,ft}{L_{CD}} \cdot F_{CD} + 360 = 0$

$F_{CD} := -360 \cdot \frac{-L_{CD}}{-8\,ft} = -381.8$ Compression

7.3 Truss I, Matrix Method

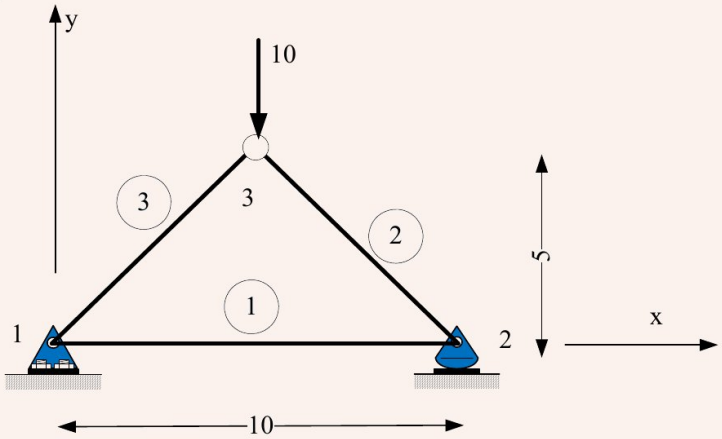
Determine all member forces for the following truss

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. We first determine the direction cosines

Member 1 (Nodes 1-2)

Node1: $\alpha_{11} := 1$ $\beta_{11} := 0$ Node2: $\alpha_{21} := -1$ $\beta_{21} := 0$

Member 2 (Nodes 2-3)

Node2: $\alpha_{22} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{22} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ Node3: $\alpha_{32} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{32} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$

Member 3 (Nodes 3-1)

Node2: $\alpha_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ Node3: $\alpha_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7.071 \\ -7.071 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7.4 Truss II, Matrix Method

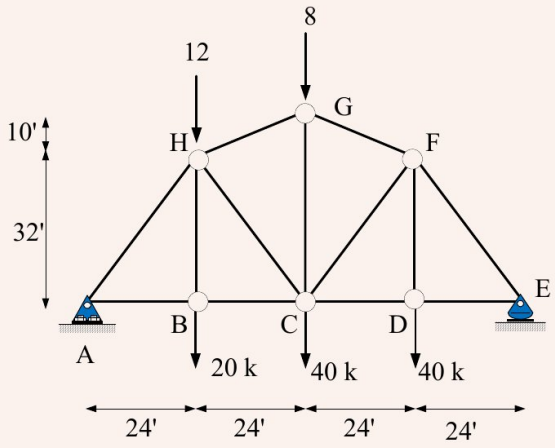
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

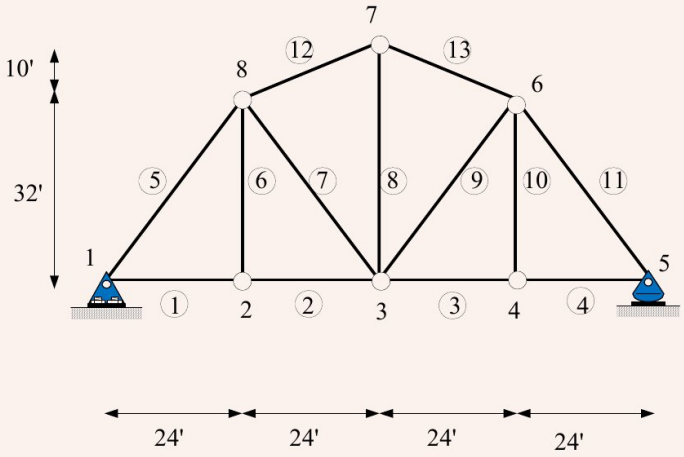
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Set up the statics matrix for the truss shown below



Solution:



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. We first determine the direction cosines

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}} = 0.6$$

$$\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}} = 0.8$$

$$\frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}} = 0.385$$

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}} = 0.923$$

2. Next we write the equations of equilibrium

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y}
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12
\end{pmatrix}
= 0$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

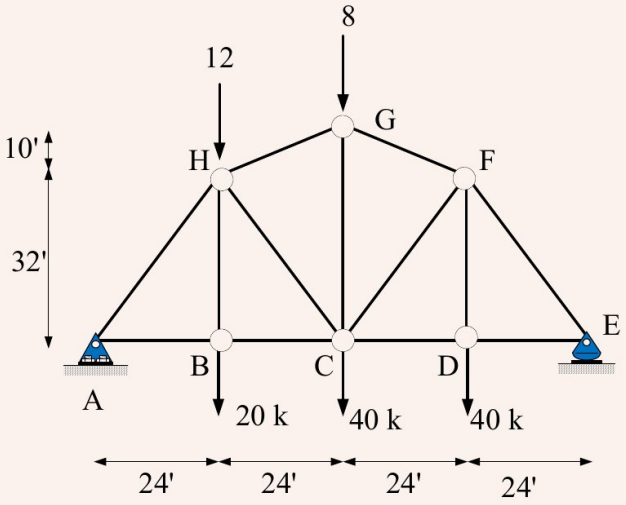
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

	1
1	43.5
2	43.5
3	46.5
4	46.5
5	-72.5
6	20
7	7.479
8	32.033
9	2.479
10	40
11	-77.5
12	-51.991
13	-51.991
14	0
15	58
16	62

7.5 Truss, Method of Sections

Determine F_{BC} and F_{HG} in the truss below



Solution:

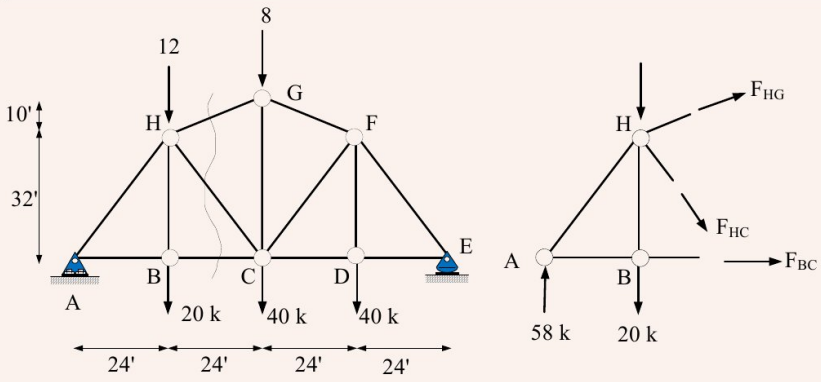
Cutting through members HG, HC, and BC, we first take the summation of forces with respect to H:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum M_z^H = 0$ $\quad R_{Ay} \cdot 24\text{ft} - F_{BC} \cdot 32\text{ft} = 0$

$R_{Ay} := 58\text{kip}$ (From previous example)

$F_{BC} := \frac{24\text{ft}}{32\text{ft}} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot \text{kip}$ Tension

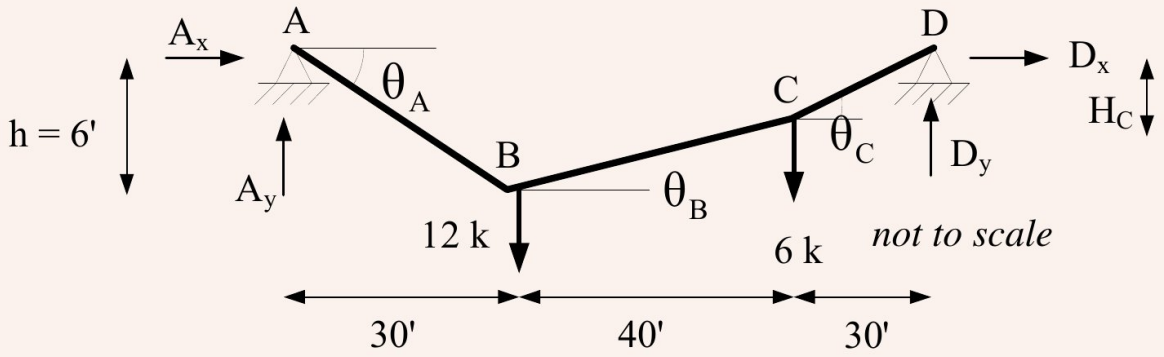
$\sum M_z^C = 0$ $\quad 58\text{kip} \cdot 48\text{ft} - (20\text{kip} + 12\text{kip}) \cdot 24\text{ft} - F_{HGx} \cdot 32\text{ft} - F_{HGy} \cdot 24\text{ft} = 0$

$$58\text{kip} \cdot 48\text{ft} - (20\text{kip} + 12\text{kip}) \cdot 24\text{ft} - 32\text{ft} \cdot F_{HG} \cdot \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} - 24\text{ft} \cdot F_{HG} \cdot \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} = 0$$

$F_{HG} := 52\text{kip}$ Compression

8.1 Funicular Cable Structures

Determine the reactions and the tensions for the cable structure shown below



Solution:

We have 4 external reactions, however the horizontal ones are equal and we can use any one of a number of equations of conditions in additiona to the three equations of equilibrium. First, we solve for the vertical reactions A_y, D_y and then for the horizontal ones (which are equal and opposite ($|H| = A_x = -D_x$). For this problem we could use the following 3 equations of static equilibrium $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, however since we do not have any force in the x direction, the first equation is of no avail. Instead, we will consider the following set $\Sigma F_{\circlearrowleft} = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Alternatively, we can consider the problem as one with 8

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

unknowns (A_x, A_y, D_x, D_y, θ_A, θ_B, θ_C, and h_C), to be solved through the 2 equations of equilibrium expressed at each of the four points of interesect.

1. Solve for D_y

$$\sum M_z^{A} = 0 \qquad 12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft} - D_y\cdot 100\text{ft} = 0$$

$$D_y := \frac{12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft}}{100\text{ft}} = 7.8\cdot\text{kip}$$

2. Solve for A_y

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 12\text{kip} - 6\text{kip} + D_y = 0$$

$$A_y := 12\text{kip} + 6\text{kip} - D_y = 10.2\cdot\text{kip}$$

3. Solve for the horizontal force by isolating the free body diagram AB

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad A_y\cdot 30\text{ft} - H\cdot 6\text{ft} = 0$$

$$H := \frac{A_y\cdot 30\text{ft}}{6\text{ft}} = 51\cdot\text{kip}$$

4. Solve for the sag at point C by isolating the free body diagram CD

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad -D_y\cdot 30\text{ft} + H\cdot h_c = 0$$

$$h_c := \frac{30\text{ft}\,D_y}{H} = 4.6\cdot\text{ft}$$

5. Solve for the cable internal forces or tractions in this case

$$\tan(\theta_A) = \frac{6\text{ft}}{30\text{ft}} \qquad \theta_A := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft}}{30\text{ft}}\right) = 11.31\cdot\text{deg}$$

$$T_{AB} := \frac{H}{\cos(\theta_A)} = 52.01\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_B) = \frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}} \qquad \theta_B := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}}\right) = 2.02\cdot\text{deg}$$

$$T_{BC} := \frac{H}{\cos(\theta_B)} = 51.03\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_C) = \frac{h_c}{30\text{ft}} \qquad \theta_C := \operatorname{atan}\left(\frac{h_c}{30\text{ft}}\right) = 8.7\cdot\text{deg}$$

$$T_{CD} := \frac{H}{\cos(\theta_C)} = 51.59\cdot\text{kip}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

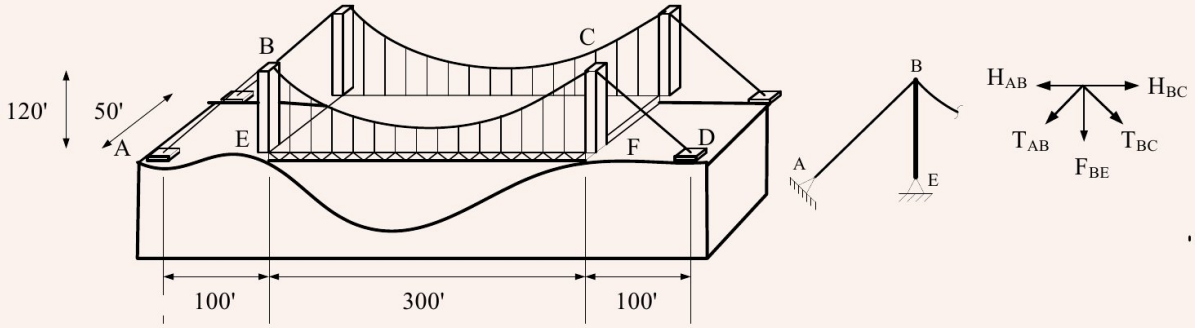
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8.2 Design of Suspension Bridge

Design the following 4 lane suspension bridge by selecting the cable diameters assuming an allowable cable strength of $\sigma_{all} := 190ksi$.. The bases of the tower are hinged in order to avoid large bending moments. The total dead load is estimated at 200 psf. Assume a sag to span ratio of 1/5.



Solution:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. The dead load is carried by each cable with one half the total deal load or $p_1 := \frac{1}{2}\cdot 200\text{psf}\cdot 50\text{ft} = 5\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$
2. Using the HS 20 truck (or its distributed equivalent load of 0.64kip/ft per lane), the uniform additional load per cable is

   $p_2 := 2\cdot 0.64\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}} = 1.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$

   Thus the total design load is

   $p := p_1 + p_2 = 6.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$
3. The thrust H is determined by

   $L := 300\text{ft}$

   $h := 60\text{ft}$

   $H := \frac{p\cdot L^2}{8\cdot h} = 1177.5\cdot\text{kip}$
4. The maximum tension is

   $r := \frac{1}{5}$ sag to span ratio

   $T_{max} := H\cdot\sqrt{1 + 16r^2} = 1508\cdot\text{kip}$
5. Note that if we used the approximate formula we woul dhave obtained

   $T_{maxApp} := H\cdot\left(1 + 8\cdot r^2\right) = 1554.3\cdot\text{kip}$
6. The required cross sectional area of the cable along the main span should be equal to

   $A := \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = 7.94\cdot\text{in}^2$

   which corresponds to a diameter

   $d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.18\cdot\text{in}$
7. We seek to determine the cable force in AB. Since the pylon cannot take any horizontal force, we should have the horizontal component of T_{max} equal and opposite to the horizontal component of T_{AB} or

   $T_{AB} := H\cdot\frac{\sqrt{(100\text{ft})^2 + (120\text{ft})^2}}{100\text{ft}} = 1839\cdot\text{kip}$

   The cable area should be

   $A := \frac{T_{AB}}{\sigma_{all}} = 9.68\cdot\text{in}^2$

   which corresponds to a diameter

   $d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.51\cdot\text{in}$
8. To determine the vertical load acting on the pylon, we must add the vertical components of T_{max} and T_{AB} (V_{BC} and V_{AB} respectively). We can determine V_{BC} from H and T_{max}, thus

   $P := \frac{120\text{ft}}{100\text{ft}}\cdot H + \sqrt{T_{max}^2 - H^2} = 2355\cdot\text{kip}$

   Using A36 steel with an allowable stress of $\sigma_{A36} := 21\text{ksi}$, the cross sectional area of the tower should be

   $A := \frac{P}{\sigma_{A36}} = 112\cdot\text{in}^2$

   Note that buckling of such a tower might govern the final dimensions

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. If the cables were to be anchored to a concrete block, the volume of the block shoul dbe at least equal to

$$V := \frac{\frac{120\,ft}{100\,ft}\cdot H}{150\,\frac{lbf}{ft^3}} = 9420\cdot ft^3$$

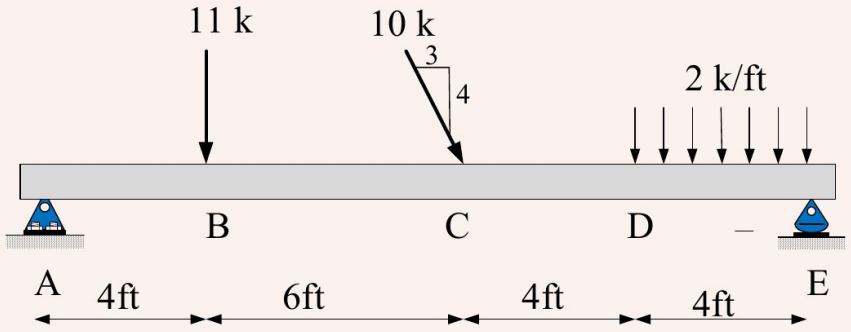
10.1 Simple Shear and Moment Diagram

Draw the shear and moment diagram for the beam shown below.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

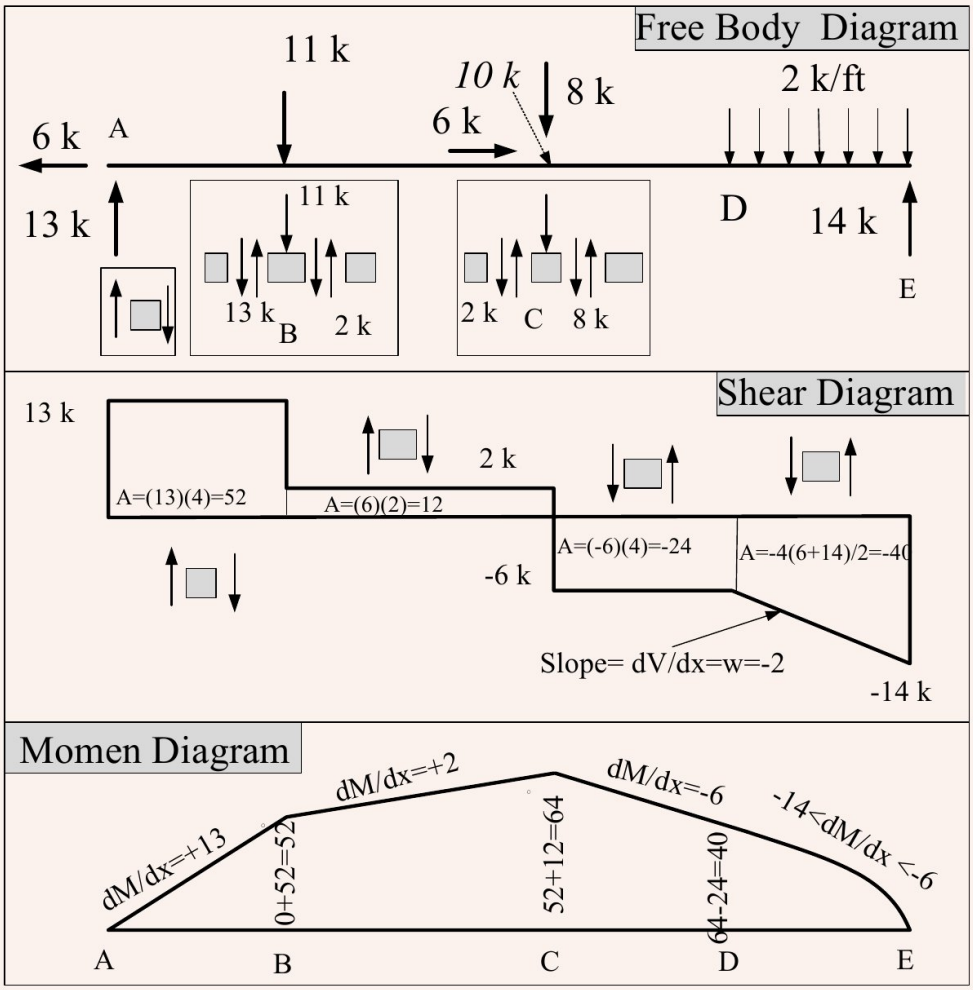
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

The free body diagram is drawn below



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Reactions are determined from the equilibrium equations

$\sum F_x = 0 \qquad -A_x + 6kip = 0 \qquad A_x := 6kip$

$\sum M_A = 0 \qquad 11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{3}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft - E_y\cdot 18ft = 0$

$$E_y := \frac{11kip\cdot 4ft + 10kip\cdot\frac{4}{5}\cdot 10ft + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft\cdot 16ft}{18ft} = 14\cdot kip$$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 11kip - 10kip\cdot\frac{4}{5} - 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft + E_y = 0$

$$A_y := 11kip + 8kip + 2\frac{kip}{ft}\cdot 4ft - E_y = 13\cdot kip$$

Shear are determined next

1. At A the shear is equal to the reaction and is positive.
2. At B the shear drops (negative load) by 11 k to 2 k
3. At C it drops again by 8 k to -6 k
4. It stays constant up to D and then it decreases (constant negative slope since the load is uniform and negative) by 2 k per linear foot up to -14 k
5. As a check, -14 k is also the reaction previously determined at E.

Moment is determined last

1. The moment at A is zero (hinge support)
2. The change in moment between A and B is equal to the area under the corresponding shear diagram, or
   $\Delta M_{BA} := 13kip\cdot 4ft = 52\cdot kip\cdot ft$
3. Changes between other points are determined the same by taking the area under the shear diagram

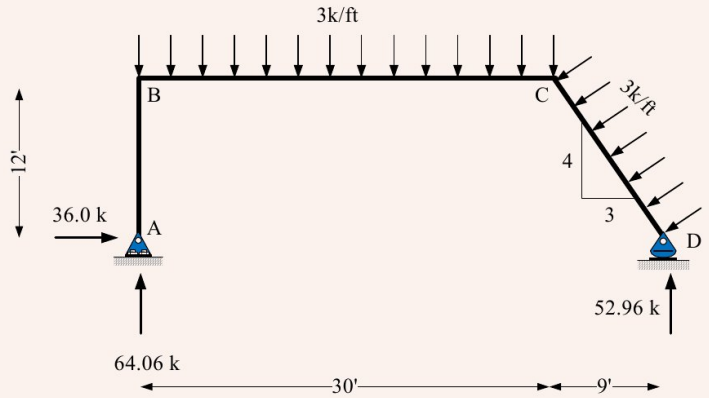
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

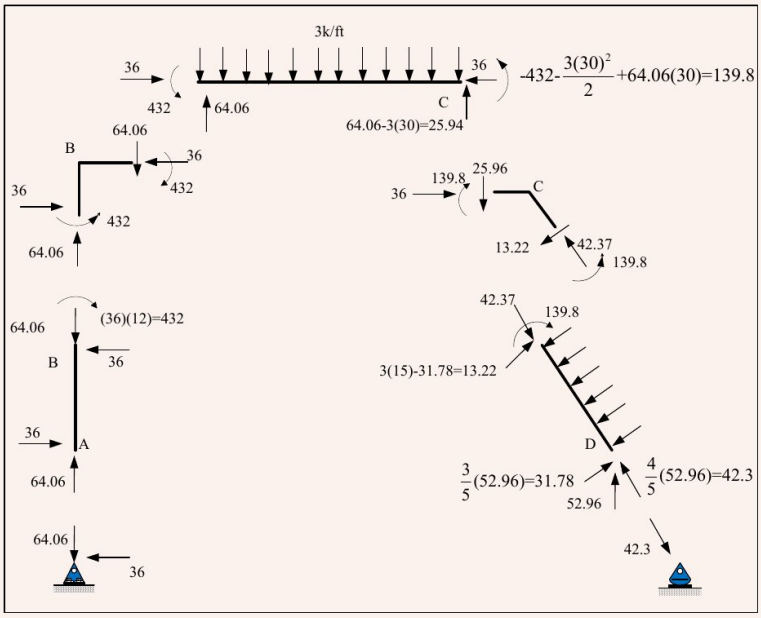
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

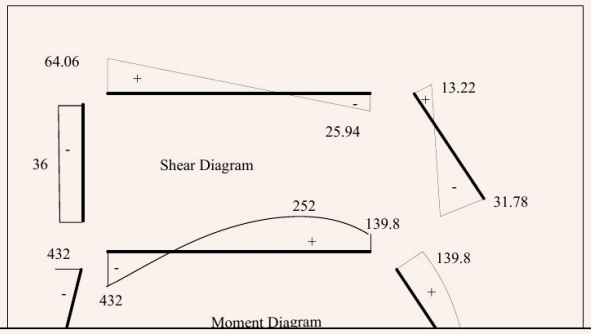
10.2 Frame Shear and Moment Diagram

Draw the shear and moment diagram of the following frame



Solution:

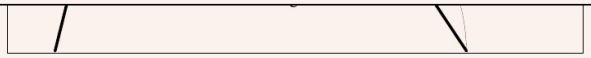




CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Reactions are determined first

$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 0 \qquad \boxed{R_{Ax} := \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 36\cdot kip}$

$\sum M_A = 0 \qquad 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft - R_{Dy}\cdot 39ft = 0$

$$\boxed{R_{Dy} := \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft}{39ft} = 52.96\cdot kip}$$

$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft - \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft + R_{Dy} = 0$

$$\boxed{R_{Ay} := 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft - R_{Dy} = 64.04\cdot kip}$$

We isolate each member and draw its free body diagram for each force component.

Shear

1. For A-B the shear is constant, equal to the horizontal reaction at A and negative according to our previously defined sign convention, $V_A := -36kip$
2. For member B-C at B, the shear must be equal to the vertical force which was transmitted along A-B, and which is equal to the vertical reaction at A, $V_B := R_{Ay} = 64.04\cdot kip$
3. Since B-C is subjected to a uniform load, the shear along B-C will have a slope equal to -3 and in terms of x (measured from B to C) is equal to
   $V_{BC}(x) := R_{Ay} - 3x$
4. The shear along C-D is obtained by decomposing the vertical reaction at D into axial and shear components. Thus, at D the shear is equal to $\frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 31.78\cdot kip$ and is negative. Based on our sign convention for the load, the slope of the shear must be equal to -3 along C-D. Thus the shear at point C is such that $V_c - \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} = -\frac{3}{5}\cdot R_{Dy}$ or $V_c := \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} - \frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 13.22\cdot kip$. The equation for shear is given by (for x going from C to D)
   $V_{CD}(x) := V_c - 3x$

Moment

1. Along A-B, the moment is zero at A (since we have a hinge) and its slope is equal to the shear, thus at B the moment is equal to $-36kip\cdot 12ft = -432\cdot kip\cdot ft$
2. Along B-C, the moment is equal todx

$$M_{BC} = M_B + \int_0^x V_{BC}(x)\,dx = -432kip\cdot ft + \int_0^x \left(R_{Ay} - 3x\right)dx = -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot x - \frac{3x^2}{2}$$

which is a parabola. Substituting for x=30, we obtain at node C:

$$\boxed{M_C := -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot 30ft - \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot (30ft)^2}{2} = 139.2\cdot kip\cdot ft}$$

dM_{BC}

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. If we need to determine the maximum moment along B-C, we know that $\frac{dV_{BC}}{dx} = 0$ at the point where where $V_{BC}=0$, that is $V_{BC}(x) = R_{Ay} - 3x = 0, x_{max} := \frac{R_{Ay}}{3\frac{kip}{ft}} = 21.3\cdot ft.$ In other words, the maximum moment occurs where the shear is zero. Thus

$$M_{BCmax} := -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot x_{max} - \frac{3\frac{kip}{ft}\cdot (x_{max})^2}{2} = 251.5\cdot kip\cdot ft$$

4. Finally, along C-D the moment varies quadratically (since we had a linear shear), the moment first increases (positive shear), and then decreases (negative shear). The moment along C-D is given by $M_{CD} = M_C + \int_0^x V_{CD}(x)\,dx = M_C + \int_0^x (V_c - 3x)\,dx = M_C + V_c\cdot x - \frac{3x^2}{2}$ which is a parabola. Substituting for x =15ft, we obtain at node D

$$M_D := M_C + V_c\cdot 15ft - 3\frac{\frac{kip}{ft}\cdot (15ft)^2}{2} = -0\cdot kip\cdot ft \quad \text{OK!}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

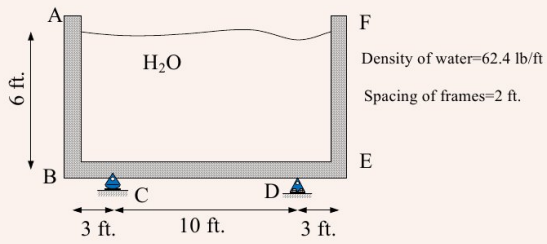
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load

The frame shown below is the structural support of a flume. Assuming that the frames are spaced 2 ft apart along the length of the flume,

1. Determine all internal member end actions
2. Draw the shear and moment diagrams
3. Locate and compute maximum internal bending moments
4. If this is a reinforced concrete frame, show the location of reinforcement

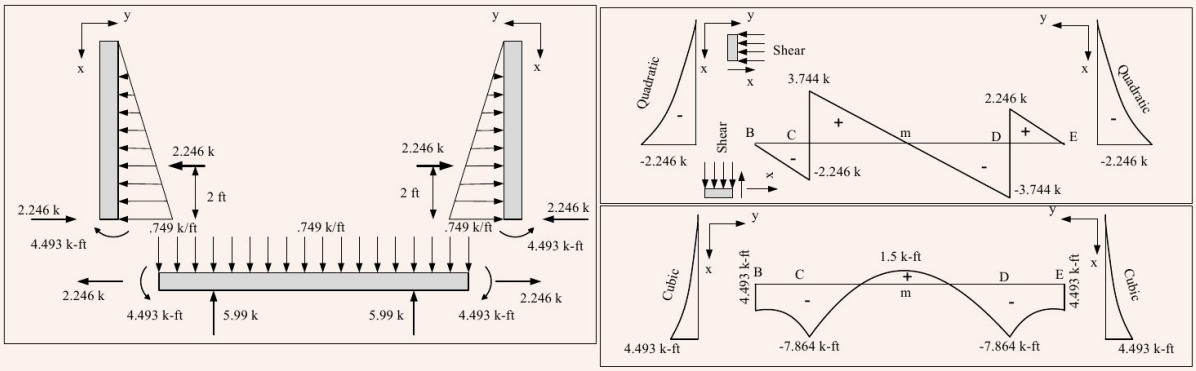


Solution:

The hydrostatic pressure causes lateral forces on the vertical members which can be treated as cantilevers fixed at the lower end. The pressure is linear and is given by $p(\gamma, h) := \gamma \cdot h$. Since each frame supports a 2 ft wide section of the flume, the equation for *w* (pounds/ft) is

$$w(h) := 2\text{ft} \cdot 62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \cdot h \rightarrow \frac{124.8 \cdot h \cdot \text{lbf}}{\text{ft}^2}$$

At the base $w_{base} := w(6\text{ft}) = 0.749 \cdot \frac{\text{kip}}{\text{ft}}$. Note that this is both the lateral pressure on the end walls as well as the uniform load on the horizontal members.



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

End Actions

1. Base force at B is $F_{Bx} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 6ft = 2.246 \cdot kip$
2. Base moment at B is $M_B := \frac{1}{3} F_{Bx} \cdot 6ft = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
3. End forces at B for member B-E are equal and opposite
4. Reaction at C is $R_{Cy} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 16ft = 5.99 \cdot kip$

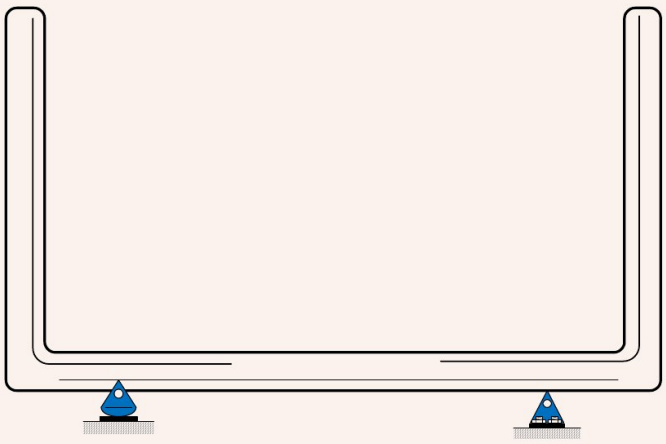
Shear forces

1. Base at B the shear force was determined eariler and was equal to $F_{Bx} = 2.246 \cdot kip$. Based on the orientation of the x-y axis, this is a negative shear.
2. The vertical shear at B is zero (neglecting the weight of A-B)
3. The shear to the left of C is $V_{Cleft} := 0 - w_{base} \cdot 3ft = -2.246 \cdot kip$
4. The shear to the right of C is $V_{Cright} := V_{Cleft} + R_{Cy} = 3.744 \cdot kip$

Moment diagrams

1. At the base: B $M_B = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
2. At the support C, $M_C := -M_B - w_{base} \cdot 3ft \cdot \frac{3ft}{2} = -7.862 \cdot kip \cdot ft$
3. The maximum moment is equal to $M_{max} := M_C + w_{base} \cdot 5ft \cdot \frac{5ft}{2} = 1.498 \cdot kip \cdot ft$

Design: Reinforcement should be placed along the fibers which are under tension, that is on the side of the negative moment. The figure below schematically illustrates the location of the flexural reinforcement.

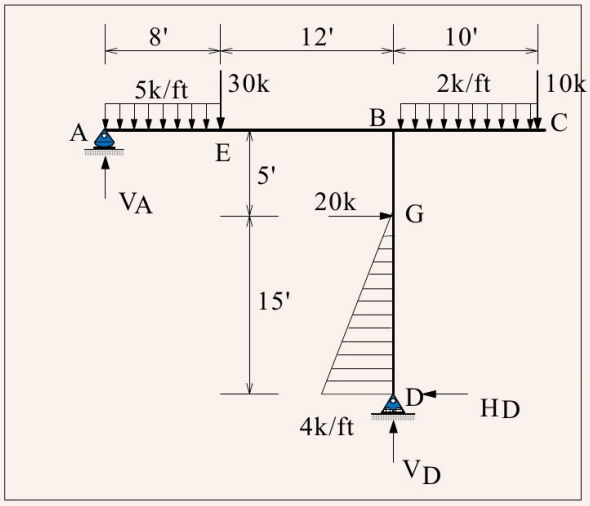


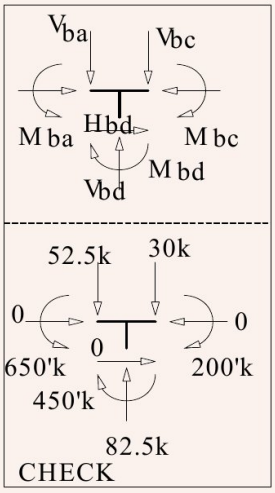
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

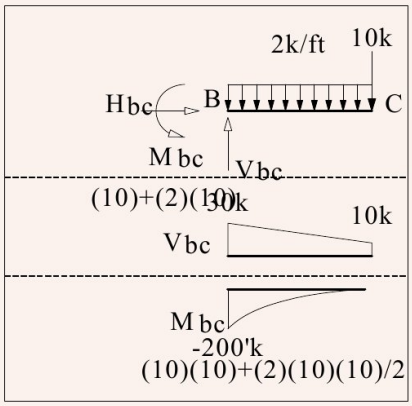
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

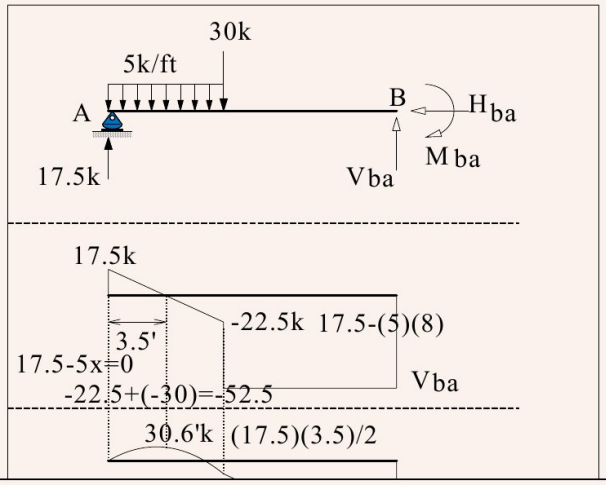
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

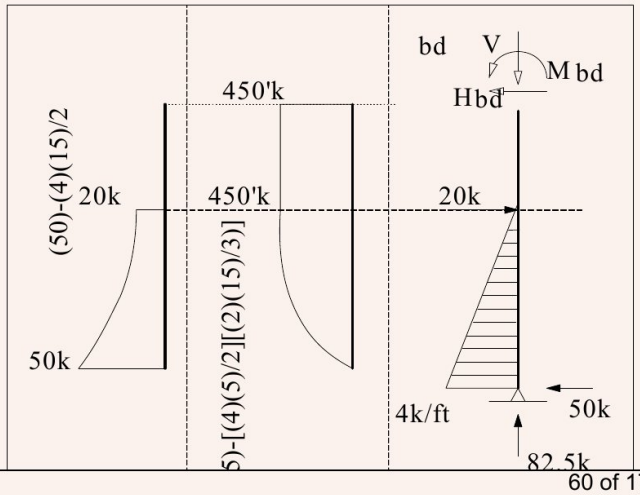
10.4 Shear Moment Diagrams for Frame







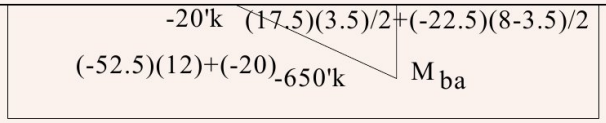


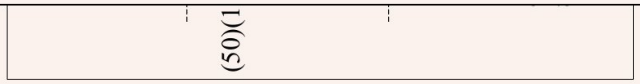


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

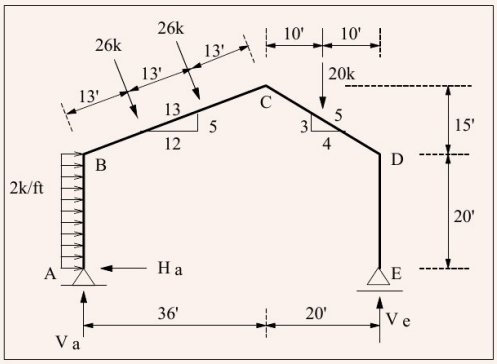
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

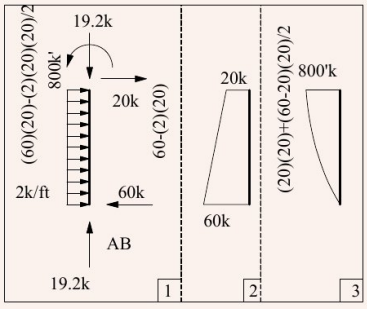
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

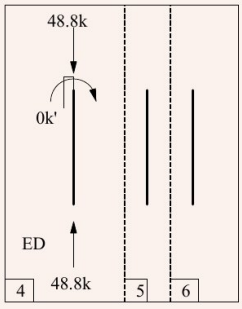


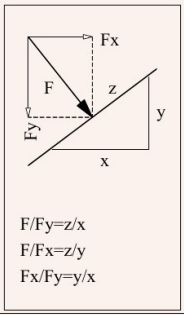


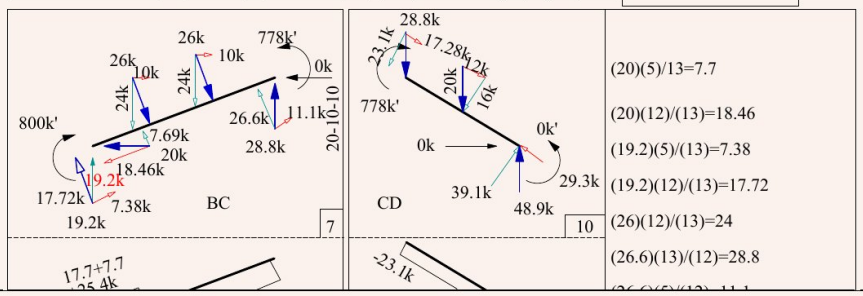
10.5 Shear Moment Diagrams for Inclined Frame







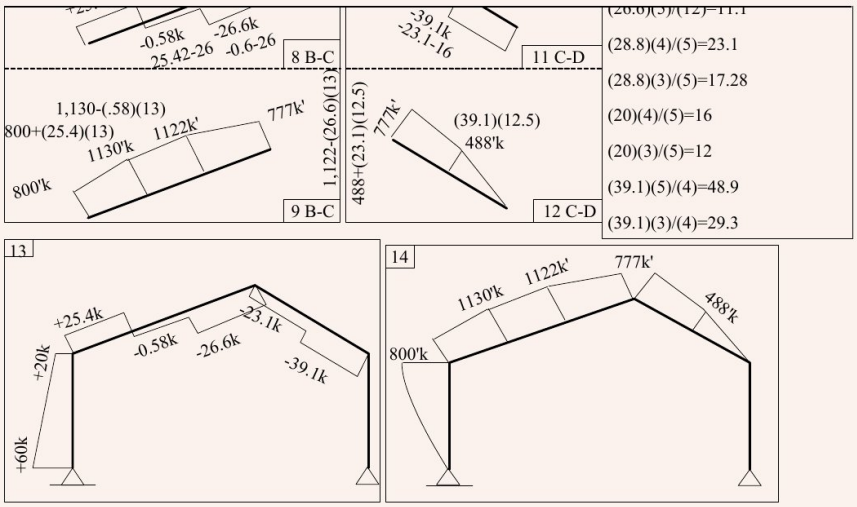




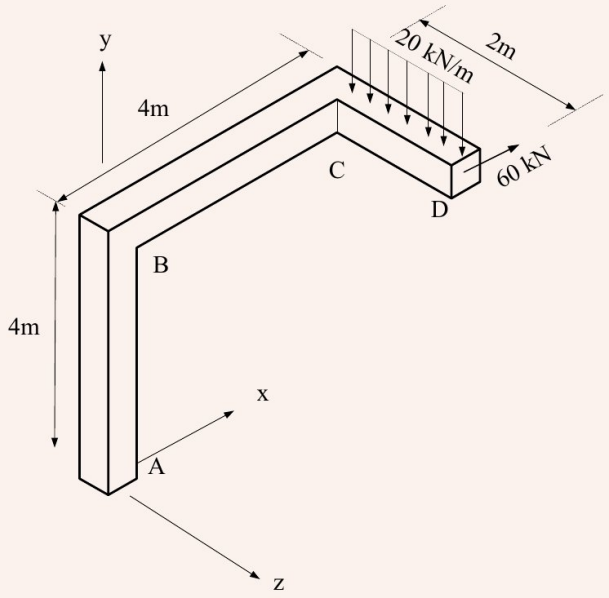
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



10.6 3D Frame



1. The frame has a total of 6 reactions (3 forces and 3 moments) at the support, and we have a total of 6 equations of equilibrium, thus it is statically determinate.
2. Each member has the following internal forces (defined in terms of the local coordinate system of each member x' - y'- z' such that x is along the member)

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

3. The numerical calculations for the analysis of the three dimensional frame are quite simple, however the main complexity stems from the difficulty in visualizing the inter-relations between internal forces of adjacent members.
4. In this particular problem, rather than starting by determining the reactions, it is easier to determined the internal forces at the end of each member starting with member C-D. Note that temporarily we adopt a sign convention which is compatible with the local coordinate systems.

C-D

$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m = 40\cdot kN$

$\sum F_{z'} = 0 \qquad V_{z'C} := 60kN$

$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'C} := -60kN\cdot 2m = -120\cdot kN\cdot m$

$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m\cdot\frac{2m}{2} = 40\cdot kN\cdot m$

B-C

$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'B} := V_{z'C} = 60\cdot kN$

$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'B} := V_{y'C} = 40\cdot kN$

$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'B} := M_{y'C} = -120\cdot kN\cdot m$

$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'B} := V_{y'C}\cdot 4m = 160\cdot kN\cdot m$

$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'B} := -M_{z'C} = -40\cdot kN\cdot m$

A-B

$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'A} := V_{y'B} = 40\cdot kN$

$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'A} := N_{x'B} = 60\cdot kN$

$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'A} := -T_{x'B} = 40\cdot kN\cdot m$

$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'A} := M_{z'B} + N_{x'B}\cdot 4m = 400\cdot kN\cdot m$

$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'A} := M_{y'B} = -120\cdot kN\cdot m$

The interaction between axial forces N and shear V as well as between moments M and torsion T is clearly highlighted by this

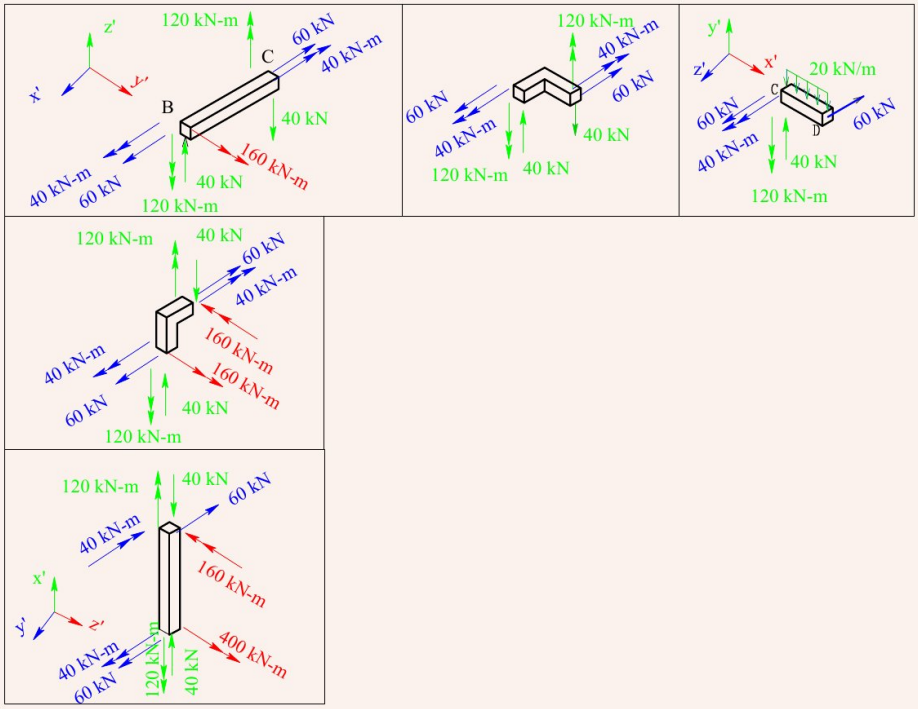
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

example.

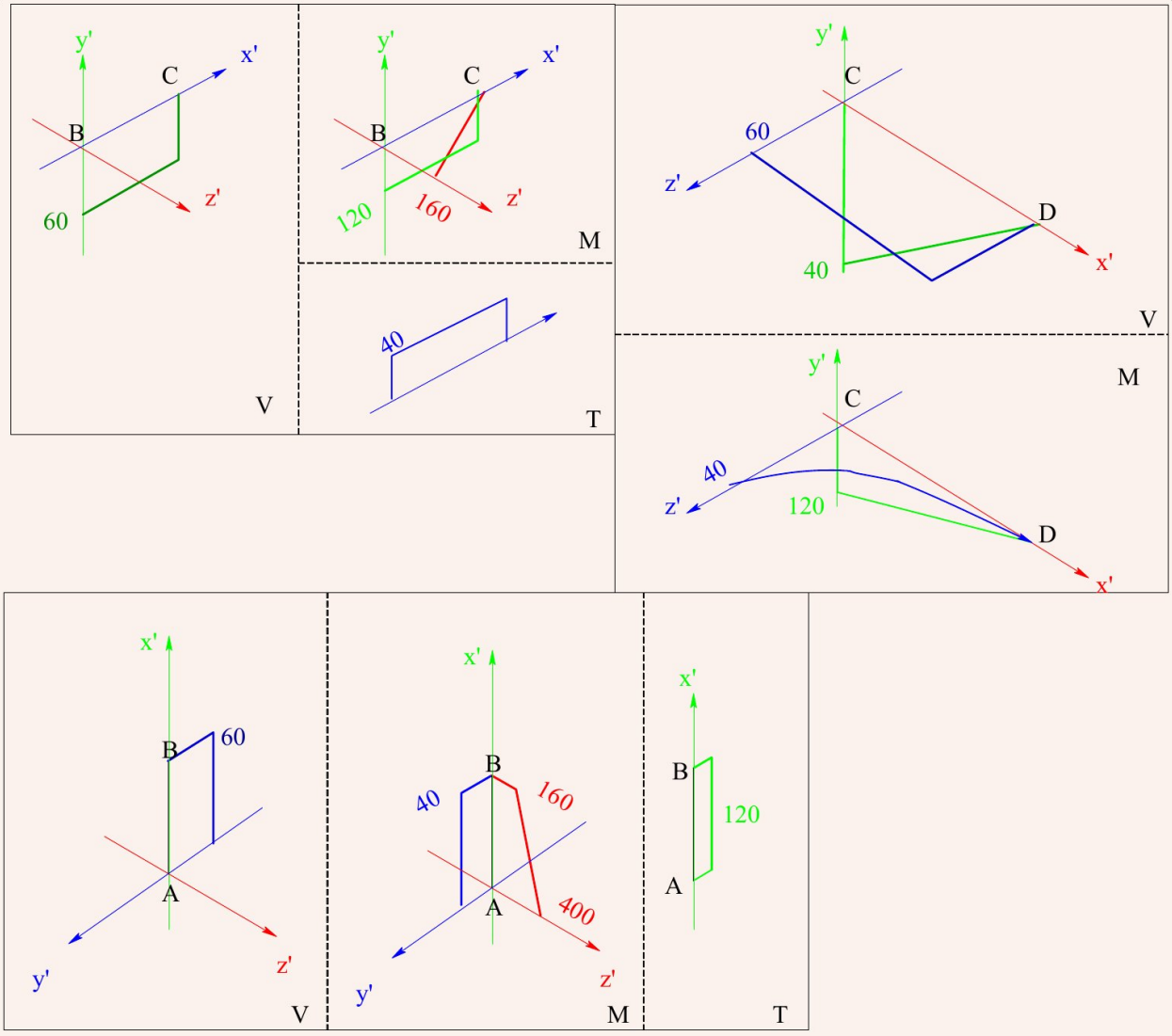


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

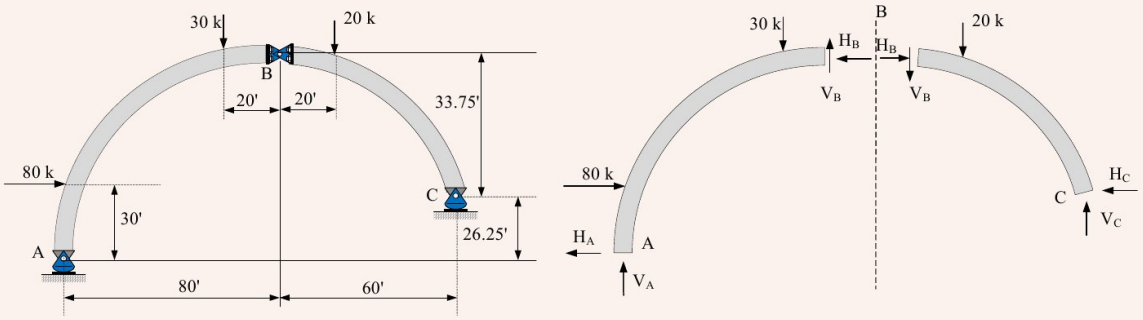


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.1 Three Hinged Arch, Point Loads

Determine the reactions of the three-hinged arch shown below



Solution:

Four unknowns, three equations of equilibrium, one equation of condition - staticall determinate

$$\sum M_z^C = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + 80\,kip\cdot(30\,ft - 26.25\,ft) - 30\,kip\cdot(60\,ft + 20\,ft) - 20\,kip\cdot(60\,ft - 20\,ft) + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 30\,kip\cdot 80\,ft + 20\,kip\cdot 40\,ft - 80\,kip\cdot 3.75\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 2900\,kip\cdot ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad 80\,kip - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$

$$\boxed{R_{Ax} + R_{Cx} = 80\,kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ay} + R_{Cy} - 30\,kip - 20\,kip = 0$$

$$\boxed{R_{Ay} + R_{Cy} = 50\,kip}$$

$$\sum M_z^B = 0 \qquad R_{Ax}\cdot 60\,ft - 80\,kip\cdot 30\,ft - 30\,kip\cdot 20\,ft + R_{Ay}\cdot 80\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 80\,kip\cdot 30\,ft + 30\,kip\cdot 20\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 3000\,kip\cdot ft}$$

Solving those four equations simultaneously we have:

$$\begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} \cdot kip = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix} \cdot kip$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

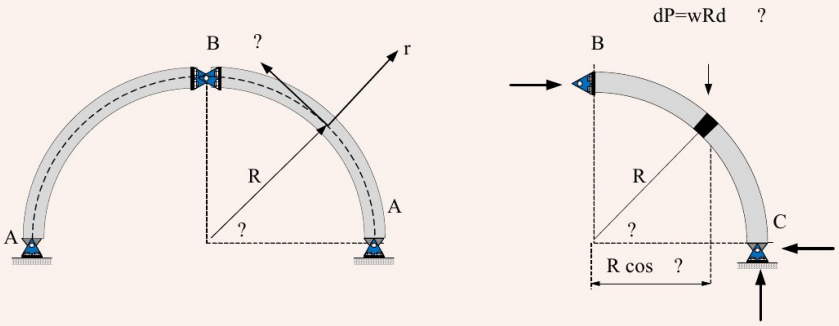
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We can check our results by considering the summation with respect to B from the right:

$$\sum M_z^{\,B} = 0 \qquad -20\text{kip}\cdot 20\text{ft} - R_{Cx}\cdot 33.75\text{ft} + R_{Cy}\cdot 60\text{ft} = -0\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

11.2 Semi-Circular Arch

Determine the reactions of the three-hinged staticall determinate semi-circular arch under its own dead weight *w* (per unit arc length s, where ds=rdθ



Solution:

Reactions The reactions can be determined by **integrating** the load over the entire structure

1. Vertical Reaction is determined first

$$\sum M_A = 0 \qquad -C_y\cdot 2R + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R(1+\cos(\theta)) = 0$$

$$C_y = \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos(\theta))\,d\theta = \frac{\pi\,wR}{2}$$

2. Horizontal Reactions are determined next

$$\sum M_B = 0 \qquad -C_x\cdot R + C_y\cdot R - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} wR\,d\theta\cdot R\cos(\theta) = 0$$

$$C_z = \frac{\pi\,wR}{2} - \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR$$

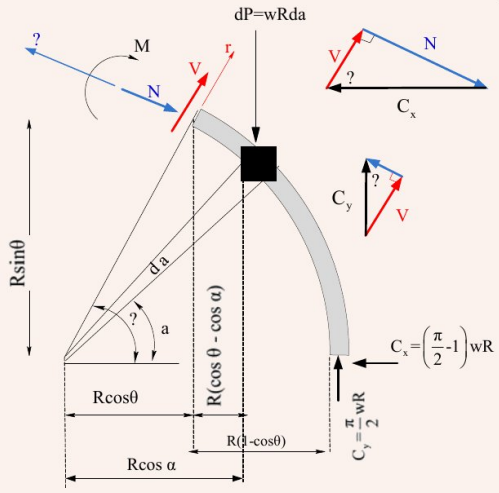
Internal Forces can now be determined

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



1. Shear Forces: Considering the free body diagram of the arch, and summing the forces in the radial direction ($\Sigma F_R=0$)

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cos(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\sin(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\sin(\theta)+V=0$$

$$\boxed{V=wR\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\cos(\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\theta)\right]}$$

2. Axial Forces: Similarly, if we consider the summation of forces in the axial direction ($\Sigma F_\theta=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cos(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\cos(\theta)+N=0$$

$$\boxed{N=wR\cdot\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\sin(\theta)\right]}$$

2. Moment: Now we can consider the third equation of equilibrium ($\Sigma M_z=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cdot R\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cdot R\cdot(1-\cos(\theta))+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos(\alpha)-\cos(\theta))+M=0$$

$$\boxed{M=wR^2\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]}$$

Deflection are determined last

1. The real curvature ϕ is obtained by dividing the moment by EI

$$\phi=\frac{M}{EI}=\frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

2. The virtual force $\delta\cdot\bar{P}$ will be a unit vertical point load in the direction of the desired deflection, causing a virtual internal moment

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

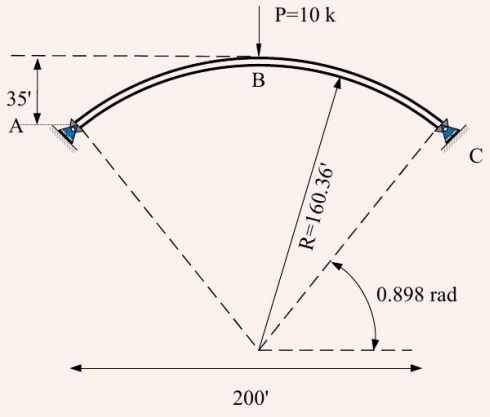
$$\delta\cdot\overline{M} = \frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

3. Hence, application of the virtual work equation yields:

$$1\cdot\Delta = 2\cdot\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1 - \sin(\theta)) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]\cdot\left[\frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta))\right]\cdot R\, d\theta = \frac{wR^4}{16EI}\cdot\left(7\cdot\pi^2 - 18\cdot\pi - 12\right)$$

11.3 Statically Indeterminate Arch

Determine the value of the horizontal reaction component of the indicated two-hinged solid rib arch, as caused by a concentrated vertical load of 10 k at the center line of the span. Consider shearing, axial, and flexural strains. Assume the rib is a W24x130 with a total area of 38.21 in^2, that it has a web area of 13.70 in^2, a moment of inertia equal to 4,000 in^4, E of 30,000 k/in^2, and a shearinf modulus of 13,000 k/in^2.



Solution:

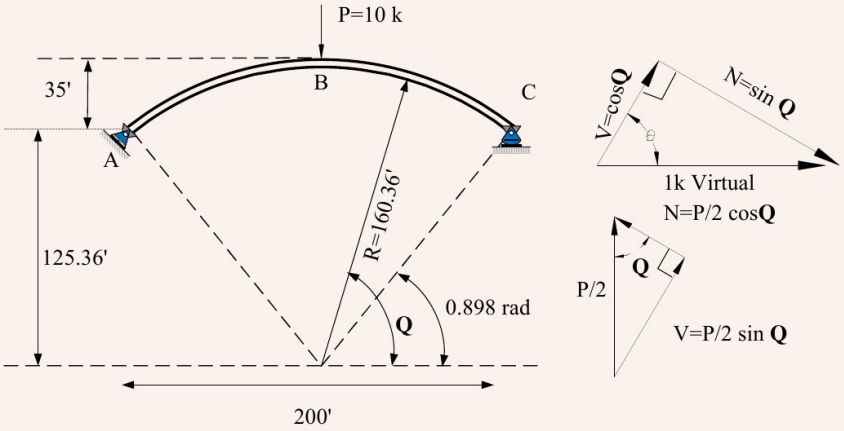
1. Consider that end C is placed on rollers, as shown below.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



A unit ficticious horizontal force is applied at C. The axial and shearinf components of this ficticious force and of the vertical reaction at C, acting on any section θ in the right half of the rib, are shown at the right end of the rib in the figure above.

2. The expression for the horizontal displacement of C is

$$1\cdot\Delta_{Ch} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{V}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{N}{AE}\,ds$$

3. From the figure above, for the rib from C to B

$$M = \frac{P}{2}\cdot(100 - R\cdot\cos\theta)$$

$$\delta\cdot\overline{M} = 1\cdot(R\cdot\sin\theta - 125.36\,ft)$$

$$V = \frac{P}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{V} = \cos\theta$$

$$N = \frac{P}{2}\cdot\cos\theta$$

$$\delta\cdot\overline{N} = -\sin\theta$$

$$ds = R\,d\theta$$

4. If the above values are substituted in the equation for the horizontal displacement of C and integrated between the limits of 0.898 and π/2, the result will be

$$\Delta_{Ch} = 22.55\,in + 0.023\,in - 0.003\,in$$

$$\Delta_{Ch} := 22.57\,in$$

5. The load P is now assumed to be removed fro mthe rib, and a real horizontal force of 1 k is assumed to act toward the right at C in conjunction with the ficticious force of 1 k acting to the right at the same point. The horizontal displacement of C will be given by

$$\delta_{ChCh} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{\overline{M}}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{\overline{V}}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{\overline{N}}{AE}\,ds = 2.309\,in + 0.002\,in + 0.002\,in$$

$\delta_{\square,\square} := 2.313\,in$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\delta_{ChCh} := 2.309\,in$

6. The value of the horizontal reaction component will be

$$H_C := \frac{\Delta_{Ch}}{\delta_{ChCh}} \cdot kip = 9.76 \cdot kip$$

7. If only flexural strains are considered, the result would be

$$H_{C_M} := \frac{22.55\,in}{2.309\,in} \cdot kip = 9.77 \cdot kip$$

Comments

1. For the given rib and the single concentrated load at the center of the span it is obvious that the effects of shearing and axial strains are insignificant and can be disregarded.
2. Eroneous conclusions as to the relative importance of shearing and axial strains in the usual solid rib may be drawn, however, from the values in the equation for Δ_{Ch}. These indicated that the effects of the shearing strains are much more significant thatn those of the axial strains. This is actually the case for the single concentrated load chosen for the demonstration, but only because the rib does not approximate the funicular polygon for the single load. As a result, the shearing components on most sections of the rib are more important than would otherwise be the case.
3. The usual arch encountered in practice, however, is subjected to a series of loads, and the axis of the rib will approximate the funicular polygon for these loads. In other words, the line of pressure is nearly perpindicular to the right section at all points along the rib. Consequently, the shearing components are so small that the shearing strains are insignificant and are neglected
4. Axial strains, resulting in rib shortening, become increasingly important as the rise-to-span ratio of the arch decreases. It is advisable to determine the effects of the rib by considering flexural strains only, and then to check for effects or rib shortening.

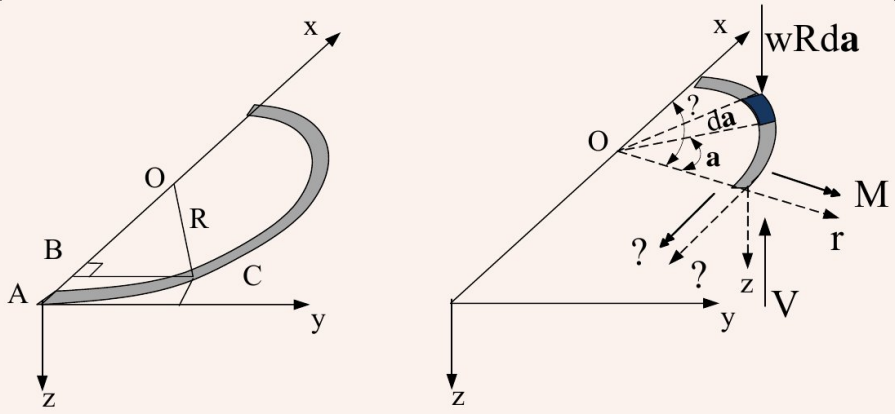
11.4 Semi-Circular Box Girder

Determine the reactions of the semi-circular cantilevered box girder subjected to its own weight w.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Reactions are again determined first

From geometry we have OA=R, OB=Rcosθ, CD = BA = OA - OB = R - Rcosθ, EB = R(1+cosθ) and BC = Rsinθ. The moment arms for the moments with respect to the x and y axis are BC and EB respectively. Applying three equations of equilibrium we obtain

$$F_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta = 0 \qquad \boxed{F_z^A = wR\pi}$$

$$M_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot \sin\theta = 0 \qquad \boxed{M_z^A = 2 \cdot w \cdot R^2}$$

$$M_y^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot (1 + \cos\theta) = 0 \qquad \boxed{M_y^A = -w \cdot R^2 \cdot \pi}$$

Internal Forces are determined next

1. Shear Force:

$$\sum F_z = 0 \qquad V - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha = 0$$

$$\boxed{V = wR\theta}$$

2. Bending Moment:

$$\sum M_R = 0 \qquad M - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{M = wR^2 \cdot (1 - \cos\theta)}$$

3. Torsion:

$$\sum M_\theta = 0 \qquad T + \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha) = 0$$

$$\boxed{T = -wR^2 \cdot (\theta - \sin\theta)}$$

Deflection are determined last

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We assume a rectangular cross-section of width b and heigh d=2b and a Poisson's ratio of $\nu := 0.3$

1. Noting that the member will be subjected to both flexural and torsional deformations, we seek to determine the two stiffnesses.

2. The flexural stiffness EI is given by $EI = E\cdot\frac{b\cdot d^3}{12} = \frac{2Eb^4}{3}$

3. The torsional stiffness of solid rectangular sections $J = kb^3\cdot d$ where b is the shorter side of the section, d is the longer,

   and k is a factor equal to 0.229 for d/b=2. Hence $G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$, and $GJ = \frac{E}{2.6}\cdot 0.229\cdot b^4 = 0.176E\cdot b^4$.

4. Considering both flexural and torsional deformations, and replacing dx by rdθ:

$$\delta\cdot\overline{M}\cdot\Delta = \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI_z}\cdot R\,d\theta + \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{T}\cdot\frac{T}{GJ}\cdot R\,d\theta$$

   where the real moments were given above.

5. Assuming a virtual downward force $\delta\cdot\overline{P} = 1$, we have

$$\delta\cdot\overline{M} = R\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{T} = -R\cdot(1-\cos\theta)$$

6. Substituting these expressions into the equation for displacement (in 4)

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^2}{EI}\cdot\int_0^{\pi}(R\cdot\sin\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta + \frac{w\cdot R^2}{GJ}\cdot\int_0^{\pi}(\theta-\sin\theta)\cdot R\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta$$

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^4}{EI}\cdot\int_0^{\pi}\left[(\sin\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta) + \frac{1}{0.265}\cdot(\theta-\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta)\right]\,d\theta$$

$$\boxed{\Delta = 20.56\cdot\frac{w\cdot R^4}{EI}}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

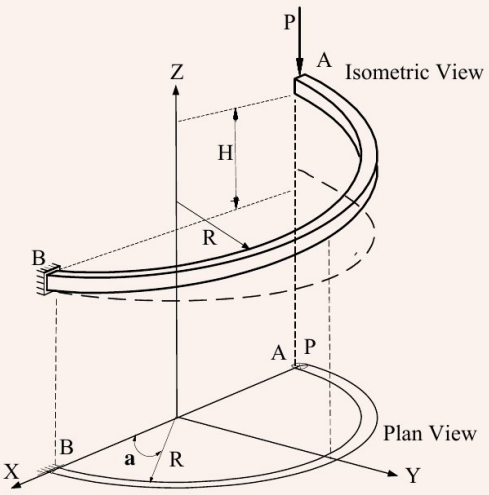
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load

Determine the internal forces N, V_s, and V_w and the internal moments T, M, and M_w along the helicoidal cantilevered girder.



Solution:

1. We first determine the geometry in terms of the angle θ

$$x(R,\theta) := R\cdot\cos(\theta) \qquad y(R,\theta) := R\cdot\sin(\theta) \qquad z(H,\theta) := \frac{H}{\pi}\cdot\theta$$

2. To determine the unit vector **n** at any point we need the derivatives

$$dx(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}x(R,\theta) \rightarrow -R\cdot\sin(\theta) \qquad dy(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}y(R,\theta) \rightarrow R\cdot\cos(\theta) \qquad dz(H,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}z(H,\theta) \rightarrow \frac{H}{\pi}$$

and then determine the unit vector

$$\mathbf{n} = \frac{-R\cdot\sin(\theta)\mathbf{i} + R\cdot\cos(\theta)\cdot\mathbf{j} + \frac{H}{\pi}\cdot\mathbf{k}}{\left[R^2\cdot(\sin\theta)^2 + R^2\cdot(\cos\theta)^2 + \left(\frac{H}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[-\sin\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\cdot\mathbf{j} + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)\cdot\mathbf{k}\right]$$

Since the denominator depends only on the geometry, it will be designated K.

3. The strong bending axis lies in a horizontal plane, and its unit vector can thus be determined

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi\cdot R}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{K}\cdot(\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j})$$

and the absolute magnitude of this vector $|\mathbf{n}\times\mathbf{k}| = \frac{1}{K}$, and thus

$$\mathbf{s} = \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{i}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The unit vector along the weak axis is determined

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{1}{K} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi \cdot R} \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \sin\theta \cdot \mathbf{i} - \frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

5. With the geometry definition completed, we now examine the equilibrium equations.

$$\sum F = 0 \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$

$$\sum M_b = 0 \qquad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P}$$

where

$$\mathbf{L} = (R - R \cdot \cos\theta) \cdot \mathbf{i} + (0 - R \cdot \sin\theta) \cdot \mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi} \cdot H\right) \cdot \mathbf{k}$$

and

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{P} = R \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \cos\theta & -\sin\theta & \frac{-\theta}{\pi} \cdot \frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = PR \cdot \left[-\sin\theta \cdot \mathbf{i} - (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

and

$$\mathbf{M} = PR \cdot \left[\sin\theta \cdot \mathbf{i} + (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

6. Finally, the components of the force $\mathbf{F} = -Pk$ and the moment $\mathbf{M}$ are obtained by appropriate dot products with the unit vectors

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{K} \cdot P \cdot \frac{H}{\pi \cdot R}$$

$$V_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

$$V_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{K} \cdot P$$

$$T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = -\frac{PR}{K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$M_s = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} = PR \cdot \sin\theta$$

$$M_w = \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} = -\frac{PH}{\pi \cdot K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

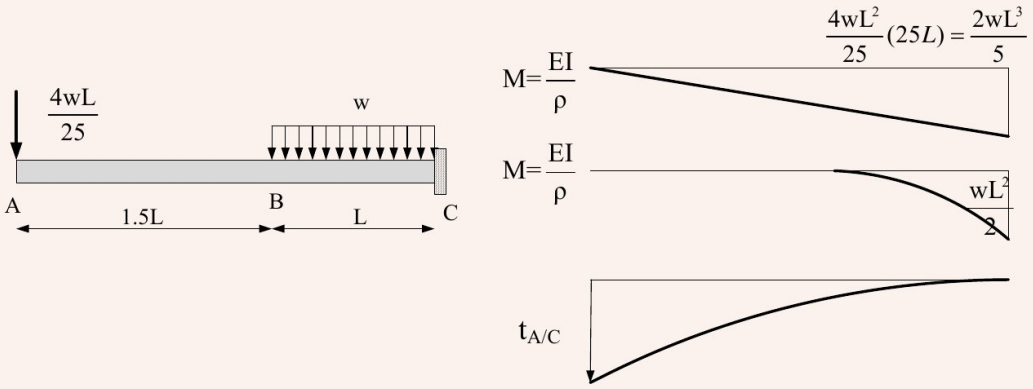
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.1 Moment Area, Cantilevered Beam

Determine the deflection at Point A



Solution:

$$EIt_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2w\cdot L^2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5L}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5L}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-w\cdot L^2}{2}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{9L}{4}\right) = \frac{-29w\cdot L^4}{24}$$

Thus,

$$\boxed{\Delta_A = \frac{-29w\cdot L^4}{24\cdot E\cdot I}}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

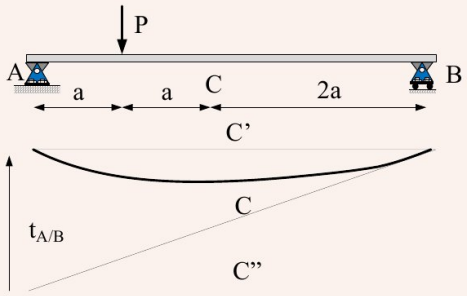
Victor E. Saouma

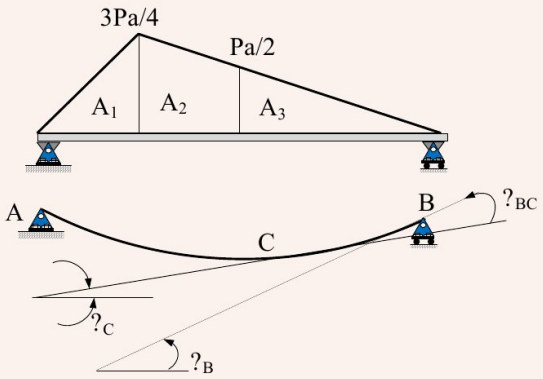
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.2 Moment Area, Simply Supported Beam

Determine Δ_C and θ_C for the following example





Solution:

Deflection Δ_C is determined from $\Delta_C = c' \cdot c = c' \cdot c'' - c'' \cdot c$, $c'' \cdot c = t_{CB}$, and $c' \cdot c'' = \frac{t_{AB}}{2}$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)\cdot\left(a + \frac{3a}{3}\right)\right] = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}$$

This is positive, thus above tangent from B

$$t_{CB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I}$$

Positive, thus above tangent from B. Finally,

$$\boxed{\Delta_C = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\right) - \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{11}{12}\cdot\frac{P\cdot a^3}{E\cdot I}}$$

Rotationa θ_C is

$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C \Rightarrow \theta_C = \theta_B - \theta_{BC}$$

$$\theta_{BC} = A_3$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{L}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

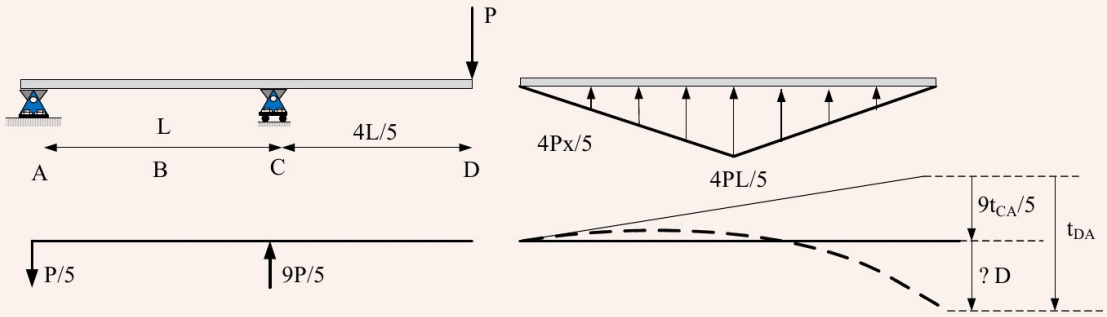
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\theta_C = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{4a} - \left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{P\cdot a^2}{8E\cdot I}$$

12.3 Maximum Deflection

Determine the deflection at D and the maximum deflection at B



Solution:

Deflection at D:

$$\Delta_D = t_{DA} - \frac{9}{5}\cdot t_{CA}$$

$$EIt_{CA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{-2P\cdot L^3}{15}$$

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$EIt_{DA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot\left(\frac{4L}{5}\right)\cdot\left(\frac{8L}{15}\right) = \frac{-234P\cdot L^3}{375}$$

$$t_{DA} = \frac{-234P\cdot L^3}{375E\cdot I}$$

Substituting we obtain

$$\Delta_D = \frac{-48}{125}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Maximum Deflection at B:

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{L} = \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4P\cdot x}{5}\right)\cdot x\right] = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I}$$

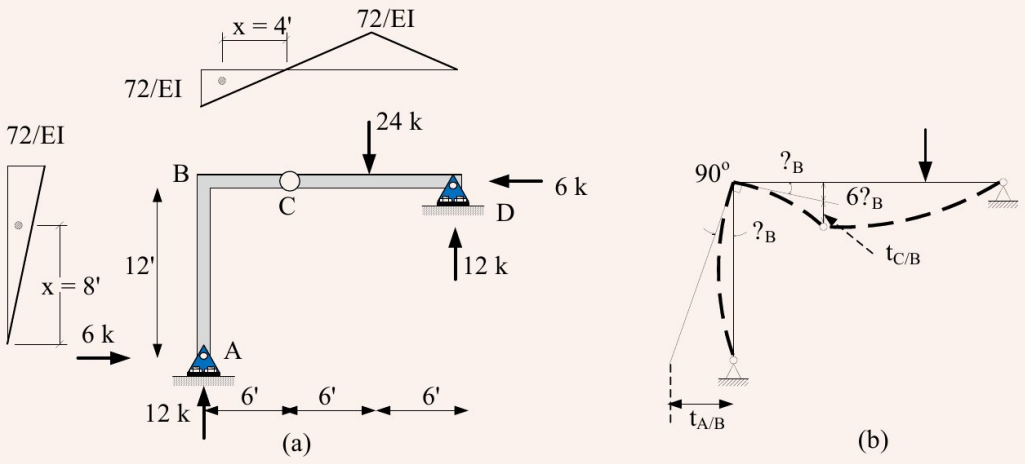
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta_{max} = \left(\frac{4P\cdot x}{5\cdot E\cdot I}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Delta_{max} = \frac{4\cdot P\cdot L^3}{45\cdot\sqrt{3}\cdot E\cdot I}}$$

12.4 Frame Deflection

Complete the following example problem

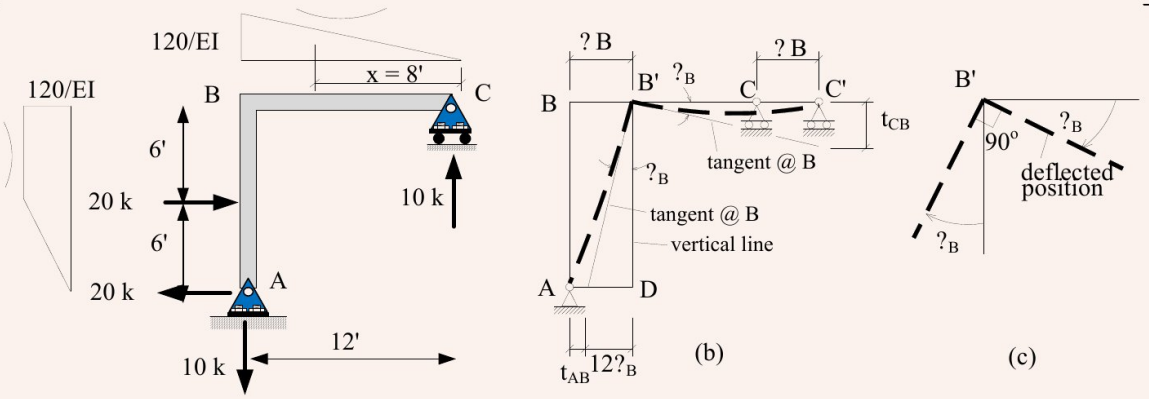


CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

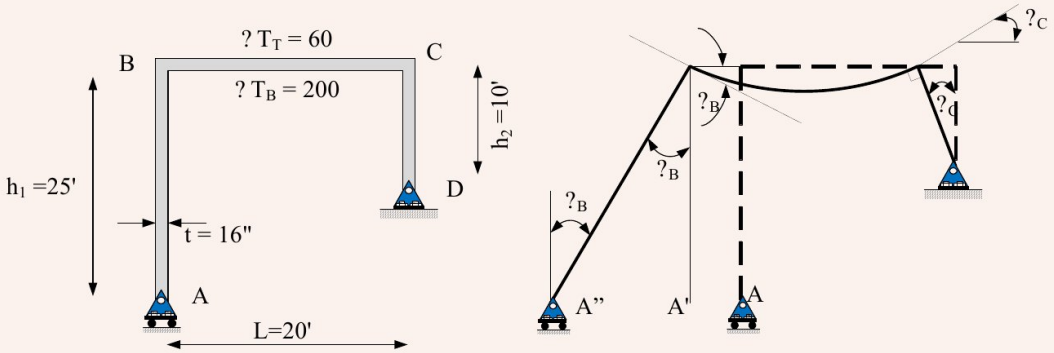
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



12.5 Frame Subjected to Temperature Loading

Neglecting axial deformation, compute displacement at A for the following frame



Solution:

1. First let us sketch the deformed shape

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2. BC flexes => $\theta_B = \theta_C \neq 0$
3. Rigid hinges at B and C with no load on AB and CD
4. Deflection at A

$$\Delta_A = A\cdot A'' = A\cdot A' + A'\cdot A''$$

$$A\cdot A' = \Delta_B = \Delta_C = \left|\theta_C\right|\cdot h_2$$

$$A'\cdot A'' = \left|\theta_B\right|\cdot h_1$$

5. We need to compute θ_B and θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \text{ OR } \theta_C = \frac{t_{BC}}{L}$$

6. In order to apply the curvature area theorem, we need a curvature (or moment diagram)

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{E\cdot I}$$

7.

$$t_{CB} = A\cdot\frac{L}{2} \Rightarrow \left|\theta_B\right| = A\cdot\left(\frac{L}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{A}{2} \text{ OR } \theta_B = \frac{-A}{2}$$

8.

$$\theta_{CB} = A$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B$$

$$\theta_C = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

9. From above

$$\Delta_A = \left|\theta_C\right|\cdot h_2 + \left|\theta_B\right|\cdot h_1 = \frac{A}{2}\cdot h_2 + \frac{A}{2}\cdot h_1 = \frac{A}{2}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$A = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)\cdot L$$

$$\Delta_A = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(h_1 + h_2\right)$$

10. Substitute

$$\Delta_A := \left(6.5\cdot 10^{-6}\right)\cdot(200 - 60)\cdot\frac{20\text{ft}}{16\text{in}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 35\text{ft}$$

$$\boxed{\Delta_A = 2.867\cdot\text{in}}$$

11. Other numerical values

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2}$$

$$\theta_B := \frac{1}{2}\left(6.5\cdot 10^{-6}\right)\cdot\left(\frac{200 - 60}{16\text{in}}\right)\cdot 20\text{ft} = 0.006825\cdot\text{rad}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\theta_C := \theta_B = 0.006825$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha \cdot \left(\frac{T_B - T_T}{h} \right)$$

$$\rho := \frac{1}{\left[\left(6.5 \cdot 10^{-6} \right) \cdot \left(\frac{200 - 60}{16\,in} \right) \right]} = 1465.2 \cdot ft$$

12. In order to get M, we need E and I. Note the difference with other statically determinate structures; the stiffer the beam, the higher the moment; the higher the moment, the higher the stress? NO!!

13. $$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{E \cdot I}{\rho} \cdot \frac{y}{I} = \frac{E \cdot y}{\rho}$$

14. ρ is constant => BC is on arc of circle M is constant and $\frac{M}{EI} = \frac{d^2 \cdot y}{dx^2}$ => $\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = c$ => $y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$

15. The slope is a parabola

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Let us get curvature from the parabola slope and compare it with ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$

$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$

$$\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = c$$

at x=0, y=o, thus e=0

at x=0, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -0.006825 rad$, thus $d = -0.006825 rad$

at x=20 ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = 0.006825 rad$, thus $c(20ft) - 0.006825 = 0.006825$, thus $c = 6.825 \cdot 10^{-4}$

$$y = 6.825 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 10x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.825 \cdot 10^{-4} \cdot (x - 10)$$

$$\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = 6.825 \cdot 10^{-4}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\phi := 6.825 \cdot 10^{-4}$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.2 \cdot ft \quad \text{as expected!}$$

If we were to use the exact curvature formula $\dfrac{\dfrac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\phi := \frac{6.825 \cdot 10^{-4}}{\left[1 + (0.006825)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.000682$$

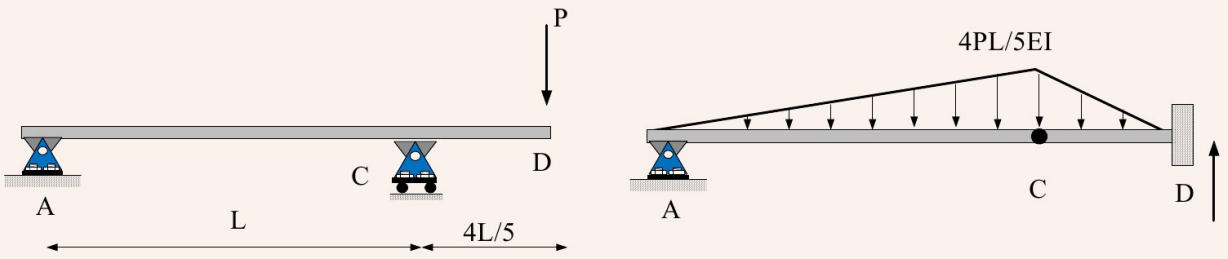
$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.3 \cdot ft$$

12.6 Conjugate Beam

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Analyze the following beam



Solution:

3 equations of equilibrium and 1 equation of condition = 4 = number of reactions. Deflection at D = Shear at D of the corresponding conjugate beam (Reaction at D) Take AC and ΣM with respect to C

$$R_A \cdot (L) - \left(\frac{4P \cdot L}{5E \cdot I}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$R_A = \frac{2 \cdot P \cdot L^3}{15E \cdot I}$$

(Slope in real beam at A) As computed before. Let us dram the moment diagram for the conjugate beam

$$M = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{2}{15} \cdot L^2 \cdot x - \frac{2}{15} \cdot x^3\right) = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - x^3\right)$$

Point of maximum moment (Δ_{max}) occurs when $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

as previously determined

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left[L^2 \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right]$$

$$M = \frac{4P \cdot L^3}{45 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$ as before

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

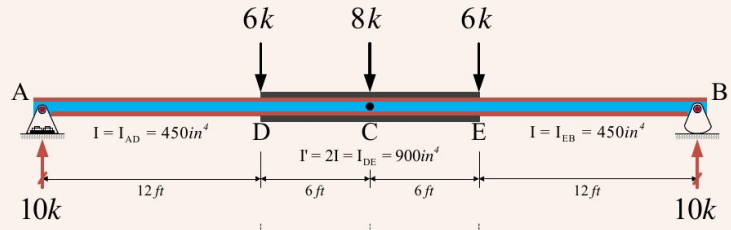
Victor E. Saouma

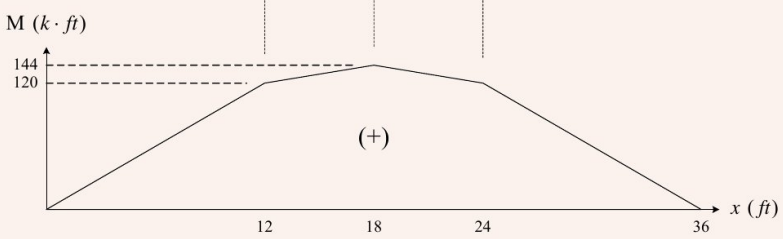
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.7 Conjugate Beam

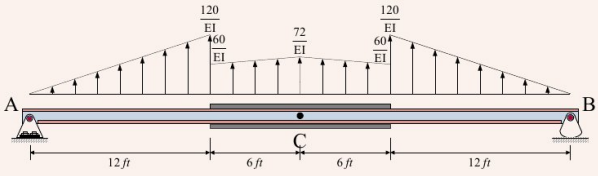
Analyze the following beam

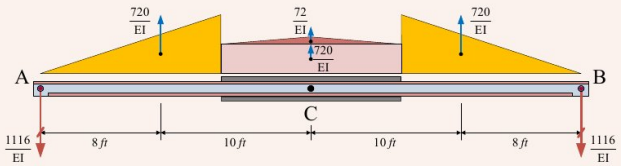


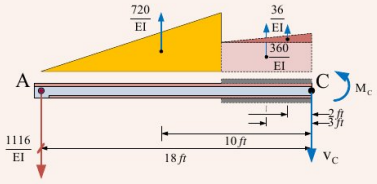


Solution:

From simple observation, the reactions at A and B are equal to 10 k. The elastic load on the conjugate beam is then shown below.







We next seek to determine the internal moment at C' in the conjugate beam. It is obtained from equilibrium:

$$\sum M_z^B = 0 \qquad \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft - \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft - \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft - \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft + M_{C'} = 0$$

$E := 29\cdot 10^3 ksi$

$I := 450in^4$

$\Delta_C = M_{C'}$

$$\Delta_{C'} := \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft + \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft + \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft - \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft = -1.554\cdot in$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

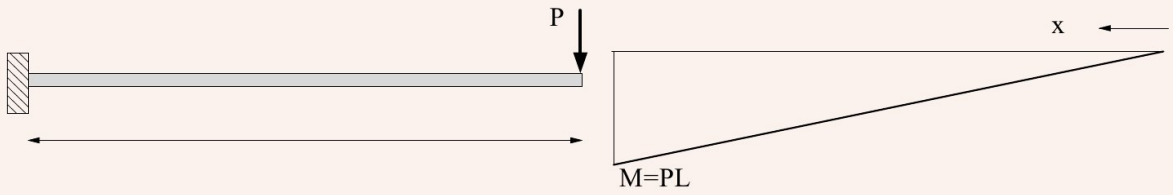
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.1 Deflection of a Cantilever Beam

Determine the deflection of the cantilever beam with span L under a point load P at its free end. Assume constant EI.



Solution:

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2\cdot E\cdot I}\,dx$$

$$M = -P\cdot x$$

$$U(P, L, EI) := \frac{P^2}{2\cdot EI}\cdot \int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f = \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\boxed{\Delta_f = \frac{P\cdot L^3}{3\cdot EI}}$$

Note that the solution of this problem was facilitated by the fact thatΔ_f is co-alligned with P.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

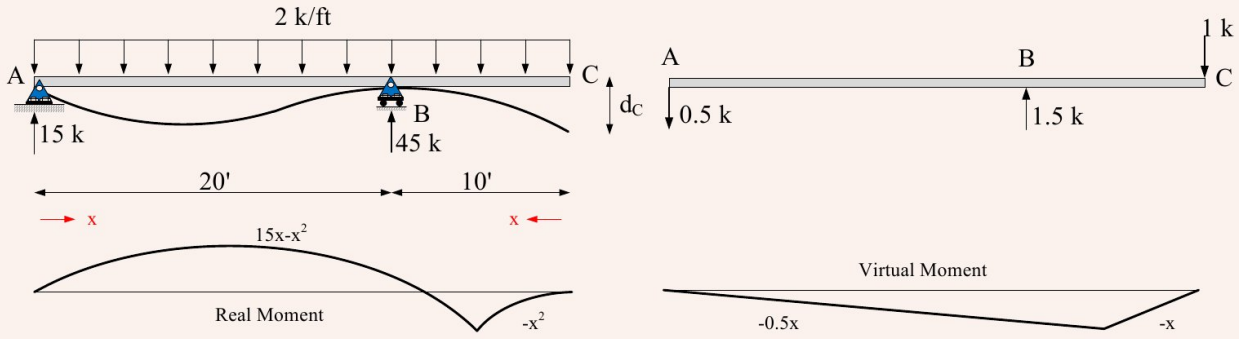
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection

Determine the deflection at point C. $E := 29000ksi$, $I := 100in^4$



Solution:

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	$15x - x^2$	- 0.5x
BC	C	$- x^2$	- x

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

$$\Delta_C \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta_C = \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx \rightarrow \frac{2500}{EI}$$

$$\Delta_C := \frac{2500kip \cdot ft^3}{E \cdot I} = 1.49 \cdot in$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

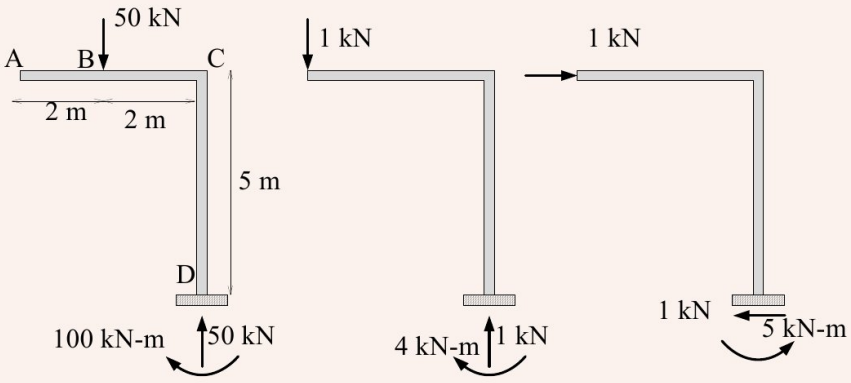
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

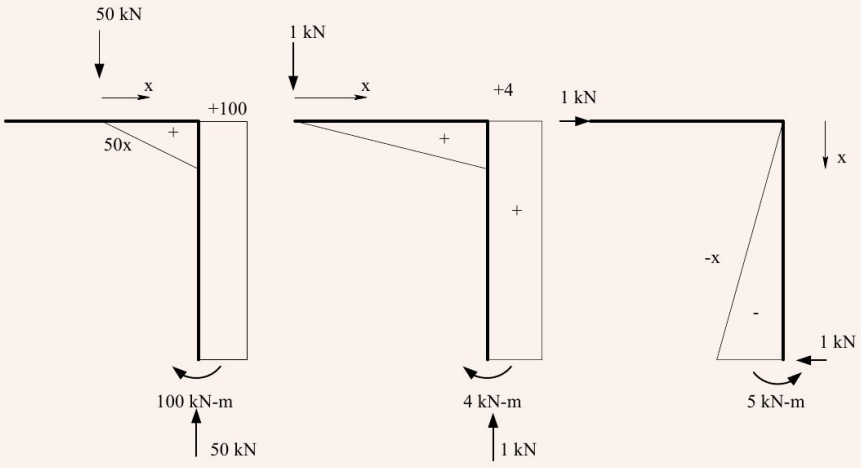
13.3 Deflection of a Frame

Determine both the vertical and horizontal deflection at A for the frame shown. $E := 200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$, $I := 200 \cdot 10^6 mm^4$



Solution:

To analyze the frame we must determine analytical expressions for the moments along each member for the real load and the two virtual ones. One virtual load is a unit horizontal load at A, and the other a unit vertical one at A



Element	x = 0	M	δM_v	δM_h
AB	A	0	- x	0
BC	B	- 50x	- 2 - x	0
CD	C	100	4	- x

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the inside of the frame. Substitution yields:

$$\Delta_\nu \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_\nu = \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_\nu(EI) := \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow \frac{7000}{3 \cdot EI}$$

$$\Delta_\nu := \frac{7000 kN \cdot m^3}{3 \cdot E \cdot I} = 5.833 \cdot cm$$

Similarly for the horizontal displacement

$$\Delta_h \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_h = \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_h(EI) := \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow -\frac{1250}{EI}$$

$$\Delta_h := \frac{-1250 kN \cdot m^3}{E \cdot I} = -3.125 \cdot cm$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

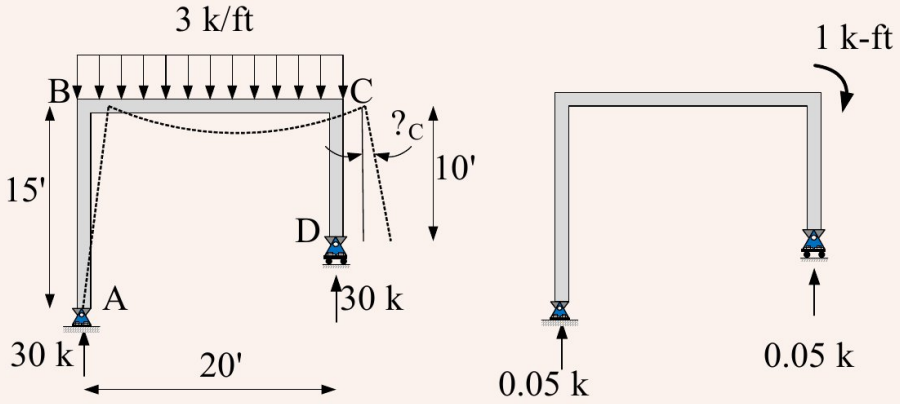
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.4 Rotation of a Frame

Determine the rotation of joint C for the frame shown. $E := 29000ksi$, $I := 240in^4$



Solution:

In this problem the virtual force is a unit moment applied at joint C, $\delta \cdot \overline{M_e}$. It will cause an internal moment $\delta \cdot \overline{M_i}$.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	- 0.05x
CD	D	0	0

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the outside of the frame. Substitution yields:

$$\theta_C \cdot \delta \cdot \overline{M_e} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

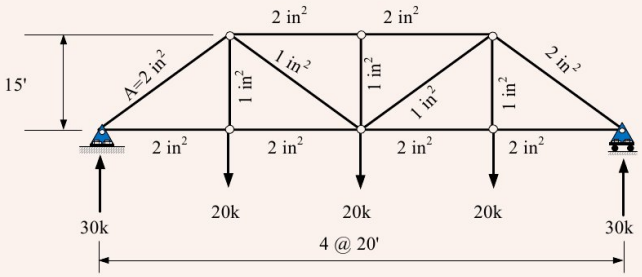
$$1 \cdot \theta_C = \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx$$

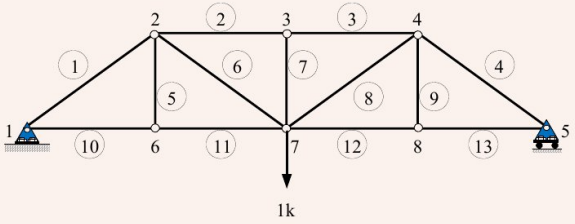
$$\theta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx \rightarrow -\frac{1000}{EI}$$

$$\theta_C := \frac{-1000\,kip \cdot ft^2}{E \cdot I} = -0.021 \cdot rad$$

13.5 Truss Deflection

Determine the vertical deflection of joint 7 in the truss shown $E := 30000ksi$





Solution:

Two analyses are required. One with the real load, and the other using a unit vertical load at joint 7. Results for those analyses are summarized below. Note that advantage was taken of the symmetric load and structure.

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Total							4220.3

$$\Delta\cdot\delta\cdot\bar{P} = \int_0^L \delta\cdot\bar{P}\cdot\frac{P}{A\cdot E}\,dx$$

$$1\cdot\Delta = \Sigma\delta\cdot\bar{P}_e\cdot\frac{P_e\cdot L}{A\cdot E}$$

$$\Delta := \frac{4220.3\,\frac{kip\cdot ft}{in^2}}{E} = 1.688\cdot in$$

13.6 Torsional and Flexural Deformation

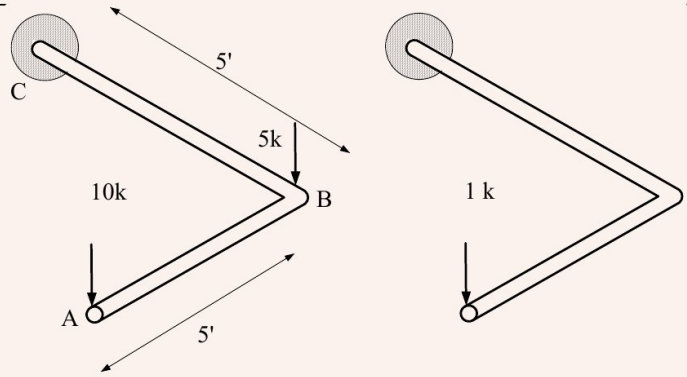
Determine the vertical deflection at A in the structure shown. $E := 30000ksi$, $I := 144in^4$, $G := 12000ksi$, $J := 288in^4$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. In this problem we have both flexural and torsional deformation. Hence we should determine the internal moment and torsion distribution for both the real and the unit virtual load.
2. Then we will use the following relation

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

3. The moment and torsion expressions are given by

Element	x = 0	M	δM	T	δT
AB	A	10x	x	0	0
BC	B	15x	x	50	5

4. Substituting

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

$$1\cdot\Delta_A = \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{EI}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{EI}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{GJ}\,dx$$

$$\Delta_A(E,I,G,J) := \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{G\cdot J}\,dx \rightarrow \frac{3125}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250}{G\cdot J}$$

$$\Delta_A := \frac{3125\,kip\cdot ft^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250\,kip\cdot ft^3}{G\cdot J} = 1.042\cdot in$$

13.7 Flexural and Shear Deformations in a Beam

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Determine the deflection of a cantilevered beam, of length L, subjected to an end force P due to both flexural and shear deformations. Assumed G=0.4E and a square solid beam cross section.

Solution:

1. The virtual work equation is

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot(x)\cdot d\phi(x)\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}\cdot(x)\cdot\gamma_{xy}(x)\,dx = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx$$

2. The first integral yields for M=Px, and $\bar{\delta}\cdot M = 1\cdot x$

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx$$

$$\frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{94280057135446.5\cdot N\cdot ft^3}{EI}$$

3. The second integral represents the contribution of the shearing action to the total internal virtual work and hence to the total displacement.

4. Both the real shear V and the virtual shear $\bar{\delta}\cdot\bar{V}$ are constant along the length of the member, hence

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx = \frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx$$

$$\frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx \rightarrow \frac{374606093684.841\cdot N\cdot GPa\cdot ft}{GA}$$

5. Since $\lambda := 1.2$ for a square beam; hence

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

then

$$\Delta = \frac{P\cdot L}{3\cdot E}\cdot\left(\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right) = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left(\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right)$$

6. Choosing $L := 20ft$ and $h := 1.5ft$ (L/h=13.3)

$$\Delta = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left[1.33\cdot\left(\frac{20ft}{1.5ft}\right)^2 + 1\right] = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot(237 + 1)$$

Thus the flexural deformation is 237 times the shear displacement. This comparison reveals why we normally neglect shearing deformation in beams. As the beam get shorter or deeper, or as L/h decreases, the flexural deformation decreases relative to the shear displacement. At L/h=5, the flexural deformation has reduced to $1.33\cdot 5^2 = 33.25$ times the shear displacement.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

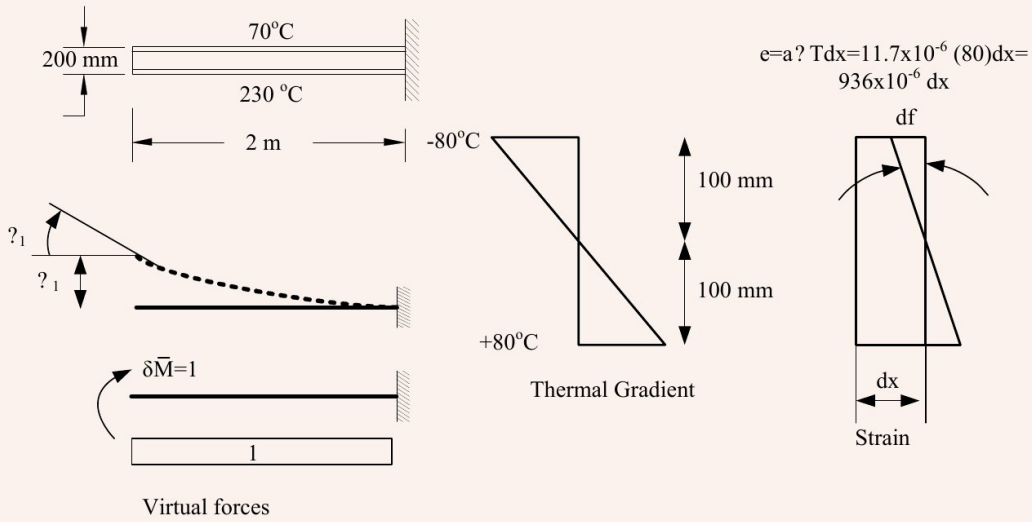
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.8 Thermal Effects in a Beam

Consider the cantilever beam shown. If the beam is a steel, wide flange section, 2 m long and 200 mm deep, what is the angle of rotation, θ_1, at the end of the beam caused by the temperature effect? The original uniform temperature of the beam was 40C.



Solution:

1. The external vurtual force conforming to the desired real displacement θ_1 is a moment $\delta\cdot\overline{M} = 1$ at the tip of the cantilever, producing an external work term of moment times rotation. The internal virtual force system for this cantilever beam is a uniform moment $\delta\cdot\overline{M}_{int} = 1$.
2. The real internal deformation results from (a) the average beam temperature of 150C, which is 110C above that of the original temperature, and (b) the temperature gradient of 160C across the depth of the beam.
3. The first part of the thermal effect produces only a lengthening of the beam and does not enter into the work equation since the virtual loading produces no axial force corresponding to an axial chnge in length of the beam.
4. The second effect (thermal gradient) produces rotation $d\phi$, and an internal virtual work term of $\int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$
5. We determine the value of $d\phi$ by considering an extreme fiber thermal strain as shown above. The angular rotation in the length dx is the extreme fiber thermal strain divided by half the beam depth.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon}{y} = \phi$$

$$1\cdot\theta_1 = \int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$$

$$\theta_1 = \int_0^L 1\cdot\frac{\alpha\cdot\left(T_B - T_T\right)}{h}\, dx$$

$$\theta_1 := \frac{11.7\cdot10^{-6}\,\frac{m}{m}\cdot(230 - 70)\cdot 2m}{0.2m} = 0.01872\cdot rad$$

6. This example raises the following points
   a) The value of θ_1 would be the same for any shape of 200 mm deep steel beam that has its neutal axis of bending at middepth

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

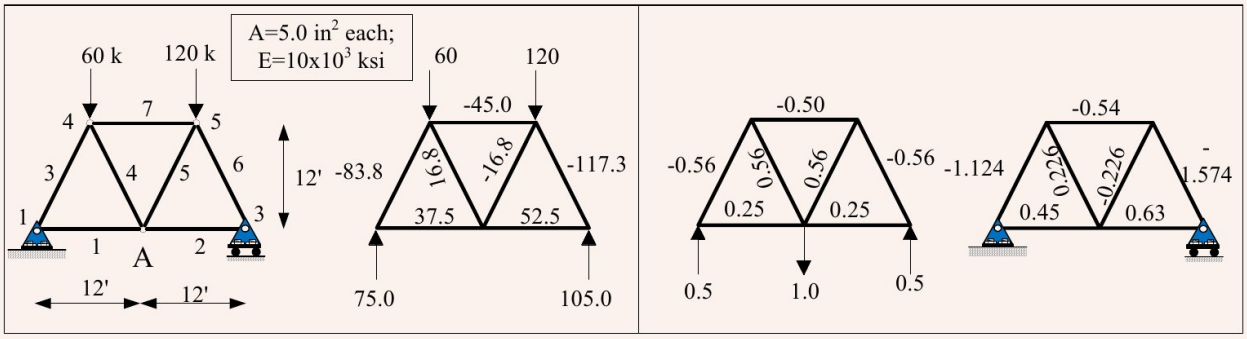
b) Curvature is produced only by thermal gradient and is independent of absolute temperature values.
c) The calculation of rotations by the method of virtual forces is simple and straightforward; the applied virtual force is a moment acting at a point where rotation is to be calculated.
d) Internal angular deformation dϕ has been calculated for an effect other than load-induced stresses. This extension of the method of virtual forces to treat inelastic displacements is obvious - all we need to know is a method for determining the inelastic internal deformations.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.9 Deflection of a Truss

Determine the deflection at node 2 for the truss shown



Solution:

Member	δP kip	P^e kip	L ft	A in^2	E ksi	δPPL/AE
1	0.25	37.5	12	5	10×10^3	22.5×10^{-4}
2	0.25	52.5	12	5	10×10^3	31.5×10^{-4}
3	-0.56	-83.8	13.42	5	10×10^3	125.9×10^{-4}
4	0.56	16.8	13.42	5	10×10^3	25.3×10^{-4}
5	0.56	-16.8	13.42	5	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5	10×10^3	176.6×10^{-4}
7	-0.5	-45	12	5	10×10^3	54×10^{-4}
Total						410.5×10^{-4}

The deflection is thus given by

$$\delta \cdot \overline{P} \cdot \Delta = \sum_{n=1}^{7} \left(\delta \cdot \overline{P_e} \cdot \frac{PL}{AE} \right)$$

$$\Delta := 410.5 \cdot 10^{-4} \cdot ft = 0.493 \cdot in$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

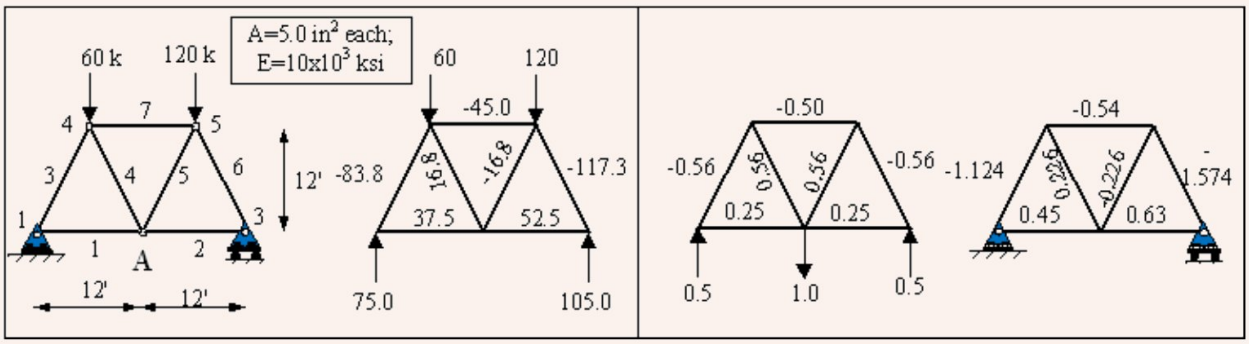
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.10 Thermal Deflection of a Truss; I

The truss shown is built such that the lower chords are shielded from the rays of the sun. On a summer day the lower chords are 30F cooler than the rest of the truss members. What is the magnitude of the vertical displacement at joint 2 as a result of this temperature difference?



Solution:

1. The virtual force system remains identical to that of the previous example because the desired displacement component is the same.
2. The real internal displacements are made up of the shortening of those members of the truss that are shielded from the sun.
3. Both the bottom chord members 1 and 2 thus shorten by

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\Delta L := \left(0.0000128 \frac{\text{in}}{\text{in} \cdot \Delta°\text{F}}\right)(30 \cdot \Delta°\text{F}) \cdot 12\text{ft} = 0.0553 \cdot \text{in}$$

4. Then,

$$1 \cdot \Delta = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \Delta L$$

$$\Delta := 0.25(-\Delta L) + 0.25(-\Delta L)$$

$$\Delta = -0.0276 \cdot \text{in}$$

5. The negative sign n the displacement indicates that it is in opposite sense of the displacement; the assumed direction is always identical to the direction of the applied virtual force.
6. Note that the same result would be obtained if we had considered the internal displacements to be made up of lengthening of all truss members above the bottom chord.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

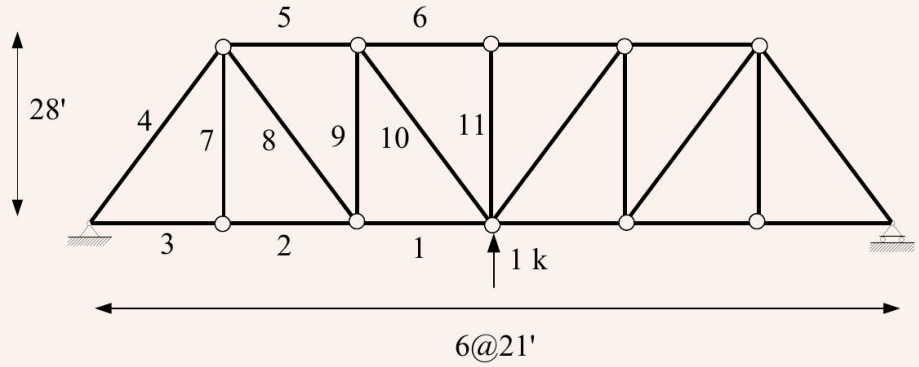
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.11 Thermal Deflection of a Truss; II

A six panel highway bridge is constructed with sidewalks outside the trusses so that the bottom chords are shaded. What will be the vertical deflection component of the bottom chord at the center of the bridge when the temperature of the bottom chord is 40F (ΔT) below that of the top chord, endposts, and webs? (coefficient of steel thermal expansion is $\alpha := 0.0000065 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$



Solution:

1. The deflection is given by

$$\Delta \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{AE}\, dx = \sum \delta \cdot \bar{P_i} \cdot \frac{P_i \cdot L_i}{AE} = \sum \delta \cdot \bar{P_i} \cdot \Delta L_i = \sum \delta \cdot \bar{P_i} \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

where ΔL is the temperature change in length of each member, and $\delta \cdot \bar{P}$ are the member virtual internal forces

2. Taking advantage of symmetry (Note that we ignor members 1-3 because we assumed that they had the reference temperature, and all other members are subjected to a relative temperature increase of 40F)

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
4	35	0.0091	0.625	0.00568
5	21	0.00546	0.75	0.00409
6	21	0.00546	1.13	0.00616
7	0	0	0	0
8	35	0.0091	-0.625	-0.00568
9	28	0.00728	0.5	0.00364
10	35	0.0091	-0.625	-0.00568
11	0	0	0	0
Total				0.00821

3. Hence the total deflection is

$$\Delta := 2 \cdot 0.00821\,ft = 0.197 \cdot in$$

4. A more efficient solution would have consisted in considering members 1, 2, and 3 only and applying ΔT=-40F, we would obtain

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

the same displacement.

5. Note that the forces in members 1, 2, and 3 (-0.75, -0.375, and -0.375 respectively) were not included in the table because the corresponding ΔT=0.

6. A simple solution would have $\Delta T := -40 \cdot \Delta°F$ in members 1, 2,and 3 thus

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
1	21	-0.00546	-0.75	0.004095
2	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
3	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
Total				0.00819

$\Delta := 2 \cdot 0.00819 ft = 0.197 \cdot in$

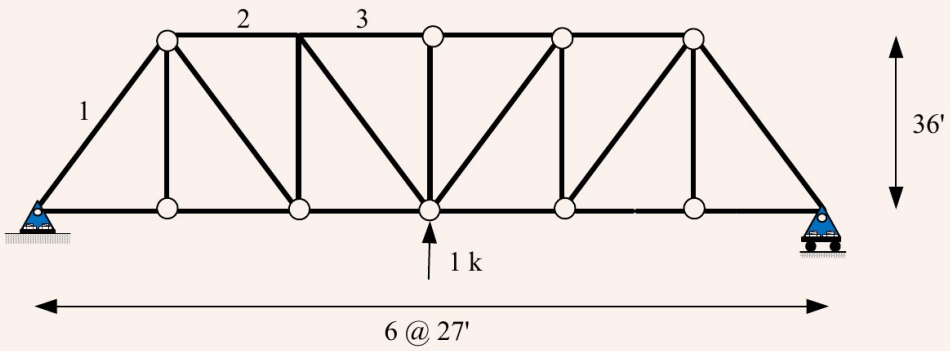
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.12 Truss with Initial Camber

It is desired to provide 3 in. of camber at the center of the truss shown below by fabricating the endposts and top chord members additionally long. How much should the length of each endpost and each panel of the top chord be increased?



Solution:

1. Assume that eachtop chord is increased 0.1 in.

Member	δP_{int} kip	ΔL in	$\delta P \Delta L$
1	0.625	0.1	0.0625
2	0.75	0.1	0.075
3	1.125	0.1	0.1125
Total			0.25

Thus,

$$2 \cdot 0.25\text{in} = 0.5 \cdot \text{in}$$

2. Since the structure is linear and elastic, the required increase of length for each section will be

$$\frac{3\text{in}}{0.5\text{in}} \cdot 0.1\text{in} = 0.6 \cdot \text{in}$$

3. If we use the practical value of 0.625in

$$\boxed{\frac{0.625\text{in} \cdot 0.5\text{in}}{0.1\text{in}} = 3.125 \cdot \text{in}}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

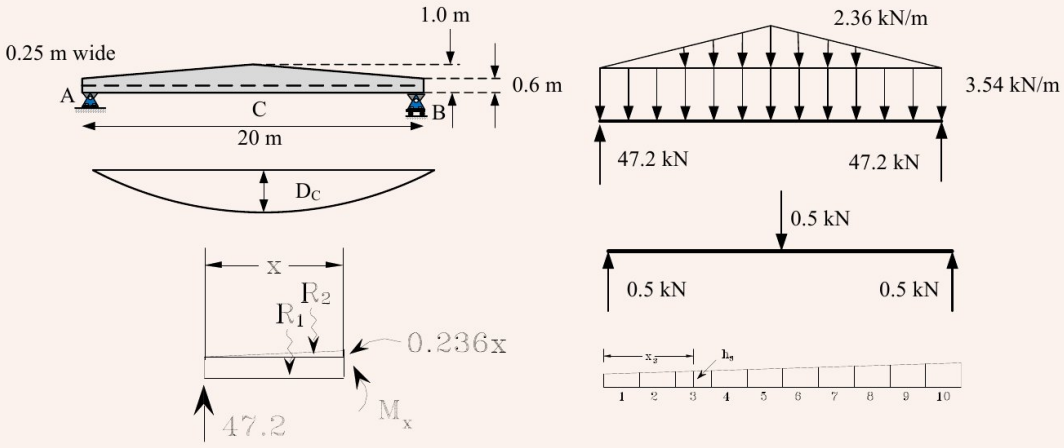
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.13 Prestressed Conrete Beam with Continuously Variable I

A prestressed concrete beam is made of variable depth for proper location of the straight pretensioning tendon. Determine the midspan displacement (point c) produced by the dead weight of the girder. The concrete weighs $w := 23.6\frac{kN}{m^3}$ and has $E := 25000MPa$. The beam is 0.25m wide.



Solution:

1. We seek an expression for the real moment M. This is accomplished by first determining the reactions and then considering the free body diagram.
2. We have the intermediary resultant forces

$$R_1(x) := 0.25m \cdot x \cdot 0.6m \cdot w \rightarrow \frac{3.54 \cdot kN \cdot x}{m}$$

$$R_2(x) := \frac{1}{2} \cdot 0.25m \cdot x \cdot \frac{0.4m}{10m} \cdot x \cdot w \rightarrow \frac{0.118 \cdot kN \cdot x^2}{m^2}$$

Hence,

$$M(x) := 47.2x - 3.54x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) - 0.118x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow 47.2 \cdot x + -0.039 \cdot x^3 + -1.77 \cdot x^2$$

3. The moment of inertia of the rectangular beam varies continuously and is given, for the left half of the beam, by

$$I(x) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$I(x) := \frac{1}{12}\cdot(0.25)\cdot(0.6 + 0.04x)^3 \rightarrow 0.021\cdot(0.04\cdot x + 0.6)^3$$

4. Thus, the real angle changes produced by the dead load bending are

$$d\phi = \frac{M}{EI}\cdot dx = \frac{47.2\cdot x + -0.039\cdot x^3 + -1.77\cdot x^2}{E\cdot\left(\frac{1}{48}\right)\cdot(0.6 + 0.04x)^3}$$

5. The virtual force system corresponding to the desired displacement is shown above with $\delta\cdot\overline{M} = \frac{1}{2}\cdot x$ for the left half of the span.

Since the beam is symmetrical, the virtual work equations can be evaluated for only one half of the beam and the final answer is then obtained by multiplying the half-beam result by two.

6. The direct evaluation of the integral $\int \delta\cdot\overline{M}\, d\phi$ is difficult beause of the expression for dϕ. Hence we shall use a numerical procedure, replacing the $\int \delta\cdot\overline{M}\cdot\left(\frac{M}{EI}\right) dx$ with the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$, where each quantity in the summation is evaluated at the center of the interval Δx and held constant over the interval length. As Δx becomes very short, the solution approaches the exact answer.

7. An interval length of 1 meter, giving 10 elements in the half length of the beam, is chosen to establish an accurate result.

8. The internal virtual work quantity is then

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\, dx \sim \sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\cdot\Delta x\right] = \sum \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{E\left(\frac{0.25}{12}\right)\cdot h^3}\cdot\Delta x = \frac{48}{E}\cdot\sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{h^3}\cdot\Delta x\right]$$

9. The summation for the 10 elements in the left half of the beam gives

Segment	x	h	h^3	M	δM	$M\delta M/h^3$
1	0.5	0.62	0.238	23.2	0.25	24
2	1.5	0.66	0.288	66.7	0.75	174
3	2.5	0.7	0.343	106.4	1.25	388
4	3.5	0.74	0.405	150	1.75	648
5	4.5	0.78	0.475	173	2.25	820
6	5.5	0.82	0.551	200	2.75	998
7	6.5	0.86	0.636	222	3.25	1134
8	7.5	0.9	0.729	238	3.75	1224
9	8.5	0.94	0.831	250	4.25	1279
10	9.5	0.98	0.941	256	4.75	1292
Total						7981

10. The SI units should be checked for consistency. Letting the virtual force carry the units of kN, the virtual moment has the

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

units of m-kN, and the units of the equation

$$\frac{1}{kN}\cdot\frac{(m\cdot kN)\cdot(m\cdot kN)}{\frac{MN}{m^2}\cdot m^4}\cdot m = \frac{m}{1000} = mm$$

11. Then

$$\int_0^L \frac{\bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot M}{EI}\,dx$$

$$2\cdot\left(\frac{48}{25000}\right)\cdot 7981\cdot 1\cdot mm = 30.65\cdot mm$$

and the deflection at midspan is

$$\Delta_c := 30.65\ mm$$

12. Acceptably accurate results may be obtained with considerably fewer elements (longer intervals Δx). Using four elements with centers at 2, 5, 8, and 10, the $\sum \bar{\delta}\cdot\bar{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$ is

$$3(174) + 3\cdot(820) + 3\cdot(1224) + 1\cdot(1292) = 7946$$

which is only 0.4% lower than the 10 element solution. If we go to two elements, 3 and 8, we obtain a summation of $5\cdot 388 + 5\cdot 1224 = 8060$ which is 1% high. A one element solution, with x=5m and h=0.8m, gives a summation of 9136 which is 14.4% high and much less accurate than the 2 element solution.

13. Finally, it should be noted that the calculations involved in this example are essentially identical to those necessary in the moment area method.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.1 Steel Building Frame Analysis

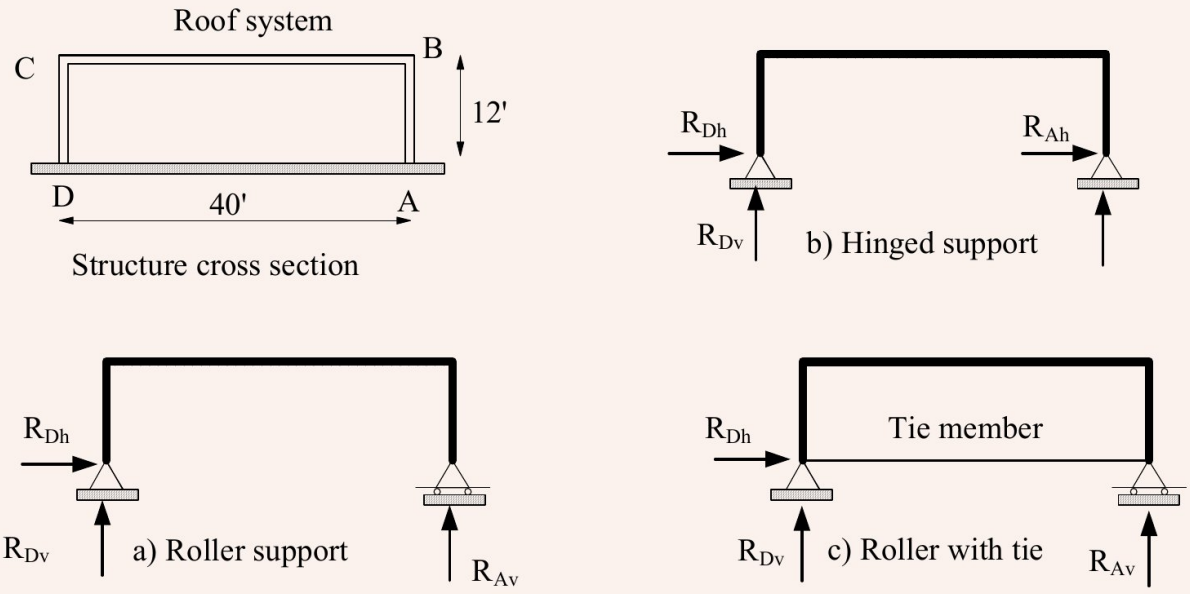
A small, mass-produced industrial building is to be framed in structural steel with a typical cross as shown below. The engineer is considering three different designs for the frame: (a) for poor or unknown soil conditions, the foundation for the frame may not be able to develop any dependable horizontal forces at its bases. In this case the idealized base conditions are a hinge at one of the bases and a roller at the other; (b) for excellent soil conditions with properly designed foundations, the base of the frame legs will have no tendency to move horizontally, and the idealized base condition is that of hinges at both points A and D; and (c) a design intermediate to the above cases, with a steel tie member capable of carrying only tension running between points A and D in the floor of the building. The foundations would not be expected to provide any horizontal restraint for this latter case, and the hinge-roller details at points A and D would apply. Critical design loads for a frame of this type are usually the gravity loads (deal load + snow load) and the combination of dead load and wind load. We will restrict our attention to the first condition, and will use a snow load of $S := 30\text{psf}$ and an estimated total dead load of $D := 20\text{psf}$. With frames spaced at $\text{spacing} := 15\text{ft}$ on centers along the length of the building, the design load is $w_{\text{total}} := \text{spacing}\cdot(S + D) = 750\cdot\frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$. If the frame is made of steel beam sections 21 in. deep and weight 62 lb/ft of length (W 21x62), and the member for design (c) is tentatively chosen as a 2 in^2 bar, determine the bending moment digrams for the three designs and discuss the alternate solutions

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

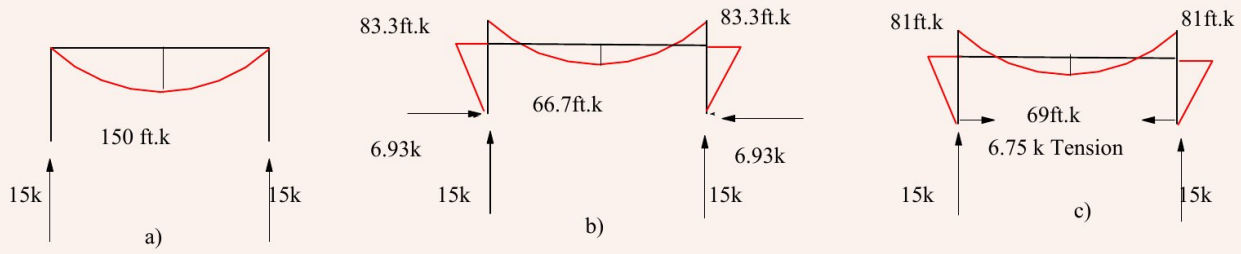
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Structure a This frame is statically determinate since it has three possible unknown external forces acting on it. Final bending moments are shown below.

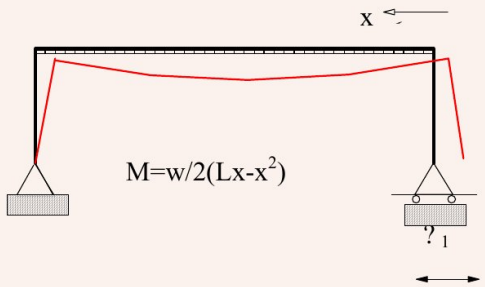


Structure b Hinging both legs of the frame results in another unknown force, making the structure statically indeterminate to the first degree (one redundant).
1. A lateral release at point A is chosen, with the redundant shearing force R1. The displacement Δ_1 in the primary structure, as a result of the real loading, shown in the figure below, is computed by virtual work.
2. The virtual force system produces virtual bending moment $\delta \cdot \overline{M}$, which is uniform across the top member of the frame.

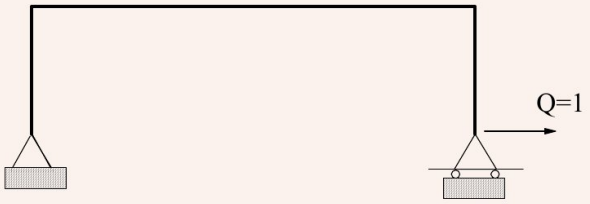
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

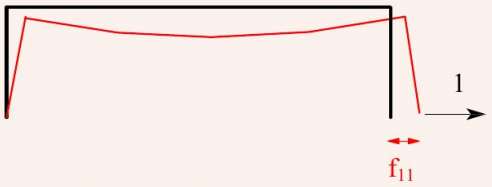
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



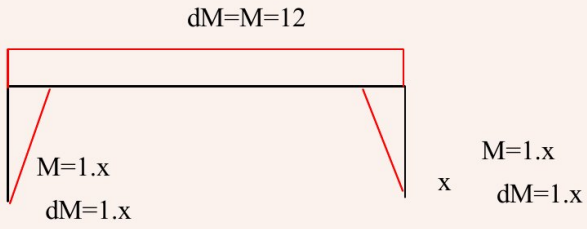
a) Moment caused by actual load on primary structure



b) Virtual forces



c) Real load for determining f_{11}



d) Moments produced by virtual forces and unit redundant

The virtual moment acting through the real angle changes given the internal work term

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

3. Equating this to the external virtual work of $1\cdot\Delta_1$, we have

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3$$

$$\Delta_1(EI) := \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3 \rightarrow \frac{48000\cdot ft^3\cdot kip}{EI}$$

4. The equation of consistent displacement is $\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$. The flexibility coefficient f_{11} is computed by applying a unit horizontal force at the release and determining the displacement at the same point.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5. It is seen that the real loading and the virtual loading are identical for the calculations, and

$$1 \cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right)$$

or

$$f_{11}(EI) := 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right) \cdot kip \cdot ft^3 \rightarrow \frac{6912 \cdot ft^3 \cdot kip}{EI}$$

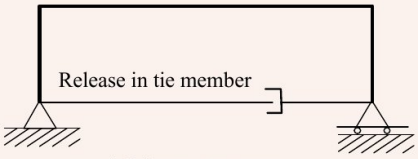
6. solving for R1

$$\frac{1}{EI} \cdot \left(48000 + 6912 R_1\right) = 0$$

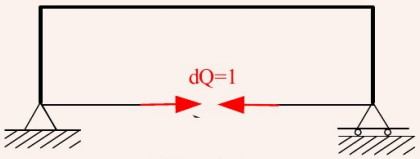
or

$$R_1 := \frac{48000}{6912} \cdot kip = 6.944 \cdot kip$$

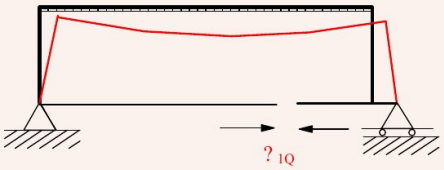
Structure c The frame with the horizontal tie between the points A and D has three unknown external forces. However, the structure is statically indeterminate to the first degree since the tie member provides one degree of internal redundancy.
1. The logical release to choose is a longintudinal release in the tie member, with the associated longitudinal displacement and axial force.
2. The primary structure is the frame with the tie member released.



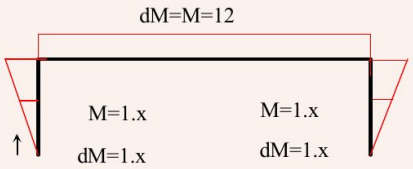
a) Primary structure



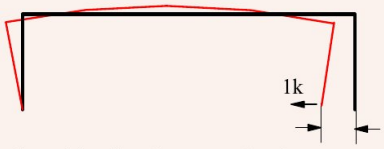
c) Virtual forces



b) Actual loading on primary structure



e) Moments produced by virtual forces and unit redundants



d) Real loading for computing f_{11} f_{11}

The compatability equation is based on the fact that the displacement at the release must be zero; that is, relative displacement of the two sections of the tie at the point of release must be zero, or

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

where

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Δ_1 = displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

f_{11} = relative displacement at release 1 for a unit axial force in the member

R_1 = force in the tie member in the original structure

3. Virtual work is used to determine both displacement terms.
4. The value of Δ_1 is identical to the displacement for structure (b) because the tie member has no forces (and consequently no deformation) in the primary structure. Thus,

$$\Delta_{11} := \frac{48000\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} = 2.083\cdot\text{in}$$

5. The flexibility coefficient f_{11} is composed of two separate effects: a flexural displacement due to the flexibility of the frame, and the axial displacement of the stressed tie member. The virtual and real loadins for this calculation are shown in the previous figure.

$$1\cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x\cdot\frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12\cdot\frac{12}{EI}\,dx\right) + \delta\cdot P\cdot\frac{PL}{EA}$$

$$1f_{11} = \frac{6912}{EI} + \frac{1\cdot 1\cdot 40}{EA}$$

$$f_{11} := \left(\frac{6912\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} + \frac{40\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}}{30000\text{ksi}\cdot 2\text{in}^2}\right)\cdot\frac{1}{\text{kip}} = 0.308\cdot\frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

6. The equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$$

or

$$R_1 := \frac{-\Delta_1}{f_{11}} = -6.764\cdot\text{kip}$$

7. The two displacement terms in the equation must carry opposite signs to account for their differences in direction.

Comments The bending moment in the frame differes only slightly from that of structure (b). In other words, the tie member has such high axial stiffness that it provides nearly as much restraint as the foundation of structure (b). Frames with tie members are used widely in industrial buildings. A lesson to be learned here is that it is easy to provide high stiffness through an axially loaded member.
The maximum moment in frames (b) and (c) is about 55% of the maximum moment in frame (a). This effect of continuity and redundancy is typical - the positive bending moments in the members are lowered while the joint moments are increased and a more economical design can be realized. Finally, we should notice that the vertical reactions at the bases of the columns do not change with the degree of horizontal restraint at the bases.

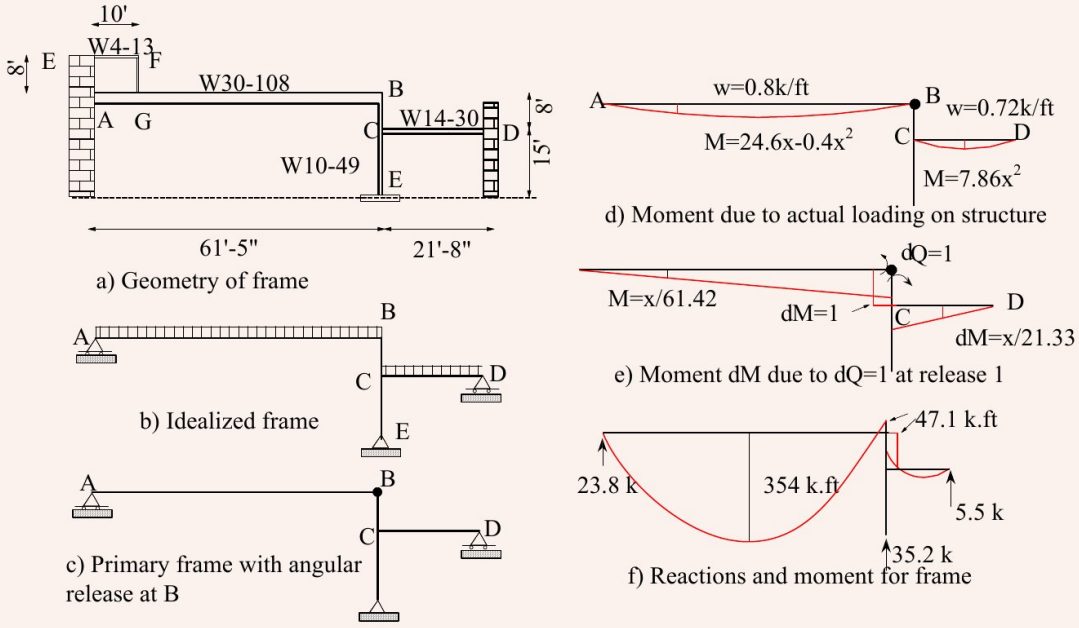
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.2 Analysis of Irregular Building Frame

The structural steel frame for the Church of the Holy Spirit, Penfield, New York is shown below. In this example we will discuss the idealization of the structure and then determine the forces and bending moments acting on the frame.



Solution:

1. The two main horizontal members of the frame are supported at points A and D by masonry walls.
2. The connection used at these points is not intended to transmit axial forces from the frame to the wall; accordingly, the axial forces in the horizontal members are assumed to be zero and the joints at A and D are idealized as rollers that transmit vertical forces only.
3. The base joint E is designed to resist both horizontal and vertical loads, but not moment, and is assumed to be a hinge.
4. Finally, joints B and C are designed to provide continuity and will be taken as rigid; that is, the angles of intersection of the members at the joint do not change with applied loading.
5. The frame is simplified for analysis by removing the small 4 in. wide flange members EF and FG and replacing their load effect by applying the roof load with acts on EF directly to the segment AG.
6. the idealized frame is shown above.
7. The dead load on the higher portion of the frame is $p_{AB} := 25\text{psf}$ times the frame spacing of $\text{spacing} := 13.33\text{ft}$, or

$w_{AB} := p_{AB} \cdot \text{spacing} = 333 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$ along the frame.

8. The dead load on CD is less beacuse the weight of the frame member is substantially smaller, and the dead load is about

$p_{CD} := 19\text{psf}$, or $w_{CD} := p_{CD} \cdot \text{spacing} = 253 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

9. Snow load is $S := 35\text{psf}$ over both areas, or $w_{Snow} := S \cdot \text{spacing} = 467 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

10. The total loads are then

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member AB: $w_{totAB} := w_{AB} + w_{Snow} = 0.8 \cdot \frac{kip}{ft}$

Member CD: $w_{totCd} := w_{CD} + w_{Snow} = 0.72 \cdot \frac{kip}{ft}$

11. the frame has four unknown reaction components and therefore has one redundant. Although several different releases are possible, we choose an angular (bending) release at point B.
12. The resulting primary structure is shown as (c) in the figure above, where the redundant quantitity R1 is the bending moment at point B.
13. The equation of compatability is

$$\theta_1 + f_{11} \cdot M_1 = 0$$

where θ_1 is the relative angular rotation corresponding to release 1 as produced by the actual loading, and f_{11} is the flexibility coefficient for a unit moment acting at the release.

14. From virtual work we have

$$1 \cdot \theta_1 = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

and

$$1 \cdot f_{11} = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

where $\delta\overline{M}$ and M are defined in (e) in the figure above.

15. Then

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) := \left[\frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \frac{x}{61.42} \cdot \left(24.6x - 0.4x^2\right) dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \frac{x}{21.33} \cdot \left(7.68x - 0.36x^2\right) dx \right]$$

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) \rightarrow \frac{291.31658667}{EI_{CD}} + \frac{7763.6329512000000002}{EI_{AB}}$$

16. With $I_{AB} := 4470in^4$ and $I_{CD} := 290in^4$

$$\theta_1(E) := \left(\frac{291}{E \cdot I_{CD}} + \frac{7764}{E \cdot I_{AB}}\right) \cdot in^4 \rightarrow \frac{118411}{43210 \cdot E}$$

17. Similarly

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) := \frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \left(\frac{x}{61.42}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \left(\frac{x}{21.33}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{BC}} \cdot \int_0^{8} (1)^2 dx$$

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) \rightarrow \frac{8}{EI_{BC}} + \frac{20.473}{EI_{AB}} + \frac{7.11}{EI_{CD}}$$

18. With $I_{BC} := 273in^4$

$$f_{11}(E) := \left(\frac{8}{E \cdot I_{BC}} + \frac{20.473}{E \cdot I_{AB}} + \frac{7.11}{E \cdot I_{CD}}\right) \cdot in^4 \text{ simplify } \rightarrow \frac{0.058}{E}$$

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $kip \cdot ft^2$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $\frac{}{in^4}$

19. Applying the compatability equation,

$$\frac{118411}{43210\cdot E}+\frac{0.058}{E}\cdot M_1 = 0$$

and the bending moment at point B is

$$M_1 := \frac{-\frac{118411}{43210\cdot E}}{\frac{0.058}{E}}\cdot kip\cdot ft = -47.248\cdot kip\cdot ft$$

The reactions and moments in the structure are given in (f) in the figure above.

20. Once we have M_1, the structure is by now statically determinate and from statics we can complete the shear and moment diagrams.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

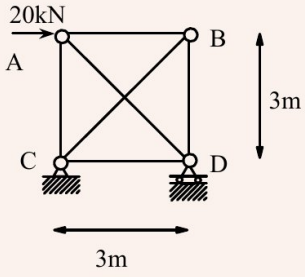
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.3 Redundant Truss Analysis

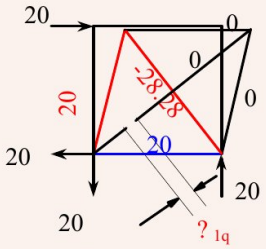
Determine the bar forces in the steel truss shown below using the flexibility method. The truss is part of a supporting tower for a tank, and the 20 kN horizontal load is produced by wind loading on the tank.



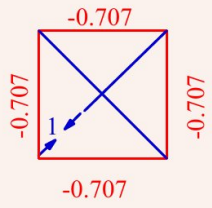
a) Original Structure



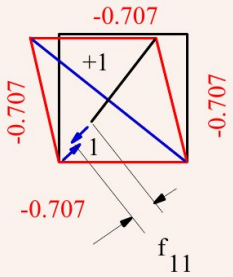
b) Primary structure



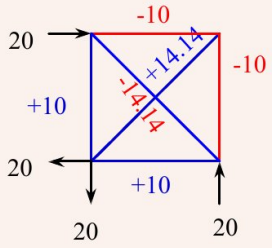
c) Primary structure subjected to real load



d) Virtual load on primary structure



e) Action of unit force corresponding to redundant R_1



f) Final results

Solution:

1. Applying the criteria for indeterminancy $2 \cdot 4 = 8$ equations, 6 members + 3 reactions => one degree of indeterminancy. A logitudnial release in any of the six bars may be chosen.
2. Because the truss members carry only axial load, the longitudinal release is identical to actually cutting the member and removing its axial force capability from the truss.
3. In analyzing the trusses with double diaganols it is both convenient and customary to select the release in one of the diganol members because the resulting primary structure will be the conventional truss to which we are accustomed.
4. Choosing the diagonal member BC for the release, we cut it and remove its axial stiffness from the structure. The primary structure is shown in (b) in the figure above.
5. The analysis problem reduces to applying an equation of compatability to the changes in length of the release member. The relative displacement Δ_1 of the two cut ends of member BC, as producued by the real loading, is shown in (d) in the figure above.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. The displacement is always measured along the length of the redundant member, and since the redundant is unstressed at this stage of the analysis, the displacement Δ_1 is equal to the relative displacement of joint B with respect to joint C.
7. This displacement must be eliminated by the relative displacements of the cut ends of member BC when the redundant force is acting on the member. The latter displacement is written in terms of the axial flexibility coefficient f_{11}, and the desired equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$$

8. The quantity Δ_1 is given by

$$1\cdot\Delta_1 = \sum \bar{\delta\cdot P}\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

where $\bar{\delta\cdot P}$ and P are given in (d) and (e) in the figure above, respectively

9. Similarly,

$$f_{11} = \sum \bar{\delta\cdot P}\left(\frac{\bar{P}\cdot L}{AE}\right)$$

10. Evaluating these summations in tabular form:

Member	P kN	δP kN	L m	δPPL	δPPL
AB	0	-0.707	3	0	1.5
BD	0	-0.707	3	0	1.5
CD	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AC	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AD	-28.28	1	4.242	-119.96	4.242
BC	0	1	4.242	0	4.242
Total				-204.8	14.484

11. Since A = constant for each member

$$\Delta_1 = \sum \bar{\delta\cdot P}\left(\frac{PL}{AE}\right) = \frac{-204.8}{AE}\cdot kN^2\cdot m \quad \text{and} \quad f_{11} = \frac{14.484}{AE}\cdot kN^2\cdot m$$

then

$$\frac{1}{AE}\cdot\left(-204.8 + 14.484\cdot R_1\right) = 0$$

12. the solution for the redundant force value is $R_1 := \frac{204.8}{14.484}\cdot kN = 14.14\cdot kN$
13. The final values for forces in each of the truss members are given by superimposing the forces due to the redundant and the forces due to the real loading.
14. The real loading forces are shown in (c) in the figure above, while the redundant force effect is computed by multiplying the member forces in (d) in the figure above by 2.83, the value of the redundant.

Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14

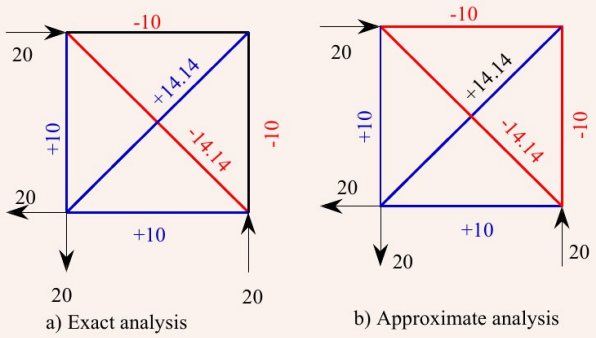
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	δP kN	$R_1\delta P$ kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14
BC	1	14.14	0	14.14

15. It is informative to compare the member forces from this solution to the approximate analysis obtained by assuming that the double diagonals each carry half the total shear in the panel. The comparison is given in the figure below



a) Exact analysis b) Approximate analysis

It reveals that the approximate analysis is the same as the exact analysis for this particular truss. The reason for this is that the stiffness provided by each of the diagonal members (against "shear" deformation of the rectangular panel) is the same, and therefore they each carry an equal portion of the total shear accross the panel.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.4 Truss with Two Redundants

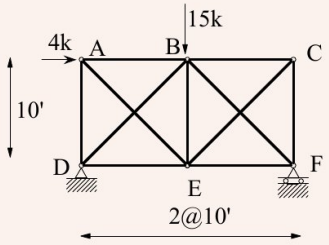
Another panel with a second redundant member is added to the truss of the preceeding example

Solution:

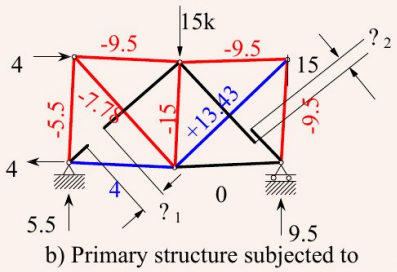
1. The twice redundant truss is converted to a determinate primary structure by releasing two members of the truss; we choose two diagonals (DB and BF).
2. Releasing both diagonals in a single panel, such as members AE and DB, is inadmissible since it leads to an unstable truss form.
3. The member forces and required displacements for the real loading and for the two redundant forces in members DB and BF are given in the figure below.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

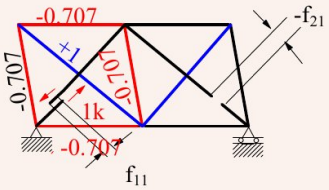
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



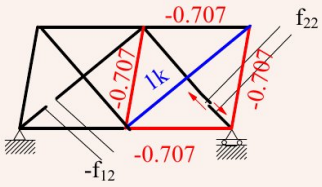
a) Original structure; all A=4 in^2



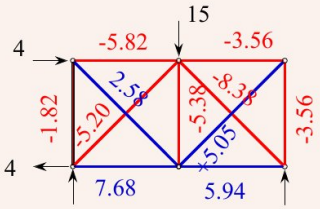
b) Primary structure subjected to real load



c) Action to unit force R_1=1



d) Action of unit force R2=1



e) Final results

4. Although the rela loading ordinarily stresses all members of the entire truss, we see that the unit forces corresponding to the redundant stress only those members in the panel that contain the redundant; all other bar forces are zero.
5. Recognizing this fact enables us to solve the double diagonal truss problem more rapidly than a frame with multiple redundants.
6. The virtual work equations for computing the six required displacements (two due to load and four flexibilities) are

$$1\cdot\Delta_1 = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot\Delta_2 = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{11} = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{21} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$f_{12} = f_{21}$ by reciporocal theorem

$$1\cdot f_{22} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_2\cdot L}{AE}\right)$$

7. If we assume tension in a truss member as positive, use tensile unit loads when computing the flexibility coeeficients corresponding to the redundants, and let all displacement terms carry their own signs, then in the for the redundants a positive value of force indicates tension while a negative value menas the member is in compression.
8. The calculation of f_{22} involves only the six members in the left panel of the truss; f_{21} invloves only member BE.
9. The simple used for performing the displacement analyses, as summarized in tabular form, leads one quickly to the compatability equations which state that the cut ends of both redundant members must match (there can be no gaps or overlaps of members in the actual structure).

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	0	0	0	0	60
DE	4	-0.707	0	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	466	0	60	0	0
AE	7.78	1	0	1322	0	170	0	0
BE	-15	-0.707	-0.707	1272	1272	60	60	60
CE	13.43	0	1	0	2280	0	0	170
BD	0	1	0	0	0	170	0	0
BF	0	0	1	0	0	0	0	170
Total				3528	5164	580	60	580

10. The equations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

or

$$\frac{1}{AE}\cdot\begin{pmatrix}580 & 60\\ 60 & 580\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix} = \frac{-1.}{AE}\cdot\begin{pmatrix}3528\\ 5164\end{pmatrix}$$

11. The final set of forces in the truss is obtained by adding up, for each member, the three separate effects. In terms of the forces shown in the figure above, the force in any member is given by $F = P + R_1\cdot\overline{P_1} + R_2\cdot\overline{P_2}$

Member	P	P_1	P_2	R_1P_1	R_2P_2	P_{total}
AB	-9.5	-0.707	0	3.676	0	-5.82
BC	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0	0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	4	-0.707	0	3.676	0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0	3.676	0	-1.82
AE	7.78	1	0	-5.2	0	2.58
BE	-15	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	13.43	0	1	0	-8.38	5.05
BD	0	1	0	-5.2	0	-5.2
BF	0	0	1	0	-8.38	-8.38

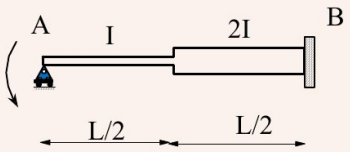
14.5 Analysis of Nonprismatic Members

The nonprismatic beam is loaded with an end moment M_A at its hinged end A. Determine the moment induced at the fixed end B by this loading.

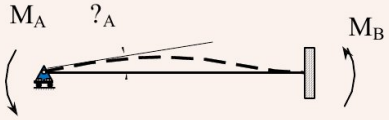
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



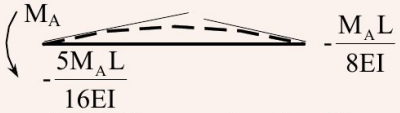
a) Beam with end B fixed



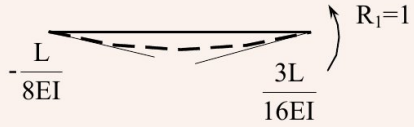
b) Elastic curve



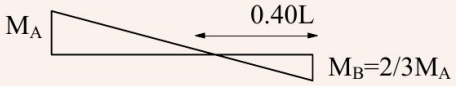
c) Primary structure



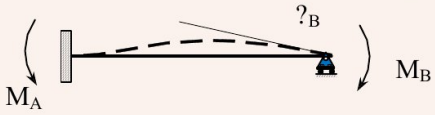
d) Rotations produced by M_A



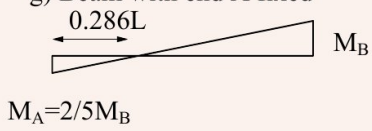
e) Rotations produced by a unit value of redundant R_1



f) Moment diagram for A hinged, B fixed



g) Beam with end A fixed



h) Moment diagram for A fixed, B hinged

Solution:

1. The beam has one redundant force; we select M_B as the redundant R_1, and obtain the primary structure shown in the figure above. It can be shown that the flexibility coefficients for unit moments applied at each end are those in (d) and (e) in the figure above, with a sing convention of counterclockwise as positive.
2. The equation of consistent displacement at B is

$$\frac{-M_A \cdot L}{8E \cdot I} + \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{E \cdot I} \cdot R_1 = 0$$

and the value of M_B is

$$M_B = R_1 = \frac{2}{3} \cdot M_A$$

3. The resulting moment diagram is given in (f). We note that the inflection point is 0.4L from the fixed end. If the beam had a uniform value of I across its span, the inflection point would be L/3 from the fixed end. Thus the inflection point shifts toward the section of reduced stiffness.
4. The end rotation θ_A is given by

$$\theta_A = \frac{5}{16} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot M_A \right) \cdot \frac{L}{E \cdot I} = \frac{11}{48} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I}$$

5. The ratio of the applied end moment to rotation $\frac{M_A}{\theta_A}$ is called the rotational stiffness and is

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{48}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

6. If we now reverse the boundary conditions, making A fixed and B hinged, and repeat the analysis for an applied moment M_B, the resulting moment diagram will be as given in (h) in the above figure. The moment induced at end A is only 40% of the applied end moment M_B. The inflection point is 0.286L from the fixed end A. The corresponding end rotation θ_B in (g) in the figure above is

$$\theta_B = \frac{11}{80}\cdot\frac{M_B\cdot L}{E\cdot I}$$

7. The rotational stiffness $\frac{M_B}{\theta_B}$ is

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{80}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

8. A careful comparison of the rotational stiffnesses, and of the moment diagrams in (f) and (h) in the figure above, illustrate the fact that flexural sections of increased stiffness attract more moment, and that inflection points always shift in the direction of decreased stiffness.
9. The approach illustrated here may be used to determine moments and end rotations in any type of non-prismatic member. The end rotations need in the force analysis may be calculated by either virtual work or moment area (or by other methods). Complex variations in EI are handles by numerical integration of the virtual work equation or by approximating the resultant M/EI area and their locations in the moment area method.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Members

The beam of the previous example

Solution:

1. The beam has two redundant forces and we select M_A and M_B. Releasing these redundants, R_1 and R_2, we obtain the primary sturcture.
2. The equations of consistent deformations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

where R_1 is M_A and R_2 is M_B.

3. The values of Δ_1 and Δ_2, the end rotations produced by the real loading on the primary structure, can be computed by the virtual work method.
4. The flexibility coefficients are also separately derived (not yet in these notes)
5. We define counterclockwise end moments and rotations as positive and obtain

$$\frac{L}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-1}{8} & \frac{3}{16}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_1\end{pmatrix} = \frac{w\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}-0.352\\ 0.0273\end{pmatrix}$$

from which

$$\boxed{R_1 = M_A = 0.0742 w\cdot L^2}$$

$$\boxed{R_2 = M_B = -0.0961 w\cdot L^2}$$

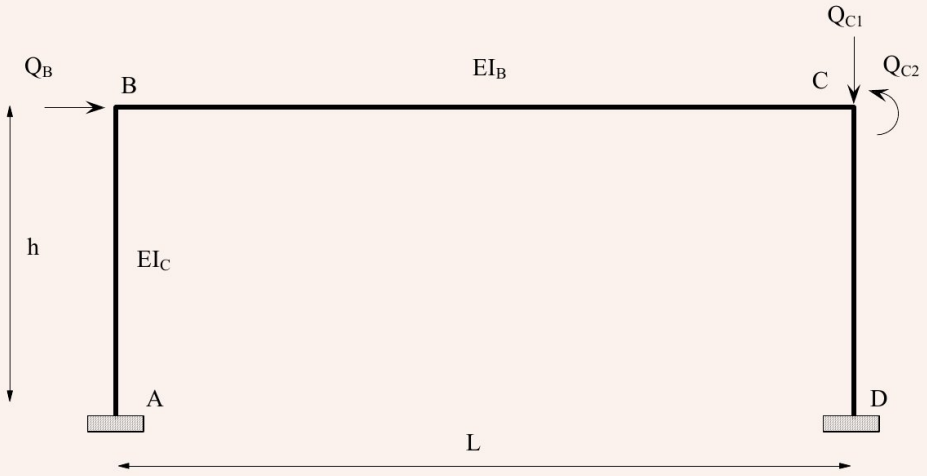
6. The stiffer end of the beam attracts 30% more than the flexible end.
7. For a prismatic beam with constant I, the fixed end moments are equal in magnitude ($M_A = -M_B = \frac{w\cdot L^2}{12}$) and intermediate in value between the two end moments determiend above.
8. Fixed end moments are an essential part of indeterminate analysis based on the displacement (stiffness) method and will be used exclusively in the Moment Distribution method.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

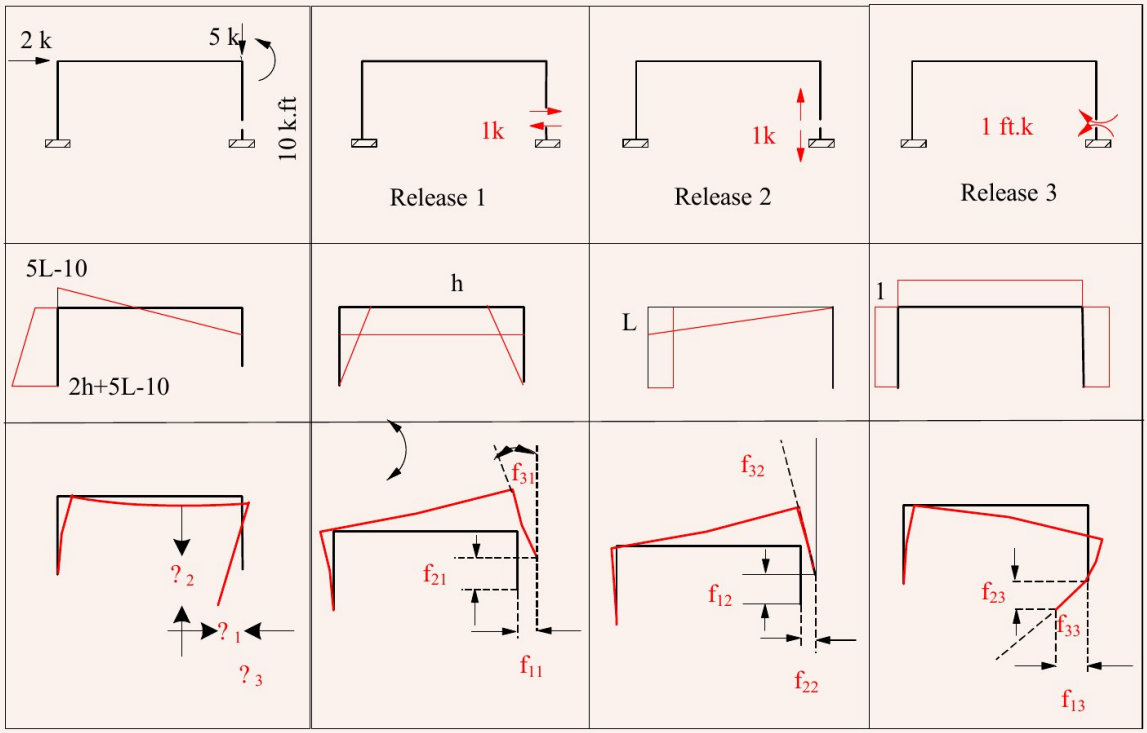
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.7 Rectangular Frame; External Load



Solution:

1. The structure is statically indeterminate to the third degree, and the displacements (flexibility terms) are shown in the figure above.
2. In order to evaluate the 9 flexibility terms, we refer tot he table.



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Substituting $h := 10ft$, $L := 20ft$, and $EI_B = EI_C = EI$, the flexibility matrix then becomes

$$f = \frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} 2667 & 3000 & -300 \\ 3000 & 6667 & -400 \\ -300 & -400 & 40 \end{pmatrix}$$

and the vector of displacements for the primary structure is

$$\Delta = \frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

where the units are kips and feet.

4. The inverse of the flexibility matrix is

$$f^{-1} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}$$

5. Hence the reactions are determined from

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{EI} \cdot \begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \begin{pmatrix} 1.601 \\ -5 \\ 7.007 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.8 Frame with Temperature and Support Displacements

The single bay frame, of the previous example, has a height $h := 10\text{ft}$ and span $L := 20\text{ft}$ and its two supportsrigidly connected and is constructed of reinforced concrete. It supports a roof and wall partitions in such a manner that linear temperature variation occurs across the depth of the frame members when inside and outside temperatures differ. Assume the member depth is constant at 1 ft, and that the structure was built with fixed bases A and D at a temperature of 85F. The temperature is now 70F inside and 20F outside. We wish to determine the reactions at D under these conditions. Assume that the coefficient of linear expansion of reinforced concrete is $\alpha := 0.0000055 \cdot \frac{1}{\Delta°\text{F}}$.

Solution:

1. Our analysis proceeds as before, with the [D] vector interpreted appropriately. The three releases shown in the previous example, will be used.
2. The first stage in the analysis is the computation of the relative displacements $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, $\Delta_{3\Delta}$, of the primary structure caused by temperature effects. These diaplcements are caused by two effects: axial shortening of the members because of the drop in average temperature (a middepth of the members), and curvature of the members because of the temperature gradient.
3. In the following discussion the contributions to the displacements due to the axial strain are denoted with a single prime (') and those due to curvature by a double prime (").
4. Consider the axial strain first. A unit length of frame member shortens as a result of the temperature decrease from 85F to 45F at the midepth of the member. the strain is therefore

$$\alpha\Delta T := \alpha \cdot 40 \cdot \Delta°\text{F} = 0.00022$$

5. The effect of axial strain on the relative displacements needs little analysis. The horizontal member shortens by an amount $\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = 0.0044 \cdot \text{ft}$. The shortening of the vertical members results in no relative displacement in the vertical direction. No rotation occurs.
6. We therefore have $\Delta'_{1\Delta} := -\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = -0.0044 \cdot \text{ft}$, $\Delta'_{2\Delta} := 0\text{ft}$, and $\Delta'_{3\Delta} := 0\text{rad}$
7. The effect of curvature must also be considered. A frame element of length dx undergoes an angular strain as a result of the temperature gradient. The change in length at an extreme fiber is

$$\varepsilon(dx) := \alpha \cdot 25 \cdot \Delta°\text{F} \cdot dx \rightarrow 0.0001375 \cdot dx$$

8. With the resulting real rotation of the cross section

$$d\phi(dx) := \frac{\varepsilon(dx)}{0.5} \cdot \text{rad} \rightarrow 0.000275 \cdot dx \cdot \text{rad}$$

9. The relative displacements of the primary structure at D are found by the virtual force method.
10. A virtual force $\delta \cdot \overline{Q}$ is applied in the direction of the desired displacement and the resulting moment diagram $\delta \cdot \overline{M}$ determined.
11. The virtual work equation

$$\delta \cdot \overline{Q} \cdot \Delta = \int \delta \cdot \overline{M}\, d\phi$$

is used to obtain each of the desired displacements at D.
12. The results, which you should verify, are

$$\Delta''_1 := 0.0828\text{ft}$$

$$\Delta''_2 := 0.1104\text{ft}$$

$$\Delta''_3 := -0.01104\text{rad}$$

13. Combining the effects of axial and rotational strain, we have

$$\Delta_1 := \Delta'_{1\Delta} + \Delta''_1 = 0.0784 \cdot \text{ft}$$

$$\Delta_2 := \Delta'_{2\Delta} + \Delta''_2 = 0.1104 \cdot \text{ft}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\Delta_3 := \Delta'_{3\Delta} + \Delta''_3 = -0.01104 \cdot \text{rad}$$

14. We now compute the reduntants caused by temperature effects

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0784 \\ -0.1104 \\ 0.01104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0106 \\ 0.355 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

where the units are kips and feet.

15. You should construct the moment diagram for the structure using the values of the redundant found in the analysis.
16. Notice the stiffness term EI does not cancel out in this case. Internal forces and reactions in a statically indeterminate subject to effects other than loads (such as temperature) are dependent on the actual stiffnesses of the structure.
17. The effects of axial strain caused by forces in the members have been neglected in this analsis. This is usual for low frames where bending strain dominates behavior. To illustrate the significance of this assumption, consider member BC. We have found $R_1 = 10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$. The tension in BC has this same value, resulting in a strain for the member of $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$ .For a rectangular member, $\frac{I}{A} = \frac{b \cdot d^3}{12 \cdot bd} = \frac{d^2}{12}$. In our case d=1ft, therefore the axial strain is $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot (0.0833) = 8.83 \times 10^{-7}$, which is several orders of magnitude smaller than the temperature strain computed for the same member. We may therefore rest assured that neglecting axial strain caused by forces does not affect the values of the redundants in a significant manner for this structure.
18. Now considert the effects of foundation movement on the same structure. The intermediate frame behavior depends on a structure that we did not design: the earth. The earth is an essential part of nearly all structures, and we must understand the effects of foundation behavior on structural behavior. for the purposes of this example, assume that a foundation has revealed the possibility of a clockwise rotation of the support at D of 0.001 radians and a downward movement of the support at D of 0.12 ft. We wish to evaluate the redundants R_1, R_2, and R_3 caused by this foundation movement.
19. No analysis is needed to determine the values of $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, and $\Delta_{3\Delta}$ for the solution of the redundants. These displacements are found directly from the support movements, with proper consideration, of the originally chosen sign convention which defined the positive direction of the relative displacements. From the given support displacements, we find $\Delta_{1\Delta} := 0$, $\Delta_{2\Delta} := 0.12\text{ft}$, and $\Delta_{3\Delta} := 0.001\text{rad}$. Can you evaluate these quantities for a casr in which the displacements occured at A instead of D?
20. The values of the redundants is given by

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -252.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

with units in kips and feet.

21. A moment diagram may now be constructed, and other internal force quantities computed from the now known values of the redundants. The redundants have been evaluated separately for effects of temperature and foundation settlement. These effects may be combined with those due to loading using the principle of superposition.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change

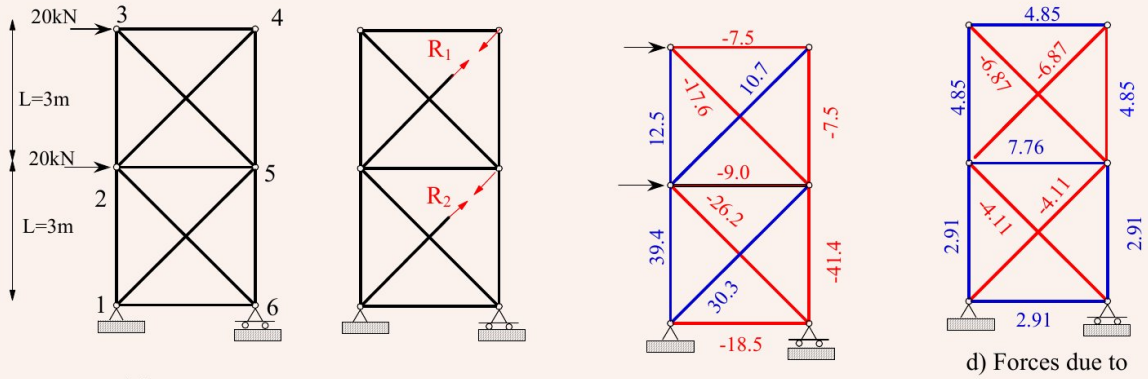
The struss shown below represents an internal braced bent in an enclosed shed, with lateral loads of 20 kN at the panel points. A temperature drop of 30C may occur on the other members (members 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, and 5-6). We wish to analyze the truss for loading and for temperature effects.

Solution:

1. The first step in the analysis is the definition of the two redundants. The choice of forces in diagonals 2-4 and 1-5 as redundants facilitates the computations because some of the load effects are easy to analyze.
2. The computations are organized in tabular form in Table ??. The first column gives the force in each bar caused by a unit load (1 kN) corresponding to release 1. These are denoted p_i and also represent the bar force $\frac{\overline{q_1}}{\delta \cdot \overline{Q_1}}$ caused by a virtual force $\delta \cdot \overline{Q_1}$

applied at the same location. Column 3 lists the same quantitiy for a unit load and for a virutal force $\delta \cdot \overline{Q_2}$ applied at release 2. These three columns constitute a record of the truss analysis needed for this problem.

Verticals: 500 mm^2 ; Webs: 250 mm^2; E=200,000 N/mm^2; a=1.0x10^{-5}/ ºC



a) Structure b) Redundant forces c) Forces due to lateral load d) Forces due to temperature drop

3. Column 4 gives the value of L/EA for each bar in terms of L_c/EA_c of the vertical members. This is useful because the term L/EA cancels out in some of the calculations.
4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{10} and Δ_{20} corresponding to the releases and

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1Q} and Δ_{2Q} corresponding to the releases and caused by the actual loads. Apply a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at release 1. The internal virtual forces $\overline{q_1}$ are found in column 2. The internal virtual work $\overline{q_1}\cdot\Delta l$ is found in column 5 as the product of columns 1, 2 and 4. The summation of column 5 is $\Delta_{1q} = -122.42\cdot\frac{L_c}{EA_c}$. Similarly, column 6 is the product of columns 1, 3, and 4, giving $\Delta_{2q} = -273.12\cdot\frac{L_c}{EA_c}$.

5. The same method is used to compute the flexibilities. In this case, the real loading is a unit load corresponding to release 1 leading to f_{11} and f_{21}, and then to release 2 leading to f_{12} and f_{22}. Column 7 shows the computation for f_{11}. It is the product of column 2, representing force due to the real unit load with column 2 representing force due to a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at the same location (release 1) multiplied by column 4 to include the L_c/EA_c term. Column 8 derives from columns 2, 3, and 4 and leads to f_{21}. Columns 9 and 10 are the computations for the remaining flexibilities.

6. We have assumed that a temperature drop of 30C occurs in the outer members. The corresponding length changes are found in column 11. Again using the virtual work method, column 12 tabulates the internal virtual work of th virtual forces through displacements Δl where for each bar, $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Column 12 is therefore the product of columsn 2 and 11. The summation of the elements of column 12 is the displacement Δl corresponding to release 1. Column 13 repeats this process for Δ_2 corresponding to release 2.

7. The tabulated information provides the necessary terms for a matrix solution of the problem. We have

$$f = \begin{pmatrix} 8.66 & 1 \\ 1 & 8.66 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta q = \begin{pmatrix} -122.42 \\ -273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta_\Delta = \begin{pmatrix} 6.36 \\ 4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c$$

therefore

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0.117 & -0.0134 \\ -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}$$

8. The redundant forces due to the applied load are

$$R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_Q\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} 122.42 \\ 273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c} = \begin{pmatrix} 10.66 \\ 30.32 \end{pmatrix}$$

9. Thus $R_1 = 10.66\text{kN},\ R_2 = 30.32\text{kN}$

10. The redundant forces due to the temperature drop are $R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_\Delta\right)$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} -6.36 \\ -4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c = \begin{pmatrix} -6.87 \\ -4.11 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}\cdot EA_c$$

11. Thus with $E := 200\frac{kN}{mm^2},\ A_c := 500mm^2$

$$R_1 := -6.87\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -6.87\cdot kN$$

$$R_2 := -4.11\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -4.11\cdot kN$$

12. Using the redundant forces from each of these analyses, the remainder of the bar forces are computed by simple equilibrium.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

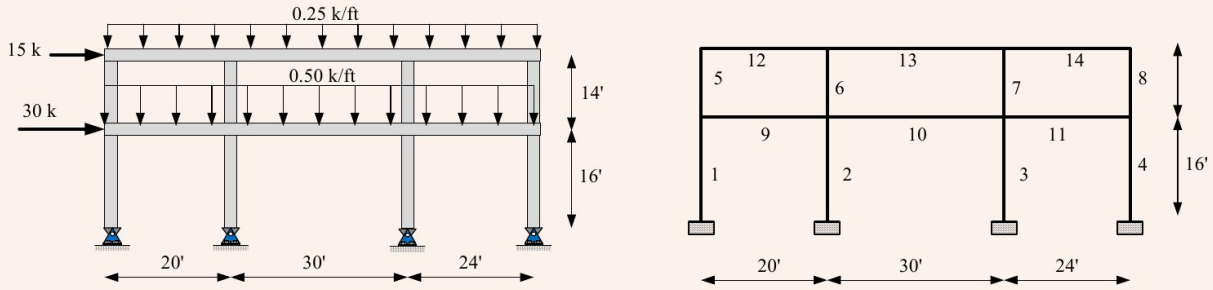
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Table ?? contains such computations. The bar forces in any bar is the force in column 1 added to that in column 2 multiplied by R_1 plus that is column 3 multiplied by R_2. This follows from the fact that columns 2 and 3 are bar forces caused by a force of unitiy corresponding to each of the redundants. The results of the calcultations are shown for the applied loading and for the temperature drop. The forces caused by the temperature drop are similar in magnitude to those caused by wind load in this example. Temperature differences, shrinkage, support settlement, or tolerance errors can cause important effects in statically indeterminate structures.

15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads

Draw the shear and moment diagrams for the following frame.



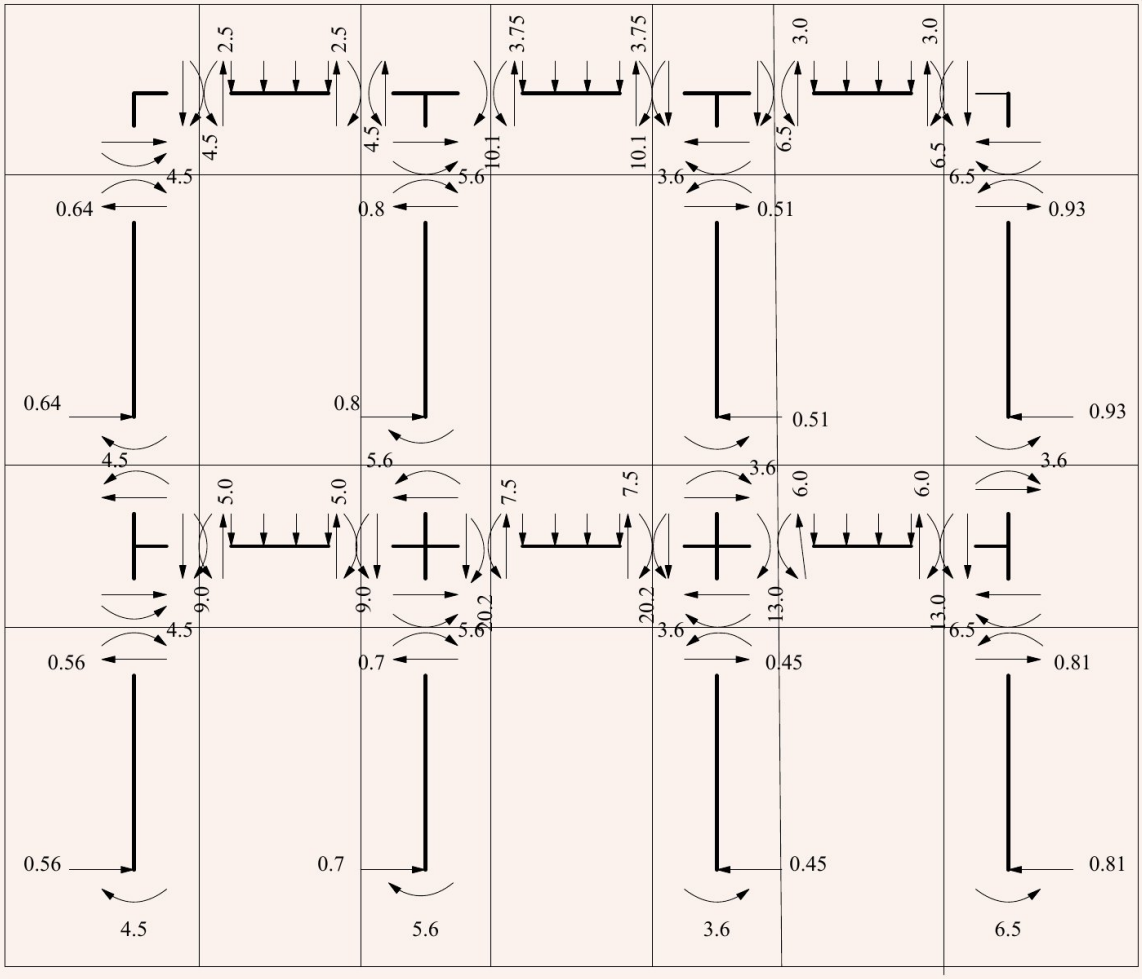
Solution:

The analysis should be conducted in conjunction with the free body diagram shown below.

Vertical Loads

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Gravity Loads

$w_{12} := 0.25 \frac{kip}{ft}$ $w_{13} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{14} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$

$w_9 := 0.5 \frac{kip}{ft}$ $w_{10} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{11} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$

Approximate Equations

$M_{left}(w, L) := -0.045 \cdot w \cdot L^2$ Maximum negative moment at girder end

$M_{cent}(w, L) := 0.08 \cdot w \cdot L^2$ Maximum positive moment

1. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{left}(w_{12}, 20ft) = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12cnt} := M_{cent}(w_{12}, 20ft) = 8 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{13lft} := M_{left}(w_{13}, 30ft) = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13cnt} := M_{cent}(w_{13}, 30ft) = 18 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := M_{13lft} = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{left}(w_{14}, 24ft) = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14cnt} := M_{cent}(w_{14}, 24ft) = 11.52 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := M_{14lft} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

2. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{left}(w_9, 20ft) = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9cnt} := M_{cent}(w_9, 20ft) = 16 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9rgt} := M_{9lft} = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10lft} := M_{left}(w_{10}, 30ft) = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10cnt} := M_{cent}(w_{10}, 30ft) = 36 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10rgt} := M_{10lft} = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{left}(w_{11}, 24ft) = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11cnt} := M_{cent}(w_{11}, 24ft) = 23.04 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := M_{11lft} = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

3. Top Column Moments

$M_{5top} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := -M_{12rgt} + M_{13lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := -M_{13rgt} + M_{14lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := -M_{14rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

4. Bottom Column Moments

$M_{1top} := M_{5bot} + M_{9lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := M_{6bot} - M_{9rgt} + M_{10lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2bot} := -M_{2top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := M_{7bot} - M_{10rgt} + M_{11lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

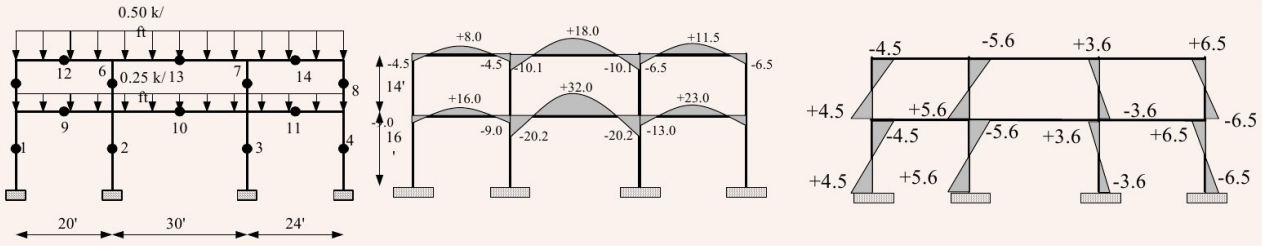
$M_{3bot} := -M_{3top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := M_{8bot} - M_{11rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



5. Top Girder Shear

$$V_{12lft} := \frac{w_{12} \cdot 20ft}{2} = 2.5 \cdot kip$$

$$V_{12rgt} := -V_{12lft} = -2.5 \cdot kip$$

$$V_{13lft} := \frac{w_{13} \cdot 30ft}{2} = 3.75 \cdot kip$$

$$V_{13rgt} := -V_{13lft} = -3.75 \cdot kip$$

$$V_{14lft} := \frac{w_{14} \cdot 24ft}{2} = 3 \cdot kip$$

$$V_{14rgt} := -V_{14lft} = -3 \cdot kip$$

6. Bottom Girder Shear

$$V_{9lft} := \frac{w_{9} \cdot 20ft}{2} = 5 \cdot kip$$

$$V_{9rgt} := -V_{9lft} = -5 \cdot kip$$

$$V_{10lft} := \frac{w_{10} \cdot 30ft}{2} = 7.5 \cdot kip$$

$$V_{10rgt} := -V_{10lft} = -7.5 \cdot kip$$

$$V_{11lft} := \frac{w_{11} \cdot 24ft}{2} = 6 \cdot kip$$

$$V_{11rgt} := -V_{11lft} = -6 \cdot kip$$

7. Column Shears

$h_5 := 14ft$ $h_6 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_7 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_8 := h_5 = 14 \cdot ft$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$h_1 := 16ft$ $h_2 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_3 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_4 := h_1 = 16 \cdot ft$

$$V_5 := \frac{M_{5top}}{\frac{h_5}{2}} = -0.643 \cdot kip$$

$$V_6 := \frac{M_{6top}}{\frac{h_6}{2}} = -0.804 \cdot kip$$

$$V_7 := \frac{M_{7top}}{\frac{h_7}{2}} = 0.521 \cdot kip$$

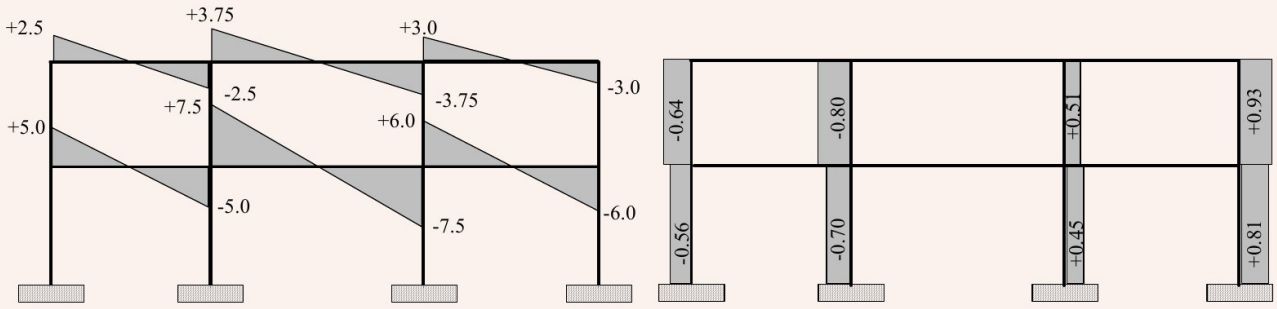
$$V_8 := \frac{M_{8top}}{\frac{h_8}{2}} = 0.926 \cdot kip$$

$$V_1 := \frac{M_{1top}}{\frac{h_1}{2}} = -0.563 \cdot kip$$

$$V_2 := \frac{M_{2top}}{\frac{h_2}{2}} = -0.703 \cdot kip$$

$$V_3 := \frac{M_{3top}}{\frac{h_3}{2}} = 0.456 \cdot kip$$

$$V_4 := \frac{M_{4top}}{\frac{h_4}{2}} = 0.81 \cdot kip$$



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8. Top Column Axial Forces

$P_5 := V_{12lft} = 2.5 \cdot kip$

$P_6 := -V_{12rgt} + V_{13lft} = 6.25 \cdot kip$

$P_7 := -V_{13rgt} + V_{14lft} = 6.75 \cdot kip$

$P_8 := -V_{14rgt} = 3 \cdot kip$

9. Bottom Chord Axial Forces

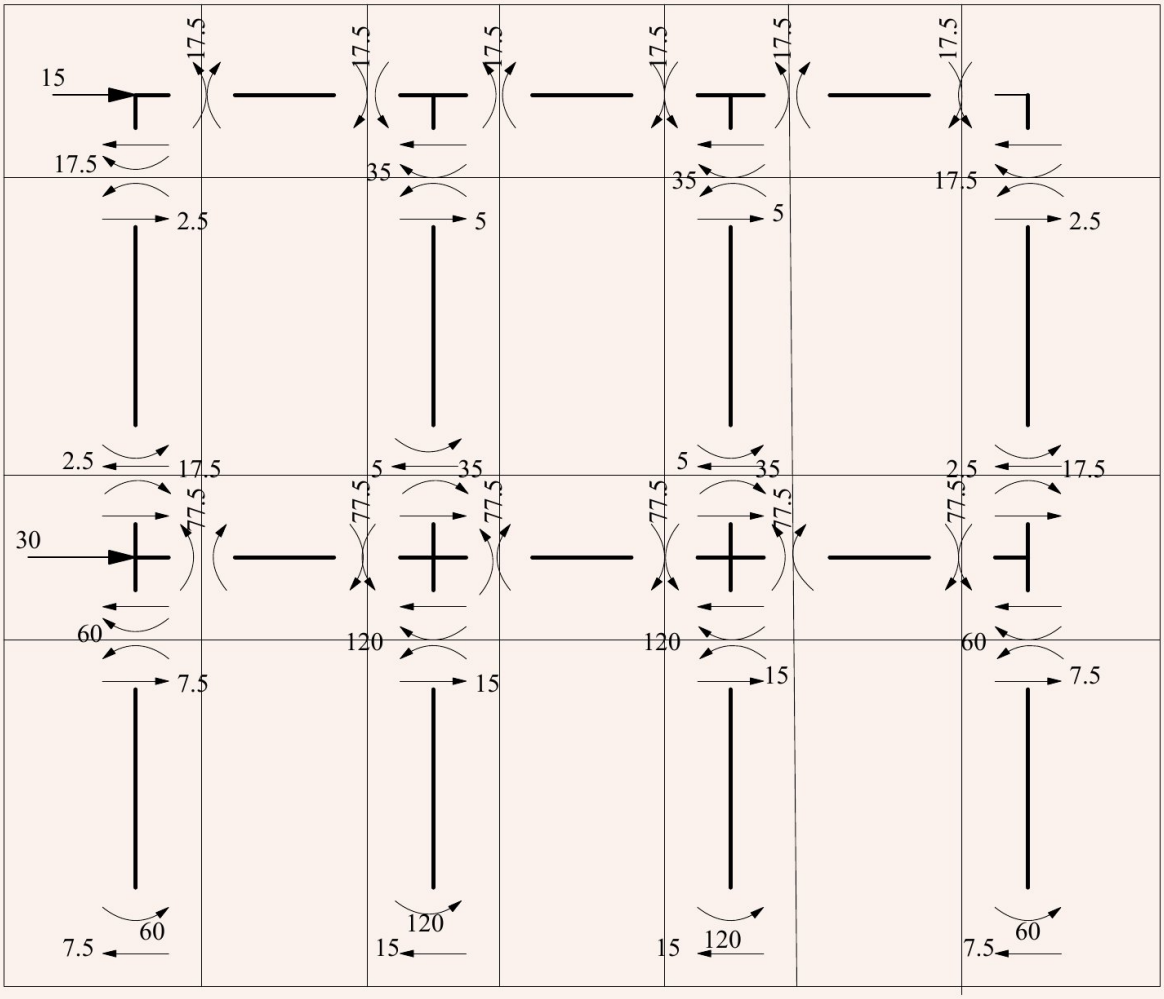
$P_1 := P_5 + V_{9lft} = 7.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = 18.75 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 20.25 \cdot kip$

$P_4 := P_8 - V_{11rgt} = 9 \cdot kip$

Horizontal Loads



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Horizontal Loads

$F_5 := 15kip$

$F_1 := 30kip$

Approximate Equations

$V_{ext}(F,n) := \frac{F}{2 \cdot n}$

$n_{bays} := 3$

1. Column Shears

$V_5 := V_{ext}(F_5, n_{bays}) = 2.5 \cdot kip$

$V_6 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_7 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_8 := V_5 = 2.5 \cdot kip$

$V_1 := V_{ext}(F_1 + F_5, n_{bays}) = 7.5 \cdot kip$

$V_2 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_3 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_4 := V_1 = 7.5 \cdot kip$

2. Top Column Moments

$M_{5top} := \frac{V_5 \cdot h_5}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := \frac{V_6 \cdot h_6}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := \frac{V_7 \cdot h_7}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := \frac{V_8 \cdot h_8}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

3. Bottom Column Moments

$M_{1top} := \frac{V_1 \cdot h_1}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := \frac{V_2 \cdot h_2}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{\blacksquare} := -M_{\blacksquare} = -120 \cdot kip \cdot ft$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := \frac{V_3 \cdot h_3}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := \frac{V_4 \cdot h_4}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

4. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{5top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := -M_{12lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13lft} := M_{12rgt} + M_{6top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := -M_{13lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{13rgt} + M_{7top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := -M_{14lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

5. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{1top} - M_{5bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

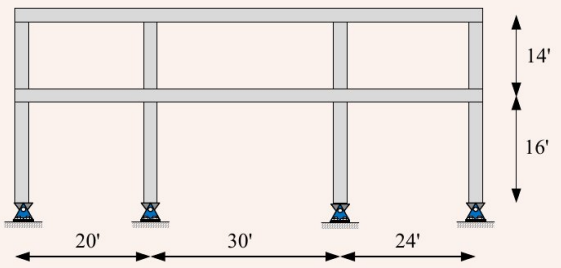
$M_{9rgt} := -M_{9lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

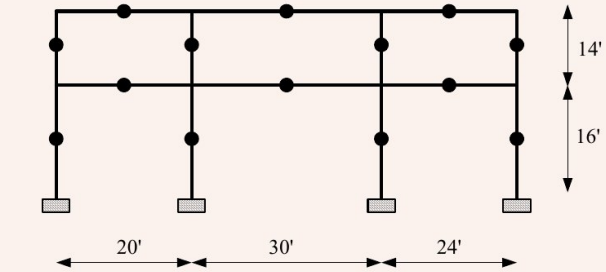
$M_{10lft} := M_{9rgt} + M_{2top} - M_{6bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

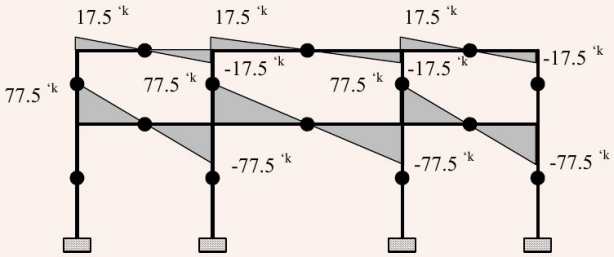
$M_{10rgt} := -M_{10lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

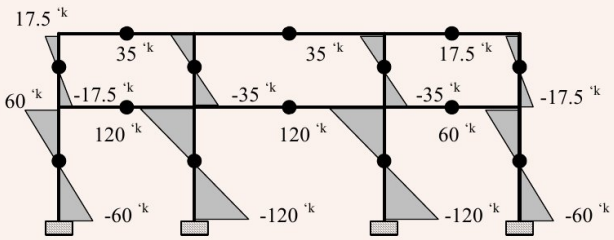
$M_{11lft} := M_{10rgt} + M_{3top} - M_{7bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := -M_{11lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$









CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. Top Girder Shear

$$V_{12lft} := \frac{-2 \cdot M_{12lft}}{20ft} = -1.75 \cdot kip$$

$$V_{12rgt} := V_{12lft} = -1.75 \cdot kip$$

$$V_{13lft} := \frac{-2 \cdot M_{13lft}}{30ft} = -1.167 \cdot kip$$

$$V_{13rgt} := V_{13lft} = -1.167 \cdot kip$$

$$V_{14lft} := \frac{-2 \cdot M_{14lft}}{24ft} = -1.458 \cdot kip$$

$$V_{14rgt} := V_{14lft} = -1.458 \cdot kip$$

7. Bottom Girder Shear

$$V_{9lft} := \frac{-2 \cdot M_{9lft}}{20ft} = -7.75 \cdot kip$$

$$V_{9rgt} := V_{9lft} = -7.75 \cdot kip$$

$$V_{10lft} := \frac{-2 \cdot M_{10lft}}{30ft} = -5.167 \cdot kip$$

$$V_{10rgt} := V_{10lft} = -5.167 \cdot kip$$

$$V_{11lft} := \frac{-2 \cdot M_{11lft}}{24ft} = -6.458 \cdot kip$$

$$V_{11rgt} := V_{11lft} = -6.458 \cdot kip$$

8. Top Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$$P_5 := -V_{12lft} = 1.75 \cdot kip$$

$$P_6 := V_{12rgt} - V_{13lft} = -0.583 \cdot kip$$

$$P_7 := V_{13rgt} - V_{14lft} = 0.292 \cdot kip$$

$$P_8 := V_{14rgt} = -1.458 \cdot kip$$

8. Bottom Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$$P_1 := P_5 - V_{9lft} = 9.5 \cdot kip$$

$$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = -3.167 \cdot kip$$

$$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 1.583 \cdot kip$$

$$P_4 := P_8 + V_{11rgt} = -7.917 \cdot kip$$

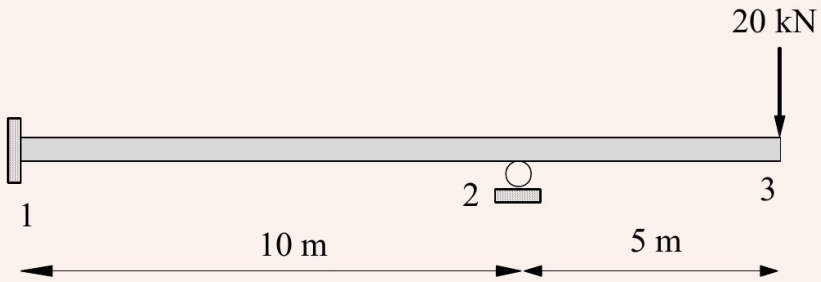
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.1 Propped Cantilever Beam

Find the end moments for the beam



Solution:

1. The beam is kinematicall indeterminate to the third degreee (θ_2, Δ_3, θ_3), however by replacing the overhang by a fixed end moment equal to 100 kN-m at support 2, we reduce the degreee of kinematic indeterminancy to one (θ_2).
2. The equilibrium relation is

$$M_{21} - 100\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

3. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\cdot\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{2}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_1 + 2\cdot\theta_2\right) = \frac{4}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

4. Substituting into the equilibrium equations

$$\theta_2 = \frac{10}{4E\cdot I}\cdot M_{21} = \frac{250}{EI}$$

or

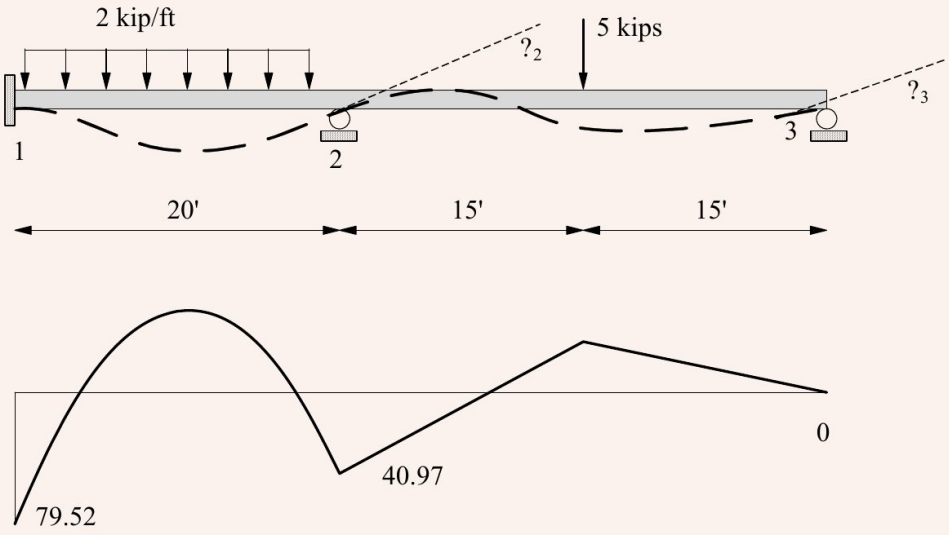
$$\boxed{M_{12} = \frac{2}{10}\cdot EI\cdot\theta_2 = \frac{2\cdot EI}{10}\cdot\frac{250}{EI} = 50\text{kN}\cdot\text{m}}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection

Draw the moment diagram for the two span beam



Solution:

1. The unknows are θ_2 and θ_3
2. The equilibrium relations are

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{21} + M_{23} = 0$

$M_{32} = 0$

3. The fixed end moments are given by

$$M_{12F} = -M_{21F} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad M_{12F} := \frac{-\left(-2\,\frac{kip}{ft}\right)\cdot(20ft)^2}{12} = 66.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23F} = -M_{32F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{23F} := \frac{-(-5kip)(30ft)}{8} = 18.75 \cdot kip \cdot ft$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{2EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{EI}{10} \cdot \theta_2 + M_{12F}$$

$$M_{21} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot (2\theta_2) + M_{21F} = \frac{4EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{21F} = \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F}$$

$$M_{23} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F}$$

$$M_{32} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F}$$

5. Substituting in the equilibrium equations

$$\frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F} + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 = 47.917\ kip \cdot ft$$

$$\frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 = 18.75\ kip \cdot ft$$

or

$$EI \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EI\theta_2 \\ EI\theta_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128.473 \\ 76.388 \end{pmatrix}$$

6. Substituting for the moments

$$M_{12} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{10} + M_{12F} = 79.514 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{21} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{5} - M_{12F} = -40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{7.5} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{15} + M_{23F} = 40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{32} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{15} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{7.5} - M_{23F} = -0 \cdot kip \cdot ft$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection

Determine the end moments for the previous problem if the middle support settles by 6 in.

Solution:

1. Since we are performing a linear elastic analysis, we can separately analyze the beam for support settlement, and then add the moments to those due to the applied loads.
2. The unknowns are θ_2 and θ_3
3. The equilibrium relations are

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{10}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(2\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{5}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{15}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{15}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

5. Substituting into the equilibrium equations

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{3}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3=\frac{-13EI}{1200}$$

$$\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3=\frac{-EI}{300}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=EI\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{11}{360}\\ -\frac{7}{720}\end{pmatrix}$$

6. Thus the additional moments due to the settlement are

$$M_{12}(EI):=\frac{EI}{10}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{225}$$

$$M_{21}(EI):=\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{720}$$

$$M_{23}(EI):=\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -0.0013888888888888888889\cdot EI$$

$$M_{32}(EI):=\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -3.7037037037037037e\text{-}24\cdot EI$$

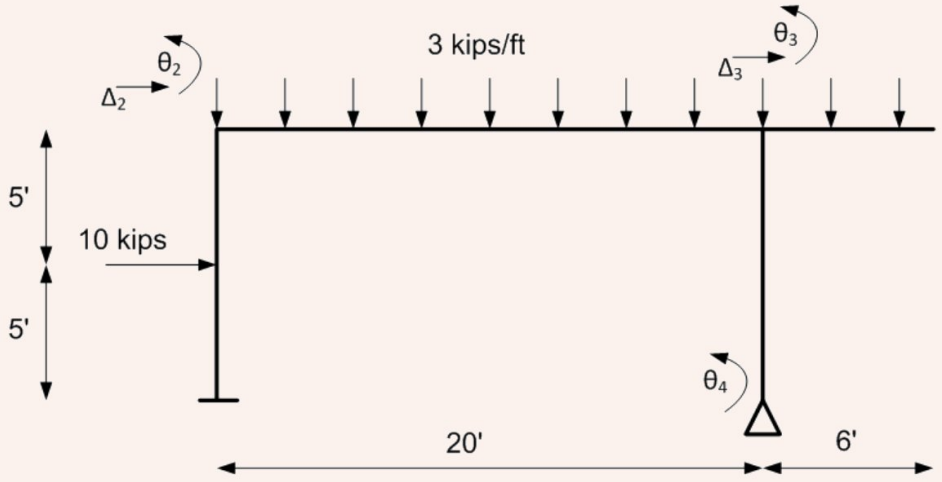
16.4 Frame, Slope Deflection

Determine the end moments for the frame

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The effect of the 35 cantilever can be included by replacing it with its end moment.

$$M_3 = -w \cdot L \cdot \frac{L}{2} \qquad M_3 := 3\frac{kip}{ft} \cdot 6ft \cdot 6\frac{ft}{2} = 54 \cdot kip \cdot ft$$

2. The unknown displacements and rotations are

   Δ_2 and θ_2 at joint 2

   θ_3 and θ_4 at joints 3 and 4

   We observe that due to the lack of symmetry, there will be a lateral displacement in the frame, and neglecting axial deformations, $\Delta_2 = \Delta_3$

3. The equilibrium relations are

$$M_{23} + M_{32} = 0$$

$$M_{32} + M_{34} = -54kip \cdot ft$$

$$M_{43} = 0$$

$$V_{12} + V_{43} - 10kip = 0$$

   Thus we have four unknown displacements and four equations. However, the last two equations are in terms of of the shear forces, and we need to have them in terms of the end moments. This can be achieved through the following equilibrium relations

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$

$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

   Hence, all four equations are now in terms of the moments.

4. The fixed end moments for member 23 are

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The fixed end moments for member 23 are

$$M_{21F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{21F} := \frac{-10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{8} = -12.5\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{23F} = \frac{-w\cdot L^2}{12} \qquad M_{21F} := \frac{-3\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot(20\text{ft})^2}{12} = -100\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

5. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12F} = 0.2EI\cdot\left(\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) + 12.5$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{21F} = 0.2EI\cdot\left(2\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) - 12.5$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + M_{23F} = 0.1EI\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + 100$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{32}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) + M_{32F} = 0.1EI\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) - 100$$

$$M_{34} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

$$M_{43} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

6. Substituting into the equilibrium equations and dividing by EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = \frac{-875}{EI}$$

$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$

$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

and the last equilibrium equation is obtained by substituting V_{12} and V_{43} and multiplying by 10/EI

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = \frac{-83.3}{EI}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1375.7 \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

7. Substituting into the slope deflection equations gives the end moments

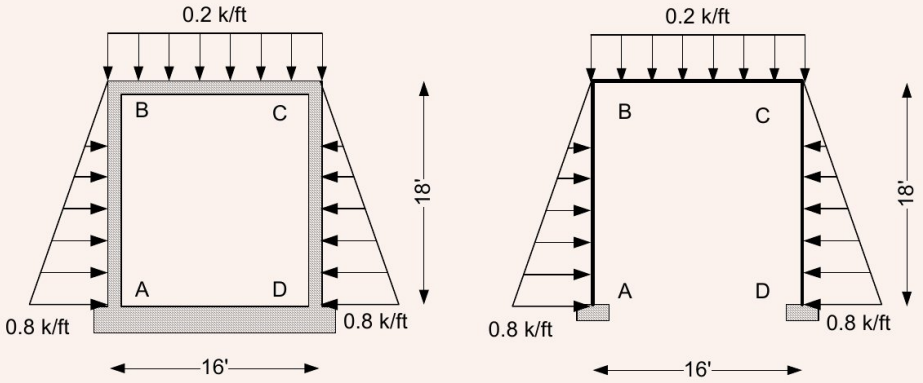
$$\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.8 \\ 61.78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.5 Box Culvert Slope Deflection

Draw the shear and moment diagram for the following box girder



Solution:

1. From symmetry $\theta_B = -\theta_C$, and at the base $\theta_A = \theta_D = 0$.
2. The fixed end moments are given by

$$FEM_{BC} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{BC} := \frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (16ft)^2}{12} = 4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{CB} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{CB} := -\frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (16ft)^2}{12} = -4.267 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{20} \qquad FEM_{AB} := \frac{0.8\frac{kip}{ft} \cdot (18ft)^2}{20} = 12.96 \cdot kip \cdot ft$$

$$FEM_{BA} = \frac{-\left(w \cdot L^2\right)}{30} \qquad FEM_{BA} := -\frac{0.8\frac{kip}{ft} \cdot (18ft)^2}{30} = -8.64 \cdot kip \cdot ft$$

3. The moments are given by

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16} \cdot \left(2\theta_B + \theta_C\right) + FEM_{BC} = \frac{EI}{8} \cdot \theta_B + 4.267$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18} \cdot \left(2\theta_B + 0\right) + FEM_{BA} = \frac{2EI}{9} \cdot \theta_B - 8.64$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18} \cdot \left(2\theta_B\right) + FEM_{AB} = \frac{EI}{9} \cdot \theta_B + 12.96$$

4. Equilibrium at joint B

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64 + \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267 = 0$$

$$\theta_B(EI) := \frac{8.64 - 4.267}{\frac{2EI}{9} + \frac{EI}{8}} \rightarrow \frac{12.594}{EI}$$

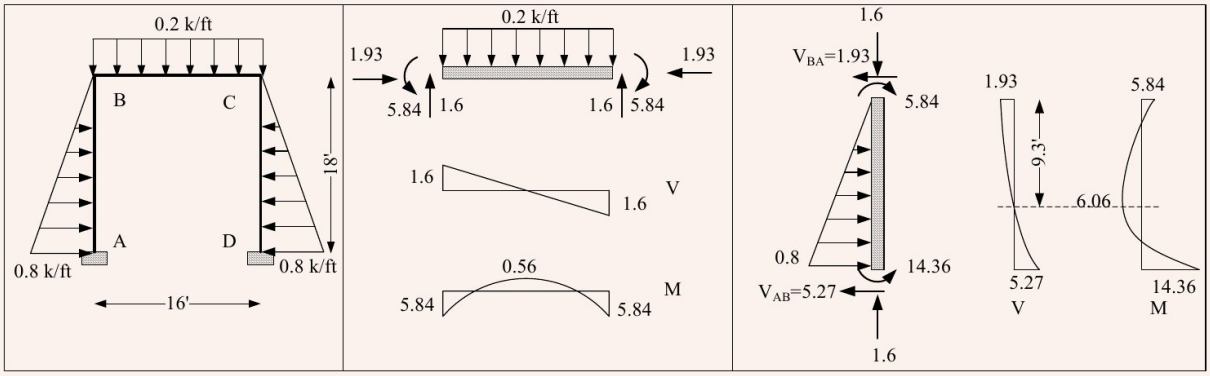
5. Substitute θ_B to get the moments

$$M_{BC} := \left[\frac{EI}{8}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 4.267\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 5.841\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{AB} := \left[\frac{EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 12.96\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 14.359\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{BA} := \left[\frac{2EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) - 8.64\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow -5.841\cdot ft\cdot kip$$

6. Member forces are determined from statics. Careful, the moment diagram is now based on the so-called "design" sign convention.



CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

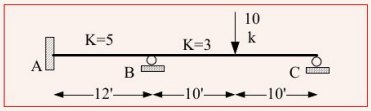
Victor E. Saouma

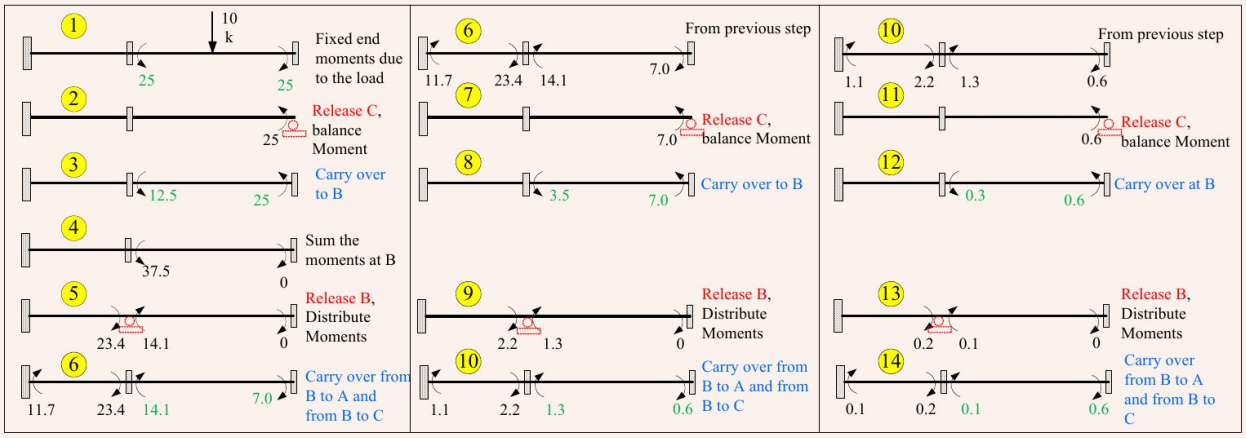
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

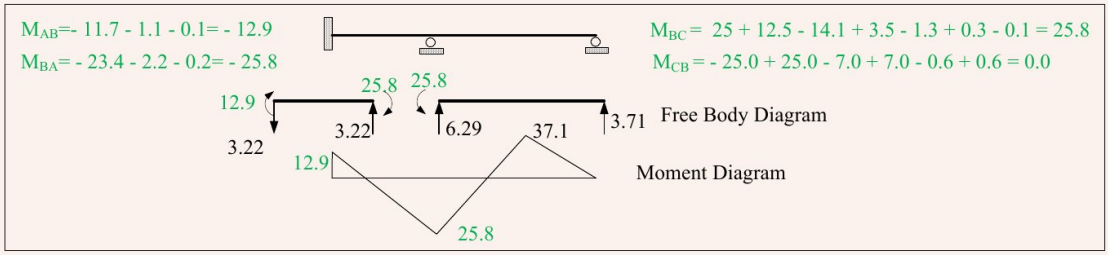
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.6 Continuous Beam

Solve for the moments at A and B by moment distribution, using (a) the ordinary method, and (b) the simplified method.







Solution:

For this example the fixed-end moments are computed as follows:

$$M_{BCF} = \frac{PL}{8} \qquad M_{BCF} := \frac{10\text{kip}\cdot 20\text{ft}}{8} = 25\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{CBF} := -M_{BCF} = -25 \cdot kip \cdot ft$

2. Since the relative stiffness is given in each span, the distribution factors are

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5 + 3} = 0.625$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5 + 3} = 0.375$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1$$

3. The balancing computations are shown below.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	3	3
DF	0	0.625	0.375	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-11.7	-23.4	-14.1	-7
			3.5	7
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6
			0.3	0.6
	-0.1	-0.2	-0.1	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

4. The above solution is that referred to as the ordinary method, so named to designate the manner of handling the balancing at the simple support at C. It is known, of course, that the final moment must be zero at this support because it is simple
5. Consequently, the first step is to balance the fixed-end moment at C to zero. The carry-over is then amde immediately to B. When B is balanced, however, a carry-over must be made back to C simply because the relative stiffness of BC is based on end C of this span being fixed. It is apparent, however, that the moment carried back to C (in this case -7.0) cannot exist at this joint. Accordingly, it is immediately balanced out, and a carry-over is again made to B, this carry-over being considerably smaller than the first. Now B is again balanced, and the process continues until the numbers involved become too small to have any practical value.
6. Alternatively, we can use the simplified method. It was previously shown that if the support at C is simple and a moment is applied at B, then the resistance of the span BC to this moment is reduced to three-fourths the value it would have had wit C fixed. Consequently, the relative stiffness of span BC is reduced to three-fourths of the value given, it will not be necessary to carry over to C.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

7. From the standpoint of work involved, the advantage of the simplified method is obvious. It should always be used when the external (terminal) end of a member rests on a simple support, but it does not apply when a structure is continuous at a simple support. Attention is called to the fact that when the opposite end of the member is simply supported, the reduction factor for the stiffness is always 3/4 for a prismatic member but a variable quantity for a nonprismatic member.
8. One valuable feature of the tabular arrangement is that of dropping down one line for each balancing operation and making the carry-over on the same line. The practice clearly indicates the order of balancing the joints, which in turn makes it possible to check back in the event of an error. Moreover, the placing of the carry-over on the same line with the balancing moments definitely decreases the chances of omitting a carry-over.
9. The correctness of the answers may ina sense be checked by verifying $\Sigma M = 0$ at each joint. However, even though the final answers satisfy this equation at every join, this is in no way a check on the inital fixed end moments. These fixed end moments, therefore, should be checked with great care before beginning the balancing operation. Moreover, it occasionally happens that conpensating errors are made in the balancing, and these errors will not be apparent when cheking $\Sigma M = 0$ at each joint.

10. To draw the final shear and moment diagram, we start by drawing the free body diagram of each beam segment with the computed moments, and then solve from statics for the reactions

$$12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft} - 12\text{ft}\,V_A = 0 \qquad V_A := \frac{12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft}}{12\text{ft}} = 3.225\cdot\text{kip}$$

$$V_A + V_{BL} = 0 \qquad V_{BL} := -V_A = -3.225\cdot\text{kip}$$

$$25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft} - 20\text{ft}\cdot V_{BR} = 0 \qquad V_{BR} := \frac{25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{20\text{ft}} = 6.29\cdot\text{kip}$$

$$6.29\text{kip} + V_C - 10\text{kip} = 0 \qquad V_C := 10\text{kip} - 6.29\text{kip} = 3.71\cdot\text{kip}$$

$$-V_{BL} - V_{BR} + R_B = 0 \qquad R_B := V_{BL} + V_{BR} = 3.065\cdot\text{kip}$$

Check: $R_A + R_B + R_C - 10\text{kip} = 0 \qquad V_A + R_B + V_C - 10\text{kip} = 0\cdot\text{kip}$

$$M_{BC} := V_C\cdot 10\text{ft} = 37.1\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

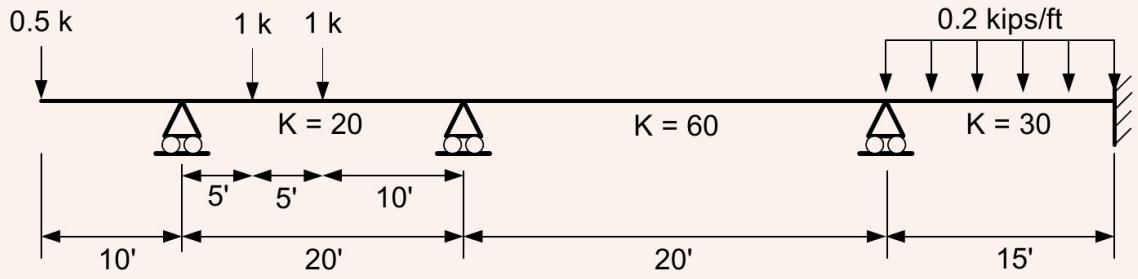
Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.7 Continuous Beam

Using the simplified method of moment distribution, find the moments in the following continuous beam. The values of I as indicated by the various values of K, are different for the various spans. Determine the values of the reactions, draw the shear and bending moment diagrams, and sketch the deflected structure.



Solution:

1. Fixed-end moments

$$M_{AOF} := -0.5kip \cdot 10ft = -5 \cdot kip \cdot ft$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
Victor E. Saouma
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

For the 1 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} \qquad M_{ABF1} := \frac{1kip \cdot 5ft \cdot (15ft)^2}{(20ft)^2} = 2.812 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} \qquad M_{BAF1} := \frac{1kip \cdot (5ft)^2 \cdot 15ft}{(20ft)^2} = 0.938 \cdot kip \cdot ft$$

For the 4 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{ABF4} := \frac{4kip \cdot 20ft}{8} = 10 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF4} := -M_{ABF4} = -10 \cdot kip \cdot ft$$

For the uniform load:

$$M_{CDF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{CDF} := \frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{12} = 3.75 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -3.75 \cdot kip \cdot ft$$

2. The balancing operation is shown below

Joint	A		B		C		D
Member	AO	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	0	20	15	60	60	40	40
DF	0	1	0.2	0.8	0.6	0.4	0
FEM	-5	12.8	-10.9			3.8	-3.8
		-7.8	-3.9				
			2.9	11.9	5.9		
				-2.9	-5.8	-3.9	-1.9
			0.6	2.3	1.1		
				-0.3	-0.7	-0.4	-0.2
			0.1	0.2			
Total	-5	5	-11.2	11.2	0.5	-0.5	-5.9

3. The only new point in this example is the method of handling the overhanging end. It is obvious that the final internal moment at A must be 5 kip-ft and, accordingly, the first step is to balance out 7.8 kip-ft of the fixed end moment at AB, leaving the required 5

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

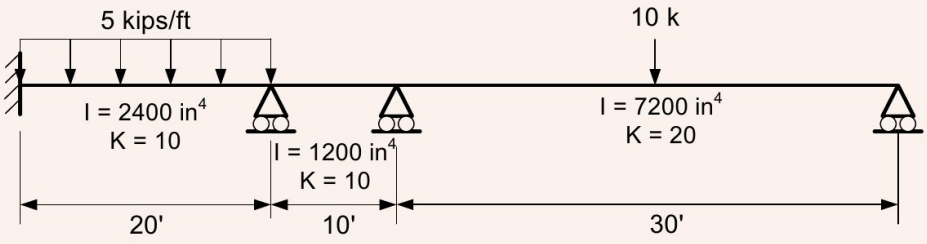
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

kip-ft for the internal moment at AB. Since the relative stiffness of BA has been reduced to three-fourths of its original value, to permit considering the support at A as simple in balancing, no carry-over from B to A is required.
4. The easiest way to determine the reactions is to consider each span as a free body. End shears are first determined as caused by the loads alone on each span and, following this, the end shears caused by the end moments are computed. These two shears are added algebraically to obtain the net end shear for each span. An algebraic summation of the end shears at any support will give the total reaction.

16.8 Continuous Beam, Initial Settlement

For the following beam find the moments at A, B, and C by moment distribution. The support at C settles by 0.1 in. Use $E := 30000ksi$



Solution:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. Fixed-end moments

Uniform load:

$$M_{ABF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{ABF} := \frac{5\,\frac{kip}{ft} \cdot (20ft)^2}{12} = 166.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} := -M_{ABF} = -166.667 \cdot kip \cdot ft$$

Concentrated load:

$$M_{CDF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{CDF} := \frac{10kip \cdot 30ft}{8} = 37.5 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -37.5 \cdot kip \cdot ft$$

Moments caused by deflection:

$$M_{BCF} = \frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{BCF} := \frac{6 \cdot E \cdot 1200in^4 \cdot 0.1in}{(10ft)^2} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CBF} := M_{BCF} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CDF} = -\frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{CDF} := -\frac{6 \cdot E \cdot 7200in^4 \cdot 0.1in}{(30ft)^2} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := M_{CDF} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

2. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	10	10	15	20
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	1
	167	-167			38	-38
			125	125	-83	-83
					60	121
FEM			-28	-56	-84	
	17	35	35	17		
			-3	-7	-10	
	1	2	1			
Total	185	-130	130	79	-79	0

The fixed-end moments caused by a settlement of supports have the same sign at both ends of each span adjacent to the settling support. The above computations have been carried to the nearest kip-ft, which for the moments of the magnitudes involved, would be significantly close for purposes of design.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

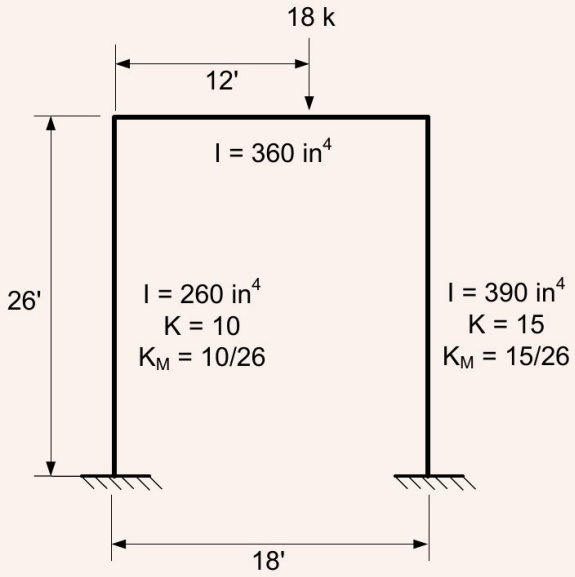
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.9 Frame

Find all moments by moment distribution for the following frame. Draw the bending moment diagram and the deflected structure.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The first step is to perform the usual moment distribution. The reader should fully understand that this balancing operation adjusts the internal moments at the ends of the members by a series of corrections as the joints are considered to rotate, until $\Sigma M = 0$ at each joint. The reader should also realize that during this balancing operation no translation of any joint is permitted.
2. The fixed-end moments are

$$M_{BCF} := \frac{18\text{kip}\cdot 12\text{ft}\cdot(6\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = 24\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CBF} := -\frac{18\text{kip}\cdot 6\text{ft}\cdot(12\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = -48\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

3. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM			24	-48		
			13.7	27.4	20.6	10.3
	-6.3	-12.6	-25.1	-12.5		
			3.6	7.1	5.4	2.7
	-0.6	-1.2	-2.4	-1.2		
			0.3	0.7	0.5	0.2
		-0.1	-0.2			
Total	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2

4. The final moments listed in the table are correct only if there is no translation of any joint. It is therefore necessary to determine

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

whether or not, with the above moments existing, there is any tendency for side lurch of the top of the frame.
5. If the frame is divided into three free bodies, the result will be as shown below.

Inspection of this sketch indicates that if the moments of the first balance exist in the frame, there is a net force of $1.53\text{kip} - 0.8\text{kip} = 0.73\cdot\text{kip}$ tending to sway the frame to the left. In order to prevent side-sway, and thus allow these moments to exist (temporarily for the purpose of the analysis), it is necessary that an imaginary horizontal force ce considered to act to the right at B or C. This force is designated as the artificial joint restraint (abbreviated as AJR) and is shown below.

6. This illustration shows the complete load system which would have to act on the structure if the final moments of the first balance are to be correct. The AJR, however, cannot be permitted to remain, and thus its effect must be cancelled. This may be accomplished by finding the moments in the frame resulting from a force equal but opposite to the AJR and applied at the top.
7. Although it is not possible to make a direct solution for the moments resulting from this force, they may be determined inddirectly. Assume some unknown force P acts on the frame, as shown below, and causes it to deflect laterally to the left, without joint rotation, through some distance Δ. Now, regardless of the value of P and the value of the resulting Δ, the fixed-end moments induced in the ends of the columns must be proprtional to the respective values of K_M.

Recalling that the fixed end moment is $M_F = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2} = 6EK_M\cdot\Delta$, where $K_M = \frac{1}{L^2} = \frac{K}{L}$ we can write

$$\Delta = \frac{M_{ABF}}{6E\cdot K_M} = \frac{M_{DCF}}{6E\cdot K_M}$$

$$\frac{M_{ABF}}{M_{DCF}} = \frac{K_{MAB}}{K_{MDC}} = \frac{10}{15}$$

These fixed-end moments could, for example, have values of -10 and -15 kip-ft, or -20 and -30, or -30 and -45, or any other combination so long as the above ratio is maintained. The proper procedure is to choose values for the fixed-end moments of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. This will result in the same accuracy for the results of the balance for the side-sway correction that was realized in the first balance for the real loads. Accordingly, it will be assumed that P, and the resulting Δ, are of such magnitude as to result in fixed-end moments shown below.
8. Obviously $\Sigma M = 0$ is not satisfied for joints B and C in this deflected frame. Therefore, these joints must rotate until equilibrium is reached. The effect of this rotation is determined in the distribution below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM	-30	-30			-45	-45
			12.9	25.8	19.2	9.6
	2.8	5.7	11.4	5.7		
			-1.6	-3.3	-2.4	-1.2
	0.2	0.5	1.1	0.5		
				-0.3	-0.2	-0.1
Total	-27	-23.8	23.8	28.4	-28.4	-36.7

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. During the rotation of joints B and C, as represented by the above distribution, the value of Δ has remained constant, with P varying in magnitude as required to maintain Δ.
10. It is now possible to determine the final value of P simply by adding the shears in the columns. The shear in any member, without external loads applied along its length, is obtained by adding the end moments algebraically and dividing by the length of the member. The final value of P is the force necessary to maintain the deflection of the frame after the joints have rotated. In other words, it is the force which will be consistent with the displacement and internal moments of the structure as determined by the second balancing operation. Hence this final value of P will be called the consistent joint force (abbreviated as CJF).
11. The consistent joint force is given by

$$CJF := \frac{27kip\cdot ft + 23.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{28.4kip\cdot ft + 36.7kip\cdot ft}{26ft} = 4.458\cdot kip$$

and inspection clearly indicates that the CJF must act to the left.
12. Obviously, then, the results of the last balance above are moments which will exist in the frame when a force of 4.45 kip acts to the left at the top level. It is necessary, however, to determine the moments resulting from a force of 0.73 kip acting to the left at the top level, and some as yet unknown factor "z" times 4.45 kip will be used to represent this force acting to the left.
13. The free body diagram for the member BC is shown above. $\Sigma H = 0$ must be satisfied for this figure, and if forces to the left are considered as positive, the result is $4.45z - 0.73 = 0$, and

$$z := \frac{0.73}{4.45} = 0.164$$

If this factor is applied to the moments obtained from the second balance, the result will be the moments caused by a force of 0.73 kip acting to the left at the top level. If these moments are then added to the moments obtained from the first balance, the result will be the final moments for the frame, the effect of the AJR having been cancelled. The combintaion of moments is shown below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2
z x M from 2nd balance	-4.4	-3.9	3.9	4.7	-4.7	-6
Final Moments	-11.3	-17.8	17.8	-21.8	21.8	7.2

14. If the moments are correct, the shears in the two columns of the frame shoul dbe equal and opposite to satisfy $\Sigma H = 0$ for the entire frame. This check is expressed

$$\frac{11.3kip\cdot ft + 17.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{-21.8kip\cdot ft + -7.2kip\cdot ft}{26ft} = 0\cdot kip$$

and

$$1.12kip - 1.11kip = 0.01\cdot kip \text{ (nearly)}$$

The signs of all moments taken from the previous table have been reversed to give the correct signs for the end moments external to the columns. It will be remembered that the moments considered in moment distribution are always internal for each member. However, the above check actually considers each column as a free body and so external moments must be used.
15. The moment under the 18 kip load is obtained by treating BC as a free body:

$$M_{18} := 5.77kip\cdot 12ft - 17.8kip\cdot ft = 51.44\cdot kip\cdot ft$$

16. The direction of side lurch may be determined from the obvious fact that the frame will always lurch in a direction opposite to the AJR. If required, the magnitude of this side lurch may be found. The procedure which follows will apply.

A force P of sufficient magnitude to result in the indicated column moments and the lurch Δ was applied to the frame. During the second balance this value of Δ was held constant as the joints B and C rotated, and the value of P was considered to vary as necessary. The final value of P was found to be 4.45 kip. Since Δ was held constant, however, its magnitude may be determined from the equation $M = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2}$, where M is the fixed-end moment for either column, I is the moment of inertia for that column, and L is the length. This Δ will be the lurch for 4.45 kip acting at the top level. For any other force acting horizontally, Δ would vary proportially and thus the final lurch of the frame would be the factor z multiplied by Δ determined above.

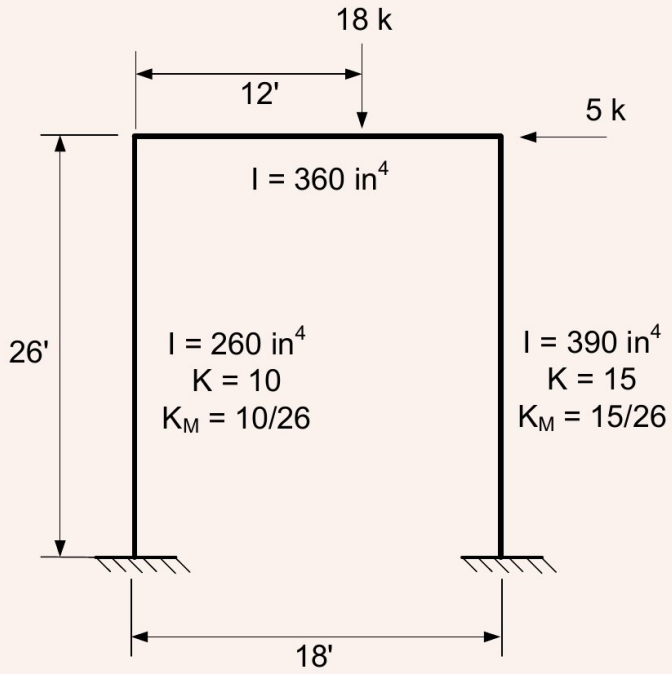
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.10 Frame with Side Load

Find by moment distribution the moments in the following frame



Solution:

The first balance will give the results shown

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0

A check of the member BC as a free body for $\Sigma H = 0$ will indicate that an AJR is necessary as follows:

$$AJR + 0.84kip - 0.87kip - 5kip = 0$$

from which

$$AJR := 5kip + 0.87kip - 0.84kip = 5.03 \cdot kip$$ in the direction assumed

The values of K_M for the two columns are shown, with K_M for column CD being K/2L because of the pin at the bottom. The horizontal displacement Δ of the top of the frame is assumed to cause the fixed-end moments shown there. These moments are proportional to the values of K_M and of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. The results of balancing out these moments are

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-34.4	-28.4	28.4	23.6	-23.6	0

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$CJF := \frac{34.4\text{kip}\cdot\text{ft} + 28.4\text{kip}\cdot\text{ft} + 23.6\text{kip}\cdot\text{ft}}{26\text{ft}} = 3.323\cdot\text{kip}$$

and

$$5.03 - 3.32z = 0$$

from which

$$z := \frac{5.03\text{kip}}{CJF} = 1.514$$

The final results are

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0
z x M 2nd balance	-52.1	-43	43	35.8	-35.8	0
Final moments	-59.3	-57.6	57.6	13.3	-13.3	0

If these final moments are correct, the sum of the column shears will be 5 kip

$$\Sigma V := \frac{59.3\cdot\text{kip}\cdot\text{ft} + 57.6\text{kip}\cdot\text{ft} + 13.3\text{kip}\cdot\text{ft}}{26\text{ft}} = 5.01\cdot\text{kip}$$

The 5 kip horizontal load acting at C enters into the problem only in connection withthe determination of the AJR. If this load had been applied to the column CD between the ends, it would have resulted in intial fixed-end moments in CD and these would be computed in the usual way. In addition, such a load would have enetered into the determination of the AJR, since the horizontal reaction of CD against the right end of BC would have been computed by treating CD as a free body.

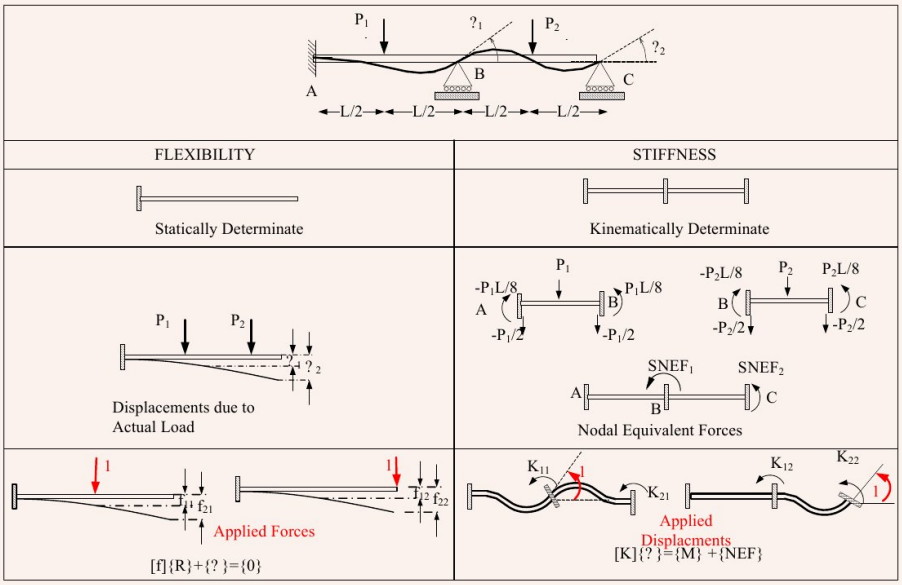
CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

17.1 Beam

Considering the figure, let $P_1 = 2P$, $M = PL$, $P_2 = P$, and $P_2 = P$. Solve for the displacements.



Solution:

1. Using the previously defined sign convention (counterclockwise positive)

$$\Sigma NEF_1 = \frac{P_1 \cdot L}{8} - \frac{P_2 \cdot L}{8} = \frac{2P \cdot L}{8} - \frac{P \cdot L}{8} = \frac{P \cdot L}{8}$$

$$\Sigma NEF_2 = \frac{P \cdot L}{8}$$

2. If it takes 4EI/L (k_{44AB}) to rotate AB and 4EI/L (k_{22BC}) to rotate BC, it will take a total force of 8EI/L to simultaneously rotate AB and BC (Note that a rigid joint is assumed)

3. Hence, K_{11} which is the sum of the rotational stiffnesses at global d.o.f. 1, will be equal to $K_{11} = \frac{8EI}{L}$; similarly, $K_{21} = \frac{2EI}{L}$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

(k_{42BC})

4. If we rotate dof 2 by a unit angle, then we will have $K_{22} = \frac{4EI}{L}$ and $K_{12} = \frac{2EI}{L}$

5. The equilibrium relation can be written as

$$\begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

We note that the matrix corresponds to the structure's stiffness matrix, and not the augmented one.

6. The two by two matrix is next inverted

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ \frac{-5}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix}$$

7. Next we need to determine both the reactions and the internal forces.
8. Recall that for each element $\mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}$, and in this case $\mathbf{p} = \mathbf{P}$ and $\boldsymbol{\delta} = \Delta$ for element AB. The element stiffness matrix has been previously derived, and in the case of the global and local d.o.f. are the same.
9. hence, the equilibrium equation for element AB, at the element level, can be written as

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \\ \frac{2P}{2} \\ \frac{-2PL}{8} \end{pmatrix}$$

Solving

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{107}{56} \cdot P & \frac{31}{56} \cdot PL & \frac{5}{56} \cdot P & \frac{5}{14} \cdot PL \end{pmatrix}$$

10. Similarly, for element BC:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{-5}{} \cdot \frac{P \cdot L^2}{} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 112 & EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

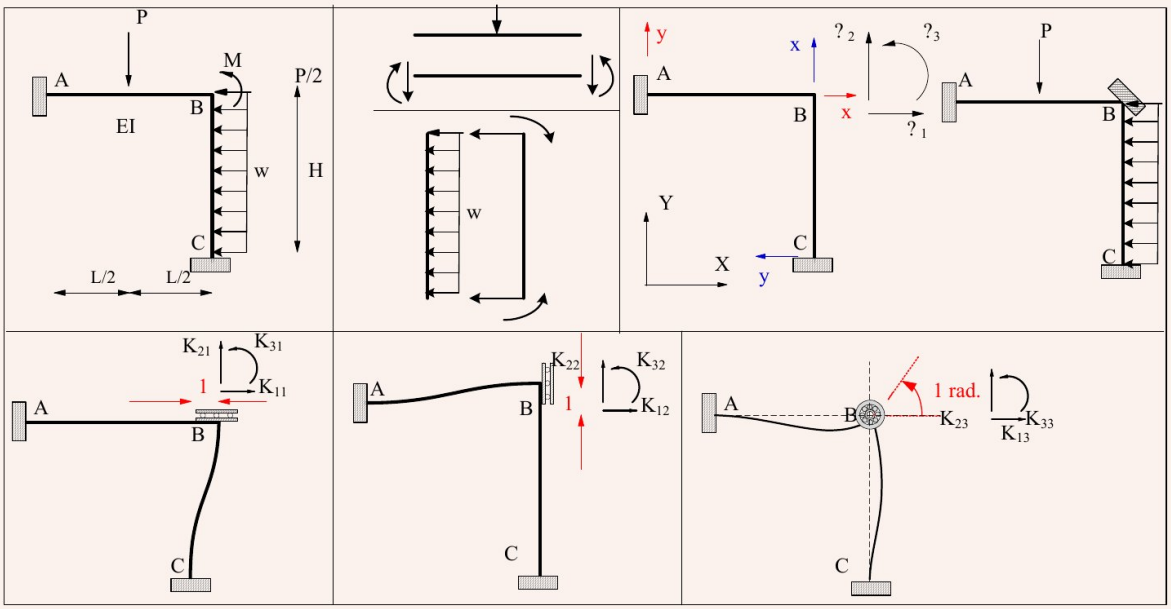
or

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\cdot P & \frac{9}{14}\cdot PL & \frac{-1}{7}\cdot P & 0 \end{pmatrix}$$

11. This simple example calls for the following observations:
    a) Node A has contributions from element AB only, while node B has contributions from both AB and BC
    b) We observe that $p_{3AB} \neq p_{1BC}$ even though they both correspond to a shear force at node B, the difference between them is equal to the reaction at B. Similarly, $p_{4AB} \neq p_{2BC}$ due to the externally applied moment at B
    c) From this analysis, we can draw the complete free body diagram and then the shear and moment diagrams which is what the engineer is most interested in for design purposes.

17.2 Frame

Whereas in the first example all local coordinate systems were identical to the global one, in this example we consider the orthogonal frame shown below.



Solution:

1. Assuming axial deformations, we do have three global degress of freedom Δ_1, Δ_2, and θ_3.
2. Constrain all degrees of freedom, and thus make the structure kineamatically determinate.
3. Determine the nodal equivalent forces for each element in its own local coordinate system (the first three values are associated with the first node, and the last three with the second node):

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

with the first node, and the last three with the second node):

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-P}{2} & \frac{-PL}{8} & 0 & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} \end{pmatrix} \quad \text{Member AB}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{-w\cdot H^2}{12} & 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix} \quad \text{Member BC}$$

4. Summing the nodal equivalent forces at node B in global coordinates we have

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-wH}{2} & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} - \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

5. Next, we apply a unit displacement in each of the three global degrees of freedom, and we seek to determine the structure global stiffness matrix. Each entry K_{ij} of the global stiffness matrix will correspond to the internal force in degreee of freedome i, due to a unit displacement in degree of freedom j.

6. Recalling the force displacement relations derived earlier, we can assemble the global stiffness matrix in terms of contributions from both AB and BC.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} Δ_3
K_{1j}	AB	EA/L	0	0
	BC	$12EI/H^3$	0	$6EI/H^2$
K_{2j}	AB	0	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
	BC	0	EA/H	0
K_{3j}	AB	0	$-6EI/L^2$	4EI/L
	BC	$6EI/H^2$	0	4EI/H

7. Summing up, the structure global stiffness matrix [**K**] is

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}$$

8. The global equation of equilibrium can now be written

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} \\ 0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{wH}{2} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{2} + \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

Victor E. Saouma

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} H^2 & L^2 & L & H \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Solve for the displacements

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} - \frac{wH}{2} \\ \frac{-P}{2} \\ M + \frac{PL}{8} - \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

10. To obtain the element internal forces, we will multiply each element stiffness matrix by the local displacements. For element AB, the local and global coordinates match, thus

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

11. For element BC, the local and global coordinates do not match, hence we will need to transform the dispalcements from their global to their local components. But since vector (displacement and load) and matrix transformation have not yet been covered, we not by inspection that the relationship between global and local coordinates for element BC is

Local	δ_1	δ_2	θ_3	δ_4	δ_5	θ_6
Global	0	0	0	Δ_2	$-\Delta_1$	θ_3

and we observe that there are no local or global displacements associated with dof 1-3; Hence, the internal forces for element BC are given by:

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \\ -\Delta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ -\frac{w \cdot H^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

Note that the element is defined as going from C to B hence x,y,z correspond to Y, -X, Z.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

K ترشيح السجلات الزلزالية (تحويلات فورييه السريعة)

ملخص

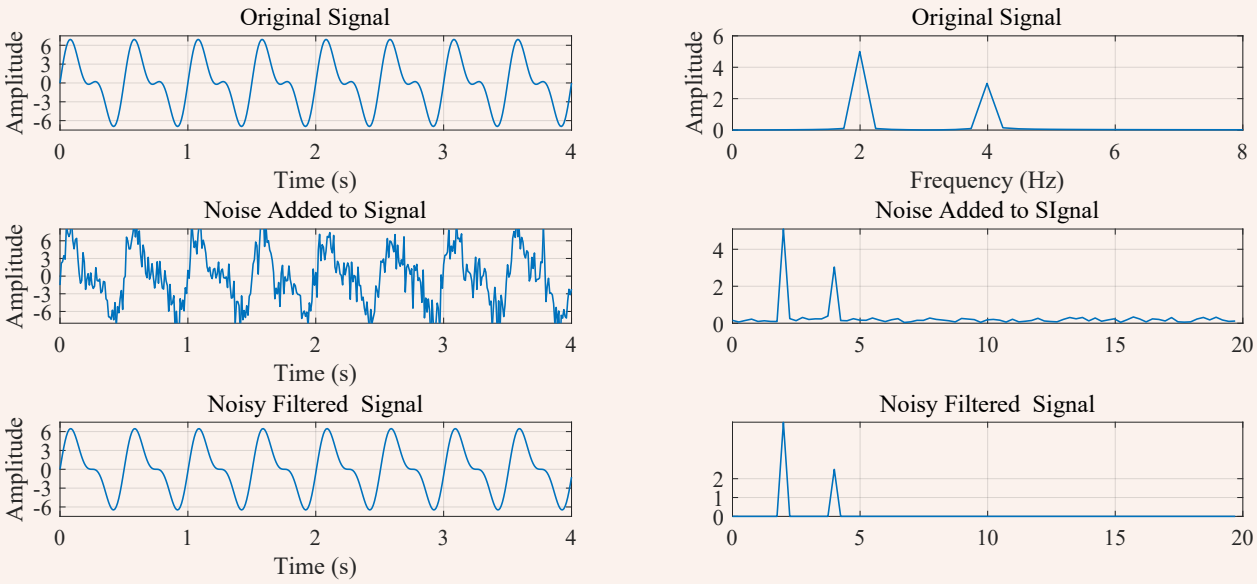
يشرح هذا الملحق ترشيح سجلات التسارع الزلزالي باستخدام تحويل فورييه السريع (FFT) ومرشحات باتروورث. تنقل النظرية تمثيل الإشارة من مجال الزمن إلى مجال التردد، فتحللها إلى مركبات جيبية وجيب تمام ذات ترددات مختلفة. وبمعالجة المحتوى الترددي يمكن إزالة الضوضاء والمركبات عالية التردد غير المرغوبة مع الحفاظ على الأجزاء ذات المعنى الفيزيائي من السجل. ويتناول الملحق الأسس الرياضية لمتسلسلات فورييه وتحويلاته، وخوارزميات الترشيح العملية، وتطبيقاتها على سجلات الحركة القوية الشائعة في التحليل والتصميم الإنشائيين.

K.1 كيفية حساب تحويل فورييه 2805

قد يلزم حذف الترددات العالية من سجل زلزالي، ولا سيما من سجلات الحركة القوية. ويبين هذا القسم إجراء بسيطا لذلك.

اعتدنا النظر إلى الإشارة في مجال الزمن، أي $f(t)$، لكن دراستها في مجال التردد تنطوي على مزايا مهمة.

توفر متسلسلة فورييه طريقة بديلة لتمثيل البيانات: فبدلا من تمثيل سعة الإشارة دالة في الزمن، نمثل مقدار المعلومات التي تحملها عند الترددات المختلفة. يبين الشكل K.1 إشارات توافقية أضيفت إليها ضوضاء في مجالي الزمن والتردد.



شكل K.1: أمثلة لإشارات رشحت بمرشحات باتروورث

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

4 تتيح تحويلات فورييه نقل الإشارة من مجال الزمن إلى مجال التردد بتحليلها إلى مجموع من دوال الجيب وجيب التمام ذات الترددات المختلفة:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi\omega t} \mathrm{d}t$$

$$x(t) \overset{\mathrm{FFT}}{\longrightarrow} X(\omega)$$

5 ويعيدنا تحويل فورييه السريع العكسي من مجال التردد إلى مجال الزمن:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2i\pi\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$X(\omega) \overset{\mathrm{FFT}^{-1}}{\longrightarrow} x(t)$$

6 بعد الانتقال إلى مجال التردد يمكن استخدام مرشحات خاصة، ولا سيما مرشحات باتروورث، قبل العودة إلى مجال الزمن ببيانات مرشحة. ومن أشهر هذه المرشحات، كما يبين الشكل K.2:

$$|H(j\omega)|^2 = \begin{cases} \text{Low pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \\ \text{High pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band stop} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_U}\right)^{2n}} \end{cases}$$

حيث تمثل ω وω_L وω_U وn التردد، وترددي القطع السفلي والعلوي، ورتبة المرشح، على الترتيب.

K.1 كيفية حساب تحويل فورييه

تنشأ في التطبيق حالتان مختلفتان:

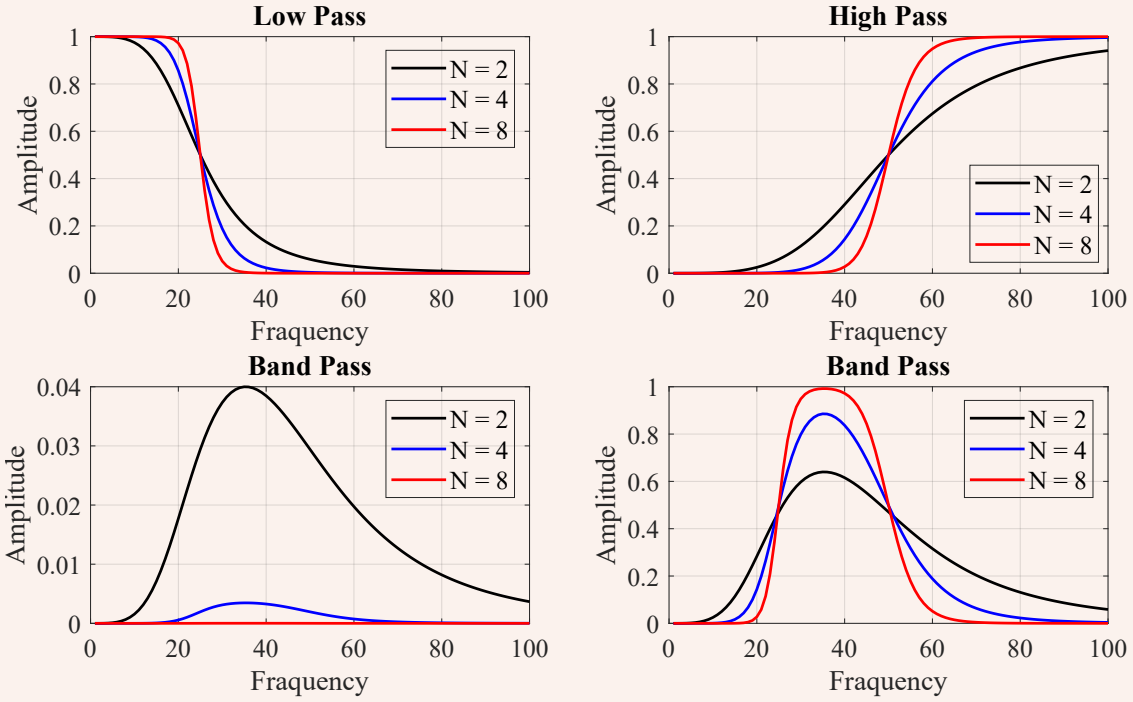
(a) نحتاج إلى تحويل دالة مستمرة $x(t)$.
(b) نحتاج إلى تحويل مجموعة محدودة من البيانات المسجلة، وهي الحالة المعتادة في هندسة الزلازل.

(a) تحويل فورييه لدالة مستمرة

لدالة مستمرة $x(t)$ معرفة على $(-\infty, \infty)$، يعرف تحويل فورييه بالعلاقة

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل K.2: مقارنة مرشحات باتروورث لقيم مختلفة من n

والإجراء هو:

1. تعريف الدالة $x(t)$ تحليليا.
2. التعويض بها في التكامل.
3. حساب التكامل تحليليا إن أمكن.

لنأخذ، مثلا، الدالة التوافقية

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t).$$

وباستخدام متطابقة أويلر

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right),$$

يعطي التحويل نبضتين عند $\omega = \pm\omega_0$، مما يبين أن التوافقية النقية تحتوي طاقة عند تردد واحد.

وفي تطبيقات إنشائية كثيرة، ولا سيما تحليل الاهتزاز، تستخدم التحويلات المغلقة لفهم المحتوى الترددي والرنين وسلوك الاستقرار.

(b) تحويل فورييه لمجموعة بيانات محدودة (DFT وFFT)

لا نتعامل في هندسة الزلازل مع دوال مستمرة، بل مع بيانات مأخوذة بالعينات:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

على فواصل زمنية منتظمة Δt. وتكون المدة الكلية

$$T = N\Delta t,$$

وتردد أخذ العينات

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}.$$

يعرف تحويل فورييه المتقطع (DFT) بالعلاقة

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \dots, N-1.$$

ويكون التحويل العكسي

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N}.$$

وتحويل فورييه السريع (FFT) ليس إلا خوارزمية عددية فعالة لحساب DFT بعدد عمليات $O(N \log N)$ بدلا من $O(N^2)$.

دقة التردد وتردد نايكويست

ينتج مقداران مهمان مباشرة من نظرية أخذ العينات:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \tag{K.1}$$

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{K.2}$$

- تحدد Δf دقة التردد.
- يمثل f_{Nyquist} أعلى تردد يمكن تمثيله من دون تراكب طيفي.

ولذلك، في السجلات الزلزالية:

- يؤدي معدل أخذ عينات مرتفع إلى تردد نايكويست أكبر.
- تؤدي مدة أطول إلى دقة ترددية أفضل.

الإجراء العملي للسجلات الزلزالية

لسجل تسارع زلزالي:

1. تزال القيمة المتوسطة (تصحيح خط الأساس).
2. تطبق نافذة اختياريا، مثل Hanning أو Hamming.

3. يحسب FFT.
4. تضرب النتيجة في دالة المرشح المختارة $H(\omega)$.
5. يحسب FFT العكسي.
6. يؤخذ الجزء الحقيقي من الناتج.

فينتج التاريخ الزمني المرشح.

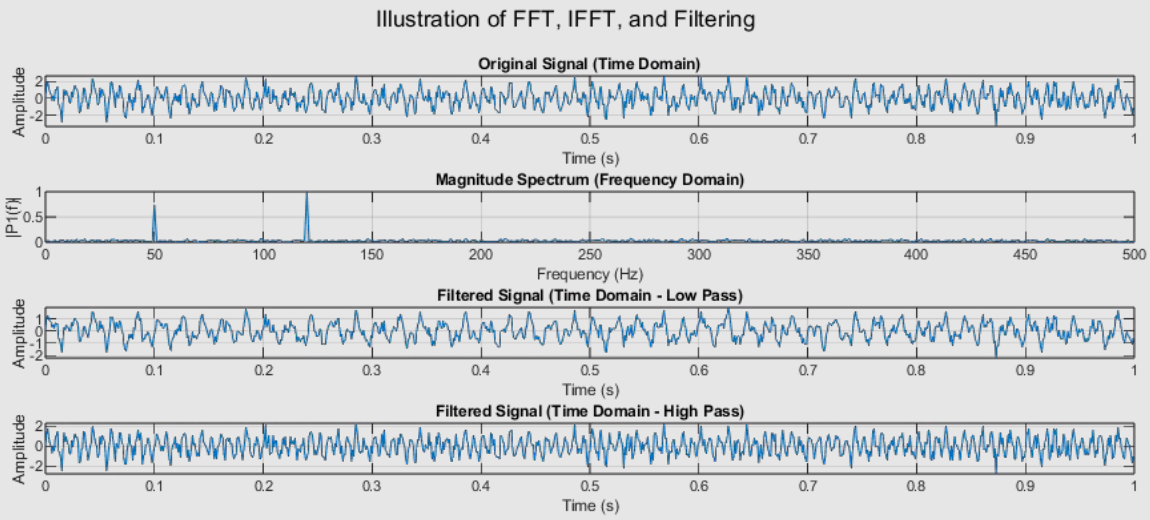
[7] يوضح هذا الإجراء في شيفرة MATLAB®في §I.5.3.

مثال K.1: تحويل فورييه السريع

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

تنشأ إشارة مركبة بجمع مركبتين جيبيتين بترددي $f_1 = 50$ Hz و$f_2 = 120$ Hz، ثم تضاف ضوضاء عشوائية لمحاكاة حالة أكثر واقعية.

يطبق FFT لنقل الإشارة إلى مجال التردد وإظهار مركباتها الطيفية ومقاديرها. ثم يعيد IFFT بناء الإشارة الأصلية من تمثيلها الترددي، مبينا قابلية التحويل للعكس.



- **الإشارة الأصلية:** تبين إشارة المجال الزمني الأثر المشترك للمركبتين الجيبيتين والضوضاء المضافة.
- **طيف التردد:** يكشف FFT المركبتين الغالبتين عند 50 Hz و120 Hz.
- **الإشارة المرشحة بمرشح تمرير منخفض:** يزيل المرشح الضوضاء عالية التردد ويحفظ المركبات دون تردد القطع 100 Hz.
- **الإشارة المرشحة بمرشح تمرير مرتفع:** يزيل المرشح المركبات منخفضة التردد ويحفظ ما فوق تردد القطع 100 Hz.
- **الإشارة المعاد بناؤها:** يعيد IFFT بدقة بناء الإشارتين المرشحة والأصلية، مبينا قابلية التحويل للعكس.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L مراجعة في الجبر الخطي

ملخص

بسبب تقسيم المنشأ إلى عدد منته من العقد، يكون الحل قائماً على المصفوفات. وفي مرحلة ما، يلزم "عكس" مصفوفة لحساب الإزاحات.

لذلك يقدم هذا الفصل مراجعة موجزة للجبر الخطي. ومع أننا نعتمد على الدوال المضمنة لعكس المصفوفات، مثل `inv` *في MATLAB®أو* `a`*)* `linalg.inv`*) في Python، فمن المهم أحياناً فهم الخوارزميات الكامنة وراء الخيارات المختلفة.*

L.1 المصفوفات 2809
L.1.1 تعريفات 2809
L.1.2 العمليات الأولية على المصفوفات 2811
L.1.3 المحددات 2812
L.1.4 العكس 2813
L.2 حل المعادلات الخطية 2813
L.2.1 الاستراتيجيات 2813
L.2.2 التحليل 2814
L.2.3 الطرائق غير المباشرة 2820
L.3 خصائص المصفوفات والتحسينات الحسابية 2821
L.3.1 التفرد والرتبة 2821
L.3.2 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية 2822
L.3.3 عدد التكييف 2823
L.3.4 التكييف المسبق 2823
L.4 أمثلة 2825
L.4.1 مثال L.1: حذف غاوس 2826
L.4.2 مثال L.2: حذف غاوس–جوردان 2827
L.4.3 مثال L.3: تحليل **lu** 2828
L.4.4 مثال L.4: تحليل تشوليسكي . . 2829
L.4.5 مثال L.5: غاوس–سايدل . . . 2830
L.4.6 مثال L.6: غاوس–سايدل . . . 2831
L.4.7 مثال L.7: تحليل القيم المفردة . 2831
L.4.8 مثال L.8: التهيئة المسبقة . . . 2832

L.1 المصفوفات

L.1.1 تعريفات

المصفوفة:

$$[A] = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

نشير إلى حجم المصفوفة بالرمز $\mathbf{A}_{m\times n}$، وإلى عنصر مفرد منها بالرمز A_{ij}. وتكتب المصفوفات والمتجهات عادة بخط عريض في النص المطبوع، أو توضع فوقها علامة التلدة عند كتابتها باليد، مثل $\tilde{A}$.

المتجهات: هي مصفوفات ذات عمود واحد:

$$\{X\} = \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{Bmatrix}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما متجه الصف فيكتب:

$$\mathbf{C}^T = \lfloor C \rfloor = \lfloor \; B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_i \quad \dots \quad B_m \; \rfloor$$

لاحظ أن الكميات القياسية والمتجهات والمصفوفات موترات من الرتب 0 و1 و2، على الترتيب.

المصفوفة المربعة: هي مصفوفة يتساوى فيها عدد الصفوف والأعمدة. $\mathbf{A}_{m\times m}$

التناظر: $A_{ij} = A_{ji}$

مصفوفة الوحدة: مصفوفة مربعة تساوي جميع عناصرها صفراً، عدا العناصر القطرية التي تساوي واحداً. ويرمز إليها غالباً بـ$\mathbf{I}$، وتحقق:

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq j \\ 1, & \text{إذا كان } i = j \end{cases}$$

المصفوفة القطرية: مصفوفة مربعة تساوي جميع عناصرها صفراً عدا العناصر القطرية غير الصفرية. ويرمز إليها غالباً بـ$\mathbf{D}$، وتحقق:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i \neq j \\ \neq 0, & \text{إذا كان } i = j \end{cases}$$

المصفوفة المثلثية العليا: مصفوفة مربعة تساوي عناصرها صفراً عدا العناصر الواقعة على القطر وفوقه. ويرمز إليها غالباً بـ$\mathbf{U}$، وتحقق:

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i > j \\ \neq 0, & \text{إذا كان } i \leq j \end{cases}$$

المصفوفة المثلثية السفلى: مصفوفة مربعة تساوي عناصرها صفراً عدا العناصر الواقعة على القطر وتحته. ويرمز إليها غالباً بـ$\mathbf{L}$، وتحقق:

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } i < j \\ \neq 0, & \text{إذا كان } i \geq j \end{cases}$$

المصفوفات المتعامدة: تسمى $\mathbf{A}_{m\times n}$ و$\mathbf{B}_{m\times n}$ متعامدتين إذا كان $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

وتكون المصفوفة المربعة $\mathbf{C}_{m\times m}$ متعامدة إذا كان $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$

أثر المصفوفة: $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المصفوفات الجزئية: هي مصفوفات محتواة داخل مصفوفة، فمثلاً:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 &= [4]\,[3 \;\; 2] = [12 \;\; 8] \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 14 & 34 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

تجرى العمليات على المصفوفات الجزئية كما لو كانت عناصر مفردة في المصفوفة.

L.1.2 العمليات الأولية على المصفوفات

1 **المنقول:** منقول المصفوفة $\mathbf{A}_{m\times n}$ هو مصفوفة أخرى $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T_{n\times m}$ بحيث: $B_{ij} = A_{ji}$ لاحظ أن:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

2 **الجمع (الطرح):** $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n}$؛ $A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$

3 **الضرب بكمية قياسية:** $\mathbf{B} = k \cdot \mathbf{A}$؛ $B_{ij} = kA_{ij}$

4 **ضرب المصفوفات:** يمكن ضرب مصفوفتين إذا ساوى عدد أعمدة الأولى عدد صفوف الثانية.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{m\times n} &= \mathbf{B}_{m\times p} \cdot \mathbf{C}_{p\times n} \\
A_{ij} &= \underbrace{\lfloor \mathbf{B}_i \rfloor_{1\times p} \cdot \left\{\mathbf{C}_j\right\}_{p\times 1}}_{1\times 1} \\
&= \sum_{r=1}^{p} B_{ir}C_{rj}
\end{aligned}$$

من الخصائص المهمة لضرب المصفوفات:

التجميع: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

التوزيع: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

عدم الإبدال: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.1.3 المحددات

5 يعرف محدد المصفوفة $\mathbf{A}_{n\times n}$، ويرمز إليه بـ $\det \mathbf{A}$ أو $|\mathbf{A}|$، تعريفاً تكرارياً كما يأتي:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}$$

حيث $\mathbf{A}_{1j}$ هي المصفوفة $(n-1)\text{x}(n-1)$ الناتجة من حذف الصف i والعمود j من المصفوفة $\mathbf{A}$.

6 لمصفوفة 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a21$$

ولمصفوفة 3×3:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

7 قد تكون كتابة برنامج حاسوبي لحساب محدد مصفوفة $n \times n$ أمراً صعباً.

8 نلاحظ أن محدد مصفوفة $n \times n$ يحتوي $n!$ حداً، ويتضمن كل منها n عمليات ضرب. فإذا كان $n = 10$، كان هناك $10! = 3,628,800$ حد، يتضمن كل منها 9 عمليات ضرب، أي يلزم أكثر من 30 مليون عملية فاصلة عائمة لحساب المحدد. ولهذا لا يعد استخدام قاعدة كرامر لحل منظومة معادلات خطية عملياً.

9 من الخصائص المهمة للمحددات:

1. يساوي محدد منقول المصفوفة محدد المصفوفة نفسها:
$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$$
2. إذا كان صف واحد أو عمود واحد على الأقل تركيباً خطياً من الصفوف أو الأعمدة الأخرى، كان المحدد صفراً. والعكس صحيح أيضاً؛ فإذا كان المحدد صفراً، كان صف أو عمود واحد على الأقل تركيباً خطياً من غيره.
3. إذا وجد اعتماد خطي بين الصفوف، وجد أيضاً بين الأعمدة، *والعكس بالعكس*.
4. يساوي محدد المصفوفة المثلثية العليا أو السفلى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس.
5. يساوي محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين حاصل ضرب محدديهما:
$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

10 يناقش التفرد والرتبة في §44.1.1 في سياق مصفوفات الصلابة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.1.4 العكس

11 يرمز إلى معكوس المصفوفة المربعة غير المفردة $\mathbf{A}$ بـ$\mathbf{A}^{-1}$، ويحقق:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

12 بعض الملاحظات:

1. معكوس منقول المصفوفة يساوي منقول معكوسها:

$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1^{T}}$$

2. معكوس حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب معكوسيهما بترتيب معكوس:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

3. معكوس المصفوفة المتناظرة متناظر أيضاً.
4. معكوس المصفوفة القطرية مصفوفة قطرية عناصرها معكوس عناصر المصفوفة الأصلية.
5. معكوس المصفوفة المثلثية مصفوفة مثلثية.
6. من الأكفأ حسابياً تحليل المصفوفة $(\mathbf{A} = \mathbf{LDU})$ باستخدام التحليل العلوي والسفلي أو حذف غاوس، من عكس المصفوفة مباشرة.

L.2 حل المعادلات الخطية

L.2.1 الاستراتيجيات

13 كما نوقش في §44.2.1، يمثل التحليل خطوة أساسية لتحديد $\mathbf{K}^{-1}$.

14 نريد إيجاد $\mathbf{x}$ في منظومة المعادلات الخطية:

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

تمثل هذه العملية رمزياً كما يأتي:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

15 بوجه عام، توجد ثلاثة مناهج لهذه العملية:

العكس المباشر باستخدام قاعدة كرامر، حيث $\mathbf{A}^{-1} = \frac{[adj\mathbf{A}]}{\mathbf{A}}$. غير أن هذا المنهج غير كفء حسابياً عندما $n \geq 3$ لأنه يتطلب حساب n محددات عالية الرتبة، ولذلك لا يستخدم إلا لعكس مصفوفة 2×2 يدوياً.

التحليل: في الحالة الأعم، نسعى إلى التحليل:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LDU}$$

تتطلب هذه الطريقة عدداً منتهياً من العمليات وتنتج نتائج دقيقة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الطرائق غير المباشرة: أو طرائق التحليل التكراري، حيث لا يعرف مسبقاً عدد العمليات المطلوبة، وتنتج حلاً تقريبياً بدقة يحددها المستخدم.

16 يبين الجدول L.1 طرائق الحل الرئيسة.

جدول L.1: طرائق حل المعادلات الخطية

الطريقة	$\mathbf{b}$	مباشرة	$\mathbf{A}^{-1}$
غاوس	نعم	نعم	لا
غاوس–جوردان	نعم	نعم	لا
L-U	لا	نعم	نعم
تشولسكي	لا	نعم	نعم
غاوس–سايدل	نعم	لا	لا

L.2.2 التحليل

17 في هذه الفئة من الحلول، نستفيد من ثلاث عمليات صفية أولية يمكن تطبيقها على المصفوفة:

1. تبديل موضعي صفين.
2. ضرب صف في كمية قياسية غير صفرية.
3. إضافة مضاعف قياسي من صف إلى صف آخر أو طرحه منه.

L.2.2.1 حذف غاوس

18 نحول المعادلات إلى صورة *سلمية صفية*، ثم نوجد المتغيرات المجهولة بالتعويض الخلفي.

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \rightarrow \mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$$

19 الصورة السلمية الصفية مصفوفة مثلثية عليا تكون فيها جميع العناصر أسفل العنصر المحوري صفراً.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{mm} \end{bmatrix}$$

20 لاحظ أن هذه الطريقة تعطي حل $\mathbf{x}$ فقط، ولا تعطي $\mathbf{A}^{-1}$.

L.2.2.2 حذف غاوس–جوردان

21 هذه الطريقة امتداد لحذف غاوس؛ فبدلاً من تحويل $\mathbf{A}$ إلى $\mathbf{U}$، تحول المعادلات المحتوية على المتغيرات المجهولة إلى *الصورة السلمية الصفية المختزلة*، التي تساوي عناصر قطرها الرئيس 1 وتساوي جميع عناصرها الأخرى 0، أي $\mathbf{I}$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وبذلك لا يلزم التعويض الخلفي، ويمكن إيجاد معكوس المصفوفة صراحة.

22 ينتج حذف غاوس–جوردان كلاً من حل المعادلات ومعكوس المصفوفة الأصلية. ويتطلب عمليات أكثر بثلاثة أمثال (n^3) من حذف غاوس أو تحليل LU ($\frac{n^3}{3}$).

23 خطوات الإجراء:

- تبدل الصفوف بحيث تقع جميع الصفوف الصفرية في الأسفل.
- تبدل الصفوف بحيث يقع في الأعلى الصف ذو العنصر غير الصفري الأكبر والأبعد إلى اليسار.
- يضرب الصف العلوي في كمية قياسية ليصبح عنصره المحوري 1.
- تضاف مضاعفات الصف العلوي إلى الصفوف الأخرى أو تطرح منها، حتى تصبح بقية عناصر عمود العنصر المحوري صفراً.
- تكرر الخطوات 2–4 للعنصر غير الصفري التالي إلى اليمين حتى تصبح جميع العناصر المحورية 1.
- تبدل الصفوف بحيث يقع العنصر المحوري لكل صف غير صفري إلى يمين العنصر المحوري في الصف الذي فوقه.

L.2.2.3 تحليل LU

24 يستخدم كل من حذف غاوس وحذف غاوس–جوردان المصفوفة الموسعة $[A|b]$، ولذلك يجب أن تكون $\mathbf{b}$ معلومة. أما تحليل LU فيستخدم المصفوفة $\mathbf{A}$ وحدها، ويمكن بعد إتمامه تطبيقه على أي متجه $\mathbf{b}$.

25 وقد يكون من المرغوب في بعض التطبيقات تحليل المصفوفة قبل اكتمال الطرف الأيمن. ففي طريقة الصلابة المباشرة مثلاً قد توجد حالات تحميل متعددة، مع الرغبة في تحليل مصفوفة الصلابة مرة واحدة فقط. ويتحقق ذلك بالتحليل الآتي:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$$

26 يتكون الحل من:

التحليل: تحليل المصفوفة مستقلة عن متجه الطرف الأيمن:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

التعويض الخلفي: لكل متجه طرف أيمن:

1. إيجاد $\{\mathbf{y}\}$ من $\mathbf{L}\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{b}\}$ بدءاً من الأعلى.
2. إيجاد $\{\mathbf{x}\}$ من $\mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$ بدءاً من الأسفل.

27 المتجه $\mathbf{y}$ هو نفسه المتجه الذي اختزلت إليه $\mathbf{b}$ في حذف غاوس.

28 حسابياً:

1. المعطى:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2. الحل:

$$\begin{aligned} a_{11} &= u_{11} & a_{12} &= u_{12} \cdots & a_{1n} &= u_{1n} \\ a_{21} &= l_{21}u_{11} & a_{22} &= l_{21}u_{12} + u_{22} & a_{2n} &= l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ &\vdots \\ a_{n1} &= l_{n1}u_{11} & a_{n2} &= l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} & a_{nn} &= \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn} + u_{nn} \end{aligned}$$

3. لتكن:

$$\mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4. تجرى العملية صفاً صفاً أو عموداً عموداً:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} \quad i > j \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

يمكن للعناصر المحسوبة l_{ij} أو u_{ij} أن تحل محل العنصر المناظر a_{ij}.

29 خطوة بخطوة:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

30 بالتعويض عموداً عموداً:

$$\begin{aligned} \lfloor\ L_{11}^{\checkmark} \quad L_{21}^{\checkmark} \quad L_{31}^{\checkmark}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}\ \rfloor && \text{Column 1} \\ \lfloor\ L_{11}U_{12} \quad L_{21}U_{12} + L_{22} \quad L_{31}U_{12} + L_{32}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{12}^{\checkmark} \quad L_{22}^{\checkmark} \quad L_{32}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 2} \\ \lfloor\ L_{11}U_{13} \quad L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \quad L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{13}^{\checkmark} \quad U_{23}^{\checkmark} \quad L_{33}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 3} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وفي كل خطوة تحل n مجاهيل.

31 حتى إذا كانت $\mathbf{A}$ متناظرة، فإن $\mathbf{L}^T \neq \mathbf{U}$.

32 في MATLAB® يفضل `x = A\b` على `x = inv(A)*b` إذا كان المطلوب $\mathbf{x}$ فقط دون $\mathbf{A}^{-1}$. وتستخدم `inv` بدورها تحليل LU أو LDL.

33 للمصفوفات المتناظرة، يختزل تحليل LU إلى:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \\ l_{ij} &= \frac{u_{ji}}{u_{jj}} \end{aligned}$$

L.2.2.4 تحليل تشولسكي

34 إذا كانت $\mathbf{A}$ متناظرة، فلا يلزم أن تكون $\mathbf{A}^F$ متناظرة. فمثلاً:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ .25 & 1 & \\ .5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ & 4 & -6 \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

35 في المقابل، يمكن دائماً تحليل $\mathbf{A}$ كما يأتي:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{U}^{*^T}$$

وللمصفوفات المتناظرة يختزل ذلك إلى:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{L}^{*^T}$$

36 ويمكن أيضاً تحليل المصفوفة القطرية $\mathbf{D}$ إلى حاصل ضرب مصفوفتين: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$. ومن ثم:

$$\mathbf{A} \rightarrow \underbrace{[\mathbf{L}^*]\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{L}^*]^T}_{\mathbf{L}^T}$$

37 خطوة بخطوة:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

38 وبالسير على الأعمدة نحصل على:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{A_{11}} & \frac{A_{12}}{L_{11}} & \frac{A_{13}}{L_{11}} \end{bmatrix} && \text{Column 1} \\ \begin{bmatrix} L_{22} & L_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} & \frac{A_{32} - L_{21}L_{31}}{L_{22}} \end{bmatrix} && \text{Column 2} \\ L_{33} &= \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} && \text{Column 3} \end{aligned}$$

39 من الواضح أن العناصر القطرية يجب أن تكون موجبة.

40 يمكن تلخيص الخوارزمية كما يأتي:

$$\begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1}}{l_{jj}} \qquad i > j \end{aligned}$$

L.2.2.5 تحليل القيم المفردة

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

41 تحليل القيم المفردة (SVD) أداة رياضية متعددة الاستخدامات تحلل أي مصفوفة $m \times n$ مقدارها A إلى ثلاث مصفوفات أبسط ومحددة بوضوح. ويعبر عنه كما يأتي:

$$A = U\Sigma V^T$$

حيث:

- U مصفوفة متعامدة أبعادها $m \times m$، وأعمدتها **المتجهات المفردة اليسرى** لـA.
- Σ مصفوفة قطرية أبعادها $m \times n$، وتحتوي **القيم المفردة** ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$) لـ$A$.
- V^T مصفوفة متعامدة أبعادها $n \times n$، وصفوفها **المتجهات المفردة اليمنى** لـA.

42 تعكس القيم المفردة (σ_i) أهمية المتجهات المفردة المناظرة، وتقيس مقدار إسهام كل منها في البنية الكلية للمصفوفة.

43 تشكل أعمدة U وV قواعد متعامدة معيارياً لفضائي العمود والصف لـA، على الترتيب.

44 يحول SVD المصفوفة A إلى صورة أبسط تكشف خصائصها الجوهرية، مثل الرتبة والمدى والفضاء الصفري.

45 من تطبيقات SVD حل المنظومات الخطية، ولا سيما للمصفوفات سيئة التكييف أو المفردة التي تفشل معها الطرائق التقليدية.

46 الإجراء كما يأتي:

1. إجراء SVD:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛ وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- تحليل A إلى U وΣ وV^T.
- استخدام أدوات حاسوبية مثل:
  - (Matlab: `[U, S, V] = svd(A)`
  - (Python (NumPy): `U, S, Vt = np.linalg.svd(A)`

2. تحليل القيم المفردة:

- فحص العناصر القطرية في Σ، أي القيم المفردة.
- تدل القيم المفردة الصغيرة أو الصفرية على احتمال سوء تكييف A، مما يتطلب تنظيماً أو ترشيحاً لضمان استقرار الحسابات.

3. إعادة بناء المصفوفة:

- التحقق من التحليل بإعادة بناء A:

$$A = U\Sigma V^T$$

4. حل المنظومات الخطية: للمعادلة $Ax = b$:

- التعبير عن الحل باستخدام SVD:

$$x = V\Sigma^{+}U^T b$$

حيث Σ^{+} هو المعكوس المعمم لـΣ، وينتج من عكس القيم المفردة غير الصفرية ونقل Σ.

- للمصفوفات سيئة التكييف:
  - يجري التنظيم بحذف القيم المفردة دون عتبة معينة لتثبيت الحسابات.
  - يكون هذا المنهج فعالاً بوجه خاص للمصفوفات ذات القيم المفردة الصغيرة جداً.

5. تقريب المصفوفة:

- لاختزال الأبعاد أو ترشيح الضجيج، تختزل Σ بالاحتفاظ بأكبر k قيم مفردة فقط وجعل البقية صفراً.
- يعاد بناء تقريب A ذي الرتبة k:

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$$

47 على سبيل المثال، إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix},$$

1. حساب SVD:

- $U =$ قاعدة متعامدة معيارياً لفضاء أعمدة A.
- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ (القيم المفردة).
- $V^T =$ قاعدة متعامدة معيارياً لفضاء صفوف A.

2. حل $Ax = b$ باستخدام SVD:

$$x = V\Sigma^{+}U^{T}b$$

3. تنظيم القيم المفردة الصغيرة لضمان الاستقرار إذا كانت A سيئة التكييف.

48 يعد SVD فعالاً بوجه خاص للمصفوفات التي يصعب تحليلها بسبب قربها من التفرد أو سوء تكييفها، ويوفر إطاراً متيناً لحل المعادلات وتثبيت الحسابات وتحليل خصائص المصفوفات.

L.2.2.6 تحليل QR

49 تحليل QR طريقة أساسية لتفكيك المصفوفات في الجبر الخطي، وفيه يعبر عن المصفوفة $\mathbf{A}$ بحاصل ضرب مصفوفتين: $\mathbf{Q}$ المتعامدة (أو الوحدوية)، و$\mathbf{R}$ المثلثية العليا. ورياضياً:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}.$$

50 تحقق $\mathbf{Q}$ العلاقة $\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (أو $\mathbf{Q}^{*}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ في الحالة المركبة)، أي إن أعمدتها تشكل قاعدة متعامدة معيارياً.

51 المصفوفة $\mathbf{R}$ مثلثية عليا، أي إن جميع عناصرها أسفل القطر صفرية. ويطبق تحليل QR عادة على المصفوفات المستطيلة ذات الأبعاد $m \times n$، حيث $m \geq n$.

L.2.3 الطرائق غير المباشرة

52 تلائم الطرائق التكرارية منظومات المعادلات "الكبيرة" جداً، أو الحالات التي يتوافر فيها "تخمين" أولي للحل.

53 أشهر هذه الطرائق طريقة غاوس–سايدل.

L.2.3.1 غاوس–سايدل

54 نبدأ بمنظومة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} c_{11}x &+ c_{12}y &+ c_{13}z &= r_1 \\ c_{21}x &+ c_{22}y &+ c_{23}z &= r_2 \\ c_{31}x &+ c_{32}y &+ c_{33}z &= r_3 \end{aligned}$$

نحل المعادلة 1st لإيجاد x_1 باستخدام "تخمين" أولي لـ y, z مقداره $(y0, z_0)$.

$$x_1 = \frac{r_1 - c_{12}y_0 - c_{13}z_0}{c_{11}}$$
$$y_1 = \frac{r_2 - c_{21}x_1 - c_{23}z_0}{c_{22}}$$
$$z_1 = \frac{r_3 - c_{31}x_1 - c_{32}y_1}{c_{33}}$$

وهكذا دواليك & $\cdots$

ملاحظات:

1. تعد العملية التكرارية متقاربة إذا:

$$|\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}}{\mathbf{x}^{lk}}| \leq \varepsilon$$

2. يمكن تسريع التقارب بالاسترخاء:

$$x_i^k = \lambda x_i^k + (1-\lambda)x_i^{k-1}$$

حيث λ معامل وزن بين 0. و2. وللقيم دون 1 يكون لدينا *استرخاء ناقص*، وللقيم فوق 1 يكون لدينا *استرخاء زائد*. يستخدم الأول للمنظومات غير المتقاربة، بينما يستخدم الثاني لتسريع تقارب المنظومات المتقاربة. وتبلغ القيمة المثلى لـλ في تحليل الإطارات نحو 1.8.

L.3 خصائص المصفوفات والتحسينات الحسابية

L.3.1 التفرد والرتبة

إذا كان محدد المصفوفة $\mathbf{A}_{n\times n}$ صفراً، قيل إن المصفوفة مفردة.

وكما رأينا سابقاً، يعني ذلك أن صفاً أو عموداً واحداً على الأقل تركيب خطي من غيره.

يرتبط مفهوما تفرد منظومة المعادلات الخطية ورتبتها ارتباطاً وثيقاً بالقيم الذاتية لمصفوفة المعاملات المناظرة.

لمصفوفة مربعة $\mathbf{A}$ أبعادها $n\times n$، يحدد المحدد تفردها. وتكون المصفوفة مفردة إذا وفقط إذا كان محددها صفراً، مما يعني أنها ليست كاملة الرتبة.

يرتبط هذا الشرط مباشرة بالقيم الذاتية لـA: فالمحدد هو حاصل ضرب القيم الذاتية، $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$، حيث λ_i قيم $\mathbf{A}$ الذاتية. وإذا كانت أي قيمة ذاتية $\lambda_i = 0$، صار المحدد صفراً وكانت المصفوفة مفردة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 تمثل رتبة المصفوفة أكبر عدد من الصفوف أو الأعمدة المستقلة خطياً في $\mathbf{A}$، وتقابل عدد القيم الذاتية غير الصفرية مع مراعاة تكراراتها الجبرية. وتكون القيم الذاتية الـn لمصفوفة كاملة الرتبة أبعادها $n \times n$ غير صفرية جميعاً. وعلى العكس، إذا كانت الرتبة $r < n$، كان عدد القيم الذاتية الصفرية $n - r$ تماماً.

61 من المنظور العددي، تؤثر القيم الذاتية أيضاً في تكييف المنظومة. فالمصفوفة ذات القيم الذاتية القريبة من الصفر قد تسبب عدم استقرار عددي حتى إن لم تكن مفردة، مما يبرز أهمية القيم الذاتية في التحليلين النظري والتطبيقي للمنظومات الخطية.

62 إذا كان n حجم مصفوفة الصلابة العامة لمنشأ لم تؤخذ شروط حدوده في الحسبان، حيث n = العدد الكلي للعقد مضروباً في عدد درجات الحرية لكل عقدة، فإن رتبتها r تساوي n ناقص عدد حركات الجسم الصلب الممكنة، وهي 3 و6 في بعدين وثلاثة أبعاد، على الترتيب.

63 فمثلاً، في المعادلة 43.1 تكون رتبة مصفوفة الصلابة الموسعة $\mathbf{K}$، وهي r، أصغر من n، بينما تحقق $\mathbf{K}_{tt}$ العلاقة $r = n$.

L.3.2 القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

64 توجد صورة خاصة لمنظومة المعادلات الخطية:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}$$

يكون فيها الطرف الأيمن مضاعفاً للحل:

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \lambda\{\mathbf{x}\}$$

ويمكن إعادة كتابتها كما يأتي:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{0}$$

65 يوجد حل غير تافه لهذه المنظومة إذا وفقط إذا كانت $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ مفردة، أي:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

أو:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

66 عند نشر المحدد نحصل على كثيرة حدود من الرتبة n^{th} بدلالة λ، تعرف بالمعادلة المميزة لـ$\mathbf{A}$. وحلولها الـn، التي قد تكون حقيقية أو مركبة، هي القيم الذاتية لـ$\mathbf{A}$، وتحقق كل قيمة λ_i:

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}_i\} = \lambda_i\{\mathbf{x}_i\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث $\{\mathbf{x}_i\}$ المتجه الذاتي المناظر.

يمكن إثبات أن:

1. القيم الذاتية الـn لمصفوفة حقيقية متناظرة رتبتها n حقيقية جميعاً.
2. المتجهات الذاتية متعامدة وتشكل قاعدة متعامدة في E_n.

تستخدم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية في تحليل الاستقرار (الانبعاج)، والتحليل الديناميكي، وتقويم أداء صيغ العناصر المحددة.

L.3.3 عدد التكييف

67 عدد تكييف المصفوفة مقياس لحساسية حل المنظومة الخطية $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ لتغير بيانات الإدخال أو أخطاء التقريب أثناء الحساب. وهو يقيس مقدار تغير الناتج، أي الحل $\mathbf{x}$، عند اضطراب معين في المدخل $\mathbf{b}$.

68 للمصفوفة المربعة $\mathbf{A}$، إذا كانت $\mathbf{A}$ قابلة للقطرنة أو متناظرة موجبة التعريف، يعرف عدد التكييف وفق المعيار 2 (المعيار الطيفي) كما يأتي:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

حيث λ_{max} وλ_{min} أكبر وأصغر القيم الذاتية لـ$\mathbf{A}$ بالقيمة المطلقة، على الترتيب.

69 يترتب على هذا التعريف:

- $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$، لأن $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$ للمصفوفات موجبة التعريف.
- تعني القيمة الصغيرة لـ$\kappa(\mathbf{A})$، القريبة من 1، أن المصفوفة حسنة التكييف، بينما تدل القيمة الكبيرة على سوء التكييف.

L.3.4 التكييف المسبق

وُلِّد هذا المثال بواسطة OpenAI, 2025 وينبغي تفسيره بحذر. وعلى القراء تقييم صحته بعناية قبل قبول نتائجه.

70 التكييف المسبق طريقة لتحويل المصفوفة $\mathbf{A}$ بما يحسن خصائصها العددية قبل تطبيق الطرائق المباشرة لحل المنظومة $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. والهدف تسهيل الحل بخفض عدد تكييف $\mathbf{A}$ أو تبسيط تحليلها.

71 تحول المنظومة الأصلية $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ باستخدام مصفوفة *المكيف المسبق* $\mathbf{M}$ إلى صورة مكافئة:

72 تختار المصفوفة $\mathbf{M}$ بحيث:

- تقارب $\mathbf{M}$ المصفوفة $\mathbf{A}$، لكنها أسهل عكساً.
- تكون $\mathbf{M}$ غير مفردة.

73 نناقش نوعين من التكييف المسبق، الأيسر والأيمن، في الجدول L.2.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول L.2: التكييف المسبق؛ مقارنة بين الأيسر والأيمن

التكييف المسبق الأيمن	التكييف المسبق الأيسر	الجانب
$\mathbf{AM}^{-1}$	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$	**المصفوفة المكيفة مسبقاً**
يبقى دون تغيير $(\mathbf{b})$	يتحول إلى $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$	**الطرف الأيمن**
يؤثر في $\mathbf{A}$ والمجاهيل عبر $\mathbf{x} = \mathbf{My}$	يؤثر في $\mathbf{A}$ و$\mathbf{b}$	**فعل المكيف المسبق**
أثناء الحل، ويعدل المجاهيل فقط	قبل الحل، ويعدل المنظومة كلها	**وقت التطبيق**

L.3.4.1 التكييف المسبق الأيسر

74 في التكييف المسبق الأيسر، تحول المنظومة الأصلية $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ إلى صورة تحسن الاستقرار والكفاءة العدديين، وذلك بضرب مصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$ ومتجه الطرف الأيمن $\mathbf{b}$ من اليسار في معكوس مصفوفة المكيف المسبق $\mathbf{M}$. وتكتب المنظومة المكيفة:

$$\underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{A}'}\,\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}'}.$$

75 الإجراء:

1. المصفوفة المكيفة مسبقاً $(\mathbf{A}')$:
$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$
هذه مصفوفة المعاملات المحولة. وتختار $\mathbf{M}$ بحيث:
   - تقارب $\mathbf{M}$ المصفوفة $\mathbf{A}$، لكنها أسهل عكساً؛
   - تحسن $\mathbf{M}$ تكييف $\mathbf{A}'$، فتزيد استقرار الحلول العددية.
2. الطرف الأيمن المكيف مسبقاً $(\mathbf{b}')$:
$$\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}.$$
يحول الطرف الأيمن أيضاً ليظل متسقاً مع المصفوفة المكيفة.
3. حل المنظومة المكيفة: المنظومة الجديدة هي:
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$

لأن التكييف المسبق يعدل كلاً من $\mathbf{A}$ و$\mathbf{b}$، يحسب $\mathbf{x}$ مباشرة بطرائق معيارية، مثل تحليل LU.

76 الخطوات هي:

1. حساب $\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$.
2. تكوين المصفوفة المكيفة $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$.
3. حل $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ لإيجاد $\mathbf{x}$ بمحلل مباشر.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.3.4.2 التكييف المسبق الأيمن

77 نبدأ من:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

1. ندخل التعويض:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y},$$

حيث $\mathbf{M}$ مصفوفة المكيف المسبق، و$\mathbf{y}$ متجه المجاهيل الجديد. ويعني هذا التعويض أن الحل الأصلي $\mathbf{x}$ يستعاد من:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

2. نعوض $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ في المعادلة الأصلية:

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = \mathbf{b}. \implies (\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

3. تصبح المسألة الآن حل:

$$(\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

4. نحلل $\mathbf{A}\mathbf{M}$ إلى:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

حيث:

- $\mathbf{L}$ مصفوفة مثلثية سفلى؛
- $\mathbf{U}$ مصفوفة مثلثية عليا.

5. لحل $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{b}$، نتبع خطوتين:

(a) حل $\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}$ لإيجاد $\mathbf{z}$ بالتعويض الأمامي.
(b) حل $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$ لإيجاد $\mathbf{y}$ بالتعويض الخلفي.

6. بعد إيجاد $\mathbf{y}$، نستعيد متجه المجاهيل الأصلي $\mathbf{x}$ من:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

78 يقارن الجدول L.3 تحليل القيم المفردة بالتكييف المسبق للمصفوفة.

L.4 أمثلة

جدول L.3: مقارنة التكييف المسبق للمصفوفة بتحليل القيم المفردة (SVD)

الجانب	التكييف المسبق للمصفوفة	تحليل القيم المفردة (SVD)
الغرض	يسرع المحللات التكرارية للمنظومات الكبيرة.	يحلل بنية المصفوفة ويوفر حلاً متيناً.
حجم المصفوفة	مصفوفات كبيرة ومتناثرة.	مصفوفات صغيرة إلى متوسطة.
سوء التكييف	يحسن التكييف للمحللات التكرارية.	يعالج سوء التكييف مباشرة.
الكفاءة	كفء حسابياً للطرائق التكرارية.	مرتفع الكلفة حسابياً لكنه دقيق.
التطبيقات	محللات تكرارية للمعادلات التفاضلية الجزئية والمحاكاة الكبيرة.	تحليل المركبات الرئيسة وضغط البيانات وترشيح الضجيج والحلول المتينة.
الحالات	مسائل متكررة أو واسعة النطاق.	دقة عالية وتحليل بنية المصفوفة.

L.4.1 مثال L.1: حذف غاوس

نسعى في هذا المثال الأول ببساطة إلى إيجاد المتجه المجهول $\{\mathbf{x}\}$ للمعادلات الآتية:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} +10x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 1. \\ -20x_1 & +3x_2 & +20x_3 & = 2. \\ +5x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 6. \end{array}\right.$$

1. تؤدي إضافة $\frac{20}{10}$ من المعادلة الأولى إلى المعادلة الثانية إلى حذف معامل x_1 من المعادلة الثانية.
2. يؤدي طرح $\frac{5}{10}$ من المعادلة الأولى من المعادلة الثالثة إلى حذف معامل x_1 من المعادلة الثالثة.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10.x_3 & = 4. \\ & +2.5x_2 & +7.5x_3 & = 5.5 \end{array}\right.$$

3. يؤدي طرح $\frac{2.5}{5}$ من المعادلة الثانية من المعادلة الثالثة إلى حذف معامل x_2 من المعادلة الأخيرة.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10x_3 & = 4. \\ & & +2.5x_3 & = 3.5 \end{array}\right.$$

4. يمكن الآن إجراء التعويض الخلفي والحل بدءًا من الأسفل:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3.5}{2.5} = 1.4 \\ x_2 &= \frac{4. - 10.x_3}{5.} = -2. \\ x_1 &= \frac{1. - x_2 + 5.x_3}{10.} = 1. \end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.4.2 مثال L.2: حذف غاوس–جوردان

سنحدد في هذا المثال الثاني كلًا من $\{\mathbf{x}\}$ ومعكوس المصفوفة $\mathbf{A}^{-1}$.

العملية مماثلة للعملية في المثال الأول، غير أننا نوسّع المصفوفة $\mathbf{A}$ بالمصفوفة $\mathbf{I}$: $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$، ونجري العمليات على المصفوفتين الفرعيتين في آن واحد.

1. المصفوفة الابتدائية

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 3 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array}\right\}$$

2. حذف العمود الأول:
   (a) الصف 1=1 0.1(الصف 1)
   (b) الصف 2=(الصف 2)+20(الصف الجديد 1)
   (c) الصف 3=(الصف 3) -5(الصف الجديد 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 7.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.1 \\ 4 \\ 5.5 \end{array}\right\}$$

3. حذف العمود الثاني
   (a) الصف 2=0.2 (الصف 2)
   (b) الصف 1=(الصف 1)-0.1(الصف الجديد 2)
   (c) الصف 3=(الصف 3) -2.5(الصف الجديد 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.7 & 0.06 & -0.02 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0.02 \\ 0.8 \\ 3.5 \end{array}\right\}$$

4. حذف العمود الثالث
   (a) الصف 3=0.4 (الصف 3)
   (b) الصف 1=(الصف 1)+0.7(الصف الجديد 3)
   (c) الصف 2=(الصف 2)-2(الصف الجديد 3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.36 & -0.16 & 0.28 \\ 0 & 1 & 0 & 1.6 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0.4 \end{array}\right] \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1.4 \end{array}\right\}}_{\{\mathbf{x}\}}$$

تمثل هذه المعادلة الأخيرة $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.4.3 مثال L.3: تحليل lu

المعطى:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 6 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

باتباع الإجراء السابق، يمكن تحليلها كما يأتي:

الصف 1: $u_{11} = a_{11} = 7$; $u_{12} = a_{12} = 9$; $u_{13} = a_{13} = -1$; $u_{14} = a_{14} = 2$

الصف 2:

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} &&= \frac{4}{7} \\ u_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} &&= -5 - 4\frac{9}{7} &&= -10.1429 \\ u_{23} &= a_{23} - l_{21}u_{13} &&= 2 + 4\frac{1}{7} &&= 2.5714 \\ u_{24} &= a_{24} - l_{21}u_{14} &&= -7 - 4\frac{2}{7} &&= -10.1429 \end{aligned}$$

الصف 3:

$$\begin{aligned} l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} &&= \frac{1}{7} \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} &&= \frac{6 - (0.1429)(9)}{-10.1429} &&= -0.4647 \\ u_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} &&= -3 - (0.1429)(-1) - (-0.4647)(2.5714) &&= -1.6622 \\ u_{34} &= a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} &&= -4 - (0.1429)(2) - (-0.4647)(-8.1429) &&= -8.0698 \end{aligned}$$

الصف 4:

$$\begin{aligned} l_{41} &= \frac{a_{41}}{u_{11}} &&= \frac{3}{7} \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} &&= \frac{-2 - (0.4286)(9)}{-10.1429} &&= -0.5775 \\ l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} &&= \frac{-1 - (0.4286)(-1) - (0.5775)(2.5714)}{-1.6622} &&= 1.2371 \\ u_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} &&= -5 - (0.4286)(2) - (0.5775)(-8.1429) - (1.2371)(-8.0698) &&= 8.8285 \end{aligned}$$

أو

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .5714 & 1 & 0 & 0 \\ .1429 & -.4647 & 1 & 0 \\ .4286 & .5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & -10.1429 & 2.571 & -8.143 \\ 0 & 0 & -1.662 & -8.069 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.4.4 مثال L.4: تحليل تشوليسكي

المعطى:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

العمود 1:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} &&= \sqrt{4} &&= 2 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} &&= \frac{6}{2} &&= 3 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} &&= \frac{10}{2} &&= 5 \\ l_{41} &= \frac{a_{41}}{l_{11}} &&= \frac{4}{2} &&= 2 \end{aligned}$$

العمود 2:

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} &&= \sqrt{13 - 3^2} &&= 2 \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{13 - (5)(3)}{2} &&= -1 \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{6 - (2)(3)}{2} &&= 0 \end{aligned}$$

العمود 3:

$$\begin{aligned} l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} &&= \sqrt{27 - 5^2 - (-1)^2} &&= 1 \\ l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41} l_{31} - l_{42} l_{32}}{l_{33}} &&= \frac{2 - (2)(5) - (0)(-1)}{1} &&= -8 \end{aligned}$$

العمود 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{72 - (2)^2 - (0)^2 - (-8)^2} = 2$$

أو

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.4.5 مثال L.5: غاوس–سايدل

$$\begin{cases} 4x & +2y & +3z & = 8. \\ 3x & -5y & +2z & = -14. \\ -2x & +3y & +8z & = 27. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (8 - 2y_n - 3z_n)/4 \\ y_{n+1} &= (-14 - 3x_{n+1} - 2z_n)/(-5) \\ z_{n+1} &= (27 + 2x_{n+1} - 3y_{n+1})/(8) \end{aligned}$$

بافتراض $x_0 = y_0 = z_0 = 0$، يعطي التكرار الأول

$$\begin{aligned} x_1 &= (8 - 2\times 0 - 3\times 0)/4 &&= 2 \\ y_1 &= (-14 - 3\times 2 - 2\times 0)/(-5) &&= 4 \\ z_1 &= (27 + 2\times 2 - 3\times 4)/(8) &&= 2.375 \end{aligned}$$

التكرار الثاني

$$\begin{aligned} x_2 &= (8 - 2\times 4 - 3\times 2.375)/4 &&= -1.781 \\ y_2 &= (-14 - 3\times(-1.781) - 2\times 2.375)/(-5) &&= 2.6814 \\ z_2 &= (27 + 2\times(-1.781) - 3\times 2.681)/8 &&= 1.924 \end{aligned}$$

التكرار الثالث

$$\begin{aligned} x_3 &= (8 - 2\times 2.681 - 3\times 1.924)/4 &&= -0.784 \\ y_3 &= (-14 - 3\times(-0.784) - 2\times 1.924)/(-5) &&= 3.099 \\ z_3 &= (27 + 2\times 2\times(-0.784) - 3\times 3.099)/8 &&= 2.017 \end{aligned}$$

التكرار	x	y	z
1	2.000	4.000	2.375
2	1.781-	2.681	1.924
3	0.784-	3.099	2.017
4	1.062-	2.969	1.996
5	0.982-	3.009	2.001
6	1.006-	2.997	2.000
7	0.998-	3.001	2.000
8	1.001-	3.000	2.000
9	1.000-	3.000	2.000
10	1.000-	3.000	2.000

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

L.4.6 مثال L.6: غاوس–سايدل

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ 2x+y &=& 8 \end{array}\right. \Rightarrow y=-3-x; \rightarrow y=8-2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5 \\ y &=& -2 \end{array}\right.$$

الحل تكراريًا:

التكرار	x	y	$N=x^2+y^2$	$\frac{N_i-N_{i-1}}{N_i}$
1	0	3	9	
2	2.5	0.5	6.5	%38.00
3	3.75	0.75-	14.625	%55.56
4	4.375	1.375-	21.03125	%30.46
5	4.6875	1.6875-	24.82031	%15.27
6	4.84375	1.84375-	26.86133	%7.60
7	4.921875	1.92188-	27.91846	%3.79
8	4.960938	1.96094-	28.45618	%1.89
9	4.980469	1.98047-	28.72733	%0.94
10	4.990234	1.99023-	28.86347	%0.47
11	4.995117	1.99512-	28.93169	%0.24
12	4.997559	1.99756-	28.96583	%0.12

L.4.7 مثال L.7: تحليل القيم المفردة

نسعى إلى حل $\mathbf{y}=\mathbf{Ab}$، حيث إن $\mathbf{A}$ مصفوفة شديدة الاعتلال، مع

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+1e-15 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix}$$

1. الحل بالطريقة المباشرة

$$\mathbf{y}\begin{bmatrix} 1.2000 \\ 0.8000 \end{bmatrix}$$

2. إجراء تحليل القيم المفردة (SVD) (باستخدام أمر MATLAB® الآتي `[U, S, V] = svd(A)`)

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix} 2.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{V}=\begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

3. تكوين المعكوس الزائف لـ $\mathbf{S}$ مع التنظيم، على أن تكون عتبة التنظيم 1e-6. لكننا نهيئ أولًا

$$\mathbf{S}_{plus}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. فحص جميع عناصر $\mathbf{S}$، واستبدال العناصر الأكبر من العتبة بمقلوبها

$$\mathbf{S}_{plus}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

5. حساب المعكوس الزائف لـ $\mathbf{A}$ باستخدام تحليل القيم المفردة

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{plus} &= \mathbf{V}\mathbf{S}_{plus}U' \\ &= \begin{bmatrix}-0.7071 & -0.7071\\ -0.7071 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.7071 & -0.7071\\ -0.7071 & 0.7071\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0.2500 & 0.2500\\ 0.2500 & 0.2500\end{bmatrix}\end{aligned}$$

6. الحل باستخدام المعكوس الزائف

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{SVD} &= \mathbf{A}_{plus}\mathbf{b} \\ &\begin{bmatrix}0.2500 & 0.2500\\ 0.2500 & 0.2500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2+1e-15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

يرد كود MATLAB®لتحليل القيم المفردة في §I.5.4.

L.4.8 مثال L.8: التهيئة المسبقة

المصفوفة A وخصائصها

1. مع أن المصفوفة المعتلة $\mathbf{A}$ تكون معطاة عادةً، فسنبني في هذه الحالة مصفوفة اصطناعيًا باستخدام العلاقة

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\top}$$

حيث $\mathbf{D}$ مصفوفة قطرية ذات قيم ذاتية مختارة مسبقًا، و$\mathbf{Q}$ أي مصفوفة متعامدة (مع أنها تتحكم في اتجاه المتجهات الذاتية).

2. نأخذ $\mathbf{D}$ مكوّنة من القيم الذاتية $\{1, 0.1, 0.01\}$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0\\ 0 & 0.1000 & 0\\ 0 & 0 & 0.0100\end{bmatrix}$$

3. لتوليد $\mathbf{Q}$ نحتاج أولًا إلى مصفوفة أعداد عشوائية

$$\mathbf{Random} = \begin{bmatrix}0.4170 & 0.3023 & 0.1863\\ 0.7203 & 0.1468 & 0.3456\\ 0.0001 & 0.0923 & 0.3968\end{bmatrix}$$

4. تكون $\mathbf{Q}$ مصفوفة متعامدة مستخرجة من $\mathbf{Random}$ من خلال تحليل QR لها، فنحصل على

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}-0.5010 & 0.7769 & -0.3813\\ -0.8654 & -0.4499 & 0.2206\\ -0.0001 & 0.4405 & 0.8978\end{bmatrix}$$

5. ثم نحدد $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\top}$ بالتعويض:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0.3128 & 0.3978 & 0.0309\\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177\\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275\end{bmatrix}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

6. القيم الذاتية للمصفوفة $\mathbf{A}$ هي:

$$\lambda(\mathbf{A}) = \{1.000, 0.100, 0.010\}$$

(كما هو متوقع، لأن $\mathbf{A}$ بُنيت من $\mathbf{D}$).

7. عدد شرط $\mathbf{A}$ هو:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{1.0}{0.01} = 100.00$$

مصفوفة التهيئة المسبقة $\mathbf{M}$ تُشتق مصفوفة التهيئة المسبقة $\mathbf{M}$ من تحليل تشوليسكي $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$، حيث:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.5593 & 0 & 0 \\ 0.7112 & 0.5136 & 0 \\ 0.0552 & -0.1109 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

و:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

التهيئة المسبقة من اليسار

1. يُعرَّف النظام المهيأ مسبقًا من اليسار كما يأتي:

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{b}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

2. بالتعويض

$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

3. القيم الذاتية للمصفوفة المهيأة مسبقًا من اليسار هي:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

4. عدد الشرط هو:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$$

5. نسبة عددي الشرط هي:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}})} = 100.00$$

التهيئة المسبقة من اليمين

1. يُعرَّف النظام المهيأ مسبقًا من اليمين كما يأتي:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$$

2. إذا أردنا إيجاد $\mathbf{y}$، نجري تحليل LU. وفي هذه الحالة

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

و$\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$ (لاحظ أن هذه حالة خاصة تكون فيها $\mathbf{L}$ و$\mathbf{U}$ قطريتين.)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

3. حل النظام على خطوتين: التعويض الأمامي ثم التعويض الخلفي
4. المصفوفة المهيأة مسبقًا من اليمين هي:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

5. القيم الذاتية للمصفوفة المهيأة مسبقًا من اليمين هي:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

6. عدد الشرط هو:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = 1.00$$

7. نسبة عددي الشرط هي:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}})} = 100.00$$

ملخص النتائج

- عدد شرط المصفوفة الأصلية $\mathbf{A}$: $\kappa(\mathbf{A}) = 100.00$
- عدد الشرط بعد التهيئة المسبقة من اليسار: $\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$
- عدد الشرط بعد التهيئة المسبقة من اليمين: $\kappa(A_{\text{right-precond}}) = 1.00$
- نسبة عددي الشرط للتهيئة المسبقة من اليسار: 100.00
- نسبة عددي الشرط للتهيئة المسبقة من اليمين: 100.00

يرد كود MATLAB® المقابل في §L.5.5.

مصفوفة A بديلة

لاحظ أنه قد يرغب القارئ في استخدام الآتي مباشرةً في كود MATLAB®:

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 & 0.98 \\ 0.99 & 1.00 & 0.99 \\ 0.98 & 0.99 & 1.00 \end{bmatrix}$$

فينتج

- عدد شرط المصفوفة الأصلية: 4.465028e+02
- عدد الشرط بعد التهيئة المسبقة من اليسار: 1.000000e+00
- عدد الشرط بعد التهيئة المسبقة من اليمين: 1.000000e+00
- نسبة عددي الشرط (الأصلية / المهيأة من اليسار): 4.465028e+02
- نسبة عددي الشرط (الأصلية / المهيأة من اليمين): 4.465028e+02

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

M الاحتمالات والإحصاء

ملخص

يقدم هذا الفصل المفاهيم الأساسية في الاحتمالات والإحصاء، وهما من المجالات الجوهرية في الدراسة والتحليل. إذ تستند موضوعات متقدمة كثيرة ومعظم الأمثلة التطبيقية إلى المحاكاة الاحتمالية. يبدأ الفصل ببيان الفروق بين المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة، ثم يستعرض خصائص عدد من التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام. ويختتم بعرض مفهوم التوزيعات متعددة المتغيرات ودوال الاحتمال المشتركة، مع إبراز أهميتها في النمذجة والتحليل.

M.1 مقدمة في الاحتمالات والإحصاء 2835
M.2 المفاهيم الأساسية في الاحتمالات 2835
M.2.1 التحليل الحتمي مقابل التحليل الاحتمالي 2835
M.2.2 التعريف 2836
M.2.3 الاحتمال الشرطي 2837
M.2.4 أنواع المتغيرات العشوائية 2837
M.3 الأدوات الإحصائية للتحليل الاحتمالي 2838
M.3.1 دالة التوزيع التراكمي 2839
M.3.2 فترة الثقة 2840
M.4 المقاييس الإحصائية 2841
M.4.1 العزوم ومقاييس النزعة المركزية 2841
M.4.2 العلاقات بين المتغيرات 2843
M.5 التوزيعات 2844
M.5.1 التوزيعات أحادية المتغير 2844
M.5.2 التوزيعات ثنائية المتغير 2849

M.1 مقدمة في الاحتمالات والإحصاء

تشكل الاحتمالات والإحصاء أساس فهم عدم اليقين والتباين في مختلف مجالات العلوم والهندسة. ويعرض هذا الفصل المفاهيم اللازمة لنمذجة العشوائية وتحليل البيانات بفاعلية. وتتناول الأقسام الآتية المبادئ الأساسية والتوزيعات المهمة والمقاييس الإحصائية.

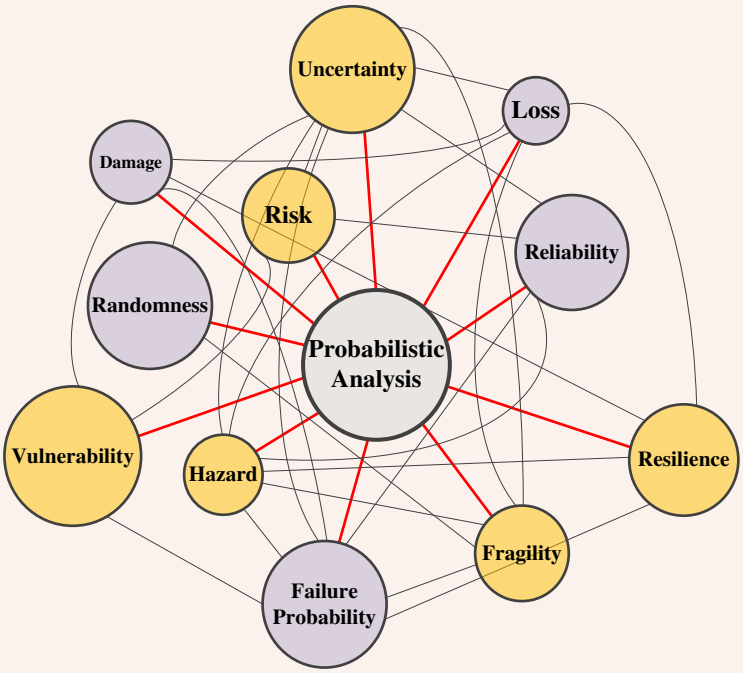
M.2 المفاهيم الأساسية في الاحتمالات

M.2.1 التحليل الحتمي مقابل التحليل الاحتمالي

جرت العادة على التعبير عن تقويم الكفاية الإنشائية بمعاملات الأمان $SF = \frac{C}{D}$، حيث تمثل C السعة (أي المقاومة)، وتمثل D الطلب (أي الحمل). وعلى الرغم من سهولة فهم هذا التقويم، فإنه يعاني قيوداً عديدة: فهو 1) يعامل جميع الأحمال على قدم المساواة؛ و2) لا يميز بين مقدار عدم اليقين في السعة ومقداره في الطلب؛ و3) يقتصر على أحمال الخدمة؛ و4) لا يتيح مقارنة الموثوقية النسبية لمنشآت مختلفة وتحت أنماط أداء مختلفة. ومن أوجه القصور المهمة أيضاً إسناد قيمة مفردة إلى كل معلمة في التحليل، فيغدو التحليل حتمياً.

أما المنهج الاحتمالي فهو في جوهره امتداد للمنهج الحتمي يأخذ أوجه عدم اليقين في الحسبان. وتشمل هذه، على سبيل المثال لا الحصر، عدم اليقين في الطلب والسعة ونوع التحليل وتفسير النتائج. وتسهم مفاهيم

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل M.1: ترابط المفاهيم الداخلة في التحليل الاحتمالي (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021)

مختلفة في التحليل الاحتمالي تبعاً لهدف المشروع والنتائج المتوقعة. وسيجري لاحقاً شرح هذه المعلمات المبينة تخطيطياً في الشكل M.1.

M.2.2 التعريف

احتمال الحدث A هو عدد يقع بين 0 و1.

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

الاحتمال واحد يخص حدثاً مؤكد الوقوع، أما الاحتمال صفر فيخص حدثاً يستحيل وقوعه.

المتغير العشوائي (RV) هو ناتج عملية طبيعية لا يمكن التنبؤ به على وجه اليقين. وتسمى مجموعة جميع النواتج الممكنة للمتغير العشوائي "فضاء العينة"، ويرمز إليها بـΩ.

$$P\{\Omega\} = 1$$

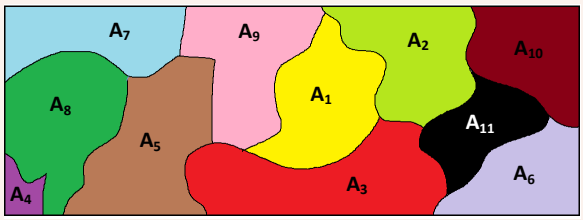
يكون المتغير العشوائي إما "نوعياً" وإما "كمياً" تبعاً لطبيعة القيم في فضاء العينة. فالمتغيرات العشوائية الكمية تعبر عن قيم مثل الكتلة ومقاومة الشد ومعامل المرونة، بينما تعبر المتغيرات العشوائية النوعية عن صفات أو فئات مثل الجنس والانتماء السكاني.

كلما ازداد عدد مرات تكرار التجربة، ازداد احتمال اقتراب التكرار النسبي لحدث معين من احتمال ذلك الحدث. وتعرف هذه النتيجة باسم "قانون الأعداد الكبيرة". فمثلاً، إذا ألقيت قطعة نقد مرات كثيرة، فإن نسبة مرات ظهور "الصورة" إلى العدد الكلي للرميات تقترب من 1/2 كلما ازداد عدد الرميات.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

لكل متتالية من الأحداث المتنافية A_1، وA_2، ...، كما في الشكل M.2، يكون:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}$$



شكل M.2: مفهوم فضاء العينة والأحداث المتنافية (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021)

M.2.3 الاحتمال الشرطي

يعرف الاحتمال الشرطي للحدث A عند تحقق B، ويرمز إليه بـ$P\{A|B\}$، كما يأتي:

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

تمثل $P\{A \cap B\}$ احتمال وقوع الحدثين معاً، ويعبر الكسر السابق عن احتمال وقوع A مع العلم بأن B قد وقع.

يكون الحدثان A وB "مستقلين" أحدهما عن الآخر إذا تحقق:

$$P\{A|B\} = P\{A\}$$

أو بصورة مكافئة:

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}.P\{B\}$$

وهذا يعني أن معرفة وقوع B لا تؤثر في احتمال وقوع A.

M.2.4 أنواع المتغيرات العشوائية

إذا كان X متغيراً عشوائياً (أي دالة معرفة على عناصر فضاء عينة) وله عدد منته من القيم الممكنة $x_i \in R_X$، حيث $i = 1,2,...$ وتمثل R_X مدى قيم المتغير العشوائي، فإنه يسمى "متغيراً عشوائياً متقطعاً".

إن احتمال أن يأخذ X القيمة المحددة x_i، أي $p(x_i) = P(X = x_i)$، هو عدد يحقق:

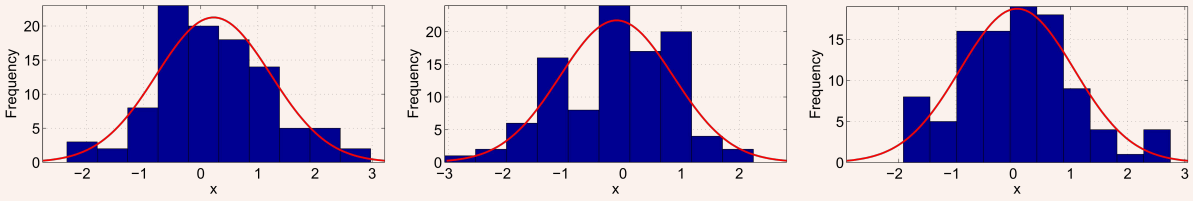
$$p(x_i) \geq 0$$

لكل $i = 1,2,...$، وكذلك:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

تسمى مجموعة الأزواج $(x_i; p(x_i))$، حيث $i = 1,2,...$، "التوزيع الاحتمالي" للمتغير X، وتسمى $p(x_i)$ "دالة الكتلة الاحتمالية" للمتغير X.

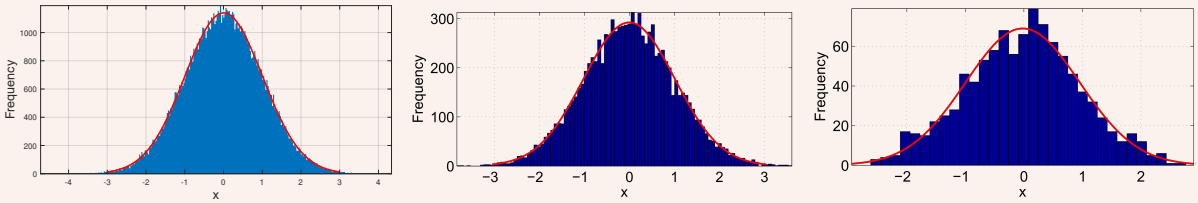
عندما يكون عدد العينات صغيراً، قد لا تعكس النتائج نموذج التوزيع الحقيقي بدقة. فعلى سبيل المثال، ولدت جميع المخططات في الشكل M.3 من 100 عينة عشوائية فقط، وتظهر بينها فروق واضحة.



a) 100 عينة، المحاولة الأولى b) 100 عينة، المحاولة الثانية c) 100 عينة، المحاولة الثالثة

شكل M.3: مقارنة المدرجات التكرارية الناتجة من ثلاث مجموعات، في كل منها 100 عينة

يسهم زيادة عدد العينات في تحسين تمثيل التوزيع. وتعتمد المخططات في الشكل M.4 على 1,000 و10,000 و100,000 عينة، على الترتيب.



a) 1,000 عينة b) 10,000 عينة c) 100,000 عينة

شكل M.4: مقارنة المدرجات التكرارية لعدد عينات يتراوح من 1,000 إلى 100,000

M.3 الأدوات الإحصائية للتحليل الاحتمالي

إذا كان R_X فترة بدلاً من مجموعة متقطعة، فإن X يسمى "متغيراً عشوائياً مستمراً". ويعطى احتمال أن يكون $X \in [a, b]$ بالعلاقة:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث تمثل $f(x)$ "دالة الكثافة الاحتمالية" (PDF) للمتغير X. ويتحقق دائماً:

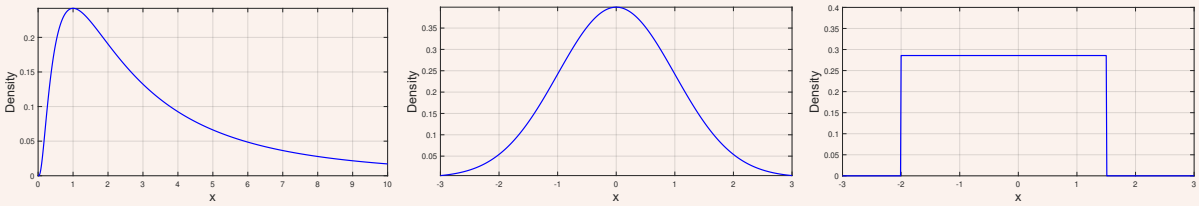
$$f(x) \geq 0$$

وكذلك:

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

وإذا كان $x \notin R_X$، فإن $f(x) = 0$.

يبين الشكل M.5 ثلاثة أمثلة لدوال كثافة احتمالية تخص ثلاثة أنواع مختلفة من الدوال المستمرة. وسيجري شرح هذه الدوال لاحقاً بالتفصيل.



(a) التوزيع المنتظم (b) التوزيع الطبيعي (c) التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

شكل M.5: أمثلة لثلاث دوال توزيع مستمرة

M.3.1 دالة التوزيع التراكمي

يعرف الاحتمال $P(X \leq x) = F(x)$، أي احتمال أن يكون $X \leq x$، باسم "دالة التوزيع التراكمي" (CDF)، ويعطى كما يأتي:

- للمتغير المتقطع عندما $X \leq x_n$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

- للمتغير المستمر عندما $X \leq x$:

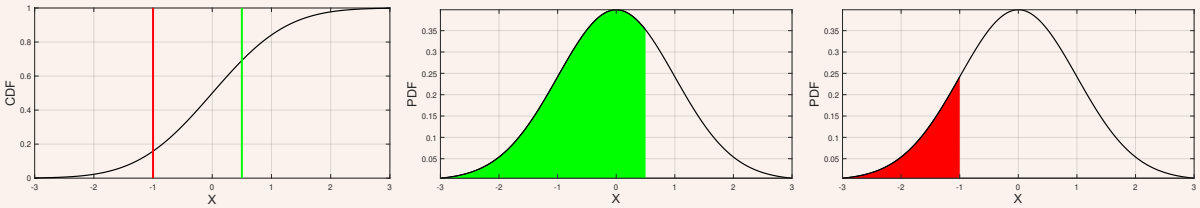
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau$$

يبين الشكل M.6 العلاقة بين دالتي الكثافة الاحتمالية والتوزيع التراكمي لتوزيع طبيعي.

يمكن تلخيص بعض الخصائص الأساسية لدالة التوزيع التراكمي كما يأتي:

- إذا كان $a < b$، فإن $F(a) < F(b)$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

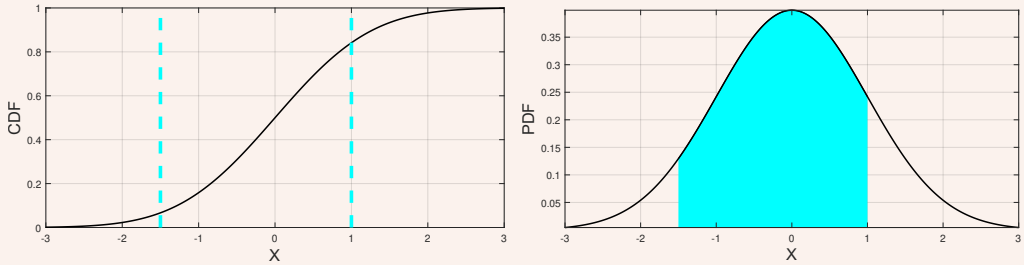


(a) دالة الكثافة؛ احتمال منخفض (b) دالة الكثافة؛ احتمال مرتفع (c) دالة التوزيع التراكمي المقابلة

شكل M.6: العلاقة بين دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي

- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $P\left(a \leq X \leq b\right) = F(b) - F(a)$

يبين الشكل M.7 العلاقة بين دالة كثافة احتمالية محدودة ودالة التوزيع التراكمي المقابلة لها.



(b) التوزيع الطبيعي (a) التوزيع المنتظم

شكل M.7: العلاقة بين دالة كثافة احتمالية محدودة ودالة التوزيع التراكمي

M.3.2 فترة الثقة

فترة الثقة هي مجال من القيم يرجح أن يحتوي معلمة المجتمع الحقيقية (مثل المتوسط أو النسبة) عند مستوى ثقة محدد. وهي تقيس مقدار عدم اليقين في تقدير مستخلص من عينة، كما في الشكل M.8.

لمتوسط مجتمع مقداره μ، تحسب فترة الثقة كما يأتي:

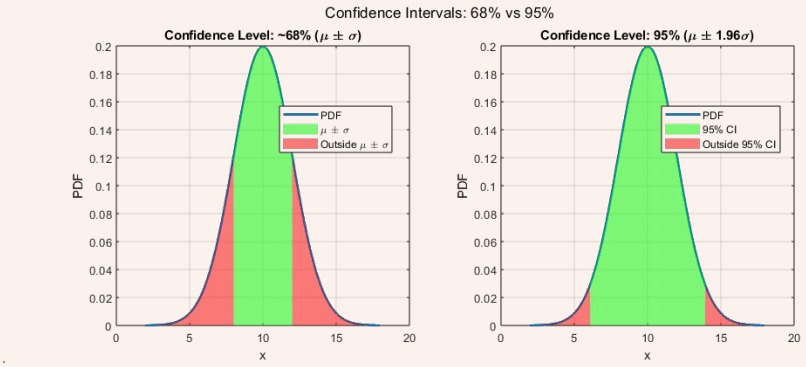
$$\text{CI} = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث: $\bar{x}$ متوسط العينة، وz القيمة الحرجة من التوزيع الطبيعي المعياري والمقابلة لمستوى الثقة (مثلاً $z = 1.96$ لثقة مقدارها 95%)، وσ الانحراف المعياري للمجتمع، وn حجم العينة.

إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهولاً، فيستخدم الانحراف المعياري للعينة s، ويطبق توزيع t:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل M.8: توضيح فترة الثقة

M.4 المقاييس الإحصائية

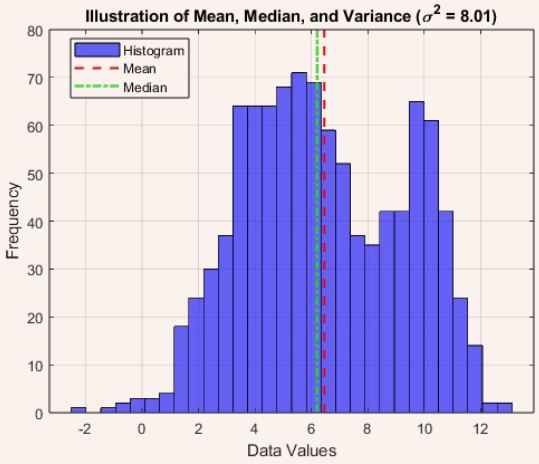
M.4.1 العزوم ومقاييس النزعة المركزية

العزوم مقاييس كمية تصف شكل التوزيع الاحتمالي وخصائصه. ويعبر كل عزم عن جوانب محددة من البيانات، مثل النزعة المركزية والتباين وعدم التماثل ودرجة التحدب. وفيما يأتي أكثر العزوم والمقاييس المرتبطة بها استخداماً:

العزم الأول: المتوسط المتوسط هو الوسط الحسابي للبيانات، ويمثل النزعة المركزية للتوزيع:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

يبين المتوسط الموضع الذي تتجمع حوله البيانات، ويستخدم عادة مقياساً للموقع، كما في الشكل M.9.



شكل M.9: توضيح المتوسط والوسيط

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الوسيط الوسيط هو القيمة التي تفصل النصف الأعلى من مجموعة البيانات عن نصفها الأدنى.

العزم الثاني: التباين يقيس التباين مقدار انتشار البيانات أو تشتتها حول المتوسط:

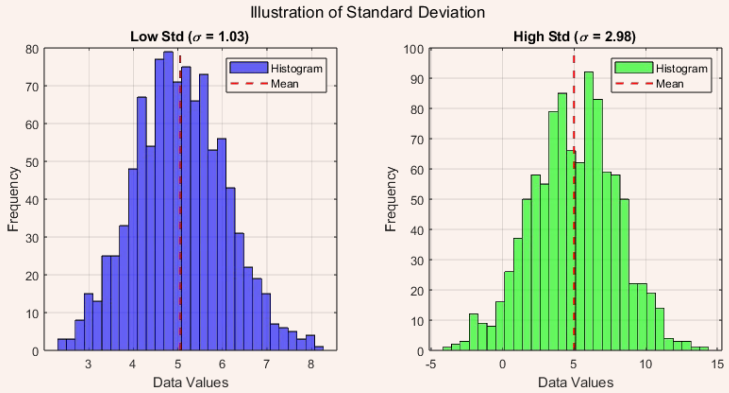
$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

وهو يوضح مدى تغير البيانات؛ إذ تشير القيم الأكبر للتباين إلى نقاط بيانات أشد تشتتاً.

الانحراف المعياري الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، ويعبر عنه بوحدات البيانات نفسها، كما في الشكل M.10:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

ويكثر استخدام الانحراف المعياري لأنه أسهل تفسيراً من التباين.



شكل M.10: توضيح الانحراف المعياري

معامل الاختلاف معامل الاختلاف (COV) هو نسبة الانحراف المعياري إلى المتوسط، ويقدم مقياساً معيارياً للتغير:

$$\text{COV} = \frac{\sigma}{\mu}$$

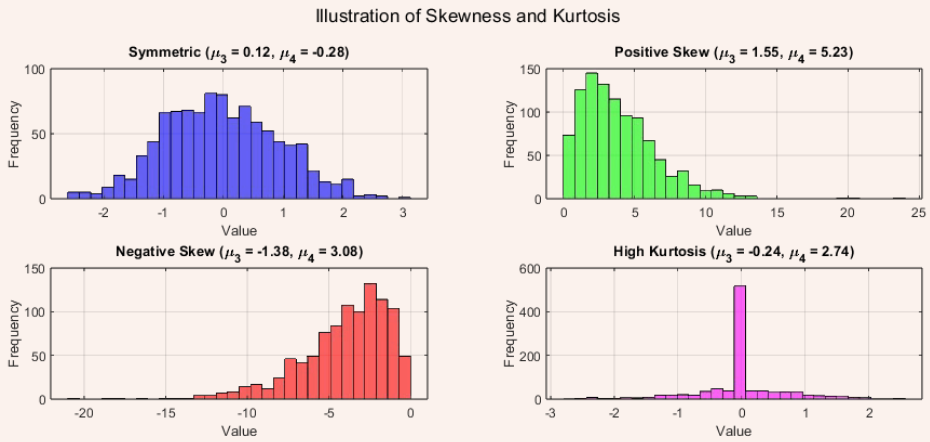
ويفيد معامل الاختلاف بوجه خاص في مقارنة التغير بين مجموعات بيانات تختلف في وحداتها أو مقاييسها.

العزم الثالث: الالتواء يقيس الالتواء عدم تماثل توزيع البيانات حول المتوسط:

$$\text{Skewness} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

يدل الالتواء الموجب على توزيع ذي ذيل أطول إلى اليمين، بينما يدل الالتواء السالب على ذيل أطول إلى اليسار، كما في الشكل M.11.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل M.11: توضيح الالتواء والتفرطح

العزم الرابع: التفرطح يصف التفرطح حدة قمة التوزيع أو تسطحه نسبة إلى التوزيع الطبيعي:

$$\text{Kurtosis} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^4 - 3$$

يدل التفرطح الموجب على قمة حادة وذيول ثقيلة، بينما يدل التفرطح السالب على توزيع أكثر تسطحاً.

M.4.2 العلاقات بين المتغيرات

التغاير يقيس التغاير الدرجة التي يتغير بها متغيران معاً:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$

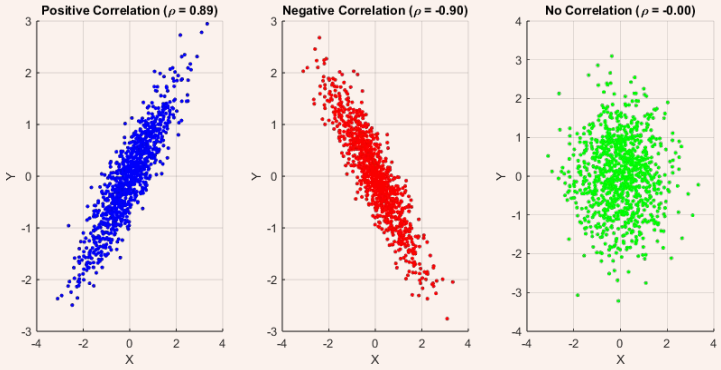
يدل التغاير الموجب على ميل المتغيرين إلى الزيادة أو النقصان معاً، بينما يدل التغاير السالب على علاقة عكسية.

معامل الارتباط: يمثل ρ_{xy} مقياساً لا بعدياً لدرجة الارتباط:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

يدل معامل ارتباط مقداره 1.0 أو -1.0 على ارتباط خطي تام، كما في الشكل M.12. وتدل القيمة الموجبة على ميل المتغيرين إلى الزيادة أو النقصان معاً، بينما تدل القيمة السالبة على ميل أحدهما إلى الزيادة عندما ينقص الآخر. أما القيمة الصفرية فتدل على انعدام الارتباط الخطي، لكنها لا تعني الاستقلال بوجه عام.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل M.12: توضيح معاملات الارتباط

M.5 التوزيعات

M.5.1 التوزيعات أحادية المتغير

في التحليل الاحتمالي، يمكن تمثيل كل معلمة غير يقينية بمتغير عشوائي ودالة الكثافة الاحتمالية المرتبطة به بالصيغة $X \sim f_X(x)$. ويعرض هذا القسم بعض نماذج التوزيع أحادية المتغير شائعة الاستخدام في الهندسة المدنية وخصائصها الرئيسة. وأهمها:

- التوزيع المنتظم
- التوزيع الغاوسي/الطبيعي
- التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي
- توزيع ويبل
- توزيع القيم القصوى (غامبل)

التوزيع المنتظم

تستخدم التوزيعات المنتظمة عادة لتمثيل المتغيرات العشوائية ذات العزوم المجهولة ومجال القيم المعلوم.

- الترميز: $X \sim \mathcal{U}(a,b)$
- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

- دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- المقاييس الإحصائية:

$$\begin{cases} \mu_X = \frac{a+b}{2} \\ \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{cases}$$

التوزيع الطبيعي

تستخدم التوزيعات الطبيعية على نطاق واسع في مجالات كثيرة من العلوم التطبيقية والهندسة لتمثيل أخطاء القياس وحدود الضجيج وغير ذلك.

- الترميز: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau$$

- المقاييس الإحصائية:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu \\ \sigma_X = \sigma \end{cases}$$

التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

تستخدم التوزيعات اللوغاريتمية الطبيعية على نطاق واسع في مجالات كثيرة من العلوم التطبيقية والهندسة لتمثيل المتغيرات الموجبة ذات الالتواء، ومن ذلك بعض أخطاء القياس ومعلمات المواد.

- الترميز: $X \sim \mathcal{LN}(\lambda, \zeta)$
- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp(-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2})$$

- دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\sqrt{2}\zeta}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)$$

حيث تسمى erf دالة الخطأ، وتمثل Φ دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي المعياري.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- المقاييس الإحصائية:

$$\begin{cases} \mu_X = e^{\lambda+\zeta^2/2} \\ \sigma_X = e^{\lambda+\zeta^2/2}\sqrt{e^{\zeta^2}-1} \end{cases}$$

حيث تمثل λ وζ متوسط اللوغاريتم الطبيعي للمتغير وانحرافه المعياري، على الترتيب.

توزيع ويبل

يستخدم هذا النموذج عادة لوصف متغيرات زمن الوصول إلى الفشل. ويمكن استخدامه أيضاً لتمثيل مقاومة المواد ومعلمات العمر التشغيلي للمواد الهشة.

- الترميز: $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$
- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{إذا كان } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x < 0 \end{cases}$$

- دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{إذا كان } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x < 0 \end{cases}$$

- المقاييس الإحصائية:

$$\begin{cases} \mu_X = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma_X = \alpha\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2} \end{cases}$$

توزيع غامبل

يستخدم توزيع غامبل (أو توزيع القيم القصوى المعمم من النوع I) لنمذجة توزيع القيمة العظمى (أو الصغرى) لعدد من العينات المأخوذة من توزيعات مختلفة.

- الترميز: $X \sim \mathcal{G}(\mu, \beta)$
- دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta} - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

- المقاييس الإحصائية:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu + \beta\gamma_e \\ \sigma_X = \frac{\pi\beta}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

حيث $\gamma_e = 0.577216...$ هو ثابت أويلر.

M.5.1.1 مقارنة

يوضح الشكل M.13 التوزيعات المختلفة ذات الخصائص الآتية:

وفيما يأتي وصف لخصائص التوزيعات المستخدمة في التحليل المقارن، بما يشمل دوال الكثافة الاحتمالية (PDFs)، ودوال التوزيع التراكمي (CDFs)، والقيم العددية المعتمدة لكل منها.

التوزيع المنتظم

- **دالة الكثافة الاحتمالية:** منحنى ثابت بين a وb، مما يدل على تساوي احتمال جميع القيم ضمن المجال.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{لـ} a \le x \le b$$

- **دالة التوزيع التراكمي:** تزداد خطياً من a إلى b، بدءاً من 0 وانتهاء عند 1.
- **المعلمات الأساسية:**
  - $a = 0$: الحد الأدنى.
  - $b = 1$: الحد الأعلى.
- **الخصائص:** متماثل وثابت الكثافة، بلا التواء أو تفرطح زائد.

التوزيع الطبيعي

- **دالة الكثافة الاحتمالية:** منحنى جرسي الشكل متماثل حول المتوسط μ:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **دالة التوزيع التراكمي:** منحنى على هيئة S يبدأ من 0 ويقترب تقارباً حدياً من 1.
- **المعلمات الأساسية:**
  - $\mu = 0$: المتوسط (موضع القمة).
  - $\sigma = 1$: الانحراف المعياري (يتحكم في الانتشار).
- **الخصائص:** متماثل وأحادي المنوال، بلا التواء وبتفرطح زائد يساوي صفراً (متوسط التفرطح).

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

- **دالة الكثافة الاحتمالية:** منحنى موجب الالتواء يبدأ عند 0:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{لـ} x > 0$$

- **دالة التوزيع التراكمي:** منحنى على هيئة S يبدأ عند 0 ويقترب تقارباً حدياً من 1.
- **المعلمات الأساسية:**
  - $\mu = 0$: متوسط لوغاريتم المتغير.
  - $\sigma = 0.25$: الانحراف المعياري للوغاريتم المتغير.
- **الخصائص:** ملتوي إلى اليمين، ويتوقف تفرطحه على σ.

توزيع ويبل

- **دالة الكثافة الاحتمالية:** تتغير بتغير معلمة الشكل k:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad \text{لـ} x \geq 0$$

- **دالة التوزيع التراكمي:** منحنى على هيئة S عندما $k > 1$، يبدأ عند 0 ويقترب تقارباً حدياً من 1.
- **المعلمات الأساسية:**
  - $k = 1.5$: معلمة الشكل.
  - $\lambda = 1$: معلمة القياس.
- **الخصائص:** توزيع مرن يمكنه نمذجة معدلات فشل متزايدة أو متناقصة أو ثابتة.

توزيع غامبل

- **دالة الكثافة الاحتمالية:** ملتوية إلى اليمين، ومنوالها قريب من μ:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

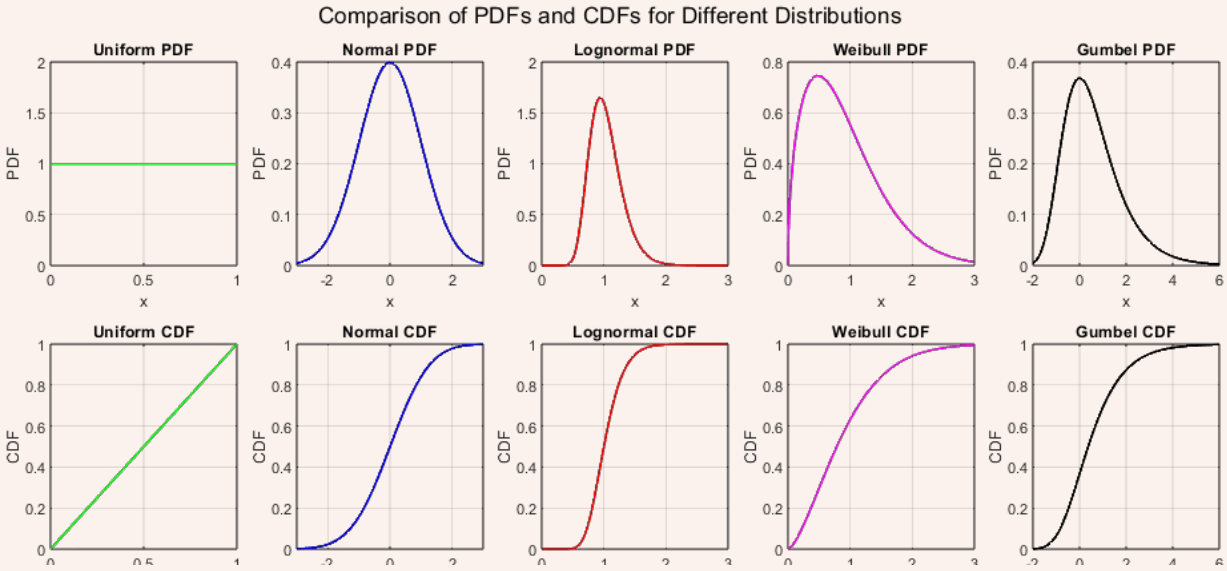
- **دالة التوزيع التراكمي:** منحنى غير متماثل على هيئة S، يبدأ عند 0 ويقترب تقارباً حدياً من 1.
- **المعلمات الأساسية:**
  - $\mu = 0$: معلمة الموقع (موضع القمة).

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

– $\beta = 1$: معلمة القياس (تتحكم في الانتشار).

- **الخصائص:** ملتوي إلى اليمين، ويستخدم لنمذجة القيم القصوى (مثل أكبر هطول مطري).

يقدم هذا الوصف المفصل عرضاً شاملاً للتوزيعات والقيم العددية المعتمدة لمعلماتها في التحليل.



شكل M.13: مقارنة بين دوال التوزيع الاحتمالية (والتراكمية) المختلفة

M.5.2 التوزيعات ثنائية المتغير

يصف التوزيع ثنائي المتغير السلوك المشترك لمتغيرين عشوائيين، X وY. وهو يحدد الاحتمالات المرتبطة بجميع أزواج النواتج الممكنة (x, y). وتستخدم هذه التوزيعات لفهم العلاقات والاعتماد والارتباط بين متغيرين.

إذا كان X وY متغيرين عشوائيين مستمرين، فإن دالة التوزيع التراكمي المشتركة ثنائية المتغير تعطى كما يأتي:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

وتعرف الكثافة المشتركة بالعلاقة:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

أو:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم فإن احتمال أن يكون $(X, Y) \in A$ هو:

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير

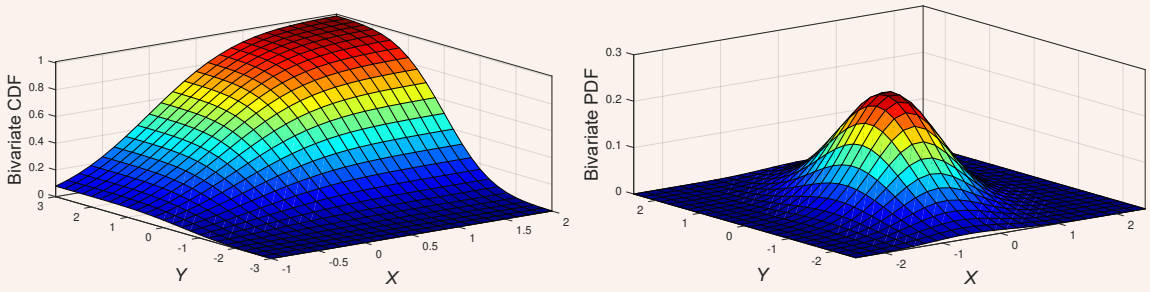
في الحالة ثنائية البعد ($k = 2$)، تعرف دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للتوزيع الطبيعي ثنائي المتغير كما يأتي:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp$$
$$\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

حيث:

- μ_X وμ_Y هما متوسطا X وY، على الترتيب، ويحددان الموقع المركزي لكل متغير.
- $\sigma_X > 0$ و$\sigma_Y > 0$ هما الانحرافان المعياريان لـX وY، على الترتيب، ويمثلان انتشار بيانات كل متغير أو تشتتها.
- ρ هو معامل الارتباط بين X وY، ويقيس شدة العلاقة الخطية بين المتغيرين واتجاهها. ويقع ضمن المجال $-1 \leq \rho \leq 1$.

يبين الشكل M.14 مثالاً لدالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع طبيعي ثنائي المتغير، حيث $\mu_X = \mu_Y = 0.0$ و$\sigma_X = 0.707$ و$\sigma_Y = 1.000$.

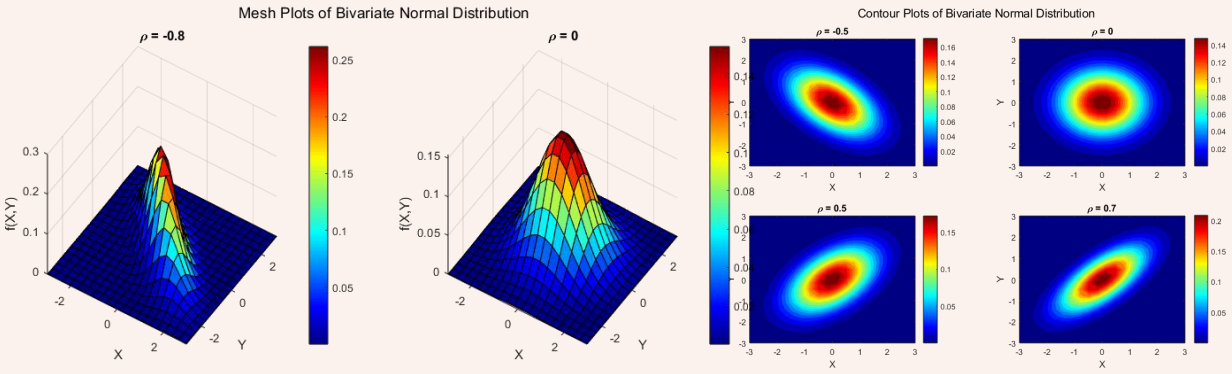


(a) دالة الكثافة ثنائية المتغير (b) دالة التوزيع التراكمي ثنائية المتغير

شكل M.14: التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير

يبين الشكل M.15 أثر معامل الارتباط ρ في التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



(b) (a)

شكل M.15: أثر معامل الارتباط ρ في التوزيع الطبيعي ثنائي المتغير

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

N مؤشر الموثوقية

ملخص

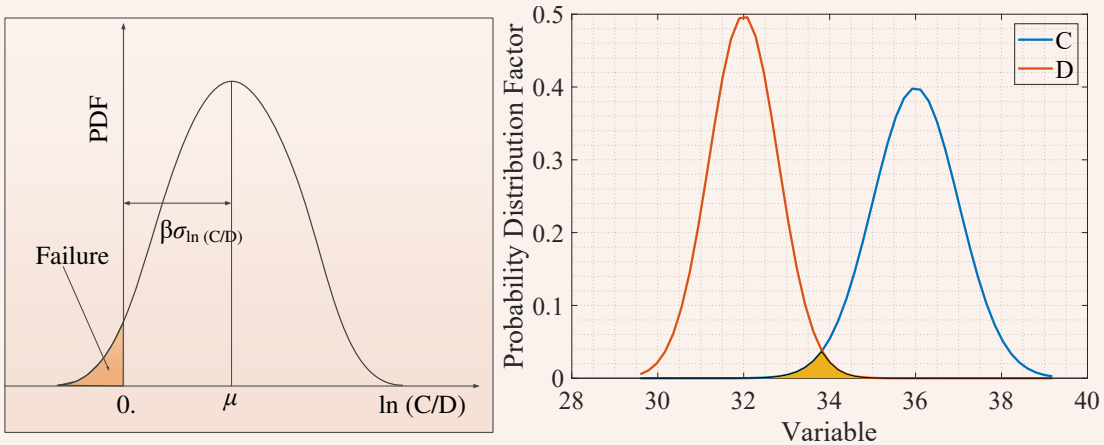
يقدم هذا الملحق مؤشر الموثوقية مقياسا كميا للسلامة الإنشائية واحتمال الفشل. وباعتبار كل من المقاومة والطلب الإنشائيين متغيرين عشوائيين، يتبعان عادة توزيعا طبيعيا أو لوغاريتميا طبيعيا، يقيس المؤشر هامش السلامة بوصفه الفرق بين متوسطي المقاومة والطلب مقسوما على الانحراف المعياري المشترك. ويطور الملحق الطريقتين الحسابية واللوغاريتمية، ويربط المؤشر باحتمالات الفشل المستهدفة ومعاملات الأمان التصميمية. ويدعم هذا الإطار قرارات التصميم الاحتمالي والتقييم المستنير بالمخاطر في الهندسة القائمة على الأداء.

الجزء الخامس: النظرية المتقدمة والتحسين الأمثل

1 مؤشر الموثوقية مقياس كمي لسلامة منشأ أو نظام أو مكون وموثوقيته. ويستخدم عادة لتقييم احتمال الفشل أو الانهيار تحت أحمال أو ظروف بيئية مختلفة.

2 يحسب المؤشر انطلاقا من احتمال الفشل وهامش السلامة أو معامل الأمان. ويعبر عنه بقيمة عددية؛ فالقيمة الأعلى تعني احتمالا أقل للفشل، والعكس بالعكس.

3 يحدد المؤشر من الفرق بين المقاومة (C) والطلب (D)، وكلاهما متغير عشوائي يفترض عادة أنه طبيعي، وإن كان التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي أنسب أحيانا. ولأن مجال التوزيع الطبيعي هو $[-\infty, \infty]$، يبقى احتمال الفشل غير صفري دائما، كما في الشكل N.1a.



(b) تعريف مؤشر الموثوقية

(a) توزيعا احتمال الطلب والمقاومة

شكل N.1: تعريف مؤشر الموثوقية

4 توجد طريقتان لتحديد β بحسب كيفية حساب هامش السلامة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حسابيا

$$\begin{aligned} M &= C - D \\ \mu_M &= \mu_C - \mu_D \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\ \beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} \\ &= \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}} \end{aligned}$$

لوغاريتميا

$$\begin{aligned} M &= \ln C - \ln D \\ \mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\ \sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\ \beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \\ &= \frac{\ln \mu_C / \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \end{aligned}$$

5 يعرف مؤشر الموثوقية β هندسيا في الشكل N.1b.

6 يساوي احتمال الفشل P_f نسبة المساحة المظللة في الشكل N.1b إلى المساحة الكلية تحت المنحنى، ويعطى بـ$\Phi(-\beta)$، حيث Φ دالة الاحتمال التراكمي الطبيعي المعياري:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{N.1}$$

7 تبين العلاقة بين مؤشر الموثوقية واحتمال الفشل في الشكل N.2. وتختار β بما يعكس عواقب الفشل، كما في الجدول N.1.

8 يمكن استعمال مؤشرات موثوقية مكونات متعددة أو أنماط أداء متعددة لتقدير موثوقية المنشأ أو النظام ككل. ويمكن تصور حالتين حديتين:

نظام على التوالي: يكون أداء النظام غير مرض إذا أخفق أي مكون. فإذا احتوى n مكونات متصلة على التوالي، وكان احتمال الأداء غير المرضي للمكون i هو p_i وموثوقيته $R_i = 1 - p_i$، فإن موثوقية النظام، أي احتمال أداء جميع المكونات أداء مرضيا، هي

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n).$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول N.1: قيم مختارة للمنشآت الفولاذية والخرسانية

β	نوع الحمل أو العنصر
AISC	
3.0	DL + LL; العناصر
4.5	DL + LL; الوصلات
3.5	DL + LL + WL; العناصر
1.75	DL + LL + EL; العناصر
ACI	
3.5-3	فشل مطيل
4-3.5	فشل هش

نظام على التوازي: لا يكون أداء النظام غير مرض إلا إذا أخفقت جميع المكونات، ومن ثم تكون موثوقيته

$$R = 1 - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n. \tag{N.2}$$

9 مؤشرات الموثوقية مقاييس نسبية للحالة الراهنة، وتقدم تقديرا نوعيا للأداء الإنشائي. ويتوقع أن تؤدي المنشآت ذات القيم المرتفعة أداء جيدا، أما إذا انخفضت القيمة كثيرا فقد يصنف المنشأ خطرا. يبين الجدول N.2 قيما مستهدفة لـβ، ويوضحها الشكل N.2.

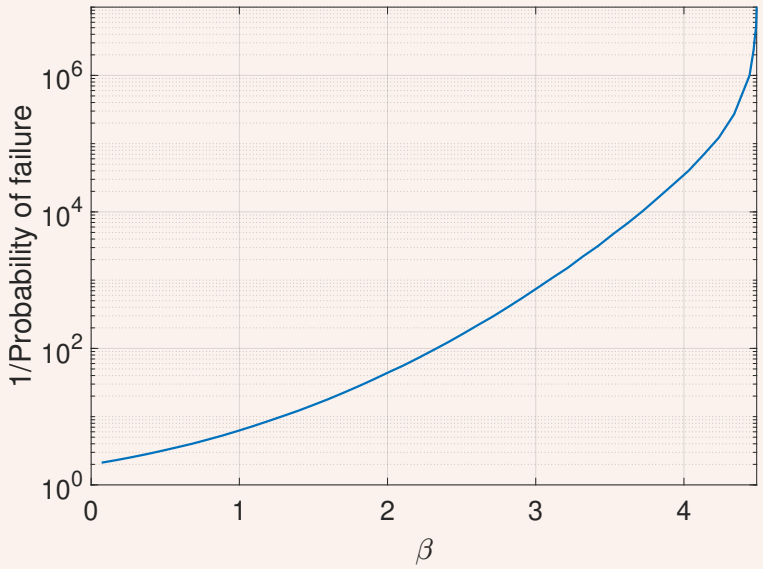
جدول N.2: موثوقية المنشآت الفولاذية والخرسانية

احتمال الفشل	β	الأداء المتوقع
3/10 million	5	مرتفع
3/100,000	4	جيد
1/1,000	3	فوق المتوسط
6/1,000	2.5	دون المتوسط
2.3/100	2.0	ضعيف
7/100	1.5	غير مرض
16/100	1.0	خطر

مثال N.1: مؤشر الموثوقية

لكمرة بسيطة الارتكاز بطول $L = 480$ in، ومعامل مقطع $S = 150$ in^3، وإجهاد خضوع متوسطه $\mu_{f_y} = 36$ ksi وانحرافه المعياري $\sigma_{f_y} = 1$ ksi، معرضة لحمل مركز متوسطه $\mu_P = 40$ kips وانحرافه المعياري $\sigma_P = 1$ kips:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



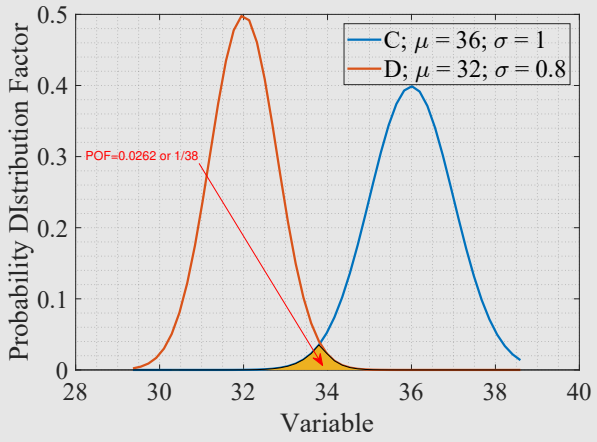
شكل N.2: احتمال الفشل بدلالة مؤشر الموثوقية β

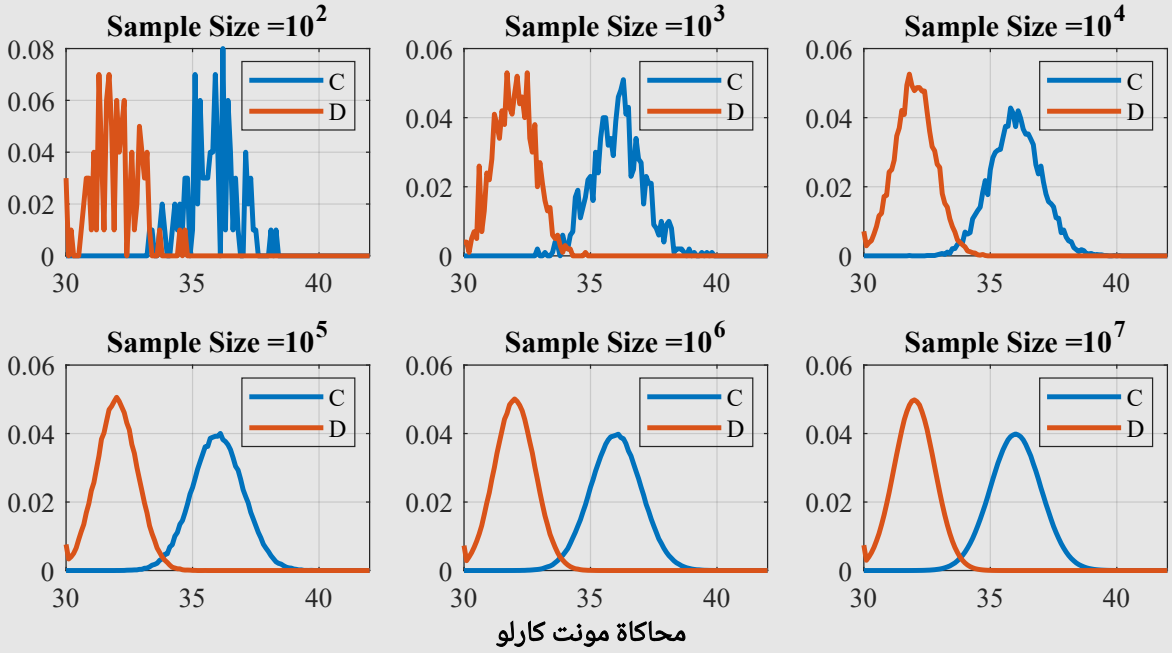
1. حدد مؤشر الموثوقية بالطريقتين.
2. كرر الدراسة بمحاكاة مونت كارلو.

```
clear;clc; close all;
fs=16;font='Times New Roman';opengl software;
L = 480; S = 150;
Mu_C = 36; SD_C = 1;
Mu_D = 40; SD_D = 1;
Mu_D = Mu_D*L/4/S;
SD_D = SD_D*L/4/S;
sd=SD_D;md=Mu_D;sc=SD_C;mc=Mu_C;
RI_I = (Mu_C-Mu_D)/sqrt(SD_C^2+SD_D^2);
POF_I = 0.5*(1 + erf(-RI_I/sqrt(2)));
V_C = (SD_C/Mu_C); V_D = (SD_D/Mu_D);
RI_II = log(Mu_C/Mu_D)/sqrt(V_C^2+V_D^2);
POF_II = 0.5*(1 + erf(-RI_II/sqrt(2)));
fprintf('Approach    beta    1/POF \n');
fprintf('I           %5.2f   %4.0f \n',RI_I,1/POF_I);
fprintf('II          %5.2f   %4.0f \n\n',RI_II,1/POF_II);
pd_C = makedist('Normal','mu',Mu_C,'sigma',SD_C);
pd_D = makedist('Normal','mu',Mu_D,'sigma',SD_D);
for p = 2:7
 subplot(2,3,p-1)
 SampleSize = 10^p; x(p-1)=SampleSize;
 CC = icdf(pd_C,rand(SampleSize,1));
 DD = icdf(pd_D,rand(SampleSize,1));
 N = sum(DD>CC);
 POF_MonteCarlo(p-1) = N/SampleSize;
```

```
 bin=(30 : 0.1 : 42);
 plot(bin,hist(CC,bin)/SampleSize,bin,hist(DD,bin)/SampleSize,'
    LineWidth',2);
 xlim([30 42]); grid
 lgnd=legend('C','D'); set(lgnd,'Color','none')
 label=['Sample Size =10^' int2str(p)]; title(label);
 set(gca,'FontName',font,'color','none','fontsize',fs/2);
 l=sprintf('%3.0f  %5.2e',p,POF_MonteCarlo(p-1)); disp(l);
end
```

Approach	β	POF/1
I	3.12	1,119
II	3.15	1,232





محاكاة مونت كارلو

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

O مدخل إلى ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه

ملخص

الميكانيكا هي نقطة البداية. فهي متجذرة في الرياضيات، وتوفر أساسًا متينًا للفصول اللاحقة عن الطرائق التغايرية والاشتقاقات المرتبطة بها. وهذه المراجعة أشمل بكثير مما يلزم فعليًا[1]*، ولذلك قد تكون فائدتها محدودة لمعظم قراء هذا الكتاب.*

غير أنني أعتقد اعتقادًا راسخًا أن إتقان الهندسة الإنشائية يتطلب معرفة متينة بميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه (وتعرف أيضًا بميكانيكا الأجسام الصلبة)، تمامًا كما ينبغي للمعماري الجيد أن يكون متمكنًا من الهندسة الإنشائية.

O.1 مقدمة 2857
O.1.1 الترميز 2857
O.1.2 الموترات 2860
O.1.3 التفسير الفيزيائي لثوابت الإجهاد 2865
O.2 الحقول المتجهة؛ ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه 2866
O.2.1 القوى 2866
O.2.2 موتر إجهاد كوشي 2867
O.2.3 علم الحركة 2870
O.3 القوانين الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة 2873
O.3.1 قوانين الحفظ 2873
O.3.2 التدفقات 2874
O.3.3 حفظ الكتلة؛ معادلة الاستمرارية 2875
O.3.4 حفظ كمية الحركة؛ معادلة الحركة2875
O.3.5 حفظ الطاقة؛ المبدأ الأول للديناميكا الحرارية 2878
O.4 المعادلات التأسيسية 2879
O.4.1 الحالة العامة ثلاثية الأبعاد (3D) 2880
O.4.2 حالة تساوي الخواص المستعرض 2881
O.4.3 حالات خاصة ثنائية الأبعاد (2D) 2882
O.5 ملاحظات ظاهرية 2883
O.5.1 اختبارات التحكم في الحمل والإزاحة والانفعال 2883
O.5.2 استجابة الفولاذ والخرسانة قبل الذروة وبعدها 2884
O.6 تمركز التشوه 2885
O.6.1 الدليل التجريبي 2885
O.7 الشروط الحدية 2888
O.8 مخطط تونتي 2889
O.9 مفهوم القوة الداخلية 2889

O.1 مقدمة

1 تتطلب دراسة التحليل الإنشائي المتقدم للبنية التحتية أساسًا راسخًا في مبادئ الميكانيكا والعناصر المحددة. ويهدف هذا الفصل إلى تقديم مراجعة موجزة لهذه المبادئ.

2 يبدأ النهج المتبع بصياغة دقيقة وفق منظور *ميكانيكا الأوساط المتصلة* باستعمال الترميز الموترِي، ثم يتوسع في العرض باستخدام نظام الإحداثيات الديكارتية الأكثر شيوعًا.

O.1.1 الترميز

3 بافتراض فهم مفهوم الموتر (المعرّف أدناه)، يمكن أن يتخذ الترميز في الهندسة والميكانيكا صورًا مختلفة، كما يبين الجدول O.1.

[1] صادف أن هذا الفصل كُتب سابقًا لمنشور آخر (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021)، ثم قررت الإبقاء عليه كاملًا مع تغييرات طفيفة فقط.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول O.1: أنظمة الترميز

		$[A]$	A_{ij}	$\mathbf{A}$	
مصفوفة	✓	X	✓	$[x]\,[A]\,\{x\}$ $\mathbf{x.A.x}$	
موتر	X	✓	✓	$x_i A_{ij} x_j$ $\mathbf{x.A.x}$	

الهندسي/فويغت (تيموشينكو) تكتب الموترات المتناظرة من الرتبة الثانية غالبًا في صورة مصفوفات عمودية. ويسمى هذا التحويل، وكذلك تحويل الموترات الأعلى رتبة إلى مصفوفات عمودية، ترميز فويغت . وتعتمد قاعدة فويغت على كون الموتر كمية حركية (مثل الإجهاد) أو كمية كينماتيكية (مثل الانفعال).

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

المصفوفات: في العناصر المحددة: $[A]$ و$[\sigma]$ و$\{F\}$، ويمكن ربطها بسهولة بالمصفوفات العددية في الحسابات.

الموترات: في الميكانيكا الديكارتية: F_x وσ_{ij} وC_{ijkl}، وكذلك $\mathbf{F}$ و$\boldsymbol{\sigma}$ و$\mathbf{C}$. لا تظهر الأدلة في الترميز الموترِي. وبينما لا تنطبق المعادلات الدليلية الديكارتية إلا على الإحداثيات الديكارتية، فإن عبارات الترميز الموترِي مستقلة عن نظام الإحداثيات، وتنطبق على الأنظمة الأسطوانية والمنحنية وغيرها. وفي الترميز الدليلي نشير إلى الموترات من الرتبة الأولى فما فوق بحروف عريضة. ويوصى عادةً باستعمال الحروف الصغيرة لموترات الرتبة الأولى والحروف الكبيرة لموترات الرتبة الثانية فما فوق. ونميز بين الترميز الموترِي وترميز المصفوفات باستعمال النقاط والنقطتين بين الحدود، كما في $\mathbf{a.b} \equiv a_i b_i$ (تشير النقطة إلى تقلص زوج من الأدلة المتكررة التي تظهر بالترتيب نفسه)، و$\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{ij} B_{ij}$. كذلك تكافئ العبارة $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$.

4 سأشرح بإيجاز في الأقسام التالية النوع الأخير (الموترِي/الدليلي) ومع أن الترميز الهندسي قد يكون الأبسط والأوضح، فإنه يؤدي غالبًا إلى معادلات طويلة ومتكررة. أما الترميز الموترِي فيعطي صيغًا أقصر وأكثر إحكامًا.

5 أثناء عمل أينشتاين على النسبية العامة، وجد كتابة رمز الجمع وحدّي الجمع أسفله وأعلاه (مثل $\sum_{i=1}^{n=3} a_{ij} b_i$) أمرًا متكررًا. ولاحظ أن الحد الأعلى (n) يساوي غالبًا بُعد الفضاء (3 لنا و4 له)، وأن جمع حاصل ضرب حدين يجري على دليل متكرر (i في مثالنا). لذلك لا حاجة إلى كتابة علامة الجمع $\sum$ عند وجود أدلة متكررة (i). ويُسمى كل دليل متكرر دليلًا صوريًا ويُجمع على المجال من 1 إلى 3. أما الدليل غير

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المتكرر فيسمى دليلًا حرًا ويفترض أن يأخذ قيمة من 1 إلى 3. ولذلك يسمى هذا الترميز الدليلي أيضًا ترميز أينشتاين . وتعرّفه القواعد الآتية:

1. إذا ظهر دليل حرفي واحد، امتدت قيمته من i إلى n (مجال الموتر). فمثلاً:

$$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \qquad i = 1, 2, 3$$

بافتراض أن $n = 3$.

2. يأخذ الدليل المتكرر (أو الصوري) جميع قيم مجاله، وتجمع الموترات الناتجة. فمثلاً:

$$a_{1i} x_i = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

3. رتبة الموتر:

- للموتر من الرتبة الأولى (مثل القوة) دليل حر واحد فقط:

$$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor$$

ومن أمثلة موترات الرتبة الأولى الأخرى $a_{ij} b_j$ وF_{ikk} و$\varepsilon_{ijk} u_j v_k$.

- للموتر من الرتبة الثانية (ويسمى أيضًا ثنائيًا) دليلان حران.

$$D_{ij} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array} \right]$$

ومن أمثلته الأخرى A_{ijip} و$\delta_{ij} u_k v_k$.

- للموتر من الرتبة الرابعة (مثل ثوابت المرونة) أربعة أدلة حرة.

4. تكتب مشتقة الموتر بالنسبة إلى x_i بالصيغة $,i$. فمثلاً:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_{,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k} = T_{i,j,k};$$

6 تكمن فائدة الترميز الدليلي في عرض منظومات المعادلات بصورة موجزة. فمثلاً:

$$x_i = c_{ij} z_j \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + c_{13} z_3 \\ x_2 & = & c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3 \\ x_3 & = & c_{31} z_1 + c_{32} z_2 + c_{33} z_3 \end{array} \right.$$

وبالمثل:

$$A_{ij} = B_{ip} C_{jq} D_{pq}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} \\
A_{12} &= B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22} \\
A_{21} &= B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22} \\
A_{22} &= B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}
\end{aligned}$$

7 باستخدام الترميز الدليلي يمكن إعادة كتابة تعريف الضرب النقطي

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O.1.2 الموترات

8 نعمم مفهوم المتجه بإدخال الموتر $(\mathbf{T})$، الذي يعمل *أساسًا* على *المتجهات* $\mathbf{v}$ لإنتاج متجهات *أخرى* (أو على الموترات لإنتاج موترات أخرى). ونرمز إلى هذه العملية بـ$\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ أو اختصارًا $\mathbf{Tv}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \quad \text{أو} u_i = T_{ij}v_j \\
\mathbf{u} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{S} \quad \text{حيث} \mathbf{S} = \mathbf{T}^T
\end{aligned}$$

ومع أن الموتر مؤثر في المتجهات (أو في موترات أخرى) في جوهره، فهو أيضًا كمية فيزيائية مستقلة عن أي نظام إحداثيات بعينه، وإن كان التعبير عنه أكثر ملاءمة بالرجوع إلى نظام إحداثيات مناسب.

9 تظهر الموترات كثيرًا بوصفها كيانات فيزيائية تمثل مركباتها معاملات علاقة خطية بين المتجهات. ويصنف الموتر بحسب رتبته. فموتر الرتبة صفر تحدده مركبة واحدة في أي نظام إحداثيات، ومن ثم فهو كمية قياسية. ولموتر الرتبة الأولى ثلاث مركبات إحداثية في الفضاء، ومن ثم فهو متجه. وبوجه عام، يبلغ عدد مركبات موتر رتبته n في فضاء ثلاثي الأبعاد $(3\mathrm{D})$ 3^n. والقوة والإجهاد موتران من الرتبتين 1 و2 على الترتيب.

10 تسمى موترات الرتبة الثانية أيضًا *موترات ثنائية*، وهي شائعة جدًا في الميكانيكا (مثل الإجهاد والانفعال والعطالة).

O.1.2.1 العمليات

11 يعرف مجموع موترين (يجب أن يكونا من الرتبة نفسها) ببساطة كما يأتي:

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{U}_{ij}$$

ويعرف ضرب موتر (من الرتبة الثانية) في كمية قياسية كما يأتي:

$$\mathbf{S}_{ij} = \lambda\mathbf{T}_{ij}$$

12 الضرب الخارجي لموترين هو موتر تتكون مركباته بضرب كل مركبة من أحد الموترين في كل مركبة من الآخر. وينتج موتر رتبته مساوية لمجموع رتبتي الموترين المضروبين.

$$\begin{aligned}
a_i b_j &= T_{ij} \\
v_i F_{jk} &= b_{ijk} \\
D_{ij} T_{km} &= \phi_{ijkm}
\end{aligned}$$

أو $\left\{\ \right\}_{n\times 1}$ $\lfloor\ \ \rfloor_{1\times m} = \left[\ \ \right]_{n\times m}$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

13 الضرب الداخلي لموترين: تقلص دليل واحد من كل موتر

$$\begin{array}{rcll} a_i b_i & & & \\ a_i E_{ik} & = & f_k & \text{أو} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} \left[\quad \right]_{m x n} = \lfloor \quad \rfloor_{1 x n} \\ E_{ij} F_{jm} & = & G_{im} & \text{أو} \left[\quad \right]_{n\times p} \left[\quad \right]_{p\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \end{array}$$

14 يمكن تعريف الضرب الاتجاهي كما يأتي

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{pqr} a_q b_r \mathbf{e}_p = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

في المعادلة الثانية دليل حر واحد p، ومن ثم توجد ثلاث معادلات، ودليلان متكرران (صوريان) q وr، ولذلك تضم كل معادلة تسعة حدود. ويسمى ε_{pqr} رمز التبديل ويعرف كما يأتي

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت قيم } i,j,k \text{ تبديلًا زوجيًا لـ } 1,2,3 \\ & \text{(أي إذا ظهرت بالترتيب } 1\ 2\ 3\ 1\ 2) \\ -1 & \text{إذا كانت قيم } i,j,k \text{ تبديلًا فرديًا لـ } 1,2,3 \\ & \text{(أي إذا ظهرت بالترتيب } 3\ 2\ 1\ 3\ 2) \\ 0 & \text{إذا لم تكن قيم } i,j,k \text{ تبديلًا لـ } 1,2,3 \\ & \text{(أي إذا تساوت قيمة دليلين أو أكثر)} \end{cases}$$

يعرف الضرب القياسي لموترين كما يأتي

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = T_{ij} U_{ij}$$

في أي نظام متعامد. وتتحقق بديهيات الضرب الداخلي الآتية:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T} : \mathbf{U} & = & \mathbf{U} : \mathbf{T} \\ \mathbf{T} : (\mathbf{U} + \mathbf{V}) & = & \mathbf{T} : \mathbf{U} + \mathbf{T} : \mathbf{V} \\ \alpha(\mathbf{T} : \mathbf{U}) & = & (\alpha\mathbf{T}) : \mathbf{U} = \mathbf{T} : (\alpha\mathbf{U}) \\ \mathbf{T} : \mathbf{T} & > & 0 \text{ إلا إذا } \mathbf{T} = \mathbf{0} \end{array}$$

O.1.2.2 دوران المحاور

15 لنعتبر مجموعتين مختلفتين من محاور الإحداثيات الديكارتية المتعامدة $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ و$\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$. يمكن التعبير عن أي متجه $\mathbf{v}$ في أي من النظامين

$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = \bar{v}_j \bar{\mathbf{e}}_j$$

ولتحديد العلاقة بين مجموعتي المركبات، نأخذ الضرب النقطي للمتجه $\mathbf{v}$ في أحد متجهات الأساس

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{v} = \bar{v}_i = v_j (\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم يمكن تعريف القيم القياسية التسع

$$a_i^j \equiv \overline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\overline{x}_i, x_j)$$

وهي جيوب تمام الاتجاه بين الأزواج التسعة لمتجهات الأساس. ويحوّل التحويل المتغاير الموتر من أساس إلى آخر:

$$\overline{v}_j = a_j^p v_p$$

لاحظ أن الدليل الحر في المعادلتين الأولى والثانية يظهر علويًا وسفليًا، على الترتيب.

16 لنعتبر تحويل المتجه $\mathbf{V}$ من نظام الإحداثيات $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ إلى $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$، الشكل O.1a. ومن المعادلة O.1

$$V_j = a_j^p \overline{V}_p \quad \text{أو} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} V_1 &=& a_1^1 \overline{V}_1 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_1^3 \overline{V}_3 \\ V_2 &=& a_2^1 \overline{V}_2 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_2^3 \overline{V}_3 \\ V_3 &=& a_3^1 \overline{V}_3 + a_1^2 \overline{V}_2 + a_3^3 \overline{V}_3 \end{array} \right.$$

أو،

$$\left\{ \begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_x^X & a_x^Y & a_x^Z \\ a_y^X & a_y^Y & a_y^Z \\ a_z^X & a_z^Y & a_z^Z \end{array} \right]}_{a_j^k} \left\{ \begin{array}{c} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{array} \right\} \tag{O.1}$$

حيث a_i^j هو جيب تمام اتجاه المحور i بالنسبة إلى المحور j

- $a_x^j = (a_x^X, a_x^Y, a_x^Z)$ جيوب تمام اتجاه $\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ و$\mathbf{Z}$
- $a_y^j = (a_y^X, a_y^Y, a_y^Z)$ جيوب تمام اتجاه $\mathbf{y}$ بالنسبة إلى $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ و$\mathbf{Z}$
- $a_z^j = (a_z^X, a_z^Y, a_z^Z)$ جيوب تمام اتجاه $\mathbf{z}$ بالنسبة إلى $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ و$\mathbf{Z}$

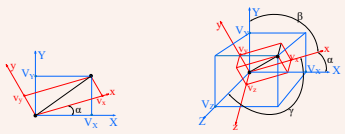
17 في الحالة ثنائية الأبعاد (2D)، الشكل O.1b، تكتب مصفوفة التحويل كما يأتي

$$T = \left[\begin{array}{cc} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{array} \right]$$

ولكن بما أن $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$ و$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$، فإن $\cos\gamma = -\sin\alpha$ و$\cos\beta = \sin\alpha$، ومن ثم تصبح مصفوفة التحويل

$$T = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array} \right] \tag{O.2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



b) 2D) a) 3D)

شكل O.1: تحويل المتجهات

O.1.2.3 تحويل الموترات

18 دوران موتر من الرتبة الثانية T_{jq}:

$$\begin{aligned}\overline{u}_j &= T_{jq}\overline{v}_q \\ \overline{u}_i &= a_i^j u_j \\ &= a_i^j T_{jq} v_q \\ &= a_i^j T_{jq} a_p^q \overline{v}_p\end{aligned}$$

ولدينا أيضًا $\overline{u}_i = \overline{T}_{ip}\overline{v}_p$ في النظام ذي الشرطة العلوية، وبمساواة العبارتين نحصل على

$$\overline{T}_{ip} = a_i^j a_p^q T_{jq}$$

ومن ثم،

$$\begin{aligned}\overline{T}_{ip} &= a_i^j a_p^q T_{jq} \quad \text{في صورة مصفوفية} \quad [\overline{T}] = [A]^T[T][A] \\ T_{jq} &= a_i^j a_p^q \overline{T}_{ip} \quad \text{في صورة مصفوفية} \quad [T] = [A][\overline{T}][A]^T\end{aligned}$$

19 إذا اعتبرنا الحالة ثنائية الأبعاد (2D)، فمن المعادلة O.2

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix}T_{xx} & T_{xy} & 0\\ T_{xy} & T_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ \overline{T} &= \begin{bmatrix}\overline{T}_{xx} & \overline{T}_{xy} & 0\\ \overline{T}_{xy} & \overline{T}_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = A^T T A\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

بالتعويض والتبسيط ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$)

$$\begin{Bmatrix} \overline{T}_{xx} \\ \overline{T}_{yy} \\ \overline{T}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix}$$

O.1.2.4 القيم الرئيسة للموترات المتناظرة من الرتبة الثانية

20 يوجد في ميكانيكا الأوساط المتصلة موتران أساسيان متناظران من الرتبة الثانية، هما الإجهاد والانفعال؛ وسندرس بعض خصائصهما المهمة. ولكل موتر متناظر T_{ij} معرّف عند نقطة في الفضاء، يرتبط بكل اتجاه (يحدده العمودي الوحدي n_j)، الشكل O.2، متجه عند تلك النقطة يعطى بالضرب الداخلي

$$v_i = T_{ij}n_j$$

إذا كان الاتجاه بحيث يوازي v_i المتجه n_i، كان الضرب الداخلي

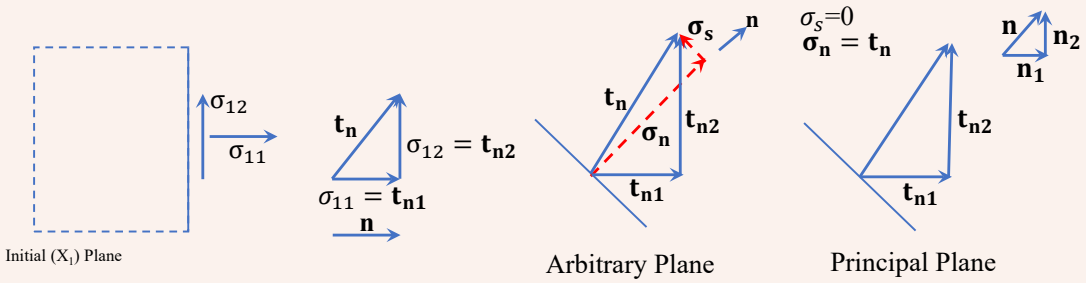
$$T_{ij}n_j = \lambda n_i$$

ويسمى الاتجاه n_i اتجاهًا رئيسًا لـT_{ij}. وبما أن $n_i = \delta_{ij}n_j$، يمكن إعادة كتابة ذلك كما يأتي

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0$$

وهو يمثل منظومة من ثلاث معادلات في المجاهيل الأربعة n_i وλ.

$$\begin{aligned} (T_{11}-\lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0 \\ T_{21}n_1 + (T_{22}-\lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0 \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33}-\lambda)n_3 &= 0 \end{aligned}$$



شكل O.2: الاتجاهات الرئيسة لموتر من الرتبة الثانية

21 لوجود حل غير تافه ($n_i \neq 0$)، يجب أن يساوي محدد المعاملات صفرًا:

$$\left|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22 يؤدي نشر هذا المحدد إلى المعادلة المميزة الآتية

$$\lambda^3 - I_T\lambda^2 + II_T\lambda - III_T = 0$$

حيث تسمى الجذور القيم الرئيسة لـT_{ij}، و

$$\begin{aligned} I_T &= T_{ii} = \mathrm{tr}\, T_{ij} \\ II_T &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) \\ III_T &= |T_{ij}| = \det T_{ij} \end{aligned}$$

تسمى الثوابت الأول والثاني والثالث لـT_{ij}، على الترتيب. ومن المعتاد ترتيب هذه الجذور بحيث $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \lambda_{(3)}$. وبدلالة الإجهادات الرئيسة يمكن تبسيط هذه الثوابت إلى

$$\begin{aligned} I_T &= T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)} \\ II_T &= -(T_{(1)}T_{(2)} + T_{(2)}T_{(3)} + T_{(3)}T_{(1)}) \\ III_T &= T_{(1)}T_{(2)}T_{(3)} \end{aligned}$$

23 تكون القيم الرئيسة لموتر متناظر ذي مركبات حقيقية قيمًا حقيقية أيضًا. وإذا كانت هذه القيم متميزة، كانت الاتجاهات الرئيسة الثلاثة متعامدة فيما بينها.

O.1.3 التفسير الفيزيائي لثوابت الإجهاد

24 المستوى ثماني السطوح هو المستوى الذي يصنع زوايا متساوية مع اتجاهات الإجهادات الرئيسة، الشكل O.3؛ ويعطى العمودي على هذا المستوى بـ

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

25 متجه الشد على هذا المستوى هو

$$\mathbf{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\}$$

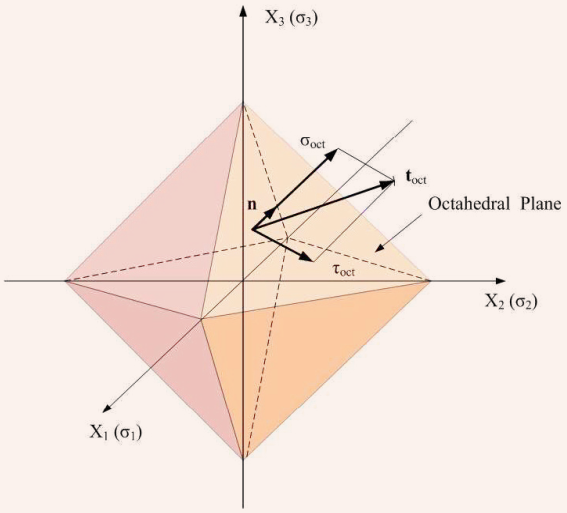
وتعطى المركبة العمودية للإجهاد على المستوى ثماني السطوح بـ

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}_{oct} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3}\mathbf{I}_1 = \sigma_{hyd}$$

26 يستخرج إجهاد القص ثماني السطوح من

$$\tau_{oct}^2 = |\mathbf{t}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل O.3: المستوى ثماني السطوح

27 بالمعالجة الجبرية يمكن إثبات أن

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

وأخيرًا يعطى اتجاه إجهاد القص ثماني السطوح بـ

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} \frac{J_3}{\tau_{oct}^3}$$

28 يمكن تحليل طاقة الانفعال المرنة (الكلية) لكل وحدة حجم إلى جزأين: $U = U_1 + U_2$، حيث

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1-2\nu}{E} I_1^2 && \text{طاقة التمدد} \\ U_2 &= \frac{1+\nu}{E} J_2 && \text{طاقة التشوه} \end{aligned}$$

O.2 الحقول المتجهة؛ ميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه

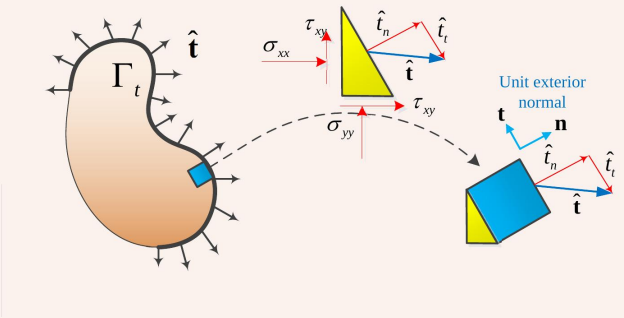
O.2.1 القوى

29 يوجد نوعان من القوى في ميكانيكا الأوساط المتصلة

قوى الجسم: تؤثر في عناصر الحجم أو الكتلة داخل الجسم، مثل الجاذبية والحقول الكهرومغناطيسية. $\mathrm{d}\mathbf{F} = \rho \mathbf{b} \mathrm{d}Vol$.

القوى السطحية: (أو قوى الشد) هي قوى تماس تؤثر في الجسم الحر عند سطحه الحدي. وتعرّف بدلالة القوة لكل وحدة مساحة، الشكل O.4، والمعادلة O.3.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل O.4: القوى السطحية

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{i} \int_{\Gamma} t_x \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{j} \int_{\Gamma} t_y \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{k} \int_{\Gamma} t_z \mathrm{d}\Gamma \tag{O.3}$$

30 نقصر مصطلح الشد عادةً على سطح حدي فعلي للجسم، ونستخدم مصطلح متجه الإجهاد لسطح داخلي تخيلي. وتفيد بوجه خاص متجهات الشد على المستويات العمودية على محاور الإحداثيات. فإذا عُرفت المتجهات المؤثرة عند نقطة على ثلاثة مستويات متعامدة من هذا النوع، أمكن التعبير عن متجه الإجهاد عند تلك النقطة على أي مستوى آخر مائل اعتباطيًا بدلالة مجموعة الشدود الأولى.

O.2.2 موتر إجهاد كوشي

31 كان مفهوم القوة في البداية مجردًا؛ إذ أشارت الفيزياء الأرسطية إلى الدافع ، ثم صاغه غاليليو ونيوتن (1687) صياغة رسمية. أما مفهوم الإجهاد فلم يُفهم فهمًا راسخًا حتى عام 1822، حين قدم كوشي فكرة متجه الشد الذي يضم المركبتين العمودية والمماسية $\mathbf{t} = t_n \mathbf{e}_n + t_t \mathbf{e}_t$. وتمثلت عبقريته في النظر في ما عرف لاحقًا برباعي سطوح كوشي ، الشكل O.5a، وتطبيق قانون نيوتن الثاني (أو بصورة أدق امتداد أويلر له إلى الجسيمات: قانون أويلر الأول للحركة).

32 يعطي اتزان رباعي سطوح كوشي

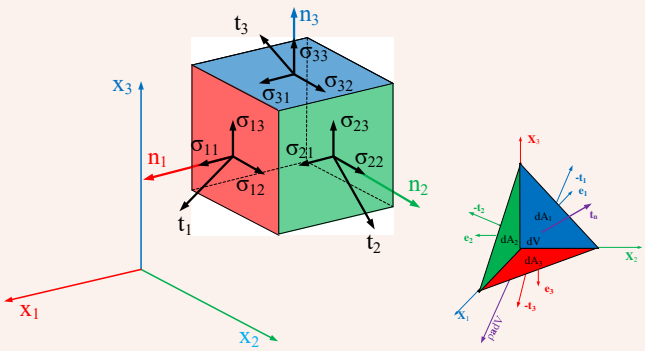
$$\mathbf{t} dA - \mathbf{t}_1 dA_1 - \mathbf{t}_2 dA_2 - \mathbf{t}_3 dA_3 = \rho dV \mathbf{a}$$

حيث $\mathbf{a}$ التسارع وρ كثافة الكتلة. وتعطى مساحات الأوجه بـ

$$\begin{aligned} dA_1 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_1 dA \\ dA_2 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_2 dA \\ dA_3 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_3 dA \end{aligned}$$

بالتعويض في معادلة الاتزان، والنظر في الحالة الحدية حيث $dV \to 0$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \tag{O.4}$$



(a) رباعي السطوح (b) الإجهادات

شكل O.5: كوشي: من رباعي السطوح إلى الإجهاد

يجب أن تكون لمتجهات الشد المركبات

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3\\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3\\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

33 تجدر الإشارة إلى أن الإجهاد كان يرمز إليه تاريخيًا وتقليديًا في ميكانيكا الأوساط المتصلة بـ$\mathbf{T}$، ثم استُبدل به الرمز σ. وبالتعويض في المعادلة O.4

$$\begin{aligned}\mathbf{t} =& n_1(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3) + n_2(\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3)\\ &+ n_3(\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3)\\ =&(n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31})\mathbf{e}_1 + (n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32})\mathbf{e}_2\\ &+ (n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33})\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

أو ببساطة

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{O.5}$$

34 يوجد موتر من الرتبة الثانية يسمى موتر إجهاد كوشي ، يشير دليله الأول (i، 1) إلى اتجاه العمودي المتجه إلى الخارج، ويشير الدليل الثاني (j، 2) إلى اتجاه مركبة القوة، الشكل O.5b.

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{t}_1\\ \mathbf{t}_2\\ \mathbf{t}_3\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{array}\right]}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

أدت المعادلات السابقة دورًا رئيسًا في تأسيس ميكانيكا الأوساط المتصلة .

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

35 وأخيرًا، يمثل ترميز فويغت (الشائع في الهندسة) طريقة لتمثيل الموتر المتناظر بخفض رتبته.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \lfloor\ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}\ \rfloor$$

36 ملاحظة: لم نقدم بعد معادلة الاتزان (معادلة كمية الحركة).

O.2.2.1 موترات الإجهاد الهيدروستاتيكي والانحرافي

37 ليكن σ رمز متوسط الإجهاد العمودي p:

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}$$

38 عندئذ يمكن كتابة موتر الإجهاد مجموع موترين:

الإجهاد الهيدروستاتيكي يساوي فيه كل إجهاد عمودي $-p$ وتساوي إجهادات القص صفرًا. ويحدث الإجهاد الهيدروستاتيكي تغيرًا في الحجم من دون تغير في الشكل في وسط متساوي الخواص.

$$\sigma_{hyd} = -p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

الإجهاد الانحرافي: وهو الذي يسبب تغير الشكل.

$$\sigma_{dev} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}$$

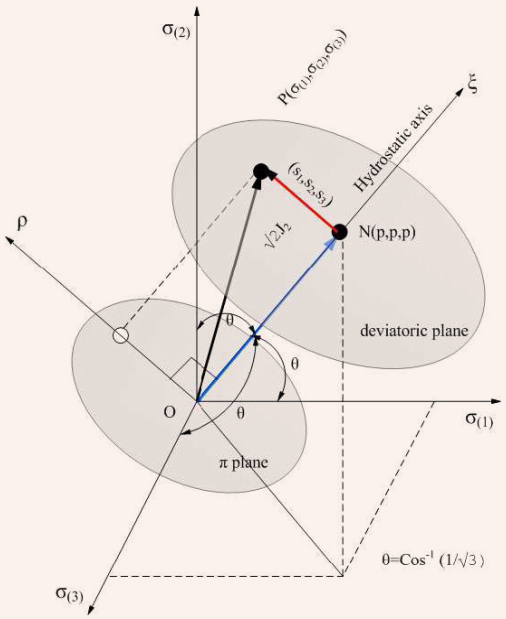
O.2.2.2 التمثيل الهندسي لحالات الإجهاد

39 باستخدام الإجهادات الرئيسة الثلاثة σ_1 وσ_2 وσ_3 إحداثيات، يمكن إنشاء فضاء إجهاد ثلاثي الأبعاد، الشكل O.6. ويعرف تمثيل الإجهاد هذا بفضاء إجهاد هاي–فيسترغارد.

$\mathbf{OP} = \mathbf{ON} + \mathbf{NP}$. يقع الأول في اتجاه متجه الوحدة $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$، ويكون $\mathbf{NP} \perp \mathbf{ON}$.

ON هو المركبة الهيدروستاتيكية لحالة الإجهاد، ويسمى المحور $O\xi$ المحور الهيدروستاتيكي ξ، وتحقق كل نقطة عليه $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = p$، أو $\xi = \sqrt{3}p$. ويمثل **NP** المركبة الانحرافية لحالة الإجهاد (s_1, s_2, s_3)، ويكون عموديًا على المحور ξ. ويسمى أي مستوى عمودي على المحور الهيدروستاتيكي المستوى الانحرافي، ويعبر عنه بـ $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)})$. أما المستوى المار بنقطة الأصل فيسمى المستوى π ويمثل بـ $\xi = 0$. ويسمى كل مستوى يحتوي المحور الهيدروستاتيكي مستوى زواليًا. ويقع المتجه **NP** في مستوى زوالي، ومقداره $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل O.6: التمثيل الهندسي للإجهاد

O.2.3 علم الحركة

O.2.3.1 الموضع والإزاحة

40 عند دراسة تشوه جسم صلب، يمكن اعتماد نظامي إحداثيات متميزين، الشكل O.7:

الإحداثيات المادية (X_1, X_2, X_3) تعرّف في نظام الإحداثيات الأصلي غير المشوه، وينشأ عنها نظام الإحداثيات اللاغرانجي.

الإحداثيات المكانية (x_1, x_2, x_3) تعرّف في نظام الإحداثيات المشوه، وينشأ عنها نظام الإحداثيات الأويلري.

وبصورة أدق، يكون للنقطة P_0 في الوضع الابتدائي متجه الموضع

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3$$

المعبّر عنه هنا بدلالة الإحداثيات المادية (X_1, X_2, X_3). وفي الوضع المشوه تنتقل الجسيمة P_0 إلى الموضع الجديد P، ويصبح متجه موضعها

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

المعبّر عنه بدلالة الإحداثيات المكانية. ويمكن التعبير عن متجه الإزاحة $\mathbf{u}$ الواصل بين P_0 وP بالإحداثيات المادية أو المكانية

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= U_K\mathbf{I}_K\\ \mathbf{u} &= u_k\mathbf{i}_k\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

O.2.3.2 الانفعالات

41 إذا كانت تدرجات الإزاحة والإزاحات نفسها صغيرة، فإن $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$، ومن ثم يمكن اعتبار موترَي الانفعال المتناهي الصغر الأويلري واللاغرانجي متساويين، $E_{ij} = E^*_{ij}$.

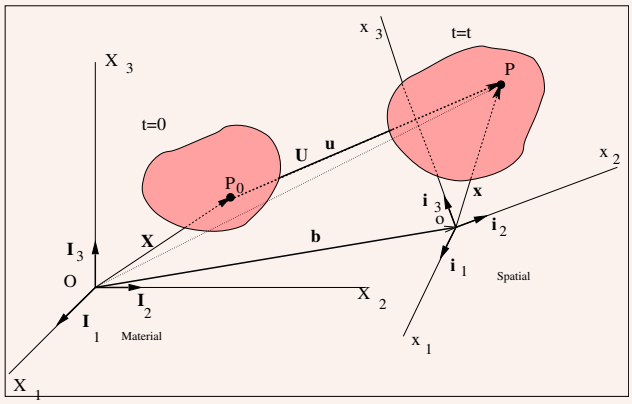
42 ومن جهة أخرى يمكن إدخال تمثيلات بديلة للانفعال، الجدول O.2.

جدول O.2: تمثيلات الانفعال

	تدرج الإزاحة	
	صغير	كبير
صغيرة	انفعال لاغرانجي صغير (كوشي)	انفعال لاغرانجي كبير (غرين–لاغرانج)
كبيرة	انفعال أويلري صغير	انفعال أويلري محدود (أويلر–ألمانسي)

الإزاحة

43 سنقتصر في هذا الكتاب على تمثيل الانفعال اللاغرانجي.



شكل O.7: متجهات الموضع والإزاحة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

44 إذا أُخذ التشوه الكبير في الحسبان (كما في الانبعاج)، كانت الانفعالات الأويلرية المحدودة في نظام الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{O.6}$$

أو

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

45 لاحظ أن انفعال القص الهندسي الشائع الاستخدام يعرّف كما يأتي

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

46 في معظم الحالات تكون التشوهات صغيرة بما يكفي لإهمال الحدود التربيعية، فتصبح المعادلات الناتجة

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \tfrac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \tfrac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \tfrac{\partial w}{\partial z}; \\
\gamma_{xy} &= \tfrac{\partial v}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \tfrac{\partial w}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \tfrac{\partial w}{\partial y} + \tfrac{\partial v}{\partial z};
\end{aligned}$$

أو

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)$$

ويسمى ذلك انفعال كوشي . وفي العناصر المحددة يعبر عن الانفعال غالبًا بواسطة المؤثر الخطي $\mathbf{L}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أو

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{O.7}$$

O.3 القوانين الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة

47 سنشتق في هذا القسم معادلات تفاضلية تحكم تغير الإجهاد والتشوه عند نقطة ومع الزمن. وتنطبق هذه المعادلات على أي وسط متصل، لكنها لا تكفي وحدها لتحديد الحقل الموترِي المجهول. ويلزم لذلك القسم التالي، حيث تقدم القوانين التأسيسية التي تربط الإجهاد بالانفعال.

48 لا نحصل على مسألة رياضية محددة جيدًا لإيجاد توزيع الإجهاد والتشوه أو حقول الإزاحة والسرعة إلا بإضافة المعادلات التأسيسية والشروط الحدية والابتدائية.

49 سنلخص المعادلات التفاضلية التي تعبر محليًا عن حفظ الكتلة وكمية الحركة والطاقة. وتشتق معادلات الاتزان التفاضلية هذه من الصور التكاملية لمعادلة الاتزان التي تعبر عن المسلمات الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة.

O.3.1 قوانين الحفظ

50 تشكل قوانين الحفظ مكونًا أساسيًا في الفيزياء الكلاسيكية. ويقرر قانون الحفظ اتزان كمية قياسية أو موترية في حجم V يحده سطح S. ويمكن التعبير عن هذا القانون في أعم صوره كما يأتي

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{A}\,\mathrm{d}V}_{\text{معدل التغير}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{d}S}_{\text{التبادل بالانتشار}} = \underbrace{\int_V \mathbf{A}\,\mathrm{d}V}_{\text{المصدر}}$$

حيث $\mathcal{A}$ الكثافة الحجمية للكمية المدروسة $\mathbf{a}$ (الكتلة أو كمية الحركة الخطية أو الطاقة، ...)، و$\mathbf{A}$ معدل الكثافة الحجمية لما يزوَّد من الخارج، و$\boldsymbol{\alpha}$ معدل الكثافة السطحية لما يفقد عبر سطح الحجم V، أي S، وهو دالة في العمودي على السطح $\mathbf{n}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

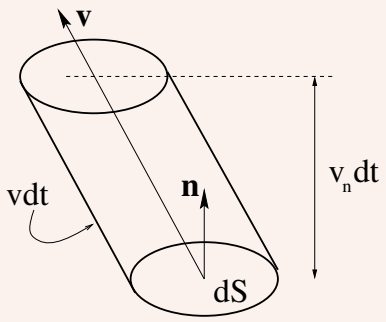
51 لذلك تقرأ المعادلة السابقة كما يأتي: تساوي الكمية الداخلة (المعطاة بالطرف الأيمن) ما يفقد عبر الحد وما يغير $\mathcal{A}$، وهي الكمية المدروسة. وتعطى أبعاد الكميات المختلفة بـ

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{a}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3})\\ \dim(\boldsymbol{\alpha}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-2}t^{-1})\\ \dim(\mathbf{A}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3}t^{-1})\end{aligned}$$

52 يطبق هذا القسم قانون الحفظ السابق على الكتلة وكمية الحركة والطاقة. وتوفر المعادلات التفاضلية الناتجة علاقات إضافية مهمة تتعلق بعدم قابلية الأجسام الصلبة للانضغاط (وهي مهمة في الهيدروديناميكا الكلاسيكية ونظريات اللدونة)، واتزان موتر الإجهاد وتناظره، والقانون الأول للديناميكا الحرارية. ويشكل تقرير قوانين الحفظ الثلاثة السابقة، مع القانون الثاني للديناميكا الحرارية، ما يعرف عمومًا بالقوانين الأساسية لميكانيكا الأوساط المتصلة.

O.3.2 التدفقات

53 قبل تقرير قانون الحفظ الأول، يلزم تعريف مفهوم التدفق عبر سطح حدي. ويمكن تعريف التدفق عبر سطح هندسيًا بالنظر في سطح تخيلي ثابت في الفضاء ينساب خلاله "وسط" متصل. فإذا عُين للسطح جانب موجب وأخذ $\mathbf{n}$ في الاتجاه الموجب، كان حجم "المادة" المارة عبر عنصر المساحة $\mathrm{d}S$ خلال الزمن dt مساويًا لحجم أسطوانة قاعدتها $\mathrm{d}S$ وارتفاعها المائل vdt الموازي لمتجه السرعة $\mathbf{v}$، الشكل O.8.



شكل O.8: التدفق عبر المساحة $\mathrm{d}S$

(إذا كان $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ سالبًا، كان الجريان في الاتجاه السالب). ومن ثم يعرف التدفق الحجمي كما يأتي

$$\text{التدفق الحجمي} = \int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S v_j n_j \mathrm{d}S$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث تخص الصورة الأخيرة المركبات الديكارتية المتعامدة. ويمكن تعميم هذا التعريف لتحديد التدفقات الآتية لكل وحدة مساحة عبر $\mathrm{d}S$:

$$\begin{aligned} \text{تدفق الكتلة} &= \int_S \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S \rho v_j n_j \mathrm{d}S \\ \text{تدفق كمية الحركة} &= \int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S = \int_S \rho v_k v_j n_j \mathrm{d}S \\ \text{تدفق الحرارة} &= \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S q_j n_j \mathrm{d}S \end{aligned}$$

O.3.3 حفظ الكتلة؛ معادلة الاستمرارية

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

54 لا تعتمد الصورة المتجهة على اختيار الإحداثيات. وتبين هذه المعادلة أن تباعد حقل متجه السرعة يساوي $(-1/\rho)(d\rho/dt)$، ويقيس معدل ابتعاد المادة عن الجسيمة، وهو يساوي المعدل الوحدي لنقص الكثافة ρ في جوار الجسيمة.

55 إذا كانت المادة غير قابلة للانضغاط، بحيث تبقى الكثافة في جوار كل جسيمة مادية ثابتة أثناء حركتها، اتخذت معادلة الاستمرارية الصورة الأبسط

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{أو} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

56 وهذا هو شرط عدم قابلية الانضغاط .

O.3.4 حفظ كمية الحركة؛ معادلة الحركة

57 يساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة الكلية لمجموعة من الجسيمات المجموع المتجهي لجميع القوى الخارجية المؤثرة فيها، بشرط انطباق قانون نيوتن الثالث. وتمثل الصورة المتصلة لهذا المبدأ مسلمة أساسية[2] في ميكانيكا الأوساط المتصلة. نبدأ من

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \underbrace{\rho\mathbf{v}}_{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}V - \int_S \underbrace{\mathbf{t}}_{\alpha}\,\mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\rho\mathbf{b}}_{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}V$$

ومع ملاحظة أن

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}) &= \rho\mathbf{v} = \tfrac{m}{L^2 t} \\ \dim(\alpha) &= \mathbf{t} = \tfrac{ma}{L^2} = \tfrac{m}{Lt^2} \\ \dim(\mathbf{A}) &= = \rho\mathbf{b} = \tfrac{m}{L^3}\tfrac{L}{t^2} = \tfrac{m}{L^2 t^2} \end{aligned}$$

[2] المسلمة: عبارة، تسمى أيضًا بديهية، تُقبل صحيحة من دون برهان.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

نتذكر مبرهنة التباعد (المعادلة R.4)

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S \underbrace{v_i n_i}_{\text{التدفق}} \, dS$$

58 يساوي تدفق دالة متجهة عبر سطح مغلق تكامل تباعد تلك الدالة على الحجم المحاط بالسطح. نعوض $t_i = T_{ij} n_j$ ونطبق مبرهنة التباعد (المعادلة R.4) فنحصل على

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) \mathrm{d}V &= \int_V \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V \\ \int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \right] \mathrm{d}V &= 0 \end{aligned}$$

أو لحجم اعتباطي

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

وهي معادلة كوشي (الأولى) للحركة، أو مبدأ كمية الحركة الخطية، أو ببساطة معادلة الاتزان. وعند نشرها في ثلاثة أبعاد (3D) للمسائل الساكنة تعطي:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0 \\ \tfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0 \\ \tfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{O.8}$$

أو

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{O.9}$$

59 تمثل المعادلة (O.8) معادلات كوشي للحركة. وفي مائع نيوتني عديم اللزوجة، يختزل موتر الإجهاد إلى إجهاد عمودي محض،

$$T_{ij} = \sigma \, \delta_{ij},$$

حيث يرمز σ إلى الإجهاد العمودي (الديناميكي)، وδ_{ij} دلتا كرونيكر. ومن ثم،

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \sigma, \qquad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

60 يعطي تعويض هذه العلاقات في المعادلة (O.8)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \rho b_1 = \rho a_1, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \rho b_2 = \rho a_2, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \rho b_3 = \rho a_3,$$

حيث a_i مركبات تسارع الجسيمة.

61 بإدخال إزاحات جسيمة المائع

$$a_1 = \ddot{\xi}, \qquad a_2 = \ddot{\eta}, \qquad a_3 = \ddot{\zeta},$$

وملاحظة أن الجاذبية تؤخذ في الحسبان في الصياغة الهيدروديناميكية ضمن الحقل الهيدروستاتيكي الساكن (بحيث $b_i = 0$ للمسألة التزايدية)، تختزل المعادلات إلى

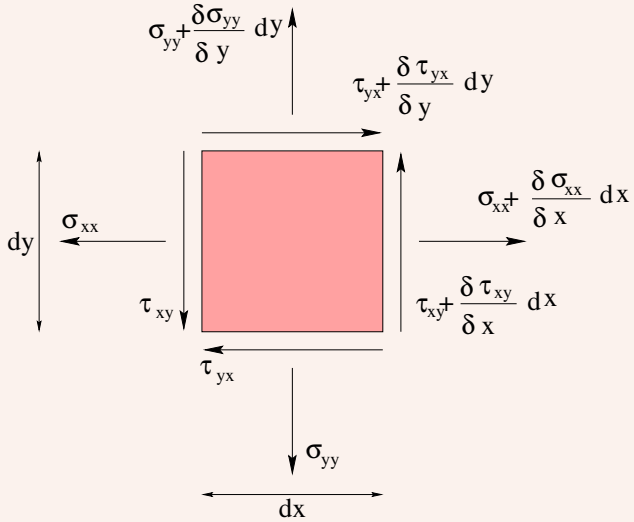
$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \rho \ddot{\xi}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \rho \ddot{\eta}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} = \rho \ddot{\zeta}.$$

62 وأخيرًا، باستخدام $w = \rho g$، نحصل على

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

وهذه هي العلاقات المستخدمة في التحليل الهيدروديناميكي.

63 نلاحظ أنه كان يمكن أيضًا اشتقاق هذه المعادلات من مخطط الجسم الحر بافتراض الاتزان (من خلال قانون نيوتن الثاني)، وذلك بالنظر في عنصر متناهي الصغر أبعاده $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$، الشكل O.9.



شكل O.9: اتزان الإجهادات في الإحداثيات الديكارتية

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

O.3.5 حفظ الطاقة؛ المبدأ الأول للديناميكا الحرارية

64 يربط المبدأ الأول للديناميكا الحرارية الشغل المبذول على منظومة (مغلقة) وانتقال الحرارة إليها بالتغير في طاقتها. وسنفترض أن انتقالات الطاقة الوحيدة إلى المنظومة تتم بالشغل الميكانيكي الذي تبذله قوى الشد السطحية وقوى الجسم، وبانتقال الحرارة عبر الحد.

65 إذا اقتصر النظر على الكميات الميكانيكية، أمكن اشتقاق مبدأ حفظ الطاقة للوسط المتصل مباشرةً من معادلة الحركة O.8. ويتم ذلك بتكامل الضرب القياسي للمعادلة O.8 والسرعة v_i على الحجم V.

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V v_i T_{ji,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho b_i v_i \mathrm{d}V$$

لننظر في الطرف الأيسر

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

الذي يمثل المعدل الزمني لتغير الطاقة الحركية K في الوسط المتصل.

66 إذا نظرنا في العمليات الحرارية، أعطي معدل زيادة الحرارة الكلية الداخلة إلى الوسط المتصل بـ

$$Q = -\int_S q_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho r \mathrm{d}V$$

للكمية Q بُعد القدرة[3]، أي ML^2T^{-3} ، ووحدتها في النظام الدولي الواط (W). و$\mathbf{q}$ تدفق الحرارة بالتوصيل لكل وحدة مساحة، وبُعده MT^{-3} ووحدته في النظام الدولي Wm^{-2}. وأخيرًا، r ثابت الحرارة الإشعاعية لكل وحدة كتلة، وبُعده $MT^{-3}L^{-4}$ ووحدته المقابلة Wm^{-6}. ومن ثم لدينا

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V = \int_V (v_i T_{ji})_{,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q$$

67 نحول بعد ذلك التكامل الأول في الطرف الأيمن إلى تكامل سطحي باستخدام مبرهنة التباعد (المعادلة R.4)، وبما أن $t_i = T_{ij}n_j$ نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V &= \int_S v_i t_i \mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q \\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q\end{aligned}$$

68 تربط هذه المعادلة المعدل الزمني لتغير الطاقة الميكانيكية الكلية للوسط المتصل في الطرف الأيسر بمعدل الشغل الذي تبذله القوى السطحية وقوى الجسم في الطرف الأيمن.

69 إذا أُخذت الطاقات الميكانيكية وغير الميكانيكية معًا في الحسبان، فإن المبدأ الأول ينص على أن *المعدل الزمني لتغير مجموع الطاقة الحركية والداخلية يساوي مجموع معدل الشغل وسائر الطاقات المضافة إلى*

[3] الشغل=$FL = ML^2T^{-2}$؛ القدرة=الشغل/الزمن

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الوسط المتصل أو المسحوبة منه لكل وحدة زمن (*حرارية وكيميائية وكهرومغناطيسية* وغيرها). وفي الوسط الحراري الميكانيكي، من المعتاد التعبير عن المعدل الزمني لتغير الطاقة الداخلية بالصيغة التكاملية

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V$$

حيث u الطاقة الداخلية لكل وحدة كتلة، أو الطاقة الداخلية النوعية. ونلاحظ أن U لا تظهر في المبدأ الأول إلا في صورة تفاضلية؛ ولذلك يلزم، إذا أردنا حسابها، تحديد قيمة مرجعية تنعدم عندها U.

70 بُعد U هو بُعد الطاقة: $U = ML^2T^{-2}$ dim ، ووحدتها في النظام الدولي الجول. وبالمثل $u = \dim$ L^2T^{-2} ووحدتها الجول/كغ.

71 بدلالة تكاملات الطاقة، يمكن إعادة كتابة المبدأ الأول كما يأتي

$$\overbrace{\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V}_{\frac{dK}{dt}=\dot{K}} + \underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V}_{\frac{dU}{dt}=\dot{U}}}^{\text{معدل الزيادة}} = \overbrace{\underbrace{\int_S t_i v_i \mathrm{d}S}_{\text{التبادل}} + \underbrace{\int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V}_{\text{المصدر}}}^{\frac{dW}{dt}(\mathcal{P}_{ext})}$$

$$+ \overbrace{\underbrace{\int_V \rho r \mathrm{d}V}_{\text{المصدر}} - \underbrace{\int_S q_i n_i \mathrm{d}S}_{\text{التبادل}}}^{Q(\mathcal{P}_{cal})}$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q \tag{O.10}$$

72 في المرونة المثالية، يعد انتقال الحرارة مهملًا، ويفترض تحول الشغل الداخل كله إلى طاقة داخلية في صورة طاقة انفعال مرنة مخزنة قابلة للاسترداد، ويمكن استعادتها شغلًا عند إزالة الحمل عن الجسم.

73 غير أن الجزء الأكبر من الشغل الداخل إلى مادة تتشوه لا يخزن، عمومًا، بصورة قابلة للاسترداد، بل يتبدد بعملية التشوه، فيرفع درجة حرارة الجسم ثم ينتقل في النهاية إلى الخارج على هيئة حرارة.

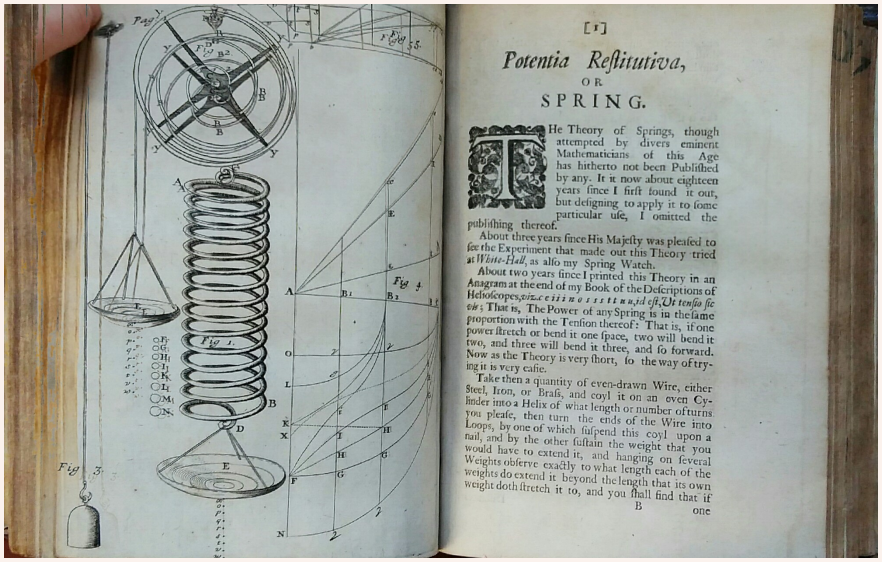
O.4 المعادلات التأسيسية

74 نشر هوك[4] عام 1676 أحجيةً حرفية هي *c.e.i.i.n.o.s.s.t.t.u.u*. ولم ينشر مفتاحها باللاتينية *ut tensio, sic vis* إلا عام 1678، ومعناها "تتناسب القوة مع الاستطالة." وبعبارته: *تتناسب قوة أي نابض مع استطالته*؛

[4] كان هوك، معاصر نيوتن، شديد التكتم والمرارة والغيرة (على نحو لا يختلف كثيرًا عن ساليري وموزارت)، إذ شعر أنه حُرم نسبة كثير من الاكتشافات إليه.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

فإذا مدت قوة واحدة أو ثنت مسافة واحدة، ثنت قوتان مسافتين، وثلاث قوى ثلاث مسافات، وهكذا، الشكل O.10. وقد قيل بالفعل إن هوك كان "قليل الشهرة ومتأخرها."



شكل O.10: لوحة من محاضرة هوك عن النوابض

75 ومنذ ذلك الحين أصبح هوك الأب بلا منازع لعلم المرونة.

O.4.1 الحالة العامة ثلاثية الأبعاد (3D)

76 يمكن كتابة قانون هوك المعمم كما يأتي:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{O.11}$$

77 يضم موتر ثوابت المرونة D_{ijkl} (من الرتبة الرابعة) 81 مركبة (3^4)؛ غير أنه بسبب تناظر كل من σ وε، لا يزيد عدد الحدود المرنة المتميزة على 36 $\left(\frac{9(9-1)}{2}\right)$.

78 عند كتابة قانون هوك، يستبدل بالنظام ذي الدليلين غالبًا نظام ذو دليل واحد مجاله ستة:

$$\sigma_k = \overbrace{D_{km}}^{6^2=36}\ \varepsilon_m \qquad k,m = 1,2,3,4,5,6$$

79 بدلالة ثابتي لامي، يكتب قانون هوك لجسم متساوي الخواص كما يأتي

$$T_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij} \qquad \text{أو} \qquad \mathbf{T} = \lambda\mathbf{I}_E + 2\mu\mathbf{E}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}T_{kk}\right) \qquad \text{أو} \qquad \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\mathbf{I}_T + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

80 بدلالة الثوابت الهندسية:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}$$

81 وبالمثل، في حالة القص النقي في المستويين x_1x_3 وx_2x_3، لدينا

$$\begin{aligned}\sigma_{21} = \sigma_{12} &= \tau \quad \text{وسائر} \sigma_{ij} = 0\\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\tau}{G}\end{aligned}$$

وتساوي μ معامل القص G. ويصبح قانون هوك لمادة متساوية الخواص بدلالة الثوابت الهندسية

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \quad \text{أو} \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}_\varepsilon\right)$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad \text{أو} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathbf{I}_\sigma$$

82 عند نشر معادلة الانفعال في إحداثيات ديكارتية ثلاثية الأبعاد (3D)، تنتج:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy})\\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz})\\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx})\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}$$

83 بعكس هذه المعادلة نحصل على

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\\ \nu & \nu & 1-\nu\end{bmatrix} & 0\\ 0 & G\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy})\\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz})\\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx})\end{Bmatrix} \tag{O.12}$$

O.4.2 حالة تساوي الخواص المستعرض

84 في حالة تساوي الخواص المستعرض، يمكن التعبير عن علاقة الإجهاد–الانفعال بدلالة

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}\\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}\\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + a_{33}\sigma_{zz}\\ \gamma_{xy} &= 2(a_{11}-a_{12})\tau_{xy}\\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{xy}\\ \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz}\end{aligned}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

و

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{13} = -\frac{\nu'}{E'}; \quad a_{33} = -\frac{1}{E'}; \quad a_{44} = -\frac{1}{\mu'}$$

حيث E معامل يونغ في مستوى تساوي الخواص، وE' معامله في المستوى العمودي عليه. وتقابل ν الانكماش المستعرض في مستوى تساوي الخواص عند تطبيق الشد داخل المستوى؛ وتقابل ν' الانكماش المستعرض في مستوى تساوي الخواص عند تطبيق الشد عموديًا عليه؛ وتقابل μ' معامل القص لمستوى تساوي الخواص وأي مستوى عمودي عليه، بينما μ معامل القص في مستوى تساوي الخواص.

O.4.3 حالات خاصة ثنائية الأبعاد (2D)

85 يمكن في كثير من الأحيان وضع افتراضات مبسطة لاختزال مسألة ثلاثية الأبعاد (3D) إلى مسألة ثنائية الأبعاد (2D).

الانفعال المستوي للمسائل التي تتضمن جسمًا طويلًا في الاتجاه z من دون تغير في الحمل أو الهندسة، يكون $\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. وبالتعويض في المعادلة O.12 نحصل على

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

التناظر المحوري في الأجسام الدورانية يمكن استخدام نظام إحداثيات قطبية، وعندئذ

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}$$

وتكون العلاقة التأسيسية مماثلة مرة أخرى لحالة الانفعال المستوي ثلاثية الأبعاد (3D)

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{rz} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cccc} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{array} \right\}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الإجهاد المستوي إذا كان البعد الطولي في الاتجاه z أصغر بكثير منه في الاتجاهين x وy، فإن $\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ عبر السماكة. وبالتعويض مرة أخرى في المعادلة O.12 نحصل على:

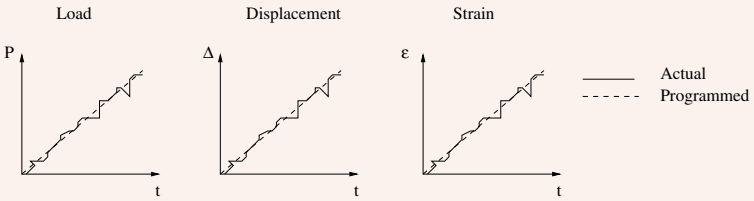
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{1-\nu}\nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

O.5 ملاحظات ظاهرية

86 نناقش بإيجاز بعض الجوانب الظاهرية العامة المرتبطة باختبارات الكسر واستجابة الخرسانة.

O.5.1 اختبارات التحكم في الحمل والإزاحة والانفعال

87 قبل الانتقال إلى ميكانيكا الكسر الخطية وغير الخطية للخرسانة، ينبغي أن يفهم القارئ اختلاف استجابة المادة والمنشأ عند إخضاع عينة شد منتظم للتحكم في الحمل أو الإزاحة أو الانفعال أثناء الاختبار. ويمكن برمجة أجهزة الاختبار الحديثة لتطبيق معدل محدد مسبقًا للحمل (تقيسه خلية حمل)، أو الإزاحة (يقيسها محول إزاحة داخلي)، أو الانفعال (يقيسه مقياس انفعال/مشبك أو أدوات أخرى)، الشكل O.11.



شكل O.11: أنماط التحكم في الاختبار

التحكم في الحمل: يطبق الرأس المتحرك حملًا متزايدًا بصرف النظر عن تشوه العينة أو استجابتها. وعند بلوغ مقاومة الشد في جميع المواد، يحدث انهيار هش مفاجئ. وتتحرر طاقة الانفعال المتراكمة في العينة فجأة عند بلوغ حملها الأقصى، ولذلك قد يكون الانهيار المفاجئ انفجاريًا.

التحكم في الإزاحة/الشوط: يطبق الرأس المتحرك إزاحة متزايدة على العينة. وفي المادة المتلينة تظهر استجابة بعد الذروة، ينخفض فيها الإجهاد تدريجيًا مع زيادة الإزاحة. وفي هذه الحالة تتحرر طاقة الانفعال تدريجيًا، ثم تتحول إلى طاقة سطحية أثناء تكوّن الشق.

التحكم في الانفعال: يماثل التحكم في الإزاحة، إلا أن التغذية الراجعة يوفرها مقياس انفعال موضوع "في موضع مختار"، أو مقياس مشبكي، أو تشوه اعتباطي للعينة (لا يلزم أن يوافق اتجاه التحميل). ولإجراء هذا الاختبار، يجب أن يرسل مقياس المشبك أو مقياس الانفعال إشارة التغذية الراجعة إلى جهاز الاختبار كي يعدل الشوط تبعًا لها.

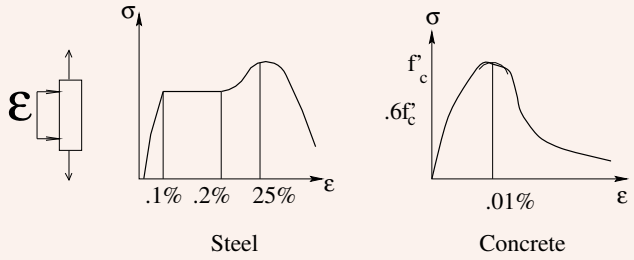
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

88 تجرى معظم اختبارات كسر الخرسانة تحت التحكم في الانفعال، مع وضع مقياس عند فم الشق لتوفير استجابة العينة.

89 يتطلب كل من اختبار التحكم في الشوط واختبار التحكم في الانفعال منظومة تجريبية مغلقة الحلقة، وهي مكلفة عادةً ولم تصبح متاحة على نطاق واسع إلا حديثًا.

O.5.2 استجابة الفولاذ والخرسانة قبل الذروة وبعدها

90 تمهيدًا لكسر الخرسانة، نقارن استجابة المعادن والخرسانة قبل الذروة وبعدها، كما يبين الشكل O.12، وقد حُصل على كلتيهما في اختبار محكوم بالانفعال لعينة غير مشققة أو غير محززة.



شكل O.12: منحنيات الإجهاد–الانفعال للمعادن والخرسانة

1. **قبل الذروة:**

(a) يظهر المعدن استجابة مرنة خطية حتى إجهاد الخضوع σ_{yld} وانفعال يقارب 0.1%. ثم قد يؤدي الانخلاع الداخلي إلى تشوه لدن بانفعال يصل إلى 25%، يتبعه تصلد انفعالي.

(b) تظهر الخرسانة استجابة خطية حتى نحو $0.6 f_t'$. ثم يولد التشقق الدقيق الداخلي استجابة غير خطية حتى إجهاد الذروة f_t' وانفعال مقابل يقارب 0.01%.

لا يمكن تحت التحكم في الحمل قياس إلا الاستجابة السابقة للذروة.

2. **بعد الذروة:**

(a) لا تزال استجابة المعادن في منطقة ما بعد الذروة غير مفهومة جيدًا. وفضلاً عن محدودية فائدتها العملية، يحجبها إلى حد كبير تكوّن العنق.

(b) تكتسب استجابة الخرسانة في منطقة ما بعد الذروة أهمية كبيرة، إذ قد تظهر انفعالات إضافية. والفرع الهابط لاستجابة الخرسانة في الشكل O.12 تمثيل مثالي لمتوسط استجابة المادة. وينبغي لوصف أدق أن يأخذ تمركز الشقوق المتولدة في الحسبان. فبعيدًا عن الشق المتمركز يحدث تفريغ مرن، أما عند الشق، حيث لا يمكن تعريف الانفعال تعريفًا سليمًا، فيكون نموذج الإجهاد–إزاحة فتحة الشق أنسب. وسيناقش ذلك في القسم التالي.

لا يمكن الحصول على استجابات ما بعد الذروة إلا في اختبارات التحكم في الإزاحة أو الانفعال.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

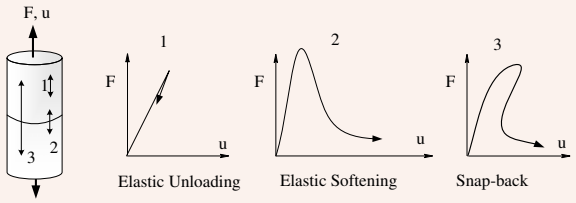
91 في كلتا الحالتين تمثل المساحة تحت منحنى الإجهاد–الانفعال الطاقة التي يمكن أن يمتصها سطح كسر وحدي، ولذلك تظهر الخرسانة استجابة أشد هشاشة من المعادن.

92 بعد أن لوحظ تجريبيًا أن الاستجابة *العيانية* للخرسانة تظهر تليّنًا، وأن الاستجابة المطيلية للمعادن تعزى إلى الانخلاعات الداخلية، نطرح السؤال الآتي: لماذا تتلين الخرسانة؟

O.6 تمركز التشوه

O.6.1 الدليل التجريبي

93 إذا اعتبرنا عينة خرسانية محملة أحاديًا بحمل شد F، أمكن تسجيل الاستطالة بواسطة محول إزاحة تفاضلي خطي (LVDT) مركب وفق الوضع 1 أو 2 أو 3، الشكل O.13.



شكل O.13: الرصد التجريبي للتمركز في عينات خرسانية محملة أحاديًا

94 عند بلوغ حمل الذروة وبدء التشقق، يسجل المحول 1 تفريغًا مرنًا، ويسجل 2 تليّن الانفعال، ويسجل 3 الارتداد المفاجئ.

95 إذا أجرينا تجانسًا بأخذ $\sigma = F/A$ و$\varepsilon = u/L$، فمن الواضح أنه لا يمكن وضع تعريف وحيد للانفعال عبر الشق. وعند هذا الموضع لا يعود من الممكن تعريف الانفعال؛ لذلك ينبغي توصيف الشق بإزاحة فتحته COD، التي ترسم بعد ذلك مع الإجهاد (σ-COD).

96 تعد القدرة على نقل الإجهادات عبر شق تحت إزاحة محكومة خاصية للمواد المتلينة.

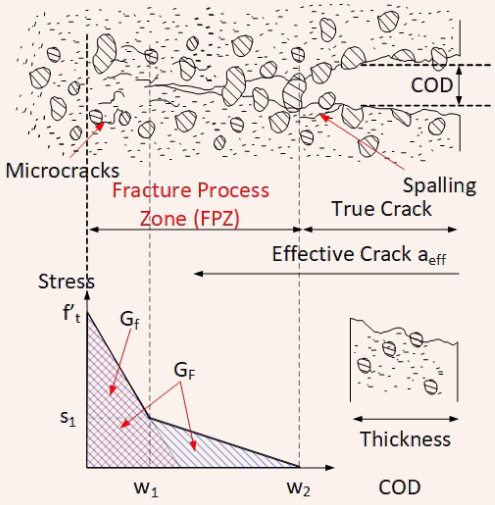
O.6.1.1 مخطط σ-COD، نموذج هيلربورغ

97 يتضح من المناقشة السابقة أن تليّن الخرسانة يوصف بمنحنى الإجهاد–عرض فتحة الشق (لا بمنحنى الإجهاد–الانفعال). وينبغي مثاليًا الحصول على توصيف دقيق لاستجابة التليّن من اختبار أحادي المحور لعينة غير مشققة. غير أنه تبين (Li **and** Liang, 1986; Hordijk, Reinhardt **and** Cornelissen, 1989) أن هذه الاختبارات شديدة الحساسية، وأن اختلافات كبيرة في النتائج قد تنشأ عن اختلاف الأشكال والأحجام وآلات الاختبار. لذلك يحدد منحنى التليّن غالبًا بطريق غير مباشر باختبار عينات محززة.

98 قدم هيلربورغ (Hillerborg, Modéer **and** Petersson, 1976) عام 1976، فيما يُرجح أنه أكثر الأعمال

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

استشهادًا في أدبيات الكسر غير الخطي للخرسانة، نموذجًا بسيطًا وأنيقًا سبق وصفه نوعيًا. وفي هذا النموذج يتكون الشق من جزأين، الشكل O.14:



شكل O.14: نموذج هيلربورغ للشق الوهمي

1. شق حقيقي أو فيزيائي لا يمكن نقل أي إجهادات عبره. وفي هذه المنطقة يوجد انقطاع في كل من الإزاحة والإجهاد.
2. شق وهمي، أو منطقة عملية الكسر (FPZ)، أمام الشق السابق، ويتصف بـ:

(a) إجهاد ذروة عند طرفه يساوي مقاومة شد الخرسانة؛
(b) توزيع إجهاد متناقص من f'_t عند طرف الشق الوهمي إلى صفر عند طرف الشق الفيزيائي.

وتجدر ملاحظة وجود انقطاع في الإزاحة واستمرارية في الإجهاد على امتداد منطقة عملية الكسر.

99 هذا النموذج من أكثر النماذج استخدامًا في تحليل العناصر المحددة لميكانيكا الكسر غير الخطية، غير أن التعقيد الحسابي حدّ من تطبيقه على المنشآت "الهندسية". وإضافة إلى ذلك،

1. توجد نقطة انعطاف في الفرع الهابط.

(a) يرتبط الجزء الأول بالتشقق الدقيق (غير المتصل) أمام الشق الخالي من الإجهاد؛
(b) ويرتبط الجزء الثاني بتجسير الشق بالركام.

2. تمثل المساحة تحت المنحنى، وتسمى طاقة الكسر G_F (ولا ينبغي الخلط بينها وبين G_c أو معدل تحرير الطاقة الحرج)، مقياسًا للطاقة اللازمة لتكوين سطح وحدي من الشق.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

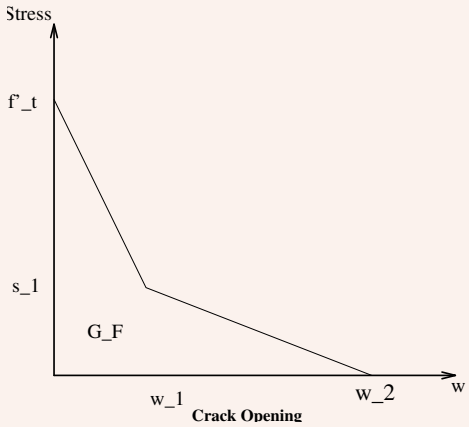
3. وجد Bažant وأوه (Bažant, 1984)، من تحليل بيانات اختبارات كثيرة، أنه يمكن تقدير G_F (بمعامل اختلاف يقارب 16%) من المعادلة التجريبية الآتية:

$$G_F = 0.0214(f_t' + 127) f_t'^2 \frac{d_a}{E_c} \tag{O.13}$$

حيث يقاس E_c وf_t' بالرطل لكل بوصة مربعة، ويقاس حجم الركام d_a بالبوصة.

4. G_F: أو طاقة الكسر. يوصى لسدود الجاذبية بقيمة 1.35×10^{-3} kip/in. (Saouma **andothers,** 1991). أما في السدود القوسية فيمكن على الأرجح زيادة هذه القيمة استنادًا إلى الاختبارات المخبرية. ويمكن أيضًا إجراء اختبارات مخبرية على لباب مستخرج للحصول على تقدير أفضل لـG_F، (Brüh-wiler, E., 1988).

5. ينبغي استخدام شكل مخطط التليّن ($\sigma - COD$)، وبوجه عام نموذج ثنائي الخط لتليّن الانفعال. وبالرجوع إلى الشكل O.15، ركزت بحوث حديثة كثيرة على التحديد التجريبي لطاقة الكسر G_F



شكل O.15: نماذج تليّن انفعال الخرسانة

والشكل الناتج لمخطط التليّن (Cedolin, Dei Poli **and** Iori, 1987; Petersson, 1981; Whit-man **andothers,** 1988; Jeang **and** Hawkins, 1985; Gopalaratnam **and** Shah, 1985; Duda, 1990; Giuriani **and** Rosati, 1986). ولتقييم أثر القيمة الدقيقة لـG_F وشكل منحنى التليّن في المحاكاة العددية، حُللت ثلاث مجموعات مختلفة من تجارب الكسر باستخدام متوسط طاقة الكسر المبلّغ عنها. وافترض لمخطط التليّن الشكل الثنائي الخطي المقترح في (Whitman **andothers,** 1988)، الشكل O.15. ويمكن تعريف هذا النموذج البسيط تعريفًا وحيدًا بدلالة مقاومة الشد f_t' وطاقة الكسر G_F. وتبين في (Brühwiler **and** Whitman, 1990) أن النقاط المثلى لخرسانة أقصى حجم ركام فيها 1" هي:

$$s_1 = 0.4 f_t' \tag{O.14}$$

$$w_1 = 0.8 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.15}$$

$$w_2 = 3 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.16}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أما القيم المقابلة للخرسانة الإنشائية (Whitman **andothers,** 1988) فهي:

$$s_1 = \frac{f_t'}{4} \tag{O.17}$$

$$w_1 = 0.75\frac{G_F}{f_t'} \tag{O.18}$$

$$w_2 = 5\frac{G_F}{f_t'} \tag{O.19}$$

حيث f_t' مقاومة الشد أحادي المحور. وفي سياق تحليل ميكانيكا الكسر غير الخطية، لا يجوز أخذ مقاومة الشد هذه مساوية للصفر، وإلا فلن توجد منطقة عملية كسر. ولأن f_t' نادرًا ما تحدد تجريبيًا، يفترض أنها تساوي 9% من f_c'، (Mindess **and** Young, 1981).

6. بدلًا من اختبار الشد المباشر، يمكن إجراء اختبار انحناء محكوم بالانفعال، وتحديد طاقة الكسر G_F من المساحة تحت منحنى الحمل–الإزاحة المقابل.
7. في التحليل الديناميكي تعتمد خصائص كسر خرسانة السدود على معدل التحميل والتحميل المسبق معًا. وتبين نتائج الاختبارات (Brühwiler **and** Whitman, 1990) أن خصائص الكسر تزداد عمومًا مع زيادة معدل التحميل. غير أن التحميل المسبق الديناميكي بالضغط يخفض خصائص الكسر عند معدلات التحميل شبه الساكنة والعالية.

O.7 الشروط الحدية

100 يمكن عمومًا استخراج الشروط الحدية من معادلات أويلر–لاغرانج المقابلة للمعادلة التفاضلية الحاكمة (حفظ كمية الحركة أو الاتزان في ميكانيكا الأجسام الصلبة).

101 لمتغيرات الحقل التي تكون فيها أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية الحاكمة من الرتبة $2m$، يكون لدينا (§46.2.6):

الشروط الأساسية (أو المفروضة أو الهندسية)، وسميت أساسية لأنها لازمة لاشتقاق معادلة أويلر، إذا كان $\eta(a)$ أو $\eta(b)$ =0. وتتضمن مشتقات من الرتبة صفر (متغير الحقل نفسه) حتى m-1. وتقابل رياضيًا مسائل ديريشليه الحدية.

الشروط الطبيعية (أو الساكنة)، فإذا تُركت η اعتباطية لزم استخدام $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ عند $x = a$ أو b. وتتضمن مشتقات من الرتبة m فما فوق. وتقابل رياضيًا مسائل نيومان الحدية.

مسائل القيم الحدية المختلطة تحدد فيها الشروط الأساسية والطبيعية على أجزاء متكاملة من الحد (مثل Γ_u وΓ_t). وتقابل رياضيًا ما يسمى مسائل روبن الحدية.

يقدم الجدول O.3 أمثلة من التحليل الإنشائي.

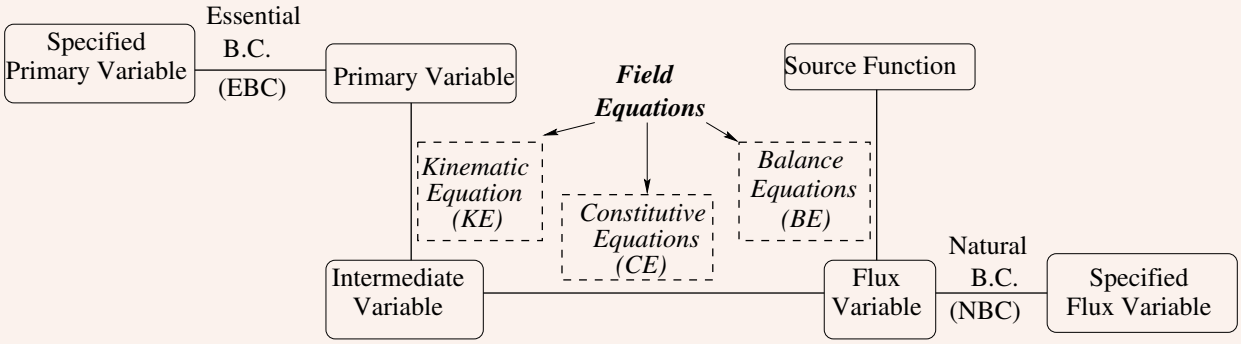
الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

جدول O.3: أمثلة للشروط الحدية في التحليل الإنشائي

المسألة	عضو محوري حمل موزع	عضو انحناء حمل موزع
المعادلة التفاضلية	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
الشرط الأساسي $[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
الشرط الطبيعي $[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ أو $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^3w}{dx^3}$ و $\frac{d^2w}{dx^2}$ أو $M = EIw_{,xx}$ و $V = EIw_{,xxx}$

O.8 مخطط تونتي

102 لمسألة الحقل المتجهي هذه، يظهر مخطط تونتي المقابل (الشكل O.16) في الشكل O.17.



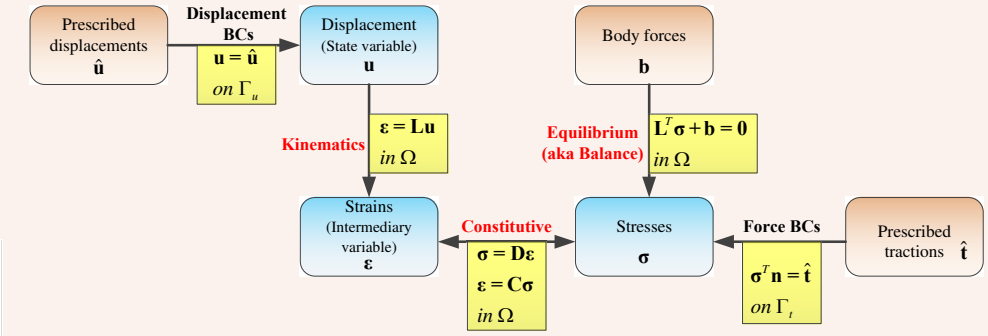
شكل O.16: مكونات مخطط تونتي (Felippa, 2000)

O.9 مفهوم القوة الداخلية

103 لما كان إجراء التحليل بدلالة الكميتين الأساسيتين، الإجهاد والانفعال، غير يسير دائمًا، فمن الملائم استبدال قيمهما التكاملية بهما: القوى والإزاحات *الداخلية*.

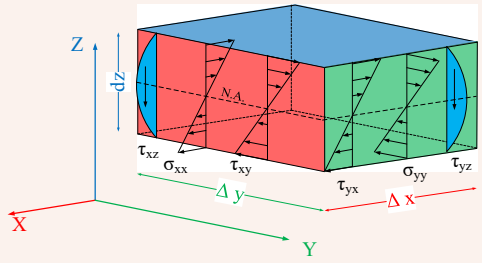
104 نعرّف *القوى الداخلية* بأنها تكاملات الإجهادات. وللصفائح لدينا الشكل O.18 وتعطى المحصلات لكل

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل O.17: مخطط تونتي لميكانيكا الأجسام القابلة للتشوه

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل O.18: القوى الداخلية بدلالة الإجهادات

وحدة عرض بـ

$$\text{قوى الغشاء (المحورية)} \quad \mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz \quad \rightarrow N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \text{ إلخ.}$$

$$\text{عزوم الانحناء} \quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz \quad \rightarrow M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \text{ إلخ.}$$

$$\text{قوى القص المستعرض} \quad \mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau} dz \quad \rightarrow V_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \text{ إلخ.}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

P تحية تقدير إلى ويسترغارد

ملخص

في نظري، يبرز ويسترغارد بوصفه واحداً من أكثر مهندسي القرن العشرين تميزاً، وربما أبرزهم. وقد اتبع منهجاً لم يشاركه فيه إلا عدد قليل من الأعلام، وفي مقدمتهم ستيفن تيموشينكو؛ إذ رسخ قدماً في الهندسة الإنشائية وأخرى في ميكانيكا المنشآت، ووظف الميكانيكا والرياضيات المتقدمة لحل مسائل ذات أهمية تطبيقية مباشرة. وهذا الموقف المزدوج، الذي جسده رانكين من قبله (§6.8.2)، هو تحديداً المثال المهني الذي طالما احتذيت به.

ومن ثم، فليس من قبيل المصادفة أن يقدم ويسترغارد معادلتين أساسيتين: إحداهما في ميكانيكا الكسر، والأخرى في هندسة السدود، وهما مجالان وثيقا الصلة بعملي.

وتقديراً لهذا الرمز الفكري، خصصت ملحقاً من هذا الكتاب لاثنين من أشهر اشتقاقاته.

يعرض الاشتقاق الأول حلاً تحليلياً لحقل الإجهاد عند رأس الشق، وقد مثل رسمياً ميلاد تخصص جديد هو ميكانيكا الكسر. وأتعمد استكمال هذا الاشتقاق بكل صرامته، وهي مهمة ليست باليسيرة، لأن على المهندسين أحياناً أن يتوقفوا لتأمل جمال حل رياضي وضع في خدمة مسألة عملية عميقة الأهمية.

أما الاشتقاق الثاني، الذي طوره أثناء تعاونه مع مكتب الاستصلاح في تصميم سد هوفر، فقد استنبط فيه ويسترغارد تعبيراً بالغ الأناقة للقوى الهيدروديناميكية التي تولدها حركة الزلزال على وجه السد.

وفي الحالتين، وظف ويسترغارد تمكنه الاستثنائي من الميكانيكا والرياضيات بوضوح في خدمة الهندسة، محولاً النظرية المجردة إلى حلول ذات قيمة تطبيقية دائمة.

P.1 حقل الإجهاد عند رأس الشق 2892
P.1.1 دالة آيري للإجهاد 2892
P.1.2 الحل 2895
P.2 تفاعل المائع والمنشأ 2899

P.1 حقل الإجهاد عند رأس الشق

P.1.1 دالة آيري للإجهاد

1 لفهم حل ويسترغارد **(west)** فهماً كاملاً، ينبغي أولاً عرض دوال آيري للإجهاد بصياغتها باستخدام المتغيرات المركبة. إن تتبع الاشتقاق الكامل لمعامل شدة الإجهاد عند رأس الشق، بكل ما فيه من صرامة ودقة وأناقة رياضية، هو اتصال مباشر بفكر عالم متمكن في الميكانيكا. ومع ذلك، كان هذا الفكر نفسه لمهندس ممارس قادر على تحويل التحليل المجرد إلى حلول ملموسة لمسائل تطبيقية ملحة، وهي ازدواجية ستتضح في القسم الآتي.

2 في مسائل المرونة، نبحث عن دالة في الإحداثيات المكانية تحقق معادلتي الاتزان والتوافق معاً. وقد بين آيري أنه يمكن تعريف دالة من هذا النوع $\Phi(\mathbf{x})$ بحيث:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2}. \tag{P.1}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

يمكن إثبات، بالتعويض المباشر لهذه المعادلات في المعادلة O.8، أن معادلة الاتزان تتحقق تلقائياً.

3 بالنسبة إلى المواد الخطية المرنة ومتساوية الخواص، يتطلب تحقق معادلة التوافق أيضاً أن تكون Φ بحيث:

$$\nabla^2\left(\nabla^2\Phi\right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\right) = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{P.2}$$

حيث يمثل ∇^2 **مؤثر لابلاس**. ويسمى حل معادلة لابلاس **دالة توافقية**.

4 في الإحداثيات القطبية:

$$\nabla^2\left(\nabla^2\Phi\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right)$$

5 وبذلك تتيح لنا دالة آيري للإجهاد حل مسائل المرونة، شريطة اختيار الصيغة المناسبة لـΦ التي تحقق شروط الحدود الطبيعية (الإجهادات).

المتغيرات المركبة

6 كما سيتبين في الفصل التالي، يمكن استخدام دالة آيري للإجهاد بمتغيرات حقيقية لتحديد حقل الإجهاد حول ثقب دائري. إلا أن تحليل 1) الإجهادات حول ثقب إهليلجي (إنغليس)، والإجهادات عند رأس شق (ويسترغارد)، يتطلب توسيع دوال آيري للإجهاد إلى المتغيرات المركبة.

7 نعرف أولاً العدد المركب z كما يأتي:

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$$

حيث $i=\sqrt{-1}$، وx_1 وx_2 هما الإحداثيان الديكارتيان، وr وθ هما الإحداثيان القطبيان.

8 ونعرف كذلك **الدالة التحليلية** $f(z)$ بأنها دالة تعتمد مشتقاتها على z وحده. وبتطبيق قاعدة السلسلة:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(z) = \frac{\partial}{\partial z}f(z)\,\frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z) \tag{P.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}f(z) = \frac{\partial}{\partial z}f(z)\,\frac{\partial z}{\partial x_2} = f'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x_2} = if'(z) \tag{P.4}$$

9 إذا كانت $f(z)=\alpha+i\beta$، حيث α وβ دالتان حقيقيتان في x_1 وx_2، وكانت $f(z)$ تحليلية، فإنه ينتج من المعادلتين P.3 وP.4:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial x_1} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1} = f'(z),\\ \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2} = if'(z)\end{aligned}\right\} \qquad \underbrace{i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right)}_{\text{المعادلة } 1\, i^{st}} = \underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}}_{\text{المعادلة } 2^{nd}}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 بمساواة الجزأين الحقيقي والتخيلي نحصل على معادلات **كوشي–ريمان**:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \beta}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = -\frac{\partial \beta}{\partial x_1}$$

11 إذا اشتققنا هاتين المعادلتين، أولاً بالنسبة إلى x_1 ثم بالنسبة إلى x_2، وجمعنا النتيجتين، نحصل على:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} = 0 \qquad \text{أو} \qquad \nabla^2 (\alpha) = 0$$

وهي معادلة لابلاس.

12 وبالمثل نحصل على:

$$\nabla^2 (\beta) = 0$$

ومن ثم فإن كلاً من الجزء الحقيقي (α) والجزء التخيلي (β) للدالة التحليلية يقدم، على حدة، حلاً لمعادلة لابلاس؛ وتكون α وβ **دالتين توافقيتين مترافقتين**.

دوال آيري المركبة للإجهاد

13 يمكن إثبات أن أي دالة إجهاد يمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$\Phi = \mathrm{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)] \tag{P.5}$$

بشرط أن تكون كل من $\psi(z)$ (بساي) و$\chi(z)$ (كاي) دالة تحليلية توافقية في x_1 وx_2 (أي $\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0$). وغالباً ما تسمى ψ وχ الكمونات المركبة لكولوسوف–موسخيليشفيلي.

14 إذا كانت $f(z) = \alpha + i\beta$ وكانت α وβ حقيقيتين، فإن الدالة المرافقة تعرف كما يأتي:

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$$

15 ينبغي عدم الخلط بين الدوال المرافقة والدوال التوافقية المترافقة. ومن ثم يمكن إعادة كتابة المعادلة P.5 كما يأتي:

$$\Phi = \mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

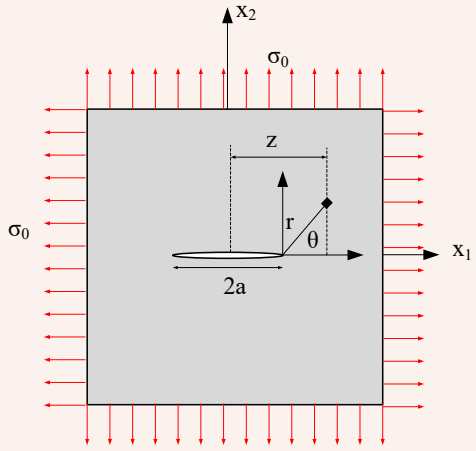
16 بتعويض المعادلة P.1.1 في المعادلة P.1 يمكن تحديد الإجهادات:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\mathrm{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned} \tag{P.6}$$

وبفصل الجزأين الحقيقي والتخيلي يمكن بعد ذلك إيجاد $\sigma_{22} - \sigma_{11}$، & σ_{12}.

17 ويمكن إيجاد الإزاحات بطريقة مماثلة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل P.1: شق في صفيحة لانهائية

P.1.2 الحل

18 بينما طور Kirsch, 1898 تعبيراً لتركيز الإجهاد حول ثقب دائري، ثم اشتق Inglis, 1913 التعبير المقابل للثقب الإهليلجي، فإن **west** هو الذي اشتق تعبير حقل الإجهاد عند رأس شق حاد.

19 لنعتبر صفيحة لانهائية معرضة لإجهاد منتظم ثنائي المحور σ_0، وفيها شق مركزي طوله $2a$، كما في الشكل P.1. نعلم من حل إنغليس أن الإجهاد عند رأس الشق يكون لانهائياً نظرياً، غير أنه لا يمكن اشتقاق طبيعة التفرد ولا حقل الإجهاد من ذلك الحل.

20 يبدأ حل ويسترغارد **(west)** بافتراض أن $\Phi(z)$ دالة توافقية، ومن ثم فهي تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2(\Phi) = 0$. ويرمز بـ$\phi'(z)$ و$\phi''(z)$ إلى المشتقتين الأولى والثانية، على الترتيب، وبـ$\bar{\phi}(z)$ و$\bar{\bar{\phi}}(z)$ إلى التكاملين الأول والثاني للدالة $\phi(z)$، على الترتيب.

21 افترض ويسترغارد أن:

$$\Phi = \mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + x_2\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)$$

هو حل لمسألة الشق[1]. ويفترض أن $\phi(z)$ تحليلية.

[1] ينبغي عدم الخلط بين دالة آيري للإجهاد Φ والدالة المركبة $\phi(z)$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

22 لنتحقق من أن Φ تحقق المعادلة ثنائية التوافق. بأخذ المشتقات الأولى، وتذكر أن $\frac{\partial}{\partial x_1} f(z) = f'(z)$، نحصل على:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\,\bar{\bar{\phi}}\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{0} \right] \tag{P.7}$$

$$= \mathrm{Re}\bar{\phi}(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \tag{P.8}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\bar{\phi}(z)\right) + \left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{Im}\phi(z) + \mathrm{Im}\phi(z) \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right] \tag{P.9}$$

$$= \mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \tag{P.10}$$

وبالمثل، بالاشتقاق بالنسبة إلى x_2، وتذكر من المعادلة P.4 أن $\frac{\partial}{\partial x_2} f(z) = i f'(z)$، نحصل على:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + [x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)\right) + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \mathrm{Im}\bar{\phi}(z)] \tag{P.11}$$

$$= -\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + x_2 \mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \tag{P.12}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Re}\phi(z) \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \tag{P.13}$$

$$= -x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) + \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.14}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \mathrm{Re}\phi'(z) \tag{P.15}$$

بعد اشتقاق تعبيرات الإجهادات والمشتقات الجزئية الثانية لـΦ، يبين التعويض في المعادلة P.2 أن المعادلة ثنائية التوافق متحققة، ومن ثم تكون Φ حلاً صالحاً.

23 للتحقق مباشرة من أن الإجهادات تحقق بالفعل معادلتي الاتزان والتوافق، وهو ما يترتب على تحقيق Φ للمعادلة ثنائية التوافق، نحصل من المعادلة O.8 في بعدين 2D على:

1. الاتزان:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{P.16}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \tag{P.17}$$

لننظر في المعادلة الأولى:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathrm{Re}\phi(z)-x_2\mathrm{Im}\phi'(z)]\\ &= \mathrm{Re}\phi'(z)-x_2\mathrm{Im}\phi''(z)\\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}[-x_2\mathrm{Re}\phi'(z)]\\ &= -\mathrm{Re}\phi'(z)+x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi'(z)\\ &= -\mathrm{Re}\phi'(z)+x_2\mathrm{Im}\phi''(z)\end{aligned}$$

بتعويض هاتين المعادلتين في المعادلة P.16 نحصل على صفر. وبالمثل، يمكن إثبات تحقق المعادلة P.17.

2. التوافق: في حالة الانفعال المستوي، تعطى الإزاحات بالعلاقتين:

$$\begin{aligned}2\mu u_1 &= (1-2\nu)\mathrm{Re}\,\bar\phi(z)-x_2\mathrm{Im}\phi(z)\\ 2\mu u_2 &= 2(1-\nu)\mathrm{Im}\bar\phi(z)-x_2\mathrm{Re}\,\phi(z)\end{aligned}$$

وتستخرج الإزاحات بتكامل الانفعالات، التي تستخرج بدورها من الإجهادات. وللتحقق نحسب:

$$\begin{aligned}2\mu\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\ &= (1-2\nu)\mathrm{Re}\phi(z)-x_2\mathrm{Im}\phi'(z)\\ &= (1-\nu)\underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z)-x_2\mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{11}}-\nu\underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z)+x_2\mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{22}}\\ &= (1-\nu)\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}\end{aligned}$$

وبتذكر أن:

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

فإن:

$$E\varepsilon_{11}=(1-\nu^2)\sigma_{11}-\nu(1+\nu)\sigma_{22}$$

وهذا يبين أن $E\varepsilon_{11}=\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}-\sigma_{33})$، وفي حالة الانفعال المستوي: $\varepsilon_{33}=0\Rightarrow\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ وكذلك $E\varepsilon_{11}=(1-\nu^2)\sigma_{11}-\nu(1+\nu)\sigma_{22}$

24 حتى الآن عرفت Φ بصورة مستقلة عن المسألة، وحددت الإجهادات بدلالتها، ثم تحققنا من استيفاء المعادلة ثنائية التوافق.

25 بعد ذلك، ينبغي تحديد ϕ بحيث تتحقق شروط الحدود. ولأسباب ستتضح لاحقاً، نعمم المسألة إلى حالة إجهاد ثنائي المحور مؤثر في الصفيحة. ومن ثم:

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

1. على امتداد الشق: عند $x_2 = 0$ و$-a < x_1 < a$ يكون $\sigma_{22} = 0$ (شق خال من الجر).
2. عند اللانهاية: عند $x_2 = \pm\infty$ يكون $\sigma_{22} = \sigma_0$.

نلاحظ من المعادلة P.10 أنه عند $x_2 = 0$ يختزل σ_{22} إلى:

$$(\sigma_{22})_{x_2=0} = \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.18}$$

26 نتوقع كذلك أن $\sigma_{22} \to \sigma_0$ عندما $x_1 \to \infty$، وأن يكون σ_{22} أكبر من σ_0 عندما $|\, x_1 - a \,| > \varepsilon$ بسبب التفرد المتوقع الذي تنبأ به إنغليس. ومن ثم يمكن اختيار σ_{22} بالصيغة $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{1-\frac{a}{x_1}}$، ولتحقيق التناظر يعمم ذلك إلى $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{\left(1-\frac{a^2}{x_1^2}\right)}$. إلا أننا نحتاج أيضاً إلى أن يكون $\sigma_{22} = 0$ عندما $x_2 = 0$ و$-a < x_1 < a$، ولذلك ينبغي أن تصبح الدالة $\phi(z)$ تخيلية على امتداد الشق، ومن ثم:

$$\sigma_{22} = \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}}\right)$$

27 ومن المعادلة P.18 نحصل على الآتي، مع ملاحظة الانتقال من x_1 إلى z:

$$\phi(z) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

28 إذا أجرينا تغييراً للمتغير وعرفنا $\eta = z - a = re^{i\theta}$، وافترضنا أن $\frac{\eta}{a} \ll 1$، وتذكرنا أن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$، أمكن إعادة كتابة الحد الأول في المعادلة P.10 كما يأتي:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\phi(z) &= \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\eta^2+2a\eta}{\eta^2+a^2+2a\eta}}} \approx \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{2a\eta}{a^2}}} \\
&\approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2\eta}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2re^{i\theta}}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}e^{-i\frac{\theta}{2}} \approx \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

29 بتذكر أن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ وأن $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$، نعوض $x_2 = r\sin\theta$ في الحد الثاني:

$$x_2 \mathrm{Im}\phi' = r\sin\theta \mathrm{Im}\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\frac{a}{2(re^{i\theta})^3}} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

30 بجمع المعادلات السابقة مع المعادلات P.10 وP.14 وP.15 نحصل على:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots\\ \sigma_{11} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots\\ \sigma_{12} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{3\theta}{2}+\cdots\end{aligned}$$

31 هذه هي حالة الإجهاد ثنائي المحور. ويمكن استعادة حالة الإجهاد أحادي المحور بتراكب ضغط في اتجاه x_1 مقداره $-\sigma_0$، غير أن ذلك لا ينبغي أن يؤثر في حقل الإجهاد قرب رأس الشق.

32 باتباع منهج مماثل، يمكن اشتقاق تعبيرات حقل الإجهاد حول رأس شق في صفيحة معرضة لإجهادات قص بعيدة المجال (النمط II كما سيعرف لاحقاً)، وذلك باستخدام التعبير الآتي لـϕ:

$$\Phi_{II}(z) = -x_2\mathrm{Re}\bar{\phi}_{II}(z) \Rightarrow \phi_{II} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

وللشق نفسه عند تعرضه لإجهادات قص خارج المستوى (النمط III):

$$\Phi'_{III}(z) = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

33 قدم إروين[2] (Irwin, 1957) مفهوم معامل شدة *الإجهاد*، ويعرف كما يأتي:

$$\left\{\begin{array}{c}K_{\mathrm{I}}\\K_{\mathrm{II}}\\K_{\mathrm{III}}\end{array}\right\} = \lim_{r\to 0,\theta=0}\sqrt{2\pi r}\left\{\begin{array}{c}\sigma_{22}\\\sigma_{12}\\\sigma_{23}\end{array}\right\}$$

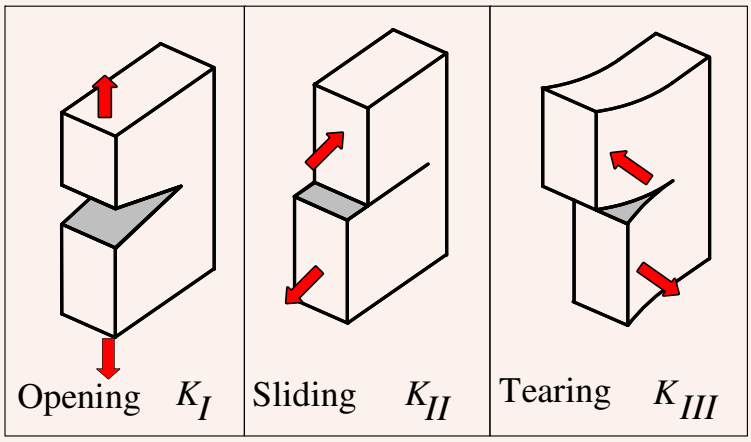
حيث تمثل σ_{ij} الإجهادات قرب رأس الشق، وترتبط K_i بثلاث حركات حركية مستقلة لسطحي الشق العلوي والسفلي أحدهما بالنسبة إلى الآخر، كما في الشكل P.2.

P.2 تفاعل المائع والمنشأ

من أطروحة الدكتوراه "Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR" للباحث Mahdavi, 2023.

[2] كلف مكتب البحوث البحرية (ONR) إروين بدراسة فشل سفن ليبرتي خلال الحرب العالمية الثانية، مثلما كان إنغليس قد درس قبل ثلاثين عاماً فشل السفن البريطانية.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل P.2: أنماط إزاحة الشق المستقلة

في بحث رائد، طور Westergaard, 1933 نموذجاً لقياس القوى الهيدروديناميكية المؤثرة في السد باستخدام كتلة مضافة (أو كتلة مركزة في سياق العناصر المحددة). وسيستخدم هذا النموذج في التحليل الحالي.

على الرغم من انتشار اعتماد هذا النموذج، فإنه، حسب علم المؤلف، لم يوصف وصفاً كاملاً؛ بل تعرض معادلاته النهائية وتعتمد مباشرة.

وتتميز دراسة ويسترغارد بأوجه عدة. فهي، أولاً وقبل كل شيء، تقدم حلاً لمسألة هندسية عملية للغاية، راسخة الجذور في مبادئ الميكانيكا. وثانياً، لم يكن ويسترغارد، رغم الصرامة الملازمة للميكانيكا، متصلباً في فروضه؛ بل عرف كيف يخفف بعض الافتراضات عند الضرورة للوصول إلى حل.

النموذج النظري

يمكن الانتقال مباشرة إلى §P.2 لحساب الكتلة المضافة الممثلة للقوى الهيدروديناميكية، لكن فهم اشتقاقها مهم لأنه يجسد مزجاً بالغ الأناقة بين الرياضيات والميكانيكا والهندسة.

لذلك يستعرض هذا القسم بتفصيل واف البحث الرائد لـ(Westergaard, 1933).

عندما تكون ضغوط الماء معلومة، يمكن حساب أثرها في الإجهادات بالطرائق المستخدمة للأحمال الساكنة. ولذلك فإن المسألة التي تتطلب اهتماماً خاصاً هي تغير ضغوط الماء أثناء الزلزال.

الرموز

تعتمد الرموز الآتية:

x, y, z	إحداثيات مستطيلة؛ يبين الشكل P.3 المحورين x وy. يمتد محور x على سطح الماء غير المضطرب، ويتجه نحو أعلى المجرى، ويكون عمودياً على الوجه المستوي للسد من جهة أعلى المجرى؛ أما محور y فيتجه رأسياً إلى الأسفل.
t	الزمن.
h	عمق الخزان.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

g تسارع الجاذبية. (المعادلة P.26)
w وزن الماء لكل وحدة حجم. (المعادلة P.26)
k معامل الحجم للماء (الضغط مقسوماً على النقص في الحجم لكل وحدة حجم). (المعادلة P.26)
ξ وη إزاحتا جسيم ماء في اتجاهي x وy، على الترتيب.
ξ_0 قيمة ξ عند وجه السد من جهة أعلى المجرى.
σ الإجهاد في الماء الناتج من الفعل الديناميكي، وموجبه شد (يدمج مع الضغط الهيدروستاتيكي الموجود مسبقاً).
α نسبة تقيس شدة الزلزال = أكبر مركبة أفقية لتسارع الأساس مقسومة على g.
T دور الاهتزازات الأفقية للأساس.
r, v سعة الاهتزازات الأفقية للأساس وسرعتها العظمى.
v_n سرعة الصوت في الماء.
i طول موجات التمدد في الماء عندما يكون الدور T.
c_n قيمة تعرفها المعادلتان P.33، وP.37 (حيث $n = 1, 3, 5 \ldots$).
p أكبر ضغط للماء على السد عند العمق y بسبب الفعل الديناميكي.
p_0 قيمة p عند القاع $(y = h)$.
Q القص الأفقي الذي تولده الضغوط p في سد ثقلي مستقيم عند العمق y.
Q_0 قيمة Q عند القاع $(y = h)$.
M عزم الانحناء الذي تولده الضغوط p في سد ثقلي مستقيم عند العمق y.
M_s قيمة M عند القاع $(y = h)$.
o, K معاملان في الصيغ التقريبية (من المعادلة P.45 إلى P.51).
b, b' بعدان مبينان في الشكل P.5.

معادلات حركة الماء

لأن الحركات المعنية صغيرة، يمكن استخدام معادلات بسيطة نسبياً، هي معادلات الصوت في السائل. ويمكن تفسير هذه المعادلات في إطار نظرية مرونة الأجسام الصلبة بوصفها معادلات مرونة من دون إجهادات قص. ويعبر عن القوى المؤثرة في عنصر حجمه $dxdydz$ بدلالة الإجهاد σ، الذي يجب تراكبه على الضغط الهيدروستاتيكي الموجود قبل الاضطراب.

باستخدام مبدأ دالمبير للاتزان الديناميكي لمائع نيوتوني (أي غير قابل للانضغاط)، المعادلة O.3.4، نحصل على:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{P.20}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

هاتان هما معادلتا الحركة في اتجاهي x وy. ولا تؤخذ الحركة في اتجاه z (الرأسي) في الحسبان لأن الحركة موازية للمستوى xy. ويعطى الانفعال بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

بالنسبة إلى الماء:

$$p = \frac{1}{2}\sigma_{ii} = k\varepsilon_{ii}$$

ومن ثم يمكن إعادة كتابة الإجهاد كما يأتي:

$$\sigma = k\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{P.21}$$

وبذلك تحكم المعادلات P.19 وP.20 وP.21 الحركة. وتبين المقارنة بالمعادلات العامة للهيدروديناميكا للموائع القابلة للانضغاط أن هذه المعادلات لا تنطبق إلا عندما تكون ξ وη صغيرتين، وعندما تكون، إضافة إلى ذلك، نسبة كل من حاصل الضرب $\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ وحاصل الضرب $\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ إلى $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ مهملة.

في الحلول الواردة في المعادلات P.31 وP.32 وP.35، يتبين أن رتبة هذه النسب تساوي سعة الحركات مقسومة على عمق الخزان.

دراسة أولية بافتراض الحركة الأفقية فقط

على الرغم من إمكان حدوث إزاحة رأسية للماء المؤثر في السد، تهمل هذه الدراسة الأولية الحركة الرأسية، ومع ذلك فإنها تلقي بعض الضوء على المسألة. وعند $\eta = 0$ تعطي المعادلتان P.19 وP.21:

$$k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.22}$$

وهذه هي معادلة الموجة (المعادلة 34.16)، وحلها العام على الصورة:

$$G(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_s}\right)$$

للتبسيط، نفترض أن السد يتحرك أثناء الزلزال حركة توافقية بسيطة دورها T وتسارعها الأعظمي αg، ويحدث ذلك عندما $t = 0, T, 2T$، وهكذا. ومن ثم تعطى الحركة بالعلاقة:

$$\xi_0 = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^4}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{P.23}$$

عندما $\xi_{x=0} = \xi_0$، يتحقق حل المعادلة P.22 بالصيغة:

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\left[\beta\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + (1-\beta)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v_s}\right)\right] \tag{P.24}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث β ثابت، و:

$$v_s = \sqrt{\frac{gk}{w}} \tag{P.25}$$

v_s هي سرعة الموجة في الماء، أي سرعة الصوت؛ وبسبب التردد المنخفض لا تكون هذه الموجات مسموعة بوصفها صوتاً. وباستخدام:

$$\begin{aligned} k &= 300,000 \text{ lbs/in}^2 = 21,600 \text{ton/ft}^2 \\ g &= 32.2 \text{ ft/sec}^2 \\ w &= 0.03125 \text{ ton/ft}^3 \end{aligned} \tag{P.26}$$

نحصل على $v_s = 4,718$ ft/sec.

يمثل الحد في المعادلة P.24 الذي يحتوي المعامل β أمام جيب التمام موجات تتحرك مبتعدة عن السد، بينما يمثل الحد الذي يحتوي المعامل $1-\beta$ موجات تتحرك نحو السد.

تعطي المعادلتان P.24 وP.21 عند $x = 0$، أي عند وجه السد من جهة أعلى المجرى:

$$\sigma = (1-2\beta)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw}\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{P.27}$$

عندما $\beta > 1/2$، تسود الموجات المبتعدة عن السد على الموجات المتجهة نحوه.

تبين المعادلة P.27 أن الضغط الأعظمي على السد، أي $(-\sigma)_{max}$، يحدث عند الأزمنة $t = \frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}, \ldots\ldots$، ويساوي:

$$p = (2\beta-1)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw} \tag{P.28}$$

تجدر الإشارة إلى أن أكبر تسارع للسد، ومن ثم أكبر قوى عطالة ناتجة من كتلته المتحركة، يحدث عندما $t = 0, T, 2T, \ldots$. ولذلك ينبغي جمع الإجهادات في السد الناتجة من الضغوط p وقوى العطالة على نحو مماثل لجمع تيارين متناوبين بينهما فرق طور مقداره ربع الدور.

من المعادلة P.23 تكون السرعة العظمى للسد:

$$v = \frac{\alpha g T}{2\pi} \tag{P.29}$$

وبتعويض المعادلتين P.25 وP.29 في المعادلة P.28 نحصل على قيمة الضغط:

$$p = (2\beta-1)\frac{v}{v_s}k \tag{P.30}$$

عندما $\beta = 1$، أي عندما تتحرك الموجات مبتعدة عن السد فقط، تعطي المعادلة P.28 (أو المعادلة P.30)، باستخدام الثوابت العددية في المعادلة P.26 ومع $\alpha = 0.1$ و$T = \frac{4}{3}$ sec، القيمة $p = 3.13$ tons/ft^2. لكن لأن الماء يستطيع "الإفلات" رأسياً، تكون الضغوط الفعلية أقل كثيراً ولا تتوزع بانتظام على عمق الخزان. وينبغي أن يعطي الحل الصحيح ضغطاً صفرياً عند سطح الماء.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

الحل مع أخذ حركتي الماء الأفقية والرأسية في الحسبان

إذا سمح للماء بالحركة الرأسية أيضاً، ظل من اللازم تحقيق المعادلات P.19 وP.20 وP.21، ولكن تحت شروط الحدود الآتية:

1. $\sigma = 0$ عند $y = 0$؛
2. $\eta = 0$ عند $y = h$؛
3. $\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{T}$ عند $x = 0$؛
4. تتقارب σ إلى 0 عندما تكبر x.

وفقاً للشرط الأول، وعندما تكون قيم η صغيرة، لا يحدث فرق ملحوظ سواء فرضت $\sigma = 0$ عند السطح غير المضطرب أم عند السطح المضطرب.

يمكن بناء حل يحقق المعادلات الثلاث وشروط الحدود اعتماداً على متسلسلة فورييه:

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n} e^{-q_n} \sin \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.31}$$

$$\eta = \frac{\alpha q T^2}{\tau^3} \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,0_n..}^{n} \frac{1}{n c_n} e^{-q_n} \cos \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.32}$$

حيث:

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} \tag{P.33}$$

و:

$$q_n = \frac{n\pi c_n x}{2h}$$

تعطي المعادلة P.33:

$$\frac{1}{c_n} - c_n = \frac{16 w h^2}{n^2 c_n g k T^2} \tag{P.34}$$

ومن ثم تعطي المعادلات P.21 وP.31 وP.32 وP.34:

$$\sigma = -\frac{8\alpha w h}{\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n} \sin \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.35}$$

يسهل التحقق من أن المعادلات P.31 وP.32 وP.35 تحقق المعادلتين P.19 وP.20 عند جميع النقاط، وذلك بالاشتقاق بالنسبة إلى t, x وy. وتتحقق المعادلة P.21 لأنها استخدمت في اشتقاق المعادلة P.35 من

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

المعادلتين P.31 وP.32. كما يبين فحص تعبيري η وσ مباشرة تحقق الشروط 1 و2 و4. وللتحقق من الشرط 3 عند $x = 0$، تقارن المعادلة P.31 عند $x = 0$ بتعبير $\frac{\pi}{4}$ بدلالة متسلسلة فورييه عندما $0 < u < \pi$:

$$\frac{\pi}{4} = \sin u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{5}\sin 5u + \dots$$

في التطبيق الحالي، $u = \frac{\pi y}{2h}$.

وهكذا تتحقق جميع الشروط المحددة. غير أن صلاحية المعادلات تعتمد على شرط إضافي: يجب أن تكون الإزاحات التي يعرفها الحل، وكذلك مشتقاتها بالنسبة إلى x وy، صغيرة. ولذلك ينبغي النظر في إمكان حدوث إزاحات كبيرة. يرتبط أحد الاحتمالات بالرنين في الماء، أما الآخر فيدرس بتحديد شكل الموجة المتكونة عند سطح الماء والحركات الرأسية على امتداد وجه السد من جهة أعلى المجرى.

يناقش Westergaard, 1933 في بحثه إمكان الرنين في الماء، ويخلص إلى أنه يمكن إهمال هذا النوع من الرنين لأن من غير المرجح أن يقل دور الاهتزازات الرئيسة في الزلزال عن 1 sec.

الضغوط على السد

من المعادلة P.35، يحدث ضغط الماء الأعظمي ($p = -\sigma$ عند $x = 0$) عندما $t = 0, T, 2T, \dots$. ومن ثم:

$$p = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \sin \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.36}$$

حيث، كما سبق، ووفقاً للمعادلة P.35 وباستخدام الثوابت العددية الواردة في المعادلة P.26:

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.71889}{n^2}\left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{ T ft}}\right)^2}. \tag{P.37}$$

تحدث أكبر قيمة للضغط p عند قاع الخزان $(y = h)$، وتساوي:

$$p_0 = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 c_n} \tag{P.38}$$

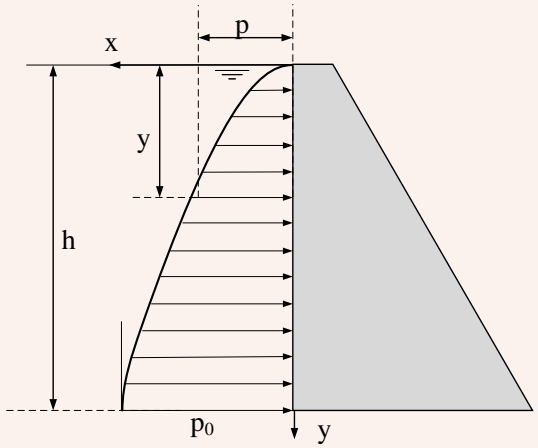
يبين الشكل P.3 منحنى توزيع الضغط p. ومن المعادلة P.38 تكون المشتقة $\frac{dp}{dy}$ لانهائية عندما $y = 0$، وصفرية عندما $y = h$؛ أي إن منحنى p له مماس أفقي عند القمة ومماس رأسي عند القاع.

يتضمن البندان 1 و2 من الجدول P.1 قيماً عددية للنسبة $\frac{p_0}{\alpha h}$ ولـp_0، محسوبة من المعادلتين P.37 وP.38. ولا تتغير النسبة $\frac{p_0}{\alpha h}$ إلا ببطء مع h. وعندما $h = 600$ ft و$T = \frac{4}{3}$ sec. (وكذلك عندما $h = 200$ ft و$T = \frac{4}{9}$ sec.)، وجد أن الضغط عند العمق $y = \frac{h}{2}$ يساوي $p = 0.814 p_0$.

قوى القص والعزوم

يفيد بوجه خاص التعبير عن قوى القص الأفقية وعزوم الانحناء الناتجة من الأحمال p في المقاطع الأفقية المختلفة للسد الذي يعمل ككابولي (سد ثقلي). ويعبر عن القص بوصفه قوة لكل وحدة عرض من الكابولي،

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل P.3: الضغوط على السد الناتجة من الفعل الديناميكي للماء (Westergaard, 1933)

جدول P.1: النتائج العددية المقابلة للدور $T = \frac{4}{3}$ ثانية

البند	عمق الخزان، h	ft	صغير	200	600	800
1	معامل الضغط، $\frac{p_0}{sh}$	^{3}ton/ft	0.023202	0.023407	0.025254	0,027257
2	الضغط عند القاع، p_0، عندما $a = 0,1$	^{2}ton/ft	⋯	0.468	1.515	2.181
3	معامل القص	^{3}ton/ft	0.016961	0.017094	0.018286	0.019576
4	القص عند القاع، Q_0، عندما $\alpha = 0.1$	ton/ft	⋯	68.4	658.3	1253
5	معامل العزم، $\frac{M_0}{\alpha h^3}$	^{3}ton/ft	0.0068089	0.0068576	0.0072947	0.0077666
6	العزم عند القاع، M_0، عندما $a = 0,1$	ft.-ton/ft	⋯	5486	157600	397600
7	$C = \frac{15M_0}{4\alpha m^2}$	^{3}ton/ft	0.025533	0.025716	0.027355	0.029125
8	$K = C\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h\ \text{sec.}}{1000\text{T ft.}}\right)^2}$	^{3}ton/ft	0.025533	0.025507	0.025282	0.025068
	المعاملات التقريبية من المعادلات P.45 وP.46 وP.47 وP.51 وP.53					
9	$\frac{p_0}{a^h}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0255	0.0257	0.0276	0.0296
10	$\frac{Q_0}{ah^2}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0170	0.0171	0.0184	0.0198
11	$\frac{M_0}{ah^3}$	$\frac{\text{ton}}{f^3}$	0.00680	0.00686	0.00736	0.00790

يساوي التسارع الأفقي الأعظمي αg. وعندما تتغير T، تبقى المعاملات المبينة ثابتة إذا تغيرت h بالنسبة نفسها؛ فمثلاً، تنطبق المعاملات المبينة لـ$h = 800$ft و$T = \frac{4}{3}$ sec. على الحالات $h = 600$ft و$T = 1$ sec.، و$h = 200$ft و$T = \frac{1}{3}$ sec.؛ كما تنطبق المعاملات المبينة لـ$h = 200$ft و$T = \frac{4}{3}$ sec. على الحالة $h = 600\text{ft}, T = 4\text{sec}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مثلاً بالطن لكل قدم، وعن العزم بوصفه عزماً لكل وحدة عرض، مثلاً بالقدم–طن لكل قدم (أو بالطن ببساطة). وتستخرج قوى القص Q عند العمق y وQ_0 عند العمق h، والعزوم M عند العمق y وM_0 عند العمق h، من p في المعادلة P.36 بالتكامل:

$$Q = \int_0^y p\,dy; \quad Q_0 = \int_0^h p\,dy; \quad M = \int_0^y Q\,dy; \quad M_0 = \int_0^h Q\,dy$$

بتعريف:

$$q = \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \tag{P.39}$$

نحصل على:

$$Q = \frac{16\alpha w h}{\pi^3}\left(q - \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n}\cos\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.40}$$

$$Q_0 = \frac{16}{\pi^3}\alpha v h^2 q \tag{P.41}$$

$$M = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2}\frac{y}{h} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^4 c_n}\sin\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.42}$$

$$M_0 = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}}}{n^4 c_n}\right) \tag{P.43}$$

$$\tag{P.44}$$

ترد أيضاً في الجدول P.1 القيم العددية للنسبتين $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$ و$\frac{M_0}{\alpha h^3}$، وكذلك قيمتا Q_0 وM_{00} المحسوبة من المعادلات P.39 وP.41 وP.43 (البنود 3 و4 و5 و6).

اشتقاق الصيغ التقريبية

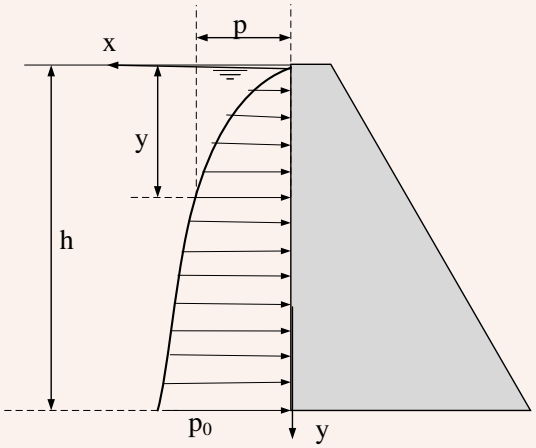
يمكن تبسيط الحسابات باستبدال مخطط الضغوط في الشكل P.3 بربع قطع ناقص (انظر المعادلة P.54 المشتقة أدناه)؛ ويصبح القطع الناقص دائرة عند رسمه بمقياس معين لـp. غير أن تمثيلاً تقريبياً أفضل يتحقق باستبدال المنحنى في الشكل P.3 بقطع مكافئ محوره رأسي، كما في الشكل P.4، حتى إن كان لهذا القطع المكافئ مماس مائل عند القاع. يؤدي القطع المكافئ إلى الصيغ البسيطة الآتية، حيث C معامل يعتمد على نسبة h إلى T:

$$p = C\alpha\sqrt{hy}; \qquad p_0 = C\alpha h \tag{P.45}$$

$$Q = \frac{2}{3}C\alpha y\sqrt{hy}; \qquad Q_0 = \frac{2}{3}C\alpha h^2 \tag{P.46}$$

$$M = \frac{4}{15}C_{\alpha y^2}\sqrt{hy}; \qquad M_0 = \frac{4}{15}C_\alpha h^2 \tag{P.47}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل P.4: التوزيع التقريبي للضغوط (Westergaard, 1933)

يمكن تحديد المعامل C بحيث تكون لـp_0 القيمة المحسوبة من المعادلة P.38، لكن تمثيلاً أفضل لمخطط الضغوط كله يتحقق بتحديد C بحيث تكون للعزم M_0 القيمة المحسوبة من المعادلة P.43. وبدلالة قيمة معلومة لـM_0 نحصل على:

$$C = \frac{15M_0}{4\alpha h^2}$$

يبين الجدول P.1 (البند 7) بعض القيم العددية لـC. ويلاحظ أن أبعاد C هي قوة لكل وحدة حجم؛ إذ إن ضرب C في ah يعطي الضغط بوصفه قوة لكل وحدة مساحة.

يتغير المعامل C ببطء ضمن المجال المدروس. وللتقديرات السريعة يمكن افتراض قيمة ثابتة مناسبة لـC؛ فمثلاً، عندما $\sec T \geq \frac{4}{3}$:

$$h < 310\text{ft} \qquad C = 0.026\frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.48}$$

$$310\text{ft} < h < 540\text{ft} \qquad C = 0.027\frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.49}$$

$$540\text{ft} < h < 680\text{ft} \qquad C = 0.028\frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.50}$$

هذه قيم متقطعة لـC، والأفضل التعبير عن C بدالة مستمرة تنطبق تقريبياً على المجال كله. والمصدر الرئيس لتغير C هو الثابت c_n المعرف بالمعادلة P.37 عند $n = 1$؛ إذ يظهر c_1 في مقام الحد الأول من كل مجموع في المعادلتين P.39 وP.43. ولذلك من المعقول تجربة صيغة تقريبية من النوع $C = \frac{K}{c_1}$، حيث K ثابت. وتكون الصيغة:

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}$$

حُسبت قيم K المبينة في الجدول 2 (البند 8) من هذه الصيغة باستخدام قيم C في البند 7. ويبين فحص

النتائج إمكان اعتماد القيمة $K = 0.0255$ ton-ft^{-3}. ومن ثم يعطى المعامل C في المعادلات P.45 وP.46 وP.47 بدقة مقبولة بالصيغة:

$$C = \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000\text{T}}\right)^2}} \tag{P.51}$$

الصيغة التقريبية الناتجة لضغوط الماء

تمثل الصيغة التقريبية الآتية للضغوط المائية العظمى، التي تضاف إلى الضغوط الهيدروستاتيكية الموجودة قبل الزلزال، النتيجة الرئيسة لهذه الدراسة؛ وهي تستخرج مباشرة من المعادلتين P.45 وP.51:

$$p = C\alpha\sqrt{hy} \tag{P.52}$$

$$= \frac{0.0255\text{ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}\alpha\sqrt{hy} \tag{P.53}$$

ومع ذلك، يمكن استخدام المعادلات P.45 وP.48 وP.49 وP.50 في الحسابات السريعة. وترد قيم المعاملات $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$، $\frac{p_0}{\alpha h}$ و$\frac{M_0}{\alpha h^2}$، المستخرجة باستخدام المعادلة P.53، في البنود 9 و10 و11 من الجدول 2. وتبين مقارنتها بالبنود 1 و3 و5، على الترتيب، أن التقريب مقبول.

إذا استخدم ربع قطع ناقص، كما اقترح أعلاه، بدلاً من القطع المكافئ لتمثيل الضغوط، نحصل على الصيغة التقريبية الآتية بعملية مماثلة لتلك التي أدت إلى المعادلة P.53:

$$p = \frac{0.0204 \text{ ton ft}^{-3}\alpha\sqrt{y(2h - y)}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}} \tag{P.54}$$

تعطي هذه الصيغة قيم M_0 نفسها تماماً التي تعطيها المعادلة P.53، لكنها تعطي قيماً أصغر من اللازم لـp_0 وللقوة الكلية Q_0. أما المعادلة P.53 فتعطي قيماً أكبر قليلاً من اللازم لـp_0 وQ_0، وهي المفضلة.

يلاحظ أن الضغوط p تحدث عندما $t = 0, T, 2T$، وهكذا؛ أي، انظر الشرط (3)، عندما يكون السد أثناء الاهتزاز في أقصى موضع نحو أسفل المجرى. ولذلك يجب إضافة الإجهادات الناتجة من هذه الضغوط المائية إلى الإجهادات العظمى الناتجة من تسارع كتلة السد نفسه.

عندما يكون السد أثناء الاهتزاز في أقصى موضع نحو أعلى المجرى، تنعكس الضغوط p وتصبح شدّاً. ويجب جمع إجهادات الشد هذه، شأنها شأن الضغوط عند أقصى موضع نحو أسفل المجرى، مع الضغوط الهيدروستاتيكية الموجودة مسبقاً. ويبين فحص القيم العددية في الجدول 2 أنه عند تضمين الضغط الجوي لا يرجح أن يصبح الإجهاد المحصل في الماء شدّاً أو حتى ضغطاً صغيراً جداً.

انطباق الصيغ على حالات غير الحالات المفترضة

اشتقت الصيغ بافتراض عدم وجود فيضان. وفي حالة الفيضان فوق المفيض، يقترح استخدام المعادلة P.53 مع قياس العمقين h وy من السطح المستوي للخزان على مسافة خلف السد. ثم يستخدم مخطط الضغوط المكافئ كما سبق، مع اقتطاع جزئه العلوي فقط.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مع أن الصيغ اشتقت بافتراض أن وجه أعلى المجرى مستوى رأسي، فإنها تعطي مؤشراً إلى الضغوط المتوقعة في حالات أخرى، مثل السدود القوسية.

الكتلة المضافة

لتصور الفعل الديناميكي للماء في السد، يمكن تخيل جسم معين من الماء يتحرك مع السد بينما يبقى باقي الخزان ساكناً. ولهذا الغرض يمكن تصور جسم الماء المتحرك مع السد متجمداً في طبقات أفقية من الكتلة المضافة (جليد في (Westergaard, 1933))، مع تفريغ باقي الخزان.

بعبارة موجزة، نستبدل القوى الهيدروديناميكية بقوى عطالة تولدها كتلة مضافة.

يجب تحديد شكل جسم الماء، أو الكتلة المضافة، المفترض تحركه مع السد بحيث تساوي قوى العطالة الضغوط التي يؤثر بها الماء فعلياً نتيجة الفعل الديناميكي.

يمكن تطبيق الكتلة المضافة بإحدى طريقتين:

زيادة العرض b كما صاغها أصلاً Westergaard, 1933. تمثل b هنا البعد العرضي للكتلة المضافة في اتجاه x عند العمق y. وتصبح الكتلة المقابلة لكل وحدة مساحة من وجه السد من جهة أعلى المجرى $\frac{bw}{g}$، وتصبح قوة العطالة المقابلة عندما يكون التسارع αg مساوية لـ $\frac{bw}{g} \times \alpha g = \alpha w b$، ويجب أن تساوي p، ومن ثم:

$$b = \frac{p}{\alpha w}$$

يكون شكل هذه الكتلة المضافة (أو الجليد) مطابقاً لشكل مخطط p عندما ترسم الضغوط بمقياس مناسب.

يكفي للغرض الحالي تحديد b بأحد التعبيرات التقريبية لـp؛ فمثلاً، قارن المعادلات P.45 وP.48 وP.49 وP.50:

$$p = 0.02734 \text{ ton-ft}^{-3} \alpha \sqrt{hy}$$

ومع $w = 0.03125$ ton-ft^{-3} تعطي:

$$b = \frac{7}{8}\sqrt{hy} \tag{P.55}$$

يبين الشكل P.5 جسم الماء أو الجليد المعرف بالمعادلة P.55. وبدلاً من جسم الماء، يمكن اعتبار جسم مكافئ من الخرسانة له الكتلة نفسها. فإذا كان وزن الخرسانة 144 lb/ft^3، يصبح البعد المقابل لـb:

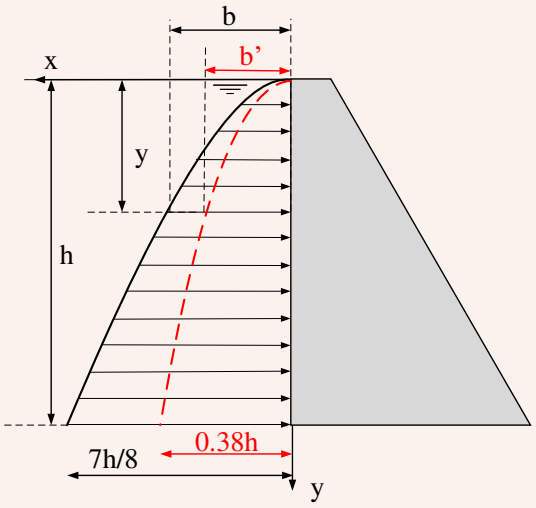
$$b' = 0.38\sqrt{hy}$$

يمثل المنحنى المتقطع في الشكل P.5 هذا الجسم الخرساني.

الكتلة المضافة منهج أنسب في سياق تحليل العناصر المحددة. ويتطلب إضافة كتلة لكل وحدة مساحة من وجه السد من جهة أعلى المجرى:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{p(y)}{\alpha g} \tag{P.56}$$

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل P.5: جسم الماء الذي يمكن اعتباره متحركاً مع السد (Westergaard, 1933)

يعطى الضغط الهيدروديناميكي مرة أخرى بالمعادلة P.53:

$$p(y) = C\alpha\sqrt{hy}$$

حيث حدد C في المعادلة P.51، ويمكن إعادة كتابته، من المعادلة P.37، كما يأتي:

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{16\rho_w H_w^2}{gkT^2}}} \tag{P.57}$$

بجمع المعادلات P.57–P.56، تكون العلاقة النهائية لتحديد الكتلة المركزة لكل وحدة مساحة من وجه السد من جهة أعلى المجرى، الناتجة من الفعل الديناميكي للماء في السد:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{K\sqrt{hy}}{g\sqrt{1 - \frac{16\rho_w h^2}{gkT^2}}} \tag{P.58}$$

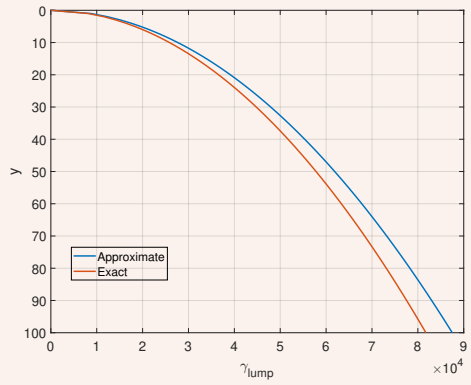
تجدر الإشارة إلى أن ويسترغارد أجرى في بحثه الأصلي تبسيطاً إضافياً للمعادلة السابقة، بإزالة الاعتماد على T، فحصل على:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{7}{8}\rho_w\sqrt{hy}$$

وهي الصيغة الأكثر وروداً في المراجع، لكنها أقل دقة من المعادلة P.58.

يوضح الشكل P.6 الفروق بين الحلين التقريبي والدقيق المستندين إلى المعادلات السابقة لنموذج سد افتراضي يبلغ فيه منسوب الماء h مقدار 100 m.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل P.6: الكتلة المركزة لكل وحدة مساحة بدلالة الارتفاع

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Q طريقتا نطاق الثقة وليفنبرغ–ماركوارت

مقتبس من أطروحة الدكتوراه "Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR" لـ2023 ,Mahdavi.

ملخص

يعرض هذا الملحق الأسس الرياضية والخوارزميات العملية لطريقتي نطاق الثقة وليفنبرغ–ماركوارت في التحسين، المستخدمتين في تعيين المعاملات ومسائل المربعات الصغرى اللاخطية. وانطلاقاً من توسعات متسلسلة تايلور والشروط الضرورية والكافية للمثالية، يطور الملحق نظرية التحسين القائم على التدرج، وطريقة غاوس–نيوتن، واستراتيجية التخميد التكيفي في طريقة ليفنبرغ–ماركوارت، التي توازن بين سرعة التقارب والمتانة في المسائل الصعبة. كما يقدم الإطار النظري والحاسوبي الكامل المشار إليه في أقسام التحليل الإنشائي ومعايرة المعاملات، بما في ذلك معايير التقارب، واستراتيجيات التحجيم، والتقريبات الموضعية لعدم اليقين في تقدير المعاملات.

Q.1 نطاق الثقة 2914
Q.2 الخوارزمية 2917
Q.3 صياغة MATLAB® 2918
Q.4 التصور الآني 2920

[1] لحل مسائل التصغير في الدوال الملساء، تستعمل مبرهنة تايلور عادة. وبافتراض أن $f : R^n \to R$ قابلة للاشتقاق باستمرار وأن $p \in R^n$، يكون لدينا (Nocedal **and** Wright, 2006):

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \tag{Q.1}$$

لقيمة ما $t \in (0,1)$. وإذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين باستمرار، يكون لدينا أيضاً:

$$\nabla f(x+p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp)p\,dt \tag{Q.2}$$

وكذلك

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2}p^T \nabla^2 f(x+tp)p \tag{Q.3}$$

لقيمة ما $t \in (0,1)$. تُشتق الشروط الضرورية للمثالية بافتراض أن x^* نقطة تصغير موضعية، ثم إثبات خواص تتعلق بـ$\nabla f(x^*)$ و$\nabla^2 f(x^*)$.

[2] الشروط:

الشروط الضرورية من الرتبة الأولى: إذا كانت x^* نقطة تصغير موضعية وكانت f قابلة للاشتقاق باستمرار في جوار مفتوح لـx^*، فإن $\nabla f(x^*) = 0$.

الشروط الضرورية من الرتبة الثانية: إذا كانت x^* نقطة تصغير موضعية للدالة f، وكانت $\nabla^2 f$ موجودة ومتصلة في جوار مفتوح لـx^*، فإن $\nabla f(x^*) = 0$ وتكون $\nabla^2 f(x^*)$ موجبة نصف محددة.

الشروط الكافية من الرتبة الثانية إذا كانت $\nabla^2 f$ متصلة في جوار مفتوح لـx^*، وكان $\nabla f(x^*) = 0$ وكانت $\nabla^2 f(x^*)$ موجبة محددة، فإن x^* نقطة تصغير موضعية صارمة للدالة f.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 ©
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Q.1 نطاق الثقة

3 تتبع خوارزميات التحسين عادة إجراء نموذجياً يبدأ من نقطة تخمين أولية، ثم يتقدم إلى المتكررات التالية حتى يبلغ حلاً بدقة مقبولة أو يتعذر إحراز مزيد من التقدم. ويكمن الاختلاف بين خوارزميات التحسين في استراتيجية الانتقال من متكرر إلى الذي يليه. وينبغي أن تتصف الخوارزميات الجيدة بالخصائص الآتية (Nocedal **and** Wright, 2006):

- المتانة: أن تعمل جيداً في طيف واسع من مسائل فئتها، ولجميع القيم المعقولة لنقطة البدء.
- الكفاءة: ألا تتطلب زمناً حاسوبياً أو سعة تخزين مفرطين.
- الدقة: أن تستطيع تعيين الحل بدقة، من غير حساسية مفرطة لأخطاء البيانات أو أخطاء التقريب الحسابي التي تنشأ عند تنفيذ الخوارزمية حاسوبياً.

توجد أساساً استراتيجيتان لإيجاد المتكرر التالي في خوارزميات التحسين: 1. البحث الخطي، و2. نطاق الثقة. تحدد الخوارزمية في طريقة البحث الخطي اتجاهاً، ثم تختار النقطة التالية في ذلك الاتجاه بحيث تأخذ الدالة قيمة أصغر. أما استراتيجية نطاق الثقة فتستعمل منطقة حول النقطة الحالية يُقبل داخلها التقريب التربيعي للدالة. ويركز هذا الملحق على الاستراتيجية الثانية.

4 في استراتيجية نطاق الثقة، تُنشأ قرب النقطة الحالية x_k دالة نموذج m_k تقرب السلوك الفعلي للدالة حول تلك النقطة. وقد لا تستطيع هذه الدالة تقريب الدالة الأصلية عند نقاط أخرى، ولذلك يقيد البحث عن القيمة الصغرى لـm_k بمنطقة محددة حول x_k. وتحدد الخطوة المرشحة p بحل المسألة الآتية:

$$\min m_k(x_k + p) \quad s.t. \|p\| \le \Delta_k \tag{Q.4}$$

5 إذا كان نطاق الثقة كبيراً أكثر من اللازم، فلن يحقق الحل خفضاً كافياً في الدالة؛ ومن ثم ينبغي تقليل نصف قطر المنطقة وحل المسألة من جديد. ويكون نطاق الثقة عادة كرة معرفة بالعلاقة $\|p\|_2 \le \Delta$، حيث $\Delta \ge 0$ نصف قطر نطاق الثقة.

6 يعرّف النموذج m_k عادة كما يأتي:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p \tag{Q.5}$$

حيث f_k و∇f_k قيمتا الدالة والتدرج المحسوبتان عند النقطة x_k. وتكون المصفوفة B_k إما مصفوفة هسيان $\nabla^2 f_k$ أو تقريباً لها.

7 إذا افترضنا أن m_k عند كل متكرر تربيعية استناداً إلى توسع متسلسلة تايلور للدالة f، نحصل على:

$$f(x_k + p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p \tag{Q.6}$$

حيث $f_k = f(x_k)$ و$g_k = \nabla f(x_k)$، وt كمية قياسية في المجال (0,1). وإذا افترضنا أن B_k تساوي مصفوفة هسيان الحقيقية $\nabla^2 f(x_k)$، نحصل على طريقة نيوتن ذات نطاق الثقة التي تبحث عن حل للمسألة الفرعية:

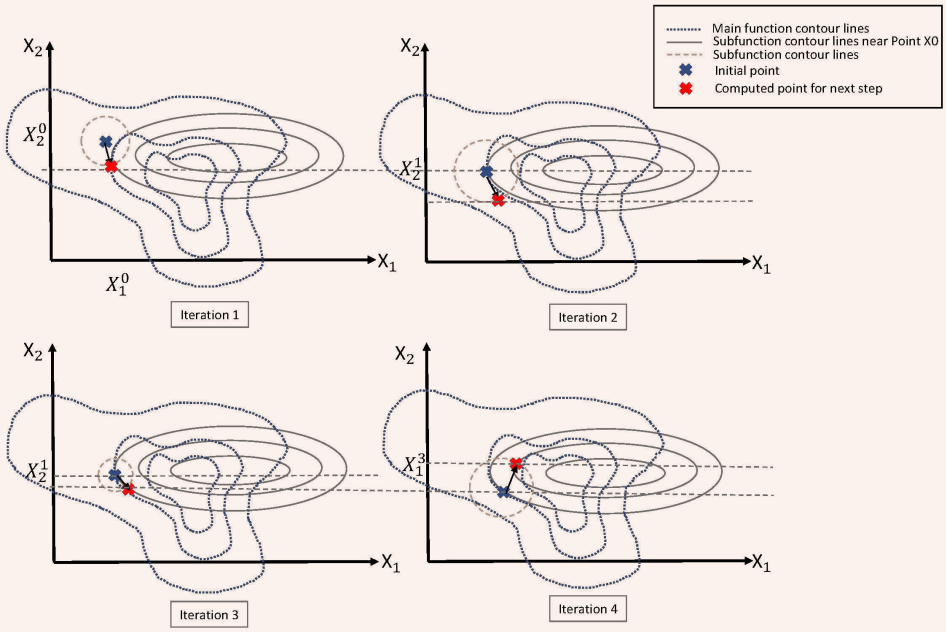
$$\min m_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad s.t. \|p\| \le \Delta_k \tag{Q.7}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

8 تتمثل خطوة مهمة في طريقة نطاق الثقة في تحديد نصف قطر النطاق عند كل تكرار. ولهذا الغرض تعرف النسبة الآتية:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)} \tag{Q.8}$$

9 إذا كان تقويم الدالة الجديد أكبر من القيمة الحالية، تكون ρ_k سالبة لأن مقام المعادلة السابقة موجب دائماً؛ أي إن الخطوة زادت الدالة بدلاً من خفضها، ولذلك لا تُقبل. وإذا كانت ρ_k قريبة من 1، دل ذلك على أن m_k في هذه الخطوة تقرب $f(x_k)$ تقريباً كافياً، ومن ثم يمكن توسيع النطاق في التكرار التالي. أما إذا كانت النسبة قريبة من الصفر أو سالبة، فينبغي تقليل نصف قطر النطاق في التكرار التالي. يبين الشكل Q.1 عدد 4 تكرارات لطريقة نطاق الثقة ذات 2 من المتغيرات؛ وتشير النقطتان الزرقاء والحمراء إلى النقطة الحالية وتقدير المتكرر التالي، على الترتيب. وكما سبق، لا يتسع نطاق الثقة إلا إذا وفر تخمين النقطة التالية خفضاً كافياً في الدالة.



شكل Q.1: خوارزمية نطاق الثقة

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

10 للمسألة المدروسة هنا، تعطى دالة الهدف ومصفوفات يعقوبي والتدرج وهسيان المناظرة (Dennis **and** Schnabel, 1983) كما يأتي:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}') = \mathbf{r}^T\cdot\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m}(u_i-u_i')^2 \tag{Q.9}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\mathbf{L} \tag{Q.10}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{r} \tag{Q.11}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\nabla f(\mathbf{x})\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[2\mathbf{J}^T\mathbf{r}\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{J} + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \tag{Q.12}$$

11 قرب القيمة الصغرى، عندما يكون $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \to 0$، نحصل على $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \simeq 2\mathbf{J}^T\mathbf{J}$. ويتيح استعمال طريقة ليفنبرغ–ماركوارت (Dennis **and** Schnabel, 1983) حل $\mathbf{x}_{k+1}$ من:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\right]^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_k) \tag{Q.13}$$

حيث تُختار ε_k بحيث تكون جميع القيم الذاتية للمصفوفة $\left[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\right]$ موجبة. ويمكن عندئذ تقديم تطوير لطريقة ليفنبرغ–ماركوارت يعرف بطريقة نطاق الثقة. فقد سعينا إلى تصغير دالة الهدف $m_k(\mathbf{x})$ داخل نطاق ثقة يعد فيه التقريب التربيعي، المستخرج من متسلسلة تايلور، موثوقاً:

$$m_k(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k)^T\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) \tag{Q.14}$$

12 يعرّف نطاق الثقة كما يأتي:

$$_k = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\| \le \Delta_k\}; \Delta_k > 0 \tag{Q.15}$$

فتصبح مسألة التحسين:

$$\min_{\mathbf{x}}\{m_k(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\} \tag{Q.16}$$

13 يعطى الشرط اللازم لتحديث النطاق بالعلاقة:

$$\rho_k = \frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1})}{f(\mathbf{x}_k) - m_k(\mathbf{x}_{k+1})} \tag{Q.17}$$

14 يجري تحديث نقطة البدء بالطريقة نفسها المبينة لطريقة ليفنبرغ–ماركوارت. وتتيح هذه الطريقة أيضاً تعريف الحدين الأعلى والأدنى للمعاملات كما يأتي:

$$\min_{\mathbf{x}}\{m_k(\mathbf{x},\mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\}; \mathbf{lb} \le \mathbf{x} \le \mathbf{ub} \tag{Q.18}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

15 يمكن تحديد نقطة بدء عملية تعيين المعاملات من الاختبارات المخبرية، التي تعطي تقديراً أولياً لـ$\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$ و$\tau_L(T_0)$ و$\tau_C(T_0)$. ويمكن، بدلاً من ذلك، ملاءمة منحنى إزاحة قمة السد:

$$u_{irr}^{AAR}(t,\theta) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_C(\theta)}}}{1 + e^{-\frac{(t-\tau_l(\theta))}{\tau_C(\theta)}}} u_{irr}^{AAR,\infty} \tag{Q.19}$$

(حيث يمثل u_{irr}^{AAR} الإزاحة غير العكوسة المعتمدة على الزمن ودرجة الحرارة، ويمثل $u_{irr}^{AAR,\infty}$ الإزاحة النهائية الناجمة عن تفاعل القلويات مع الركام AAR، على الترتيب)، فتقدم تقديراً محافظاً للثوابت الزمنية، لا لـ$\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$. ويجب تطبيع المعاملات المستهدفة بحيث تكون جميع القيم الابتدائية من رتبة المقدار نفسها؛ أي: أ) يجب أن يكون التغير الابتدائي كبيراً بما يكفي لإحداث تغير في النتائج المحسوبة، لأن القيم المطَبَّعة الكبيرة قد توقف عملية التعيين فوراً؛ وب) يجب أن يكون التغير النهائي للمعاملات صغيراً بما يكفي للسماح بضبط نهائي دقيق للمعاملات المعيّنة من غير تذبذبات كبيرة حول الحل النهائي، إذ قد يؤدي معامل مطبّع صغير أكثر من اللازم إلى تذبذب نهائي كبير.

16 يمكن إدخال دالة وزن لإعطاء أهمية لحقل البيانات الأخير، الذي يحتوي عادة قيمة مطلقة كبيرة، ولذلك يمثل الأثر غير العكوس لتمدد AAR تمثيلاً أفضل قياساً إلى أثر الأحمال العادية. ويلاحظ أن تعيين النظام هذا لا يتطلب تحليلاً حرارياً، وينطوي عملياً على تعديل بسيط لثلاثة متغيرات في ملف إدخال تحليل الإجهاد.

Q.2 الخوارزمية

17 لتكن $\hat{\Delta} > 0$، و$\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$، و: $\eta \in [0, \frac{1}{4})$ ((Nocedal **and** Wright, 2006))
لكل $k = 0, 1, 2, \ldots$
احسب ρ_k
إذا كان $\rho_k < \frac{1}{4}$
$\Delta_{k+1} = \frac{1}{4}\Delta_k$
وإلا
إذا كان $\rho_k > \frac{3}{4}$ و$\|p_k\| = \Delta_k$
$\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \hat{\Delta})$
وإلا
$\Delta_{k+1} = \Delta_k$;
إذا كان $\rho_k > \eta$
$x_{k+1} = x_k + p_k$
وإلا
$x_{k+1} = x_k$;
نهاية (لكل)

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Q.3 صياغة MATLAB®

18 تُبرمج العملية في MATLAB®وفق المخطط الانسيابي المبين في الشكل Q.2. وتتمحور الشيفرة أساساً حول الدالة التي تصغر مربع المعيار الإقليدي لـ$\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$\min\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = \min\left(f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_n(\mathbf{x})^2\right)$$

حيث

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 \cdots f_n(\mathbf{x})^2}$$

$$\text{Residual} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$$

حيث $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$ متجه الإزاحة المحسوبة، عند نقطة مختارة، بتحليل العناصر المحددة، و$\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$ متجه القيم المقيسة المناظر. وكلاهما دالة في الزمن.

19 العملية بسيطة في MATLAB®[1]

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output] = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)
```

حيث

`fun`	الدالة المطلوب تصغيرها
`x0`	متجه القيم الابتدائية
`lb`	متجه الحدود الدنيا
`ub`	متجه الحدود العليا
`options`	بنية تعرّف خيارات التحسين
`resnorm`	مربع المعيار 2 للباقي عند x: $\sum(fun(\mathbf{x}).^2)$
`residual`	قيمة دالة الهدف عند الحل، وعادة fun(x).
`exitflag`	سبب توقف المحلّل
`output`	المعلومات النهائية عن عملية التحسين (بنية)

20 مع أن معظم المعاملات مباشرة نسبياً، فإن المجموعة الأهم هي `options`. وتشمل الخيارات المستعملة في هذا المشروع:

`MaxFunEvals`	العدد الأقصى لتقويمات الدالة
`MaxIter`	العدد الأقصى للتكرارات
`TolFun`	سماحية الدالة
`tolx`	سماحية المجاهيل
`MaxPCGIter`	العدد الأقصى لتكرارات التدرج المترافق المسبق التكييف

[1] ترد شيفرة نموذجية بلغة MATLAB®في الملحق I.6.1.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

TolPCG	سماحية الإنهاء لتكرار PCG
Typicalx	مصفوفة تحدد المقدار النموذجي لمصفوفة المعاملات **x** المستعملة لتحجيم الفروق المحددة عند تقدير التدرج.
FiniteDifferenceStepSize	عامل متجهي لحجم خطوة الفروق المحددة؛ يعرّف يدوياً للتأكد من أن عملية الاستكشاف تعمل على الوجه الصحيح.

21 أدى حجم خطوة الفروق المحددة دوراً محورياً في تقدم التحليل. وإذا لم يحدد، كانت القيمة الافتراضية لهذا المعامل sqrt(eps) للفروق المحددة الأمامية. غير أن هذه القيمة الافتراضية أدت في الحالة المدروسة إلى خطوات صغيرة أكثر من اللازم لإحداث تغير؛ ولذلك عجز البرنامج عن التقاط أي فرق عند تغيير متغيرات الإدخال، وانتهى إلى التخمين الابتدائي بوصفه استجابة التحسين. وعند تعريف متجه لأحجام خطوات الفروق المحددة (v)، يحسب البرنامج الفرق المحدد δ لكل متغير x كما يأتي:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v} \cdot \max(abs(\mathbf{x}), \text{Typicalx}); \tag{Q.20}$$

22 أدى تعريف قيم أكبر إلى فروق أوضح في المتغيرات، وبذلك ضمن استكشافاً معقولاً للدالة ضمن مجال متغير الاستجابة.

شيفرة MATLAB®

23 توضح شيفرة MATLAB® في الشكل Q.2، ويسهل تتبعها نسبياً.

24 يلاحظ أن التحليل يركز في هذه الحالة على سد متأثر بتفاعل القلويات مع الركام (AAR). والهدف هو تحديد معاملات نموذج AAR بحيث تطابق إزاحات القمة الناتجة من تحليل العناصر المحددة القياسات الحقلية مطابقة وثيقة.

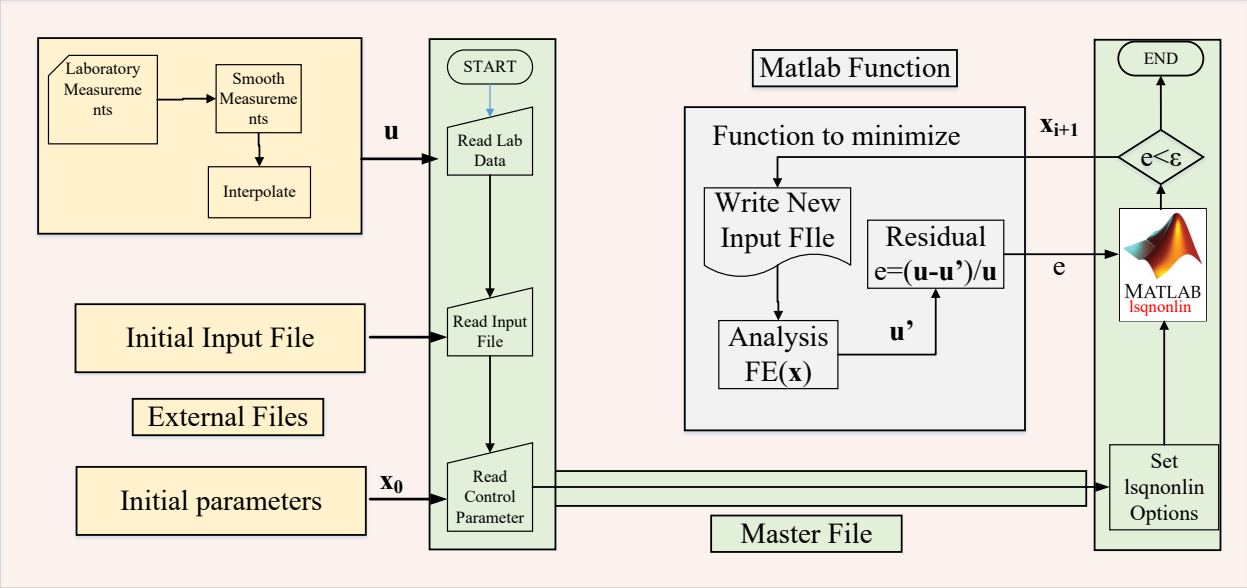
1. تُقرأ القياسات الحقلية وتُضبط.
2. يُقرأ ملف إدخال التحكم ويقسم إلى ثلاثة أجزاء: جزء أوسط يحتوي الأسطر التي ستعدلها الشيفرة، والمرتبطة بخصائص AAR، وجزآن مجاوران يبقيان من غير تغيير. وتسجل أرقام أسطر الفصل المناظرة لاستعمالها لاحقاً في دالة التصغير.
3. تُقرأ المتغيرات التي يعرفها المستخدم من ملف Excel خارجي.
4. تُضبط معاملات التحسين.
5. تُستدعى بعد ذلك الدالة lsqnonlin، §Q.3.

تعريف الدالة

25 يمثل تعريف الدالة المطلوب تصغيرها جزءاً حاسماً من الخوارزمية.

1. اكتب ملف إدخال جديداً بدلالة **x**؛ وفي التكرار الأول تستعمل القيم الافتراضية $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. وييسر ذلك التقسيم السابق لملف التحكم.
2. أجر تحليل العناصر المحددة، باستعمال Merlin في هذه الحالة.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل Q.2: مخطط انسيابي لإجراء تعيين المعاملات

3. استخرج الإزاحات المحسوبة $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$ من ملف الخرج.
4. احسب الباقي $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$.
5. احسب معيار البواقي e.
6. أعد المعيار ومتجه الإزاحات الجديد.

26 تتحكم `lsqnonlin` في إنهاء البرنامج استناداً إلى المعيار والخيارات المختارة سابقاً (§Q.3). ولعدم وجود استدعاء مباشر في شيفرة MATLAB®للدالة المطلوب تصغيرها، تمرر المعاملات الإضافية، مثل $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$، في صورة متغيرات `global`.

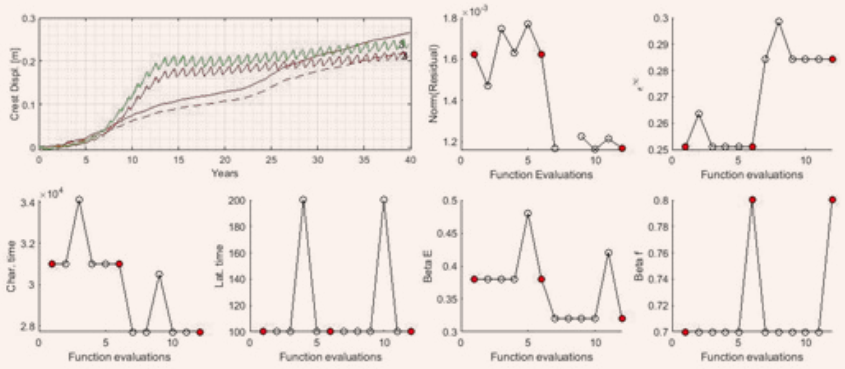
27 ترد في §I.6.1 شيفرة MATLAB®لتنفيذ تحسين المربعات الصغرى اللاخطي.

Q.4 التصور الآني

28 قد تستغرق كل محاكاة لاخطية بالعناصر المحددة لتمدد AAR في سد أكثر من 3 ساعات، كما تتطلب إجراءات تعيين المعاملات تحليلات متعددة؛ ولذلك فهذه العملية كثيفة المتطلبات الحاسوبية.

29 لذلك تستعمل واجهة مستخدم رسومية، الشكل Q.3. يعرض الربع الأول الإزاحات الوسيطة ($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) مقارنة بالإزاحات المقيسة ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$). وتعرض الأرباع الثلاثة الأخرى المتغيرات المختارة المطلوب تعيينها (ε^{∞} وτ_l وτ_c) بدلالة أرقام التكرارات.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل Q.3: واجهة المستخدم الرسومية لتعيين معاملات تفاعل القلويات مع الركام (Saouma **and** Hariri-Ardebili, 2021)

R تمهيد في حساب المتجهات

ملخص

يغطي هذا الملحق العناصر الأساسية من حساب المتجهات اللازمة لفهم بعض الاشتقاقات الواردة في الكتاب. وللتوسع في الموضوع يوصى بالمرجع (Schey, 1973). ولا يقصد بهذا العرض الاستقصاء أو الشمول، بل التذكير بالمفاهيم الرئيسة.

R.1 تعريفات أساسية 2922
R.1.1 الاشتقاق بالنسبة إلى كمية قياسية 2922
R.1.2 التباعد 2924
R.1.3 التدرج 2927
R.2 مبرهنات التكامل 2930
R.2.1 تكامل متجه 2930
R.2.2 التكامل الخطي 2931
R.2.3 التكامل بالتجزئة 2931
R.2.4 غاوس؛ مبرهنة التباعد 2931
R.2.5 مبرهنة ستوكس 2933
R.2.6 غرين؛ مبرهنة التدرج 2933

[1] *الحقل* دالة معرفة على منطقة متصلة. ويشمل ذلك *الحقل القياسي* $g(\mathbf{x})$، أو *الحقل المتجهي* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$، أو *الحقل الموتّري* $\mathbf{T}(\mathbf{x})$.

[2] نقدم أولاً *المؤثر المتجهي التفاضلي* "نابلا"، ويرمز إليه بـ ∇

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

[3] يلاحظ أيضاً أن طرائق اشتقاق الحقل المتجهي تماثل طرائق ضرب المتجهات، ويوضح الجدول R.1 هذا التشابه.

رتبة الموتر	الاشتقاق		الضرب	
$\downarrow$	تباعد	$\nabla\cdot\mathbf{v}$	قياسي	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
$\rightarrow$	دوران	$\nabla\times\mathbf{v}$	اتجاهي	$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$
$\uparrow$	تدرج	$\nabla\mathbf{v}$	موتّري	$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$

جدول R.1: أوجه التشابه بين مؤثرات الضرب والاشتقاق

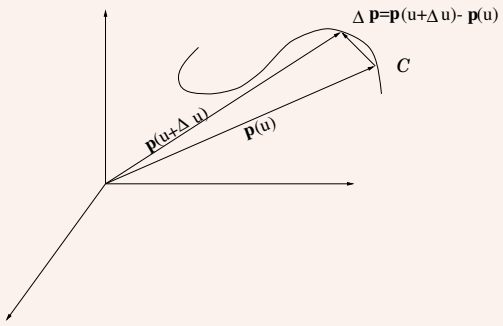
R.1 تعريفات أساسية

R.1.1 الاشتقاق بالنسبة إلى كمية قياسية

[4] يعرف مشتق المتجه $\mathbf{p}(u)$ بالنسبة إلى الكمية القياسية u، الشكل R.1، بالعلاقة

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u+\Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل R.1: اشتقاق متجه الموضع p

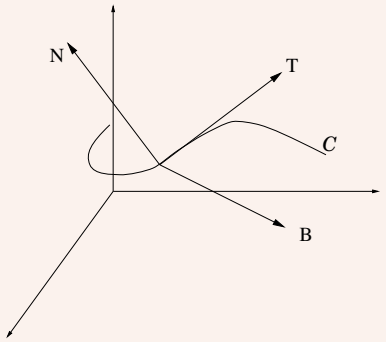
5 إذا كان $\mathbf{p}(u)$ متجه موضع، $\mathbf{p}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$، فإن

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

متجه في اتجاه مماس المنحنى.

6 إذا كانت u هي الزمن t، فإن $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ تمثل السرعة.

7 في *الهندسة التفاضلية*، إذا اعتبرنا منحنى C تعرفه الدالة $\mathbf{p}(u)$، كان $\frac{d\mathbf{p}}{du}$ متجهاً مماساً لـC. وإذا كانت u الإحداثي المنحني s المقيس من أي نقطة على امتداد المنحنى، كان $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ متجه المماس الوحدي $\mathbf{T}$ للمنحنى C، الشكل R.2. وتتحقق العلاقات الآتية



شكل R.2: انحناء منحنى

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{T}$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$
$$\kappa = \text{الانحناء}$$
$$\rho = \frac{1}{\kappa}\text{نصف قطر الانحناء}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ويلاحظ أيضاً أن $\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}=0$ إذا كان $\left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right|\neq 0$.

R.1.1.1 مثال R.1: مماس منحنى

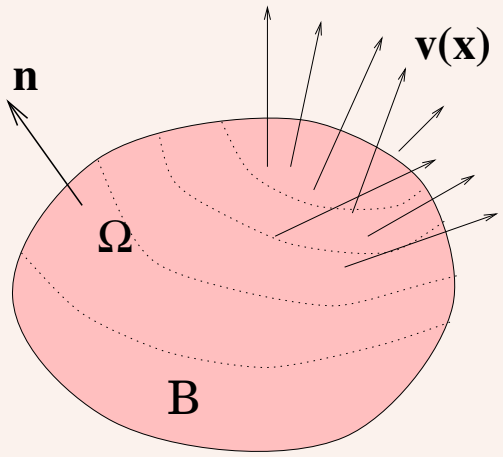
عين متجه الوحدة المماس للمنحنى: $x=t^2+1$، و$y=4t-3$، و$z=2t^2-6t$ عند $t=2$.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i}+(4t-3)\mathbf{j}+(2t^2-6t)\mathbf{k}\right]=2t\mathbf{i}+4\mathbf{j}+(4t-6)\mathbf{k}\\ \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|&=\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}\\ \mathbf{T}&=\frac{2t\mathbf{i}+4\mathbf{j}+(4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}}\\ &=\frac{4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2+(4)^2+(2)^2}}=\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k}\ \text{ عند }\ t=2\end{aligned}$$

R.1.2 التباعد

R.1.2.1 المتجه

8 يعرّف *تباعد* الحقل المتجهي لجسم $\mathcal{B}$ حدوده Ω، الشكل R.3، باعتبار أن لكل نقطة على السطح ناظماً $\mathbf{n}$، وأن الجسم محاط بحقل متجهي $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. وحجم الجسم هو $v(\mathcal{B})$.



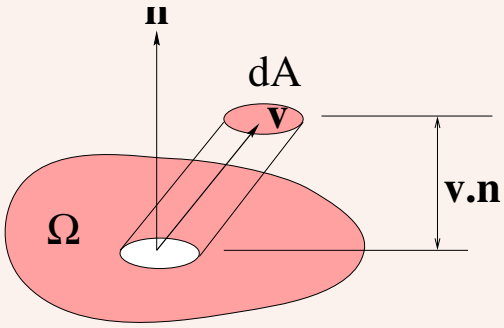
شكل R.3: حقل متجهي يعبر منطقة صلبة

9 ومن ثم يعرّف تباعد الحقل المتجهي كما يأتي

$$\text{div }\mathbf{v}(\mathbf{x})\equiv\lim_{v(\mathcal{B})\to 0}\frac{1}{v(\mathcal{B})}\int_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dA$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI،
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

حيث تسمى $\mathbf{v}.\mathbf{n}$ غالباً *التدفق*، وتمثل الحجم الكلي لـ"المائع" الذي يعبر dA في وحدة الزمن، الشكل R.4 يساوي هذا الحجم مساحة قاعدة الأسطوانة dA مضروبة في ارتفاعها $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$. ويلاحظ أن خطوط الانسياب

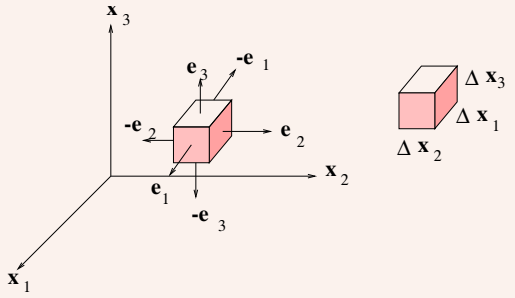


شكل R.4: التدفق عبر المساحة dA

المماسة للحد لا تسمح بخروج أي مائع، في حين تسمح الخطوط الناظمية عليه بخروجه بأكبر كفاءة.

10 يقيس التباعد إذن معدل تغير الحقل المتجهي.

11 من الواضح أن التعريف مستقل عن شكل المنطقة الصلبة، غير أنه يمكن استيضاح معنى التباعد باعتبار متوازي سطوح مستطيل أبعاده Δx_1 وΔx_2 وΔx_3، وتتجه متجهاته الناظمية في اتجاهات محاور الإحداثيات، الشكل R.5. إذا اعتبرنا أيضاً أن الركن الأقرب إلى الأصل يقع عند $\mathbf{x}$، فإن إسهام السطحين ذوي



شكل R.5: عنصر متناهي الصغر لحساب التباعد

المتجهين الناظمين $\mathbf{e}_1$ و$-\mathbf{e}_1$، من المعادلة R.1.2.1، يساوي

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0}\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3}[\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1+\mathbf{v}(x)\cdot(-\mathbf{e}_1)]dx_2dx_3$$

أو

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0}\frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1dx_2dx_3=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$
$$=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

ومن ثم يمكن التعميم

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i$$

12 أو، بصورة مكافئة،

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\right) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \partial_i v_i = v_{i,i}\end{aligned}$$

13 تباعد المتجه كمية قياسية.

14 يعرّف مؤثر لابلاس كما يأتي

$$\nabla^2 F \equiv \nabla\nabla F = F_{,ii}$$

R.1.2.1.1 مثال R.2: تباعد متجه

عين تباعد المتجه $\mathbf{A} = x^2 z\mathbf{i} - 2y^3 z^2\mathbf{j} + xy^2 z\mathbf{k}$ عند النقطة $(1, -1, 1)$.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (x^2 z\mathbf{i} - 2y^3 z^2\mathbf{j} + xy^2 z\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial x^2 z}{\partial x} + \frac{\partial - 2y^3 z^2}{\partial y} + \frac{\partial xy^2 z}{\partial z} \\ &= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2 \\ &= 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3 \text{ عند } (1, -1, 1)\end{aligned}$$

R.1.2.2 موتر من الرتبة الثانية

15 قياساً على المعادلة R.1.2.1، يكون تباعد الحقل الموترّي من الرتبة الثانية $\mathbf{T}$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{v(\mathcal{B}) \to 0} \frac{1}{v(\mathcal{B})} \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA$$

وهو الحقل المتجهي

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}\mathbf{e}_q$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

R.1.3 التدرج

R.1.3.1 الحقل القياسي

16 تدرج الحقل القياسي $g(\mathbf{x})$ هو الحقل المتجهي $\nabla g(\mathbf{x})$ الذي يحقق، لأي متجه وحدة $\mathbf{v}$، أن المشتق الاتجاهي dg/ds في اتجاه $\mathbf{v}$ يعطى بالعلاقة

$$\frac{dg}{ds} = \nabla g \cdot \mathbf{v}$$

حيث $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$. ولم يُشر في التعريف إلى أي جهاز إحداثيات؛ ومن ثم فالتدرج متجه *ثابت*.

17 لإيجاد المركبات في أي جهاز إحداثيات ديكارتي مستطيل نستعمل

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dx_i}{ds}\mathbf{e}_i$$
$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}$$

وبالتعويض نحصل على

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$$

أو

$$\nabla\phi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$
$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

ويلاحظ أنه يعرّف حقلاً متجهياً.

18 تتمثل الدلالة الفيزيائية لتدرج الحقل القياسي في أنه يشير إلى الاتجاه الذي يتغير فيه الحقل بأسرع معدل. وبالنسبة إلى سطح ثلاثي الأبعاد، يتجه التدرج على امتداد الناظم على المستوى المماس للسطح. ويكون المتجه $\|\nabla g(\mathbf{x})\|$ عمودياً على خطوط الكنتور.

19 تعطي $\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$ معدل تغير الحقل القياسي في اتجاه $\mathbf{n}$.

R.1.3.1.1 مثال R.3: تدرج حقل قياسي I

عين تدرج $\phi = x^2yz + 4xz^2$ عند النقطة $(1,-2,-1)$ في الاتجاه $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + (x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k} \\ &= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ at } (1, -2, -1) \\ \mathbf{n} &= \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \\ \nabla\phi\cdot\mathbf{n} &= (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}\end{aligned}$$

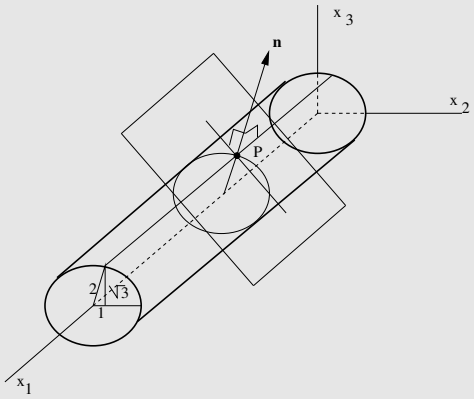
لأن القيمة الأخيرة موجبة، تزداد ϕ في ذلك الاتجاه.

R.1.3.1.2 مثال R.4: تدرج حقل قياسي ii

يعطى موتر الإجهاد في الوسط المتصل، بالنسبة إلى المحاور الديكارتية، كما يأتي

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3^2 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

عين متجه الإجهاد، أو متجه الشد، عند النقطة $P(2, 1, \sqrt{3})$ من المستوى المماس للسطح الأسطواني $x_2^2 + x_3^2 = 4$ عند P،



عند النقطة P، يعطى موتر الإجهاد بالعلاقة

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

يستخرج متجه الوحدة الناظم على السطح عند P من

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2x_2\mathbf{2_2} + \mathbf{2x_3e_3}$$

عند النقطة P،

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2\mathbf{2_2} + \mathbf{2\sqrt{3}e_3}$$

ومن ثم يكون متجه الوحدة الناظم عند P

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

وعليه يحدد متجه الشد من

$$\sigma = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

أو $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_3$

R.1.3.2 الحقل المتجهي

20 يمكن أيضاً تعريف تدرج الحقل المتجهي كما يأتي

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

أي إن $[\nabla\mathbf{v}]_{ij}$ يعطي معدل تغير المركبة i من $\mathbf{v}$ بالنسبة إلى محور الإحداثيات j.

21 لاحظ الفرق بين $\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}$ و$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$. ففي التمثيل المصفوفي، إحداهما منقول الأخرى.

22 تدرج المتجه موتر من الرتبة 2.

23 يمكن تفسير تدرج المتجه هندسياً، الشكل R.6. لنعتبر نقطتين متقاربتين a وb، أي إن Δs صغيرة جداً، وليشر متجه الوحدة $\mathbf{m}$ من a إلى b. قيمة الحقل المتجهي عند a هي $\mathbf{v}(\mathbf{x})$، وقيمته عند b هي $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$. ولأن الحقل المتجهي يتغير مع الموضع في المجال، يختلف المتجهان في الطول والاتجاه معاً.

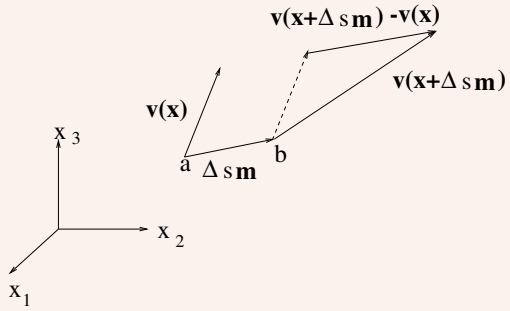
24 إذا نقلنا الآن نسخة من $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ووضعناها عند b، أمكن مقارنة الفرق بين المتجهين. والمتجه الواصل بين رأسي $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ و$\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$ هو $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$، أي التغير في المتجه. وبقسمة هذا التغير على Δs نحصل على معدل التغير عند الحركة في الاتجاه المحدد.

25 بأخذ النهاية عندما تؤول Δs إلى الصفر، نحصل على

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta s} \equiv D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$$

26 تسمى الكمية $D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$ *المشتق الاتجاهي* لأنها تعطي معدل تغير الحقل المتجهي عند الحركة في اتجاه $\mathbf{m}$.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.



شكل R.6: تدرج متجه

R.1.3.2.1 مثال R.5: تدرج حقل متجهي

نريد تعيين تدرج حقل متجهي بسيط في بعدين يعطى بالعلاقة

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2, 2xy)$$

لتعيين تدرج هذا الحقل المتجهي $\nabla\mathbf{F}$، نحسب المشتقات الجزئية لكل مركبة من مركبات المتجه بالنسبة إلى x وy، ومن ثم

$$\nabla\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

أو

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x \tag{R.1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}2xy = 2x \tag{R.2}$$

وعليه

$$\nabla\mathbf{F} = (2x, 2x)$$

R.2 مبرهنات التكامل

R.2.1 تكامل متجه

27 يعرّف تكامل المتجه $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{e}_1 + R_2(u)\mathbf{e}_2 + R_3(u)\mathbf{e}_3$ كما يأتي

$$\int \mathbf{R}(u)du = \mathbf{e}_1\int R_1(u)du + \mathbf{e}_2\int R_2(u)du + \mathbf{e}_3\int R_3(u)du$$

إذا وجد متجه $\mathbf{S}(u)$ يحقق $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$، فإن

$$\int \mathbf{R}(u)du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + c$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

R.2.2 التكامل الخطي

28 لتكن $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{e}_1 + y(u)\mathbf{e}_2 + z(u)\mathbf{e}_3$، حيث $\mathbf{r}(u)$ متجه موضع يعرّف منحنى C يصل النقطة P_1 بالنقطة P_2 عند $u = u_1$ و$u = u_2$، على الترتيب. ولتكن $A(x, y, z) = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ دالة متجهية معرفة ومتصلة على امتداد C. عندئذ يعطى تكامل المركبة المماسية لـ$\mathbf{A}$ على امتداد C من P_1 إلى P_2 بالعلاقة

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

إذا كانت $\mathbf{A}$ قوة، مثّل هذا التكامل الشغل المناظر.

29 إذا كان المسار مغلقاً، عرّفنا *التكامل المساري* كما يأتي

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

30 يمكن إثبات أنه إذا كانت $\mathbf{A} = \nabla\phi$، فإن

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \quad \text{مستقل عن المسار } C \text{ الواصل بين } P_1 \text{ و} P_2$$

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{على امتداد مسار مغلق}$$

R.2.3 التكامل بالتجزئة

31 صيغة التكامل بالتجزئة هي

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b u\,dv &= uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du \end{aligned} \tag{R.3}$$

R.2.4 غاوس؛ مبرهنة التباعد

32 في الحالة الأعم يكون لدينا

$$\int_\Omega \delta F = \int_{\delta\Omega} F$$

33 ترد مبرهنة التباعد، المعروفة أيضاً بمبرهنة أوستروغرادسكي، مراراً في ميكانيكا الأجسام الصلبة، ويمكن صياغتها كما يأتي:

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}\,d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{v}.\mathbf{n}\,d\Gamma \quad \text{أو} \quad \int_\Omega v_{i,i}\,d\Omega = \int_\Gamma v_i n_i\,d\Gamma \tag{R.4}$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

أي إن تكامل تباعد المتجه على حجم يساوي تدفق المتجه عبر سطح.

34 في التحويلات من بعدين إلى بعد واحد (2D–1D)، يكون لدينا

$$\int_A \nabla\cdot\mathbf{q}\,dA = \oint_s \mathbf{q}^T\mathbf{n}\,ds \tag{R.5}$$

35 تسمى هذه المبرهنة أحياناً مبرهنة غرين في الفضاء.

36 مبرهنة غرين–غاوس

$$\int_\Omega \Phi\nabla\cdot\mathbf{v}\,d\Omega = \int_\Gamma \Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n}\,d\Gamma - \int_\Omega (\nabla\Phi)^T\mathbf{v}\,d\Omega \tag{R.6}$$

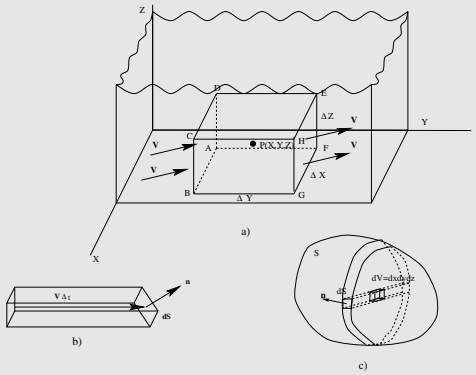
إذا اخترنا $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$، نحصل على

$$\int_\Omega \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x\,d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi\,d\Omega$$

R.2.4.1 مثال R.6: التفسير الفيزيائي لمبرهنة التباعد

قدم تفسيراً فيزيائياً لمبرهنة التباعد.

لمائع حقل سرعة $\mathbf{v}(x,y,z)$، ونريد أولاً تعيين صافي التدفق الداخل في وحدة الزمن لكل وحدة حجم في متوازي سطوح مركزه $P(x,y,z)$ وأبعاده $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (a).



$$\begin{aligned} v_x\big|_{x,y,z} &\approx v_x \\ v_x\big|_{x-\Delta x/2,y,z} &\approx v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\text{AFED} \\ v_x\big|_{x+\Delta x/2,y,z} &\approx v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\text{GHCB} \end{aligned}$$

صافي التدفق الداخل في وحدة الزمن عبر المستويات x هو

$$\begin{aligned}\Delta V_x &= \left(v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - \left(v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

وبالمثل

$$\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\Delta V_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

ومن ثم تعطى الزيادة الكلية لكل وحدة حجم ووحدة زمن بالعلاقة

$$\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

وإذا اعتبرنا، إضافة إلى ذلك، الحجم الكلي للمائع الذي يعبر dS خلال Δt (b)، فإنه يعطى بـ $(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS\Delta t$؛ أي إن حجم المائع الذي يعبر dS في وحدة الزمن هو $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$.

وعليه، لحجم اعتباطي (c)، يكون الحجم الكلي للمائع الذي يعبر سطحاً مغلقاً S في وحدة الزمن هو $\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$. غير أن هذا يساوي $\int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$، المعادلة R.2.4.1، ومن ثم

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$$

وهذه هي مبرهنة التباعد.

R.2.5 مبرهنة ستوكس

37 تنص مبرهنة ستوكس على أن

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

حيث S سطح مفتوح ذو وجهين يحدهما C.

R.2.6 غرين؛ مبرهنة التدرج

38 مبرهنة غرين في المستوى حالة خاصة من مبرهنة ستوكس.

$$\oint (Rdx + Sdy) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)dxdy$$

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

مراجع الأجزاء الثاني–الرابع

AASHTO, LRFD (2017). *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*. 8th Edition. .AASHTO; Subcommittee on Bridges

AASHTO, Seismic (2011). *AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design*. .AASHTO; Subcommittee on Bridges

Abramowitz, M. **and** I. Stegun (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. techreport. .Applied Mathematics Series, No. 55. National Bureau of Standard

ACI 318 (2019). *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and .commentary*. American Concrete Institute

ACI 318.2-14 (2014). *Building code requirements for Concrete Thin Shells (ACI 318.2-14) .and commentary*. techreport. American Concrete Institute

American Institute of Steel Construction (2016). *Specification for structural steel building .ANSI/AISC 360-16*. American Institute of Steel Construction

American Society of Civil Engineers (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing .Buildings*. ASCE/SEI 41-17. Reston, VA: American Society of Civil Engineers

.AI assistant .https://www.anthropic.com/claude .Anthropic (2025). *Claude*

Applied Technology Council (2012a). *Seismic Performance Assessment of Buildings Volume 1 - Methodology*. techreport FEMA P-58-1. Federal Emergency Management .Agency

2012b). *Seismic performance assessment of buildings, (Volume 1): Methodology*. techre-) – .port ATC-58-1. Redwood City, CA: Federal Emergency Management Agency

ASCE/SEI 7-16 (2017). *Minimum Design Loads For Buildings and Other Structures*. techre- .port. American Society of Civil Engineers

ATC-13 (1985). *Earthquake damage evaluation data for California. Report No.ATC-13*. .techreport. Redwood City, CA: Applied Technology Council

ATC-40 (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. Volume 1*. techreport. .Redwood City, CA: Applied Technology Council

Atkinson, G. **and** D. Boore (1995). "Ground-motion relations for eastern North America". .**in***Bulletin of the Seismological Society of America*: 85.1, **pages** 17–30

Baker, A. **and** A. Amarakone (1964). "" Inelastic Hyperstatic Frames Analysis"". **in***Proceed- ings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*: .**pages** 85–142

Baker, A. L. L. (1956). *The ultimate-load theory applied to the design of reinforced & .prestressed concrete frames*. Concrete Publications

.Baker, E., L Kovalevsky **and** F. Rish (1972). *Structural Analysis of Shells*. McGraw Hill

Baker, J. (2015). "Efficient analytical fragility function fitting using dynamic structural .analysis". **in***Earthquake Spectra*: 31.1, **pages** 579–599

Baker, J. **and** N. Jayaram (2008). "Correlation of spectral acceleration values from NGA .ground motion models". **in***Earthquake Spectra*: 24, **pages** 299–317

Baker, W. F. (2023). *William Baker: Structural Engineer and Problem Solver*. The Grainger .College of Engineering, University of Illinois Urbana–Champaign

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Bate, S. **andothers** (1962). “Ultimate Load Design Of Concrete Structures.” **in***Proceedings .of the Institution of Civil Engineers*: 21.2, **pages** 399–442
.Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall Inc
Bažant, Ž. (1984). “Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal”. **in***J. of Engineering .Mechanics, ASCE*: 110.4, **pages** 518–535
Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. german. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame .Structures]. Germany
Benjamin, J. **and** C. Cornell (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. .New York: McGraw Hill
Berry, M., M. Parrish **and** M. Eberhard (2004). *Peer Structural Performance database*. techreport. Pacific Earthquake Engineering Research Center; University of California, .Berkeley
Bertero, R. **and** V. Bertero (2002). “Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach”. **in***Earthquake Engineering and Structural .Dynamics*: 31, **pages** 627–652
.Bhatt, P (1986). *Programming the matrix analysis of skeletal structures*. E. Horwood
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, .Inc
Billington, D. (1983). *Structural Studies*. techreport. Department of Civil Engineering, .Princeton University
.Bisplinghoff, R. L., J. W. Mar **and** T. H. Pian (1965). *Statics of deformable solids*. Dover
Bisshopp, K. **and** D. C. Drucker (1945). “Large deflection of cantilever beams”. **in***Quarterly .of applied mathematics*: 3.3, **pages** 272–275
Bolt, B. (1973). “Duration of strong ground motion”. **in***Proceedings of the 5th World .Conference on Earthquake Engineering*: **volume** 1, **pages** 1304–1313
Bommer, J. **and** A. Martinez-Pereira (1999). “The effective duration of earthquake strong .motion”. **in***Journal of earthquake engineering*: 3.02, **pages** 127–172
Boore, D., W. Joyner **and** T. Fumal (1997). “Equations for estimating horizontal response spectra and peak acceleration from western North American earthquakes: A summary .of recent work”. **in***Seismological research letters*: 68.1, **pages** 128–153
Bozorgnia, Y. **and** V. Bertero (2003). “Damage spectra: characteristics and applications to .seismic risk reduction”. **in***Structural Engineering, ASCE*: 129, **pages** 1330–1340
Bradley, B. (2010). “A generalized conditional intensity measure approach and holistic ground-motion selection”. **in***Earthquake Engineering & Structural Dynamics*: 39.12, .**pages** 1321–1342
Branson, D. E. **andothers** (1963). *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. techreport. Alabama. State Highway .Department
Brühwiler, E. **and** F. Whitman (1990). “Failure of Dam Concrete Subjected to Seismic .Loading Conditions”. **in***Engineering Fracture Mechanics*: 35.3, **pages** 565–572

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Brühwiler, E. (1988). *Fracture Mechanics of Dam Concrete Subjected to Quasi-Static and Seismic Loading Conditions*. (in German). Lausanne: Doctoral Thesis No 739, Swiss .Federal Institute of Technology

Bryant, L., J. Brokaw **and** P. Mlakar **(january** 1993). *Reliability Modeling of Concrete Overstressing*. techreport. Report Submitted to U.S. Army Engineer Waterways Experiment .Station. JAYCOR, Vicksburg Mississippi

Bucher, C. (2009). *Computational analysis of randomness in structural mechanics: Structures and infrastructures book series, Vol. 3*. Crc Press .

CALTRANS, S. (2013). *CALTRANS Seismic Design Criteria*. California Department of .Transportation

Campbell, K. **and** Y. Bozorgnia (2012). "Cumulative absolute velocity (CAV) and seismic intensity based on the PEER-NGA database". **in***Earthquake Spectra*: 28.2, **pages** 457–485 .

Carol, I **and** J Murcia (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact'formulation—I. Theory". **in***Computers & structures*: 33.1, **pages** 79–87 .

Cedolin, L., S. Dei Poli **and** I. Iori (1987). "Tensile Behavior of Concrete". **in***J. of Engineering Mechanics, ASCE*: 113.3 .

Cella, P. (1999). "Reexamining the catenary". **in***The College Mathematics Journal*: 30.5, **pages** 391–393 .

Center, P. E. E. R. (2010). *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Performance-Based Earthquake Engineering Framework* .

.Chen, W. **and** H. Zhang (1990). *Structural Plasticity*. Springer-Verlag

Chopra, A. **and** R. Goel (1999). "Capacity-Demand-Diagram Methods Based on Inelastic Design Spectrum". **in***Earthquake Spectra*: 15, **pages** 637–656 .

Civil Engineers, A. S. of (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17 .

Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures. ASCE/SEI 7-22 .(2022) –

Clough, R. W. (1966). "Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements". **in***Proceedings of Japan earthquake engineering symposium* .

.Clough, R. **and** J. Penzien (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Inc., London, UK

Cohen, I. B. (2002). "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion". **in***The Cambridge Companion to Newton*: **byeditor**I. Cohen **and** G. Smith .

Cornell, C. A. (1964). *Stochastic process models in structural engineering*. Department of .Civil Engineering, Stanford University

Cornell, C. **and** F. Jalayer (2002). "Factored nonlinear displacement demand estimation methods for probability-based safety assessment". **in***Annual Meeting Research Digest No. 2002-7, A publication of the Pacific Earthquake Engineering Research Center* .

Courant, R., K. Friedrichs **and** H. Lewy (1967). "On the partial difference equations of mathematical physics". **in***IBM Journal of Research and Development*: 11.2, **pages** 215–234 .

Cuthill, E. **and** J. McKee (1969). "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices". **in***Proceedings of the 1969 24th national conference*: **pages** 157–172 .

.Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, .[2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine
D'Ambrisi, A. **and** M. Mezzi (2015). "An energy-based approach for nonlinear static .analysis of structures". **in***Bulletin of Earthquake Engineering*: 13.5, **pages** 1513–1530
.Den Hartog, J. P. (1961). *Strength of materials*. Dover
Dennis, J. **and** R. Schnabel (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization .and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs
Desayi, P (1964). "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete". **in***Journal of the .American Concrete Institute*: 61.3, **pages** 1169–1183
Desmorat, R. **andothers** (2008). *Anisotropic damage model for multifibre dynamics and .pseudo-dynamics analyses*
Dolati, S. S. K., A. Matamoros **and** W. Ghannoum (2023). "Evaluating the effects of loading protocol on the strength and deformation capacity of Flexure-Shear critical concrete .columns". **in***Engineering Structures*: 279, **page** 115592
.Douglas, J (2011). *Ground Motion Estimation Equations 1964–2010*
Duda, H. (1990). "Stress-Crack-Opening Relation and Size Effect in High-Strength Con- .crete". **in***Darmastad Concrete*: 5, **pages** 35–46
.Eddy, H. T. (1878). *Researches in graphical statics*. D. van Nostrand
Eisenberg, M. A. **and** L. Malvern (1973). "On Finite Element Integration in Natural Co-ordinates". **in***International Journal for Numerical Methods in Engineering*: 7, .**pages** 574–575
Elnashai, A. **and** L. Di Sarno (2015). *Fundamentals of earthquake engineering: from source .to fragility*. John Wiley & Sons
Elwood, K. **and** J. Moehle (2002). *Shake table tests and analytical studies on the gravity load collapse of reinforced concrete frames*. techreport PEER Report 2003/01. Pacific Earth- quake Engineering Research Center, University of California.University of California, .Berkeley
Erberik, M. (2015). "Seismic Fragility Analysis". **in***Encyclopedia of Earthquake Engineer- .ing*: **byeditor**M. Beer **andothers**. Springer Berlin Heidelberg, **pages** 1–10
Estekanchi, H., A. Vafai **and** M. Sadeghazar (2004). "Endurance time method for seismic .analysis and design of structures". **in***Scientia Iranica*: 11, **pages** 361–370
European Committee for Standardization (CEN) (2010). *Eurocode – Basis of Structural Design (EN 1990:2002+A1:2005+A1:2005/AC:2010)*. European Standard. Brussels, .Belgium: CEN
Felippa, C. (1999). *Finite Element Lecture Notes*. techreport. Dept. of Aerospace Engineer- .ing, University of Colorado, Boulder
Lecture Notes in Advanced Finite Element Methods (ASEN 5367). techreport. .(2000) – .Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder
FEMA (1997a). *NEHRP commentary on the guidelines for seismic rehabilitation of build- .ings*. techreport. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency
1997b). *NEHRP guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. techreport. Washing-) – .ton, DC: Federal Emergency Management Agency

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

.FEMA (2012). *Seismic Performance Assessment of Buildings*. P-58
FEMA-356 (2000). *Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Build-*
.*ings*. techreport. Federal Emergency Managemt Agency
Feodossiev, V. (1977). *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis*. Traduc-
.tion Française. Moscou: Editions MIR
Filiatrault, A. (2013). *Elements of earthquake engineering and structural dynamics*. Presses
.inter Polytechnique
Filippou, F., E. Popov **and** V. Bertero **(november** 1983). "Modeling of Reinfored Concrete
.Joints under Cyclic Excitations". **in***ASCE, Journal of Structural Engineering*: 109.11
Finsterwalder, U. (1933). "Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreisseg-
.mentförmigem Querschnitt". **in***Ingenieur-Archiv*: 4.1, **pages** 43–65
Fischler, M. A. **and** R. C. Bolles (1981). "Random sample consensus: a paradigm for model
fitting with applications to image analysis and automated cartography". **in***Communica-
.*tions of the ACM*: 24.6, **pages** 381–395
.Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. Second Edition. Springer Verlag
Freeman, S. (1978). "Prediction of response of concrete buildings to severe earthquake
motion". **in***Proceedings of Douglas McHenry international symposium on concrete and*
.*concrete structures*: **byeditor**A. C. Institute. Detroit, MI, USA
The capacity spectrum method". **in***Proceedings of the 11th European confer-*" .(1998) –
.*ence on earthquake engineering*: Paris, France
Gakuhari, Y. **(august** 2021). "Modeling Considerations Related to Concrete with AAR".
.mathesis. Boulder, Colorado: University of Colorado
Gallagher, R. (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood
.Cliffs, N.J
Gavin, H. P. (2012). *Mathematical Properties of Stiffness Matrices*. CEE 421L, Matrix Struc-
tural Analysis course notes. Duke University, Department of Civil **and** Environmental
.Engineering
Georg, R. **(december** 2014). "Historical Analysis of Arches and Modern Shells". Saouma,
Victor E. advisor. M.S. Thesis. Boulder, CO, U.S.A.: University of Colorado, Dept. Civ.
.Eng
.Gerstle, K. (1974). *Basic Structural Analysis*. Out of Print. McGraw-Hill
.Ghannoum, W. (2010). Personal communication
Decision-Oriented Column Simulation Capabilities for Enhancing Disaster Re- .(2020) –
."*silience of RC Building*. "Seminar at the University of Colorado, Boulder
Ghorbani, R. **andothers** (2022). "Uniaxial model for simulating the cyclic behavior of
reinforced concrete members". **in***Earthquake Engineering & Structural Dynamics*: 51.15,
.**pages** 3574–3597
.Gibson, J. E. (1968). *The design of shell roofs*. Spon
Giuriani, E. **and** G. P. Rosati (1986). "Behaviour of Concrete Elements under Tension After
Cracking". **in***Studi e Ricerche, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento*
.*Armato*: 8. (in Italian), **pages** 65–82

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Gopalaratnam, V. S. **and** S. Shah (1985). "Softening Response of Plain Concrete in Direct .Tension". **in***ACI Journal*: 82, **pages** 310–323
Gunay, S. **and** K. Mosalam (2013). "PEER performance-based earthquake engineering .methodology, revisited". **in***Journal of Earthquake Engineering*: 17.6, **pages** 829–858
Gutenberg, B. **and** C. Richter (1954). "Frequency and energy of earthquakes". **in***Seismicity .of the Earth and Associated Phenomena*: **pages** 17–19
Hamburger, R. **andothers** (2004). "The ATC-58 Project: Development of next-generation reformance-based earthquake engineering design criteria for buildings". **in***Proceeding .of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*: Vancouver, Canada
Hariri-Ardebili, M. **and** H. Mirzabozorg (2014). "Estimation of probable damages in arch dams subjected to strong ground motions using endurance time acceleration functions". .**in***KSCE Journal of Civil Engineering*: 18, **pages** 574–586
Hariri-Ardebili, M. **and** V. E. Saouma (2015). "Quantitative failure metric for gravity dams". .**in***Earthquake Engineering and Structural Dynamics*: 44, **pages** 461–480
Hariri-Ardebili, M., V. E. Saouma **and** K. Porter (2016). "Quantification of Seismic Potential .Failure Modes in Concrete Dams". **in***Earthquake Engineering and Structural Dynamics*
Hariri-Ardebili, M. **andothers** (2016). "A new class of seismic damage and performance .indices for arch dams via ETA method". **in***Engineering Structures*: 110, **pages** 145–160
Haselton, C. **andothers** (2011). "Accounting for ground-motion spectral shape characteristics in structural collapse assessment through an adjustment for epsilon". **in***Structural .*Engineering*: 137.3, **pages** 332–344
Haselton, C. B. **andothers** (2008). "An assessment to benchmark the seismic performance of a code-conforming reinforced-concrete moment-frame building". **in***Pacific Earthquake .*Engineering Research Center*: 2007/1
Haselton, C. B. **andothers** (2016). "Calibration of model to simulate response of reinforced .concrete beam-columns to collapse." **in***ACI Structural Journal*: 113.6
.Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM
Hillerborg, A., M. Modéer **and** P. Petersson (1976). "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements". **in***Cement .and Concrete Research*: 6.6, **pages** 773–782
.Hinton, E. **and** D. Owen (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press, London
Hordijk, D., H. Reinhardt **and** H. Cornelissen (1989). "Fracture Mechanics Parameters of Concrete from Uniaxial Tensile Tests as Influenced by Specimen Length". **in***RILEM-SEM Int. Conference on Fracture Mechanics of Rock and Concrete*: **byeditor**S. Shah **and** S. .Swartz. New-York: Springer-Verlag
Hoshiya, M **and** Z Hasgur (1978). "AR and MA models of nonstationary ground motion". .**in***Bull. Int. Inst. Seismol. Earthq. Eng.*: 16, **pages** 55–68
Howard, S. (1966). *Structure: An Architect's Approach*. Princeton University: McGraw-Hill, .Inc
Hsu, T. **andothers** (1963). "Micro cracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress- .Strain Curve". **in***Journal of the American Concrete Institute*: 60, **pages** 209–224

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Ibarra, L. F. (2004). “Global collapse of frame structures under seismic excitations”. phdthesis. Stanford University.

ICBO (1994). *Uniform Building Code*. techreport. International Conference of Building Officials.

Inglis, C. (1913). “Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners”. **in***Trans. Inst. Naval Architects*: 55, **pages** 219–241.

Irwin, G. (1957). “Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate”. **in***Transactions ASME, J. Appl. Mech.*: 24.

Jalayer, F. (2003). “Direct probabilistic seismic analysis: implementing non-linear dynamic assessments”. phdthesis. Palo-Alto, CA: Stanford University.

Jankovic, S. **and** B. Stojadinovic (2004). “Probabilistic performance-based seismic demand model for {R/C} frame buildings”. **in***Proceeding of the 13th World Conferance on Earthquake Engineering*: Vancouver, B.C., Canada.

Jeang, F. L. **and** N. M. Hawkins (1985). *Nonlinear Analysis of Concrete Fracture*. Structures and Mechanics Report. Seattle, WA: Department of Civil Engineering, University of Washington.

Joukowsky, N. Y. (1948). *Sobranie Sochinenii (Collected Works)*. **volume** 2. 25 vols., 1935–1950. The bicycle wheel problem (ring on elastic foundation) appears in the mechanics volume; first solved ca. 1890s at the Moscow Technical School. Moscow: Gostekhizdat.

Kaila, K. **and** H. Narain (1971). “A new approach for preparation of quantitative seismicity maps as applied to Alpide belt-Sunda arc and adjoining areas”. **in***Bulletin of the Seismological Society of America*: 61.5, **pages** 1275–1291.

Kang, D. (2010). “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation”. phdthesis. Dept. of Civil Engineering, University of Colorado, Boulder.

Kappos, A. (1997). “Seismic damage indices for RC buildings: evaluation of concepts and procedures”. **in***Progress in Structural Engineering and Materials*: 1, **pages** 78–87.

Kassimali, A. (2021). *Matrix analysis of structures*. Cengage Learning.

Kennedy, M. C. **and** A. O’Hagan (2001). “Bayesian Calibration of Computer Models”. **in***Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*: 63.3, **pages** 425–464.

Kent, D. **and** R. Park (1971). “Flexural Members with Confined Concrete”. **in***Journal of the Structural Division, ASCE*: 97.ST7.

Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.

Kirsch, C (1898). “Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre”. **in***Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*: 42, **pages** 797–807.

Kolosova, G. S. **and** V. V. Kuroyedov (2013). “Application of Krylov’s functions for solving structural mechanical problems”. **in***Stroitel’stvo Unikal’nyh Zdanij i Sooruzenij*: 9, **page** 42.

Ladeveze, P. (1983). “Sur une théorie de l’endommagement anisotrope”. **in***Rapport Interne .LMT*: 34, **pages** 1–34.

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Lee, T.-H. **and** K. M. Mosalam (2004). "Probabilistic fiber element modeling of reinforced .concrete structures". **in***Computers and Structures*: 82, **pages** 2285–2299
Li, V. C. **and** E. Liang (1986). "Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cemen- .titious Composites". **in***Journal of Engineering Mechanics, ASCE*: 112.6, **pages** 566–586
Lignos, D. G. **and** H. Krawinkler (2013). "Development and utilization of structural compo- nent databases for performance-based earthquake engineering". **in***Journal of Structural .*Engineering*: 139.8, **pages** 1382–1394
Lin, T. **and** J. Baker (2014). "Conditional Spectra". **in***Encyclopedia of Earthquake Engi- neering*: **byeditor**M. Beer **andothers**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, .**pages** 1–13
Lin, T. **and** S. Stotesbury (1981). *Structural Concepts and Systems for Architects and .*Engineers*. John Wiley
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4 **edition**. .Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press
Mackie, K. **and** B. Stojadinovic (2005). *Fragility basis for California highway overpass bridge seismic decision making*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, Uni- .versity of California, Berkeley
Mahdavi, G. (**december** 2023). "Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suf- .fering from AAR". phdthesis. Boulder, Colorado: University of Colorado
Mander, J. B., M. J. Priestley **and** R Park (1988). "Theoretical stress-strain model for confined .concrete". **in***Journal of structural engineering*: 114.8, **pages** 1804–1826
Maney, G. A. (1915). "Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New .Method of Solution". **in***Studies in Engineering*: University of Minnesota
Mashayekhi, M. **and** H. Estekanchi (2013). "Investigation of strong-motion duration consis- .tency in endurance time excitation functions". **in***Scientia Iranica*: 20, **pages** 1085–1093
Mashayekhi, M., H. Estekanchi **and** H. Vafai (2019a). "Simulation of Endurance Time .Excitations Using Increasing Sine Functions". **in***Int. J. Optim. Civil Eng*: 9.1, **pages** 65–77
2019b). "Simulation of endurance time excitations via wavelet transform". **in***Ira-*) – *nian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*: 43.3, .**pages** 429–443
Mashayekhi, M. **andothers** (2018a). "Development of hysteretic energy compatible endurance time excitations and its application". **in***Engineering Structures*: 177, .**pages** 753–769
Mashayekhi, M. **andothers** (2018b). "Simulation of Cumulative Absolute Velocity Consis- .tent Endurance Time Excitations". **in***Journal of Earthquake Engineering*: **pages** 1–26
Mazars, J. (1986). "A Description of Micro- and Macroscale Damage of Concrete Struc- .tures". **in***Engineering Fracture Mechanics*: 25.5–6, **pages** 729–737
Mazzoni, S. **andothers** (2006). *OpenSees Command Language Manual*. techreport. Uni- .versity of California, Berkeley: The Open System for Earthquake Engineering Simulation
.McGuire, W **and** R. Gallagher (1979). *Matrix Structural Analysis*. First Edition
.McGuire, W. **and** G. Winter (1968). *Steel structures*. Prentice-Hall

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Menegotto, M. **and** P. Pinto (1973). "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior". **in***IABSE symposium on resistance and ultimate deformability of structure. Acted on by .Well-Defined Repeated Loads. Lisbon: ACmPress*: **volume** 15, **pages** 15–22
Milankovitch, M. (1907). "Theorie der druckkurven". **in***Zeitschrift für Mathematik und .Physik*: 55, **pages** 1–27
.Mindess, S. **and** F. Young (1981). *Concrete*. Prentice-Hall, Inc
Morris, M. (1991). "Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments". ."**in***Technometrics*: 33.2, "161–174
Nocedal, J. **and** S. Wright (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business .Media
.Norris, C. H. **and** J. Wilbur (1960). *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill
Nozari, A. **and** H. Estekanchi (2011). "Optimization of endurance time acceleration functions for seismic assessment of structures". **in***International Journal of Optimization in .Civil Engineering*: 1, **pages** 257–277
O'Hara, T. **and** J. Jacobson (1991). *Standardization of the cumulative absolute velocity*. .techreport. Electric Power Research Inst
Olsson, A. **and** G. Sandberg (2002). "Latin hypercube sampling for stochastic finite element .analysis". **in***Journal of Engineering Mechanics*: 128.1, **pages** 121–125
OpenAI (2025). *ChatGPT: Conversation with AI*. Generated in response to a user's query. .Available at `https://chat.openai.com`
Ottosen, N. **and** H. Petersson (1992). *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice- .Hall
Padgett, J., B. Nielson **and** R. DesRoches (2008). "Selection of optimal intensity measures in probabilistic seismic demand models of highway bridge portfolios". **in***Earthquake .Engineering and Structural Dynamics*: 37, **pages** 711–725
.Park, R. **and** T. Paulay (1991). *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons
Park, Y.-J. **and** A. H.-S. Ang (1985). "Mechanistic seismic damage model for reinforced .concrete". **in***Journal of structural engineering*: 111.4, **pages** 722–739
PEER (2014). *Ground Motion Database*. Last viewed November 2014. Pacific Earthquake .Engineering Research Center
Petersson, P. (**december** 1981). *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and similar Materials*. techreport TVBM 1006. Lund, Sweden: Lund Institute .of Technology
Pilkey, W. **and** W. Wunderlich (1994). *Mechanics of Structures, Variational and Computa- .tional Methods*. CRC Press
Pitarka, A. **andothers** (1998). "Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan, earthquake". **in***Bulletin of the .Seismological Society of America*: 88.2, **pages** 428–440
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT .Press

ترجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Porter, K. (2003). “An overview of PEER’s performance-based earthquake engineering methodology”. **in***Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9)*: San Francisco, CA.

Porter, K., R. Kennedy **and** R. Bachman (2007). “Creating Fragility Functions for Performance-Based Earthquake Engineering”. **in***Earthquake Spectra*: 23, **pages** 471–489.

Portland Cement Association (1947). *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section*. Portland cement association.

– (1954). *Design of Barrel Shell Roofs*. techreport. Portland Cement Association.

Powell, G. H. (**december** 2008). “Structural Analysis: Are We Relying Too Much on Computers. Part 2: A Solution”. **in***STRUCTURE Magazine*: Structural Forum article.

Priestley, M. B. (1965). “Evolutionary spectra and non-stationary processes”. **in***Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*: **pages** 204–237.

Ragueneau, F. **andothers** (2006). “Anisotropic damage for concrete within multifibre beam finite element theory”. **in***First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*.

Ramamoorthy, S., P. Gardoni **and** J. Bracci (2006). “Probabilistic Demand Models and Fragility Curves for Reinforced Concrete Frames”. **in***Journal of Structural Engineering*: 132, **pages** 1563–1572.

Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin **and** Company.

Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.

Reich, R. (**may** 1993). “On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams”. phdthesis. University of Colorado, Boulder.

Rezaeian, S. **and** A. Der Kiureghian (2008). “A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities”. **in***Earthquake Engineering & Structural Dynamics*: 37.13, **pages** 1565–1584.

– (2010). “Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics”. **in***Earthquake Engineering & Structural Dynamics*: 39.10, **pages** 1155–1180.

Rezaeian, S. **and** X. Sun (2014). “Stochastic ground motion simulation”. **in***Encyclopedia of Earthquake Engineering*: **byeditor**M. Beer **andothers**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, **pages** 1–15.

Richart, F. E., A. Brandtzæg **and** R. L. Brown (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. techreport. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering...

Saenz, L. P. (1964). “discussion of” Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete” by Desayi and Krishnan”. **in***Journal of the American Concrete Institute*: 61, **pages** 1229–1235.

Saltelli, A. (2002). “Making Best Use of Model Evaluations to Compute Sensitivity Indices”. **in***Computer Physics Communications*: 145.2, **pages** 280–297.

Saouma, V. **and** M. Sivaselvan (2014). *Hybrid simulation: Theory, implementation and applications*. CRC Press.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Saouma, V. E. **and** M. Hariri-Ardebili (2021). *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*. Springer-Nature.

Saouma, V. E., D. Kang **and** G. Haussmann (2012). "A computational finite-element program for hybrid simulation". **in***Earthquake Engineering & Structural Dynamics*: 41.3, **pages** 375–389.

Saouma, V. E. **andothers (august** 1991). "Effect of aggregate and specimen size on fracture properties of dam concrete". **in***ASCE, Journal of Materials in Civil Engineering*: 3.3, **pages** 204–218.

Saouma, V. E. **andothers** (2013). "Real-time hybrid simulation of a nonductile reinforced concrete frame". **in***Journal of Structural Engineering*: 140.2.

Schey, H. (1973). *Div Grad Curl and all That; An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton.

Schodek, D. **and** M. Bechthold (2014). *Structures*. Pearson.

Schrama, W. (2021). "A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames". **in***TU Delft, Civil Engineering*: Bachelor Thesis.

Schueller, W. (1996). *The design of Building Structures*. Prentice Hall.

Scott, B., R. Park **and** M. Priestley (1982). "Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rages". **in***ACI Journal*: 79.1, **pages** 13–27.

SEAOC (1995). *Performance-based seismic engineerin, SEAOC Vision 2000 Committee*. techreport. Sacramento, CA: Structural Engineers Association of California.

Segura, C. (2011). "Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code". mathesis. University of Colorado, Boulder.

Shinozuka, M. **and** Y Sata (1967). "Simulation of nonstationary random process". **in***Journal of the Engineering Mechanics Division*: 93.1, **pages** 11–40.

Slate, F. **and** S. Olsefski (1963). "X-Rays for Study of Internal Structures and Microcracking of Concrete". **in***Journal of the American Concrete Institute*: 60, **pages** 575–587.

Smars, P. (2000). "Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes". phdthesis. Katholieke Universiteit Leuven.

– (2022). Personal Communication.

Sobol', I. M. (2001). "Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates". **in***Mathematics and Computers in Simulation*: 55.1–3, **pages** 271–280.

Sohier, H., H. Piet-Lahanier **and** J.-L. Farges (2015). "Analysis and optimization of an air-launch-to-orbit separation". **in***Acta Astronautica*: 108, "18–29."

Sohier, H., J.-L. Farges **and** H. Piet-Lahanier (2014). "Improved of the Representativity of the Morris Method for Air-Launch-to-Orbit Separation". **in***Preprints of the 19th World Congress*.

Sokolnikoff, I. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, NY.: McGraw-Hill.

Somerville, P. **andothers** (1997). "Modification of empirical strong ground motion attenuation relations to include the amplitude and duration effects of rupture directivity". **in***Seismological Research Letters*: 68.1, **pages** 199–222.

CC BY-NC-SA 4.0 2026 © الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Sonavane, T. (2014). “Analysis of Arches”. mathesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.

Southwell, R. V. (1935). “Stress-calculation in frameworks by the method of” systematic relaxation of constraints”—I and II”. **in***Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*: 151.872, **pages** 56–95.

Spacone, E., V. Ciampi **and** F. Filippou (**august** 1992). *A BEAM ELEMENT FOR SEISMIC DAMAGE ANALYSIS*. techreport UCB/EERC-92/07. Earthquake Engineering Research Center College of Engineering, University of California, Berkeley.

Stewart, J. (2009). *Verification Methods and NRC Regulations: A Brief Overview*. techreport. (Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).

Suselo, A. A. (2021). “Simulated Behavior of Rectangular Reinforced Concrete Columns under Seismic Loading”. phdthesis. The University of Texas at San Antonio.

Taborda, R. **and** D. Roten (2014). “Physics-based ground-motion simulation”. **in***Encyclopedia of Earthquake Engineering*: **byeditor**M. Beer **andothers**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, **pages** 1–33.

Takeda, T., M. A. Sozen **and** N. N. Nielsen (1970). “Reinforced concrete response to simulated earthquakes”. **in***Journal of the structural division*: 96.12, **pages** 2557–2573.

Taucer, F, E. Spacone **and** F. Filippou (1991a). “A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center”. **in***College of Engineering, University of California*.

1991b). *A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center*. techreport. College of Engineering, University of California.) –

Thacker, B. **andothers** (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. techreport LA-14167. Los Alamos National Laboratory.

Thandavamoothy, T. (2011). *Structural Analysis*. First Edition. YMCA Library Building, New Delhi, India: OXFORD University Press, **pages** 1016–1088.

Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger **andothers** (1959). *Theory of plates and shells*. **volume** 2. McGraw-hill New York.

USBR-manual (2011). *Dam safety risk analysis, Best practices training manual, Version 2.2*. techreport. Denver, Colorado: U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation in coorporation with the U.S. Army Corps of Engineers.

USGS (2003). *PSHA Interactive Deaggregation Tool, U.S. Geological Survey*.

Vamvatsikos, D. **and** C. Cornell (2002). “Incremental dynamic analysis”. **in***Earthquake Engineering and Structural Dynamics*: 31, **pages** 491–514.

Applied incremental dynamic analysis”. **in***Earthquake Spectra*: 20, **pages** 523–553“ .(2004) –

Červenka, J. (1994). “Discrete crack modeling in concrete structures”. phdthesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.

Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.

Vlasov, V. (1961). “Thin walled elastic beams (2nd edn) National Science Foundation”. **in***Washington, DC*.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Voldoire, F. **and** Y. Bamberger (2008). *Mécanique des structures*. Presses Ponts et Chaussées.

Wang, C.-h. **andothers** (2001). “Hysteretic models for deteriorating inelastic structures”. **in***Journal of Engineering Mechanics* 127.11, **pages** 1200–1202.

Wang, G. **andothers** (2016). “A general definition of integrated strong motion duration and its effect on seismic demands of concrete gravity dams”. **in***Engineering Structures* 125, **pages** 481–493.

Wang, W., C. Gu **and** T. Bao (2013). “Safety Monitoring Index of High Concrete Gravity Dam Based on Failure Mechanism of Instability”. **in***Mathematical Problems in Engineering* 2013, **pages** 1–14.

Wen, Y.-K. (1976). “Method for random vibration of hysteretic systems”. **in***Journal of the engineering mechanics division* 102.2, **pages** 249–263.

Westergaard, H. (1933). “Water Pressures on Dams During Earthquakes”. **in***Transactions ASCE* 59.8, **pages** 418–433.

White, R., P. Gergely **and** R. Sexmith (1976). *Structural Engineering*. Out of Print. John Wiley & Sons.

Whitehead, R. (2020). “Sarinen’s Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction”. **in***Constructing Building Enclosures*: Routledge, **pages** 105–123.

Whitman, F. **andothers** (1988). “Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens”. **in***Materials and Structures* 21, **pages** 21–32.

Whitney, C. **andothers** (1952). *Manuals of Engineering Practice-31: Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. techreport. New York: American Society of Civil Engineering.

Whittaker03, A., R. Hamburger **and** A. Mahoney (2003). “Performance-based engineering of buildings for extreme events”. **in***Proc., Steel Building Symp. Blast and Progressive Collapse Resistance*: **pages** 55–66.

Williams, M. S., I. Villemure **and** R. G. Sexsmith (1997). “Evaluation of seismic damage indices for concrete elements loaded in combined shear and flexure”. **in***Structural Journal* 94.3, **pages** 315–322.

Yamamoto, Y. (2011). “Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets”. phdthesis. Palo-Alto, CA: Stanford University, Stanford.

Yamamoto, Y. **and** J. Baker (2013). “Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets”. **in***Bulletin of the Seismological Society of America* 103.6, **pages** 3044–3056.

Yassin, M. H. M. (1994). “Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads”. phdthesis. University of California.

Youngs, R. **andothers** (1997). “Strong ground motion attenuation relationships for subduction zone earthquakes”. **in***Seismological Research Letters* 68.1, **pages** 58–73.

Zareian, F. **and** H. Krawinkler (2009). *Simplified performance based earthquake engineering, Report No. 169*. techreport. Stanford University.

تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.

Zareian, F. **andothers** (2010). "Basic concepts and performance measures in prediction of collapse of buildings under earthquake ground motions". **in***The Structural Design of Tall and Special Buildings*: 19, **pages** 167–181.
Zeris, C. **and** S. Mahin (1988). "Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uni-axial Excitation." **in***Journal of Structural Engineering, ASCE*: 114(ST 4), **pages** 804–820.

الكتب الأربعة في التحليل الإنشائي © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
تُرجم من النسخة الإنجليزية الأصلية بمساعدة Codex من OpenAI؛
وقد تتضمن الترجمة أخطاء.